

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 74

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2004

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 26 листопада 2004 року, протокол № 4.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 74 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2004. – 142 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,
м. Київ, 03037,
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2004

УДК 539.376

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Рутковський В.А., канд. техн. наук

ЕФЕКТИВНІСТЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОВЗУЧОСТІ

Вступ. Під впливом високих температур довготривала міцність багатьох відповідальних елементів машинобудівних конструкцій, зокрема лопаток газових турбін і їх з'єднань, роторів, елементів корпусів турбін та ін., здебільшого визначається розвитком деформацій повзучості і супутнім накопиченням пошкодженості матеріала. Зазначені об'єкти являють собою просторові тіла складної форми, визначення ресурса яких під впливом довільно розподілених у просторі навантажень потребує розв'язання просторових задач повзучості. Розв'язання просторових задач повзучості з урахуванням пошкодженості матеріала призводить до значних труднощів, які обумовлені як складністю побудови відповідних розв'язувальних рівнянь і алгоритмів так і обсягом обчислень. Розв'язання задач зазначеного класу до теперішнього часу не знайшло широкого відображення в наукових публікаціях і не реалізовано в ліцензійних програмних комплексах.

Метою даної роботи є аналіз обсягу обчислювальних витрат і оцінка ефективності розробленого алгоритма розв'язання просторових задач повзучості із використанням напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ) на основі розв'язання тестових прикладів і практичних задач енергетичного машинобудування.

Фізичні співвідношення. Для опису нелінійного деформування матеріалу в умовах повзучості використовуються залежності між швидкостями інтенсивності деформацій повзучості $d\varepsilon_{ic}/dt$ та пошкодженості $d\omega/dt$ і параметрами напружено-деформованого стану

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ic}/dt = f_1(\varepsilon_{ic}, \sigma_i, \omega) \\ d\omega/dt = f_2(\varepsilon_{ic}, \sigma_e, \omega) \end{cases}, \quad (1)$$

де t – час; $0 \leq \omega \leq 1$ – скалярний параметр пошкодженості матеріалу Качанова–Работнова [1]; σ_i – інтенсивність нормальних напружень; σ_e –

еквівалентне напруження, обчислене за одним із відомих критеріїв міцності.

Алгоритм розв'язання задачі повзучості. Чисельне розв'язання задачі повзучості на основі метода скінченних елементів (МСЕ) передбачає покрокове подання процесу деформування за часом. На кожному кроці для визначення напружено-деформованого стану формується система нелінійних рівнянь МСЕ, розв'язання якої проводиться із застосуванням ітераційних алгоритмів. Для оптимізації обчислювальних витрат важливого значення набуває вибір схеми інтегрування рівнянь повзучості і раціонального алгоритму розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Значна кількість вищезгаданих просторових об'єктів являють собою тривимірні тіла канонічної форми – призматичні та кругові неоднорідні тіла, ефективним методом чисельного дослідження яких є НМСЕ [2].

При застосуванні НМСЕ на кожному кроці розв'язання задачі розв'язок системи рівнянь виконується за алгоритмом, що являє собою комбінацію метода блочних ітерацій і крокового інтегрування за параметром навантаження. На кожній ітерації m кроку n визначення розв'язку системи рівнянь здійснюється за формулою:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} (\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m), \quad (2)$$

де $\{u_l\}_n^m, \{u_l\}_{n+1}^m$ – коефіцієнти розкладу вектора вузлових переміщень на ітераціях n і $n+1$ відповідно; β – параметр релаксації; $[K_{ll}]$ – діагональна підматриця жорсткості системи; $\{Q_l\}^m$ – вектор вузлових навантажень; $\{R_l\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n .

Формула (2) описує ітераційний цикл, всередині якого організовано цикл за утримуваною кількістю членів ряду розкладу переміщень в ряд за системою базисних функцій φ_l ($l = 0 \dots L$) – поліномів Лагранжа та Міхліна [2]. Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є:

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta u\}_l^n \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=0}^L \{u\}_l^n \right\|, \quad (3)$$

де $\{\Delta u\}_l^n$ і $\{u\}_l^n$ – відповідно прирощення і накопичені значення амплітудних переміщень на ітерації n ; ε – наперед визначений параметр точності розв'язання системи рівнянь НМСЕ ($\varepsilon = 10^{-3} \dots 10^{-7}$).

При розв'язанні задачі повзучості на першому кроці при $t=0$ визначається розподілення напружень при пружньому деформуванні. На початку кожної ітерації n наступних кроків за часом компоненти тензора напружень σ_{ij} обчислюються за формулою:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n, \quad (4)$$

де прирощення напружень $(\Delta\sigma_{ij})_n$ визначається згідно закону Гука за величиною прирощення повних деформацій.

Дійсні значення напружень σ_{ij} , що враховують поточний рівень нелінійних деформацій, обчислюються за формулою:

$$(\overline{\sigma}_{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\sigma_{ij})_n^m + (\overline{s^{ij}})_n^m = (\sigma_o)_n^m + (\overline{s^{ij}})_n^m, \quad (5)$$

де $(\overline{s^{ij}})_n^m$ – компоненти девіатора напружень, які залежать від прирощень нелінійних деформацій повзучості:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(s^{ij}\right)_n^m - G_1 \left(\Delta\mathcal{E}_{ij}^c\right)_n^m, \quad \left(\Delta\mathcal{E}_{ij}^c\right)_n^m = \left(\xi_{ij}^c\right)_n^m \Delta t_m, \quad (6)$$

де $G_1 = E / (1 - 2\mu)$; $\left(\xi_{ij}^c\right)_n^m = \frac{3}{2} \left(\xi_i^c\right)_n^m \frac{\left(s_{ij}\right)_n^m}{\left(\sigma_i\right)_n^m}$ – компоненти тензора швидкості деформацій повзучості; $\xi_i^c = \frac{d\mathcal{E}_{ic}}{dt}$; Δt_m – величина кроку за часом.

Напруження, отримані за (4)–(6), використовуються для подальшого обчислення значення вектора вузлових реакцій. В разі виконання умови (3) ітераційний процес на кроці припиняється і, на основі наведених залежностей (1), проводиться обчислення значень прирощень деформацій повзучості $(\Delta\mathcal{E}_{ij}^c)_m$ і пошкоженості $(\Delta\omega)_m$ на кроці m і відповідних накопичених величин $(\mathcal{E}_{ij}^c)_m$ і ω_m :

$$(\mathcal{E}_{ij}^c)_m = (\mathcal{E}_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta\mathcal{E}_{ij}^c)_m = (\mathcal{E}_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t_m,$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta\omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_m \Delta t_m.$$

В кінці кожного кроку для всієї області здійснюється перевірка умови початку руйнування $\omega > \omega_{кр.}$, де $\omega_{кр.} \approx 1$ критичне значення параметру пошкодженості, що відповідає втраті матеріалом несучої здатності.

При використанні НМСЕ розв'язання як лінійних так і нелінійних задач здійснюється на основі ітераційного процесу. В зв'язку з цим необхідним є проведення дослідження збіжності розв'язку як при пружному деформуванні, так і з урахуванням нелінійної роботи матеріалу.

Дослідження збіжності і ефективності алгоритма розв'язання задач повзучості. Для дослідження характеру збіжності ітераційного процесу при розв'язанні задач повзучості розглянемо тестовий приклад про деформування тонкостінної трубки, розрахункова схема якої, побудована із використанням призматичних неоднорідних скінченних елементів, наведена на рис. 1. Деформування в умовах повзучості описується системою рівнянь

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A \frac{Sh(\sigma/c)}{(1-\omega)^{k_1}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (7)$$

де $A = 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}$, $k_1 = 2.36$, $c = 20.5 \text{ МПа}$, $B = 0.58 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3.17} \text{ год}^{-1}$, $k_2 = 3.17$ – константи матеріалу при $T = 850^\circ\text{C}$ [3].

Розв'язання задачі проведено при постійному кроці за часом Δt_0 . Виконані дослідження збіжності величин параметра пошкодженості і деформацій повзучості в залежності від точності розв'язання системи рівнянь НМСЕ ε свідчать, що похибка визначення ε_{ic} $\delta_{\varepsilon_{ic}}$ в межах 1% досягається при $\varepsilon = 10^{-4}$, δ_{ω} – при $\varepsilon = 10^{-5}$ (рис. 1). При $\varepsilon = 10^{-5}$ похибка визначення часу до початку руйнування становить 2,1%.

Скінченноелементне розв'язання задач повзучості з урахуванням умов збіжності вимагає виконання великої кількості кроків (порядку тисячі), а дотримання умови збіжності отриманого розв'язку за кількістю невідомих для просторових задач вимагають розв'язання систем рівнянь методом скінченних елементів великої розмірності (до ста тисяч невідомих). Внаслідок цього сумарні обчислювальні витрати набувають обсягу, який, навіть із використанням сучасної обчислювальної техніки, не є прийнятним. В зв'язку з цим для мінімізації обчислювальних витрат важливого значення набуває розробка раціонального алгоритму розв'язання систем нелінійних рівнянь.

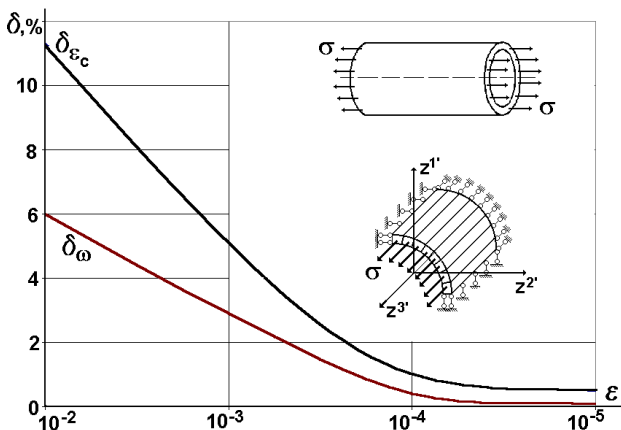


Рис. 1

При використанні НМСЕ на кожній ітерації розв'язання нелінійної задачі необхідним є проведення внутрішнього ітераційного процесу з розв'язання лінійної задачі. З метою зменшення ітераційних витрат розв'язання нелінійної задачі при реалізації алгоритму (2) було застосовано суміщення на кожному з кроків за часом ітераційних процесів розв'язання лінійної задачі НМСЕ і нелінійної задачі повзучості. Порівняння ітераційних витрат при розв'язанні зазначеного тестового прикладу засвідчило, що суміщення ітераційних процесів дозволяє скоротити обчислювальні витрати НМСЕ майже на порядок.

Необхідно відзначити, що наведений приклад є найпростішою одновимірною задачею, яка потребує мінімальної кількості ітерацій НМСЕ для розв'язання лінійної задачі. Так, точність визначення переміщення u_z в межах 1% при розв'язання лінійної задачі досягається вже при $\varepsilon = 10^{-2}$. Підвищення складності задачі (наявність неоднорідностей у вигляді вирізів, суттєва неоднорідність напружено-деформованого стану за напрямком z^3) потребує значно більшої точності і, відповідно, більшої кількості ітерацій для отримання задовільних величин похибок розв'язку лінійної задачі. Ефективність запропонованого суміщення ітераційних процесів для розв'язання лінійної і нелінійної задачі в зазначених випадках суттєво підвищується.

Зменшення обчислювальних витрат при розв'язанні задачі повзучості може бути досягнуто також за рахунок розв'язання задачі із змінним кроком за часом: на другій стадії встановленої повзучості крок за часом може бути збільшений в декілька разів, при цьому загальна кількість

ітерацій не зростатиме внаслідок менших, порівняно із першою і третьою стадіями повзучості, швидкостями повзучості. Максимально припустима величина кроку за часом визначається з умови збіжності отримуваних результатів при послідовному зменшенні (збільшенні) кроку за часом і залежить від властивостей повзучості матеріалу. Так, для даного прикладу при збільшенні кроку за часом від Δt_0 до $2\Delta t_0$ похибки визначення величин деформацій повзучості, пошкодженості і часу до руйнування залишились в межах 5%, а ітераційні витрати зменшились майже вдвічі.

Дослідження деформування лопатки енергетичної установки. Із застосуванням розробленого алгоритму розв'язання задач повзучості на основі НМСЕ було проведено визначення ресурса до початку руйнування лопатки енергетичної установки.

Розглядувана лопатка являє собою просторове тіло складної форми, характерні розміри якого по висоті значно перевищують характерні розміри поперечного перерізу. Площа поперечного перерізу змінна по висоті. Лопатка закручена відносно вертикальної вісі і знаходиться під впливом відцентрового навантаження в неоднорідному, як по висоті, так і в поперечних перерізах полі температур. Необхідно відзначити, що абсолютні величини температур є значно більшими, ніж їх змінення в об'ємі фрагмента лопатки, в зв'язку з чим впливом нерівномірності розподілення температур на напружено-деформований стан можна знехтувати. Але в розглядуваному діапазоні температур суттєвим є вплив температури на фізико-механічні характеристики матеріалу в умовах повзучості, що враховується в подальшому при проведенні моделювання деформування в умовах повзучості.

Результати дослідження просторового напружено-деформованого стану лопатки, виконані в припущенні пружного деформування на основі тривимірного метода скінченних елементів (МСЕ) засвідчили, що напружено-деформований стан лопатки є суттєво неоднорідним як по висоті так і в межах поперечних перерізів. На основі цих результатів було обрано небезпечний поперечний переріз лопатки R^* , комбінація усередненого напруження σ_0 і усередненої температури в якому T_0 призводить до найбільш інтенсивного накопичення деформацій повзучості.

Розв'язання задачі повзучості для лопатки в цілому пов'язано із значними обчислювальними витратами. В зв'язку з цим, для проведення чисельного моделювання деформування в умовах повзучості, було розглянуто фрагмент пера лопатки в околі небезпечного перерізу R^* (рис. 2). Фрагмент охоплює частину пера лопатки $0.94R_0 < R < 1.06R_0$, в межах якої спостерігається найбільш нерівномірне розподілення напружень.

Оскільки процес повзучості супроводжується значним перерозподілом напружень, відповідно, саме в межах цього фрагмента перерозподіл напружень є найбільш вірогідним. Моделювання впливу верхньої частини лопатки здійснюється шляхом прикладення до перерізу $R=1.06R_0$ нерівномірно розподіленого навантаження q , що відповідає діючим в цьому перерізі напруженням. Крім того, фрагмент лопатки завантажений розподіленим за об'ємом відцентровим навантаженням p . Фрагмент лопатки, що розглядається, може бути віднесений до призматичних тіл, ефективним засобом моделювання напружено-деформованого стану яких є напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ) [2]. Відповідна дискретна модель НМСЕ, утворена із використанням неоднорідних призматичних скінченних елементів, наведена на рис. 2.

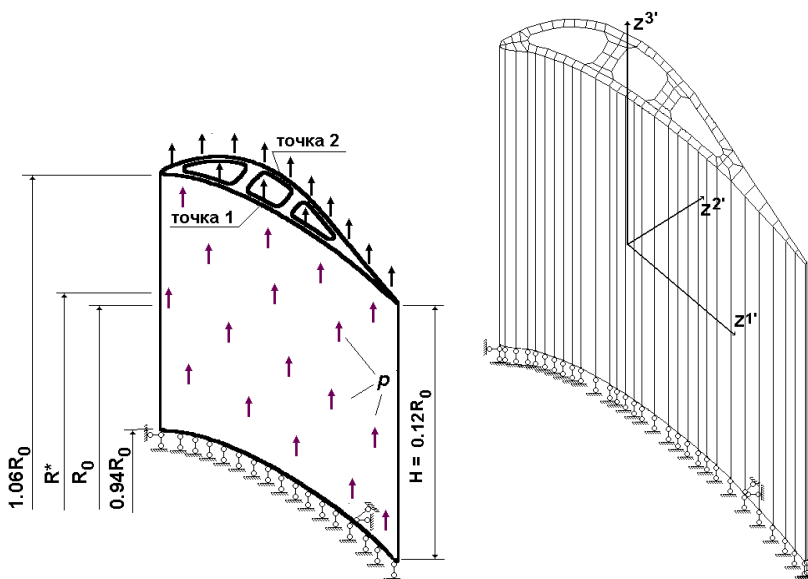


Рис. 2

Прийнята розрахункова схема і дискретна модель НМСЕ передбачає відсутність закручування відносно вісі z^3 і незмінність площі поперечного перерізу лопатки, що є характерним для кола об'єктів, розрахунок яких традиційно здійснюється на основі НМСЕ. Для урахування впливу закручування фрагмента лопатки на напружено-деформований стан був застосований підхід, що ґрунтується на зміні

вихідної щільності матеріала по площині поперечного перерізу. В центральній частині перерізу (в околі точок 1 та 2), для якої закручування призводить до збільшення напружень, вихідна щільність була збільшена, для периферійних частин перерізу – зменшена. При цьому усереднена по перерізу величина щільності залишилась незмінною.

Для моделювання змінної геометрії поперечних перерізів фрагмента пера лопатки вздовж вісі z^3 була розроблена методика, що ґрунтується на корегуванні жорсткісних параметрів призматичного скінченного елемента в точках інтегрування. Зазначений підхід дозволяє моделювати змінення геометрії об'єкта лише при повздовжньому розтягу, що відповідає умовам навантаження лопатки. Для обґрунтування вірогідності розробленої методики підходу було розглянуто тестовий приклад про розтяг в умовах плоскої деформації в площині $z^1 - z^3$ стержня із змінною за лінійним законом товщиною, розрахунок якого був проведений із використанням МСЕ і НМСЕ (рис. 3). Відмінність отриманих результатів лежить в межах 1% (рис. 4).

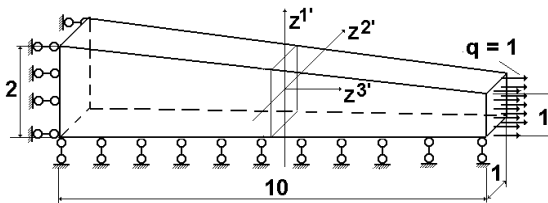


Рис. 3

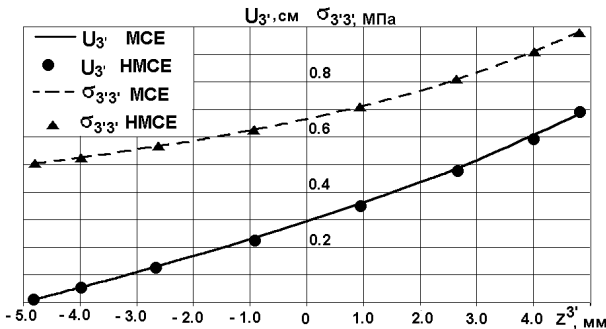


Рис. 4

При побудові дискретної моделі НМСЕ було проведено дослідження збіжності отримуваних результатів – розподілення напружень по висоті фрагмента лопатки в залежності від кількості невідомих дискретної скінченоелементної моделі в поперечному перерізі і за напрямком z^3 .

Обґрунтування вірогідності розробленого підходу до моделювання змінної геометрії для розглядуваного фрагмента лопатки було проведено шляхом співставлення розподілення напружень, отриманих вздовж радіуса фрагмента (штрихова лінія) в найбільш навантажених точках перерізу в порівнянні з результатами, отриманими із використанням тривимірного МСЕ (рис. 5, 6).

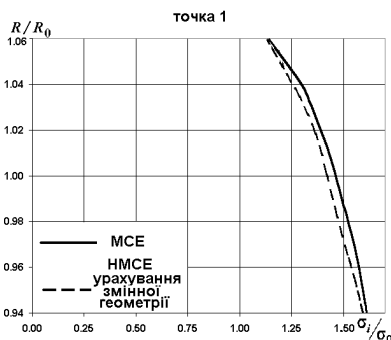


Рис. 5

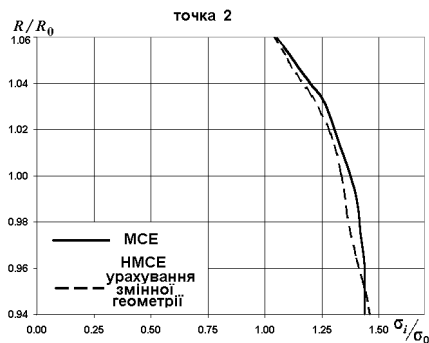


Рис.6

Опис деформування матеріалу лопатки в умовах повзучості здійснюється рівняннями вигляду

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q}. \quad (8)$$

де $B=B(T)$, $D=D(T)$, $m=m(T)$, $n=n(T)$, $r=r(T)$, $q=q(\sigma, T)$ – константи матеріалу, T – температура.

Зважаючи на характерне для лопаток співвідношення розмірів поперечного перерізу і довжини для визначення ресурса в розрахунковій практиці до теперішнього часу застосовуються одновимірні моделі. Згідно до такої методики на основі пружнього розрахунку визначається небезпечний переріз комбінація величин напружень і температур є найбільш несприятливою з точки зору накопичення деформацій повзучості. Використовуючи вищезгадані результати дослідження напружено-деформованого стану лопатки при пружньому деформуванні на основі метода скінчених елементів шляхом безпосереднього

інтегрування рівнянь (8) до досягнення критичного значення пошкоженості при $\sigma = \sigma_0$ при значеннях констант $B=B(T_0)$, $D=D(T_0)$, $m=m(T_0)$, $n=n(T_0)$, $r=r(T_0)$, $q=q(\sigma_0, T_0)$ була визначена величина ресурса до початку руйнування t^* .

Проведення розв'язання просторової задачі повзучості з урахуванням нерівномірного розподілення температур в об'ємі фрагмента лопатки дозволило виявити значне перерозподілення напружень в процесі деформування, що проілюстровано відповідними розподіленнями напружень по висоті фрагмента лопатки в точці 1 в різні моменти часу (рис. 6). Відповідні розподілення по висоті фрагмента параметра пошкоженості наведені на рис. 7.

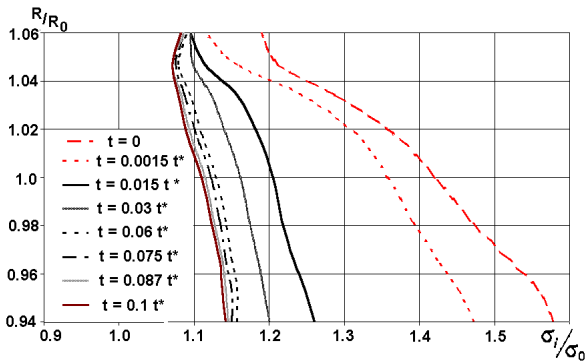


Рис. 7

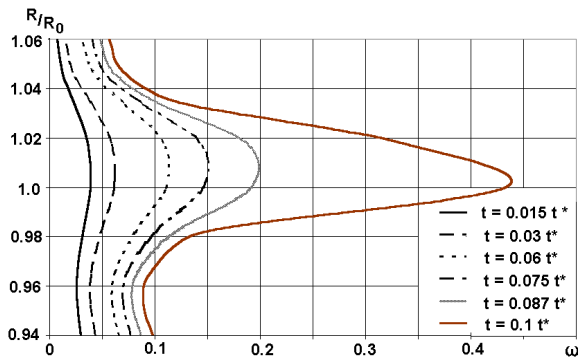


Рис. 8

Як видно, найбільші значення параметра пошкоженості, і відповідно утворення початкової зони руйнування, спостерігаються в точці 1 на відстані $1.005R_0$ від вісі обертання. Але величина ресурса, отримана із урахуванням просторового напружено-деформованого стану менша за величину ресурса, отриману на стержневій моделі майже на порядок. Таким чином для визначення ресурса необхідним є проведення розв'язання просторової задачі повзучості.

В розглянутій задачі, де йдеться про визначення величини ресурса порядку декількох сотен тисяч годин, для розв'язання просторової задачі повзучості на основі кроково-ітераційного алгоритма за часом із дотриманням умов збіжності отримуваного розв'язку за величиною кроку за часом необхідно виконати біля тисячі кроків. Зважаючи на значну неоднорідність напружено-деформованого стану фрагмента лопатки, лише розв'язання лінійної задачі на кожному кроці потребує біля 30 ітерацій. Застосування суміщення ітераційних процесів розв'язання лінійної і нелінійної задачі в даному випадку дозволило зменшити загальні обчислювальні витрати майже в 40 разів.

Таким чином, запропонований алгоритм розв'язання задач повзучості на основі НМСЕ дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати при розв'язанні просторових задач. Ефективність алгоритма підвищується для неоднорідних просторових тіл, в яких реалізований тривимірний напружено-деформований стан.

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. –732 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.:НИИСМ, 1993.-376 с.
3. *Закономерности ползучести и длительной прочности.* Справочник. / Под ред. Шестерикова С.А. – М.: Машиностроение,1983. –101 с.

Матеріал надійшов до редакції 06.04.04.

УДК 539.3

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук
Погорелова О.С., канд. фіз.-мат. наук
Постнікова Т.Г., канд. техн. наук
Гончаренко С.М., інженер

АНАЛІЗ УСТАЛЕНИХ ВІБРОУДАРНИХ ПРОЦЕСІВ В ПРУЖНИХ СИСТЕМАХ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ УДАРУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ СИЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

У даній статті продовжуються дослідження, присвячені вивченню віброударних процесів, які були розпочаті в роботах [3-6]. Приводяться результати досліджень усталених віброударних режимів коливань в пружних системах при наявності внутрішнього ударного контакту двох тіл під дією зовнішнього періодичного навантаження. Але на відміну від попередніх робіт, де моделювання удару здійснювалось за допомогою відповідних граничних умов з використанням коефіцієнту відновлення, в цій роботі пропонується інший, більш загальний, підхід, який базується на застосуванні силових характеристик контактної взаємодії. Попередній підхід з використанням граничних умов вимагає чіткої фіксації моменту удару і відповідної корекції початкової фази періодичного навантаження. При наявності у пружній системі більш ніж однієї контактуючої пари вказаний підхід приводить до використання багатоточечних крайових задач, що в певній мірі ускладнює відповідні побудови. Роздільний опис міжударних рухів і процесу удару може також стати проблематичним при використанні більш загальних концепцій теорії співударів твердих тіл. Тому доцільно виконувати побудову та аналіз єдиної форми запису рівнянь руху елементів віброударних систем на всій часовій осі. Ці рівняння повинні описувати повну сукупність реалізованих рухів. Це досягається за допомогою введення нелінійних залежностей, що відображають процес силової взаємодії тіл, які співударяються, чи їх елементів. Зазначені залежності будуються на основі силових характеристик контактної взаємодії $F(x)$ чи $F(x, \dot{x})$, де x - відстань між тілами, що контактують.

Такий підхід суттєво спрощує побудови, що пов'язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем. Це твердження повною мірою відноситься і до аналізу стійкості усталених періодичних віброударних режимів коливань. При моделюванні удару за допомогою відповідних граничних умов з використанням коефіцієнту відновлення

необхідно формулювати спеціальне означення стійкості. В той же час при застосуванні нелінійних силових характеристик контактної взаємодії аналіз стійкості віброударних рухів може проводитися в рамках класичної теорії Флоке.

Для розв'язання нелінійних задач, якими є задачі про віброударний рух пружних систем, використовується чисельний метод продовження розв'язку за параметром. Підхід, що розглядається, демонструється на прикладі системи з двома ступенями свободи, хоча розроблений метод та відповідне програмне забезпечення розраховані на багатопараметричні системи.

1. Постановка задачі

У статті наведені результати розв'язання задачі віброударного руху пружної системи, яка схематично зображена на рисунку 1.

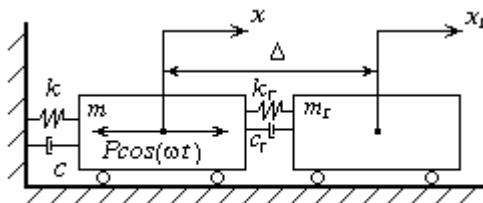


Рис. 1

Перше тіло маси m за допомогою пружини жорсткості k та демпфера з коефіцієнтом згасання c прикріплено до опори. Друге тіло, маси m_r , пружиною жорсткості k_r та демпфером з коефіцієнтом згасання c_r кріпиться до першого тіла. На перше тіло діє гармонійне навантаження $P \cos(\omega t)$. Обидва тіла без тертя ковзають по горизонтальній поверхні. Переміщення першого тіла визначається координатою $x(t)$, а другого – $x_r(t)$. За початок відліку прийняте положення, при якому всі пружини недеформовані, при цьому вважається, що відстань між центрами мас тіл дорівнює Δ . Передбачається, що в процесі руху структура системи може змінюватись внаслідок еволюції динамічних станів за рахунок виникнення ударних контактів елементів системи між собою.

Як вже було сказано, при складанні рівнянь віброударного руху складної пружної нелінійної системи змінної структури дуже важливу роль грає спосіб моделювання удару. Для цього використовується нелінійна сила, яка описує контактну взаємодію тіл, що співударяються. Величина такої сили залежить від відстані між тілами.

Рівняння руху системи, що розглядається, записується у вигляді:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - c_r(\dot{x}_r - \dot{x}) - k_r(x_r - x - \Delta) + F(x_r - x, \dot{x}_r - \dot{x}) &= P \cos \omega t, \\ m\ddot{x}_r + c_r(\dot{x}_r - \dot{x}) + k_r(x_r - x - \Delta) - F(x_r - x, \dot{x}_r - \dot{x}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $F(u, \dot{u})$ - силова характеристика контактної взаємодії, яка взагалі кажучи, залежить від відносного переміщення $u(t) = x_r(t) - x(t)$ і відносної швидкості $\dot{u}(t)$. Введемо $P = \lambda P_0$, де λ - параметр інтенсивності зовнішнього впливу.

При наближеному дослідженні віброударних систем за допомогою характеристик пружної взаємодії найчастіше доцільно враховувати специфіку режиму, реалізованого системою. Тому практичні способи обчислення викладаються при розрахунку конкретних систем. Важливо те, що за допомогою різних нелінійних залежностей можуть бути описані всі основні види силової взаємодії тіл, що співударяються чи їх контактуючих елементів.

У даній роботі ударна взаємодія моделюється за допомогою прикладання до контактуючих тіл нелінійної пружної сили F , яка залежить від відносного переміщення $u(t) = x_r(t) - x(t)$:

$$F(x_r - x) = C f(x_r - x), \quad (2)$$

де C - коефіцієнт відповідності. Коли тіла не знаходяться в ударному контакті, тобто достатньо віддалені один від іншого і зазор між ними більше деякої величини, яку позначимо d , сила не діє. По мірі їх зближення, між тілами виникає контактна сила F , яка швидко зростає від нуля до деякої постійної величини.

Краще за все функцію f брати як δ -функцію, але з такою функцією неможливо чисельно інтегрувати рівняння (1), тому запропоновано два варіанта моделюючої функції, які так чи інакше наближають нас до δ -функції.

У першому варіанті пропонується функція f , що описується формулами:

$$f(x_r - x) = \begin{cases} 0, & d \leq x_r - x, \\ R - \sqrt{R^2 - [d - (x_r - x)]^2}, & d - \delta \leq x_r - x \leq d, \\ k_3[d - (x_r - x)] - b, & 0 \leq x_r - x \leq d - \delta, \\ k_3d - b, & x_r - x \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Схематично графік такої функції має вигляд, представлений на рис. 2.

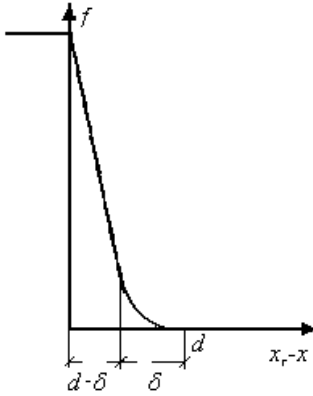


Рис. 2

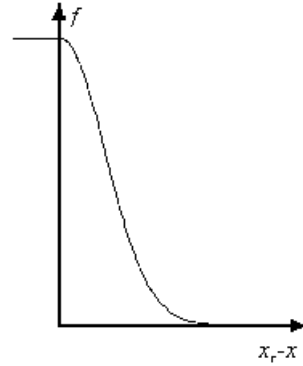


Рис. 3

Тут d – зазор між тілами, при якому виникає відштовхуюча контактна сила взаємодії. При подальшому зменшенні відстані $(x_r - x)$ відштовхуюча сила зростає спочатку повільно, по колу радіусу R , поки зазор $(x_r - x)$ не стане менше $(d - \delta)$, а потім швидко по закону прямої до повного зближення тіл, коли сила вже зростати не може – тіла відштовхуються, відбувся удар. Слід відмітити, що при вдалому моделюванні удару ситуація $(x_r - x) < 0$ неможлива, і та частина графіку моделюючої функції, яка знаходиться у від'ємній частині осі абсцис, не реалізується. Параметри функції $f(x_r - x)$ – радіус кола R та кут нахилу прямої k_3 , слід підібрати таким чином, щоб удар моделювався найкраще. З таких самих міркувань підбирається коефіцієнт відповідності C , за допомогою якого функція $f(x_r - x)$, яка має лінійну розмірність, переводиться у силу F . Параметри b та δ визначаються співвідношеннями:

$$b = R \left(\sqrt{1 + k_3^2} - 1 \right), \quad \delta = \frac{k_3 R}{\sqrt{1 + k_3^2}}. \quad (4)$$

Виходячи з того, що у наших побудовах $d > \delta$, на d накладається таке обмеження:

$$d > \frac{k_3 R}{\sqrt{1 + k_3^2}}. \quad (5)$$

У другому варіанті зміна моделюючої відштовхуючої сили описується експоненціальним законом. Тоді маємо

$$f(x_r - x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}, & x_r - x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x_r - x)^2}{2\sigma^2}}, & 0 < x_r - x \end{cases} \quad (6)$$

Схематично графік такої функції представлений на рис. 3. Тут також має місце зауваження, що при вдалому моделюванні удару ситуація $(x_r - x) < 0$ не реалізується. Параметри σ та C також слід підбирати таким чином, щоб удар моделювався найкраще.

2. Дослідження віброударного руху в системі двох тіл

Був зроблений аналіз усталених віброударних процесів в пружній системі (1) при моделюванні ударної взаємодії за допомогою функції (2), (3).

Система, що досліджується, має такі характеристики першого тіла: маса $m=1000$ кг, власна частота коливань $\omega_0=6.283185$ рад/с, коефіцієнт демпфірування $\xi=0.03629$. Тіло знаходиться в режимі усталених коливань під дією зовнішнього періодичного навантаження $\lambda P_0 \cos(\omega t)$, де $P_0 = 500$ н.

Приєднане до першого тіла друге має такі характеристики: маса $m=50$ кг, його парціальна частота коливань $\omega=5.646$ рад/с, коефіцієнт демпфірування $\xi=0.2$. Початкова відстань між тілами $\Delta=0.05$ м.

Параметри моделюючої нелінійної пружної сили були вибрані такими: радіус кола $R = 0.01$ м, кутовий коефіцієнт нахилу на лінійному відрізьку $k_3 = 1.0$, коефіцієнт відповідності $C=100000$ н/м. Відстань між тілами, при якій починає діяти сила контактної взаємодії $d=0.04$ м.

При застосуванні методу продовження за параметром [6] необхідно розв'язати проблему знаходження початкової точки для побудови кривих навантаження та амплітудно-частотних характеристик. Для розв'язання цієї проблеми було проведено пряме чисельне інтегрування диференціальних рівнянь при певних значеннях параметрів зовнішнього впливу $\lambda = 3.0$ та частоти зовнішнього навантаження $\omega=7.22566$ рад/с.

На рисунках 4 та 5 представлені графік залежності переміщень тіл ударної системи від часу та фазова траєкторія одноударного Т-періодичного режиму коливань, що встановлюються при заданих значеннях параметрів навантаження.

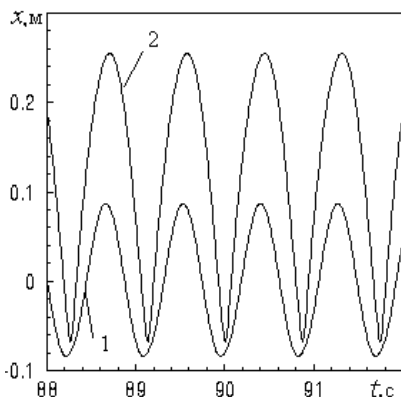


Рис. 4

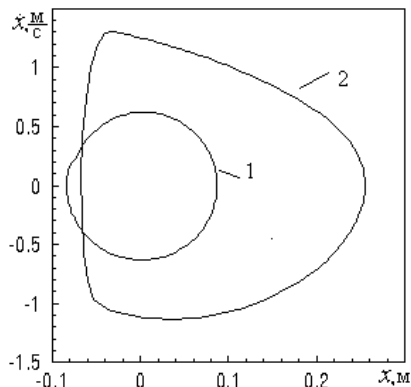


Рис. 5

На рисунках цифрою 1 позначені криві, що відносяться до першого тіла, а цифрою 2 - до другого. З графіку фазової траєкторії на рис. 5 видно, що у момент удару стрибком змінюється швидкість другого тіла, при цьому її знак стає протилежним. Тобто друге тіло змінює напрямку руху - відскакує, зіткнувшись з першим тілом. З графіку траєкторій тіл на рис. 4 видно, що у момент удару контакт між тілами не повний. Для роз'яснення цього факту проаналізуємо, як поводить себе відштовхуюча сила контактної взаємодії F . Залежність цієї сили від відносного переміщення $x_p - x$, тобто від зазору між тілами, представлена на рис. 6. Ця залежність відповідає закону (2), (3) при вибраних значеннях параметрів R, k_3, C . Графік контактної відштовхуючої сили, що дійсно виникає в системі згідно інтегруванню в залежності від часу, представлений на рис. 7.

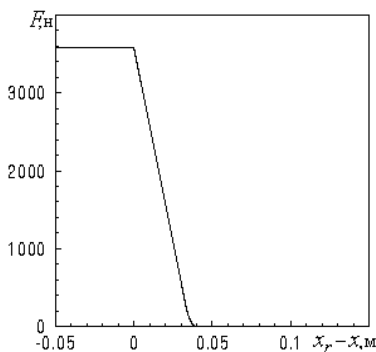


Рис. 6

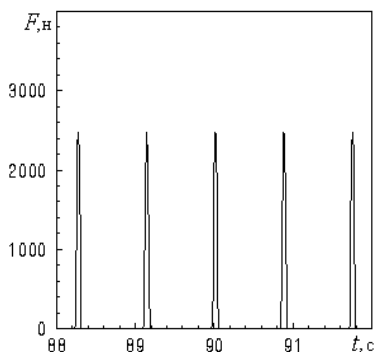


Рис. 7

З графіків на рисунках 6 та 7 видно, що при обраних значеннях параметрів R, k_3, C сила F , не досягаючи максимуму, настільки сильно відштовхує друге тіло від першого, що воно відскакує, не досягши повного контакту. Як вже відзначалося раніше, параметри R, k_3 треба підібрати такими, щоб удар моделювався щонайкраще. Наведемо для приклада результати, отримані при двох інших значеннях k_3 . Графік руху двох тіл при $k_3 = 0.2$ приведений на рис. 8. Як видно із порівняння з графіком на рис. 4 ($k_3 = 1.0$), моделювання удару значно погіршилося. При $k_3 = 5$ (див. рис. 9) якісно картина не відрізняється від приведеної на рис. 4 ($k_3 = 1.0$), однак контакт між тілами в момент удару стає ще гірше: при $t = 88.27$ с маємо

k_3	1	5
$ x_r - x , \text{м}$	0.011083	0.021192

Після виконання невеликого більш детального дослідження впливу параметрів R та k_3 на якість результату, були вибрані приведені вище значення цих параметрів.

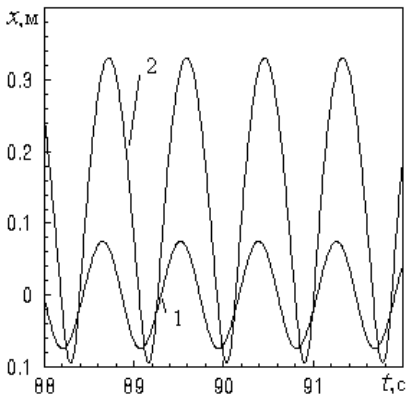


Рис. 8

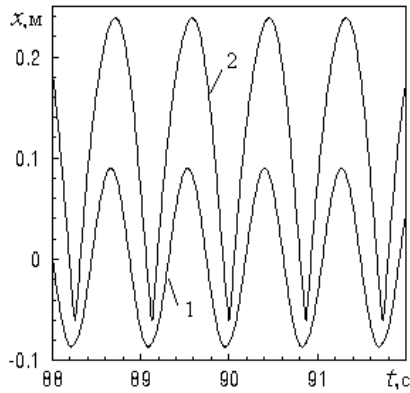


Рис. 9

Таким чином, проведені дослідження дозволили вибрати параметри моделюючої сили та отримати координати початкової точки, необхідної для побудови кривих навантаження та амплітудно-частотних залежностей

за методом продовження розв'язку за параметром. Початкова точка відповідає ustalеному режиму коливань, зображеному на рис. 4.

Далі, згідно методу продовження розв'язку за параметром, при покроковій зміні параметру λ були побудовані криві навантаження двомасової системи - взаємозалежність полуросмаху вимушених коливань динамічної системи $X_{\max} = \frac{|x_{\min}| + |x_{\max}|}{2}$ та значення коефіцієнту навантаження λ (рис. 10). Побудовані криві навантаження відповідають стійким режимам коливань і позначені на графіку безперервною лінією.

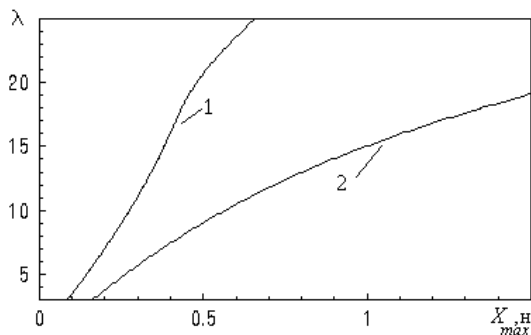


Рис. 10

При покроковій зміні параметру ω згідно методу продовження розв'язку за параметром були побудовані амплітудно-частотні характеристики коливань системи (рис. 11).

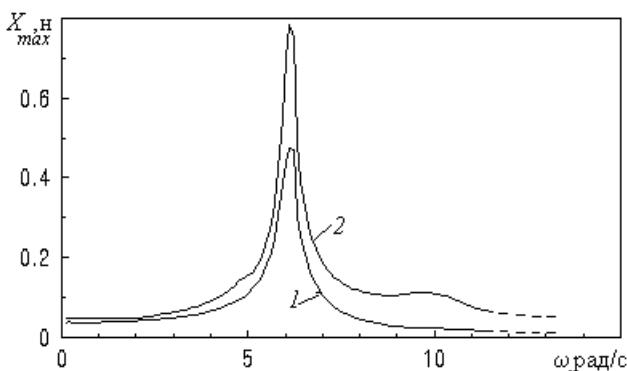


Рис. 11

При значенні частоти зовнішнього навантаження $\omega = 11.626$ рад/с даний коливальний режим втрачає стійкість (дільниці амплітудно-частотної характеристики, що відповідають нестійким режимам коливань, позначені пунктирною лінією). Щоб переконатися в цьому, проведемо пряме чисельне інтегрування при значеннях параметрів зовнішнього навантаження $\omega = 11.626$ рад/с та $\lambda = 3.0$. При цьому реалізується режим $2T$ -періодичних коливань. На рисунках 12-14 представлені реалізація $2T$ -періодичного режиму коливань, його фазова характеристика та нелінійна пружна сила, що збуджується в цьому випадку і моделює удар.

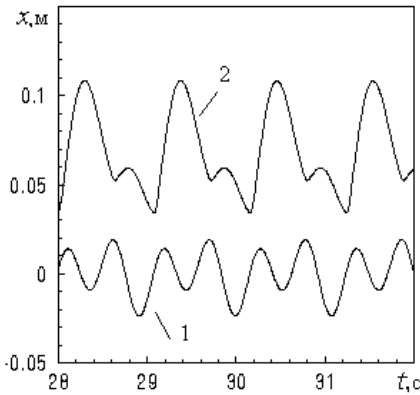


Рис. 12

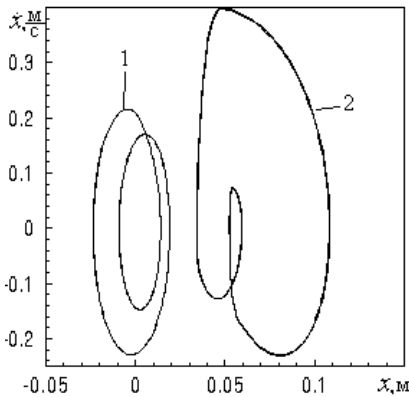


Рис. 13

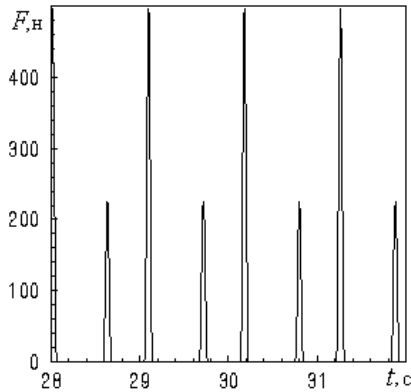


Рис. 14

Сила, моделююча удар, зміна якої описується експоненціальним законом (6), використовується авторами в подальшій роботі для дослідження віброударних коливань башти з маятниковим гасителем. Результати цього дослідження будуть описані окремо, в іншій статті.

Отже, ще раз підкреслимо, що єдина форма запису рівнянь руху віброударних систем на всій часовій осі дозволяє описати повну сукупність реалізованих рухів. Це суттєво спрощує побудови, які пов'язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем. Запропонований для цього підхід моделювання удару за допомогою нелінійної пружної сили контактної взаємодії є більш загальним і дозволяє також зручно, в рамках класичної теорії Флоке виконувати аналіз стійкості усталених періодичних віброударних режимів коливань.

Аналіз віброударного руху двомасової системи тіл з моделюванням удару за допомогою нелінійної сили, яка змінюється за певним законом (3), показав, що така сила добре моделює процес руху при відповідному підборі її параметрів.

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем. "Наука", Москва, 1978.
2. *Дукарт А.В.* Способ построения периодических режимов движения многомассовых виброударных систем и его приложение к расчету ударного гасителя колебания с демпфированием // Проблемы машиностроения и надежности машин. №3. – 1993. – С.16-22.
3. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Стійкість сталих режимів коливань віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10-18.
4. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2002.-Вип.70.- С.69-80.
5. *Постнікова Т.Г., Погорелова О.С., Борисенко В.Г.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при зовнішньому ударному контакті // Матеріали Третьої Всеукраїнської наукової конференції "Математичні проблеми технічної механіки" - Дніпродзержинськ. - 2003.- С.97.
6. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.70.

Матеріал надійшов до редакції 16.04.04.

УДК 539.3

Гоцуляк Є.А., д-р техн. наук,
 Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук,
 Лук'яненко О.О., канд. техн. наук.
 Борисенко В.Г., канд. техн. наук.

МЕТОДИКА РЕДУКУВАННЯ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧАХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КОНСТРУКЦІЙ

Розглядаються питання, які пов'язані з побудовою розрахункових моделей для чисельного визначення границь областей стійкості динамічних станів пружних систем, що обумовлені зовнішнім впливом. При цьому вважається, що співвідношення між частотами збудження та найменшими власними частотами в незбудженому русі таке, що при знаходженні незбудженого напружено-деформівного стану можливо застосовувати квазістатичне наближення та знехтувати переміщеннями в цьому стані. Рівняння динамічної стійкості пружної системи можна отримати з рівняння рівноваги для статичної задачі стійкості додаванням даламберових сил інерції, дисипативних сил, при цьому враховуються деякі складові незбудженого напружено-деформівного стану системи, які можуть залежати від часу.

Таким чином, рівняння динамічної стійкості записується у вигляді

$$\tilde{M}\ddot{\bar{v}}(t) + \tilde{C}\dot{\bar{v}}(t) + \tilde{K}\bar{v}(t) + \alpha\tilde{K}_{G_1}\bar{v}(t) + \beta f(t)\tilde{K}_{G_2}\bar{v}(t) = 0, \quad (1)$$

де \tilde{M} та \tilde{K} - інерційний та пружний оператори, \tilde{K}_{G_1} та \tilde{K}_{G_2} - складові оператора параметричних сил в рівнянні квазістатичної рівноваги, \tilde{C} - оператор, що враховує дисипативні сили. Область визначення розв'язку $u(\bar{x}, t)$ рівняння (1) збігається з областю визначення оператора \tilde{K} . Оператори \tilde{M} , \tilde{K} , \tilde{K}_{G_1} та \tilde{K}_{G_2} - позитивно визначені. Рівняння (1) записано для випадку, коли параметричні сили задані з точністю до двох множників, один з яких α характеризує сталу складову зовнішнього впливу, а другий β - складову, що змінюється по часу за законом $f(t)$.

Рівняння (1) представляють собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, які доповненні відповідними граничними умовами. Незбудженому стану відповідає тривіальний розв'язок рівняння (1). Проблема динамічної стійкості для рівняння (1) формулюється як задача про визначення області значень коефіцієнтів α та β і параметрів, що

характеризують функцію $f(t)$, при яких тривіальний розв'язок рівняння є нестійким.

При проведенні прикладних розрахунків виконується перехід від операторного рівняння (1) до дискретної динамічної моделі. Для цього частіше застосовується метод скінчених елементів або метод скінчених різниць. Дискретна динамічна модель записується у вигляді звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + C\dot{\bar{u}}(t) + K\bar{u}(t) + \alpha K_{G_1}\bar{u}(t) + \beta f(t)K_{G_2}\bar{u}(t) = 0, \quad (2)$$

де $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ - вектор вузлових переміщень, M, K, K_{G_1} та K_{G_2} - позитивно визначені матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, C - матриця демпфірування.

Рівняння (2) формулює задачу динамічної стійкості для систем з кінцевим числом степенів свободи. Це класична задача і в теперішній час існує багато підходів для її розв'язання, коли $f(t)$ є детерміністичною періодичною функцією [1, 2, 3], а коли $f(t)$ є стаціонарний випадковий процес [2, 4, 5]. Однак при розгляданні реальних об'єктів для адекватного описання його пружних властивостей необхідно будувати дискретні моделі (2) великого розміру. Пряме застосування таких моделей пов'язано з великими обчислювальними труднощами. Необхідно виконати редукцію вихідної дискретної моделі, при цьому суттєво враховуються характеристики параметричного впливу.

Для побудови редукованих моделей можна застосувати метод узагальнених координат. Нехай $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$ достатньо представлена система лінійно-незалежних векторів у просторі E_n . Нетривіальний розв'язок системи (2) можна апроксимувати виразом

$$\bar{u}(t) = V\bar{y}(t), \quad (3)$$

де матриця V розмірністю $n \times m$ визначається системою базисних векторів $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^m$:

$$V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m), \quad (4)$$

$\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ - m -мірний вектор узагальнених координат. Виходячи з (2) та (3) відносно компонент вектора $\bar{y}(t)$ записується система m звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
 & V^T M \ddot{\bar{y}}(t) + V^T C \dot{\bar{y}}(t) + V^T K \bar{y}(t) + \\
 & + \alpha V^T K_{G_1} V \bar{y}(t) + \beta f(t) V^T K_{G_2} V \bar{y}(t) = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) записується у вигляді

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \alpha K_{G_1}^* \bar{y}(t) + \beta f(t) K_{G_2}^* \bar{y}(t) = 0, \tag{6}$$

де редуковані матриці мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* , геометричної жорсткості $K_{G_1}^*$ та $K_{G_2}^*$ розмірністю $m \times m$ представляються відповідно виразами:

$$M^* = V^T M V, \tag{7}$$

$$C^* = V^T C V, \tag{8}$$

$$K^* = V^T K V, \tag{9}$$

$$K_{G_1}^* = V^T K_{G_1} V, \tag{10}$$

$$K_{G_2}^* = V^T K_{G_2} V. \tag{11}$$

При побудові редукованих моделей m береться значно менше за n ($m \ll n$), так що і для складних об'єктів дослідження динамічної стійкості може бути виконано. Однак, завжди залишається принциповим питання про адекватність моделі (6). Це питання вирішується з одного боку дослідженням внутрішньої збіжності результатів при збільшенні m , а з другого боку, застосуванням при редукції для порівняння інших базисних векторів.

В даній роботі розглядаються питання формування редукованих моделей виду (6) за допомогою сучасних обчислювальних комплексів. При цьому головні обчислювальні проблеми пов'язані з визначенням редукованих матриць (7)-(11). Для цього треба вміти обчислювальними процедурами відповідного обчислювального комплексу формувати матриці $MV, CV, KV, K_{G_1}V, K_{G_2}V$, j -ті стовпці яких представляють собою відповідно вектори $M\bar{v}_j, C\bar{v}_j, K\bar{v}_j, K_{G_1}\bar{v}_j, K_{G_2}\bar{v}_j$, де ($j = 1, 2, \dots, m$).

Однак в стандартних обчислювальних комплексах обчислювальних процедур для визначення всіх цих векторів, як правило, нема. Є процедура для визначення реакції системи на задане поле переміщень \bar{v} , тобто для обчислення вектора $K\bar{v}$, де K - матриця жорсткості задачі, яка розглядається. Застосовуючи цю процедуру можна визначити вектори $M\bar{v}, K_{G_1}\bar{v}, K_{G_2}\bar{v}$, а при деяких умовах структуру матриці C та вектора

$C\bar{v}$. Для цього крім вказаної вище процедури використовуються процедури аналізу вільних коливань та процедури розв'язання задачі стійкості.

Спочатку представляється алгоритм обчислення для будь-якого поля переміщень \bar{v} вектора $M\bar{v}$.

Для розглядуваної системи формулюється задача про визначення частот та форм власних коливань

$$(K - \omega^2 M)\bar{\varphi} = 0. \quad (12)$$

Нехай ω_k ($k = 1, 2, \dots, m_1$) - вектор частот власних коливань дискретної моделі, $\bar{\varphi}_k = (\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \dots, \varphi_{nk})^T$ ($k = 1, 2, \dots, m_1$) - система власних форм коливань. Система векторів $\{\bar{\varphi}_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, m_1$) ортогональна, тобто

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j^T M \bar{\varphi}_i &= 0, \\ \bar{\varphi}_j^T K \bar{\varphi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j)$$

За допомогою підмножини власних форм коливань $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ можливо наближено представити поле переміщень \bar{v} у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i \bar{\varphi}_i. \quad (13)$$

В силу ортогональності векторів $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$

$$a_i = \frac{\bar{\varphi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\varphi}_i^T K \bar{\varphi}_i}. \quad (14)$$

Внаслідок (12)

$$M \bar{\varphi}_i = \frac{1}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (15)$$

Тоді враховуючи (14) можна записати

$$M \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i M \bar{\varphi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (16)$$

Таким чином, виходячи із процедури обчислення $K \bar{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m_1$), можна підрахувати вектор $M \bar{v}$.

Аналогічно будується алгоритм обчислення векторів $K_{G_1} \bar{v}$ та $K_{G_2} \bar{v}$ тільки замість процедури аналізу власних коливань застосовується процедура розв'язку задачі статичної стійкості. Спочатку розглядається алгоритм обчислення вектора $K_{G_1} \bar{v}$. Для системи формулюється задача стійкості

$$(K + \lambda K_{G_1}) \bar{\psi} = 0. \quad (17)$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_2}$ - сукупність критичних значень задачі (17), $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{m_2}$ - відповідні форми втрати стійкості. Внаслідок виконаних вище припущень відносно властивостей матриць K та K_{G_1} ці вектори ортогональні в метриці, що визначається матрицею K_{G_1} , і відповідно матрицею K

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_j^T K_{G_1} \bar{\psi}_i &= 0, \\ \bar{\psi}_j^T K \bar{\psi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (18)$$

За допомогою підмножини форм втрати стійкості $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ наближено поле переміщень \bar{v} представляється у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} b_i \bar{\psi}_i. \quad (19)$$

Аналогічно (16) можна записати, що вектор

$$K_{G_1} \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} -\frac{b_i}{\lambda_i} K \bar{\psi}_i, \quad (20)$$

де

$$b_i = \frac{\bar{\psi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\psi}_i^T K \bar{\psi}_i}. \quad (21)$$

Таким чином задача визначення вектора $K_{G_1} \bar{v}$ вирішена.

Так само визначається вектор $K_{G_2} \bar{v}$. Розглядається задача стійкості

$$(K + \mu K_{G_2}) \bar{\chi} = 0. \quad (22)$$

Нехай $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_3}$ - сукупність критичних значень задачі (22), $\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_{m_3}$ - відповідні ортогональні в метриці матриці жорсткості форми втрати стійкості.

Сукупність векторів $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$ є базисом в просторі E_n , який задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_j^T K_{G_2} \bar{\chi}_i &= 0, \\ \bar{\chi}_j^T K \bar{\chi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (23)$$

За допомогою підмножини векторів $\bar{\chi}_i$ ($i=1, 2, \dots, m_3$) аналогічно (13) поле переміщень \bar{v} можна наближено представити у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i \bar{\chi}_i, \quad (24)$$

де

$$c_i = \frac{\bar{\chi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\chi}_i^T K \bar{\chi}_i}. \quad (25)$$

Аналогічно (20) вектор $K_{G_2} \bar{v}$ можна наближено представити у вигляді

$$K_{G_2} \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i K_{G_2} \bar{\chi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_3} -\frac{c_i}{\mu_i} K \bar{\chi}_i. \quad (26)$$

Таким чином для довільного поля переміщень \bar{v} побудовані алгоритми апроксимації векторів $M\bar{v}$, $K_{G_1} \bar{v}$ та $K_{G_2} \bar{v}$ за допомогою процедури обчислення реакції $K\bar{v}$ та процедури розв'язку відповідних узагальнених задач на власні значення.

Для визначення вектора $C\bar{v}$ необхідно зробити додаткові припущення про структуру матриці демпфірування C .

Далі розглядається матриця демпфірування C , яка представлена у формі Релея:

$$C = d_0 M + d_1 K, \quad (27)$$

де d_0 та d_1 - довільні коефіцієнти пропорційності. В силу (16)

$$C\bar{v} \cong d_0 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i + d_1 K \bar{v}. \quad (28)$$

Тепер, коли для довільного поля переміщень \bar{v} сформульовані обчислювальні процедури для апроксимації векторів $M\bar{v}, C\bar{v}, K_{G_1}\bar{v}$ та $K_{G_2}\bar{v}$ можна перейти до побудови розрахункової динамічної моделі (6). Виходячи з представлень (16), (20), (26) та (28), можна записати представлення для матриць $MV, CV, KV, K_{G_1}V, K_{G_2}V$, що входять до формул (7), (8), (10), (11), та підрахувати апроксимації редукованих матриць мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* , геометричної жорсткості $K_{G_1}^*$ та $K_{G_2}^*$.

Приймається, що підмножина векторів $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$, $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ та $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$ мають однакову розмірність m , тобто $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Використовуючи (16), (20), (26), (28) та в силу (14), (21), (25), можна записати

$$MV = K\Phi\Omega^{-1}\Phi^TKV, \quad (29)$$

$$CV = d_0K\Phi\Omega^{-1}\Phi^TKV + d_1KV, \quad (30)$$

$$K_{G_1}V = K\Psi\Lambda^{-1}\Psi^TKV, \quad (31)$$

$$K_{G_2}V = KX\Theta^{-1}X^TKV. \quad (32)$$

де матриці Φ, Ψ та X розмірністю $n \times m$ визначаються співвідношеннями

$$\Phi = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m), \quad (33)$$

$$\Psi = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_m), \quad (34)$$

$$X = (\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_m), \quad (35)$$

а діагональні матриці $\Omega^{-1}, \Lambda^{-1}, \Theta^{-1}$ - співвідношеннями

$$\Omega^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\omega_1^2}, \frac{1}{\omega_2^2}, \dots, \frac{1}{\omega_m^2}\right), \quad (36)$$

$$\Lambda^{-1} = \text{diag}\left(-\frac{1}{\lambda_1}, -\frac{1}{\lambda_2}, \dots, -\frac{1}{\lambda_m}\right), \quad (37)$$

$$\Theta^{-1} = \text{diag}\left(-\frac{1}{\mu_1}, -\frac{1}{\mu_2}, \dots, -\frac{1}{\mu_m}\right). \quad (38)$$

Редуковані матриці мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* , геометричної жорсткості $K_{G_1}^*$ та $K_{G_2}^*$ обчислюються за формулами

$$M^* = V^T K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T K V, \quad (39)$$

$$C V = d_0 V^T K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T K V + d_1 V^T K V = d_0 M^* + d_1 K^*, \quad (40)$$

$$K_{G_1}^* = V^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K V, \quad (41)$$

$$K_{G_2}^* = V^T K X \Theta^{-1} X^T K V. \quad (42)$$

Таким чином, співвідношення (9), (39)-(42) дозволяють визначити усі коефіцієнти редукованої моделі (6).

У роботі розглядаються задачі редукування рівнянь параметричних коливань балки з різними граничними умовами та пологої арки від дії відповідних навантажень. Побудова редукованих моделей відбувається за допомогою обчислювального програмного комплексу NASTRAN на основі пре/постпроцесора FEMAP, що є один із найбільш вдалих засобів підготовки даних та обробки результатів скінченноелементного аналізу конструкцій в середовищі Windows [6]. FEMAP дозволяє записувати інформацію про вхідні дані і результати розрахунку в своєму текстовому нейтральному файлі, де вони зберігаються в компактному вигляді в форматі бінарного файла. Формат нейтрального файла дозволяє застосовувати користувачам свої інтерфейси для стикування з FEMAP.

Побудова редукованих моделей виконується аналогічно алгоритму, який наведений у роботі. Формується модель конструкції. Задаються її геометричні та механічні характеристики. Спочатку виконується розрахунок конструкції на вільні коливання. В результаті отримуються частоти та форми власних коливань, які записуються в нейтральний файл, де вони зберігаються в окремому блоці. Далі вводяться жорсткі в'язі, що перешкоджають переміщенням в усіх вузлах, та задаються переміщення вузлів, які відповідають формам власних коливань. Для кожної форми $\bar{\varphi}_i$ виконується статичний розрахунок конструкції і визначається відповідна реакція $K \bar{\varphi}_i$. Ці дані також записуються в нейтральний файл в окремий блок. Далі виконується розрахунок на стійкість від дії відповідного навантаження. В результаті отримуються критичні значення навантаження та форми втрати стійкості, які записуються у нейтральний файл. Далі формується блок навантажень на всі вузли конструкції, значення яких є формами втрати стійкості, та також вводяться жорсткі в'язі, які б перешкождали переміщенням в усіх вузлах конструкції. Для кожної форми $\bar{\psi}_i$ виконується статичний розрахунок конструкції і визначається відповідна реакція $K \bar{\psi}_i$.

Редуковані матриці мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* , геометричної жорсткості $K_{G_1}^*$ та $K_{G_2}^*$ обчислюються за формулами (9),(39)-(42) за допомогою інформації, яка зберігається в нейтральному файлі пре/постпроцесора FEMAP.

Далі наводяться результати побудови редукованої моделі параметричних коливань балки з різними граничними умовами від дії повздовжньої сили. Конструкція балки та її скінченноелементна модель представлена на рисунках 1а, 2а та 1б, 2б відповідно.

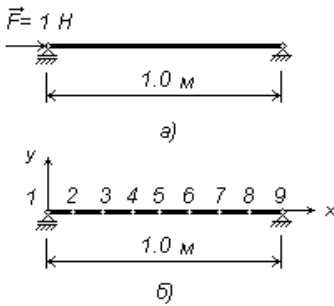


Рис. 1

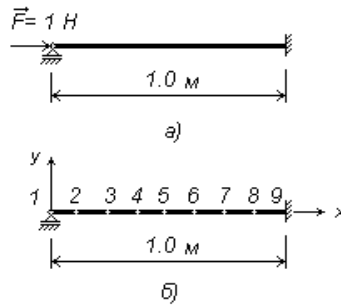


Рис. 2

Геометричні та механічні характеристики балки приймалися такими:
 $F = 0.0005 \text{ м}^2$, $I_z = 1.0416 \text{ Е} \cdot 10^{-07} \text{ м}^4$, $I_y = 4.1666 \text{ Е} \cdot 10^{-09} \text{ м}^4$,
 $J = 1.4609 \text{ Е} \cdot 10^{-08} \text{ м}^4$, $E = 2.06 \text{ Е}11 \text{ Па}$, $G = 0.762 \text{ Е}11 \text{ Па}$, $\eta = 0.3$,
 $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

Для двох балок виконані розрахунки на вільні коливання. Отримані три перші частоти коливань $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ і відповідні форми власних коливань $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3$. Для кожної форми виконаний статичний розрахунок конструкції і визначена відповідна реакція $K\bar{\varphi}_1, K\bar{\varphi}_2, K\bar{\varphi}_3$. Матриця власних форм нормована по матриці мас, тобто $\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i = E$, де $E = \text{diag}(1, 1, 1)$. Тому після обчислення редукована матриця жорсткості отримана у вигляді діагональної матриці $K^* = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2)$. Далі виконані розрахунки на стійкість від повздовжньої сили $F = 1 \text{ Н}$ (рис. 1, 2). Отримані критичні значення навантаження $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ і відповідні форми втрати стійкості $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3$. Для кожної форми виконаний статичний розрахунок конструкції і визначена відповідна реакція

$K\bar{\psi}_1, K\bar{\psi}_2, K\bar{\psi}_3$. Після обчислення редукована матриця геометричної жорсткості $K_{G_1}^*$ отримана у вигляді діагональної матриці $K_{G_1}^* = \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$. Для балки, що представлена на рис. 1, результати чисельних розрахунку порівнювались з аналітичними.

Частоти власних коливань обчислювались за формулою

$$\omega_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \left(\frac{EI_y}{\rho F} \right)^{1/2}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Критичні значення навантаження визначалися таким чином

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2 EI_y}{l^2}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Результати розрахунків наведені в таблиці 1.

Також в роботі побудована редукована модель параметричних коливань пологої арки від дії зовнішнього розподіленого тиску (рис. 3).

Геометричні та механічні характеристики арки приймалися такими: $F = 0.0005 \text{ м}^2$, $\beta = \pi/5$ рад, $R = 0,2 \text{ м}$, $q = 1 \text{ Н/м}^2$, $I_z = 4.1666 \text{ Е} - 09 \text{ м}^4$, $I_y = 1.0416 \text{ Е} - 07 \text{ м}^4$, $J = 1.4609 \text{ Е} - 08 \text{ м}^4$, $E = 2.06 \text{ Е}11 \text{ Па}$, $G = 0.762 \text{ Е}11 \text{ Па}$, $\eta = 0,3$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$.

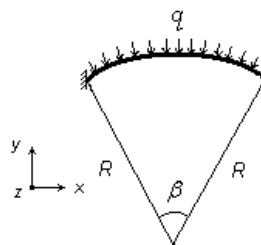


Рис. 3

Розрахунок виконаний згідно наведеному вище алгоритму. Результати розрахунку представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Конструкції		Частоти власних коливань, Гц			Критичні навантаження, Н		
		ω_1	ω_2	ω_3	λ_1	λ_2	λ_3
Балка (рис.1)	NASTRAN	22.958	91.772	114.458	8223.552	32886.14	74055.86
	Аналіт.	22.859	91.507	114.856	8288.745	33154.98	74598.71
Балка (рис. 2)		35.857	116.068	177.814	16819.88	49719.26	99241.70
Арка		4880.06	5143.40	9454.49	5790367.	6015280.	6334961.

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956 -600 с.
2. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.
3. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978-Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. 352 с., ил.*
4. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. - М.: Наука, 1979 - 336 с.
5. *Дехтярюк Є.С., Лук'яненко О.О., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні.//Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2003. -№72.- с.51-59.
6. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Матеріал надійшов до редакції 19.04.04.

УДК 624.01

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Слободян Я.О., канд. техн. наук

ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ РОЗРАХУНКУ І ПРОЕКТУВАННЯ ДЛЯ ОБГРУНТУВАННЯ БЕЗПЕКИ ОБ'ЄКТІВ АТОМНОЇ ЕНЕРГІЇ

Постановка задачі. Необхідність застосування програмних засобів (ПЗ) для обґрунтування безпеки об'єктів використання атомної енергії виникла паралельно з активним розвитком обчислювальної техніки. У зв'язку з цим по ініціативі Адміністрації ядерного регулювання (АЯР) України була введена вимога про необхідність верифікації ПЗ.

Для вирішення поставленої задачі АЯР України та Науково-технічним центром по ядерній і радіаційній безпеці (НТЦ ЯРБ) була підготовлена вихідна інформація для проведення порівняльних розрахунків із застосуванням ПК ЛПА [1] особливо відповідальних технічних об'єктів - типових захисних оболонок АЕС України на основі вихідних даних, наведених в звіті GRS, Німеччина, проект SR 2075/5-5-1-UA-1595 "Порівняльні розрахунки для контеймента по динамічних навантаженнях у результаті внутрішніх і зовнішніх впливів для українських АЕС із ВВЕР-1000".

Захисні оболонки являються попередньо напруженими залізобетонними конструктивними системами, у процесі експлуатації яких проводяться періодичні контрольно-профілактичні роботи для підтяжки армоканатів, що компенсують утрату зусиль в армоканатах. Аналіз факторів, що викликають утрату зусиль в армоканатах, є однією з важливих проблем, що впливають на безпеку захисних оболонок. У період між контрольно-профілактичними роботами мають місце також обриви армоканатів, у зв'язку з чим необхідне обґрунтування прогнозування працездатності захисної оболонки при порушеннях у роботі системи попереднього напруження захисної оболонки.

Ефективним шляхом одержання такої інформації є застосування сучасних програмних засобів, реалізованих на основі методу скінченних елементів, для аналізу напружено-деформованого стану (НДС) споруд АЕС. Рекомендовані нормативними документами методи розрахунків об'єктів АЕС, були розроблені до широкого розвитку комп'ютерних технологій і орієнтовані на інженерні методи. Застосування ефективних чисельних методів для обґрунтування безпеки експлуатації споруд АЕС

дозволяє одержати уточнені оцінки параметрів, прийнятих діючими нормативними документами.

Мета роботи – побудова просторової лінійно-пружної моделі, виконання чисельних досліджень напружено-деформованого стану типової захисної оболонки АЕС та зіставлення результатів досліджень, отриманих за допомогою програмних засобів ЛПА (НДІ автоматизованих систем в будівництві, Україна) [1] і ADINA (GRS, Німеччина).

Загальна характеристика конструкції захисних оболонок реакторних відділень ВВЕР-1000 АЕС України (рис. 1 - 3). У багаторівневій системі безпеки АЕС одну з ключових позицій займає система герметичного огороження, що забезпечує герметичну ізоляцію ядерного реактора від навколишнього середовища, а також локалізацію наслідків можливих аварій. Система герметичного огороження реакторних відділень ВВЕР-1000 є складною інженерною спорудою неоднорідної структури і містить у собі наступні елементи:

- залізобетонні конструкції захисної оболонки;
- система попереднього напруження (попередньо напружена арматура, ненапружена арматура);
- герметизоване сталеве облицювання;
- елементи, встановлені в герметичне огороження (шлюзи, люки, двері, трубопровідні комунікації, що перетинають герметичне огороження).

Основним елементом системи герметичних огорожень реакторного відділення уніфікованого енергоблоку ВВЕР-1000 АЕС є захисна оболонка з нижньою плитою, що представляє собою попередньо напружену залізобетонну конструкцію. Захисна оболонка виконана у вигляді циліндра товщиною 1.20 м і внутрішнім діаметром 45.00 м, сполученого у верхній частині з положистим сферичним куполом товщиною 1.10 м і внутрішнім сферичним радіусом 35.00 м.

Нижня опорна плита знаходиться на позначці 13.20 м. Загальна висота захисної оболонки від поверхні опорної плити до найвищої позначки купола - 66.45 м, складає 53.25 м. Зона сполучення циліндра і купола між позначками 55.60 м і 61.00 м посилена жорстким залізобетонним кільцем (анкерним карнизом), що є місцем анкерівки арматури у вигляді армоканатів з високоміцного дроту. У циліндричній частині захисної оболонки поблизу анкерного карниза між позначками 44.40 м і 45.60 м знаходиться консоль підкранової балки.

Система попереднього напруження захисної оболонки призначена для обтиснення залізобетонних конструкцій оболонки з метою сприйняття аварійних навантажень. Попереднє напруження забезпечується створенням системи геликоїдально-петлевого армування (у циліндрі) і

ортогонально-петлевого армування (у куполі) арматурними канатами, поміщеними в поліетиленові канали. У циліндричній частині згідно з проектом розташовані 96 арматурних канатів, що обгинають оболонку по гелікоїдальній траєкторії під кутом 35.05 градусів до горизонтальної площини. Купольна частина оболонки згідно з проектом підсилюється системою з 36 армоканатів, що створюють дві групи з взаємно перпендикулярною орієнтацією. Система попереднього напруження містить у собі армоканати, анкерні верхні, купольні й опорні нижні блоки, гідродомкрати, насосні станції, системи керування і контролю.

Металеve облицювання товщиною 8 мм розташоване на внутрішній поверхні залізобетонної оболонки для забезпечення її герметичності.

Проект захисної оболонки розроблений Московським інститутом "Атоменергопроект". Проект системи попереднього напруження захисної оболонки, порядок її супроводу й обслуговування розроблений Московським інститутом "Оргенергострой".

Вихідні дані для розрахунку захисних оболонок включають дані про геометричні і фізичні параметри споруди і системи попереднього напруження захисної оболонки, наведені в проектній документації про матеріали конструкції, вихідні події, навантаження і впливи.

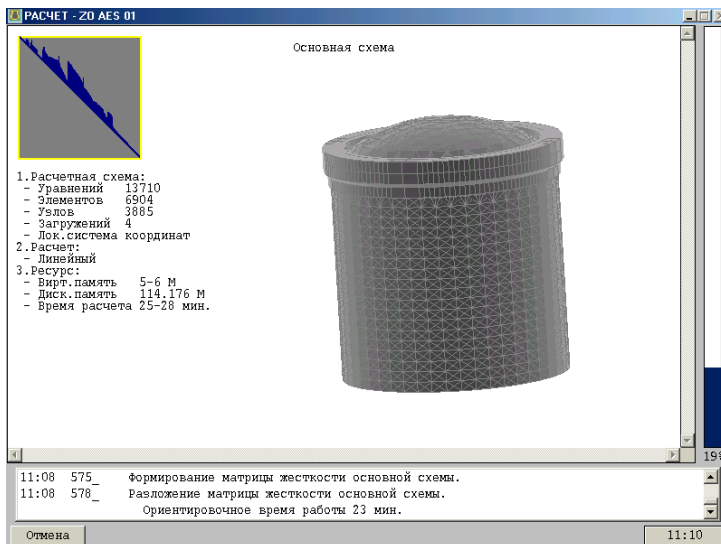


Рис. 1. ПК ЛПА. Процесс розрахунку захисної оболонки ВВЕР-1000/В-320

Фізико-механічні характеристики матеріалів захисної оболонки приймаються згідно з нормами [4]. Матеріал розглянутої конструкції - бетон класу В30. Ненапружена стержнева арматура класу А-III. Матеріал гермооблицювання - сталь ВСтЗсп5. Параметри армоканатів наведені в ТУ В 0249543-037-96 "Канат арматурний для систем попереднього напруження захисних оболонок АЕС".

Класифікація навантажень і впливів приймається згідно з нормами [3, 5]. Розрахункові комбінації навантажень дозволяють враховувати три основні групи режимів навантажень: передпускові, експлуатаційні й особливі.

Поточний стан системи попереднього напруження захисної оболонки повинен задаватися за результатами контрольно-профілактичних робіт. Однак, для порівняльних розрахунків зусилля натягу в армоканатах приймалося постійним - 10000 кН.

Розрахункова модель захисної оболонки (рис. 1 – 3) побудована з урахуванням наступних допущень, прийнятих в ідентичній моделі GRS, Німеччина:

- об'єкт розрахунку - частина захисної оболонки, розташована вище позначки +13,2м.
- з'єднання циліндричної частини захисної оболонки з нижчерозташованою плитою стилобату - жорстке защемлення.
- внутрішнє металеве гермооблицювання, люки, шлюзи в розрахунку не враховуються.

Дискретизація захисної оболонки виконана на основі стержневих, пластинчастих і просторових скінченних елементів. Побудована чисельна модель містить 6904 скінченних елементів, 3885 вузлів, 13710 ступенів свободи. По висоті циліндричної частини використовується 19 скінченних елементів, в окружному напрямку - 48 скінченних елементів. Купольна частина має ортогональну сітку, що повторює траєкторії армоканатів і перехідну зону, що забезпечує стикування з анкерним карнизом. В області анкерного карниза сіткова область також побудована з урахуванням траєкторій армоканатів.

Моделювання системи попередньо напружених армоканатів виконано методом [2] на основі стержневих скінченних елементів, що дозволяє адекватно відображати складні умови взаємодії армоканатів з поверхнею каналів. Моделювання системи попереднього напруження захисної оболонки виконано у відповідності з наступними допущеннями:

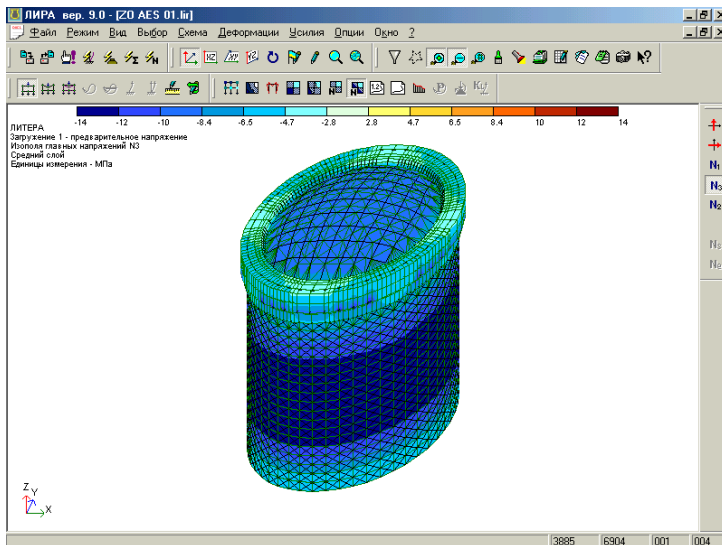


Рис. 2. Графічне середовище ПК ЛІРА. Головні напруження N3 захисної оболонки від впливу попереднього напруження в армоканатах 10000 кН

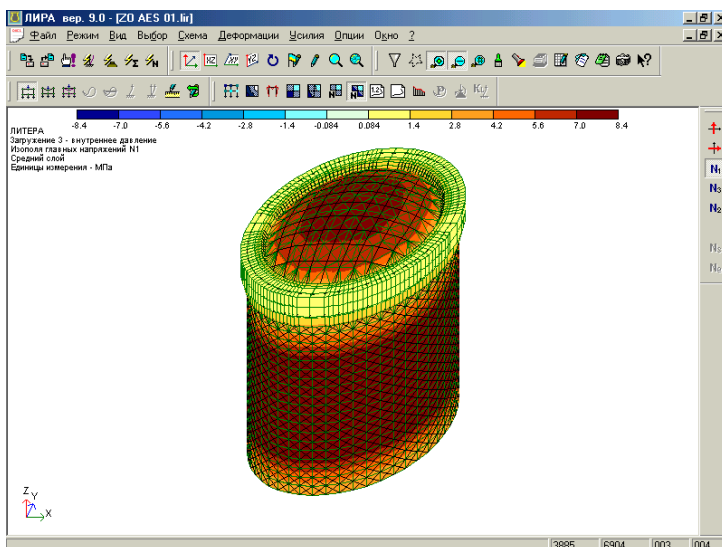


Рис. 3. Графічне середовище ПК ЛІРА. Головні напруження N1 захисної оболонки від впливу внутрішнього тиску 0.46 МПа

- траєкторії армоканатів у циліндричній частині проходять під кутом $35^{\circ}15'$ до горизонтальної площини, армування в купольній частині приймається ортогонально згідно з проектом; армоканати вважаються приведеними до серединної поверхні захисної оболонки;

- при моделюванні системи попереднього напруження враховуються втрати зусилля на тертя ($\mu = 0,089$) між армоканатом і поверхнею каналу.

Результати досліджень отримані для наступних видів навантажень захисної оболонки:

- попереднє напруження в армоканатах 10000кН;
- власна вага захисної оболонки;
- внутрішній тиск 0,46 МПа;

Найбільш характерні результати про напружений стан захисної оболонки у вигляді ізополів головних напружень $N1$, $N3$ для екстремальних видів навантажень наведені на рисунках 2, 3. Для зіставлення отриманих результатів на рисунках 4 – 9 наведені найбільш характерні графіки переміщень серединної поверхні захисної оболонки із відображенням відносної величини похибки у межах 10 %.

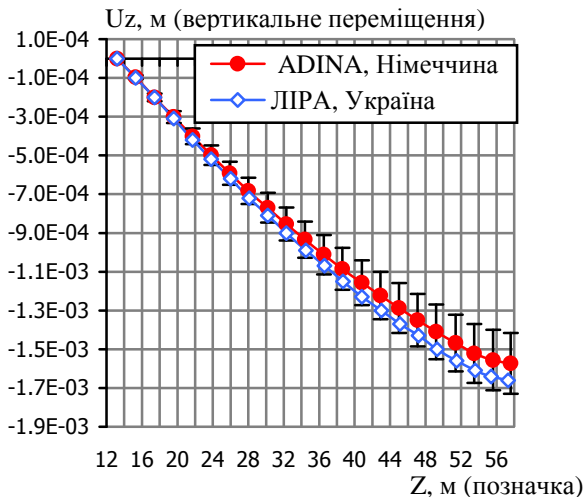


Рис. 4. Вертикальні переміщення серединної поверхні циліндричної частини захисної оболонки від впливу власної ваги

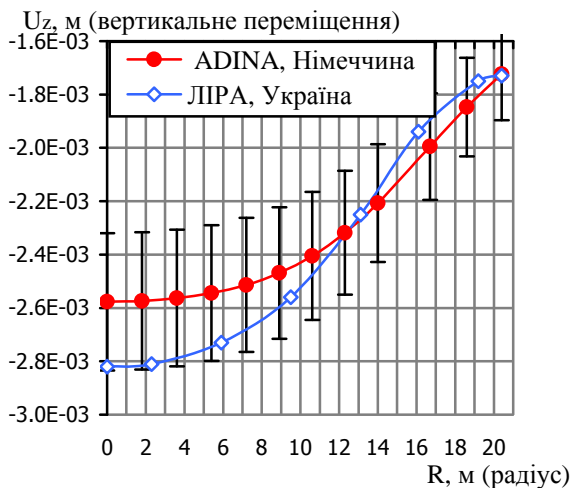


Рис. 5. Вертикальні переміщення серединної поверхні купольної частини захисної оболонки від впливу власної ваги

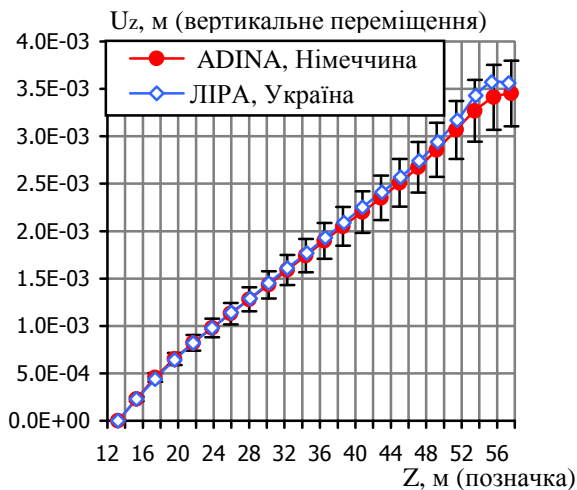


Рис. 6. Вертикальні переміщення серединної поверхні циліндричної частини захисної оболонки від впливу внутрішнього тиску 0.46 МПа

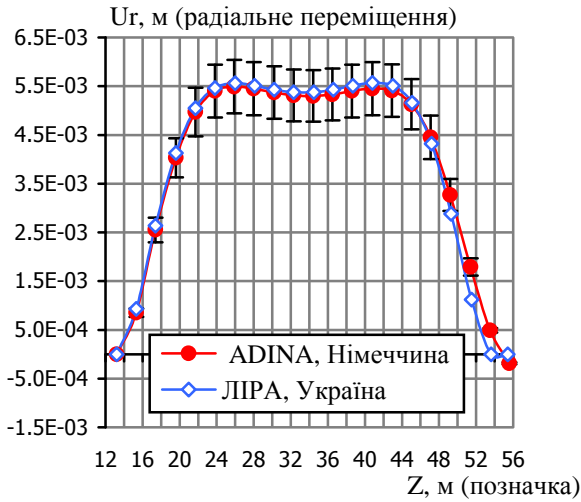


Рис. 7. Радіальні переміщення серединної поверхні циліндричної частини захисної оболонки від впливу внутрішнього тиску 0.46 МПа

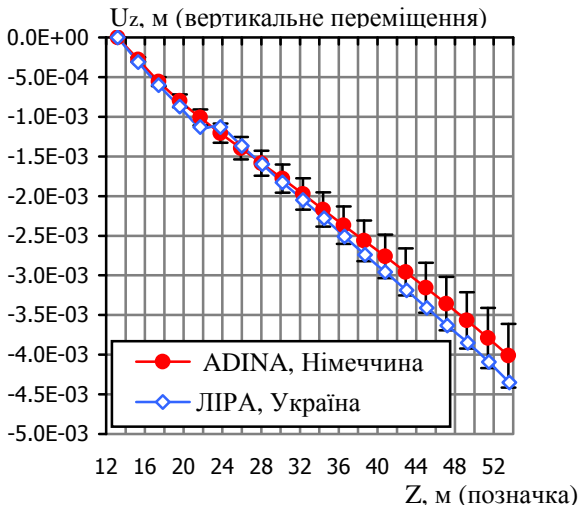


Рис. 8. Вертикальні переміщення серединної поверхні циліндричної частини захисної оболонки від впливу попереднього напруження в армоканатах 10000 кН

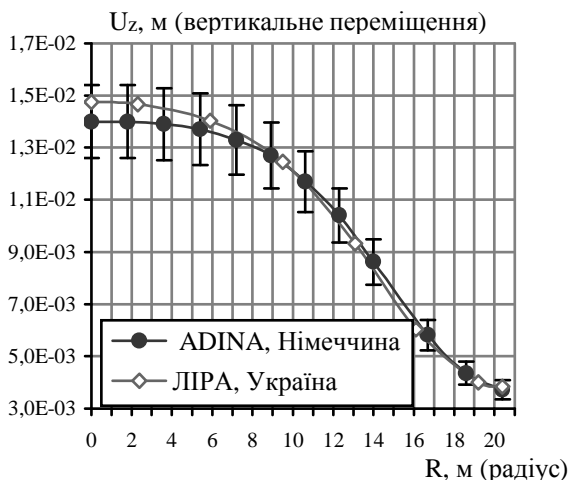


Рис. 9. Вертикальні переміщення середньої поверхні купольної частини захисної оболонки від впливу внутрішнього тиску 0.46 МПа

Висновки. Вирішена проблема адекватного комп'ютерного моделювання та розрахункового обґрунтування безпеки експлуатації особливо складних технічних об'єктів АЕС України в умовах екстремальних навантажень, що базується на достовірній інформації про напружено-деформований стан цих об'єктів із застосування сучасних комп'ютерних технологій, створених на основі універсальних програмних комплексів. Результати досліджень наглядно показують, що отримані розрахункові параметри напружено-деформованого стану захисної оболонки за допомогою програмних комплексів ЛІРА (Україна) і ADINA (Німеччина) мають гарне узгодження і можуть успішно і ефективно застосовуватися для розрахункового обґрунтування безпеки експлуатації захисних оболонок реакторних відділень ВВЕР-1000 АЕС в реальних умовах навантажень.

1. Городецкий А.С., Слободян Я.Е. и др. / Программный комплекс ЛІРА-Windows. Теоретические основы. -Киев: НИИАСС. - 1997. –Т. 5. -90 с.
2. Slobodyan Y., Majewski S., Genzerskiy Y. FEM software package LIRA-W for structural design // Finite Element Methods & Standards. - Stuttgart: Universitat. - 1997. - P. 67-75.
3. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия.
4. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции.
5. ПНАЭ Г-10-007-89 "Нормы проектирования железобетонных сооружений локализирующих систем безопасности атомных станций".

УДК 539.3

Шульга М.О., д-р фіз.-мат. наук

ПРО ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

У практиці гідрологічного будівництва поряд з традиційними металічними гнучкими елементами (троси, ланцюги та ін.) широко використовуються канати із синтетичних волокон (нейлон, полістирол, поліпропілен, органічні волокна та ін.). Для таких матеріалів, особливо в умовах тривалої експлуатації, необхідно досліджувати вплив їх в'язкопружних властивостей на деформативність і несучу здатність.

Розглянемо систему $J \geq 0$ твердих тіл в рідині, які послідовно з'єднані між собою гнучкими елементами (канатами) з нульовою згинальною жорсткістю. Введемо просторову нерухому відлікову декартову прямокутну систему координат $OX_1X_2X_3$ (вісь OX_3 направлена вгору). У початковий момент часу $t=0$ розташування довільної точки P_0 недеформованого канату визначається координатами $X_i(s,0)$, де s – довжина дуги OP_0 недеформованої нитки від точки відліку O . Після деформації точка P_0 переміститься в положення P_t з координатами $X_i(s,t)$. Довжину дуги OP_t деформованого канату позначимо через $S = S(s,t)$. Тоді радіус-вектор Точки P_t буде $\mathbf{R}_t(S,t) = \mathbf{R}_t(S(s,t),t) = \mathbf{R}(s,t)$; елементарний відрізок деформованого канату $dS = \frac{\partial S}{\partial s} ds$. Дотичні вектори $\boldsymbol{\tau}_S$, $\boldsymbol{\tau}_s$ до деформованої нитки

визначаються похідними $\boldsymbol{\tau}_S = \frac{\partial \mathbf{R}_t(S,t)}{\partial S}$, $\boldsymbol{\tau}_s = \frac{\partial \mathbf{R}_t(s,t)}{\partial s}$, причому

$\boldsymbol{\tau}_S \frac{\partial S(s,t)}{\partial s} = \boldsymbol{\tau}_s$, $|\boldsymbol{\tau}_S| = 1$, $\frac{\partial S(s,t)}{\partial s} \geq 1$. Поздовжня деформація нитки у

матеріальному відліку $\varepsilon = \frac{\partial S(s,t)}{\partial s} - 1$.

Для виводу рівняння руху гнучкого елемента розглянемо елемент дуги нитки dS . Швидкість V і прискорення W елемента dS визначаються похідними

$$\mathbf{V} = \frac{dR_t(s,t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}(s,t)}{\partial t}, \quad \mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial t^2}.$$

Запишемо рівняння руху елемента dS , враховуючи силу натягу, силу власної ваги нитки, силу Архімеда, нормальну і дотичну сили опору рідини [2, 4]

$$m_t \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial S} - g m_t \mathbf{e}_3 + g \rho_f A_t \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} \rho_f C_I D_t \left| \mathbf{V}_{tn_s} - \mathbf{V}_{n_s} \right| (\mathbf{V}_{fn_s} - \mathbf{V}_{n_s}) + \\ + \frac{1}{2} \rho_f C_{II} \pi D_t \left| \mathbf{V}_{f\tau_s} - \mathbf{V}_{\tau_s} \right| (\mathbf{V}_{f\tau_s} - \mathbf{V}_{\tau_s}) + m_f t \left(\frac{d\mathbf{V}_f}{dt} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right). \quad (1)$$

У рівнянні (1) m_t – погонна маса (маса на одиницю довжини) zdeформованого канату, m_f – приєднана маса рідини, g – прискорення вільного падіння, ρ_f – густина рідини, \mathbf{e}_j – координатні орти, C_I та C_{II} – коефіцієнти нормального та дотичного опору канату у рідині, D_t – діаметр zdeформованого канату, \mathbf{V}_f – поле швидкостей потоку рідини,

$$\mathbf{V}_{f\tau_s} = (\mathbf{V}_f \boldsymbol{\tau}_S) \boldsymbol{\tau}_S \quad \text{та} \quad \mathbf{V}_{fn_s} = (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_t \boldsymbol{\tau}_S) \quad (2)$$

дотична і нормальна складові цієї швидкості, V – швидкість елемента dS канату в координатах X_i

$$\mathbf{V}_{\tau_s} = (\mathbf{V}_f \boldsymbol{\tau}_S) \boldsymbol{\tau}_S, \quad \mathbf{V}_{n_s} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{\tau_s} \quad (3)$$

дотична і нормальна складова цієї швидкості.

По закону збереження маси погонна маса m_t zdeформованого канату зв'язана з погонною масою недеформованого канату m залежністю [2,4]

$$m_t \frac{\partial S}{\partial s} = m. \quad (4)$$

Сила натягу $\mathbf{T} = T \boldsymbol{\tau}_S$. Для полімерних матеріалів справедлива [5,6] лінійна залежність між напруженнями і деформаціями

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) - \lambda \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right), \quad (5)$$

причому $\Gamma(t-\tau)$ – ядро релаксації [6] і параметр λ введений для зручності аналізу.

$$\text{Якщо в формулі (5) покласти } \lambda = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{H}{E} \right), \quad \Gamma(T-\tau) = \exp \left(-\frac{1}{n} (T-\tau) \right),$$

де E – миттєвий модуль пружності, H – тривалий модуль пружності, n – час релаксації, то залежність (5) можна записати диференціальному вигляді:

$$n\dot{\sigma} + \sigma = E n \dot{\epsilon} + H \epsilon,$$

тобто у формі стандартного лінійного тіла [6].

Якщо напруження у формулі (5) віднесено до поперечної площі недеформованого зразка, то сила натягу $T = A_0 \sigma(t)$.

Тепер рівняння (1) можна привести до вигляду

$$\begin{aligned} (m + m_f) \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = & -g \left(m - \rho_f A \frac{\partial S}{\partial s} \right) \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} \rho_f C_I D_t \frac{\partial S}{\partial s} \\ & \left| \mathbf{V}_{f n_s} - \mathbf{V}_{n_s} \right| \left(\mathbf{V}_{f n_s} - \mathbf{V}_{n_s} \right) + \frac{1}{2} \rho_f C_{II} \pi D_t \frac{\partial S}{\partial s} \left| \mathbf{V}_{f \tau_s} - \mathbf{V}_{\tau_s} \right| \cdot \\ & \cdot \left(\mathbf{V}_{f \tau_s} - \mathbf{V}_{\tau_s} \right) + m_f \frac{\partial S}{\partial s} \frac{d\mathbf{V}_f}{dt} + \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\boldsymbol{\tau}}{1 + \epsilon}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут сила натягу $T = A_t \sigma(t)$, а напруження $\sigma(t)$ виражається через деформацію залежністю (5).

Рівняння руху справедливі для власне гнучкого елемента. В місцях знаходження твердих тіл, які вважатимемо матеріальними точками масою M_j ($j=1, \dots, J$) з координатами $X_{i,j} \mathbf{e}_i = \mathbf{R}_{t,j}$, повинні виконуватися умови неперервності

$$\begin{aligned} X_j^+ = X_j^-, \quad (M_j + M_{fj}) \frac{dV_j}{dt} = & \mathbf{T}^+(x_j) - \mathbf{T}^-(x_j) - \\ & - g \left(M_j - \rho_f \Omega_j \right) \mathbf{e}_3 + \frac{1}{2} \rho_f C_j A_j \left| V_{fj} - V_j \right| \left(V_{fj} - V_j \right), \end{aligned} \quad (7)$$

де M_{fj} – приєднана маса рідини для j -го тіла, Ω_j – об'єм j -го тіла,

C_j – коефіцієнт опору j -го тіла в рідині, A_j – поверхня тіла, на яку діють сили гідропружного опору. Умови (7) повинні записуватися для кожного тіла. Для кінців канату повинні бути записані граничні умови, які носять кінематичний характер (задають положення кінцевої точки)

або динамічний характер (задається зовнішня сила, прикладена до кінцевої точки). Якщо на кінці канату знаходиться тверде тіло $j = J$, що рухається, то буде справедлива умова (7) при $j = J$ і заданій силі $\mathbf{T}^+(x_j)$. Початкові умови повинні бути сформовані для початкових координат і початкових швидкостей континуально–дискретної системи.

Нелінійну початково крайову задачу в інтегро–диференціальній формі, що сформульована у цій статті, можливо розв'язати лише наближеними, переважно чисельними, методами.

Інший підхід до цих задач, що ґрунтується на побудові дискретної моделі гнучких елементів з подальшим застосуванням лагранжевого формалізму, розвивається у роботах [1,3,7 та інш.]

1. *Безверхий А.Н.* Динамика протяженных гидрофизических систем с упругими связями. – Автореферат канд. физ.-мат. наук –К.: Институт механики АН Украины, 1992. –14с.
2. *Берто Г.О.* Океанографические буи. – Ленинград: Судостроение, 1979. –216с.
3. *Корніснко В.Ф.* Нелінійні коливання гнучких в'язкопружних елементів конструкцій при взаємодії з зовнішнім середовищем. – Автореферат десерт. Канд. техн. Наук, –К. КНУБА, 2002. –19с.
4. *Ньюмен Дж.* Морская гидромеханика. – Ленинград: Судостроение, 1985. –368с.
5. *Работнов Ю.Н.* Элементы нелинейной механики твердых тел. – Москва: Наука. 1977. – 384с.
6. *Савін Г.М., Руцицький А.Й.* Елементи механіки спадкових середовищ. –К.: Вища школа, 1976. –252с.
7. *Шульга М.О., Безверхий О.М.* До розрахунку динамічних задач для дискретно-континуальних гнучких одномірних систем з потенціальними деформативними характеристиками // Доп. НАН України. –2004, №8. –с.59–63.

Робота виконується за підтримки Фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 01.07/00076).

Матеріал надійшов до редакції 28.05.04.

УДК 539.3

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук,
Немчинова Л.Ю.,
Отрашевська В.В.

ВПЛИВ РАДІУСА КОРЕЛЯЦІЇ СТОХАСТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА СТРУКТУРУ ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Розглядається стійкість динамічних систем, у яких зовнішнє навантаження є параметричним. Досліджується можливість стабілізації динамічних станів, обумовлених детермінованим періодичним параметричним навантаженням, за допомогою додаткового випадкового збудження. Випадкове збудження може бути як нормальним білим шумом, так і експоненціально-корельованим випадковим процесом. Аналогічні питання з використанням асимптотичних методів розглядалися у [1]. У [2] досліджувалася динамічна стійкість замкненої кругової циліндричної оболонки при експоненціально-корельованому параметричному навантаженні і на прикладі цієї задачі було показано, що при певних значеннях радіуса кореляції додаткового випадкового навантаження має місце ефект стабілізації. В даній роботі аналогічна задача розглядається для складнішого об'єкта: досліджуються динамічні стани замкненої кругової циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами.

Дискретна динамічна модель тонкостінної конструкції будується за допомогою методу криволінійних сіток [3]. Ця динамічна модель представляється рівняннями

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u + \varphi(t) K_G \bar{u} = 0, \quad (1)$$

де M , G , K , K_G – матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості відповідно, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ – n -вимірний вектор динамічних змінних, які являють собою переміщення вузлів криволінійної сітки.

Змінне в часі навантаження задається у вигляді

$$\varphi(t) = \mu_1 \sin \omega t + \mu_2 z(t), \quad (2)$$

де $z(t)$ – нормальний випадковий процес, μ_1 , μ_2 – параметри навантаження, ω – частота детерміністичної складової параметричного навантаження.

При певних комбінаціях значень інтенсивності і частоти навантаження втрачається стійкість первісного стану розглядуваної динамічної системи. Цьому стану відповідає тривіальний розв'язок системи (1). Значення, для яких стійкість зберігається, на площині параметрів утворюють суцільні області – області динамічної стійкості.

Існують різні означення стійкості стохастичних систем, це може бути стійкість за імовірністю, стійкість у середньому, по сукупності моментних функцій другого порядку, третього порядку і т.д. При аналізі стійкості відносно моментних функцій задача зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку детерміністичних диференціальних рівнянь. В даній роботі за означення стійкості приймається стійкість відносно моментних функцій другого порядку. Пропоновані методи можуть бути застосовані для дослідження стійкості відносно моментних функцій інших порядків.

Для переходу до рівнянь першого порядку вводяться фазові змінні:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2n}(t))^T = (\bar{x}_1(t) \oplus \bar{x}_2(t))^T = \\ &= (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_n(t))^T.\end{aligned}\quad (3)$$

У нових змінних система (1) набирає вигляду

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_2(t), \quad \frac{d\bar{x}_2}{dt} = -(M^{-1}K + \varphi(t)M^{-1}K_G)\bar{x}_1(t) - M^{-1}C\bar{x}_2(t). \quad (4)$$

Щоб дістати рівняння для других моментів фазових координат, складається система рівнянь відносно компонент матриці $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$. Після усереднення по реалізаціях процесу $z(t)$ в силу (2) можна записати систему матричних рівнянь відносно матриці других моментів $\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle &= (A + \mu_1 \sin \omega B) \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle + \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle (A^T + \mu_1 \sin \omega B^T) + \\ &\mu_2 B \langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle + \mu_2 \langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle B^T,\end{aligned}\quad (5)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K_G & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Оскільки матриця $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$ розмірності $2n \times 2n$ симетрична, кількість одержуваних рівнянь є надлишковою. Тому за допомогою взаємно-однозначного відображення, описаного у [2], здійснюється перехід із

множини симетричних матриць у множину $n(2n+1)$ -вимірних векторів, що складаються із елементів матриць, розташованих не нижче головної діагоналі.

Система (5) містить нові змінні $\langle zx_i x_j \rangle$ ($i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,n, j \leq i$) і незамкнена відносно других моментів. Ці нові змінні є кореляціями процесу $z(t)$ із компонентами вектора розв'язку задачі $\bar{x}(t)$. Ця типова для динамічних систем із стохастичним параметричним збудженням проблема вирішується по різному в залежності від типу стохастичного збудження ([4],[5]). Якщо у поданні (2) $z(t)$ – нормальний білий шум у розумінні Стратоновича з нульовим середнім і одиничною дисперсією, то система рівнянь відносно матриці других моментів після усереднення (5) по ансамблю реалізацій процесу $z(t)$ записується у вигляді ([5])

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t) \bar{x}(t)^T \rangle = (A + \mu_1 \sin \omega t B) \langle \bar{x}(t) \bar{x}(t)^T \rangle + \langle \bar{x}(t) \bar{x}(t)^T \rangle (A^T + \mu_1 \sin \omega t B^T) + \frac{1}{2} \mu_2^2 \left(B B \langle \bar{x}(t) \bar{x}(t)^T \rangle + 2 B \langle \bar{x}(t) \bar{x}(t)^T \rangle B^T + \langle \bar{x}(t) \bar{x}(t)^T \rangle B^T B^T \right). \quad (7)$$

Розглядається також випадок, коли $z(t)$ є експоненціально-корельованим нормальним процесом із кореляційною функцією

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad (8)$$

де α – параметр кореляції, який пов'язаний з радіусом кореляції ρ цього процесу співвідношенням $\rho = \frac{1}{\alpha}$. Таким чином, стохастична

складова параметричного збудження $\mu_2 z(t)$ має дисперсію μ_2^2 . У цьому разі вказана проблема розв'язується шляхом розширення фазового простору, у якому розглядається розв'язок. Це досягається за рахунок за рахунок апроксимації параметричного збудження $z(t)$ у вигляді скінченної суми статистично незалежних телеграфних сигналів ([6]):

$$z(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_N(t), \quad (9)$$

де взаємно-кореляційна матриця телеграфних процесів має вигляд

$$\langle \xi_i(t) \xi_i(t+\tau) \rangle = \sigma_{ij} \frac{\sigma_0^2}{N} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (10)$$

Відомо, що при $N \rightarrow \infty$ $z_N(t) \rightarrow z(t)$.

Якщо замінити в (2) $z(t)$ на $z_N(t)$, то, як показано в [6], [2], застосовуючи операцію усереднення, для дослідження стійкості можна скласти послідовність детерміністичних рівнянь відносно моментних функцій

$$\begin{aligned} m_{02}(t) &= \langle x_i(t)x_j(t) \rangle, \\ m_{12}(t) &= \langle \xi_1(t)x_i(t)x_j(t) \rangle, \\ m_{k2}(t) &= \langle \xi_1(t)\xi_2(t)\dots\xi_k(t)x_i(t)x_j(t) \rangle, \\ m_{N2}(t) &= \langle \xi_1(t)\xi_2(t)\dots\xi_N(t)x_i(t)x_j(t) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Ця система має вигляд

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix} = S_1 \times \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix}^T \times S_2, \quad (12)$$

де S_1 і S_2 блокові тридіагональні матриці, що мають вигляд

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & s_{34}^{(1)} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{N+1,N}^{(1)} & s_{N+1,N+1}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ S_2 &= \begin{pmatrix} s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} & s_{23}^{(2)} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & s_{32}^{(2)} & s_{33}^{(2)} & s_{34}^{(2)} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{N+1,N}^{(2)} & s_{N+1,N+1}^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для запису елементів матриць S_1 і S_2 введені позначення

$$s_{ii}^{(1)} = A - N\alpha E + \mu_1 \sin \omega t B, \quad s_{i,i+1}^{(1)} = (N - i + 1)B, \quad s_{i,i-1}^{(1)} = \frac{(i-1)\sigma_0^2}{N} B,$$

$$s_{ii}^{(2)} = A^T - N\alpha E + \mu_1 \sin \omega t B^T, \quad s_{i,i+1}^{(2)} = (N - i + 1)B^T, \quad (14)$$

$$s_{i,i-1}^{(1)} = \frac{(i-1)\sigma_0^2}{N} B^T.$$

Таким чином, задача про стійкість тривіального розв'язку системи (1) зводиться до задачі про стійкість тривіального розв'язку детерміністичної системи (12) із $\frac{2\pi}{\omega}$ -періодичними коефіцієнтами. Систему (11) можна подати у вигляді

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = G(t)\bar{w}, \quad (15)$$

де

$$G(t) = G_0 + H \sin \omega t. \quad (16)$$

Вектор $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_l)^T$ складається із компонент матриць m_{02} , m_{12} , ..., m_{N2} і має розмірність $p = (N+1) \frac{n(n+1)}{2}$.

Система (15) досліджується методом узагальнених показників Хілла. Розв'язок шукається у вигляді

$$\bar{w}(t) = e^{\lambda t} \left(w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (v_k \sin k\omega t + w_k \cos k\omega t) \right). \quad (17)$$

За допомогою редукції здійснюється перехід до задачі на власні значення для системи скінченного порядку. Характеристичні показники λ знаходяться як корені алгебричного рівняння

$$\det(R^* - \lambda E^*) = 0, \quad (18)$$

де R^* і E^* – редуковані матриці.. Тривіальний розв'язок буде асимптотично стійким, якщо всі характеристичні показники мають від'ємну дійсну частину і асимптотично нестійким, якщо серед характеристичних показників є хоча б один з додатньою дійсною частиною.

Уточнення границь зон динамічної стійкості здійснюється шляхом збільшення числа доданків у скінченному представленні (9).

Для адекватного моделювання пружних сил, що виникають в оболонці при параметричному навантаженні, дискретна динамічна модель (1), яка

будується за допомогою методу криволінійних сіток, повинна мати велику розмірність. Пряме використання такої моделі при аналізі динамічної стійкості пов'язане із значними обчислювальними труднощами. Для безпосередньої побудови границь областей динамічної стійкості проводиться редукція вихідної дискретної моделі (1) за допомогою методу нормальних координат. Розв'язок системи (1) представляється у вигляді суперпозиції власних форм коливань

$$\bar{u}(t) = \Phi \bar{y}(t), \quad (19)$$

де матриця Φ ортонормованих по кінетичній енергії власних форм $\bar{\varphi}_i$ ($i=1,2,\dots,m$) має розмірність $n \times m$

$$\Phi = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m), \quad (20)$$

$\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ – m -вимірний вектор узагальнених координат. Виходячи з (1) і (19) відносно компонент вектора \bar{y} записується система рівнянь

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2\varepsilon_i \omega_i \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 y_i + \varphi(t) \sum_{k=1}^m g_{ik} y_k = 0, \quad i=1,2,\dots,m, \quad (21)$$

де ω_i ($i=1,2,\dots,m$) – відповідні власні частоти оболонки, матриця

$$K_g^* = \Phi^T K_g \Phi = \{g_{ik}\}_{i,k=1}^m \quad (22)$$

– редукована матриця геометричної жорсткості. У (1) вважається, що сили опору руху, які визначаються матрицею C , що відповідають i -тій формі коливань, ортогональні j -тій формі коливань ($j \neq i$). Вважається,

що модальні параметри затухання $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_m = \frac{\delta}{2\pi}$, де δ – логарифмічний декремент.

Для редукованої системи (21) матриці A і B в представленні типу (5) відносно компонент вектора $\bar{y}(t)$ мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ K^* & C^* \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_g^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

де $K^* = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2)$, $C^* = \text{diag}(2\varepsilon\omega_1, 2\varepsilon\omega_2, \dots, 2\varepsilon\omega_m)$.

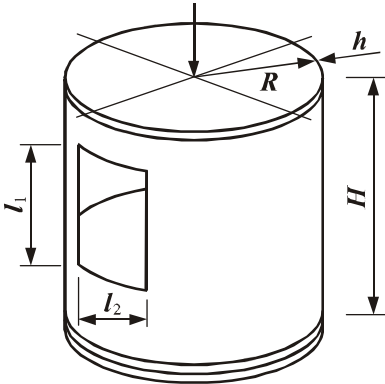


Рис. 1

Описаний підхід застосований для дослідження стійкості кругової циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами при осьовому стисненні, яке реалізується торцевими дисками, жорстко з'єднаними з оболонкою (рис. 1). Фізичні характеристики і розміри оболонки: модуль пружності

$$E = 6898 \frac{\kappa H}{\text{см}^2}, \text{ коефіцієнт Пуассона}$$

$\nu = 0,34$, радіус $R = 15,39$ см, висота $H = 22,46$ см, товщина $h = 0,03556$ см, висота отвору $l_1 = 8,256$ см, ширина отвору $l_2 = 12,087$ см, логарифмічний

декремент $\delta = 0,05$. Таким чином, $\varepsilon \approx 0,007957747$. При редукуванні системи (1) у поданні (19) використовуються три перші власні форми коливань, що відповідають частотам $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, які мають значення

$$218 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, 385 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, 393 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \text{ відповідно (див. рис. 2).}$$

Досліджується можливість стабілізації динамічних станів оболонки, обумовлених гармонійним навантаженням, частота якого лежить в межах головного простого резонансу, який відповідає мінімальній частоті власних коливань, при додатковому стохастичному навантаженні.

Розглядаються два випадки: стабілізація за допомогою нормального білого шуму і за допомогою нормального експоненціально-корельованого збудження. Спочатку для визначення рівня збудження, при якому можлива поява стабілізуючого ефекту, досліджується динамічна стійкість оболонки тільки при стохастичному навантаженні, тобто вважається що у поданні (2) $\mu_1 = 0$ і визначається значення $\mu_2 = \mu_{2\text{кр}}$, при якому оболонка втрачає стійкість.

Для визначення критичного рівня стохастичного навантаження використовуються системи (7) і (12), які при $\mu_1 = 0$ є системами із сталими коефіцієнтами. Система (7) використовується, якщо стохастичне навантаження є нормальним білим шумом, система (12) – при експоненціально-корельованому навантаженні.

Як показують дослідження в зоні головного резонансу при комбінованому навантаженні, якщо $\mu_2 > \mu_{2\text{кр}}$ у системі завжди

спостерігається втрата стійкості. Тому, розглядаючи комбіноване навантаження, природно вибрати значення μ_2 , менші ніж $\mu_{2\text{кр}}$.

Спочатку дослідження проводяться із застосуванням розрахункової моделі, побудованої за допомогою подання (19), в якому використовується тільки перша форма власних коливань $\bar{\varphi}_1$. Тобто замість системи (21) розглядається рівняння

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_1 \frac{dy}{dt} + \omega_1^2 y + \varphi(t)g_{11}y = 0. \quad (24)$$

Першим розглядається випадок, коли у поданні (2) $z(t)$ є нормальним білим шумом одиничної інтенсивності. Відомо ([6]), що в цьому випадку $\mu_{2\text{кр}}$ обчислюється за формулою

$$\mu_2^2 = \frac{4\varepsilon\omega_1^3}{g_{11}^2}. \quad (25)$$

Отже, при використанні розрахункової моделі (24) $\mu_{2\text{кр}} = 0,1511 \cdot 10^{-5}$.

В результаті проведених досліджень встановлено, що для значень $\mu_2 < \mu_{2\text{кр}}$ при комбінованому навантаженні в зоні головного параметричного резонансу рівні втрати стійкості не перевищують рівня втрати стійкості тільки при детермінованому навантаженні, яке обчислюється за формулою ([7])

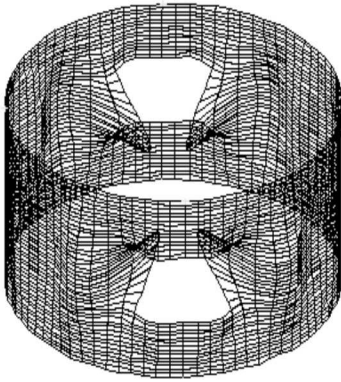
$$\mu_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{(\omega^2 - 4\omega_0^2)^2}{16\omega_0^4} + 4\varepsilon^2} \quad (26)$$

і для розглядуваної оболонки дорівнює $3,974 \cdot 10^{-6}$.

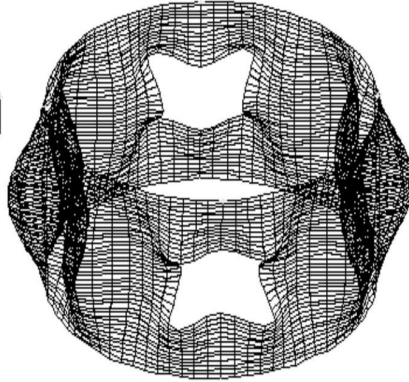
На рис. 3 показана залежність значень $\mu_{1\text{кр}}$, для яких оболонка втрачає стійкість, від μ_2 при $\omega = 2\omega_1$. Видно, що із збільшенням μ_2 до значення $\mu_{2\text{кр}} = 0,1511 \cdot 10^{-5}$ критичні значення μ_1 зменшуються. Отже у випадку, коли стохастична складова параметричного навантаження являє собою білий шум, ефект стабілізації не спостерігається.

Далі розглядається випадок, коли випадкова складова $\mu_2 z(t)$ у поданні (2) являє собою експоненціально-корельований випадковий процес, який визначається двома параметрами: стандартом корельованого сигналу μ_2 і

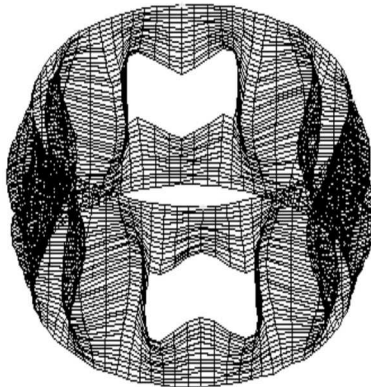
радіусом кореляції $\rho = \frac{1}{\alpha}$. Критичне значення $\mu_{2кр}$, яке визначається при $\mu_1 = 0$, залежить від радіуса кореляції. Дослідження проводилися для значень радіуса кореляції, менших від $\frac{2}{\omega_1}$. Для таких експоненціально-корельованих сигналів $\mu_{2кр}$ не менше $\mu_{2кр} = 0,31046 \cdot 10^{-4}$, що відповідає значенню $\rho = \frac{1}{2\omega_1}$.



$$\omega_1 = 218 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$



$$\omega_2 = 385 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$



$$\omega_3 = 393 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Рис. 2

Досліджується вплив радіуса кореляції для різних значень $\mu_{2кр}$. На рисунках 4, 5 і 6 наведені результати досліджень при $\mu_2 = 0,168 \cdot 10^{-4}$, $\mu_2 = 0,25 \cdot 10^{-4}$ і $\mu_2 = 0,3 \cdot 10^{-4}$ відповідно.

Для всіх кривих вказане відповідне значення радіуса кореляції. Кожна крива поділяє область площини (μ_1, ω) на дві частини, причому область стійкості параметричних коливань при комбінованому навантаженні знаходиться зліва. Товстою лінією позначена границя, побудована при відсутності стохастичної складової навантаження ($\mu_2 = 0$). Якщо для

деякого діапазону частот крива, що відповідає певному радіусу кореляції, знаходиться правіше товстої лінії, тобто додавання випадкового навантаження підвищує критичне значення μ_1 , то має місце ефект стабілізації. З рисунків видно, що така ситуація для певних значень радіуса кореляції має місце при всіх трьох розглядуваних значеннях μ_2 . Наприклад, при $\mu_2 = 0,168 \cdot 10^{-4}$ (рис. 4) стабілізація для певного діапазону частот спостерігається при

$$\rho = \frac{2}{\omega_1}, \quad \rho = \frac{1}{\omega_1}, \quad \rho = \frac{2}{3\omega_1},$$

$$\rho = \frac{1}{2\omega_1}, \text{ тобто для цих значень}$$

радіуса кореляції відповідна границя області стійкості розташована правіше товстої лінії. Для менших значень радіуса кореляції криві розташовані лівіше товстої лінії і стабілізації немає. Для

$\mu_2 = 0,25 \cdot 10^{-4}$ (рис. 5) стабілізація має місце при $\rho = \frac{2}{\omega_1}$ і $\rho = \frac{1}{\omega_1}$, для

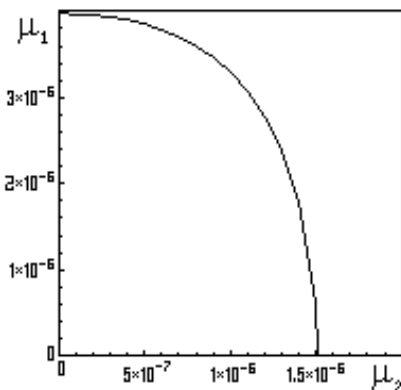


Рис. 3

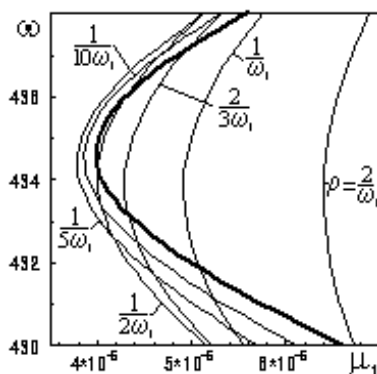


Рис. 4

$\mu_2 = 0,3 \cdot 10^{-4}$ (рис. 6) стабілізація спостерігається при $\rho = \frac{2}{\omega_1}$. При

розглядуваних значеннях μ_2 критичні амплітуди гармонійної складової при фіксованому значенні ω немонотонно залежать від радіуса кореляції стохастичної складової.

Таким чином, для розглянутих значень μ_2 при $\rho \in \left(\rho_{\min}(\mu_2), \frac{2}{\omega_1} \right) \in$

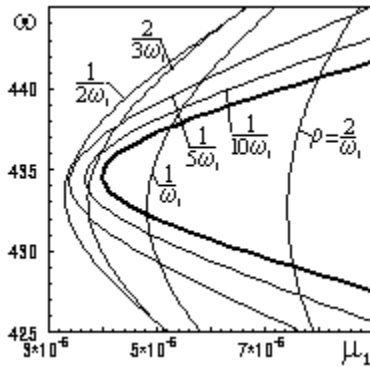


Рис. 5

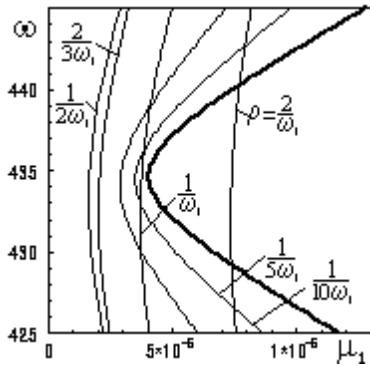


Рис. 6

стабілізація, а при $\rho \leq \rho_{\min}(\mu_2)$ має місце дестабілізація. Дестабілізуючий ефект більше позначається із зростанням значення μ_2 . Дослідження показують, що у випадку, коли стандарт стохастичної складової μ_2 менше певного рівня, стабілізація не має місця при будь-яких радіусах кореляції, менших $\frac{2}{\omega_1}$. Так, на-

приклад, при $\mu_2 = 0,67 \cdot 10^{-5}$ границі всіх областей стійкості практично співпадають з границею, обчисленою при $\mu_2 = 0$.

Наведений вище аналіз можливості стабілізації динамічних станів оболонки, обумовлених гармонійним навантаженням, частота якого лежить в околі частоти $2\omega_1$, проводився за допомогою рівняння (24). Використання другої і третьої форми власних коливань в апроксимації (19) істотно не впливає на критичні значення μ_1 , які

відповідають певним параметрам μ_2 і ρ . Це пояснюється особливостями першої форми власних коливань $\bar{\varphi}_1$ розглядуваної оболонки. Як видно з рис. 2 при вільних коливаннях по першій формі максимальні переміщення мають місце в околі отворів. Інший характер

має поле переміщень, що відповідає другій і третій формі власних

коливань (рис. 2). Як показали обчислення, відношення $\frac{g_{12}}{g_{11}} = \frac{\bar{\varphi}_1^T K_g \bar{\varphi}_2}{\bar{\varphi}_1^T K_g \bar{\varphi}_1}$ і

$$\frac{g_{13}}{g_{11}} = \frac{\bar{\varphi}_1^T K_g \bar{\varphi}_3}{\bar{\varphi}_1^T K_g \bar{\varphi}_1}$$

дуже малі і тому врахування власних форм $\bar{\varphi}_2$ і $\bar{\varphi}_3$ у поданні (19) не вносить істотних поправок в оцінку критичних значень амплітуди μ_1 гармонійної складової параметричних збуджень, яка лежить в околі частоти $2\omega_1$.

1. *Ariaratnam S.T., Tam D.S.* Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator// ZAMM, 56, 1976. – p.449-452.
2. *Баженів В.А., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В., Гончаренко М.В.* Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні//Авиационно-космическая техника и технология. Харьков “ХАИ”. – 2004.- с.51-58.
3. *Гоцуляк Е.А.*, О сеточной дискретизации векторных соотношений теории оболочек в криволинейной системе координат.//Прикладная механика: Междунар. научн. журнал. –2001. –Т.37. – №6. –С.89-94.
4. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336с.
5. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
6. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336с.
7. *Вибрации в технике. Справочник в 6 томах, том 1. Колебания линейных систем//Под ред. В.В.Болотина.* – М.: Машиностроение, 1978, 352с.

Матеріал надійшов до редакції 28.05.04.

УДК 539.3

Соловей М.О. канд. техн. наук
Кривенко О.П.

ВПЛИВ НАГРІВУ НА СТІЙКІСТЬ ГЛАДКИХ ПОЛОГИХ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЛІНІЙНО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

В реальних умовах несучі конструкції знаходяться під дією різноманітних силових і температурних полів. Врахування у розрахунках температурних навантажень призводить до появи додаткових деформацій, що може суттєво змінити жорсткість тонкої оболонки. Таким чином, врахування дії температури при дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) та стійкості гнучких оболонок дозволяє підвищити достовірність опису поведінки конструкції в процесі її експлуатації.

Для тонких оболонок сталої товщини існує певний досвід дослідження НДС та стійкості при дії термосилових навантажень [1-5]. Для підвищення загальної жорсткості та несучої спроможності застосовуються оболонки змінної товщини [4, 6-8]. Для оболонок змінної товщини врахування дії температурних полів у геометрично нелінійних задачах стійкості є мало дослідженою проблемою у зв'язку із підвищеною складністю вивчення подібних процесів нелінійного деформування.

У роботі за розробленою в [9-11] скінченноелементною методикою розглядається вплив попереднього нагріву на стійкість гнучких пологих сферичних панелей змінної товщини, що навантажуються рівномірно розподіленим тиском. Робота є продовженням виконаних раніше досліджень [6-8], де порівнювалась поведінка та несуча спроможність пологих різної змінної за меридіаном товщини гладких і гранованих оболонок жорстко затиснутих вздовж контуру при дії лише тиску (рис.1). Порівняння оболонок однакового об'єму (з однаковою витратою матеріалу), але з різними законами зміни товщини, показало [8], що більш раціональним є потовщення оболонки в її центральній частині, де вона деформується більше. Оболонки сталої товщини виявилися менш ефективними у порівнянні з оболонками змінної товщини з раціональним розподілом матеріалу.

Дію на оболонку нагріву та тиску будемо розглядати як сумісний процес навантаження, що виконується за два етапи:

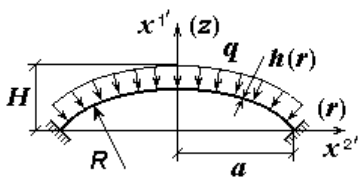
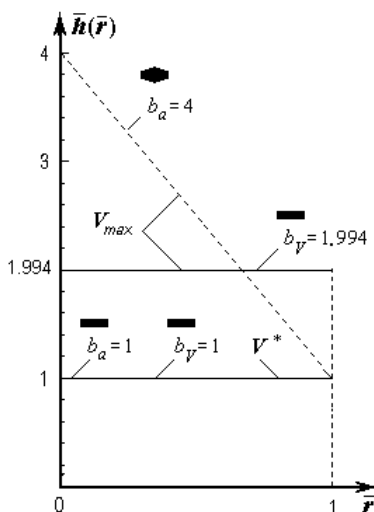


Рис. 1. Сферична панель змінної товщини

Рис. 2. Приклади функцій сталої та лінійно-змінної товщини для панелей однакових об'ємів V^* і V_{max}

навантаженні - в [10, 15, 19].

У виконаних чисельних розрахунках, як і в [6-8], приймалися наступні вихідні величини: стріла підйому $H=0.05$ м, радіус серединної поверхні $R=10.025$ м, радіус опорного контуру $a=1$ м, товщина в характерній точці $h^*=0.01$ м, модуль пружності (для сталі) $E=19.6 \cdot 10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$, коефіцієнт лінійного теплового розширення $\alpha=0.125 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$.

1. Спочатку відбувається рівномірний за об'ємом нагрів на T градусів, який супроводжується нелінійним деформуванням оболонки та зміною її напруженого стану. Це може розглядатись як попереднє збурення НДС оболонки, яке позначається на її формах деформування та втрати стійкості при подальшому силовому навантаженні.

2. На другому етапі оболонка навантажується тиском інтенсивністю q при незмінному (зафіксованому) температурному полі.

Властивості матеріалів прийняті сталими та незалежними від температури, оскільки у розглянутих задачах температура нагрівання знаходилась у допустимих межах ($-20^\circ\text{C} \div +200^\circ\text{C}$ [12]).

Достовірність та точність результатів в задачах стійкості гнучких оболонок при дії силових навантажень досліджені в [6-8, 13-16], при дії температурних навантажень - в [17, 18], при спільному термосиловому

Таблиця 1

$T, ^\circ\text{C}$	$q_{кр}, \text{МПа}$ $u'_{кр}, \text{м}$	Лінійно-змінна товщина, b_a			
		1	1.5	2	4
-10	$q_{кр}^e$	0.1870	0.2504	0.3277	0.6718
	$q_{кр}^h$	0.0517	-	0.0740	0.1947
	$u'_{кр}{}^{\text{I}e}$	-1.0030	-1.3080	-1.5870	-2.2780
	$u'_{кр}{}^{\text{I}h}$	-6.9630	-	-7.4460	-6.8890
0	$q_{кр}^e$	0.2261	0.3000	0.3783	0.7456
	$q_{кр}^h$	0.0556	-	0.0755	0.1811
	$u'_{кр}{}^{\text{I}e}$	-0.6770	-1.0486	-1.3610	-2.0574
	$u'_{кр}{}^{\text{I}h}$	-7.2451	-	-7.6960	-7.1297
20	$q_{кр}^e$	0.2826	0.4020	0.5128	0.9055
	$q_{кр}^h$	0.0640	-	0.0792	0.1564
	$u'_{кр}{}^{\text{I}e}$	-0.1882	-0.4180	-0.7432	-1.7750
	$u'_{кр}{}^{\text{I}h}$	-7.7400	-	-8.1240	-7.5850
40	$q_{кр}^e$	0.1985	0.4792	0.6103	1.0820
	$q_{кр}^h$	0.0729	-	0.0823	0.1361
	$u'_{кр}{}^{\text{I}e}$	0.0921	0.1367	0.1108	-1.5170
	$u'_{кр}{}^{\text{I}h}$	-8.1400	-	-8.4090	-8.0360
100	$q_{кр}^e$	0.1817	0.3995	0.6810	1.6170
	$q_{кр}^h$	0.1010	-	0.1002	0.0858
	$u'_{кр}{}^{\text{I}e}$	0.6449	0.5842	0.4062	-0.1053
	$u'_{кр}{}^{\text{I}h}$	-9.0390	-	-9.5650	-9.1930

Таблиця 2

$T, ^\circ\text{C}$	$q_{кр}, \text{Мпа}$ $u'_{кр}, \text{м}$	Стала товщина, b_V				
		1	1.167	1.334	1.668	1.994
-10	$q_{кр}^e$	0.1870	0.1903	0.2267	0.3356	0.4788
	$q_{кр}^H$	0.0517	0.0792	0.1148	0.2181	0.3736
	$u'_{кр}^{eH}$	-1.0030	-1.2201	-1.4280	-1.8980	2.1900
	$u'_{кр}^{HN}$	-6.9630	-6.7527	-6.4930	-6.0640	-5.7620
0	$q_{кр}^e$	0.2261	0.2226	0.2668	0.3821	0.5375
	$q_{кр}^H$	0.0556	0.0841	0.1212	0.2279	0.3901
	$u'_{кр}^{eH}$	-0.6770	-0.9607	-1.1507	-1.515	-1.9428
	$u'_{кр}^{HN}$	-7.2451	-7.0328	-6.8383	-6.3470	-6.0353
20	$q_{кр}^e$	0.2826	0.2664	0.3266	0.4788	0.6629
	$q_{кр}^H$	0.0640	0.0951	0.1351	0.2483	0.4158
	$u'_{кр}^{eH}$	-0.1882	-0.5704	-0.7690	-1.1900	-1.5560
	$u'_{кр}^{HN}$	-7.7400	-7.4894	-7.2680	-6.7680	-6.4770
40	$q_{кр}^e$	0.1985	0.2848	0.3779	0.5764	0.8051
	$q_{кр}^H$	0.0729	0.1067	0.1508	0.2689	0.4431
	$u'_{кр}^{eH}$	0.0921	-0.1897	-0.3578	-0.7175	-1.1870
	$u'_{кр}^{HN}$	-8.1400	-7.9143	-7.7470	-7.3300	-6.8660
100	$q_{кр}^e$	0.1817	0.2907	0.4338	0.8334	1.2053
	$q_{кр}^H$	0.1010	0.1430	0.1960	0.3344	0.5328
	$u'_{кр}^{eH}$	0.6449	0.5556	0.4949	0.3299	0.1677
	$u'_{кр}^{HN}$	-9.0390	-8.9523	-8.7310	-8.4970	-7.9590

Таблица 3

Оцінка впливу інтенсивності попереднього нагріву на величини критичних навантажень для панелей лінійно-змінної товщини

b_a	$\Delta(q_{кр}^e), \%$				$\Delta(q_{кр}^H), \%$			
	-10°C	20°C	40°C	100°C	-10°C	20°C	40°C	100°C
1	-17.3	25.0	-12.2	-19.6	-7.0	15.1	31.1	81.6
1.5	-16.5	34.0	59.7	33.2	-	-	-	-
2	-13.4	35.5	61.3	80.0	-2.0	4.9	9.0	33.3
4	-9.9	21.4	45.1	116.9	+7.5	-13.6	-24.8	-52.6

Таблиця 4

Оцінка впливу інтенсивності попереднього нагріву на величини критичних навантажень для панелей сталого товщини

b_V	$\Delta(q_{кр}^e), \%$				$\Delta(q_{кр}^H), \%$			
	-10°C	20°C	40°C	100°C	-10°C	20°C	40°C	100°C
1	-17.3	25.0	-12.2	-19.6	-7.0	15.1	31.1	81.6
1.167	-14.5	19.7	27.9	30.6	-5.8	13.1	26.9	70.0
1.334	-13.8	24.1	43.6	64.9	-5.3	11.5	24.4	61.7
1.668	-12.2	25.3	50.8	118.1	-4.3	9.0	18.0	46.7
1.994	-10.9	23.3	49.8	124.2	-4.2	6.6	13.6	36.6

Досліджується вплив інтенсивності попереднього нагріву на стійкість гладких панелей (рис. 1) з раціональним (згідно до [8]) розподілом лінійно-змінної товщини $h(\bar{r})$ (рис. 2)

$$h(\bar{r}) = h^* [1 + (b_a - 1)(1 - \bar{r})]. \quad (1)$$

В (1) і на рис. 2 прийняті наступні позначення:

$\bar{r} = r/a$, r - радіальна координата точки панелі у плані, $h^* = h_{\bar{r}=1}$,
 $b_a = h_{\bar{r}=0}/h^*$ - безрозмірний параметр функції лінійно-змінної товщини
 (1), $\bar{h}(\bar{r}) = h(\bar{r})/h^*$ - функція відносної товщини.

Цікавим є одночасне порівняння процесів деформування та втрати стійкості панелей лінійно-змінної товщини (1) об'ємом V з панелями сталої товщини h_V того ж об'єму. Відповідна товщина h_V знаходиться за формулою

$$h_V = V/(2\pi HR). \quad (2)$$

Панелі сталої товщини (2) будемо характеризувати безрозмірним параметром $b_V = h_V/h^*$.

Дослідження проводилися при зміні параметрів товщини оболонок у межах [8]

$$1 \leq b_a \leq 4, \quad 1 \leq b_V \leq 1.994 \quad (\text{при } V^* \leq V \leq V_{max}) \quad (3)$$

з $b_a=1, 1.5, 2, 4$ та відповідно з $b_V=1, 1.167, 1.334, 1.994$. Межі змін параметрів показані на рис. 2. В розглянутих варіантах розрахунків рівномірний нагрів панелей виконувався на $T=-10^\circ, 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 100^\circ\text{C}$. Результати розрахунків оболонок лінійно-змінної товщини наведені в табл. 1, сталої товщини - в табл. 2. Аналіз досліджень представлений в табл. 3, табл. 4 та на рис. 3 - рис. 11. В табл. 3 і 4 подане розходження Δ величин $q_{кр}^e$ та $q_{кр}^H$ нагрітих і ненагрітих ($T=0^\circ\text{C}$) панелей.

На першому етапі термосилового навантаження, на якому відбувається нагрів, форма деформування панелей практично не залежить від товщини, як для лінійно-змінної (рис. 5), так і для сталої (рис. 7).

На другому етапі нагріті оболонки при навантаженні тиском втрачають стійкість, яка для оболонок різної товщини з різними інтенсивностями попереднього нагріву має свої особливості.

Аналіз впливу зміни товщини оболонок на величину верхнього критичного навантаження $q_{кр}^e$ показує (рис. 3, табл. 3 і 4), що при збільшенні об'єму оболонки величина її критичного навантаження зростає при нагріві і знижується при охолодженні. Узагальнюючи, можна зробити висновок, що практично для всіх варіантів нагріву для панелей лінійно-змінної товщини це збільшення має лінійний характер (рис. 3,а), а для панелей сталої товщини - параболічний (рис. 3,б). Винятком є попередній нагрів оболонок сталої товщини у діапазоні $-10^\circ\text{C} \div +20^\circ\text{C}$.

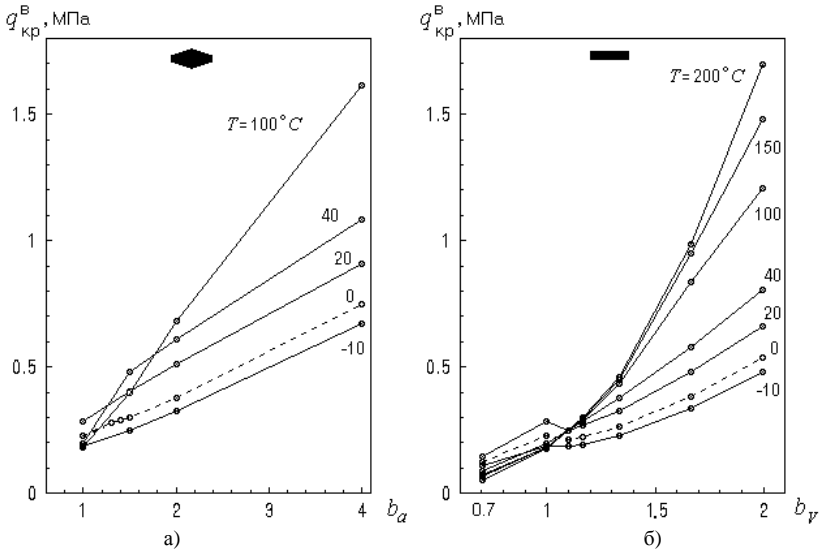


Рис 3. Залежність $q_{кр}^B$ від параметра товщини при попередньому нагріві:

а) для панелей лінійно-змінної товщини; б) для панелей сталої товщини

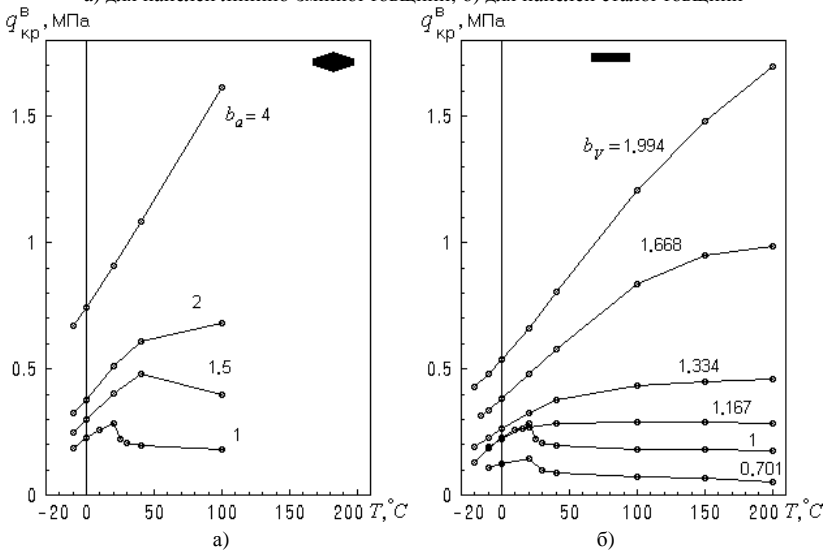


Рис 4. Залежність $q_{кр}^B$ від температури попереднього нагріву при різних параметрах товщини: а) для панелей лінійно-змінної товщини; б) для панелей сталої товщини

Причиною цього є подібна до описаної в [8] (де нагрів відповідав 0°C) перебудова форм деформування та втрати стійкості для оболонок сталюї товщини у межах $0.95 \leq b_V \leq 1.167$.

Збільшення величини температури попереднього нагріву неоднаково діє на втрату стійкості оболонок різної товщини (рис. 4). Нагрів відносно тонких панелей ($b_a=1 \div 1.5$ та $b_V=1 \div 1.167$) більш ніж на 20°C призводить до зменшення $q_{кр}^e$. Нагрів відносно товстих панелей ($b_a=2 \div 4$ та $b_V=1.334 \div 1.994$) призводить до поступового зростання величини верхнього критичного навантаження $q_{кр}^e$. Для відносно тонких панелей сталюї товщини (рис. 4,б) при нагріві в межах $50^{\circ}\text{C} - 200^{\circ}\text{C}$ характерна стабілізація величини $q_{кр}^e$.

Виявлені нелінійні залежності в зміні $q_{кр}^e$ від зміни інтенсивності попереднього нагріву для оболонок різної товщини (рис. 3, рис. 4) пояснюються відповідною еволюцією їх форм деформування та втрати стійкості (рис. 5 - рис. 12). Зображені форми дають можливість проаналізувати з одного боку, як змінюються форми втрати стійкості панелей визначеної товщини в залежності від величини попереднього нагріву (рис. 6, рис. 8), з іншого - як еволюціонують форми втрати стійкості панелей різної товщини при однакових нагривах (рис. 9, рис. 10).

Для відносно тонких панелей лінійно-змінної товщини ($b_a=1 \div 2$) у межах зміни температури попереднього нагріву ($+20^{\circ}\text{C} \div +40^{\circ}\text{C}$) характерною є форма втрати стійкості з утворенням кільцевої вм'ятини у середній частині меридіану. При нагриванні на $+100^{\circ}\text{C}$ для відповідної форми втрати стійкості спостерігається просідання центральної частини панелі. Для охолодженої на $-$

10°C оболонки втрата стійкості відбувається з проклацуванням її центральної частини.

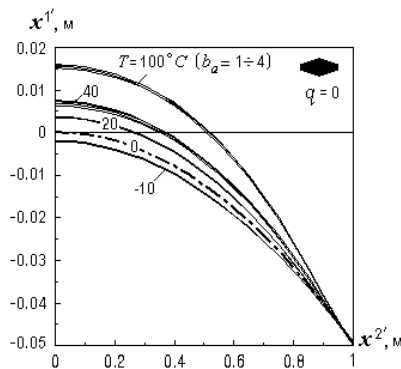


Рис. 5. Порівняння форм деформування панелей лінійно-змінної товщини при різних величинах нагривів

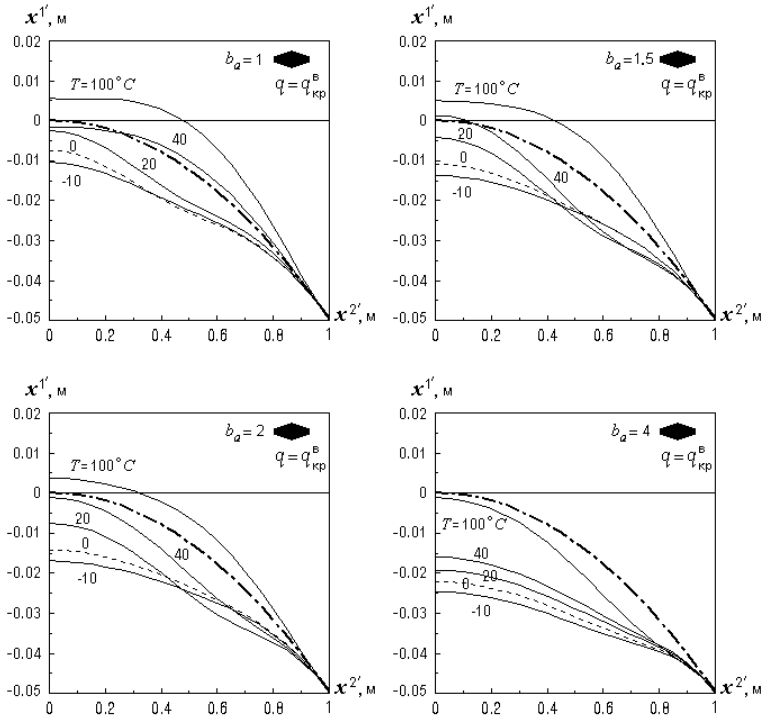


Рис. 6. Порівняння форм втрати стійкості панелями лінійно-змінної товщини при різній інтенсивності попереднього нагріву

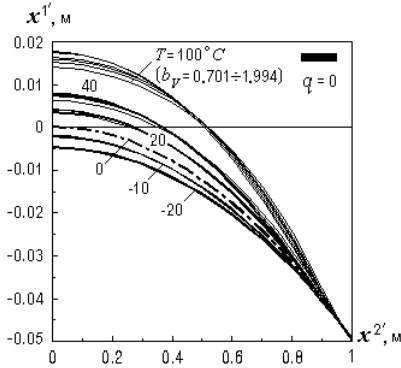


Рис. 7. Порівняння форм деформування панелей сталі товщини при різних величинах нагрівів

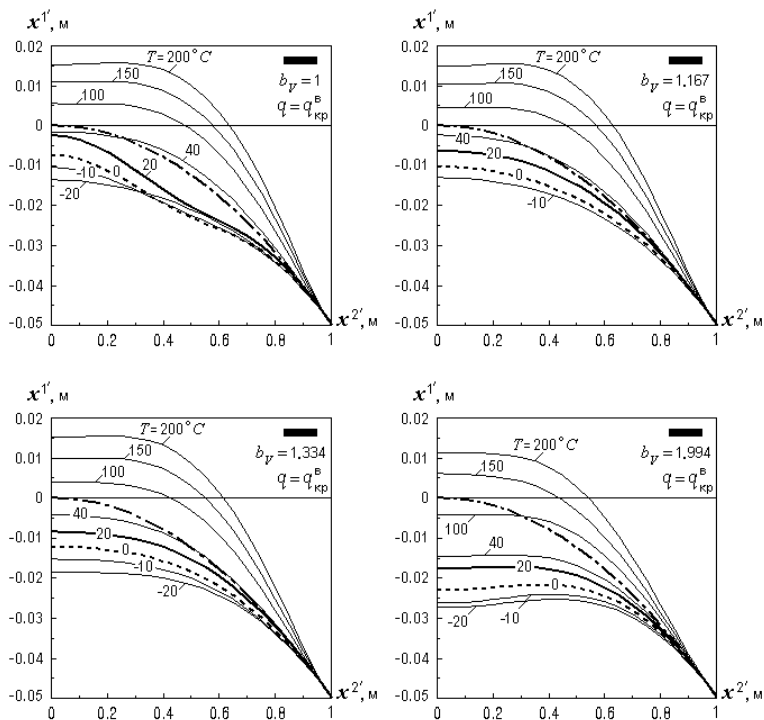


Рис. 8. Порівняння форм втрати стійкості панелями сталюї товщини при різній інтенсивності попереднього нагріву

Аналіз форм деформування оболонок сталюї товщини при нагріві та втраті стійкості поданий на рис. 11 і рис. 12. При охолодженні ($T < 0^\circ\text{C}$) відбувається просідання вихідної форми панелі ($T = 0^\circ\text{C}$), а при нагріві ($T > 0^\circ\text{C}$) - її підйом (рис. 11). При попередньому нагріві у межах $-20^\circ\text{C} \div +20^\circ\text{C}$ та зміні параметра товщини $0.701 \leq b_V \leq 1$ форма втрати стійкості характеризується утворенням кільцевої вм'ятини у середній частині меридіану (рис. 12). В інших межах зміни цих параметрів втрата стійкості відбувається через прокладування центральної частини панелі.

Таким чином, для гладких оболонок сталюї та лінійно-змінної товщини маємо суттєвий вплив величини температури попереднього нагріву на величину критичних навантажень, на характер залежностей величин верхніх критичних навантажень від товщини панелей, на форми деформування та втрати стійкості при різних інтенсивностях нагріву.

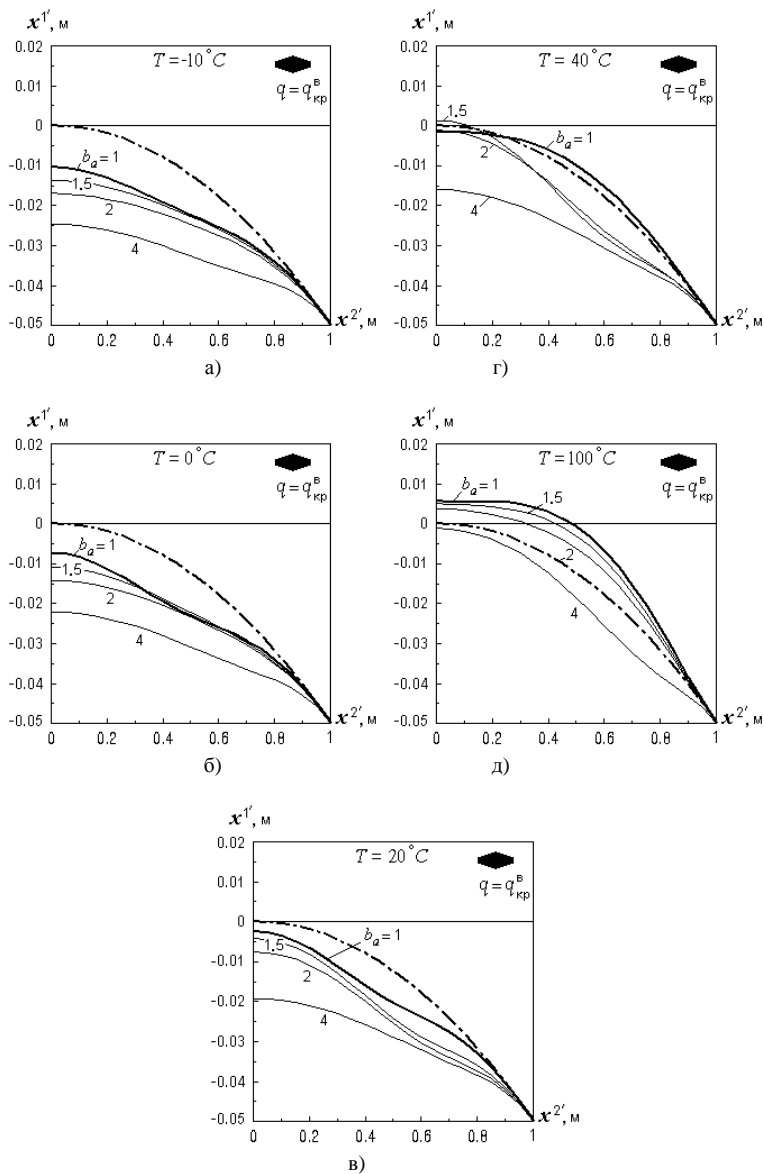


Рис. 9. Порівняння форм втрати стійкості панелями різної лінійно-змінної товщини при однаковій інтенсивності попереднього нагріву

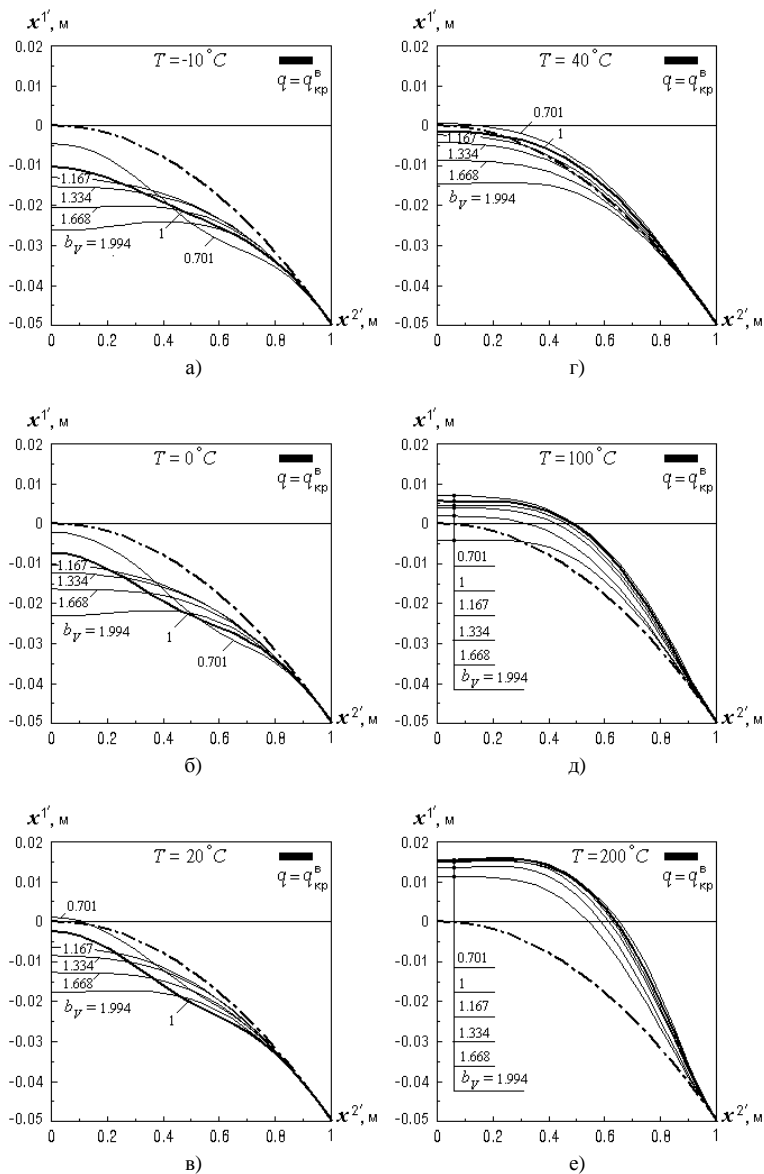


Рис. 10. Порівняння форм втрати стійкості панелями різної сталі товщини при однаковій інтенсивності попереднього нагріву

$T < 0^\circ \text{C}$

$T = 0^\circ \text{C}$

$T > 0^\circ \text{C}$

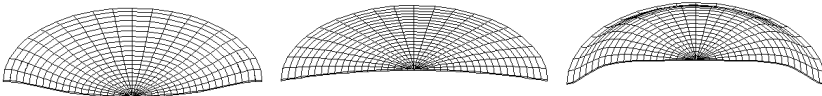


Рис. 11. Форми деформованих панелей сталюї товщини після попереднього нагрівання

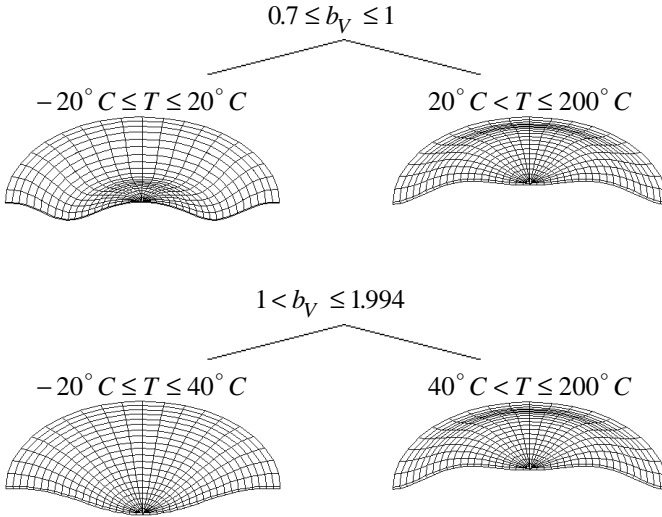


Рис. 12. Форми втрати стійкості нагрітих панелей сталюї товщини від навантаження тиском

Описані результати досліджень, в яких врахована додаткова дія температурного нагріву, підтверджують факт більшої ефективності та несучої спроможності панелей лінійно-змінної товщини у порівнянні з панелями сталюї товщини.

1. *Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.* Расчет конструкций на тепловые воздействия. - М.: Машиностроение, 1969. - 600 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.
3. *Григолок Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. - М.: Наука, 1978. - 360 с.
4. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. - К.: Наукова думка, 1974. - 136 с.
5. *Огибалов П.М., Грибанов В.Ф.* Термоустойчивость пластин и оболочек. - М.: Изд-во МГУ, 1968. - 520 с.
6. *Бажанов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Вплив змінної товщини на стійкість пологих панелей при дії рівномірного тиску // Системні технології. Математичні проблеми

- технічної механіки. Збірник наукових праць. - Випуск 4(27).- Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2003. - С. 15-20.
7. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // *Авиационно-космическая техника и технология.* - 2004. - № 2 (10). - С. 18-25.
 8. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 2003 р. - Вип. 72. - С. 83-96.
 9. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатощарових оболонок при термосилових навантаженнях // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КДТУБА, 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
 10. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П., Аят Н.* Стійкість гнучких оболонок в умовах складного термосилового навантаження // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КДТУБА, 1999. - Вип. 65. - С. 75-90.
 11. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінчених елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
 12. *Металлические конструкции. В 3-х томах. Т 1. Элементы стальных конструкций: Учеб. пособие для строит. вузов / В.В.Горев, Б.Ю.Уваров, В.В. Филиппов и др.; Под ред. В.В.Горева.* - М.: Высш. школа, 1997. - 527 с.
 13. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // *Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: доклады XVII Международной конференции. Доклады.* - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
 14. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гладких ребристих та послаблених вирізаних гнучких пологих панелей // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 2000 р. - Вип.67. - С. 92-103.
 15. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гнучких пологих панелей ступінчато-змінної товщини // *Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Збірник наукових праць.* - Випуск 2(13).- Спец. вип. - Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2001. - С. 7-11.
 16. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив параметрів ребер на стійкість гнучких панелей // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 2001 р.- Вип. 69. - С. 18-24.
 17. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив кривини на стійкість гнучких пологих панелей, що нерівномірно нагріваються // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 18-21.
 18. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // *Проблемы прочности,* 1999. - № 5. - С. 96-100.
 19. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості гнучких оболонок при різних законах нерівномірного нагріву // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 2002 р. - Вип. 70. - С. 104-109.

Матеріал надійшов до редакції 31.05.04.

УДК 721.011:56:539.3

Кобієв В.Г., к.т.н., с.н.с.

Барабаш М.С., к.т.н., м.л.н.с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗРАХУНКУ ТОНКОСТІННИХ ОБ'ЄКТІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДЕМО-ВЕРСІЇ СИСТЕМИ NASTRAN

Потреба проектних і науково-дослідних організацій в універсальних, швидких, надійних і зручних для користувача програмних засобах, що реалізують широкий спектр розрахунків (статичних, динамічних, теплових і ін.) зростає. В даний час широко відомими промисловими комплексами скінченноелементного аналізу є NASTRAN, ANSYS, LIPA, SCAD, STARK [1,2].

Певний інтерес представляє програмний комплекс NASTRAN, орієнтований в першу чергу на підготовку повноцінної скінченноелементної моделі з максимальними можливостями моделювання, обліку особливостей геометричного, силового характеру і виконання різних видів розрахунків. NASTRAN має велику скінченноелементну базу, тому його використання є ефективним для моделювання процесів деформування конструкцій, опис властивостей яких вимагає застосування різних типів скінченних елементів.

Проте урахування ряду специфічних явищ, що виникають в реальних умовах експлуатації різного виду відповідальних просторових інженерних споруд складної конфігурації, які мають форму тонкостінних об'єктів, зокрема пластин та оболонок, вимагає розширення скінченноелементної бази. Споруди в екстремальних умовах можуть зазнавати впливів динамічного навантаження значної інтенсивності, при яких переміщення пластин та оболонок можуть перевищувати їхню товщину. Розгляд таких явищ приводить до необхідності розв'язання складних нестационарних задач геометрично нелінійного динамічного деформування тонкостінних просторових конструкцій.

Розглянемо нелінійне пружне деформування тонкостінного об'єкта у вигляді оболонки довільної конфігурації, що знаходиться під впливом динамічних навантажень на інтервалі часу $\tau \in [t_0, t_1]$. Задача розв'язується у тривимірній постановці [3]. Опис кінематики руху, геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в базисній декартовій системі координат Z^i (тут і далі латинські індекси, крім оговорених, мають значення від 1 до 3). Для опису напружено-деформованого

стану оболонки запроваджується місцева лагранжева криволінійна система координат X^i , природно пов'язана з геометрією тіла оболонки. Зв'язок між базисною і місцевою системами координат у будь-якій точці тіла оболонки визначається однозначно за допомогою прямого і зворотнього тензорів перетворення координат [4].

Метрика базисної системи координат Z^i характеризується метричним тензором g^i . Переміщення будь-якої точки тіла оболонки визначається вектором переміщень u з компонентами в базисній системі координат u_i . Деформації виражаються тензором деформацій Коші-Гріна \mathcal{E} , що характеризує різницю між значенням метричних тензорів місцевої системи координат g до і G після деформації оболонки. Цей тензор представляється у вигляді двох складових – лінійної \mathcal{E}_{ij}^n (тензор нескінченно малих деформацій) та нелінійної \mathcal{E}_{ij}^H частин. Компоненти тензора деформацій \mathcal{E} в місцевій системі координат можуть бути виражені через компоненти переміщень у базисній системі координат.

Компоненти тензора напружень σ в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій \mathcal{E} на основі узагальненого закону Гука.

Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона (принцип стаціонарності функціоналу енергії рухомої системи матеріальних точок на її дійсних переміщеннях у межах скінченного інтервалу часу), рух тіла можна описати наступним варіаційним рівнянням [5]:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \ddot{u}^i \delta u_i dV + \int_V \sigma^{ij} \delta \mathcal{E}_{ij} dV - \int_V f^i \delta u_i dV - \int_S p^i \delta u_i dS dt = 0. \quad (1)$$

Розв'язання цього рівняння при початкових умовах

$$u(Z^i, t_0) = u_0(Z^i); \quad \dot{u}(Z^i, t_0) = \dot{u}_0(Z^i), \quad Z^i \in V, \quad (2)$$

дає змогу отримати всі характеристики руху тіла (u, \dot{u}, \ddot{u} та інші).

Для розв'язання задачі використовується просторова дискретизація на базі моментної схеми методу скінченних елементів (МССЕ) [6]. Використовується призматичний шестигранний ізопараметричний скінченний елемент із полілінійним законом розподілу розв'язуючих функцій у його межах.

Відповідно до процедури МССЕ область, яку займає скінченний елемент (СЕ), відображається на куб з одиничними ребрами. Початок місце-

вої системи координат X^i знаходиться у геометричному центрі O скінченного елемента, а її вісі спрямовані уздовж ребер СЕ.

Вводяться такі гіпотези: щільність матеріалу ρ , тензор пружних констант d^{ijkl} та визначник метричного тензора g незначно змінюються в межах СЕ і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі.

Компоненти вузлових переміщень, швидкостей та прискорень СЕ в базисній системі координат $(u : \dot{u} : \ddot{u})^{k'}$ апроксимуються лінійними поліномами Лагранжа і представляються згідно з полілінійним законом їхнього розподілу у межах СЕ. У центрі СЕ ці характеристики виражаються через вузлові значення означених функцій.

Ізопараметричність СЕ полягає в тому, що для опису його параметрів застосовуються ті ж самі вузлові (опорні) точки і та ж сама функція форми, що і при апроксимації розв'язуючих функцій. Тензори деформацій \mathcal{E} і напружень σ представляються у центрі O ($X^i = 0$) у вигляді ряду Маклорена, число членів якого знаходиться у точній відповідності із порядком полінома, що апроксимує переміщення.

Вихідним співвідношенням при визначенні вузлових реакцій СЕ є вираз варіації потенціальної енергії системи. Зауважимо, що побудова основних співвідношень МССЕ для геометрично нелінійних задач виконується за методикою, аналогічною до випадку отримання основних співвідношень у лінійній постановці. Ця особливість дозволяє значно спростити процедуру побудови геометрично нелінійних рівнянь на основі лінійних співвідношень МССЕ. Матрицю мас отримуємо, розглядаючи варіацію кінетичної енергії СЕ.

Варіація роботи зовнішніх сил δA_{CE} , прикладених до СЕ, визначається через вузлові компоненти вектора проєкцій у базисній системі координат масових $\{\{f^{k'}\}_{(S_1 S_2 S_3)}\}$ та поверхневих $\{\{p^{k'}\}_{(S_1 S_2 S_3)}\}$ навантажень.

Виконуючи просторову та часову дискретизацію виразу (1), отримуємо наступне рівняння руху для скінченного інтервалу часу τ ($t_0 \leq \tau \leq t_1$):

$$[M]\{\ddot{u}\}^\tau + \{R_\sigma\}^\tau = \{Q\}^\tau, \quad t_0 \leq \tau \leq t_1. \quad (3)$$

В цьому виразі матриця $[M]$ та вектори $\{R_\sigma\}$ і $\{Q\}$ отримані внаслідок обходу скінченноелементної області та процедури об'єднання відповідних компонентів матриць мас - $[m]$ і матриці реакцій - $\{g\sigma\}$ кожного СЕ та вектора $\{q\}$ – для зовнішнього навантаження. Вектор $\{\ddot{u}\}$ скомпонований із прискорень вузлів повної скінченноелементної моделі об'єкта.

Чисельне інтегрування рівнянь руху (3) за часом здійснюється на основі неявної скінченно-різницевої схеми прямого інтегрування Ньюмарка

[7]. Ця схема забезпечує безумовну стійкість процесу обчислення незалежно від кроку інтегрування за часом та належну точність результатів.

Виходячи із загального підходу Ньюмарка – методу лінійної залежності між прискореннями на проміжку часу τ – значення переміщень, швидкостей та прискорень у момент часу $t+\Delta t$ представляються через значення цих же параметрів на попередньому кроці за часом по відповідних скінченно-різницевиx формулах. На основі цих формул перший член рівняння руху (3) на часовому кроці $t+\Delta t$ представляється у формі

$$[M]\{\ddot{u}\}^{t+\Delta t} = \{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} - \{\bar{\bar{R}}_\rho\}^t, \quad (4)$$

де $\{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} = a_0[M]\{u\}^{t+\Delta t}$, $\{\bar{\bar{R}}_\rho\}^t = [M]\{a_0\{u\}^t + a_2\{\dot{u}\}^t + a_3\{\ddot{u}\}^t\}$.

Вищезначене дозволяє записати систему рівнянь руху тіла у вигляді:

$$\{R_\sigma\}^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} = \{\mathcal{Q}\}^{t+\Delta t}, \quad (5)$$

де $\{\mathcal{Q}\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t} + \{\bar{\bar{R}}_\rho\}^t$ - ефективний вектор зовнішнього навантаження, який враховує інерційні сили попереднього кроку.

На кожному кроці процедури інтегрування системи рівнянь руху за часом виконується процедура розв'язання системи нелінійних рівнянь за методом Ньютона-Канторовича [8]. Згідно з цим методом розв'язання рівнянь (5) зводиться до ітерацій за Ньютоном по формулах

$$\{u\}_{i+1}^{t+\Delta t} = \{u\}_i^{t+\Delta t} + [K]_{i+\Delta t}^{-1}[\{\mathcal{Q}\}^{t+\Delta t} - \{R\}_i^{t+\Delta t}], \quad (6)$$

де $\{R\}_i^{t+\Delta t}$ - вектор вузлових реакцій на ітерації i кроку $t + \Delta t$ ($i = 1, 2, \dots$); $\{R\}_i^{t+\Delta t} = \{R_\sigma\}_i^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_i^{t+\Delta t}$; $[K]$ - ефективна матриця жорсткості, що враховує вплив динамічних зусиль на кроці $t+\Delta t$, $\{u\}_{i+1}^{t+\Delta t}$, $\{u\}_i^{t+\Delta t}$ - значення вузлових переміщень в момент часу $t + \Delta t$ на ітераціях $i+1$ та i відповідно.

На кожному кроці за часом ітераційний процес закінчується на ітерації i , при умові:

$$\|\{\Delta u\}_i^{t+\Delta t}\| \leq \varepsilon \|\{\Delta u\}^{t+\Delta t}\|, \quad (7)$$

де $\{\Delta u\}_i^{t+\Delta t}$ - прирости переміщень на ітерації i у момент часу $t + \Delta t$;
 $\{\Delta u\}^{t+\Delta t} = \sum_{i=1}^I \{\Delta u\}_i^{t+\Delta t}$ - вектор прирощень переміщень у момент часу

$t + \Delta t$; $\|\{\Delta u\}\| = \|\{\Delta u\}\|^2$; \mathcal{E} - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Після одержання значень переміщень у момент часу $t + \Delta t$ за відповідними формулами обчислюються швидкості та прискорення для даного моменту часу. Далі остаточно визначаються координатні значення переміщень і інших параметрів деформованого стану оболонки у момент часу $t + \Delta t$.

Представлена методика розв'язання нелінійних рівнянь руху оболонок реалізована у вигляді комплексу структурованих обчислювальних блоків. Основними етапами процесу розв'язання задачі є послідовно вкладені цикли по кроках інтегрування за часом та ітераціями. Формування і розв'язання нелінійних рівнянь руху виконується на кожному кроці за часом. Формування ефективних матриць жорсткості $[K]^{t+\Delta t}$, матриць жорсткостей $[K] = [[K]_{(S_1, S_2, S_3)}]$, матриці мас $[M] = [[M]_{(S_1, S_2, S_3)}]$ та прямий хід методу Гауса відбувається на першій ітерації першого кроку за часом. Навантаження визначаються окремим блоком, що базується на формулах для $\{q\} = \{\{q^{k'}\}_{(S_1, S_2, S_3)}\}$, $\{\bar{R}_p\}^t$ і відповідно обчислює поелементні вклади поверхневих та об'ємних сил, додаткових інерційних сил та внутрішніх реакцій. Розв'язання систем рівнянь для поточного переміщення здійснюється обчислювальним блоком, що реалізує метод Гауса. Обчислення швидкостей та прискорень для поточного моменту часу рухомого об'єкту здійснює спеціальний блок за методом Ньюмарка.

Запропонована вище методика та її програмна реалізація, засновані на використанні MCCE і безумовно стійкої неявної різницевої схеми наскрізної лічби за Ньюмарком в поєднанні з процедурою Ньютона-Канторовича, дозволяють розв'язувати широке коло геометрично нелінійних задач динамічного деформування пружних оболонок при різних інтервалах часу дії зовнішніх навантажень, включаючи імпульсивні навантаження.

Нижче наведено порівняння збіжності результатів розрахунку при розв'язанні низки тестових задач за допомогою програмного комплексу NASTRAN та MCCE [9]. Для порівняльного аналізу скінченноелементної бази програмного комплексу NASTRAN і комплексу, що використовує MCCE, було проведено ряд досліджень стосовно різних типів скінченних елементів.

В першій тестовій задачі була розглянута пластина розміром 2.0×2.0 м, товщиною 0.01 м під дією рівномірно-розподіленого навантаження, спрямованого перпендикулярно до поверхні пластини ($q = 10^5$ Н/м²). В розрахунковій схемі використана чверть пластини із скінченноелемент-

ним розбиттям сіткою 5x5. Для її розрахунку в програмному комплексі NASTRAN використовувався двовимірний скінчений елемент типу «Plate» - «Пластина». Граничні умови – жорстке закріплення від переміщень і від поворотів. Порівняльний аналіз результатів розрахунку наведено в таблицях 1, 2. Деформована схема представлена на рис. 1.

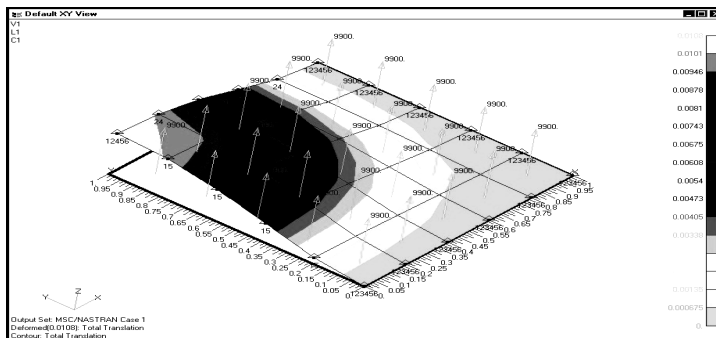


Рис. 1. Деформована схема пластини

Таблиця 1

Статичний лінійний розрахунок пластини

Методика	Максимальне переміщення, м	Похибка, %
MCCE	0.01048	0.007
NASTRAN	0.01080	3.050
Еталон [10]	0.01040	-

Таблиця 2

Статичний нелінійний розрахунок пластини

Методика	Максимальне переміщення, м	Похибка, %
MCCE	0.00785	0.60
NASTRAN	0.00813	2.91
Еталон[11]	0.00790	-

З таблиць 1 та 2 видно, що застосування MCCE забезпечує менші похибки обчислення переміщень.

У наступній тестовій задачі розглянута циліндрична оболонка $\left(\frac{R}{L} = 0.45\right)$, розміром у плані $R\sqrt{2} \times L/2$, (де R – радіус кривизни середньої поверхні, $R=1.12$ м; $L = 2.5$ м – розмір в плані), навантажена рівномірно розподіленим зовнішнім тиском ($q = 10^5$ Н/м²). При розрахунку, як і в попередньому прикладі, використовується двовимірний скінченний елемент типу «Plate» («Пластина»), розбиття скінченноелементною сіткою 4x8. Розрахункова схема показана на рис. 2, деформована схема на рис. 3. Результати порівняльного аналізу наведені в таблиці 3. В таблиці 4 наведені результати динамічного розрахунку.

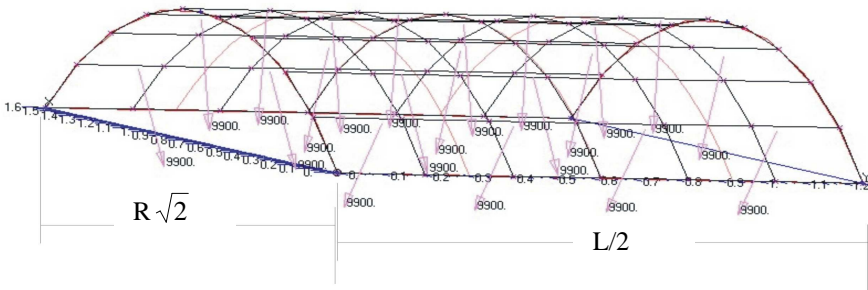


Рис. 2. Розрахункова схема циліндричної оболонки

Таблиця 3

Статичний лінійний розрахунок оболонки

Методика	Максимальне переміщення, м	Похибка, %
MCCE	0.0609	2.30
NASTRAN	0.0529	11.0
Еталон[12]	0.0595	-

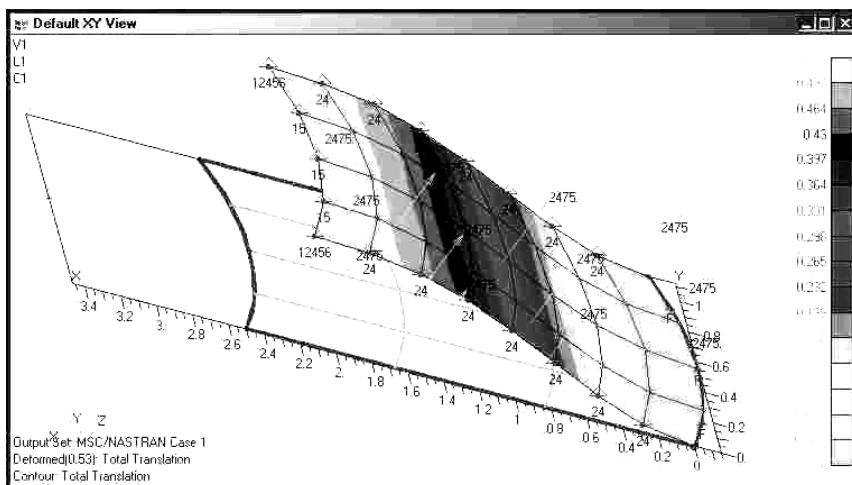


Рис. 3. Деформована схема циліндричної оболонки

Таблиця 4

Динамічний розрахунок оболонки

Постановка задачі	Прогин в точці А по МССЕ, м	Еталонний розв'язок [13], м	Похибка, %
Лінійна	0.12001	0.11350	1.9
Нелінійна	0.08038	0.08010	1.1

Як видно, у даних випадках розв'язок, отриманий за МССЕ, має значно меншу похибку.

В цілому, наведені результати дозволяють зробити висновок, що застосування моментної схеми методу скінченних елементів дає більш точний розв'язок вищезазначеного класу задач. Результати інженерних розрахунків для широкого кола задач можуть бути отримані на основі одного, розробленого за МССЕ, просторового скінченного елемента без залучення скінченних елементів спеціального виду.

1. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows.- М.: ДМК Пресс, 2001. – 448с.
2. *Городецкий А.С., Евзеров И.Д., Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Городецкий Д.А.* Метод конечных элементов: теория и численная реализация. Программный комплекс «ЛИРА-WINDOWS». К., 1997, Факт, 137с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Кобієв В.Г., Поминальник С.М.* Чисельне розв'язання диференціальних рівнянь руху оболонок на основі неявної скінченноелементної схеми прямого інтегрування Ньюмарка. Зб. Опір матеріалів і теорія споруд, вип. 72, Київ: КНУБА, 2003. – с.3 – 19.
4. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков, ХГУ, 1964г. – 481с.
5. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. –М.: Мир, 1965. –408 с.
6. *Сахаров А.С., Кислокий В.Н.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища школа, 1982. – 478с.
7. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. –М.: Стройиздат, 1982. – 447с.
8. *Баженов В.А., Цихановський В.К., Кислокий В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – Київ: КНУБА, 2000. – 386с.
9. *Барабаш М.С., Кобієв В.Г.* Інструментальні засоби автоматизованого розрахунку просторових конструкцій на дію статичних та динамічних навантажень. Сб. Опір матеріалів і теорія споруд, вип. 73, Київ: КНУБА, 2003. – с.45 – 52.
10. *Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д.* Расчет пластин. – Киев: Будівельник, 1970.
11. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки. –М: Физматиздат, 1948. – 460 с.
12. *Авдонин А.С.* Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1969.
13. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 983 с.

Матеріал надійшов до редакції 02.06.04.

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук

ФОКУСУВАННЯ ПЛОСКОЇ РОЗРИВНОЇ ХВИЛІ АНІЗОТРОПНИМИ ЛІНЗАМИ МАЛОЇ КРИВИНИ

Дослідження явищ фокусування і розсіювання нестационарних розривних хвиль поверхнями та межами розділу середовищ з різними механічними властивостями має місце в сейсмології та сейсморозвідці. Воно особливо актуальне у випадках, коли необхідно аналізувати пружно-деформований стан земних порід з неоднорідними включеннями та поблизу їх вільних поверхонь. В гірничій справі такі ситуації виникають при визначенні міцності та стійкості гірських виробок, у будівництві – при вивченні динамічної поведінки наземних і підземних споруд під впливом сейсмічних і вибухових хвиль. Особливості цих явищ полягають у тім, що вони можуть супроводжуватися концентрацією механічної енергії (кінетичної і потенційної) у зонах фокусування фронтів розривних хвиль на криволінійних ділянках вільних поверхонь гірських порід та шарами порід перемінної товщини з різними механічними властивостями, що посилює дії цих хвиль. Для постановки та розв'язування таких задач в теорії пружності використовуються методи геометричної оптики, як то нульове наближення променевого методу [1, 2, 5].

§1. Постановка задачі. Динамічний стан середовища, яке має щільність $\rho = const$ і параметри пружності c_{ikpq} , в декартовій системі координат $O x_1 x_2 x_3$ в момент часу t визначається вектором пружних переміщень його частинок $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$, котрий задовольняє рівняння руху [7]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \frac{c_{ikpq}}{\rho} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

з початковими умовами $\vec{u} = \vec{u}_0$, $\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}_0$ та деякими граничними умовами.

В анізотропних середовищах виникає три по різному поляризовані розривні хвилі [7]. Поверхня фронту кожної з них ($r = 1, 2, 3$) може бути представленою співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (2)$$

в якому τ – функція, що задовольняє диференціальним рівнянням [6, 8]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{c_{ikpq}}{\rho} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (3)$$

де: $p_k \equiv \partial\tau/\partial x_k = n_k/v_r(\bar{n})$ – компоненти вектора рефракції, \bar{n} – нормаль до фронту хвилі, v_r – модуль вектора фазової швидкості r -хвилі, спрямованого по нормалі до фронту; A_q, A_i – компоненти вектора її поляризації.

Система рівнянь (3) для пружного однорідного анізотропного середовища за допомогою методу характеристик приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \frac{c_{ikpq}}{\rho} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad \frac{dp_k}{d\tau} = 0, \quad (4)$$

які дозволяють побудувати промені, уздовж яких зі швидкістю ξ поширюється енергія хвильового поля.

§2. Взаємодія хвилі з поверхнею розділу середовищ. Обмежимося розглядом вісесиметричної задачі, коли вісь Ox_2 є віссю симетрії поверхні розділу двох середовищ і їх пружних властивостей. Тоді буде достатнім досліджувати еволюцію сліду фронтів на одній із площин, якій належить вісь симетрії задачі. На обох межах розділу середовищ кути між нормальними до поверхонь лінзи та нормальними до фронтів хвиль підкоряються закону Снелліуса [3, 4]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_v - \gamma)}{v_v(\Theta_v)} = \frac{\sin(\bar{\Theta}_\mu + \gamma)}{\bar{v}_\mu(\bar{\Theta}_\mu)},$$

$$\frac{\sin(\Theta - \varphi)}{v(\Theta)} = \frac{\sin(\Theta_v + \varphi)}{v_v(\Theta_v)} = \frac{\sin(\bar{\Theta}_\mu - \varphi)}{\bar{v}_\mu(\bar{\Theta}_\mu)}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (5)$$

де: γ і φ – кути нахилу дотичних до поверхонь в точках падіння променя на межу розділу середовища, Θ_1, Θ_2 – кути між віссю Ox_2 і напрямками векторів фазових швидкостей відбитих квазіпоздовжньої qP і квазіпоперечної qS хвиль; $\bar{\Theta}_1, \bar{\Theta}_2$ – аналогічні кути для хвиль, що проникли за межу розділу середовищ; v, v_v, \bar{v}_μ – величини фазових швидкостей падаючої поздовжньої хвилі, відбитих і заломлених (індекс 1 відповідає квазіпоздовжній, 2 – квазіпоперечній) хвилі.

Розв'язування систем (5) проводиться методом продовження по параметру [3]. Зміна кута γ , наприклад, на величину $\Delta\gamma$ викличе збільшення

направляючих кутів векторів фазових швидкостей відбитих хвиль обох типів

$$\Delta\Theta_v^n = \frac{\cos\gamma \cdot v_v(\Theta_v^n) + \cos(\Theta_v^n - \gamma) \cdot v}{\cos(\Theta_v^n - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot \partial v_v(\Theta_v^n) / \partial \Theta_v} \cdot \Delta\gamma + r, \quad (6)$$

де: $r_v^n = \sin(\Theta_v^n + \gamma) \cdot v - \sin(\Theta - \gamma) \cdot v_v^n(\Theta_v^n)$ нев'язка рівняння.

За стартовий стан розв'язування задачі зручно прийняти промінь, що падає на лінзу вздовж осі симетрії задачі.

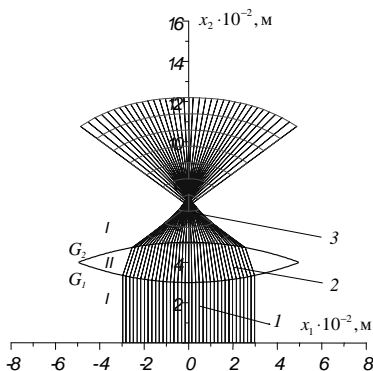


Рис. 1

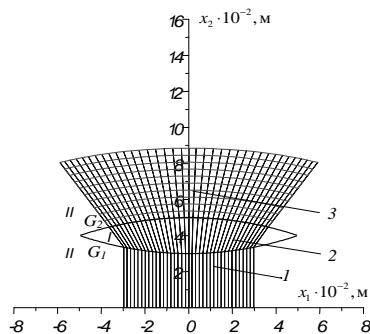


Рис. 2

§3. Аналіз результатів розрахунку. По запропонованій методиці досліджено перебудову фронту падаючої плоскої поздовжньої хвилі на параболічних поверхнях пружних лінз. На рисунках 1–4 показані сітки еволюціонуючи фронтів та променів, заломлених лінзами різних типів. Для середовища, позначеного на малюнках цифрою \bar{I} пружні характеристики становлять: $\rho_1 = 2.650 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 4.972 \times 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_1 = 3.906 \times 10^{10} \text{ Па}$, а для середовища \bar{II} – $\rho_2 = 2.760 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_2 = 1.587 \times 10^9 \text{ Па}$, $\mu_2 = 1.429 \times 10^{10} \text{ Па}$. Для обох середовищ значення коефіцієнтів анізотропії приймалися $l_i = 0.1\lambda_i$, $m_i = 0.2\mu_i$ та $p_i = 0.4(\lambda_i + 2\mu_i)$ ($i=1,2$).

Здатність лінзи фокусувати промені залежить не лише від її геометричних параметрів а і від послідовності середовищ на шляху променів.

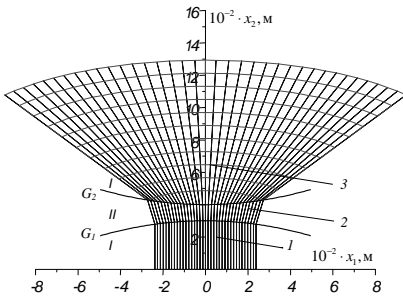


Рис. 3

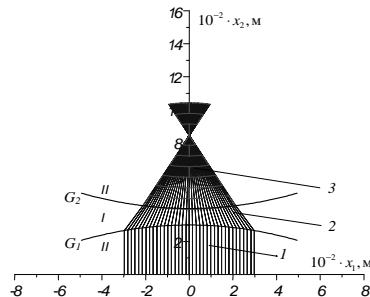


Рис. 4

Приведена методика дозволяє прогнозувати положення зон фокусування променів хвиль обох орієнтацій, породжених взаємодією розривної хвилі в анізотропному середовищі з його криволінійними поверхнями розділу середовищ.

1. Арнольд В.И. Критические точки функций и классификация каустик. – УМН, 1974, т. 29, вып. 3, с. 243-244.
2. Аникьев И.И., Гуляев В.И., Иванченко Г.М., Луговой П.З., Сущенко Е.А., Яковенко Е.В. Об эффекте квазиполного внутреннего отражения ударных волн на границе раздела упругих сред. // Прикл. механика и техн. физика. – 2000. – 41, №1. – С. 21–27.
3. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, №3. – С. 394–402.
4. Gulyaev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.
5. Кравцов Ю. А. Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. Lugovoy P.Z., Goulaiev V.I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media. CP505, Shock Compression of Condensed Matter – 1999 edited by M.D.Furnish, L.C.Chhabildas and R.S.Nixon. Proceeding of the Conference of the American Physical Society, Snowbird, Utah, USA. P. 1287-1290.
7. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград: Наука, 1980. – 220 с.
8. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн. (Обзор) // Прикл. механика. – 1996. – 32, №12. – С.3-27.

Матеріал надійшов до редакції 08.06.04.

УДК 539.3

Костіна О.В., к.т.н.
Аранчій Н.Є.

ЗБІЖНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СІТКОВИМИ МЕТОДАМИ ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ ТОРОЇДНОЇ ОБОЛОНКИ

Першим важливим кроком у розв'язанні задачі про випучування тора є роботи Махніга [9, 10], де досліджена стійкість тороїдної оболонки під дією постійного зовнішнього тиску. У статті [9] було показано, що осесиметричні форми втрати стійкості приводять до меншої величини критичного тиску, ніж несиметричні форми. І в [10] розглядалися тільки осесиметричні форми. Розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують несиметричне випучування, було виконано з використанням методу збуджень. Койтер в [11] піддав критиці цю статтю, через те що при певному співвідношенні геометричних параметрів оболонки неосесиметричне випучування може привести до зниження критичного тиску і застосований Махнігом вид розкладання є неприйнятним для тороїдної оболонки з малим відношенням b/a (рис. 1).

Подібні задачі в різних постановках розглядалися в ряді робіт. В статті [12] був проведений асимптотичний розрахунок осесиметричного випучування тороїдної оболонки, що знаходиться під дією постійного тиску та осевого навантаження, прикладеного вздовж екваторів. Тут було застосоване припущення, що втрата стійкості виникає при величині зовнішнього тиску, при якій осьова жорсткість тора зменшується до нуля. Величини критичних значень, що містить робота [12], значно нижчі, ніж отримані в [9, 10]. Соубл Л. і Флюгге В. [7] розглянули стійкість тороїдної оболонки, що навантажена постійним гідростатичним тиском. Оскільки вважається, що до моменту випучування в оболонці діють тільки безмоментні напруження, тому рівняння стійкості тут виведені із загальних рівнянь стійкості оболонок обертання і розв'язані за допомогою розкладання в

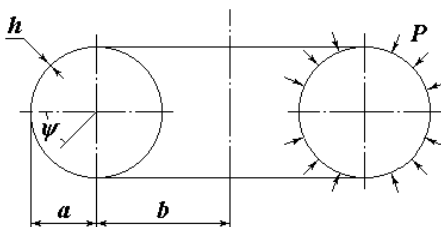


Рис. 1 Розрахункова схема тороїдної оболонки

ряди Фур'є у кільцевому та меридіанальному напрямках компонент переміщень, що виникають при випучуванні.

З проблемою поганої збіжності зіткнулися автори статті [6] при розрахунку наведеної задачі з використанням методу скінченних різниць. Виявилось, що уточнення розв'язку пов'язане з необхідністю суттєвого згущення різницевої сітки і навіть при розбитті відрізка $0 \leq x^I \leq 2\pi$ на 330 різницевих ділянок немає збіжності. У зв'язку з цим довелося перейти від формул скінченнорізницевої апроксимації порядку $O[(\Delta x)^2]$ до співвідношень із похибкою $O[(\Delta x)^4]$. Після уточнення різницевих аналогів диференціальних виразів була забезпечена збіжність обчислень при розбитті меридіана $0 \leq x^I \leq 2\pi$ на 200 різницевих ділянок. При перевірці збіжності кількість розбиттів було доведено до 400, кількість ступенів свободи у цьому випадку склала 800.

Дана робота є продовженням дослідження стійкості тороїдної оболонки, що знаходиться під дією постійного зовнішнього тиску, з використанням сіткових методів. Розв'язання задачі виконано за допомогою МСЕ із застосуванням плоских скінченних елементів та за методом криволінійних сіток (МКС). Розглядається оболонка з наступними геометричними параметрами (рис. 1): $a/h = 100$ ($P = 2 \cdot 10^5$ Н/м²), $a/h = 500$ ($P = 4 \cdot 10^4$ Н/м²) та $b/a = 2$. Усі чисельні розрахунки виконані при значеннях $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² і $\nu = 0,3$. Збіжність перевіряється шляхом визначення критичних навантажень при фіксованих значеннях параметрів оболонки та при послідовному згущенні сітки. Чисельні результати МСЕ і МКС наведені в табл. 1, де порівнюються з даними, що містить стаття Соубла Л. і Флюгге В. [7]. Результати цієї статті прийняті за точні, оскільки навіть у випадку наближення до сфери ($b/a \rightarrow 0$) критичне значення зовнішнього тиску наближається до класичного результату - $p = 1,21 Eh^2/a^2$. На рис. 2 наведені залежності відносних помилок обчислень МСЕ від кількості поділок сітки вздовж меридіанального кола для оболонок різної товщини, на рис. 3 показані аналогічні залежності для МКС.

Проведені дослідження виявили особливість застосування сіткових методів до розв'язання даної задачі, що полягає у немонотонній залежності похибки від кількості розбиттів (рис. 2, 3). Аналіз залежностей відносної помилки обчислень при поступовому згущенні сітки дозволив зробити наступний висновок. Розв'язання наведеної осесиметричної задачі є таким, що демонструє недоліки сіткових методів, оскільки точність результатів залежить від того, яким чином виконана дискретизація. Осциляційний характер похибки пояснюється тим, що серед множини скінченноелементних сіток існує два класи: до першого належать сітки, в яких у полюсі меридіана

знаходиться скінченний елемент, а до другого – сітки, де у полюс потрапляє вузол скінченного елемента.

Таблиця 1

Кільк. поділ. вздовж мерид. кола	МСЕ на основі плоских скінчених елементів				МКС з урахуванням похибки жорстких зміщень			
	$a/h = 100$		$a/h = 500$		$a/h = 100$		$a/h = 500$	
	Влас. знач. λ	Відн. помил. $\eta, \%$	Влас. знач. λ	Відн. помил. $\eta, \%$	Влас. знач. λ	Відн. помил. $\eta, \%$	Влас. знач. λ	Відн. помил. $\eta, \%$
6	0,4310	-83,9	0,0258	-91,4	0,221	-91,75	0,0088	-97,06
7	28,617	967,8	26,229	9309,8	59,179	2108,2	58,953	19551,0
8	35,541	1226,2	35,101	11600,5	74,695	2687,1	74,430	24710,0
9	8,5010	217,2	7,5198	2406,6	17,418	549,9	16,979	5559,7
10	1,0844	-59,5	0,0455	-84,8	0,5157	-80,76	0,0208	-93,07
11	5,2402	95,5	4,2824	1327,5	9,892	269,1	9,396	3032,0
12	1,5193	-43,3	0,0649	-78,4	16,36	510,4	15,89	5196,7
13	3,5598	32,8	1,8880	529,3	4,962	85,15	4,123	1274,3
14	1,9403	-27,6	0,0831	-72,3	0,970	-63,8	0,0384	-87,2
15	2,9281	9,3	1,2813	327,1	3,629	35,41	2,723	807,7
16	3,6814	37,4	2,2119	637,3	6,195	131,2	5,362	1687,3
17	3,0115	12,4	0,7495	149,8	2,841	6,0	1,493	397,7
18	2,6186	-2,3	0,1336	-55,5	1,593	-40,6	0,0623	-79,2
19	2,7605	3,0	0,5832	94,4	2,486	-7,2	1,094	264,7
20	2,8903	7,8	0,9831	227,7	3,456	29,0	2,271	657,0
21	2,8397	6,0	0,4414	47,1	2,554	-4,7	0,710	136,7
22	2,7763	3,6	0,1921	-36,0	2,108	-21,3	0,092	-69,3
23	2,7763	3,6	0,3841	28,0	2,446	-8,7	2,446	89,9
24	3,8820	44,9	0,2225	-25,8	2,723	1,6	1,134	278,0
25	2,7545	2,8	0,3607	20,2	2,565	-4,3	0,432	44,0
26	2,7493	2,6	0,2514	-16,2	2,445	-8,8	0,127	-57,7
27	2,7272	1,8	0,3230	7,7	2,534	-5,4	0,374	24,7
28	2,7227	1,6	0,4015	33,8	2,577	-3,8	0,678	126,0
29	2,7216	1,6	0,3405	13,5	2,567	-4,2	0,329	9,7
30	2,7274	1,8	0,2966	-1,1	2,545	-5,0	0,167	-44,3
31	2,7081	1,0	0,3192	6,4	2,552	-4,8	0,300	0,0
32	2,6925	0,5	0,3430	14,3	2,577	-3,8	0,465	55,0
33	2,6900	0,4	0,3288	9,6	2,576	-3,9	0,296	-1,3
34	2,6915	0,5	0,2962	-1,3	2,570	-4,1	0,208	-30,7
35	2,6748	0,2	0,3177	5,9	2,575	-3,9	0,280	-6,7
Анал. розв. [7]	2,68		0,3		2,68		0,3	

Якщо кількість поділок вздовж меридіана є числом, що ділиться на чотири (рис. 2, 3), у полюсі маємо вузол скінченного елемента. Отже значно збільшується жорсткість на згин, і, в наслідок цього, величина критичного зусилля перевищує точне значення. Коли кількість поділок ділиться на два і не ділиться на чотири - у полюсі скінченний елемент, що приводить до зниження величини критичного зусилля порівняно з точним значенням. Цей факт значною мірою впливає на величину критичної сили, оскільки саме у полюсі меридіана при втраті стійкості оболонки за осесиметричною формою виникають згинні деформації. Цим обумовлена збіжність від двох протилежних за знаком похибок.

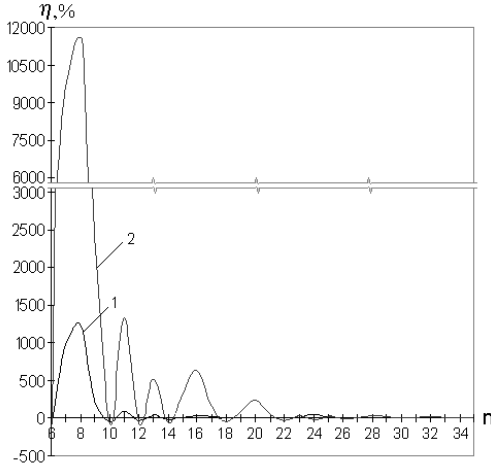


Рис. 2 Залежність відносної помилки обчислень МКЕ від кількості розбиттів:
1 – при $a/h = 100$ ($P = 2 \cdot 10^5$ Н/м²),
2 – при $a/h = 500$ ($P = 4 \cdot 10^4$ Н/м²).

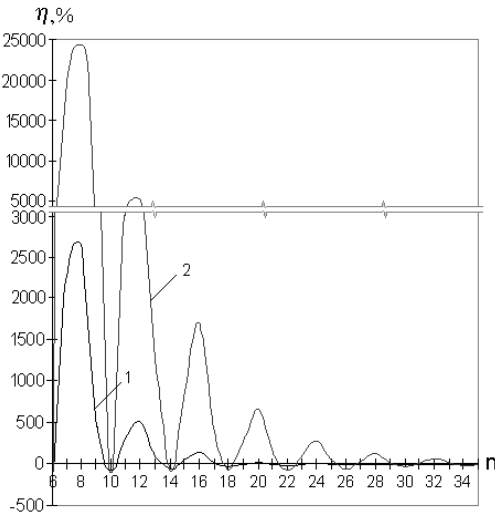


Рис. 3 Залежність відносної помилки обчислень MKS від кількості розбиттів:
1 – при $a/h = 100$ ($P = 2 \cdot 10^5$ Н/м²),
2 – при $a/h = 500$ ($P = 4 \cdot 10^4$ Н/м²).

Робота, що була проведена, виявила потребу у застосуванні до розрахунку даної задачі схеми методу скінченних елементів, що базується на новому підході до апроксимації розв'язувальних функцій, а саме на векторному поданні функції переміщень криволінійного скінченного елемента довільної форми, який точніше враховує геометрію оболонки. Методику створення нової скінченноелементної моделі, що виключає помилку жорстких зміщень завдяки застосуванню векторної апроксимації, викладено в публікаціях [1-5, 8]. Використання згаданої схеми МСЕ буде наступним кроком наведених досліджень.

1. Гоцуляк Е.А. О сеточной дискретизации векторных соотношений теории оболочек в криволинейной системе координат // Прикладная механика: Междунар. научн. журнал. – 2001. – Т.37. - №6. – С.89-94.
2. Гоцуляк Е.А., Костина Е.В. Исследование сходимости метода конечных элементов в векторной аппроксимации // Сопротивление материалов и теория сооружений. К.: КГТУСА, 1997. – Вып. 63. – С. 38-47.
3. Гоцуляк С.О., Костіна О.В. Про особливості застосування методу скінченних елементів до розрахунку оболонок загального типу // Доповіді НАН України, 1998.–№11.–С.72-75.
4. Аранчій Н.Є., Костіна О.В. Реалізація методу скінченних елементів з урахуванням векторної апроксимації функції форми // Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2000. – Вып. 68. – С. 3-15.
5. Костіна О.В., Аранчій Н.Є. Аналітичний спосіб тестування матриць жорсткості методу скінченних елементів // Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2001. – Вып. 69. – С. 80-85.
6. В.В.Гайдайчук, Е.А.Гоцуляк, В.И.Гуляев Ветвление решений нелинейных уравнений тороидальных оболочек при действии внешнего давления // Прикл. мех. 1978. – Т. XIV – №9. – С.38 – 45.
7. Соубл Л., Флюгге В. Устойчивость тороидальной оболочки, нагруженной постоянным внешним давлением // Ракетная техника и космонавтика – 1967. – № 3. – С. 51 – 58.
8. Gotsulyak E.A., Kostina E.V. Vector relations finite element digitization of the theory of thin shells of arbitrary form. // Proceedings of International Congress on Spatial Structures ICSS-98. – Moscow (Russia), 1998. – Vol. I. – P.252-259.
9. Machnig O. Über Stabilitäts probleme von torusformigen Schalen // Wiss. Z. Hochseh. Verkehrswesen Dresden 4, – 1956. – P.179 – 204.
10. Machnig O. Über die Stabilität von torusformigen Schalen // Techn. Mitt. Krupp 21, – 1963. – P.105 – 112.
11. Koiter W.T. APM Rev. 5670 (On the stability of torus-shaped shells by O.Machnig) // Appl. Mech. Rev. – 1964. – 17. – P. 786.
12. Jordan P.F. Vibration and buckling of pressurized torus shells // AIAA. – 1966. Paper 66 – 445.

Матеріал надійшов до редакції 28.06.04.

УДК 539.3

Сніжко Н.А., канд. техн. наук,
Солодей І.І., канд. техн. наук,
Овсянніков О.С.
Шевченко Ю.В.

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ БАШТОВОЇ ГРАДИРНИ АЕС ПІД ДІЄЮ ВІТРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Найбільш універсальним чисельним методом, що дозволяє виконувати розрахунки будівельних конструкцій є метод скінченних елементів (МСЕ). Розгляд просторових моделей, вимоги до детальної дискретизації їх окремих елементів, і в той же час до збереження достатньо регулярної структури сіткової області веде до необхідності розв'язання систем рівнянь високих порядків, тому їх розв'язання проводиться, як правило, в рамках вісесиметричної і плоскої постановок. У значній кількості випадків результати, що отримані по таких наближених розрахункових схемах, не можуть задовольняти сучасним вимогам, які висуваються до точності розрахунків на міцність.

Істотно підвищити ефективність МСЕ дозволяє його поєднання з методом розділу невідомих. Цей підхід одержав назву напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ). НМСЕ був запропонований в роботах [5, 11] як ефективний метод розв'язання просторових задач теорії пружності для невісесиметрично навантажених тіл обертання. Висока ефективність напіваналітичного варіанта в порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних.

Як свідчить аналіз літературних джерел, область застосування НМСЕ істотно обмежена однорідними тілами обертання і призматичними тілами із шарнірними граничними умовами на торцях. В [1] запропоновано розвиток методу на динамічні задачі пружного деформування тіл обертання при невісесиметричному імпульсному навантаженні. Робота [6] присвячена застосуванню НМСЕ до аналізу вільних і вимушених невісесиметричних коливань тіл обертання.

Таким чином, НМСЕ є в даний час достатньо широко розповсюдженим і ефективним методом чисельного розв'язання широкого кола просторових задач. Однак, у всіх зазначених роботах за об'єкт дослідження приймаються однорідні вздовж направляючої просторові тіла. Таке обмеження істотно зменшує область застосування НМСЕ і не дозволяє розглядати початково різнірідні об'єкти,

деформовані тіла з залежними від температури фізико-механічними характеристиками в несиметричному температурному полі, тіла з вирізами, отворами або виступами, що порушують однорідність форми.

Дана робота спрямована на залучення до області ефективного застосування методу масивних, тонкостінних і комбінованих призматичних тіл та тіл обертання із змінними по всіх координатах фізико-механічними характеристиками, розвиток методу на просторові задачі коливань зазначеного класу об'єктів.

Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов для процесів пружного деформування просторових тіл під дією динамічно прикладених сил, здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системах координат Z^i на основі рівняння Гамільтона [2].

Напружено-деформований стан розглядається в термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій. Це зумовлено необхідністю широкого використання косокутних скінченних елементів (СЕ) для дискретизації складного поперечного перерізу об'єктів. Апроксимації представленого класу конструкцій в запропонованому програмному комплексі базується на спеціальних неоднорідних кільцевому чотирикутному чотирьохвузловому та прямолинійному призматичному скінченних елементах з урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині елемента та інтегруванням в явному вигляді при осередненні характеристик матеріалів в його центрі [9] (рис. 1).

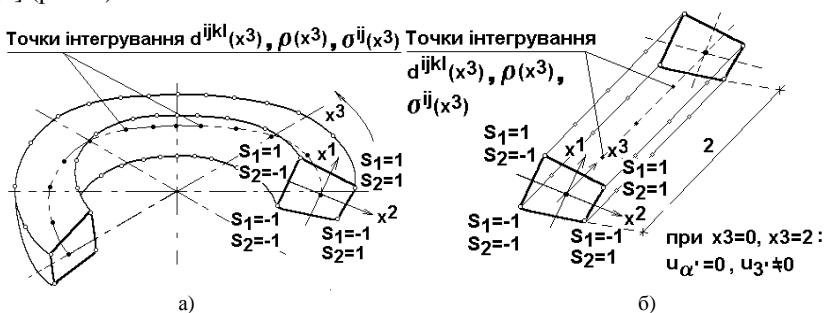


Рис. 1. Неоднорідні скінченні елементи
(а - замкнутий кільцевий, б - призматичний)

Фізичні компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}. \quad (1)$$

У відповідності з основними положеннями моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) [8] компоненти тензора деформацій подаються відрізками ряду Маклорена, число членів яких знаходиться в точній відповідності із ступенем полінома, що апроксимує переміщення:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}}{2} (h_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} + h_{33,(3-\alpha)}) \right] x^{(3-\alpha)} \right\},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} h_{33,\alpha} \right] x^\alpha \right\},$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad h_{(ii),\beta} = \frac{g_{(ii),\beta}}{g_{(ii)}}.$$

При такому підході вдається з одного боку уникнути довготривалої процедури чисельного інтегрування по площі скінченного елемента, з іншого – досягти високої швидкості збіжності результатів.

Рівняння руху. Система розрахункових рівнянь НМСЕ при апроксимації тіла неоднорідними СЕ має вигляд:

$$\sum_{m=0}^L ([M]_{lm} \{\ddot{U}\}_m + [K]_{lm} \{U\}_m) = \{Q\}_l, \quad l = 0, \dots, L. \quad (3)$$

Амплітудні підматриці мас $[M]_{lm}$ та жорсткості $[K]_{lm}$ зформовані для дискретної моделі шляхом асамблювання відповідних підматриць СЕ. Коефіцієнти «неузгоджених» амплітудних підматриць мас елемента визначаються виразом:

$$m_{lm}^{k'}(S_1, S_2, P_1, P_2) = \frac{1}{4} \delta_{P_1}^{S_1} \delta_{P_2}^{S_2} \rho_{lm}^{k'} g^{kk'} \sqrt{g}, \quad (4)$$

де

$$\rho_{lm}^{k'} = \int_{x^3} \rho \psi_{(k')}^l \psi_{(k')}^m dx^3, \quad (5)$$

- для кільцевого СЕ:

$$\psi_1^l = \psi_2^l = \cos lx^3, \quad \psi_3^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi,$$

- для призматичного СЕ:

$$\psi_1^l = \psi_2^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \psi_3^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2.$$

Амплітудні підматриці жорсткості СЕ подаються у вигляді:

$$[k]_{lm} = \left[\sum_{\beta=1}^2 [B_\beta]_{l_1}^T [D_\beta]_{lm} [B_\beta]_m + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [B_\beta]_{\alpha l}^T [D_\beta]_{\alpha m} [B_\beta]_{\alpha m} \right]. \quad (6)$$

Вирази для коефіцієнтів матриць $[B_\beta]_l$, $[B_\beta]_{\alpha l}$, $[D_\beta]_{lm}$ і $[D_\beta]_{\alpha m}$ наведені в [2, 9]. Інтегрування вздовж x^3 в (5) та при обчисленні коефіцієнтів матриць $[D_\beta]_{lm}$ і $[D_\beta]_{\alpha m}$ виконується чисельно. Це дозволяє узагальнити НМСЕ на тіла із змінними вздовж направляючої характеристиками матеріалів.

Компоненти узагальненого вектора зовнішніх амплітудних навантажень обчислюються за формулою:

$$\{q^{k'}\}_{(s_1, s_2)} = \left[\{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} + \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right] \sqrt{g}. \quad (7)$$

При обчисленні компонент векторів $\left\{ \{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\}$ і $\left\{ \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\}$, інтегрування по площі поперечного перерізу СЕ і його границям виконується чисельно по формулі трапецій. Вздовж координати x^3 компоненти масових і поверхневих сил подаються відрізками ряду Фур'є:

$$\left\{ \{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\} = \sum_{l=l_0}^L \left\{ \{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\} \psi_{(k')}^l, \quad \left\{ \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\} = \sum_{l=l_0}^L \left\{ \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\} \psi_{(k')}^l.$$

Компоненти $\left\{ \{f^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\}$ і $\left\{ \{p^{k'}\}_{(s_1, s_2)} \right\}$ обчислюються по відомим формулам чисельного гармонічного аналізу.

З рівняння (3) можуть бути отримані важливі частні випадки рівнянь руху НМСЕ для неоднорідних тіл.

Модальний аналіз. При дослідженні вільних коливань неоднорідних тіл рівняння руху (3) перетворюється до вигляду:

$$\sum_{m=0}^L ([K]_{lm} - \theta^2 [M]_{lm}) \{\varphi\}_m = 0, \quad l = 0, \dots, L, \quad (8)$$

θ , φ - відповідно частота і форма власних коливань тіла.

Визначення форм і частот власних коливань виконується на основі метода зворотніх ітерацій [3], що застосовується до коефіцієнтів ряду Фур'є в розкладі власних форм:

$$[K]_{ll} \Delta \{\varphi\}_{jl}^{n+1} = (\theta_j^k)^2 [M]_{lm} \{\varphi\}_{jm}^n - [K]_{lm} \{\varphi\}_{jm}^n. \quad (9)$$

Тут $\{\varphi\}_{jm}^n$ - m -тий коефіцієнт j -тої форми коливань тіла на n -тій ітерації; $\Delta \{\varphi\}_{jl}^{n+1}$ - приріст l -того коефіцієнта j -тої форми на $n+1$ ітерації; θ_j^n - значення j -тої власної частоти на n -тій ітерації. Початкові наближення для виконання ітераційного процесу (9) визначаються методом ітерацій у підпросторі для діагональних підматриць.

Ортогоналізація власних форм відбувається на кожній ітерації шляхом корекції коефіцієнтів ряду Фур'є:

$$\{\bar{\varphi}\}_{jl}^n = \{\varphi\}_{jl}^n - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij}^n \{\bar{\varphi}\}_{ij}^n, \quad (10)$$

де

$$\alpha_{ij}^n = \frac{(\{\varphi\}_{il}^n)^T [M]_{lm} \{\varphi\}_{jm}^n}{(\{\varphi\}_{jl}^n)^T [M]_{lm} \{\varphi\}_{jm}^n}. \quad (11)$$

Визначення наближення j -тої власної частоти виконується відповідно до співвідношення Релея:

$$\theta_j^n = \frac{(\{\bar{\varphi}\}_{jl}^n)^T [K]_{lm} \{\bar{\varphi}\}_{jm}^n}{(\{\bar{\varphi}\}_{jl}^n)^T [M]_{lm} \{\bar{\varphi}\}_{jm}^n}. \quad (12)$$

Координатні значення j -тої форми власних коливань неоднорідного тіла подаються в остаточному вигляді:

$$\{\bar{\varphi}\}_j^{k'} = \sum_{l=0}^L \{\bar{\varphi}\}_{jl}^{k'} \psi_k^l. \quad (13)$$

Вимушені коливання. Існує два чисельні підходи до розв'язання системи звичайних диференційних рівнянь руху дискретної моделі (3) при заданих початкових умовах:

$$\{U\}_l|_{t=0} = \{U_0\}_l, \quad \{\dot{U}\}_l|_{t=0} = \{\dot{U}_0\}_l. \quad (14)$$

Перший підхід - використання методів прямого інтегрування диференційних рівнянь руху дискретної моделі [2], другий заснований на розкладі розшукуваного рішення по формам власних коливань конструкції.

Перехід до нормальних координат здійснюється в результаті лінійного перетворення:

$$\{U\}^{k'} = \sum_{i=1}^N x_i^{k'}(t) \{\varphi\}_i^{k'} = \sum_{l=0}^L \sum_{i=1}^N x_i^{k'}(t) \{\varphi\}_{il}^{k'} \psi_k^l, \quad (15)$$

де $\{\varphi\}_i$ - i -та власна форма дискретної моделі, що знаходиться за допомогою модального аналізу конструкції; $x_i(t)$ - невідомі вагові коефіцієнти рішення для i -ої власної форми; N - кількість власних форм, які утримуються при лінійному перетворенні.

Виконавши підстановку (15) в (3) і домноживши зліва на $\{\varphi\}_i^T$, отримаємо систему рівнянь:

$$\sum_{i=1}^N \{\varphi\}_{jl}^T [M]_{lm} \{\varphi\}_{im} \ddot{x}_i + \{\varphi\}_{jl}^T [K]_{lm} \{\varphi\}_{im} x_i = \{\varphi\}_{jl}^T \{Q\}_l. \quad (16)$$

Враховуючи властивість ортогональності власних форм з матрицею мас і матрицею жорсткості:

$$\{\varphi\}_{jl}^T [M]_{lm} \{\varphi\}_{im} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \{\varphi\}_{jl}^T [K]_{lm} \{\varphi\}_{im} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_j, & i = j \end{cases},$$

де λ_j - власне значення j -ої власної форми, система лінійних диференціальних рівнянь руху дискретної моделі перетворюється до низки незалежних диференційних рівнянь наступного вигляду:

$$\ddot{x}_j(t) + \lambda_j x_j(t) = r_j(t). \quad (17)$$

$r_j(t) = \{\varphi\}_{jl}^T \{Q(t)\}_l$ - ваговий коефіцієнт вкладу j -ої власної форми до розкладу вектора узагальнених вузлових сил дискретної моделі.

Початкові умови мають наступний вигляд:

$$x_{0i} = \{\varphi\}_{jl}^T [M]_{lm} \{U_0\}_{im}, \quad \dot{x}_{0i} = \{\varphi\}_{jl}^T [M]_{lm} \{\dot{U}_0\}_{im}. \quad (18)$$

Рішення звичайного диференційного рівняння 2-го порядку (17) з початковими умовами (18) подається інтегралом Дюамеля:

$$x_j(t) = x_{0j} \cos \theta_j t + \frac{\dot{x}_{0j}}{\theta_j} \sin \theta_j t + \frac{1}{\theta_j} \int_0^t r_j(\tau) \sin \theta_j (t - \tau) d\tau, \quad (19)$$

де $\theta^2 = \lambda$ - власне число вільних коливань, обчислення якого виконується чисельно на основі формули прямокутників [7].

Вектор координатних значень переміщень отримуємо за допомогою рівняння (15).

Результати чисельних досліджень. Збіжність результатів МСЕ і НМСЕ для неоднорідних тіл досліджені на прикладі динамічного деформування товстостінного металевго циліндру з вирізом. Циліндр знаходиться під дією радіального рівномірнорозподіленого тиску, що миттєво прикладений до зовнішньої поверхні $q = 1 \text{ Н/м}^2$ (рис. 2).

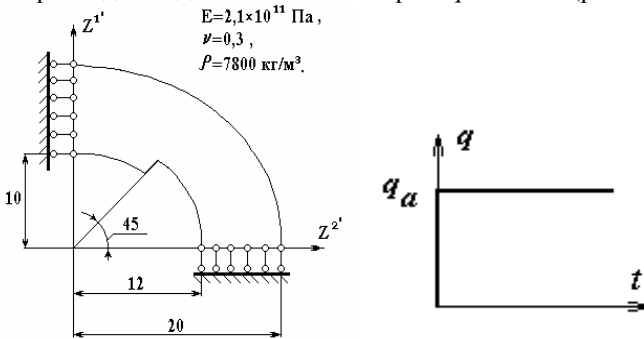


Рис. 2. - Розрахункова схема

Таблиця 1

Порівняння результатів МСЕ і НМСЕ

N форми	1	2	3	4	5
МСЕ	136.50	356.10	516.90	698.50	950.10
НМСЕ	136.60	357.60	517.60	698.70	954.20
$\varepsilon, \%$	0.06	0.25	0.14	0.06	0.41

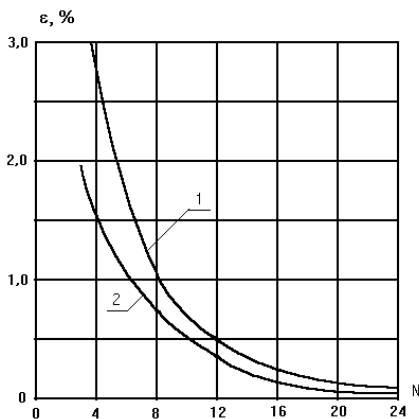


Рис. 3. Графіки збіжності максимальних переміщень точки ($r=12m$, $\varphi=90^\circ$) для МСЕ (1) та НМСЕ (2) від числа N

числа функцій форми N (скінченні елементи для МСЕ та кількість членів ряду Фур'є для НМСЕ), які апроксимують циліндр вздовж окружної координати. За еталонні прийняті відповідні значення переміщень для моделі циліндра: 25 функцій форми вздовж окружної координати, 15 СЕ в площині меридіонального перерізу, утримання 5 власних форм (подальше їх збільшення несуттєво впливало на кінцевий результат), крок інтегрування за часом $\Delta t = 10^{-4}$ с.

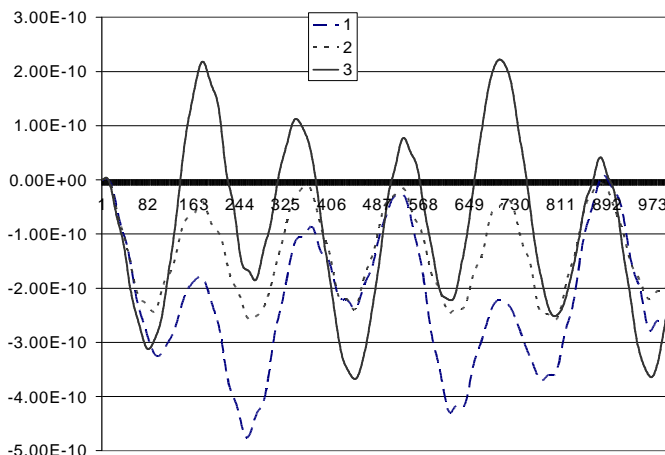


Рис. 4. Графік переміщень точок циліндра

На першому етапі був проведений аналіз власних форм та частот МСЕ та НМСЕ. Перші п'ять представлені в табл.1.

Базуючись на результатах розв'язання задачі на вільні коливання та методиці розкладу розшукуваного рішення по власним формам та частотам проведено аналіз параметрів напружено - деформованого стану циліндру НМСЕ та МСЕ під дією рівномірнорозподіленого тиску по зовнішній поверхні (рис.2).

На рис. 3 представлені графіки збіжності максимальних значень переміщень в залежності від

Наведені графіки свідчать про приблизно однакові похибки МСЕ і НМСЕ для суттєво неоднорідних тіл (наявність матеріалу, що описується нульовою жорсткістю та щільністю).

На рис. 4 представлені переміщення контрольних точок (1 точка - $r=12\text{м}$, $\varphi=0^\circ$; 2 точка - $r=12\text{м}$, $\varphi=45^\circ$; 3 точка - $r=12\text{м}$, $\varphi=90^\circ$), що отримані НМСЕ і МСЕ при використанні 16 функцій форми. Різниця складала менше 1%.

Розв'язання задач. За допомогою представленої методики проводились чисельні дослідження вимушених коливань монолітної баштової градирні під дією вітрового навантаження, що виникає внаслідок проходження смерчу.

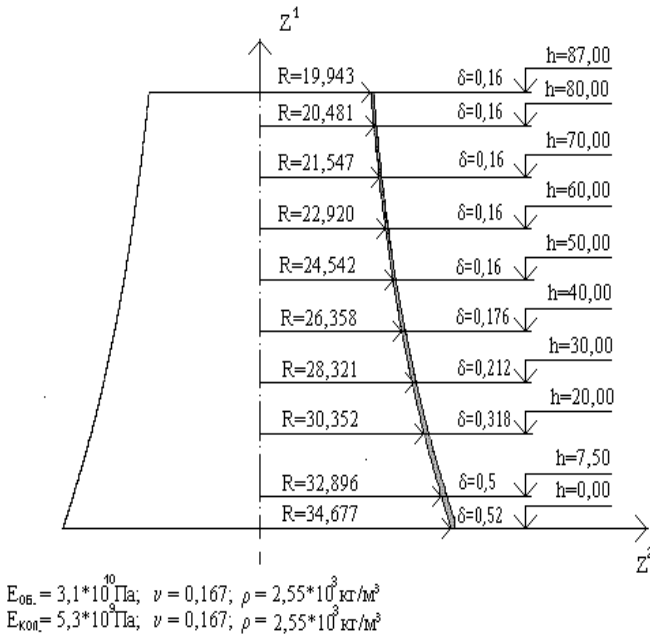


Рис. 5. - Розрахункова схема градирні

Градирня представляє собою систему взаємопов'язаних елементів, що включає оболонку витяжної вежі та опорну колонаду. Форма середньої поверхні башти (рис. 5) для висот 7.5-17.5 м - конічна з кутом $12^\circ 30'$, для висот 17.5-87 м - гіперболоїчна з радіусом середньої поверхні:

$$R = 19,952 \sqrt{1 + [(102,816 - z)/(68,794)]^2},$$

де z - вертикальна координата. На висотах 7.5-50 м товщина оболонки

відповідає лінійному закону (від 0.5 м до 0.16 м), на висотах 50-87 м товщина оболонки постійна 0.16 м. Оболонка витяжної башти спирається на 36 наклонних стійок колонади з поперечним перерізом 0.5×0.5 м. Стійки колонади жорстко пов'язані з кільцевим фундаментом. Опорна колонада градирні моделюється конічною оболонкою з приведеним (з умов еквівалентності роботи колони на тиск та згин) модулем пружності.

В основу методики розрахунку навантаження від дії вітрового потоку смерчу покладений підхід [10]. Дослідження проводилось з наступними параметрами смерчу: поступова $V_o = 18$ м/с та обертова $V_m = 92$ м/с швидкості вітру, висота вихрю $\delta_o = 458$ м, радіус вихрю $r_o = 61$ м (відстань від центру торнадо до точки, де обертова швидкість приймає максимальне значення), $x_o = 200$ м - початкове положення центру смерчу відносно градирні. Оскільки градирня відкрита незамкнена споруда, при підрахунку вітрового навантаження не враховували складову, яка описує ефект розрідження атмосфери всередині кільця смерчу.

На першому етапі було проведено аналіз вільних коливань представленої баштової градирні.

Таблиця 2

Власні частоти баштової градирні

№ форми	1	2	3	4	5	6
Частота	1.289	1.351	1.627	2.148	2.173	2.239

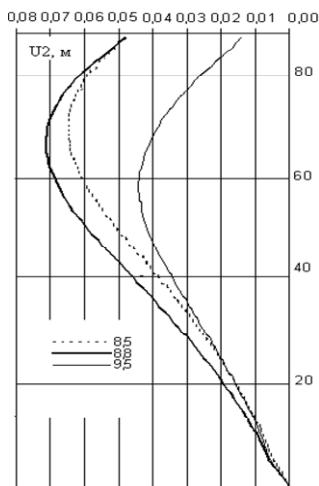


Рис. 6.

На базі отриманих власних форм та частот вільних коливань проведено аналіз напружено-деформованого стану баштової градирні під дією зовнішнього навантаження, що викликане проходженням смерчу.

Рис.6 демонструє еволюцію у часі радіальних переміщень в меридіональному перерізі градирні (полярний кут 0°). Епюри розподілу мембранних і кільцевих згинаючих напружень по висоті подані відповідно на рис.7а і 7б.

Видно, що найбільші переміщення досягаються на висоті приблизно 70 м. Максимальні напруження виникають в місцях немонотонної зміни жорсткості оболонки градирні по висоті.

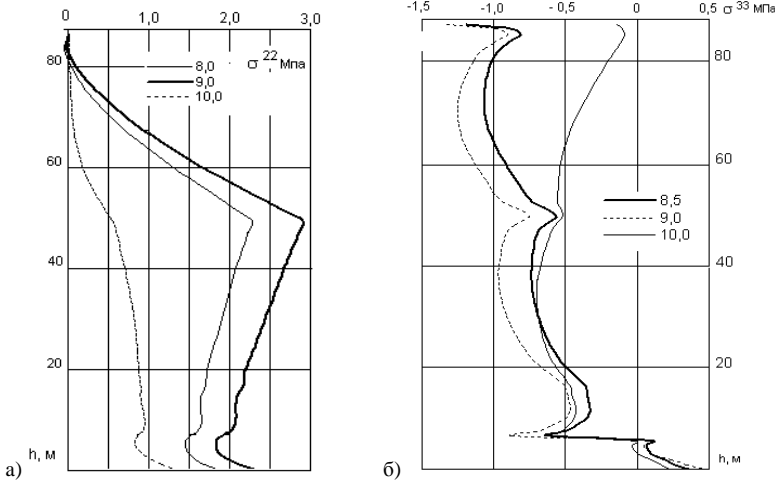


Рис. 7. а мембранні, б кільцеві згинаючі напруження

Для дискретизації башти градирні використовували кільцеві замкнені СЕ. Оболонкова частина апроксимувалась одним шаром СЕ (94 по висоті). Похибка складає менше 5% від рішення, що отримане при використанні сітки з 250 СЕ. Для апроксимації в окружному напрямку обмежувалися 11 членами ряду Фур'є.

Висновки. Як показали чисельні дослідження, запропонований варіант напіваналітичного методу скінченних елементів, орієнтований на дослідження неоднорідних вздовж направляючої призматичних тіл і тіл обертання, має високу ефективність у порівнянні з традиційним варіантом МСЕ. Розвиток методу на розв'язання просторових задач динаміки дозволяє застосовувати його для чисельного моделювання різних нестационарних процесів у складних конструкціях, що можуть бути представлені у вигляді неоднорідних по всіх координатах просторових тіл.

1. Бабич Ю.Н., Алтайдзе З.Г., Галиев Ш.У. "Напряженное состояние полого цилиндра при импульсном локальном нагружении". Пробл. прочности, 1987, № 10, с. 89-93.
2. Баженов В.А., Гуляр О.И., Топор О.Г., Солодей И.И. "Дослідження динамічної пружнопластичної взаємодії неоднорідних тіл на основі НМСЕ", Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. -К.:КНУБА, Вип.67, 2000. -с.3-18.
3. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.

4. *Гуляр А.И., Топор А.Г., Овсянников А.С.* “Определение динамических характеристик неоднородных тел вращения ПМКЭ” // Сопrotивление материалов и теория сооружений. - 1997. - Вып.63.
5. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
6. *Мирсаидов М., Мехмонов Я.* “Неосесимметричные колебания осесимметричных конструкций с присоединенными массами и выемками (выступами)”. Пробл. прочности, 1987, № 3, с. 111-116.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы.– М. Наука, 1989 – 161-165 с.
8. *Сахаров А.С., Кислоокый В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Выща школа, 1982, 479 с.
9. *Солодей І.І.* “Напіваналітичний метод скінченних елементів в дослідженні пружно-пластичних коливань неоднорідних призматичних тіл”, Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.71, 2002. –с.3-17
10. *Wen Y. K.* “Dynamic tornado wind loads on tall buildings”. –Journ. Of Struct. Div., Proc. ASCE, 1975, ST1, p.169.
11. *Wilson E.L.* “Structural Analysis of Axisymmetric Solids”, 1965, AIAA J., Vol. 3, No 12, pp 2269-2274.

Матеріал надійшов до редакції 05.07.04.

УДК 539.3

Гайдайчук В.В., д-р техн. наук
Муса Набіль

ДИНАМІКА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ ВНУТРІШНЬОГО СХІДЧАСТОГО ПОЛЯ ТИСКУ, ЩО РУХАЄТЬСЯ

Вступ

Задачі про дослідження динаміки циліндричних оболонок під дією внутрішнього рухомого поля тиску широко зустрічаються в техніці. Такі питання виникають при розрахунку магістральних нафто- і газопроводів, в яких під дією імпульсивних періодичних збурень від працюючих компресорів в трубі устанавлюється періодична хвиля тиску, яка розповсюджується із швидкістю руху звука у потоці. Аналогічні явища мають місце в трубопроводах хімічних підприємств, гідро- і газових системах літальних апаратів та теплових енергетичних установок. Дія рухомих навантажень має місце також в оболонках, що підкріплюють транспортні тунелі.

Дуже специфічні ефекти породжуються в трубах, які вміщують детонуючі матеріали. Оскільки при ініціюванні детонації таких матеріалів можуть генеруватися вибухові ударні хвилі, що мають різні профілі і розповсюджуються із різними швидкостями (досягають дві і більше тисяч метрів за секунду), важливо проаналізувати вплив параметрів детонаційної хвилі на динаміку оболонки, яка вміщує її. При цьому можуть бути досягнуті критичні значення цих параметрів, при яких розрахункові величини прогинів і напружень оболонки в межах лінійної теорії необмежено зростають.

В публікаціях [1,2] дія рухомого навантаження на оболонку досліджується на базі класичних гіпотез теорії оболонок. В даній роботі постановка задачі про розповсюдження хвиль пружних деформацій, які рухаються в стінці циліндричних оболонок базується на застосуванні теорії оболонок типу С.П. Тимошенко, що має по зрівнянню з класичною теорією оболонок переваги обумовлені із урахуванням деформації зсуву та інерції повороту перерізу [3,4]. Тому вона дозволяє більш точноше описувати згинальні хвилі, які рухаються.

1. Рівняння динаміки циліндричної оболонки

У зв'язку з тим, що розглянута конструкція циліндричної оболонки і діюче на неї навантаження є осесиметричними, осесиметричними буде і

поле розповсюдження пружних хвиль. Для дослідження таких полів застосована теорія циліндричних оболонок в осесиметричній постановці.

Нехай x – координата, спрямована уздовж оболонки; \vec{n} – внутрішня нормаль до її поверхні; u , w – компоненти вектора переміщень, спрямовані уздовж осі Ox і нормалі \vec{n} відповідно; p_n – інтенсивність зовнішнього навантаження, що діє на оболонку уздовж нормалі \vec{n} . Тоді рівняння руху елемента оболонки можна представити у виді [4]:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N_1}{\partial x} &= 0; \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{N_2}{R} &= p_n; \\ \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - Q + \frac{\partial M}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де ρ – густина матеріалу оболонки; h – її товщина; N_1 , N_2 – внутрішні зусилля в оболонці в подовжньому й окружному напрямках; Q – поперечна сила у перерізі $x = const$; M – згинальний момент у тім же перерізі; ψ – кут повороту перерізу; t – час.

Сили N_1 , N_2 підраховують так:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{w}{R} \right); \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(-\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

де E – модуль пружності матеріалу оболонки; ν – коефіцієнт Пуассона; ε_1 , ε_2 – відносні деформації серединної поверхні оболонки у відповідних напрямках.

Для осесиметричної постановки:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{EI}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}; \\ Q &= AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $I = \frac{h^3}{12}$ – момент інерції площі перерізу одиничної довжини;

$A = h$ – площа одиничного перерізу; G – постійна пружності.

Підставляючи (3) у другу рівність (1), одержимо:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - hG \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{N_2}{R} = p_n, \quad (4)$$

звідси

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{p_n}{hG} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{N_2}{hGR}. \quad (5)$$

За допомогою цього вираження виключаємо $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ з правої частини першої рівності (3):

$$M = -\frac{Eh^2}{12G(1-\nu^2)} p_n + \frac{\rho EI}{G(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{EI}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{EI}{hGR(1-\nu^2)} N_2 \quad (6)$$

З третього рівняння (1) знаходимо:

$$Q = \frac{\rho h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Підставляючи Q в другу рівність (1), одержимо:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{N_2}{R} = p_n. \quad (7)$$

Запишемо перше рівняння (1) у розгорнутому виді і врахуємо в (7) вираз (5) і (6). У підсумку одержимо систему двох рівнянь з частинними похідними щодо двох шуканих функцій u і w :

$$\rho h \ddot{u} - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0;$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} w^{IV} - \frac{\rho h^3}{12} \left(1 + \frac{E}{G(1-\nu^2)} \right) \ddot{w}'' + \rho h \left(1 + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)GR^2} \right) \ddot{w} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho^2 h^3}{12G} w'' - \frac{E^2 h^3}{12(1-\nu^2)^2 GR^2} w'' + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} w + \frac{E^2 h^3 \nu}{12(1-\nu^2)GR} u'''' - \\
& - \frac{\rho E h^3 \nu}{12(1-\nu^2)GR} u' - \frac{Eh\nu}{R(1-\nu^2)} u' = p_n + \frac{\rho h^2}{12G} p_n - \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)G} p_n'' . \quad (8)
\end{aligned}$$

Тут штрихом позначене диференціювання по x , точкою – по t .

Система (8) описує динаміку циліндричної оболонки під дією осесиметричного навантаження p_n . Вона є більш складною в порівнянні з рівнянням динаміки балки на пружній основі [5]. Ця система відрізняється також і від рівнянь теорії оболонок Кірхгофа наявністю похідної четвертого порядку за часом від перемінної w , а також похідними по x і t від інтенсивності навантаження p_n . У зв'язку з цим вона може бути використана для опису більш загальних і складних механічних явищ, зокрема, для вивчення хвиль, що рухаються.

2. Дія на оболонку східчастого навантаження, що рухається

Задача про динаміку і напружено-деформований стан пружної циліндричної трубки під дією внутрішнього східчастого навантаження інтенсивністю p_n , що рухається зі швидкістю V описується системою рівнянь (8), причому при $X < 0$ $p_n = 0$, тому рівняння є однорідними:

$$\begin{aligned}
& h \left(\rho V^2 - \frac{E}{1-\nu^2} \right) u'' + \frac{Eh\nu}{(1-\nu^2)R} w' = 0 ; \\
& \frac{Eh^3\nu}{12GR(1-\nu^2)} \left(\frac{E}{1-\nu^2} - \rho V^2 \right) u'' - \frac{Eh\nu}{R(1-\nu^2)} u' + \\
& + \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \frac{\rho h^3}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-\nu^2)} \right] V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G} V^4 \right\} w'' + \\
& + \left\{ \rho h \left(1 + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)^2 GR^2} \right) V^2 - \frac{E^2 h^3}{12(1-\nu^2)^2 GR^2} \right\} w'' + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} w = 0 \quad (9) \\
& (X < 0) .
\end{aligned}$$

При $X > 0$ діє навантаження поля постійного тиску, тому $p_n = const$, $p_n'' = 0$ і справедливі неоднорідні рівняння виду (8):

$$\begin{aligned}
& h \left(\rho V^2 - \frac{E}{1-\nu^2} \right) u'' + \frac{Eh\nu}{(1-\nu^2)R} w' = 0; \\
& \frac{Eh^3\nu}{12GR(1-\nu^2)} \left(\frac{E}{1-\nu^2} - \rho V^2 \right) u''' - \frac{Eh\nu}{R(1-\nu^2)} u' + \\
& + \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \frac{\rho h^3}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-\nu^2)} \right] V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G} V^4 \right\} w^{IV} + \\
& + \left\{ \rho h \left(1 + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)^2 GR^2} \right) V^2 - \frac{E^2 h^3}{12(1-\nu^2)^2 GR^2} \right\} w'' + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} w = p_n \quad (10) \\
& (X > 0).
\end{aligned}$$

Для спрощення систем (9) і (10) зробимо додаткові перетворення. Перше рівняння цих систем мають інтегралі, тому, наприклад, з (9) маємо:

$$\begin{aligned}
u' &= C_1 - \frac{E\nu}{R[\rho(1-\nu^2)V^2 - E]} w; \\
u''' &= -\frac{E\nu}{R[\rho(1-\nu^2)V^2 - E]} w'' \quad (X < 0), \quad (11)
\end{aligned}$$

де C_1 – константа.

У результаті друге рівняння системи (9) приводиться до форми:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \frac{\rho h^3}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-\nu^2)} \right] V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G} V^4 \right\} w^{IV} + \\
& + \left\{ \rho h \left(1 + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)^2 GR^2} \right) V^2 - \frac{E^2 h^3}{12(1-\nu^2)^2 GR^2} \right\} w'' + \\
& + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} \left\{ 1 + \frac{E\nu^2}{\rho(1-\nu^2)V^2 - E} \right\} w = \frac{Eh\nu}{(1-\nu^2)R} C_1 \quad (X < 0). \quad (12)
\end{aligned}$$

Аналогічні перетворення виконуються для системи (10) при $(X > 0)$:

$$u' = C_2 - \frac{E\nu}{R[\rho(1-\nu^2)V^2 - E]} w;$$

$$u''' = - \frac{Ev}{R[\rho(1-v^2)V^2 - E]} w'' \quad (X > 0), \quad (13)$$

де C_2 – константа.

Підставляючи (13) у (10), одержимо:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} - \frac{\rho h^3}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-v^2)} \right] V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G} V^4 \right\} w^{IV} + \\ & + \left\{ \rho h \left(1 + \frac{Eh^2}{12(1-v^2)GR^2} \right) V^2 - \frac{E^2 h^3}{12(1-v^2)^2 GR^2} \right\} w'' + \\ & + \frac{Eh}{(1-v^2)R^2} \left\{ 1 + \frac{Ev^2}{\rho(1-v^2)V^2 - E} \right\} w = \frac{Eh\nu}{(1-v^2)R} C_2 + p_n \quad X > 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Загальний розв'язок $w(x)$ рівняння (12) представляється у вигляді суми загального розв'язку $w_{oo}(x)$ відповідного однорідного рівняння для (12) і його частинного розв'язку $w_{чи}(x)$:

$$w(x) = w_{oo}(x) + w_{чи}(x). \quad (15)$$

Прийmemo:

$$w_{oo}(x) = We^{\lambda x}.$$

Підставляючи праву частину цього рівняння у відповідне однорідне рівняння, одержимо бікватратне рівняння:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} - \frac{\rho h^3}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-v^2)} \right] V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G} V^4 \right\} \lambda^4 + \\ & + \left\{ \rho h \left(1 + \frac{Eh^2}{12(1-v^2)GR^2} \right) V^2 - \frac{E^2 h^3}{12(1-v^2)^2 GR^2} \right\} \lambda^2 + \\ & + \frac{Eh}{(1-v^2)R^2} \left\{ 1 + \frac{Ev^2}{\rho(1-v^2)V^2 - E} \right\} = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

Уведемо позначення:

$$m = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} - \frac{\rho h^3}{12} \left[1 + \frac{E}{G(1-v^2)} \right] V^2 + \frac{\rho^2 h^3}{12G} V^4;$$

$$n = \rho h \left(1 + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)GR^2} \right) V^2 - \frac{E^2 h^3}{12(1-\nu^2)^2 GR^2};$$

$$p = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} \left\{ 1 + \frac{Ev^2}{\rho(1-\nu^2)V^2 - E} \right\}.$$

Тоді рівняння (16) можна представити у вигляді:

$$m\Lambda^2 + n\Lambda + p = 0. \quad (17)$$

З нього випливає:

$$\Lambda_{1,2} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4mp}}{2m};$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\Lambda_1}; \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\Lambda_2}. \quad (18)$$

Вид розв'язку (15) залежить від значень Λ_1 , Λ_2 . Можливі різні випадки.

Нехай $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 > 0$. Тоді:

$$w_{oo}(X) = C_3 e^{\sqrt{\Lambda_1} X} + C_4 e^{\sqrt{\Lambda_2} X} + C_7 e^{-\sqrt{\Lambda_1} X} + C_8 e^{-\sqrt{\Lambda_2} X} \quad (X < 0);$$

$$w_{oo}(X) = C_5 e^{-\sqrt{\Lambda_1} X} + C_6 e^{-\sqrt{\Lambda_2} X} + C_9 e^{\sqrt{\Lambda_1} X} + C_{10} e^{\sqrt{\Lambda_2} X} \quad (X > 0). \quad (19)$$

При визначенні констант C_3, C_4, \dots, C_{10} будемо враховувати, що розв'язки убувають на нескінченності, тобто $w_{oo}(X) \rightarrow 0$ при $X \rightarrow \pm\infty$. Ця умова дозволяє прийняти $C_7 = C_8 = C_9 = C_{10} = 0$ і розв'язки (19) спростити:

$$w_{oo}(X) = C_3 e^{\sqrt{\Lambda_1} X} + C_4 e^{\sqrt{\Lambda_2} X} \quad (X < 0);$$

$$w_{oo}(X) = C_5 e^{-\sqrt{\Lambda_1} X} + C_6 e^{-\sqrt{\Lambda_2} X} \quad (X > 0). \quad (20)$$

Частинні розв'язки $w_{чн}(x)$ неоднорідних рівнянь (12) і (14) мають вигляд:

$$w_{чн}(X) = \frac{\nu R}{1-\nu^2} \cdot \frac{\rho(1-\nu^2)V^2 - E}{\rho V^2 - E} C_1 \quad (X < 0);$$

$$w_{\text{ши}}(X) = \frac{\nu R}{1-\nu^2} \cdot \frac{\rho(1-\nu^2)V^2 - E}{\rho V^2 - E} C_2 + \frac{R^2[\rho(1-\nu^2)V^2 - E]}{Eh(\rho V^2 - E)} p_n \quad (X > 0). \quad (21)$$

Рівності (20) і (21) дозволяють знайти загальний розв'язок (15):

$$\begin{aligned} w(X) &= C_3 e^{\sqrt{\Lambda_1} X} + C_4 e^{\sqrt{\Lambda_2} X} + \frac{\nu R}{1-\nu^2} \cdot \frac{\rho(1-\nu^2)V^2 - E}{\rho V^2 - E} C_1 \quad (X < 0); \\ w(X) &= C_5 e^{-\sqrt{\Lambda_1} X} + C_6 e^{-\sqrt{\Lambda_2} X} + \frac{\nu R}{1-\nu^2} \cdot \frac{\rho(1-\nu^2)V^2 - E}{\rho V^2 - E} C_2 + \\ &+ \frac{R^2[\rho(1-\nu^2)V^2 - E]}{Eh(\rho V^2 - E)} p_n \quad (X > 0). \end{aligned} \quad (22)$$

Константи C_1, C_2, \dots, C_6 , що входять в (22), знаходяться з умов сполучення розв'язку при $X = 0$. Умови нерозривності $w(X)$ і її похідних приводять до рівностей:

$$\begin{aligned} w_-(0) &= w_+(0); \\ w'_-(0) &= w'_+(0); \\ w''_-(0) &= w''_+(0); \\ w'''_-(0) &= w'''_+(0); \\ N_{1-}(0) &= N_{1+}(0). \end{aligned} \quad (23)$$

Остання рівність цієї системи дає

$$\left(u' - \nu \frac{w}{R} \right)_- = \left(u' - \nu \frac{w}{R} \right)_+. \quad (24)$$

З урахуванням першої рівності системи (23) умова (24) приводиться до рівності:

$$u'_-(0) = u'_+(0). \quad (25)$$

Розглянемо першу рівність системи (11). З умови рівності нулю напружень при $X \rightarrow -\infty$ маємо $u'(-\infty) = w(-\infty) = 0$, звідки, $C_1 = 0$. Ураховуючи (25) разом з (11) і (13) і першою рівністю (23), одержуємо $C_2 = 0$.

Підставляючи (22) у перші чотири рівності (23), одержимо чотири рівняння для обчислення невідомих констант C_3, C_4, C_5, C_6 :

$$\begin{aligned}
 C_3 + C_4 - C_5 - C_6 &= \frac{R^2 [\rho(1-v^2)V^2 - E]}{Eh(\rho V^2 - E)} p_n; \\
 \Lambda_1^{1/2} C_3 + \Lambda_2^{1/2} C_4 + \Lambda_1^{1/2} C_5 + \Lambda_2^{1/2} C_6 &= 0; \\
 \Lambda_1 C_3 + \Lambda_2 C_4 - \Lambda_1 C_5 - \Lambda_2 C_6 &= 0; \\
 \Lambda_1^{3/2} C_3 + \Lambda_2^{3/2} C_4 + \Lambda_1^{3/2} C_5 + \Lambda_2^{3/2} C_6 &= 0.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Система (26) має розв'язок:

$$\begin{aligned}
 C_3 &= \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \cdot \frac{R^2 [\rho(1-v^2)V^2 - E]}{2Eh(\rho V^2 - E)}; \\
 C_4 &= -\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \cdot \frac{R^2 [\rho(1-v^2)V^2 - E]}{2Eh(\rho V^2 - E)}; \\
 C_5 &= -\frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \cdot \frac{R^2 [\rho(1-v^2)V^2 - E]}{2Eh(\rho V^2 - E)}; \\
 C_6 &= \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2 - \Lambda_1} \cdot \frac{R^2 [\rho(1-v^2)V^2 - E]}{2Eh(\rho V^2 - E)}.
 \end{aligned}$$

Розглянемо циліндричну оболонку при наступних значеннях її механічних параметрів: діаметр оболонки $2R = 0,8$ м; $h = 0,008$ м; щільність $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$; швидкість $V = 40$ м/с переміщення тиску p_n .

Тоді $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0,792$ Н/м²; $m = 9,657 \cdot 10^3$; $n = -5,715 \cdot 10^4$; $p = 1,029 \cdot 10^{10}$.

У цьому випадку: $\Lambda_{1,2} = 2,959 \pm 1,09 \cdot 10^3 i$.

Оскільки $\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\Lambda_{1,2}}$, то $\lambda_{1,2,3,4} = \pm \alpha \pm i\beta = \pm 23,38 \pm 23,31i$.

Так як корені є комплексними некрратними, то загальний розв'язок (15) приводиться до вигляду:

$$\begin{aligned}
 w_+(x) &= e^{-\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\alpha x} (D_1 \sin \beta x + D_2 \cos \beta x) + w_{\text{ин}} \quad (X > 0); \\
 w_-(x) &= e^{\alpha x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + e^{-\alpha x} (D_3 \sin \beta x + D_4 \cos \beta x) \quad (X < 0).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Враховуючи умови обмеженості прогинів w на нескінченності, приймаємо:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0 \quad (28)$$

і розв'язок (27) заміняємо співвідношеннями:

$$\begin{aligned} w_+(x) &= e^{-\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + w_{\text{ин}} \quad (X > 0); \\ w_-(x) &= e^{\alpha x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) \quad (X < 0). \end{aligned} \quad (29)$$

Константи C_i ($i = \overline{1, 4}$), що входять в (29) знаходимо з умов (23) сполучення розв'язку в точці $X = 0$.

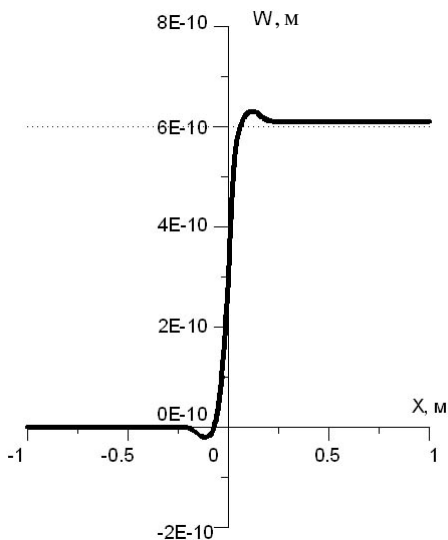


Рис. 1. Форма прогину оболонки під дією східчастого навантаження, що рухається

східчастого навантаження

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

можна вважати критичним. Воно збігається зі значенням подовжньої швидкості хвилі в суцільному пружному стержні.

На рис. 1 показана форма функції w хвилі, що біжить, в оболонці під дією східчастого поля тиску, який рухається. Аналізуючи одержаний результат можна відмітити, що найбільше викривлення вона має в околі фронту навантаження. Тому в цій зоні має місце найбільше значення згинальних моментів.

Ураховуючи значення констант C_i , виражених через

$$A = \frac{R^2 [\rho(1-v^2)V^2 - E]}{Eh(\rho V^2 - E)},$$

можна зробити висновок, що при прямуванні знаменника дробу в правій частині до нуля, значення прогину прямує до нескінченності. При цьому значення швидкості руху

1. *Алексеева Л.А., Украинец В.Н.* Критическая скорость движущейся нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной оболочкой.//Известия АН СССР. Механика твердого тела.- 1987.- № 4.- С.156-161.
2. *Пожуев В.И.* Влияние скорости движения волны давления на реакцию трехслойной цилиндрической оболочки.-Прикладная механика.- 1983.- 19, № 7.- С.59-64.
3. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В.* Расчет оболочек сложной формы.//Киев: Будівельник, 1990, 198 с.
4. *Мнев Е.Н., Перцев А.К.* Гидроупругость оболочек.-Л.: Судостроение, 1970, 365 с.
5. *Гуляев В.И., Мельник В.М., Яковенко Е.В.* Динамика балки на упругом основании под действием перемещающейся силы и момента (модель С.П. Тимошенко).//Прикладная механика.- 2000.- 36, № 12.- С.121-127.

Матеріал надійшов до редакції 07.07.04.

УДК 531.31

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук.,
Гончаренко М.В.**АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СИСТЕМ
В ЗОНАХ ПРОСТИХ І КОМБІНАЦІЙНИХ РЕЗОНАНСІВ ПРИ
СТОХАСТИЧНОМУ ПАРАМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

Серед багатьох видів динамічного навантаження, що часто зустрічається на практиці, досить значним класом являється параметричне навантаження. При певних характеристиках параметричного навантаження має місце втрата динамічної стійкості основного стану. Конфігурація зон стійкості при такому збудженні має складний вигляд, а резонанси, що збуджуються, важко прогнозуються.

Дослідженням динамічної стійкості в пружних системах при детерміністичному періодичному збудженні займалися Н.М.Беляєв[1], Н.М.Крилов, Н.Н.Боголюбов[2], В.В.Болотін [3].

Нехай динамічний стан системи описується рівнянням

$$M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C \frac{d \bar{x}}{dt} + (K + \mu K_g \cos vt) \bar{x} = 0, \quad (1)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - динамічні змінні, що характеризують стан системи, M , C і K - відповідно матриці мас, демпфірування і жорсткості, K_g - матриця геометричної жорсткості, ν та μ - частота і амплітуда гармонійного параметричного збудження відповідно. Вважається, що сили опору руху, які визначаються матрицею C , що відповідають i -ій формі власних коливань, ортогональні j -ій формі власних коливань ($i \neq j$).

Після переходу до нормальних координат рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C^* \frac{d \bar{x}}{dt} + (K^* + \mu K_g^* \cos vt) \bar{x} = 0, \quad (2)$$

де $C^* = \Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_n \omega_n)$,
 $K^* = \Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$, $K_g^* = \Phi^T K_g \Phi = (k_{ij}^g)_{i,j=1}^n$. Матриця Φ створена з n ортонормованих по масі власних векторів, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ -

власні частоти системи, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - модальні параметри затухання. Далі будемо вважати, що усі модальні параметри затухання однакові і визначаються логарифмічним декрементом споруди

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = \xi = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Якщо серед власних частот ω_i немає близьких до величини $\omega_i - \omega_j$, то частина доданків рівняння (2) біля резонансних частот, що досліджуються, будуть мати більш високий порядок малості по відношенню до основних "резонансних" доданків. В такому випадку при $\nu \approx \omega_i$ втрата стійкості буде відбуватись по i -тій нормальній формі [4]. Тоді зони нестійкості знаходяться біля значень частот, що визначаються виразом

$$\nu = \frac{2\omega_i}{m}, \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right), \quad (3)$$

і називаються простими резонансами. Межі таких зон визначаються виразом [3]

$$\nu \approx 2\omega_i \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mu^2 \left(k_{ii}^g \right)^2 - 4\xi_i^2} \right). \quad (4)$$

Аналогічно у випадку комбінаційного резонансу - при $\nu \approx (\omega_i \pm \omega_j)/2$ в рівняннях першого наближення, отриманих з (2), залишаться тільки два рівняння, що описують коливання по i -ій і j -ій нормальним формам [4]. Динамічний стан при втраті стійкості буде визначатись суперпозицією двох власних форм. Зони нестійкості знаходяться біля значень частот, що визначаються виразом

$$\nu = \frac{|\omega_i \pm \omega_j|}{m}, \quad \left(\begin{array}{l} i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right). \quad (5)$$

Такі явища називаються комбінаційними резонансами і наближені значення меж таких зон можна отримати за допомогою виразу [3]

$$\nu \approx \omega_i + \omega_j \pm \frac{\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j}{\sqrt{\xi_i \xi_j}} \sqrt{\mu^2 k_{ij}^g k_{ji}^g - \xi_i \xi_j}. \quad (6)$$

Ці типи коливань являються основними для системи з періодичним параметричним збудженням. Але на практиці дуже часто до періодичного

збудження додається ще стохастична складова. Наприклад, це може бути пов'язано з тим, що на вібрацію конструкції крім періодичності роботи обладнання впливає неврівноваженість певних елементів. Такий характер навантаження можна представити сумою гармонічної та стохастичної складових. Система (2) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C^* \frac{d \bar{x}}{dt} + (K^* + K_g^* (\mu \cos \nu t + f(t))) \bar{x} = 0. \quad (7)$$

де $f(t)$ - центрований стаціонарний випадковий процес.

Досліджується стійкість системи, коли частота періодичного параметричного навантаження лежить в зоні головного простого резонансу (3) та комбінаційного резонансу (5). У першому наближенні приймається, що при побудові областей стійкості в зоні простого резонансу достатньо розглянути одне рівняння системи (7). При цьому доданки, що містять недіагональні елементи матриці геометричної жорсткості, будуть більш високого порядку малості і не враховуються. Аналогічно для дослідження комбінаційних резонансів в першому наближенні достатньо розглянути два рівняння системи (7), в яких будуть відсутні доданки, що містять діагональні елементи матриці геометричної жорсткості [4]. За допомогою методу усереднення для зазначених випадків будуються моментні рівняння і задача побудови областей стійкості зводиться до задачі на власні значення.

Для визначення меж областей параметричної стійкості в зоні простого головного резонансу, що визначається частотою ω_i , розглядається i -те рівняння стохастичної системи (7):

$$x_i + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i + (\omega_i^2 + k_{ii}^g (\mu \cos \nu t + f(t))) x_i = 0. \quad (8)$$

Приймається, що частота гармонійного збудження знаходиться близько до подвійної власної частоти, а саме можливе відхилення становить малу величину Δ - так зване «розстроювання»:

$$\omega_i^2 = \nu^2 / 4 + \Delta. \quad (9)$$

Спочатку для запису рівнянь в стандартній формі виконується перехід до «повільних» змінних: двох амплітуд:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= z_1(t) \cos(\nu t / 2) + z_2(t) \sin(\nu t / 2), \\ \dot{x}_i(t) &= -\frac{1}{2} z_1(t) \nu \sin(\nu t / 2) + \frac{1}{2} z_2(t) \nu \cos(\nu t / 2). \end{aligned} \quad (10)$$

Рішення отриманої системи зводиться до дифузійного марківського процесу, при визначенні коефіцієнтів зносу і дифузії якого отримуємо стохастичні рівняння Іто відносно змінних станів і відповідних їх добутків [4]. Записується укорочена система рівнянь, праві частини яких отримані шляхом усереднення за період правих частин вихідної системи. Операція усереднення дозволяє представити функцію, що залежить від просторових змінних і часу, наприклад $g(\bar{z}, t)$, і має по часу період T , замінити функцію, що залежить тільки від просторових змінних. Операція усереднення представляється виразом

$$\phi(\bar{z}) = \frac{1}{T} \int_0^T g(\bar{z}, t) dt. \quad (11)$$

Отже система диференціальних рівнянь будується методом усереднення, що ґрунтується на теоремі Стратоновича-Хасьмінського. Застосувавши операцію математичного сподівання спочатку до обох частин рівнянь Іто відносно змінних станів, отримуємо детерміністичні рівняння відносно моментів першого порядку

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle z_1 \rangle \\ \langle z_2 \rangle \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \langle z_1 \rangle \\ \langle z_2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Аналогічна операція щодо рівнянь Іто відносно добутків змінних дозволяє отримати рівняння моментів другого порядку:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle z_1^2 \rangle \\ \langle z_1 z_2 \rangle \\ \langle z_2^2 \rangle \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} \langle z_1^2 \rangle \\ \langle z_1 z_2 \rangle \\ \langle z_2^2 \rangle \end{bmatrix}. \quad (13)$$

У співвідношеннях (12) і (13) A і B - матриці, коефіцієнти яких залежать від власної частоти і дисипативних характеристик системи, інтенсивності гармонійного параметричного навантаження і характеристик стохастичної складової [5]. Дослідження динамічної стійкості пружної системи зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку цих систем.

Аналогічна операція виконується при дослідженні комбінаційних резонансів в зоні суми власних частот ω_i та ω_j . Виділяється два рівняння системи (7):

$$x_i + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i + [\mu \cos \nu t + f(t)](k_{ii}^g x_i + k_{ij}^g x_j) = 0, \quad (14)$$

$$x_j + 2\xi_j \omega_j \dot{x}_j + \omega_j^2 x_j + [\mu \cos \nu t + f(t)](k_{ji}^g x_i + k_{jj}^g x_j) = 0.$$

Приймається, що частота гармонійного впливу ν визначається півсумою величин p_i та p_j , квадрати яких відрізняються від квадратів власних частот ω_i та ω_j на малі величини Δ_i та Δ_j відповідно:

$$\omega_i^2 = p_i^2 + \Delta_i, \quad \omega_j^2 = p_j^2 + \Delta_j, \quad p_i + p_j = 2\nu. \quad (15)$$

Також вважається, що частоти резонансних коливань співмірні, тобто задовольняють співвідношенням

$$p_i + p_j = 2\nu, \quad T = h_1 T_j + h_2 T_i,$$

де T_i і T_j - періоди коливань, h_1 та h_2 - довільні цілі числа. Наявність спільного періоду T по двом різним формам дозволяє застосувати теорему Стратоновича-Хасьмінського.

Перехід до "повільних" змінних виконується за допомогою виразів

$$\begin{aligned} x_k(t) &= x_{kc} \cos p_k t + x_{ks} \sin p_k t, \\ \dot{x}_k(t) &= p_k (-x_{kc} \sin p_k t + x_{ks} \cos p_k t), \quad k = i, j. \end{aligned} \quad (16)$$

Після усереднення диференціальні рівняння для перших моментів мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle x_{1c} \rangle \\ \langle x_{1s} \rangle \\ \langle x_{2c} \rangle \\ \langle x_{2s} \rangle \end{bmatrix} = [R] \cdot \begin{bmatrix} \langle x_{1c} \rangle \\ \langle x_{1s} \rangle \\ \langle x_{2c} \rangle \\ \langle x_{2s} \rangle \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Коефіцієнти матриці $R = \{r_{ij}\}$, $i, j = 1 \dots 4$, визначаються співвідношеннями

$$r_{11} = r_{22} = -\omega_1 \xi + n_1 + n_2, \quad r_{12} = -r_{21} = \frac{\Delta_1}{2p_1} - n_3 - n_4, \quad r_{13} = -r_{24} = \frac{\omega_1^2}{4p_1} \mu, \quad (18)$$

$$r_{33} = r_{44} = -\omega_2 \xi + n_5 + n_2, \quad r_{34} = -r_{43} = \frac{\Delta_2}{2p_2} - n_4 - n_6, \quad r_{31} = -r_{42} = \frac{\omega_2^2}{4p_2} \mu,$$

де введені позначення

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} K_{11}(u) \cos \omega \tau d\tau, \quad \Psi(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_{11}(u) \sin \omega \tau d\tau, \\
 n_1 &= \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 [S(2p_1) - S(0)], \quad n_2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{8p_1 p_2} k_{12} k_{21} [S(2\nu) - S(p_1 - p_2)], \\
 n_3 &= \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 \Psi(2p_1), \quad n_4 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{8p_1 p_2} k_{12} k_{21} [\Psi(2\nu) - \Psi(p_1 - p_2)], \\
 n_5 &= \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 [S(2p_2) - S(0)], \quad n_6 = \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 \Psi(2p_2). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Диференційне рівняння для других моментів

$$\frac{d}{dt} \{y\} = [S] \{y\}, \quad (20)$$

де

$$\{y\} = \left\{ \langle x_{1c}^2 \rangle \langle x_{1s}^2 \rangle \langle x_{1c} x_{1s} \rangle \langle x_{1c} x_{2c} \rangle \langle x_{1s} x_{1c} \rangle \langle x_{1s} x_{2c} \rangle \langle x_{1s} x_{2s} \rangle \langle x_{2c} x_{2s} \rangle \langle x_{2c}^2 \rangle \langle x_{2s}^2 \rangle \right\}. \quad (21)$$

Ненульові коефіцієнти матриці $S = \{s_{i,j}\}$, $i, j = 1 \dots 10$, визначаються співвідношеннями

$$s_{1,1} = s_{2,2} = 2(-\omega_1 \xi + m_1 + n_2), \quad s_{1,2} = s_{2,1} = m_2, \quad s_{3,3} = 2(-\omega_1 \xi + m_3 + n_2),$$

$$2s_{1,3} = -s_{2,3} = -s_{3,1} = s_{3,2} = s_{4,6} = s_{5,7} = -s_{6,4} = -s_{7,5} = \frac{\Delta_1}{2p_1} - n_3 - n_4,$$

$$2s_{1,4} = -2s_{2,7} = -s_{3,5} = s_{3,6} = s_{4,9} = s_{5,8} = -s_{6,8} = -s_{7,10} = \frac{\omega_1^2}{4p_1} \mu,$$

$$s_{1,9} = s_{1,10} = s_{2,9} = s_{2,10} = m_4, \quad s_{4,7} = s_{5,6} = s_{6,5} = s_{7,4} = m_2 + m_5,$$

$$s_{4,4} = s_{5,5} = s_{6,6} = s_{7,7} = -\xi(\omega_1 + \omega_2) + n_1 + n_5 - 3n_2,$$

$$s_{4,5} = -s_{5,4} = s_{6,7} = -s_{7,6} = -s_{8,9} = s_{8,10} = s_{9,8} = -2s_{10,8} = \frac{\Delta_2}{2p_2} - n_6 - m_6,$$

$$s_{4,1} = -s_{5,3} = s_{6,3} = -s_{7,2} = s_{8,5} = -s_{8,6} = s_{9,4} = -s_{10,7} = \frac{\omega_2^2}{4p_2} \mu,$$

$$s_{8,8} = 2(-\omega_2 \xi + m_7 + n_2), \quad s_{9,10} = s_{10,9} = m_{10},$$

$$s_{9,9} = s_{10,10} = 2(-\omega_2 \xi + m_8 + n_2), \quad s_{9,1} = s_{9,2} = s_{10,1} = s_{10,2} = m_9; \quad (21)$$

де прийняті позначення

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 [1,5S(2p_1) - S(0)], \quad m_2 = \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 [S(2p_1) + 2S(0)], \\
 m_3 &= \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{11}^2 [S(2p_1) - 1,5S(0)], \quad m_4 = \frac{\omega_1^4}{8p_1^2} k_{12}^2 [S(2v) + S(p_1 - p_2)], \\
 m_5 &= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{8p_1 p_2} k_{11} k_{22} S(0), \quad m_7 = \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 [S(2p_2) - 1,5S(0)], \\
 m_6 &= \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{8p_1 p_2} k_{12} k_{21} [\Psi(p_1 - p_2) + \Psi(2v)], \quad m_8 = \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 [1,5S(2p_2) - S(0)], \\
 m_9 &= \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{21}^2 [S(2v) + S(p_1 - p_2)], \quad m_{10} = \frac{\omega_2^4}{8p_2^2} k_{22}^2 [S(2p_2) + 2S(0)]. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Дослідження стійкості систем в зонах комбінаційних резонансів зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку цих систем.

Розглядається задача динамічної стійкості плоскої форми згину балки.

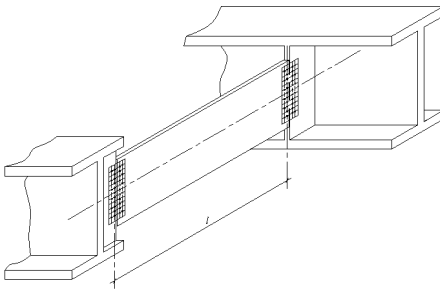


Рис. 1

Нехай пружна балка, шарнірно оперта по кінцям і навантажена в площині найбільшої жорсткості моментами $M(t)$ (рис. 1), знаходиться в режимі сталих коливань. Вказане навантаження являється параметричним по відношенню до згинно-крутильних деформацій, що відбуваються з цієї площини.

У випадку динамічного навантаження дослідження малих відхилень з головної площини балки приводить до задачі динамічної стійкості плоскої форми згину. Поперечний прогин $u(x,t)$ і кут повороту $\varphi(x,t)$ задовольняють рівнянням [3]

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + M(t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad M(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - GI_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (23)$$

де GI_k - жорсткість при крутінні; r - радіус інерції перерізу.

Граничні умови мають вигляд

$$u = \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{і} \quad x = \ell.$$

На рисунках 2 і 3 показані межі областей стійкості балки при стохастичному параметричному навантаженні, стохастична складова якого є випадковим процесом з прихованою періодичністю, а кореляційну функцію можна представити виразом:

$$\langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \left[\cos(\theta_\alpha|\tau) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha|\tau) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau), \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2,$$

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha\theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}; \quad \Psi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \theta^2 + 4\alpha^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (24)$$

де θ - прихована частота, σ^2 - дисперсія, α - радіус кореляції.

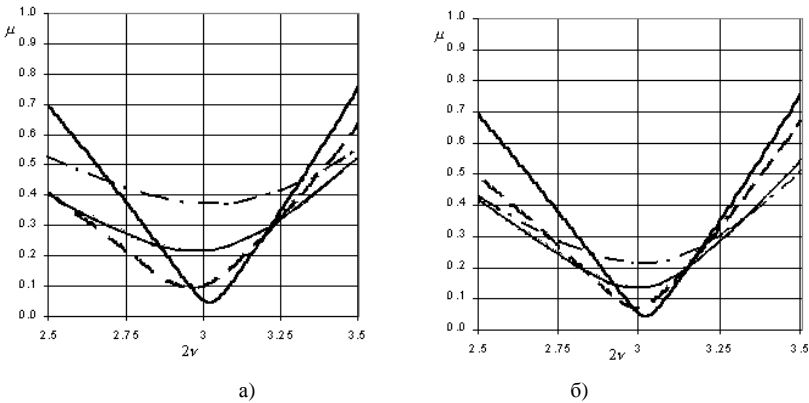


Рис. 2

На рис. 2 показані межі стійкості відносно перших моментів, на рис.3. – відносно других. Графіки побудовані при параметрах $\omega_1 = 0,6 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 2,4 \text{ рад/с}$, $h_1 = 12$, $h_2 = 4$, $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$, $\theta_\alpha = 1$, $\xi = 0,01$. Суцільна товста лінія відповідає межам стійкості при гармонійному параметричному навантаженні. Інші графіки на рис. 2а) і рис.3а) побудовані при $\sigma^2 = 1.0$; на рис.2б) і рис.3б) – при $\sigma^2 = 2.0$. Штрихові

лінії відповідають $k = 2$, суцільні тонкі - $k = 0.5$, штрихпунктирні - $k = 0.25$.

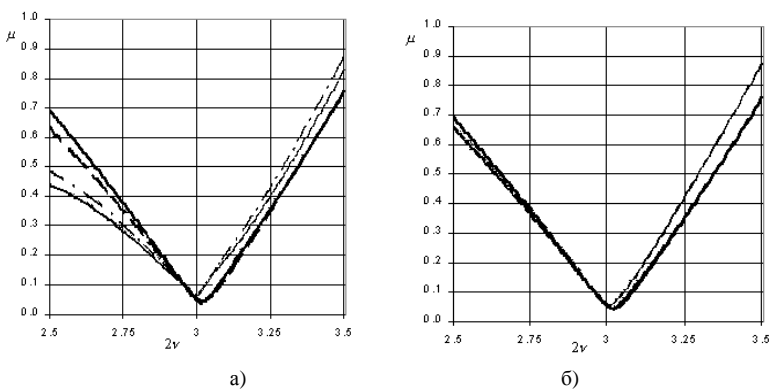


Рис. 3

З наведених графіків видно, що врахування додаткового випадкового навантаження змінює конфігурацію областей нестійкості. Тому при наявності в динамічному навантаженні на споруду стохастичних складових необхідно проводити аналіз впливу додаткового випадкового збудження на динамічну стійкість. Запропонована методика дає можливість оцінювати цей вплив.

1. *Белзев Н.М.* Устойчивость призматических стержней под действием продольных сил // Инж. сооружения и строит. механика.-М.: Путь, 1924.
2. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику.- К.: изд-во АН УССР, 1937. -363с.
3. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.
4. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
5. *Ariaratnam S.T., Tam D.S.* Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator// ZAMM, 56, 1976. – p.449-452.

Матеріал надійшов до редакції 14.07.04.

УДК 593.9

Гревцев О.К.

РІШЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АКсіАЛЬНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

В статтях [1,2] був наведений метод розв'язання диференціальних рівнянь осесиметричної задачі теорії пружності для нерівномірно нагрітих обертових аксіальних тіл змінної товщини, зокрема дисків, симетричних відносно площин $z=0$ і $r=0$. При цьому було розглянуто одне з часних рішень системи диференціальних рівнянь у переміщеннях:

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} e_{,1} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta_{,1} + \frac{1}{G} \rho \omega^2 r = 0; \quad (1)$$

$$\Delta u_3 + \frac{1}{1-2\nu} e_{,3} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta_{,3} = 0,$$

в яких індекс після коми означає часткову похідну за відповідною координатою r або z ; u_1 і u_3 - відповідно компоненти радіального і осьового переміщень; Δu_i - оператор Лапласа від переміщень u_i ($i=1,3$); α і ν - коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона; $e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = u_{1,1} + \frac{1}{r} u_1 + u_{3,3}$ - об'ємне розширення; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль зсуву; E - модуль пружності; ρ - маса одиниці об'єму; ω - кутова швидкість; $\theta = \theta(r, z)$ - температурне поле.

Знайдені радіальні $u_1(r, z)$ і осьові $u_3(r, z)$ переміщення, які перетворювали систему (1) на тотожність, мали такий вигляд:

$$u_1(r, z) = u(r) - \frac{z^2}{2} \left[(1+\nu) \alpha \theta_{,1} + \frac{\nu}{2G} \rho \omega^2 r \right];$$

$$u_3(r, z) = -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{z}{r} (ru)_{,1} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z^3}{6} [(1+\nu) \alpha \Delta_1 \theta_1 +$$

$$+ \frac{\nu}{G} \rho \omega^2] + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \int_0^z \theta(r, z) dz$$

У переміщеннях (2): $u(r)$ - радіальне переміщення точок площини $z=0$

$$u(r) = -\frac{1-\nu}{2G} \rho \omega^2 \frac{r^3}{8} + (1+\nu) \alpha [B_1 \frac{r^3}{16} + B_2 (\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4})] + A_1 \frac{r}{2} + A_2 \frac{1}{r}, \quad (3)$$

$\theta_1 = \theta_1(r)$ - температурне поле у радіальному напрямку.

$$\theta_1(r) = B_1 \frac{r^2}{4} + B_2 \ln r + B_3. \quad (4)$$

У виразах (3) і (4): A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 - довільні сталі інтегрування.

За знайденими переміщеннями (2) з урахуванням виразів (3) та (4) у відповідності до закону Гука було визначено напруження, причому осові σ_{33} та дотичні σ_{13} дорівнювали нулю [1,2].

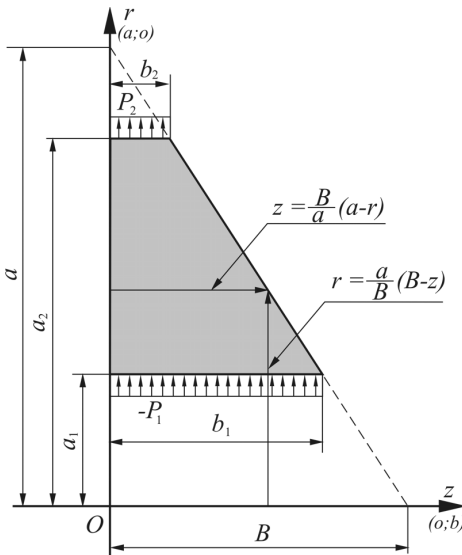


Рис. 1

У цій статті розглядається інше часткове рішення системи рівнянь (1), після розв'язання якого та після відомих перетворень, напруження σ_{13} та σ_{33} вже не дорівнюють нулю.

Розглянемо нерівномірно нагріте аксіальне тіло обертання, чверть якого показана на рис. 1. Температурне поле $\theta(r, z)$ приймаємо у вигляді $\theta(r, z) = \theta_1(r) + \theta_2(r, z)$ [3].

Рішення рівнянь рівноваги у переміщеннях (1) шукаємо у вигляді раніше отриманого (2) з додаванням функції $\Psi(r, z)$, яку слід визначити, тобто:

$$u_1(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \Psi_{,1}(r, z) + u(r) - \frac{z^2}{2} \left[(1+\nu) \alpha \theta_{1,1} + \frac{\nu}{2G} \rho \omega^2 r \right]; \quad (5)$$

$$u_3(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \Psi_{,3}(r, z) - \frac{\nu}{1-\nu} z \frac{1}{r} (nr)_{,1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z^3}{6} \left[(1+\nu) \alpha \Delta_1 \theta_1 + \frac{\nu}{G} \rho \omega^2 \right] + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \int_0^z \theta_1 dz.$$

Знайдені функції $u_1(r, z)$ є рішенням рівнянь (5).

Далі знаходимо значення об'ємного розширення $e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = u_{1,1} + \frac{1}{r}u_1 + u_{3,3}$ і після зведення подібних членів, маємо:

$$e = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{r}(ur)_{,1} - \frac{z^2}{2} \left[(1+\nu)\alpha\Delta_1\theta_1 + \frac{\nu}{2G}\rho\omega^2 \right] \right\} + \frac{1+\nu}{1-\nu}(\Delta\Psi + \alpha\theta_1). \quad (6)$$

Підставляючи переміщення (5) у перше рівняння системи (1), з врахуванням (6) маємо:

$$(\Delta\Psi - \alpha\theta_2)_{,1} = 0, \quad (7)$$

де $\Psi = \Psi(r, z)$ і $\theta_2 = \theta_2(r, z)$.

Аналогічно для другого рівня системи (1), маємо

$$(\Delta\Psi - \alpha\theta_2)_{,3} = 0, \quad (8)$$

де $\Psi = \Psi(r, z)$ і $\theta_2 = \theta_2(r, z)$.

Звідси виходить, що

$$\Delta\Psi - \alpha\theta_2 = C, \quad (9)$$

де $C = \text{const}$.

З (9) одержимо:

$$\theta_2(r, z) = \frac{1}{\alpha}\Delta\Psi = \frac{1}{\alpha} \left(\Psi_{,11} + \frac{1}{r}\Psi_{,1} + \Psi_{,33} \right). \quad (10)$$

Для температурного розподілу $\theta = \theta(r, z)$ з урахуванням (4) та (10), маємо:

$$\theta(r, z) = B_1 \frac{r^2}{4} + B_2 \ell nr + B_3 + \frac{1}{\alpha} \left(\Psi_{,11} + \frac{1}{r}\Psi_{,1} + \Psi_{,33} \right). \quad (11)$$

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах для напружень мають вигляд [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} + \rho\omega^2 r &= 0; \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \frac{1}{r}\sigma_{13} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$ - відповідно компоненти напружень радіальної дії окружного осевого і дотичного напружень.

Закон Гука записуємо у вигляді [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2G \left[e_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha\theta \right]; \\ \sigma_{22} &= 2G \left[e_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha\theta \right]; \\ \sigma_{33} &= 2G \left[e_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha\theta \right]; \\ \sigma_{13} &= 2G e_{13}.\end{aligned}\tag{13}$$

Підставляючи переміщення (5) у четверте рівняння системи знаходимо дотичне напруження σ_{13} :

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu} \Psi_{,13}.\tag{14}$$

За аналогією з третім рівнянням системи (13) для σ_{33} маємо:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r} (r\Psi_{,1})_{,1}.\tag{15}$$

Граничні умови на поверхні аксіального тіла обертання, що розглядається, будуть такими [6]:

$$\begin{aligned}P_r &= \sigma_{11} \cos(r, n) + \sigma_{13} \cos(z, n); \\ P_z &= \sigma_{13} \cos(r, n) + \sigma_{33} \cos(z, n),\end{aligned}\tag{16}$$

де P_r і P_z - проекції інтенсивності поверхневих навантажень на напрямки r і z ; n - нормаль до поверхні тіла обертання; (r, n) і (z, n) - кути між нормаллю і напрямками координатних осей.

Криволінійна бічна поверхня диска змінної товщини вільна від навантажень ($P_r = P_z = 0$) (рис. 1). Тоді із другого рівняння (16) маємо:

$$[\sigma_{13} \cos(r, n) + \sigma_{33} \cos(z, n)]_f = 0.\tag{17}$$

Якщо $f(r, z) \equiv 0$ - неявне рівняння лінії профілю граничної поверхні тіла обертання, то у явній формі маємо:

$$r^2 = e^2(z) \text{ та } z^2 = \frac{h^2(r)}{4}.$$

Довжина вектора нормалі до лінії профілю диска дорівнює:

$$|\bar{n}| = \sqrt{f_{,1}^2 + f_{,3}^2},$$

де $f_{,1} = |\bar{n}| \cos(r, n)$ і $f_{,3} = |\bar{n}| \cos(z, n)$. Звідси:

$$\cos(r, n) = \frac{f_{,1}}{|\bar{n}|}; \cos(z, n) = \frac{f_{,3}}{|\bar{n}|}.$$

Тоді умова (17) набирає вигляду:

$$\left[\sigma_{13} \frac{f_{,1}}{|\bar{n}|} + \sigma_{33} \frac{f_{,3}}{|\bar{n}|} \right]_f = 0.$$

Але $f(r, z) \equiv z^2 - \frac{h^2(r)}{4}$. Тоді $f_{,1} = \left(-\frac{h^2}{4} \right)_{,1}$ і $f_{,3} = 2z$. Звідси:

$$\left[\sigma_{13} \left(-\frac{h^2}{4} \right)_{,1} + \sigma_{33} 2z \right]_{z^2 = \frac{h^2(r)}{4}} = 0. \quad (18)$$

Далі задаємо напруження σ_{13} та σ_{33} через нову функцію таким чином, щоб задовольнити граничні умови (18). Наприклад, задамо:

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu} \Psi_{,13} = \frac{E}{1-\nu} z \varphi_{,1}. \quad (19)$$

Тоді

$$\Psi_{,13} = z \varphi_{,1} \quad [\Psi = \Psi(r, z); \varphi = \varphi(r)]. \quad (20)$$

Значення σ_{13} повинно задовольняти не тільки рівнянню (18), а й граничним умовам: $\sigma_{13} = 0$, при $r = a_1$ і $\sigma_{13} = 0$, при $r = a_2$ (див. рис. 1), тобто:

$$\varphi_{,1}(a_1) = 0; \varphi_{,1}(a_2) = 0. \quad (21)$$

Крім того, $u_3 = 0$ при $z = 0$, дає:

$$\Psi_{,3}(r, z) = 0. \quad (22)$$

Інтегруючи (20) маємо:

$$\Psi(r, z) = \int \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{4} \right) \varphi_{,1} dr + f(z). \quad (23)$$

Далі знаходимо $\Psi_{,3}(r, z)$:

$$\Psi_{,3}(r, z) = z\varphi(r) + f_{,3}(z).$$

З рівняння (22) при $z=0$ маємо:

$$f_{,3}(z) = 0. \quad (24)$$

Знаходимо σ_{33} із (14), враховуючи (23):

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r} (r\Psi_{,1})_{,1} = -\frac{E}{1-\nu} \left[\left(-\frac{h^2}{8} \right)_{,1} \varphi_{,1} + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \frac{1}{r} (r\varphi_{,1})_{,1} \right]. \quad (25)$$

Підставляючи отримані функції σ_{13} і σ_{33} з (19) та (25) у граничні умови (18), одержуємо:

$$\varphi_{,1}(r) \left(-\frac{h^2}{4} \right)_{,1} - \varphi_{,1}(r) \left(-\frac{h^2}{4} \right)_{,1} \equiv 0.$$

Таким чином, граничні умови (18) задовільнено. Напруження σ_{11} знаходимо з першого рівняння системи (13), враховуючи вирази (6), а також (3) і (11), в яких задаємо $B_2 = 0$. Після наведення подібних членів з врахуванням виразу (23), знаходимо:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \frac{1}{r} \varphi_{,1}(r) - \varphi(r) - f_{,33}(z) - \right. \\ & \left. - \left[(1-\nu) \alpha \frac{B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\rho\omega^2}{8} \right] \times \right. \\ & \left. \times r^2 - \alpha B_3 + A_1 \frac{1}{2} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{r^2} A_2 - \frac{z^2}{2} \left(\frac{1+\nu}{2} \alpha B_1 + \frac{\nu}{2G} \rho\omega^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Граничні умови на циліндричних поверхнях даного тіла обертання (див. рис. 1) будуть такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = P_2 \text{ при } r = a_2; \sigma_{11} = -P_1 \text{ при } r = a_1; \sigma_{13} = 0 \text{ при } r = a_2 \text{ і} \\ \sigma_{13} = 0 \text{ при } r = a_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Задовольняючи граничним умовам (27) для σ_{11} і враховуючи вираз (21) знаходимо $A_1; A_2$ і $f_{,33}$. Підставляючи знайдені функції у (26), одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right) \frac{1}{r} \varphi_{,1}(r) - \right. \\ \left. - \varphi(r) + \frac{a_2^2 \varphi(a_2) - a_1^2 \varphi(a_1)}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{[\varphi(a_2) - \varphi(a_1)] a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + (a_2^2 + \right. \\ \left. + a_1 - \frac{a_2^2 a_1^2}{r^2} - r^2) \times \left[(1-\nu) \alpha \frac{B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{3+\nu}{1+\nu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

За аналогією з вищесказаним отримуємо для окружної напруги σ_{22} :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{(P_1 + P_2) a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + \frac{E}{1-\nu} \left\{ \left(\frac{h^2}{8}\right) \varphi_{,1}(r) - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right) \varphi_{,11}(r) - \varphi(r) + \right. \\ \left. + \frac{a_2^2 \varphi(a_2) - a_1^2 \varphi(a_1)}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{[\varphi(a_2) - \varphi(a_1)] a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} - \left[(1-\nu) \alpha \frac{3B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{1+3\nu}{1+\nu} \right] r^2 + \right. \\ \left. + \left(a_2^2 + a_1^2 + \frac{a_2^2 a_1^2}{r^2} \right) \left[(1-\nu) \alpha \frac{B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{3+\nu}{1+\nu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Далі розглянемо перше рівняння граничних умов (16). У випадку, коли $z^2 = \frac{h^2}{4}$, маємо:

$$\left[\sigma_{11} \frac{f_{,1}}{|n|} + \sigma_{13} \frac{f_{,3}}{|n|} \right]_f = 0.$$

Оскільки $f(r, z) \equiv z^2 - \frac{h^2(r)}{4} = 0$ і $f_{,1} = \left(-\frac{h^2}{4} \right)_1$; $f_{13} = 2z$, тоді:

$$\left[\sigma_{11} \left(-\frac{h^2}{4} \right)_{,1} + \sigma_{13} 2z \right]_{z^2 = \frac{h^2(r)}{4}} = 0. \quad (30)$$

Підставляючи функції σ_{11} та σ_{13} у (30) з (28) і (19), отримуємо:

$$\left\{ [Q(r) - \varphi(r)] \left(-\frac{h^2}{4} \right)_{,1} + 2z^2 \varphi_{,1}(r) \right\}_{z^2 = \frac{h^2(r)}{4}} = 0, \quad (31)$$

де

$$Q(r) = \frac{1-\nu}{E} \left[\frac{P_2 a_2^2 (r^2 - a_1^2) - P_1 a_1^2 (a_2^2 - r^2)}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} \right] + \frac{a_2^2 (r^2 - a_1^2) \varphi(a_2) + a_1^2 (a_2^2 - r^2) \varphi(a_1)}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + \\ + (a_2^2 + a_1^2 - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2} - r^2) \left[(1-\nu) \alpha \frac{B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{3+\nu}{1+\nu} \right]. \quad (32)$$

З виразу (31) знаходимо:

$$\varphi_{,1}(r) = -\frac{h_{,1}(r)}{n(r)} [\varphi(r) - Q(r)], \text{ при } z = \frac{h}{2}. \quad (33)$$

Згідно з умовами (21), маємо:

$$\varphi_{,1}(a_1) = -\frac{\left(\frac{h}{2} \right)_{,1}}{\frac{h}{2}} \Big|_{r^2=a_1^2} [\varphi(a_1) - Q(a_1)].$$

Але $Q(a_1)$ з (32) дорівнює:

$$Q(a_1) = -P_1 \frac{1-\nu}{E} + \varphi(a_1).$$

Тоді:

$$\varphi_{,1}(a_1) = -\frac{\left(\frac{h}{2} \right)_{,1}}{\frac{h}{2}} \Big|_{r^2=a_1^2} P_1 \frac{1-\nu}{E}.$$

Звідси:

$$z_r^1 \Big|_{r^2=a_1^2} = \left(\frac{h}{2}\right) \Big|_{r^2=a_1^2} = 0 \text{ і } \varphi_{,1}(a_1) = 0.$$

Аналогічно $z_r^1 \Big|_{r^2=a_2^2} = \left(\frac{h}{2}\right) \Big|_{r^2=a_2^2} = 0 \text{ і } \varphi_{,1}(a_2) = 0.$

Рішення рівняння (33) дає для функції $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \frac{1}{h(r)} \left[\int_{a_1}^r Q(r) h_{,1}(r) dr + C \right]. \quad (34)$$

При $r = a_1$, $\varphi_{,1}(a_1) = 0$ і $Q(r) = -P_1 \frac{1-\nu}{E} + \varphi(a_1)$. Тоді із (33) враховуючи (34) маємо:

$$0 = -\frac{h_{,1}(a_1)}{h(a_1)} \left\{ \frac{1}{h(a_1)} C + P_1 \frac{1-\nu}{E} - \varphi(a_1) \right\}.$$

Але із (34):

$$\varphi(a_1) = \frac{1}{h(a_1)} C.$$

Тоді:

$$-\frac{h_{,1}(a_1)}{h(a_1)} P_1 \frac{1-\nu}{E} = 0,$$

але $P_1 \neq 0$ і $\frac{h_{,1}(a_1)}{2} = 0$.

При $r = a_2$, $\varphi_{,1}(a_2) = 0$ і $Q(r) = P_2 \frac{1-\nu}{E} + \varphi(a_2)$. Тоді із (33), враховуючи (34), маємо:

$$0 = -\frac{h_{,1}(a_2)}{h(a_2)} \left\{ \frac{1}{h(a_2)} \left[\int_{a_1}^{a_2} Q(r) h_{,1}(r) dr + C \right] - Q(a_2) \right\}.$$

Але:

$$\varphi(a_2) = \frac{1}{h(a_2)} \left[\int_{a_1}^{a_2} Q(r) h_{,1}(r) dr + C \right].$$

Тоді:

$$\frac{h_{,1}(a_2)}{h(a_2)} P_2 \frac{1-\nu}{E} = 0,$$

але $P_2 \neq 0$ і $\frac{h_{,1}(a_2)}{2} = 0$.

Як бачимо, граничні умови (30) виконано. Для знаходження функції $\varphi(r)$ обов'язково треба знати вид лінії профілю поверхні нерівномірно нагрітого обертового аксіального тіла. Наприклад, для нерівномірно нагрітого обертового диска змінної товщини з центральним отвором, зовнішня і внутрішня циліндричні поверхні якого завантажені рівномірно розподіленим навантаженням P_2 і P_1 , а бокова поверхня обмежена прямою $z = \frac{b}{a}(a-r)$. Четверть даного тіла обертання (через осьову симетрію) показана на рис.1. Рівняння лінії профілю бічної поверхні диска є таким:

$$\begin{aligned} f(r, z) &\equiv z^2 - \frac{h^2}{4} = \left(z - \frac{h}{2} \right) \left(z + \frac{h}{2} \right) = \\ &= \left[z - \frac{b}{a}(a-r) \right] \left[z + \frac{b}{a}(a-r) \right] = z^2 - \frac{b^2}{a^2}(a-r)^2 \equiv 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Звідси:

$$\frac{h^2}{4} = \frac{b^2}{a^2}(a-r)^2; \quad \frac{h}{2} = \frac{b}{a}(a-r),_{,1} = -\frac{b}{a}; \quad \frac{h_{,1}}{h} = -\frac{1}{a-r}. \quad (36)$$

Знаходимо функції $\varphi(r); \varphi(a_1); \varphi(a_2) Q(r)$ та їх похідні, тобто $\varphi_{,1}(r); \varphi_{,11}(r); Q_{,1}(r)$ за вищенаведеними залежностями і з врахуванням (35). Підставляючи знайдені функції у формули (19); (25); (28) і (29) отримаємо напруження $\sigma_{13}; \sigma_{33}; \sigma_{11}; \sigma_{22}$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = & -\frac{z}{(a-r)^2} \left\{ \frac{a-a_1}{a_2^2-a_1^2} (P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2) - \frac{a_1 a_2^2 (r^2 + aa_1 - 2ra_1)}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} (P_1 + P_2) - \right. \\ & - \frac{a_2^2 (ar^2 - 2r^2 a_1 + 2ra_1^2 - aa_1^2)}{r^2 (aa_2 + aa_1 - 2a_1 a_2)} \times \left[\frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} + \right. \\ & + (a_2^2 + a_1^2 - a_1 a_2 - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3a_2 - 3a_1}) \times \left(\frac{\alpha E B_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \left. + \right. \\ & \left. + [(a-a_1)(a_2^2 + a_1^2) - (a-r)r^2 - \frac{a_1 a_2^2 (r^2 - 2ra_1 + aa_1)}{r^2} - \frac{r^3 - a_1^3}{3}] \times \left(\frac{\alpha E B_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\sigma_{33} = -\left[\frac{b^2}{2a^2r} - \frac{z(a+r)}{2r(a-r)^3}\right] \left\{ \frac{a-a_1}{a_2^2-a_1^2} (P_1a_1^2 + P_2a_2^2) - \frac{a_1a_2^2(r^2-2ra_1+aa_1)}{r^2(a_2^2-a_1^2)} (P_1+P_2) + \right. \\ \left. + \frac{a_2^2(2r^2a_1-2ra_1^2-ar^2+aa_1)}{r^2(aa_2+aa_1-2a_1a)} \left[\frac{P_1a_1^2+P_2a_2^2}{a_2^2-a_1^2} - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2}{a_2^2-a_1^2} + (a_2^2+a_1^2-a_1a_2 - \frac{a_2^2-a_1^2}{3a_2-3a_1}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] + [(a-a_1)(a_2^2+a_1^2) - (a-r)r^2 - \frac{a_1a_2^2(r^2-2ra_1+aa_1)}{r^2} - \frac{r^3-a_1^3}{3}] \dots \right. \quad (38)$$

$$\times \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \left\} - \left[\frac{b^2}{a^2} (a-r) - \frac{z^2}{a-r} \right] \left\{ \frac{a_1^2a_2^2}{r^3(a_2^2-a_1^2)} (P_1+P_2) - \frac{a_1^2a_2^2}{r^3(aa_2+aa_1-2a_1a_2)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{P_1a_1^2+P_2a_2^2}{a_2^2-a_1^2} - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2}{a_2^2-a_1^2} + (a_2^2+a_1^2-a_1a_2 - \frac{a_2^3-a_1^3}{3a_2-3a_1}) \times \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] - \right. \\ \left. - \left(r - \frac{a_1^2a_2^2}{r^3} \right) \times \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\} \\ \sigma_{11} = \frac{P_2a_2^2(r^2-a_1) - P_1a_1^2(a_2^2-r^2)}{r^2(a_2^2-a_1^2)} + (a_2^2+a_1^2 - \frac{a_2^2a_1^2}{r^2} - r^2) \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) - \\ - \left[\frac{b^2}{2a^2r} - \frac{z^2}{2r(a-r)^2} \right] \times \left\{ \frac{P_2a_2^2+P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2} (a-a_1) - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2^2}{a_2^2-a_1^2} \cdot \frac{r^2-2ra_1+aa_1}{r^2} - \right. \\ - \frac{a_2^2(r^2a-a_1^2a) + 2ra_1^2 - 2r^2a_1}{r^2(aa_2+aa_1-2a_1a_2)} \times \left[\frac{P_2a_2^2+P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2} - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2}{a_2^2-a_1^2} + (a_2^2+a_1^2-a_1a_2 - \right. \\ \left. - \frac{a_2^3-a_1^3}{3a_2-3a_1}) \times \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] + [(a-a_1)(a_2^2+a_1^2) - (a-r)r^2 - \frac{r^3-a_1^3}{3} - \\ - \frac{a_1a_2^2(r^2-2ra_1+aa_1)}{r^2}] \times \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \left\} + \frac{r-a_1}{a-r} \times \left\{ \frac{P_2a_2^2+P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2} - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2^2}{r(a_2^2-a_1^2)} + \right. \\ \left. + (a_2^2+a_1^2 - \frac{a_1a_2^2}{r} - \frac{r^3-a_1^3}{3r-3a_1}) \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\} - \frac{a_2^2(ar^2-aa_1^2+2ra_1^2-2r^2a_1)}{r^2(a-r)(aa_2+aa_1-2a_1a_2)} \left\{ \frac{P_2a_2^2+P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2} \right. \\ \left. - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2}{a_2^2-a_1^2} + (a_2^2+a_1^2-a_1a_2 - \frac{a_2^3-a_1^3}{3a_2-3a_1}) \times \left(\frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} = & \frac{P_2 a_2^2 (r^2 + a_1^2) + P_1 a_1^2 (a_2^2 + r^2)}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + (a_2^2 + a_1^2 + \frac{a_2^2 a_1^2}{r^2} - 3r^2) \frac{\alpha E B}{16} + (a_2^2 + a_1^2 + \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2} - \\
& - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2) \times \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 + \frac{z^2}{(a-r)^3} \left\{ \frac{P_2 a_2^2 + P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} (a - a_1) - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \cdot \frac{r^2 - 2ra_1 + aa_1}{r^2} - \right. \\
& - \frac{a_2^2 (ar^2 - aa_1^2 + 2ra_1^2 - 2r^2 a_1)}{r^2 (aa_2 + aa_1 - 2a_1 a_2)} \times \left[\frac{P_2 a_2^2 + P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} + (a_2^2 + a_1^2 - a_1 a_2 - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3a_2 - 3a_1}) \times \right. \\
& \times \left. \left. \left(\frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] + \left[(a - a_1) (a_2^2 + a_1^2) - (a - r) r^2 - \frac{r^3 - a_1^3}{3} - \frac{a_1 a_2^2 (r^2 - 2ra_1 + aa_1)}{r^2} \right] \right\}; \quad (40) \\
& \left(\frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) - \left[\frac{b^2}{a^2} (a - r) - \frac{z^2}{a - r} \right] \left\{ \frac{(P_1 + P_2) a_1^2 a_2^2}{r^3 (a_2^2 - a_1^2)} - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^3 (aa_2 + aa_1 - 2a_1 a_2)} \left[\frac{P_2 a_2 + P_1 a_1}{a_2^2 - a_1^2} - \right. \right. \\
& - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} + (a_2^2 + a_1^2 - a_1 a_2 - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3a_2 - 3a_1}) \left(\frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] - \left(r - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^3} \right) \left(\frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \Big\} \\
& + \frac{r - a_1}{a - r} \left\{ \frac{P_2 a_2^2 + P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2^2}{r (a_2^2 - a_1^2)} + (a_2^2 + a_1^2 - \frac{a_1 a_2^2}{r} - \frac{r^3 - a_1^3}{3r - 3a_1}) \left(\frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) - \right. \\
& - \frac{a_2^2 (ar^2 + aa_1 - 2r^2 a_1)}{r^2 (a - r) (aa_2 + aa_1 - 2a_1 a_2)} \left\{ \frac{P_2 a_2^2 + P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} - (a_2^2 + a_1^2 - a_1 a_2 - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3a_2 - 3a_1}) \times \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

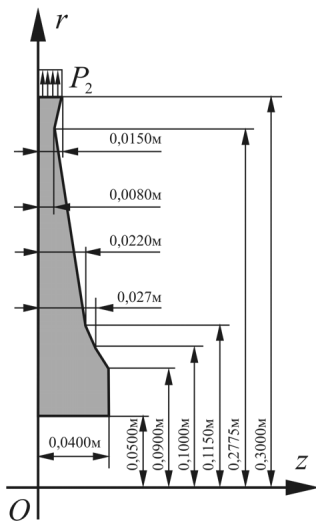


Рис. 2

Знайдені σ_{13} , σ_{33} , σ_{11} та σ_{22} є точним розв'язанням системи рівнянь рівноваги (12), тому що після підстановки перетворюють останні на тотожності.

Для прикладу визначення напруженого стану за запропонованим методом розглянемо рівномірно нагрітий обертовий диск змінної товщини з центральним отвором, чверть якого показана на рис. 2. Визначення напружень в даному диску методом скінчених елементів наведена у роботі [7]. Диск, що розглядається, вироблений із сталі марки 45X14H14B2M, обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 753,6$ рад/с і зазнає дії рівномірно розподіленого по зовнішній поверхні обода навантаження $P_2 = 173$ МПа. Щільність матеріалу диска

Таблиця 5

$R, \text{ м}$	$\sigma_{11}, \text{ МПа}$ при $z=0$	$\sigma_{11}, \text{ МПа}$ (МСЕ)	Розходження $\sigma_{11}, \%$	$\sigma_{22}, \text{ МПа}$ при $z=0$	$\sigma_{22}, \text{ МПа}$ (МСЕ)	Розходження $\sigma_{22}, \%$
0,3000	173	173	0	238	195	18
0,2970	190	182	4	250	211	16
0,2640	318	342	7	385	304	21
0,1500	208	255	18	273	265	3
0,1070	152	197	23	233	263	11
0,0802	64	133	52	159	263	41
0,0592	32	55	42	201	312	36
0,0500	0	0	0	235	360	35

Отже запропонований в статті метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для нерівномірно нагрітих аксіальних тіл обертання змінної товщини, на думку автора, може бути застосований у турбобудівництві, тому що дозволяє точно визначити напруження в будь-якій точці тіла диска. При цьому, на геометію бічної поверхні диску обмежень не накладається, що допоможе проводити оптимізацію конструктивних розмірів тіла обертання залежно від інженерних вимог.

1. Гревцев А. К., Рябов А. Ф. Решение задачи теории упругости для вращающихся дисков переменной толщины. – Киев, 1989.-19с. Деп.в УкрНИИНТИ 24.04.89, № 11566-Ук89.
2. Гревцев О. К. Про один метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для нерівномірно нагрітого обертового диска змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд. 1998.- Вип.64-с.76-86.
3. Кац А. М. Теория упругости. –М.: Гос. издат. технико - теоретической литературы,1956.-207 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.- М.,1979-560 с.
5. Мелан Э. Паркус Г. Термоупругие напряжения вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматиз,1958.-167 с.
6. Тимошенко С. П. Курс теории упругости.- К., 1972.-501 с.
7. Подгорный А. Н. др. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций.-Киев: Наукова думка, 1984-264 с.

Матеріал надійшов до редакції 27.07.04.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Рутковський В.А.</i> Ефективність розв'язання просторових задач теорії повзучості	3
<i>Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.</i> Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при моделюванні удару із застосуванням нелінійних силових характеристик контактної взаємодії	14
<i>Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.</i> Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій	24
<i>Баженов В.А., Слободян Я.О.</i> Застосування сучасних комп'ютерних технологій розрахунку і проектування для обґрунтування безпеки об'єктів атомної енергії.	35
<i>Шульга М.О.</i> Про динамічну задачу для континуально-дискретних систем	44
<i>Дехтярюк Є.С., Немчинова Л.Ю., Отрашевська В.В.</i> Вплив радіуса кореляції стохастичного навантаження на структуру областей стійкості пружних систем	48
<i>Соловей М.О., Кривенко О.П.</i> Вплив нагріву на стійкість гладких пологих сферичних оболонок лінійно-змінної товщини	60
<i>Кобієв В.Г., Барабаш М.С.</i> Дослідження ефективності моментної схеми методу скінченних елементів при розрахунку тонкостінних об'єктів із застосуванням демо-версії системи NASTRAN	74
<i>Іванченко Г.М.</i> Фокусування плоскої розривної хвилі анізотропними лінзами малої кривини	83
<i>Костіна О.В., Аранчій Н.Є.</i> Збіжність розв'язків сітковими методами задачі стійкості тороїдної оболонки	87

<i>Сніжко Н.А., Солодей І.І., Овсянніков О.С. Шевченко Ю.В.</i> Вимушені коливання баштової градирні аес під дією вітрового навантаження	92
<i>Гайдайчук В. В., Муса Набіль</i> Динаміка циліндричної оболонки під дією внутрішнього східчастого поля тиску, що рухається	104
<i>Дехтярюк Є.С., Гончаренко М.В.</i> Аналіз стійкості пружних систем в зонах простих і комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні	115
<i>Гревцев О.К.</i> Рішення осесиметричної задачі теорії пружності для обертових аксіальних тіл змінної товщини	124

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 74

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку .04. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. . Умовн. Фарбо-відб.
Облік.-вид. арк. . Тираж 100. Зам. № .

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

Фірма "ВІПОЛ"

м. Київ, вул. Волинська, 60. 03151