

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 75

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2004

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 26 листопада 2004 року, протокол № 4.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 75 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2004. – 114 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,
м. Київ, 03037,
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2004

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук,
Ворона Ю.В., канд. техн. наук

МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ ОБ'ЄКТІВ

Розглядаються тривимірні нестационарні коливання масивного пружного об'єкту, на частині границі якого Γ_u задані переміщення $u_g(t)$, а інша частина границі Γ_τ є вільною від напружень. Якщо переміщення $u_g(t)$ не залежать від просторових координат, то деформований стан об'єкту описується системою рівнянь у відносних переміщеннях

$$C_1^2 \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} + C_2^2 \frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial x_j \partial x_j} = \ddot{u}_j(x,t) + \ddot{u}_g(t), \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} u_j(x,t) &= 0, \quad x \in \Gamma_u; \\ \tau_j(x,t) &= 0, \quad x \in \Gamma_\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

де C_1 і C_2 - швидкості розповсюдження відповідно поздовжніх і зсувних хвиль, точками позначене диференціювання за часовою координатою. Початкові умови вважаються нульовими.

Будемо розглядати нестационарні випадкові впливи, при яких величина $\ddot{u}_g(t)$ може бути подана наступним чином

$$\ddot{u}_g(t) = A_0 P(t) \varphi(t), \quad (3)$$

де A_0 - деяка додатна константа; $\varphi(t)$ - центрована стаціонарна випадкова функція часу, $P(t)$ - квазіігинаюча, яку обирають, як правило, у вигляді обмеженої детерміністичної функції, що спочатку зростає до максимуму, а потім асимптотично прямує до нуля при збільшенні t [1]. Зауважимо, що таке подання часто використовується для моделювання акселерограм, які відповідають сейсмічному руху ґрунту.

Випадкову функцію часу можна подати у вигляді стохастичного інтегралу Фур'є:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4)$$

де спектр $Q(\omega)$ - центрована узагальнена випадкова функція частоти ω , що задовольняє умову стохастичної ортогональності:

$$\langle \overline{Q}(\omega) Q(\omega') \rangle = S_\varphi(\omega) \delta(\omega - \omega'); \quad (5)$$

$S_\varphi(\omega)$ - спектральна щільність процесу.

Тепер задача (1)-(2) зводиться до багаторазового розв'язання рівняння

$$C_1^2 \frac{\partial^2 u_{j\omega}(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} + C_2^2 \frac{\partial^2 u_{k\omega}(x,t)}{\partial x_j \partial x_j} - \dot{u}_{k\omega}(x,t) = A_0 P(t) e^{i\omega t} \quad (6)$$

при різних значеннях параметра ω з подальшим чисельним визначенням кореляційної функції реакції об'єкту:

$$\begin{aligned} K_u(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega) \overline{u}_{j\omega}(x, t_1) u_{j\omega}(x, t_2) d\omega \cong \\ &\cong \sum_{l=-L}^L S_\varphi(\omega_l) \overline{u}_{j\omega}(x, t_1) u_{j\omega}(x, t_2) \Delta\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Дослідження нестационарного деформування масивного об'єкту довільної форми становить досить складну задачу, багаторазове розв'язання якої може наштовхнутись на неподоланні труднощі обчислювального характеру. З цієї точки зору привабливою виглядає ідея попереднього накопичення інформації, яка є інваріантною відносно параметрів навантаження. Такими даними є власні частоти і форми коливань. Далі в даній статті використовується підхід, що базується на методі нормальних координат, тобто кожна складова переміщення подається наступним чином

$$u_{j\omega}(x, t) = \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)}(x) y_m(\omega, t), \quad (8)$$

де $\varphi_j^{(m)}(x)$ - m-а форма коливань об'єкту, нормована таким чином, що

$$\int_V \varphi_j^{(m)} \varphi_j^{(n)} dV = \delta_{mn}. \quad (9)$$

Через V позначена область, яку займає об'єкт розрахунку.

Підстановка (8) в (6) з наступним множенням на $\varphi_j^{(m)}(x)$ та інтегруванням за об'ємом дозволяє записати

$$y_m(\omega, t) + \Omega_m^2 y_m(\omega, t) = Q_m(t), \quad (10)$$

де

$$Q_m(t) = -A_0 P(t) e^{i\omega t} \int_V \varphi_j^{(m)} dV, \quad (11)$$

Ω_m - власна частота коливань.

Таким чином, система диференціальних рівнянь в частинних похідних перетворюється на систему звичайних незв'язних диференціальних рівнянь відносно нормальних координат $y(\omega, t)$, розв'язок яких отримати нескладно.

Отже, ключовим моментом чисельної методики є визначення власних частот і форм коливань. Для розв'язання багатьох видів задач механіки деформівного твердого тіла з успіхом може бути використаний апарат методу потенціалу. Визначення власних частот і форм за методом потенціалу може бути здійснено двома способами. Перший (кроковий спосіб) полягає в розв'язанні при різних значеннях частоти коливань Ω системи рівнянь відносно амплітудних значень граничних переміщень u_j^* та напружень τ_j^* :

$$0.5u_k^*(x, \Omega) + \int_{\Gamma_r} u_j^*(y, \Omega) T_{jk}^*(y, x, \Omega) d\Gamma_y = \int_{\Gamma_u} \tau_j^*(y, \Omega) U_{jk}^*(y, x, \Omega) d\Gamma_y, \quad (12)$$

де U_{jk}^* та T_{jk}^* - відповідно фундаментальна матриця В.Д.Купрадзе задачі про гармонійні усталені коливання та її узагальнена похідна [2]. Труднощі, пов'язані з реалізацією цього підходу, зумовлені складним характером залежності ядер U_{jk}^* і T_{jk}^* від частоти та необхідністю багаторазово повторювати всі етапи чисельного алгоритму для уточнення параметрів резонансного режиму.

Другий підхід базується на принципі Даламбера (інерційні сили розглядаються в якості розподіленого в об'ємі статичного навантаження). Згідно з цим підходом рух точок тіла, яке перебуває в режимі вільних коливань, підпорядкований рівнянню (формулі Соміліані)

$$\begin{aligned} 0.5u_k^*(x) + \int_{\Gamma_r} u_j^*(y) T_{jk}^*(y, x) d\Gamma_y - \int_{\Gamma_u} \tau_j^*(y) U_{jk}^*(y, x) d\Gamma_y = \\ = \rho \Omega^2 \int_V u_j^*(z) U_{jk}^*(z, x) dV_z, \quad z \in V, \end{aligned} \quad (13)$$

де U_{jk} - фундаментальна матриця Кельвіна статичної задачі.

Співвідношення (13) в порівнянні з (12) є значно простішими, крім того вони дозволяють досить легко перейти до алгебраїчної проблеми власних значень, але, з іншого боку, рівняння (13) містять в правій частині об'ємний інтеграл, обчислення якого відчутно обтяжує алгоритм розрахунку за методом потенціалу. Для підвищення ефективності чисельної методики переміщення у внутрішніх точках подаються у вигляді суми:

$$u_i^*(z) = \sum_{k=1}^K \alpha_j^{(k)} \delta_{ij} f^{(k)}(z) \quad (14)$$

і трактуються як об'ємне навантаження. Складовим навантаження за допомогою рівнянь рівноваги ставляться у відповідність поля пружних переміщень:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_{im}^{(k)}(x)}{\partial x_j \partial x_m} + \mu \frac{\partial^2 v_{ij}^{(k)}(x)}{\partial x_m \partial x_m} = \delta_{ij} f^{(k)}(x). \quad (15)$$

Звісно, ці статичні переміщення і навантаження також пов'язані між собою формулою Соміліани

$$\begin{aligned} 0.5v_{im}^{(k)}(x) + \int_{\Gamma} v_{jm}^{(k)}(y) T_{jk}(y, x) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} q_{jm}^{(k)}(y) U_{jk}(y, x) d\Gamma_y = \\ = -\delta_{im} \int_V f^{(k)}(z) U_{jk}(z, x) dV_z, \quad x, y \in \Gamma, z \in V, \end{aligned} \quad (16)$$

де $q_{im}^{(k)}$ - поля напружень, що відповідають переміщенням $v_{im}^{(k)}$.

В результаті підстановки (14), (16) в (13) отримуємо інтегральне рівняння, яке містить виключно поверхневі інтеграли:

$$\begin{aligned} 0.5u_k^*(x) + \int_{\Gamma} u_j^*(y) T_{jk}(y, x) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \tau_j^*(y) U_{jk}(y, x) d\Gamma_y = \\ = -\rho \Omega^2 \sum_{n=1}^N \alpha_m^{(n)} \left[0.5v_{km}^{(n)}(x) + \int_{\Gamma} v_{jm}^{(n)}(y) T_{jk}(y, x) d\Gamma_y - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} q_{jm}^{(n)}(y) U_{jk}(y, x) d\Gamma_y \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Оскільки формула Соміліани є математичним записом теореми про взаємність робіт, то викладену чисельну методику з повторним

використанням вказаної формули часто називають методом граничних елементів з подвійною взаємністю (Dual Reciprocity BEM) [3].

Зрозуміло, що ефективне застосування рівняння (17) для чисельного визначення власних частот і форм можливе лише за умови вдалого вибору функцій $f^{(k)}$. Більшість робіт, присвячених цьому питанню [3-6], використовують подання

$$f^{(k)}(z) = f(r^{(k)}(z)), \quad (18)$$

де $r^{(k)}(z)$ - відстань між точкою z та деякою фіксованою точкою $y^{(k)}$. Якщо прийняти

$$f^{(k)}(z) = r^{(k)}(z) + c, \quad (19)$$

де c - деякий характерний розмір об'єкту розрахунку, то за допомогою фундаментального тензору Гальоркіна [7] неважко знайти частинний розв'язок рівняння (15):

$$v_{jk}^{(m)}(z, y^{(m)}) = \left\{ \frac{(r^{(m)})^2}{6\mu} \delta_{jk} (c + 0.5r^{(m)}) - \frac{1}{1-2\nu} \left[\delta_{jk} \left(\frac{c}{5} + \frac{r^{(m)}}{12} \right) + r_{,j}^{(m)} r_{,k}^{(m)} (0.4c + 0.25r^{(m)}) \right] \right\}, \quad (20)$$

де $r_{,j}^{(m)}(z) = \frac{z - y^{(m)}}{r^{(m)}}$, ν - коефіцієнт Пуасона.

В свою чергу,

$$q_{jk}^{(m)}(z, y^{(m)}) = \lambda n_j \frac{\partial v_{ik}^{(m)}(z)}{\partial z_i} + \mu m_i \left(\frac{\partial v_{jk}^{(m)}(z)}{\partial z_i} + \frac{\partial v_{ik}^{(m)}(z)}{\partial z_j} \right) = \left\{ \frac{r^{(m)}}{1-\nu} \delta_{jk} (c + 0.5r^{(m)}) - \frac{1}{1-2\nu} \left[\delta_{jk} \left(\frac{c}{5} + \frac{r^{(m)}}{12} \right) + r_{,j}^{(m)} r_{,k}^{(m)} (0.4c + 0.25r^{(m)}) \right] \right\}. \quad (21)$$

Отже, ефективність алгоритму визначення власних частот і форм суттєво залежить від того, наскільки точно обчислюється об'ємний інтеграл в правій частині (13), тобто - наскільки точною є наближена рівність

$$\int_V u_j^*(z) U_{jk}(x, z) dV_z \cong \sum_{n=1}^N \alpha_m^{(n)} \left[0.5 v_{km}^{(n)}(x, y^{(m)}) + \int_{\Gamma} v_{jm}^{(n)}(y, y^{(m)}) T_{jk}(y, x) d\Gamma_y - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} q_{jm}^{(n)}(y, y^{(m)}) U_{jk}(y, x) d\Gamma \right]. \quad (22)$$

Дослідимо це питання на чисельному прикладі. Розглянемо вільні поздовжні коливання кругового циліндру, вирізаного з пружного шару, товщина якого дорівнює H . Радіусу циліндру $R=0.5H$. Спрямуємо вісь x_3 вздовж осі циліндру. Амплітуди переміщень точок циліндру, що відповідають i -й формі коливань, змінюються в залежності від x_3 за законом

$$u_1^{(i)} = u_2^{(i)} = 0; \quad u_3^{(i)} = A \sin \frac{\Omega_i x_3}{C_1}, \quad (23)$$

де $\Omega_i = (2i - 1) \frac{\pi C_1}{2H}$ - власна частота.

Якщо розташувати полюс інтегрування x в початку координат, то з урахуванням симетрії об'ємний інтеграл зводиться до одновимірною:

$$I(i) = \rho \Omega_i^2 \int_V u_3^{(i)}(z) U_{33}(x, z) dV_z = \\ = \frac{A(2i-1)^2 (\lambda + 2\mu) \pi^2}{32\mu(1-\nu)H^2} \int_0^H \left[\sin \left[\frac{(2i-1)\pi_i z_3}{H} \right] \cdot (3-4\nu) \sqrt{R^2 + z_3^2} - \right. \\ \left. - \frac{z_3^2}{\sqrt{R^2 + z_3^2}} - 2(1-2\nu)z_3 \right] dz_3, \quad (24)$$

який є регулярним і легко обчислюється за квадратурними формулами. З іншого боку, цей об'ємний інтеграл за викладеною вище методикою може бути наближено поданий у вигляді суми поверхневих інтегралів:

$$I(i) = \rho \Omega_i^2 \int_V u_3^{(i)}(z) U_{33}(x, z) dV_z \cong \rho \Omega_i^2 \sum_{n=1}^N \alpha_3^{(n)} \left[0.5 v_{33}^{(n)}(x, y^{(n)}) + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} v_{j3}^{(n)}(y, y^{(n)}) T_{3j}(y, x) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} q_{33}^{(n)}(y, y^{(n)}) U_{33}(y, x) d\Gamma \right]. \quad (25)$$

Після переходу до циліндричної системи координат інтеграли в правій частині (25) обчислюються в межах кожного з фрагментів поверхні за квадратурними формулами. Особливої уваги потребує випадок, коли областю інтегрування є нижній круговий торець циліндру, що містить полюс x , внаслідок чого відповідні інтеграли є сингулярними. Другий з інтегралів після параметризації перетворюється на регулярний:

$$\int_0 q_{33}^{(n)}(y, y^{(n)}) U_{33}(y, x) d\Gamma = \int_0^{2\pi} \int_0^R q_{j3}^{(n)}(\rho, \theta, y^{(n)}) \cdot \frac{(3-4\nu)}{16\pi\mu(1-\nu)} d\rho d\theta,$$

обчислення якого не становить труда.

Перший з інтегралів після параметризації перетворюється на

$$\begin{aligned} \int_0 v_{j3}^{(n)}(y, y^{(n)}) T_{3j}(y, x) d\Gamma &= \\ &= \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_0^{2\pi} \int_0^R [v_{13}^{(n)}(\rho, \theta, y^{(n)}) \cos \theta - v_{23}^{(n)}(\rho, \theta, y^{(n)}) \sin \theta] \frac{1}{\rho} d\rho d\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

тобто на інтеграл, що має особливість при $\rho = 0$. Для регуляризації такого інтеграла зазвичай використовують формулу Гауса [8]:

$$\int_D T_{ij}(y, x) d\Gamma = 0, \quad (27)$$

де D – замкнена поверхня.

Це дозволяє замість інтеграла

$$\int_{\Gamma} v_{j3}^{(n)}(y, y^{(n)}) T_{3j}(y, x) d\Gamma$$

обчислювати еквівалентний йому

$$\int_{\Gamma} [v_{j3}^{(n)}(y, y^{(n)}) - v_{j3}^{(n)}(x, y^{(n)})] T_{3j}(y, x) d\Gamma.$$

Тоді (26) замінюється інтегралом

$$\begin{aligned} \int_0 [v_{j3}^{(n)}(y, y^{(n)}) - v_{j3}^{(n)}(x, y^{(n)})] T_{3j}(y, x) d\Gamma &= \\ &= \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_0^{2\pi} \int_0^R \{ [v_{13}^{(n)}(\rho, \theta, y^{(n)}) - v_{13}^{(n)}(0, 0, y^{(n)})] \cos \theta - \end{aligned} \quad (28)$$

$$-\left[v_{23}^{(n)}(\rho, \theta, y^{(n)}) - v_{23}^{(n)}(0, 0, y^{(n)})\right] \sin \theta \left\} \frac{1}{\rho} d\rho d\theta,$$

який є регулярним, оскільки при $\rho = 0$ вираз у фігурних дужках дорівнює нулю.

Тепер можна обчислити об'ємний інтеграл, як за формулою (24), так і за (25) при різній кількості перерізів N (в цих перерізах розташовані допоміжні точки, від яких вимірюються відстані $r^{(m)}$). Результати обчислень величини $I(i)$ при $A=1\text{м}$ для перших трьох власних частот зведені в таблицю і свідчать про задовільну збіжність результатів при зростанні кількості допоміжних точок. Природно, що так само буде зростати точність визначення власних частот і форм.

Таблиця 1

N	Перша частота		Друга частота		Третя частота	
	\int_V	\sum_{Γ}	\int_V	\sum_{Γ}	\int_V	\sum_{Γ}
3	0,3983	0,3760	2,372	1,659	3,790	-4,609
4		0,3866		2,079		0,774
6		0,3914		2,241		2,234
9		0,3935		2,293		2,886
11		0,3952		2,325		3,106
15		0,3966		2,412		3,511

Після того, як знайдені власні пари, подальше розв'язання задачі стає досить простим. Якщо прийняти, що квазіігинаюча має вигляд

$$P(t) = te^{-ct} \eta(t), \quad (29)$$

де $\eta(t)$ - одинична функція Хевісайда, та припустити, що внутрішнє тертя в матеріалі характеризується параметром демпфірування ξ , то рівняння (10) набуде такого вигляду:

$$y_m''(\omega, t) + 2\xi \Omega_m y_m'(\omega, t) + \Omega_m^2 y_m(\omega, t) = B_m te^{(i\omega - c)t} \eta(t), \quad (30)$$

де

$$B_m = -\frac{2A_0 R}{2m-1} \sqrt{\frac{2H}{\pi}}.$$

Розв'язок цього рівняння може бути поданий наступним чином:

$$y_m(\omega, t) = y_m^{(1)} + y_m^{(2)}, \quad (31)$$

де

$$y_m^{(1)} = B_m \cdot \frac{\exp(-\xi \Omega_m t)}{(\beta^2 + 2\xi \Omega_m \beta + \Omega_m^2)^2} \left[2(\beta + \xi \Omega_m) \cos(\Omega_m^D t) + \frac{2(\beta + \xi \Omega_m) \xi \Omega_m - \Omega_m^2 + \beta^2}{\Omega_m^D} \sin(\Omega_m^D t) \right], \quad (32)$$

$$y_m^{(2)} = B_m \cdot \frac{\exp(-\xi \Omega_m t)}{(\beta^2 + 2\xi \Omega_m \beta + \Omega_m^2)^2} \left[(\beta^2 + 2\xi \Omega_m \beta + \Omega_m^2) \cdot t - 2(\beta + \xi \Omega_m) \right], \quad (33)$$

$$\beta = i\omega - c, \quad \Omega_m^D = \Omega_m \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Тепер за допомогою співвідношень (7), (8), (23) отримуємо дисперсію переміщень точок циліндру:

$$\sigma_u^2(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} \bar{y}_m \cdot \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m \cdot S_\varphi(\omega) d\omega. \quad (34)$$

На верхній грані циліндру

$$\varphi_j^{(m)}(H) = (-1)^{m+1} \delta_{j3} \sqrt{\frac{2}{\pi R^2 H}},$$

звідки

$$\sigma_u^2(H, t) = \frac{2\delta_{j3}^2}{\pi R^2 H} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M (-1)^m \bar{y}_m \cdot \sum_{m=1}^M (-1)^m y_m \cdot S_\varphi(\omega) d\omega. \quad (35)$$

На рисунку 1 зображені графіки залежності від часу

величини $\frac{\sigma_u^2(H, t)}{D^2}$, в якій

$$D = (HC_1^{-1})^3.$$

При проведенні чисельних розрахунків були прийняті такі значення геометричних і фізичних параметрів: $R = 5$ м, $H = 10$ м, $\rho = 2500$ кг/м³, $\nu = 0,25$, $E = 200$ Мпа, $\xi = 0,025$.

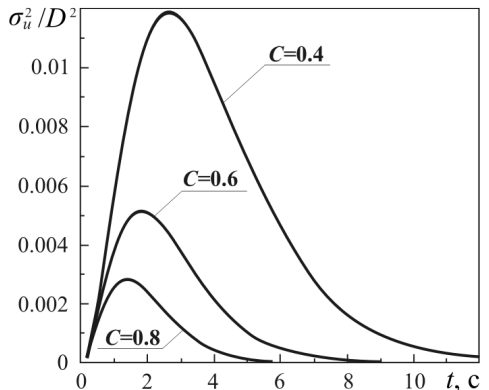


Рис. 1. Нормовані дисперсії переміщень верхньої грані циліндру

Також вважалось, що стаціонарна складова прискорення відповідає процесу з прихованою періодичністю, спектральна щільність якого має вигляд:

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{2\alpha\theta^2}{\pi} \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2},$$

де $\alpha = 6 \text{ с}^{-1}$, $\theta = 15 \text{ с}^{-1}$.

Наведені дані свідчать про працездатність запропонованої чисельної методики.

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
2. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 472 с.
3. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
4. *Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E.* Three-dimensional structural vibration analysis by the Dual Reciprocity BEM // Computational Mechanics, 1998. – vol. 21. – P. 372-381.
5. *Golberg M.A., Chen C.S., Bowman H., Power H.* Some comments on the use of Radial Basis Functions in the Dual Reciprocity Method // Computational Mechanics, 1998. – vol. 21. – P. 141-148.
6. *Chen W., Tanaka M.* New Insights in Boundary-only and Domain-type RBF Methods // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000. – vol. 1. – P. 145-151.
7. *Кременец Е.И., Ройтфарб И.З.* Учет массовых сил в граничных интегральных уравнениях для исследования упругих тел, взаимодействующих с внешними полями. – Киев, 1983. – 26 с.: Рукопись предст. Киев.инж.-строит.ин-т. Деп.в УкрНИИИТИ 06.01.83, № 8 Ук-Д83.
8. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

Матеріал надійшов до редакції 06.08.04.

УДК 539.375

Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Сахаров О.С., д-р техн. наук,
Шкриль О.О.

АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВИТКУ ТРІЩИНИ В ПРОСТОРОВИХ ТІЛАХ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

При визначенні несучої здатності відповідальних елементів конструкцій в різних галузях техніки необхідним є урахування наявності початкових тріщин. При статичному навантаженні зрушення тріщини і подальше стрімке руйнування відбувається при перевищенні параметрами механіки руйнування критичних значень. Іншим механізмом руйнування внаслідок зростання тріщини є циклічна втома. Значення параметрів механіки руйнування, які досягаються під впливом зовнішнього навантаження, в цьому випадку можуть бути суттєво меншими за критичні, але циклічний вплив навантаження спричиняє поступове зростання тріщини. Ресурс елемента конструкції з тріщиною вважається вичерпаним, коли тріщина набуває критичних розмірів. В зв'язку з цим становить інтерес моделювання процесу росту тріщини під впливом циклічного навантаження, визначення кількості циклів навантаження до досягнення тріщиною критичного розміру.

Питання про моделювання розвитку тріщини на теперішній час висвітлено в низці робіт, де наведені описи і приклади розв'язання даної задачі для двовимірних тіл [1–4]. Більшість відомих результатів дослідження деформування просторових тіл з тріщинами обмежуються визначенням параметрів механіки руйнування і створенням наближених методик прогнозування розвитку тріщини. Моделювання росту тріщини в просторовій постановці методом граничних елементів виконано в [5].

Складність форми досліджуваних об'єктів, просторовий характер розподілення зовнішніх навантажень, та довільність розташування і конфігурації тріщин вимагає розгляду задачі про розвиток тріщини і визначення ресурсу в просторовій постановці. Значна кількість розглядуваних об'єктів являють собою просторові призматичні тіла, завантажені зовнішніми навантаженнями $q(z^1, z^2)$ довільно розподіленими в площині поперечного перерізу тіла і спрямованими вздовж утворюючої (рис.1). Ефективним чисельним засобом розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла для зазначених об'єктів є

напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), переваги якого доведені для широкого кола задач [6]. Питання застосування НМСЕ до розв'язання задач механіки руйнування розглянуті в [7], де наведений опис методики обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) і показана ефективність застосування НМСЕ для визначення параметрів механіки руйнування. Зважаючи на це, перспективним є застосування НМСЕ для розв'язання задач про розвиток тріщин в просторових призматичних тілах.

Метою даної роботи є розробка алгоритму чисельного моделювання росту тріщини в просторових тілах, його реалізація в межах НМСЕ і проведення дослідження ефективності запропонованого підходу на прикладі призматичних просторових тіл.

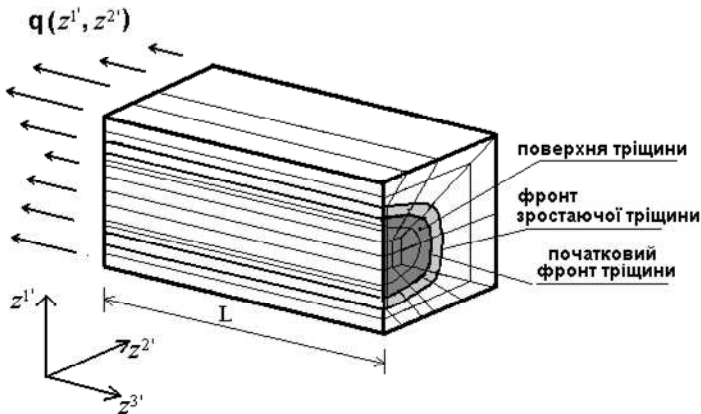


Рис.1. Призматичне тіло з тріщиною

При впливі циклічного навантаження процес розвитку тріщини найчастіше описується диференціальними залежностями, що встановлюють зв'язок між приростом довжини тріщини dl , кількістю циклів навантаження dN і КІН $K_I(l)$ в кожній точці фронту тріщини [8]

$$\frac{dl}{dN} = f(K_I(l), C_i), \quad (1)$$

де C_i – коефіцієнти, що характеризують властивості матеріалу.

Найпростішим частковим випадком залежності (1) є формула Періса:

$$\frac{dl}{dN} = C(K_I(l))^b. \quad (2)$$

Внаслідок складності форми фронту тріщини і суттєво просторового характеру напружено-деформованого стану в переважній більшості випадків інтегрування рівняння (1) виконується на основі чисельних методів. Чисельне розв'язання задачі про визначення ресурсу тіл з тріщинами передбачає дискретне подання процесу деформування у вигляді сукупності кроків за часом або зовнішнім навантаженням. На кожному кроці проводиться визначення напружено-деформованого стану тіла з тріщиною, обчислення параметрів механіки руйнування і визначення конфігурації тріщини.

Значення КІН обчислюються у вузлах СЕ сітки, розташованих вздовж фронту тріщини. Оскільки при СЕ дискретизації криволінійний фронт тріщини апроксимується відрізками ломаної (показані на рис.2 штриховою лінією), кількість вузлів вздовж фронту тріщини визначається з умов збіжності чисельного розв'язку задачі про напружено-деформований стан (НДС) тіла з тріщиною та досягнення необхідної точності визначення розподілення КІН вздовж фронту тріщини. При виконанні чисельного інтегрування рівняння (1) в кожній точці фронту i ($i=1..k$) довжина тріщини l_m^i на кожному кроці m визначається за довжиною тріщини на попередньому кроці l_{m-1}^i з врахуванням її приросту Δl_m^i на даному кроці:

$$l_m^i = l_{m-1}^i + \Delta l_m^i. \quad (3)$$

Визначення приросту довжини тріщини в точках фронту за ΔN циклів навантаження виконується за величиною КІН і згідно з (2) становить

$$\Delta l_m^i = C(K_I(l^i))^b \Delta N_m. \quad (4)$$

За величинами Δl_m^i обчислюються нові координати вузлів фронту тріщини, а також інших вузлів СЕ моделі і проводиться зміна конфігурації сіткової області. При цьому вважається, що на кожному кроці розвиток тріщини в точках фронту i_m відбувається вздовж лінії ортогональної відрізка, що з'єднує $(i-1)_m$ та $(i+1)_m$ точки фронту (рис.2). Величина $K(l^i)$ в (4) обчислюється за формулою

$$K(l^i) = K_{m-1}^i(1-\alpha) + K_m^i\alpha, \quad (5)$$

де K_{m-1}^i – значення КІН в точці i обчислене за величиною l^i на початку кроку (в кінці попереднього кроку); K_m^i – значення КІН, обчислене з урахуванням приросту довжини тріщини на даному кроці; $0 \leq \alpha \leq 1$ – параметр, що визначає схему чисельного інтегрування рівняння (2).

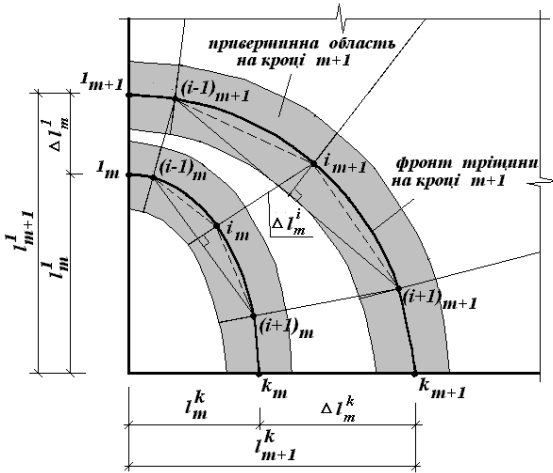


Рис. 2

Ефективність розв'язання задачі про моделювання росту тріщини визначатиметься ефективністю скінченноелементної апроксимації тріщини в межах НМСЕ та алгоритмів обчислення параметрів механіки руйнування [7], а також ефективністю алгоритмів розв'язання систем рівнянь НМСЕ та інтегрування рівнянь розвитку тріщини (1). Крім того, при застосуванні НМСЕ розв'язання навіть лінійної задачі здійснюється на основі ітераційного процесу, який реалізується на кожному з кроків розв'язання задачі про моделювання росту тріщини. Таким чином, питання про підвищення ефективності алгоритмів розв'язання систем рівнянь НМСЕ набуває особливого значення, оскільки необхідність моделювання росту тріщини призводить до багаторазового розв'язання систем рівнянь великої розмірності.

В свою чергу, ефективність алгоритму розв'язання систем рівнянь може бути підвищена застосуванням методу початкового наближення, раціональним вибором способу моделювання пересування фронту тріщини і пов'язаної з ним перебудови скінченно-елементної сітки як в околі вершини тріщини, так і в межах всієї дискретної скінченно-елементної моделі.

При застосуванні НМСЕ на кожному з M кроків розв'язання задачі розв'язання системи рівнянь виконується за алгоритмом, що являє собою комбінацію методу блочних ітерацій і крокового інтегрування за параметром навантаження

$$\{U\}_\lambda^j = \{U\}_\lambda^{j-1} + \omega [K]_{\lambda\lambda}^{-1} (\{Q\}_\lambda - \{R\}_\lambda^{j-1}), \quad (6)$$

де $\{U\}_\lambda^{j-1}$, $\{U\}_\lambda^j$ - вектори коефіцієнтів розкладання вузлових переміщень на ітераціях $j-1$ та j відповідно; ω - параметр релаксації; $\{Q\}_\lambda$ - вектор зовнішніх навантажень; $\{R\}_\lambda^{j-1}$ - вектор вузлових реакцій, визначений на ітерації $j-1$; $[K]_{\lambda\lambda}$ - матриця жорсткості, що обчислюється на кроці m .

Формула (6) описує ітераційний цикл, всередині якого організований цикл за утримуваними членами розкладання λ ($\lambda = 0 \dots L$). Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці s :

$$\left\| \sum_{\lambda=0}^L \{\Delta u\}_\lambda^j \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{\lambda=0}^L \{u\}_\lambda^j \right\|, \quad (7)$$

де $\{\Delta u\}_\lambda^j$ і $\{u\}_\lambda^j$ - відповідно прирощення і накопичені значення амплітудних переміщень на ітерації j ; ε - наперед визначений параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь ($\varepsilon = 10^{-4} \dots 10^{-9}$).

Для апробації запропонованої методики і дослідження її ефективності розглянуто задачу про розвиток центральної тріщини під впливом циклічного навантаження в квадратній пластині, розрахункова схема якої

наведена на рис. 3. Характеристики матеріалу пластини: $b = 4$, $C = 1.63 \times 10^{-10}$.

Еталонний розв'язок було отримано шляхом безпосереднього інтегрування рівняння (2) за формулою (4) при $\alpha = 0$ (метод Ейлера). Значення КІН обчислювались за формулою

$K_I = z\sqrt{\pi l}$, де $z = z(l)$ - уточнюючі коефіцієнти, які визначаються на кожному кроці інтегрування для відповідної

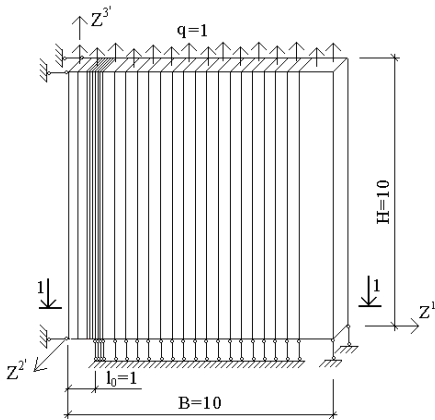


Рис. 3

довжини тріщини [9]. Залежність довжини тріщини від кількості циклів навантаження при різній кількості кроків розв'язання задачі за методом Ейлера, що отримана НМСЕ в порівнянні з еталонним розв'язком, наведена на рис. 4. Величини похибок довжини тріщини δ , що отримані після 3×10^8 циклів навантаження при різній кількості кроків при безпосередньому інтегруванні та чисельному розв'язанні задачі НМСЕ, наведені на рис. 5.

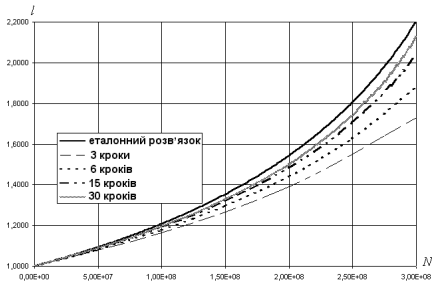


Рис. 4

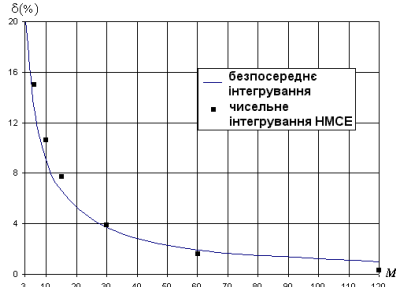


Рис. 5

Як можна побачити з графіків, метод Ейлера в межах НМСЕ має характер збіжності аналогічний розв'язку, отриманому на основі безпосереднього інтегрування. Забезпечення точності визначення довжини тріщини в межах 2% потребує 60 кроків.

Враховуючи, що для досягнення потрібної точності визначення довжини тріщини необхідним є застосування значної кількості кроків розв'язання задачі, важливого значення набуває питання про можливість зменшення обчислювальних витрат на кожному кроці. Одним із способів зменшення обчислювальних витрат є застосування методу початкових наближень, який полягає в тому що на першій ітерації кожного кроку враховуються напруження, які були обчислені на попередньому кроці.

Для оцінки зменшення обчислювальних витрат за рахунок застосування методу початкових наближень було проведено порівняння кількості ітерацій J , необхідних для розв'язку задачі з різною похибкою (рис.6). Як видно, із збільшенням точності інтегрування формули Періса різниця в ітераційних витратах збільшується. Застосування способу початкових наближень при точності визначення довжини тріщини в межах 2% дозволяє зменшити обчислювальні витрати приблизно на порядок (в 9 разів). Це обумовлено тим, що при застосуванні методу початкових наближень із зменшенням величини кроків розв'язання задачі зменшується кількість ітерацій на кожному кроці, що проілюстровано на

рис. 7, де приведено залежність кількості ітерацій на другому кроці від загальної кількості кроків розв'язання задачі M .

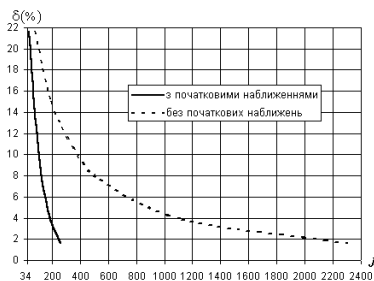


Рис. 6

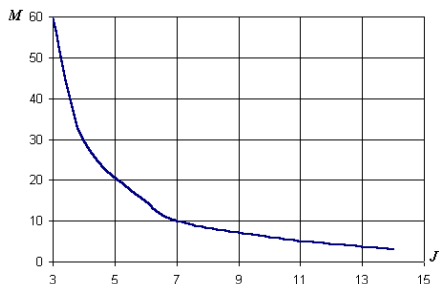


Рис. 7

При збільшенні M величина прирощення амплітудних переміщень

$\sum_{\lambda=0}^L \{\Delta u\}_{\lambda}^j$ на першій ітерації кроку зменшується, що підтверджується

результатами наведеними на рис. 8, де показано змінення цієї величини першої ітерації другого кроку при різній кількості кроків розв'язання

задачі. Зменшення $\sum_{\lambda=0}^L \{\Delta u\}_{\lambda}^j$ відбувається внаслідок зменшення значень

приросту тріщини, обчислених після одного кроку розв'язання задачі, що в свою чергу зменшує відмінність конфігурації сіткової області і параметрів НДС на двох послідовних кроках. Вплив початкової величини прирощення амплітудних переміщень на ітераційні витрати на другому кроці задачі показаний на рис. 9.

Зменшення розбіжності між параметрами НДС на послідовних кроках розв'язання задачі і, відповідно, зменшення обчислювальних витрат, також може бути досягнуто шляхом раціонального вибору алгоритму зміни конфігурації сіткової області. Було розглянуто два варіанти зміни конфігурації вихідної сіткової області (рис. 10,а). Перший, застосований при одержанні попередніх результатів спосіб, передбачає зсув вузлів дискретної моделі в межах привершинної області на величину приросту тріщини. Інші вузли, за винятком виділених, зміщуються за лінійним законом на відстань, зворотно-пропорційну відстані від даного вузла до вершини тріщини (рис. 10,б). Другий, більш простий з точки зору реалізації спосіб, передбачає зсув всіх вузлів, за винятком виділених, на визначену величину приросту за напрямком розвитку тріщини (рис. 10,в).

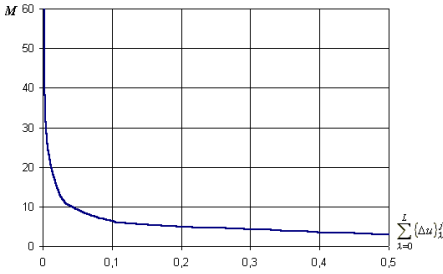


Рис. 8

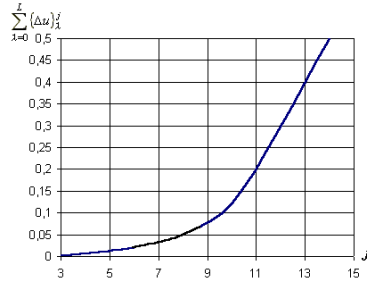


Рис. 9



Рис. 10

Порівняння результатів для цих способів із отриманим на основі метода Ейлера аналітичним розв'язком при 3 кроках розв'язання задачі представлено в табл.1.

Таблиця 1

Спосіб перебудови сітки	ϵ	Похибка визначення довжини тріщини, %	Кількість ітерацій
1	10^{-7}	2.2	73
2	10^{-7}	5.4	102
2	10^{-8}	5.1	171

Вигляд SE сітки поперечних перерізів пластини в перерізі 1-1 (див. рис. 3) після 3 кроків для зазначених способів зміни конфігурації сіткової області представлений відповідно на рис. 10,б, рис. 10,в.

Як видно, перший спосіб є набагато ефективнішим за обсягом обчислень і точністю отримуваних результатів. Навіть збільшення точності розв'язку рівнянь НМСЕ на один порядок при застосуванні другого способу не дозволяє підвищити точність визначення довжини тріщини, а лише майже вдвічі збільшує обсяг обчислень. В подальшому при розв'язанні задач застосовувався перший спосіб.

Як було вже зазначено, при збільшенні кількості кроків розв'язання задачі відмінність конфігурації тріщини на послідовних кроках зменшується. В зв'язку з цим додаткове зменшення обчислювальних витрат може бути отримано за рахунок обчислення матриці жорсткості (МЖ) не на кожному кроці розв'язання задачі, а після певної кількості кроків, коли зміна конфігурації тріщини і, відповідно, дискретної моделі буде більш суттєвою. Кількість обчислень МЖ, необхідних для розв'язання задачі при інтегруванні рівняння Періса за методом Ейлера з різною похибкою, подана на рис. 11. Результати свідчать, що при обчисленні МЖ на кожному кроці інтегрування і через інтервал кроків ітераційні витрати при однаковій точності розв'язання задачі не змінюються. При цьому, для досягнення точності визначення довжини тріщини в межах 2% обчислення МЖ достатньо виконувати після збільшення довжини тріщини на 20%. Відношення ітераційних витрат, необхідних для розв'язання задачі без застосування та при застосуванні початкових наближень, та відношення кількості обчислень МЖ для розв'язання задачі з обчисленням МЖ на кожному кроці і через максимально допустиму кількість кроків для визначення довжини тріщини з різною точністю показані на рис. 12.

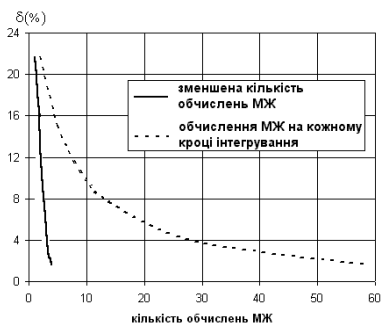


Рис. 11

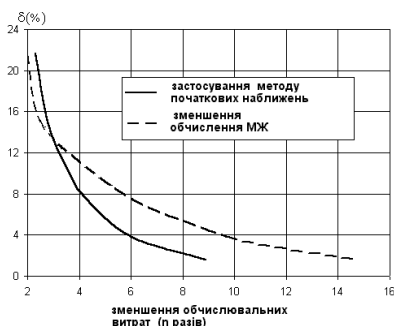


Рис. 12

Результати свідчать, що при визначенні довжини тріщини з більш високою точністю ефективність зазначених методів зростає.

Модифікований метод Ейлера. Виконання інтегрування рівняння (1) за методом Ейлера, тобто при $\alpha=0$ в (5), вимагає значної кількості кроків інтегрування для досягнення високої точності визначення довжини тріщини. В зв'язку з цим була досліджена можливість реалізації модифікованого варіанта методу Ейлера при $\alpha=0.5$. В цьому випадку значення КІН в (5) обчислюються за формулою

$$K(l^i) = \frac{K_m^i + K_{m+1}^i}{2}.$$

На кожному кроці інтегрування уточнення значення КІН і відповідне уточнення значення приросту тріщини відбувається до досягнення заданої похибки γ між двома послідовними уточненнями (рис. 13).

Модифікований метод Ейлера був реалізований в межах НМСЕ. На першому етапі проводилось дослідження по визначенню необхідної кількості уточнень КІН в межах одного кроку при різній кількості кроків розв'язання задачі. Завершення уточнень на одному кроці відбувалося за виконання умови $\gamma < 2\%$. Результати обчислень, проведених із застосуванням методу початкових наближень, наведені в табл. 2.

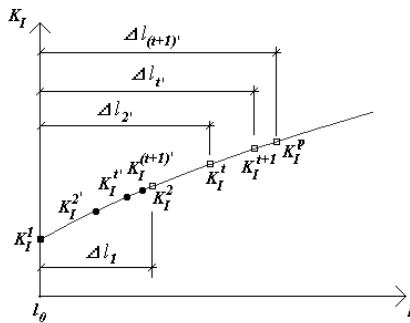


Рис. 13

Таблиця 2

Кількість кроків M	3		6		10	
	кількість ітерацій J	$\delta, \%$	кількість ітерацій J	$\delta, \%$	кількість ітерацій J	$\delta, \%$
1	87	7.4	128	2.9	154	1.1
2	115	1.3	149	0	171	-0.2
3	131	-1.5	160	-0.7	181	-0.6
4	140	-3	-	-	-	-

Оскільки величина приросту довжини тріщини після першого уточнення є основною складовою загального приросту на кроці, було

досліджено можливість обчислення МЖ на початку першого кроку задачі і після першого уточнення на кожному з наступних кроків. Результати дослідження показали, що ітераційні витрати не змінилися, а кількість обчислень МЖ зменшилася в 3 рази. Точність результатів не відрізняється від результатів наведених в табл.2.

Таким чином застосування модифікації методу Ейлера при $\alpha = 0.5$ в (5) для даної задачі в порівнянні з випадком $\alpha = 0$ при точності обчислення довжини тріщини в межах 2% дозволяє зменшити ітераційні витрати в 1.5 рази.

Розвиток тріщини в нескінченному тілі з еліптичною тріщиною. Розроблений алгоритм визначення траєкторії розвитку тріщини при дії циклічного навантаження був застосований до розв'язання задачі про розвиток еліптичної тріщини в призматичному тілі. Оскільки об'єкт має три площини симетрії, розраховувалась одна восьма частина тіла, скінченно-елементна розбивка якої показана на рис. 14. Переріз тіла z^1 - z^2 , в якому розташована поверхня тріщини, закріпленій вздовж напрямку z^3 (крім площини тріщини, позначеної сірим кольором). Характеристики матеріалу: $b = 4$, $C = 1.63 \times 10^{-10}$. Розвиток тріщини розглядався до моменту, коли конфігурація фронту прийме вигляд кола [10].

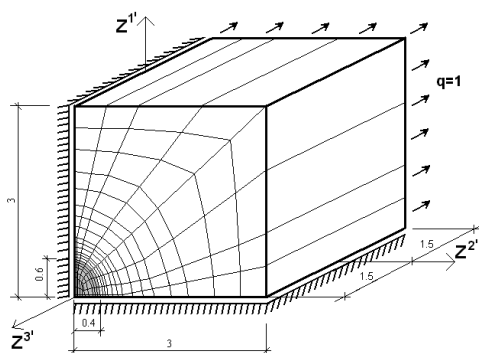


Рис. 14

На відміну від попередньої задачі, де було досліджено вплив прийнятого алгоритму зміни сіткової області за межами привершинної зони після кожного кроку на розв'язок задачі, в даному випадку було досліджено вплив алгоритму зміни сіткової області в межах привершинної зони. Порівнювались два варіанти. За першим варіантом на кожному кроці розв'язання задачі при реалізації формули (4) вважалося, що розвиток тріщини відбувається в напрямку, ортогональному фронту початкової тріщини. Другий варіант передбачав, що розвиток тріщини відбувається за перпендикуляром до поточної конфігурації фронту тріщини, визначеного за схемою, наведеною на рис. 2. При цьому відстань між сусідніми вузлами вздовж перпендикуляру залишалася такою ж, як і на першому кроці розв'язання задачі. Результати свідчать, що збіжність методу

Ейлера є кращою при застосуванні другого варіанту. Різниця між довжинами тріщини, обчисленими при 24 і 48 кроках розв'язання задачі після 3×10^9 циклів навантаження, складає 2.6% для першого варіанту і 1.1% для другого варіанту. Довжини тріщини, обчислені при 48 кроках розв'язання задачі за двома варіантами відрізняються на 14%. Залежність похибки обчислення довжини тріщини при M кроках розв'язання задачі по відношенню до довжини тріщини, обчисленої при 48 кроках для вузлів фронту, що розташовані на лініях вздовж вісей $z^{1'}$ ($\theta=0^\circ$) і $z^{2'}$ ($\theta=90^\circ$) для другого варіанту показана на рис. 15.

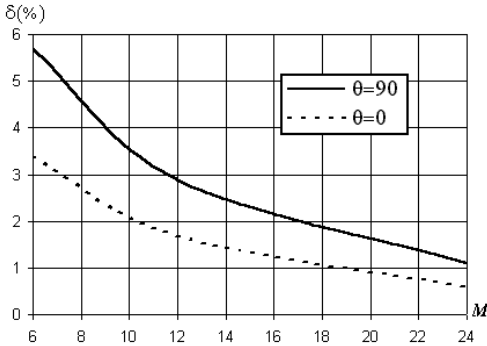


Рис. 15

Вигляд привершинної області після 48 кроків розв'язання задачі при застосуванні першого і другого алгоритмів зміни сіткової області показаний відповідно на рис. 16 і рис. 17.

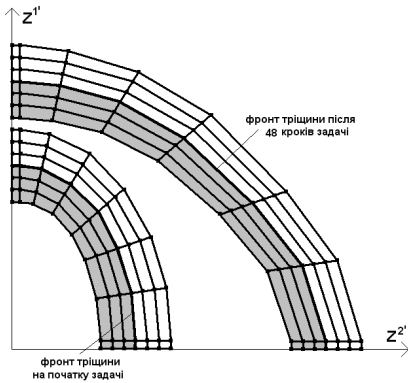


Рис. 16

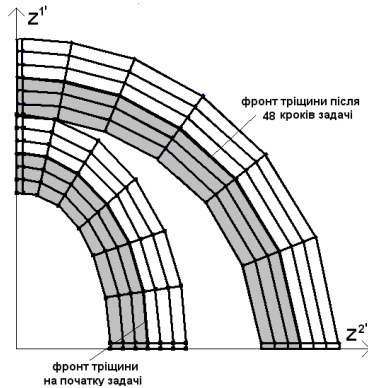


Рис. 17

Результати свідчать, що вибір алгоритму зміни сіткової області в межах привершинної зони на кожному кроці має принципове значення для точності розв'язання задачі. Вигляд скінченно-елементної сітки після розв'язку задачі за 48 кроків при застосуванні другого алгоритму показаний на рис. 18, а зміна конфігурації фронту тріщини після 8, 16, 24, 32, 40 і 48 кроків на рис. 19.

На основі проведеного дослідження можливості мінімізації обчислень МЖ було визначено, що для даної задачі МЖ необхідно переобчислювати після зростання довжини тріщини на 10%.

Застосування модифікованого методу Ейлера в даній задачі дозволяє в 1.6 разів зменшити ітераційні витрати для отримання результатів, що мають точність, аналогічну результатам методу Ейлера отриманим при 48 кроках розв'язання задачі.

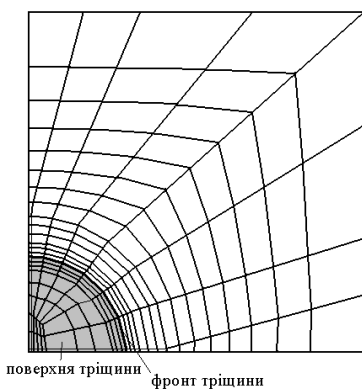


Рис. 18

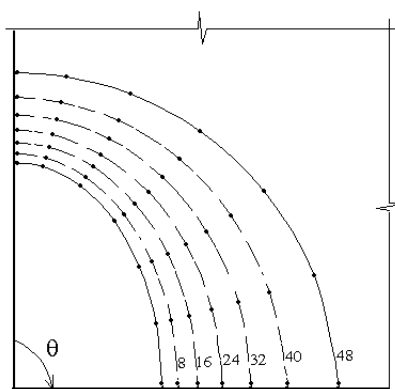


Рис. 19

Таким чином, проведені дослідження свідчать, що розв'язання задачі про розвиток тріщини в просторових тілах під впливом циклічного навантаження вимагає значних обчислювальних витрат. Виконані дослідження ефективності запропонованих в даній роботі модифікацій алгоритму розв'язання нелінійних задач і моделювання росту тріщини показали, що величина обчислювальних витрат може бути суттєво зменшена. Зокрема, застосування методу початкових наближень дозволяє зменшити обчислювальні витрати майже на порядок (до 9 разів), використання ефективних схем інтегрування диференціальних залежностей, що описують рост тріщини – до 1,5 разів, зменшення кількості обчислень матриці жорсткості – до 14 разів, оптимізація алгоритму перебудови сіткової області – до 1,5 разів. Наведені показники ефективності можуть змінюватися в залежності від геометрії

розглядуваного об'єкта, конфігурації фронту тріщини, фізико-механічних характеристик матеріалу, що описують рост тріщини при циклічному навантаженні, та інших вихідних даних розглянутих задач.

1. Кушніренко Т.А., Шайдерман А.Е. Определение долговечности конструкции при численном моделировании роста усталостной трещины. //Спротивление материалов и теория сооружений. – К., 1994.- Выпуск 61.- с.92-97.
2. Плащинская А.В. К задаче моделирования усталостного разрушения пластин с центральной трещиной при одноосном нагружении: Тр. НГАСУ. 2002.5, №1, с.22-31.
3. Sharan Shailendra K. Elasto-plastic finite element analysis of a crack in an infinite plate: Int. J. Fract. 2000. 103, №2, с.163-176.
4. Yonglin Xu Self-similar crack expansion method for twodimensional cracks under mixed mode loading conditions: Eng. Fract. Mech.- 1998. – 59, №2. – с.165-182.
5. Cisilino A.P., Aliabadi M.H. Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems: Eng. Fract. Mech. 1999. 63, №6, с.713-733.
6. Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.:НИИСМ, 1993.-376с.
7. Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами . //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2003.- Выпуск .74. с.73-82.
8. Троценко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В. Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении. – К.:Наук. думка, 1987.-257с.
9. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие, т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.:Наук. думка, 1988.-620с.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. –640с.

Матеріал надійшов до редакції 10.08.04.

УДК 539.3

Шульга М.О., д-р фіз.-мат. наук,
Безверхий О.І., канд. фіз.-мат. наук,
Корнієнко В.Ф., канд. техн. наук.

ДИНАМІКА РОЗГАЛУЖЕНОЇ ДИСКРЕТНО- КОНТИНУАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ЗМІНІ ШВИДКОСТІ БУКСИРУВАННЯ НА ХВИЛЯХ

Вступ. Різноманітні розгалужені підводні буксирівані системи (ПБС) широко застосовуються при проведенні оглядів акваторій, розвідки і обслуговування підводних родовищ, тралового лову риби і т.д. [7,9]. Одним з елементів, який істотно впливає на динаміку таких систем, є наявність підтримуючого буя. При маневрах на хвилях динамічні натяги досягають величин, співмірних з навантаженнями на тихій воді, що необхідно враховувати при виборі коефіцієнта запасу міцності. Крім того, при виконанні маневрів необхідно вибрати рух буксиру так, щоб мінімізувати час маневру і зберегти працездатність ПБС [9]. Для надійної і стабільної роботи таких систем на хвилях необхідне вивчення динамічної поведінки як системи в цілому, так і її окремих елементів, тому, що виникаючі в окремих елементах гнучких конструкцій ненапружені ділянки приводять до появи ривків і вібрацій у всій системі. Для зменшення дії ривків і вібрацій в таких системах доцільне використання тросів з в'язкопружними і нелінійно-пружними характеристиками.

1. Постановка задачі. Для опису руху ПБС у воді виберемо на буксиріваній системі послідовність точок так, щоб деякі з них співпадали з точками кріплення боксів з апаратурою, буйків і т.д. Координати точок в нерухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$ будуть x_{ki} . Хай в деяких точках $P_{k(i)}$ задані динамічні умови, тобто прикладені зосереджені сили $\vec{F}_{k(i)}^0 = \vec{F}_{k(i)}^0(t)$, $i = \overline{1, N}$, а в точках $P_{l(i)}$, $\{l = \overline{1, N}\}$ знаходяться тіла компактної форми, так що їх можна вважати матеріальними точками, на які діють сили. До того ж в деяких точках $P_{m(i)}$, $\{m = \overline{1, N} | k(i)\}$ задані кінематичні умови (закони руху буксировочних кінців) $\vec{R}_{m(i)}^0 = \vec{R}_{m(i)}^0(t)$.

Значна зміна форми конструкції під час руху приводить до необхідності роздільного розгляду її зовнішньої і внутрішньої геометрії, приймаючи для їх визначення підходи Ейлера і Лагранжа відповідно [5]. Зовнішню геометрію визначимо в нерухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$ внутрішню -

лагранжевою координатою l – довжина нитки, вимірюваної від деякої фіксованої точки P_0 до поточної точки P .

Запишемо рівняння руху розгалуженої системи тіл з'єднаних гнучкими елементами в нерухомій прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$.

Використовуючи методику запропоновану в роботах [3,10] і вибравши за узагальнені координати просторові координати точок дискретизації, рух гнучкого елемента між суміжними точками дискретизації P_i і P_j можна записати через радіус-вектор

$$\bar{R}_{ij} = \sum_{k=1}^3 R_{kij} \bar{e}_k, \quad (1)$$

де R_{ij} – функції що виражають зв'язок довжин осі гнучкого елемента і координат точок дискретизації.

Запишемо узагальнені внутрішні сили для гнучких елементів (нелінійно, непотенціально пружних з односторонньою роботою) залежність між натягом та відносним видовженням можна зобразити у вигляді

$$T = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \cdot H(\varepsilon) \quad (2)$$

де $\varepsilon = \frac{ds - d\ell}{d\ell} = \left| \frac{\partial \bar{R}}{\partial \ell} \right| - 1$ - відносне видовження, $H(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \varepsilon > 0 \\ 0 & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$ - функція

Хевісайда.

$$\begin{aligned} Q_{ij}^s &= \int_0^{L_{ij}} f(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}) H(\varepsilon_{ij}) \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial x_{kp}} ds = \\ &= \int_0^{L_{ij}} f \left(\left(\left| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| - 1 \right), \frac{\partial \left| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right|}{\partial t} \right) \times H \left(\left(\left| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| - 1 \right) \right) \frac{\partial \left| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right|}{\partial x_{kp}} \cdot \left| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| d\ell. \end{aligned}$$

Запишемо узагальнені зовнішні сили:

$$Q_{ij}^z = \int_0^{L_{ij}} \bar{f}_{ij} \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} \cdot ds = \int_0^{L_{ij}} (\bar{f}_{ij}^p + \bar{f}_{ij}^m) \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} \cdot \left| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| \cdot dl;$$

$\bar{f}_{ij}^p = \int_{P_{ij}} \bar{F}_{ij} dp$ – розподілена поверхнева сила;

$$\bar{f}_{ij}^m = \iint_{F_{ij}} \bar{P}_{ij} dF_{ij} - \text{розподілена масова сила.}$$

Використовуючи вирази для кінетичної енергії та її похідних, а також узагальнених сил, що діють на гнучкі елементи конструкції, а також кінетичної енергії та її похідних, а також узагальнених сил, що діють на тверді тіла, рівняння руху розгалуженої системи набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{ij} L_{ij} \left\{ m_{ij} \ddot{\bar{R}}_{ij} \frac{\partial \dot{\bar{R}}_{ij}}{\partial \dot{x}_{kp}} - m_{ij} \dot{\bar{R}}_{ij} \frac{\partial \dot{\bar{R}}_{ij}}{\partial x_{kp}} + \right. \\ & + f \left(\left(\left. \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| - 1 \right), \frac{\partial}{\partial t} \left(\left. \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| \right) \right) H \left(\left(\left. \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| - 1 \right) \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \left| \frac{\partial}{\partial x_{kp}} \right| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| + \right. \\ & \left. + \left(\bar{f}_{ij}^p - \bar{f}_{ij}^m \right) \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} \left| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial \ell} \right| \right\} d\xi + \sum_s m_{Ts(i)} \delta_p^{s(i)} \ddot{\bar{R}}_{Ts(i)} \bar{e}_k - \sum_s \delta_p^{s(i)} \bar{F}_{Ts(i)} \bar{e}_k = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

де $p = \overline{0, N}$; $k=1,2,3$; $\xi = \frac{1}{L_{ij}}$.

Разом з початковими умовами $\bar{R}_i|_{t=0} = \bar{R}_T$; $\dot{\bar{R}}_i|_{t=0} = \dot{\bar{V}}_T$ одержимо задачу динаміки розгалуженої системи тіл з'єднаних гнучкими елементами.

Використовуючи запропоновану методику, запишемо систему рівнянь руху розгалуженої просторової дискретно-континуальної конструкції з гнучкими протяжними в'язкопружними елементами в рідині. Залежність між натягом і відносним видовженням для таких гнучких елементів можна представити в вигляді $T = C_E \epsilon + C_{E2} \epsilon^2$. На гнучкий елемент діють також розподілені поверхневі сили: гідродинамічного опору, інерції приєднаної маси рідини, що залучається в сумісний рух, а також розподілені об'ємні сили: ваги та сила Архімеда [8]. На тверді тіла діють сили: гідродинамічного опору, інерції приєднаної маси рідини, що залучається в сумісний рух, а також об'ємні сили: ваги та сила Архімеда. Тоді система рівнянь руху такої конструкції набуде вигляду

$$\int_0^1 \sum_{ij} L_{ij} \left\{ m_{ij} \ddot{\bar{R}}_i \frac{\partial \dot{\bar{R}}_{ij}}{\partial \dot{x}_{kp}} - m_{ij} \dot{\bar{R}}_{ij} \frac{\partial \dot{\bar{R}}_{ij}}{\partial x_{kp}} - m_{aij} \left(\dot{\bar{V}} - \ddot{\bar{R}}_{ij} \right) \left| \bar{v}_{ij} \right| \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(C_{Eij} \left(|\bar{\tau}_{ij}| - 1 \right) + C_{E2ij} \left| \dot{\bar{\tau}}_{ij} \right| \right) \bar{\tau}_{ij} \left| \frac{\partial}{\partial x_{kp}} \left(|\bar{\tau}_{ij}| \right) \right| + \\
& + \left\{ \left(\rho_c F_{ij} \left| \bar{\tau}_{ij} \right| - m_{ij} \right) \bar{g} - \frac{C_{\dot{a}ij}}{\left| \bar{\tau}_{ij} \right|} \left| \bar{\tau}_{ij} \right| \left(\bar{V} - \dot{\bar{R}}_{ij} \right) \bar{\tau}_{ij} \left[\left(\bar{V} - \dot{\bar{R}}_{ij} \right) \bar{\tau}_{ij} \right] \frac{1}{\left| \bar{\tau}_{ij} \right|^2} - \right. \\
& - \left. \frac{C_{ni}}{\left| \bar{\tau}_i \right|} \left| \bar{\tau}_{ij} \right| \times \left(\bar{V} - \dot{\bar{R}}_{ij} \right) \left[\left(\left(\bar{V} - \dot{\bar{R}}_{ij} \right) \left| \bar{\tau}_{ij} \right|^2 - \bar{\tau}_{ij} \left[\left(\bar{V} - \dot{\bar{R}}_{ij} \right) \right] \bar{\tau}_{ij} \right) \frac{1}{\left| \bar{\tau}_{ij} \right|^2} \right] \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x_{kp}} \right\} d\xi + \\
& + M_{Tp} \ddot{\bar{R}}_{Tp} \frac{\partial \bar{R}_{Tp}}{\partial \dot{x}_{kp}} + \left[\bar{g} \left(M_{Tp} - \rho_c V_{Tp} \right) + C_{Tp} \rho_c F_{Tp} \left| \bar{V} - \dot{\bar{R}}_{Tp} \right| \left(\bar{V} - \dot{\bar{R}}_{Tp} \right) \right] + \\
& + \left. \rho_c \lambda_{Tp} V_{Tp} \frac{\partial^2 \left(\bar{V} - \bar{R}_{Tp} \right)}{\partial t^2} \right] \frac{\partial \bar{R}_{Tp}}{\partial x_{kp}} = 0, \quad (4)
\end{aligned}$$

де $p = 0, N/r(i); k=1,2,3; \bar{\tau}_{ij} = \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial l}; \xi = \frac{1}{L_{ij}}$.

І, разом з початковими умовами $\bar{R}_i|_{t=0} = \bar{R}_T; \dot{\bar{R}}_i|_{t=0} = \bar{V}_T$, одержимо задачу динаміки розгалуженої дискретно-континуальної системи в рідині.

Для розв'язку цієї задачі систему нелінійних рівнянь в частинних похідних (11) зведемо при допомозі локальних параметричних сплайнів до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь [2,6]. Розрахункову систему рівнянь $3(N+1) - r$ звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно x_{kj} можна подати в вигляді:

$$[\ddot{x}_{kp}] [M] = \Phi(x_{kp}, \dot{x}_{kp}). \quad (5)$$

Для чисельного розв'язку системи диференціальних рівнянь, систему рівнянь руху (5) необхідно привести до нормального виду. Так як елементи матриці M залежать від шуканих функцій, то процес нормалізації необхідно проводити на кожному кроці за часом. Але, так як матриця M є розрідженою, то при її розв'язку методами виключення деякі елементи матриці, що до розв'язку були нульовими, перестають бути рівними нулю. Використовуючи перестановки стовпців і рядків матриці, можна скоротити кількість ненульових елементів при факторизації, які з'являються. Найкращі результати, з погляду мінімального числа ненульових елементів і, як наслідок, часу розв'язку перетвореної системи, одержані для пе-

рестановки, що була отримана при використанні алгоритму мінімального ступеня [3] Розв'язок нормалізованої нелінійної задачі Коші (12) знаходимо чисельно, користуючись багатокроковими методами типу предиктор-коректор [10,5].

2. Аналіз динаміки системи. Використовуючи запропонований алгоритм, розглянемо буксирування системи яка складається з двох гілок траплення, які розтягуються в протилежні сторони при допомозі вертикальних крил відвідників, що мають постійну силу F_0 відведення, направлену перпендикулярно до лінії буксирування в різні боки, підтримуючого буя який кріпиться до точки розгалуження, на хвилюванні рис. 1.

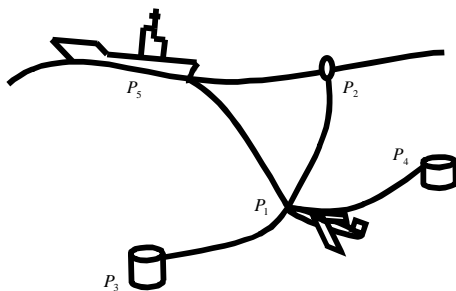


Рис. 1

Конкретні розрахунки проводилися для таких параметрів ПБС довжина буксирного кінця до точки розгалуження 200м, довжини відвідників по 100м, підтримуюча гілку завдовжки 100м. Початок системи координат сумісно з точкою кріплення буксира. Задамо напрям осі Ox_1 проти ходу

хвиль, осі Ox_3 - проти напрямку вектора \vec{g} , а вісь Ox_2 направлена так, щоб доповнювала трійку правої системи координат. Тоді закон руху буксированого кінця прийме вигляд:

$$\begin{aligned} x_{15} &= V_b t_H + x_H & x_{25} &= 0 & x_{35} &= 0 \\ \dot{x}_{15} &= V_b & \dot{x}_{25} &= 0 & \dot{x}_{35} &= 0, \\ \ddot{x}_{15} &= 0 & \ddot{x}_{25} &= 0 & \ddot{x}_{35} &= 0 \end{aligned}$$

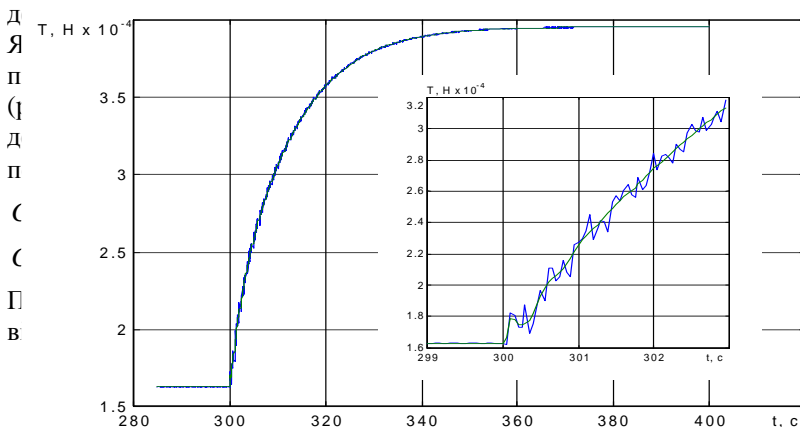


Рис. 2

Розглянемо зміну натягнення в різних точках конструкції ПБС в часі при зміні швидкості буксирування, коли хвилювання відсутнє (на тихій воді). На рис. 2 представлені зміни натягнення при східчастій зміні швидкості буксирування з $V_b = 1$ м/с на $V_b = 3$ м/с у момент часу рівний 300 секунд в точці кріплення буйка. З малюнка можна зробити висновок, що при миттєвій зміні швидкості натягнення значно збільшується, причому в початковий момент збільшується сходинкою, а потім плавно виходить на новий стаціонарний рух. На укрупненому фрагменті видно, що вязкоупругість добре згладжує вібрації, що виникають в пружному тросі. Розглянемо зміну натягу в різних точках конструкції ПБС в часі при зміні швидкості буксирування.

На рис. 3 представлені зміна натягу при сходинковій зміні швидкості буксирування з $V_b = 1$ м/с на $V_b = 4$ м/с у момент часу рівний 300 секунд у корінному кінці (точці буксирування) (крива 1), у точці кріплення відвідника (крива 2) та у точці кріплення буя (крива 3), при хвилях з періодом $T_w = 5,6$ с. З малюнка можна зробити висновок, що зміна натягнення носить самий різний характер. Так в корінному кінці при зростанні швидкості буксирування ростуть як самі значення натягу так і амплітуда зміни натягу $T_a = T_{\max} - T_{\min}$. В точці ж кріплення відвідника характер пведінки натягу такий же самий. В точці кріплення буя середнє значення натягу спочатку сильно зростає, а потім зеншується до величин трохи більших чим до зміни швидкості, а амплітуда суттєво зростає. Причому як в корінному кінці так і біля відвідника спостерігаються ривки. Такі ж закономірності зберігаються для середніх значень натягнення і амплітуд і при інших зростаннях швидкості буксирування, тоді як для T_{\max} таких закономірностей немає.

На рис. 4 представлені переміщення по глибині (координата x_3) точки кріплення буя системи при хвилях з періодом $T_w = 5,6$ с

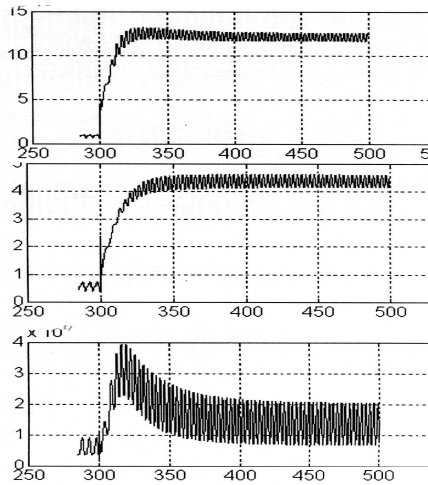
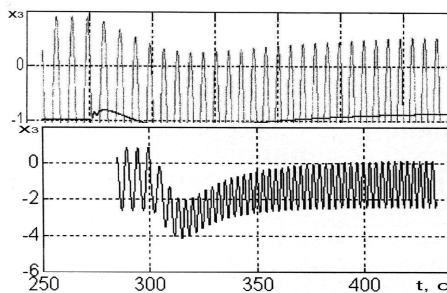


Рис. 3



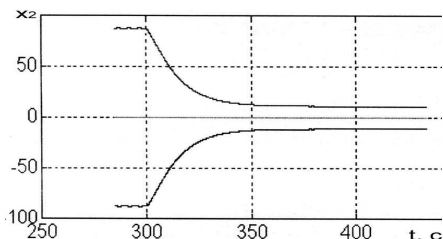


Рис. 6

і при зміні швидкості буксирування з 1м/с до 2м/с у момент часу рівний 300 секунд (1 - без хвилювання, 2 - на хвилях), бачимо, що амплітуда коливачь буя при збільшенні швидкості буксировки зменшилась, і притоплення буя зменшилось. При зміні швидкості буксирування з 1м/с до 4м/с амплітуда коливачь буя також зменшилась, але притоплення збільшилось, що слідує із рис. 5 де представлени переміщення по глибині (координата x_3) точки кріплення буя системи при хвилях з періодом $T_W = 5,6$ с.

Представлені на рис. 6 переміщення відвідників (точки P_3 P_4 в площині x_1, x_2 при переході з $V_b = 1$ м/с на 4м/с показує значне звуження зони захвату тралення.

Поява ривків спостерігається як при сходянковому збільшенні швидкості буксирування так і при її зменшенні.

Запропонований спосіб розрахунку динаміки посторових розгалужених буксированих структур дозволяє визначити кінематичні і силові характеристики конструкції під дією хвилювання з врахуванням розслаблення в окремих її елементах. Проведений аналіз дозволяє зробити такі висновки: в'язкоупругість впливає тільки при різкій зміні швидкості буксировання і практично не впливає при буксированні на регулярному морському хвилюванні, тобто коли немає ривків.

1. *Безверхий А.И.* О колебаниях заякореного буя на волнении. //Прикладная механика, N4, 1998, с.112-118.
2. *Безверхий А.И., Корниенко В.Ф., Шульга Н.А.* Влияние в'язкоупругости троса на динамику подводной буксированной системы с поддерживающим бумом // Прикладная механика, 2001. - 37. - № 8. - С. 99-104.
3. *Безверхий О.И., Корниенко В.Ф.* Колебания розгалуженных систем заякорення з односторонньою роботою під дією зовнішнього середовища // Опір матеріалів і теорія споруд - К.: КНУБА, 2003. - Вип. 73. - С. 52-64.
4. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М., 1987. - 542с.
5. *Гуляев В.И.* Динамика упругих систем при сложном движении // Прикладная механика, 2003. - 39. - № 5. - С. 28-52.
6. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М., 1980. - 352 с.
7. *Егоров В.И.* Подводные буксированные системы - Л: Судостроение, 1981. - 304 с.
8. *Ньюмен Дж.* Морская гидродинамика. Л., 1985. 368 с.
9. *Поддубный В.И., Шамарин Ю.Е., Черненко Д.А., Астахов Л.С.* Динамика подводных буксированных систем. - Л: Судостроение, 1995. - 200 с.

10. Шульга М.О., Безверхий О.І., До розрахунку динамічних задач для дискретно-континуальних гнучких одномірних систем з непотенціальними деформативними характеристиками // Доповіді НАН України, 2004, № 8. – С. 59-63

Робота виконується за підтримки Фонда фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (проект № 01.07/00076 “НЕЛКО”).

Матеріал надійшов до редакції 23.08.04.

УДК 539.3:621.791(621.642.3+69.059.25)

Гоцуляк Є.О., д-р техн. н.,
Барвінко А.Ю., канд. техн. н.,
Шах В.В.

ВІДНОВЛЕННЯ СТІЙКОСТІ ПОТОНШЕНИХ ОБОЛОНОК ШЛЯХОМ ВСТАНОВЛЕННЯ РЕБЕР ЖОРСТКОСТІ

В Україні більшість резервуарів для зберігання нафти і нафтопродуктів, що знаходяться в експлуатації, збудовані в 1960-х - на початку 1970-х років. Аналіз результатів обстеження технічного стану металоконструкцій резервуарів, виконаного спеціалістами Інституту електрозварювання ім. Є.О. Патона (табл. 1), показує, що після 25 - 40 років експлуатації, їх стінка має досить значне зменшення товщини в результаті корозії, яке може досягати близько 1 мм (до 30% товщини поясу).

Таблиця 1

Товщини поясів стінок резервуарів ємністю 5 тис.м³ для зберігання нафти, що експлуатуються в системі магістральних нафтопроводів України

Номер поясу	Проектна товщина поясу, мм	Величини потоншень поясів стінок резервуарів, мм

		шень поясів стінок резервуарів, мм					
		1	2	3	4	5	6
VIII	5	0,11	0,25	0,27	1,01	0	0,97
VII	5	0,23	0,5	0,35	0,9	0,55	0,8
VI	5	0,03	0,33	0,39	0,78	0,56	0,61
V	5	0,11	0	0,43	0,79	0,47	0,38
IV	6	0	0,2	0,35	0,78	0,79	0,54
III	7	0,27	0,48	0,57	1,06	0,91	0,44
II	8	0,31	0,37	0,31	0,98	0,42	0,29
I	10	0,23	0,52	0,1	0,72	0,19	0,59
Термін експлуатації, рік		27	27	29	29	31	32

Примітка. Діаметр резервуара - 22,79 м, висота стінки - 12,0 м.

Оцінка впливу зменшення товщини циліндричної оболонки на її стійкість показує, що достатньо незначного потоншення верхніх поясів - близько 0,7 мм, для того, щоб умова її стійкості була порушена. Так на рис. 1 представлено графіки залежності відносних значень критичних навантажень (співвідношення між критичним значенням потоншеної оболонки і оболонки номінальної товщини),

визначені за формулами [7], від рівномірного потоншення стінки по всій висоті. P_{cr1} і P_{cr2} - відповідно критичне навантаження при дії паралельно твірним і нормально до бокової поверхні (нижче осьове стиснення і зовнішній тиск). Згідно представлених даних несуча здатність оболонки резервуарів ємністю 5 і 10 тис. м³ при потонненні стінки на 1,25 мм, зменшується приблизно на 30%. Це означає, що для подальшої

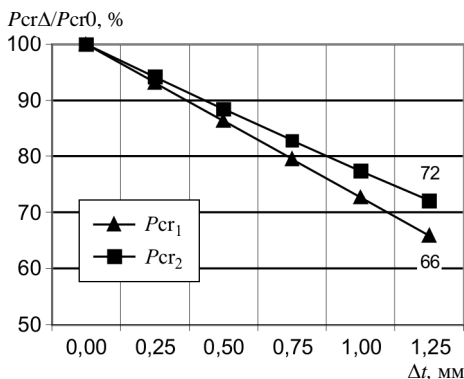


Рис. 1. Залежність відносних значень критичних навантажень від величини потоншення оболонки

експлуатації резервуара необхідно передбачати підкріплення стінки. Найбільшу актуальність питання підвищення жорсткості стінки має для резервуарів ємністю 5 і 10 тис. м³. Це обумовлено тим, що конструкція їх стінки передбачала зменшену товщину верхніх поясів – 5 і 6 мм відповідно. Для забезпечення ж стійкості стінки встановлювали додатково вертикальні ребра жорсткості довжиною 2,5 м в місцях обпирання радіальних балок покриття [1, 2]. Іншою проблемою є те, що товщини стінки назначалися без урахування мінусового допуску прокату і припуску на корозію. Основними способами підкріплення циліндричних оболонок є встановлення поздовжніх ребер жорсткості (стрингерів) та встановлення кілець жорсткості (шпангоутів). Але ефективність такого підсилення стосовно циліндричної оболонки з відношенням $R/t \approx 2000 \dots 4000$ при наявності навантаження її зосередженими силами потребує уточнення особливо з огляду оцінки запасу стійкості.

Для вибору конст-руктивної схеми підсилення методом скінчених елементів досліджували стійкість циліндричної стінки резервуара ємністю 5 тис.м³ (табл. 1) під дією стискаючих вздовж твірної зосереджених зусиль, що діють в місцях обпирання радіальних балок щитової покрівлі (крок 3,0 м), при установці кілець і поз-довжніх ребер жорсткості (рис. 2). Результати роз-рахунку порівнювали з випадком рівномірного навантаження стінки вздовж твірної (рис. 2,а,б). Циліндричну оболонку описували плоскими прямокутними скінченими елементами розмірами 0,5х0,5м, ребра жорсткості – скінченими елементами балочного типу. Задачу стійкості вирішували в лінійній постановці.

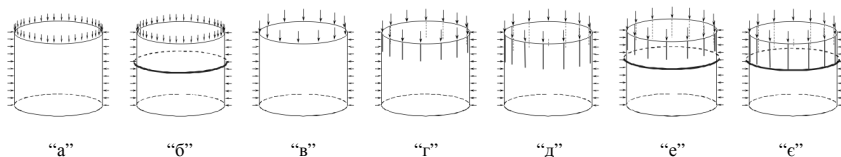


Рис. 2. Схеми моделей оболонок

Ефективність підсилення поздовжніми ребрами досліджувалась за схемами “г” і “д”. Схема “г” відповідає довжині ребер 2,5м, “д” - довжині 4,5м, тобто висоті ділянки всіх тонких поясів. Для оцінки підсилення кільцевим ребром сумісно із існуючими короткими і подовженими ребрами прийняті схеми “е” і “е”.

Слід звернути увагу на те, що стінка має нерівномірний характер потоншення по поясам див. таблицю 1. Тому при визначенні критичних значень навантажень, приймалися такі варіанти потоншення: двох

верхніх поясів - VII-VIII; усіх тонких поясів - V-VIII; усіх поясів - I-VIII; чотирьох нижніх поясів - I-IV.

Як прийнято у практиці проектування, оптимальна висота встановлення кільцевого ребра на резервуарі ємністю 5 тис. м³ висотою 12,0 м визначалась із умови рівності стійкості верхньої і нижньої оболонки під дією зовнішнього тиску. При цьому припускали, що кільце утворює жорсткий диск. На рис. 3 представлені графіки стійкості для кожної із частин оболонки, висоти яких приймалися у залежності від висоти встановлення кільцевого ребра. Значення критичних навантажень від дії

зовнішнього тиску визначались за формулами [7]. Точка перетину кривих яка відповідає висоті встановлення кільця $H = 7,5$ м (рис. 2), вказує на рівності стійкості обох частин. З метою перевірки зазначеного вище припущення,

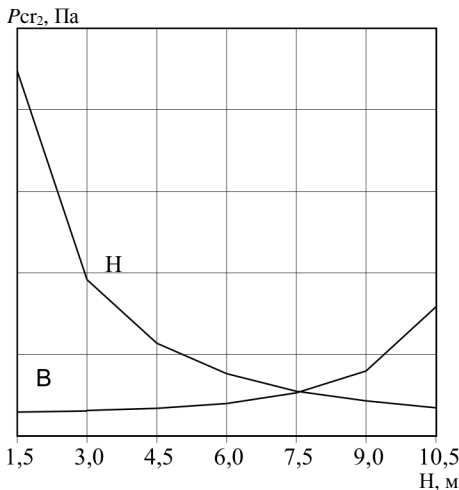


Рис. 3. До визначення оптимальної висоти встановлення кільця жорсткості

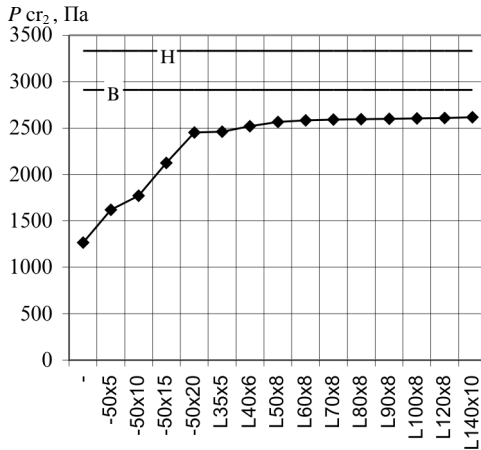


Рис. 4. Стійкість підсиленої

досліджувалась стійкість скінченноелементної моделі оболонки при дії зовнішнього рівномірного тиску в залежності від жорсткості кільцевого ребра рис. 4. Верхні горизонтальні лінії "В" і "Н" відповідають критичному значенню навантаження, визначеному окремо для обох частин оболонки, нижня крива – для підкріпленої оболонки. Оболонка підкріплювалась жорстко з'єднаним із нею кільцевим ребром, що

знаходилось на відстані 120мм від зовнішньої поверхні стінки до осі. Жорсткість кільця змінювалась шляхом встановлення кутиків різного номеру прокату і смуг прямокутного перерізу. Згідно отриманих даних, досягнути ефекту повного розбиття навіть при значних жорсткостях кільця складно і не є раціональним, так як вже при незначній жорсткості кільця критичне навантаження P_{cr2} збільшується вдвічі. В разі підсилення стінки резервуарів об'ємом 2 і 5 тис. м³ достатньо встановлення кільця жорсткості моментом інерції $I = 106 \text{ см}^4$ (кутик L90x8) і, як видно, подальше збільшення жорсткості не призводить до якісних змін (рис. 4).

Під час експлуатації стінка резервуарів працює при двосторонньому навантаженні - вздовж стіни (власна вага, снігове навантаження і вакуум) та зовнішньому тиску (вітрове навантаження і вакуум). Тому при визначенні ефективного підсилення потоншеної оболонки, було досліджено її стійкість при дії кожного навантаження окремо, а також при одночасній дії обох навантажень.

Результат впливу різних варіантів потоншення поясів на стійкість оболонки для різних випадків підсилення (рис. 2) при окремій дії кожного навантаження, приведені на графіках рис. 5 (а-е - схеми моделей оболонки згідно рис. 2 I-VIII, I-IV, V-VIII, VII-VIII - номери потоншених поясів. Буквами вказано схеми моделей згідно рис. 2, римськими цифрами - номери потоншених поясів. Графіки рис. 5 розділяються на дві групи, нижні - схеми а, г, д (без кільця жорсткості), верхні - б, е, е (підсилені кільцем з кутика L90x8).

Рис. 5. Залежність значення критичного бокового тиску від величини потоншення оболонки

Аналіз результатів виконаних досліджень показує, що оболонки підсилені кільцем жорсткості із потоншенням поясів на 1,25мм (верхні

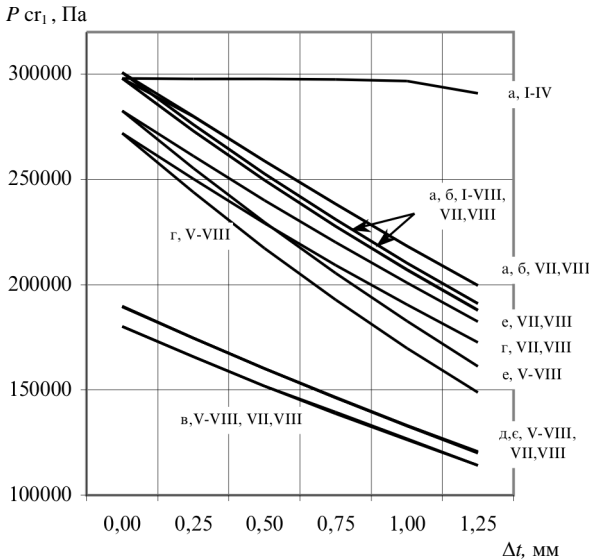


Рис. 6. Залежність значення критичного осевого тиску від величини потоншення оболонки

криві) мають значення критичного зовнішнього тиску, що відповідають оболонкам із проектними товщинами стінок без підсилення (нижні криві). Вплив поздовжніх ребер жорсткості на величину критичного бокового тиску є не значним (див. схеми б, I-VIII, V-VIII і схеми е, е, V-VIII, VII-VIII). Тому при зовнішньому тиску найефективнішим підсиленням для стінки резервуара ємністю 5 тис.м³ слід прийняти підсилення кільцем жорсткості встановленим на висоті 7,5м.

При розгляді стійкості оболонок при дії осевого навантаження (графіки рис. 6) спостерігається зменшення критичного навантаження в разі прикладання зусиль зосереджено (див.схеми в, V-VIII, VII-VIII і а, б I-VIII, VII-VIII). З'ясувалось, що підсилення тонких поясів оболонок шляхом подовження поздовжніх ребер із обпиранням їх на більш товсті пояси або кільце приводить до зменшення критичного осевого навантаження, яке по своєму значенню майже не відрізняється від значення критичного навантаження не підкріпленої оболонки (див. схеми "д", "е" і "в").

Найбільше критичне осьове навантаження мають оболонки завантажені рівномірно (схеми а, б, I-VIII, VII, VIII). Існуюче підкріплення поздовжніми ребрами довжиною 2,5м, практично компенсує негативний вплив зосередженості навантаження (для порівняння схеми “в” і “г”, “е”). Верхня крива рис. 6, підтверджує те, що стійкість оболонки і при осьовому навантаженні визначається при потонненні нижніх поясів до 1мм стійкістю верхніх поясів. Отже для підсилення стінок резервуарів ємністю 2 і 5 тис.м³ при дії осьового нерівномірного навантаження стінок виправдовують себе поздовжні ребра довжиною 2,5м.

Було також перевірено такий підхід, за яким стійкість оболонки перемінної товщини при зовнішньому тиску визначається із приведенням товщини оболонки до середньої [2]. Для цього досліджувалася стійкість оболонки із потоншенням нижніх (схема а, I-IV), верхніх (схема а, V-VIII) і всіх поясів (схема а, I-VIII). Як видно із приведених даних, стійкість стінки визначається переважно стійкістю верхніх тонких поясів. В разі визначення критичного навантаження для стінки за зазначеним підходом при потоншеннях нижніх поясів воно визначається із деяким запасом. Результати досліджень стійкості циліндричної оболонки резервуара при дії двохстороннього навантаження представлені на рис. 7. По вертикалі відкладали величини осьового навантаження, по горизонталі - зовнішнього тиску. Заштрихований прямокутник описує область можливих навантажень - осьового і зовнішнього. За межами кривих на графіку (праворуч) оболонка знаходиться у нестійкому стані. Відстані від т. А до кривих визначають запас стійкості. При потонненні оболонок на 1,25 мм, як вказувалось вище, стійкість зменшується до 30%. Відповідно криві на графіку опускаються вниз і попадають у заштриховану зону. Останнє означає, що оболонки навіть при незначному потонненні не відповідають проектній стійкості.

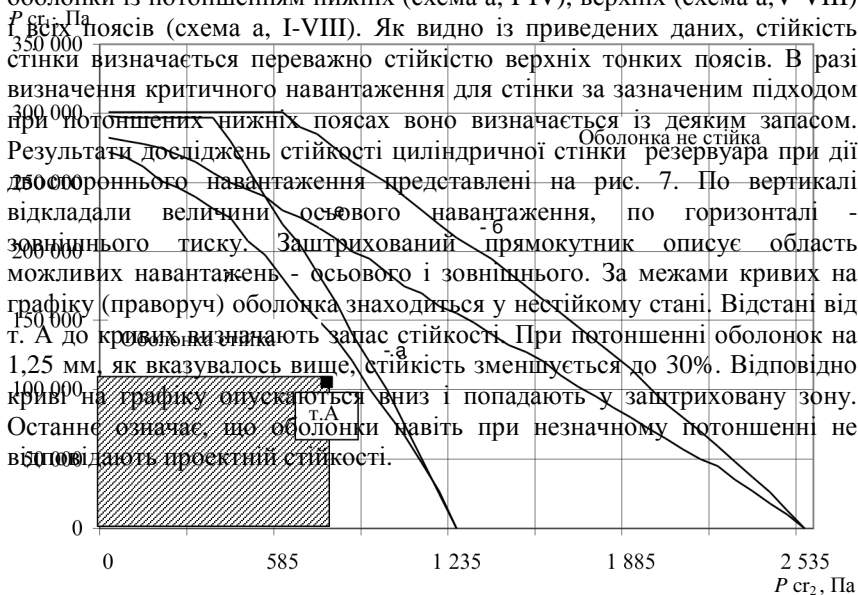


Рис. 7. Границі стійкості оболонок

Підсилення тільки вертикальними ребрами жорсткості циліндричної оболонки, що навантажена зосередженими силами (рис. 7,г), є недостатнім і для забезпечення стійкості необхідно додатково встановлювати кільце жорсткості (рис. 7,е). При цьому треба враховувати, що несуча спроможність підкріпленої оболонки в разі зосередженого навантаження буде нижчою ніж в разі її рівномірного навантаження (рис. 7, б, е).

Висновки.

1. При зосередженому прикладанні осьового навантаження несуча здатність циліндричної оболонки менша ніж при рівномірно розподіленому на 30%, що необхідно враховувати при розрахунку стінки резервуарів на стійкість.

2. Встановлення коротких поздовжніх ребер (2,5м) на верхніх поясах компенсує негативний вплив зосередженого осьового навантаження. При збільшенні довжини ребер несуча здатність оболонки зменшується.

3. Підкріплення стінки резервуарів шляхом установки кільця у поєднанні із існуючими поздовжніми ребрами жорсткості дозволяє відновити проектну стійкість оболонки.

1. *Гречаноская О.И.* Расчет и экспериментальная проверка устойчивости корпусов стальных резервуаров // Транспорт и хранение нефти и нефтепродуктов. – 1963. - №12 – С.17-28.
2. *Лессиг Е.Н.* Листовые металлические конструкции. - М.: Издательство литературы по строительству 1970. – 487с.
3. *Сафарян М.К.* Металлические резервуары и газгольдеры. – М.: Недра, 1987. – 200с.
4. *Сафарян М.К., Иванцов О.М.* Проектирование и сооружение стальных резервуаров для нефтепродуктов. - М.: Гостоптехиздат, 1961. – 328с.
5. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. - М.: Физматгиз, 1963. – 880с.
6. *Березин В.Л., Шутов В.Е.* Прочность и устойчивость резервуаров и трубопроводов. -М.: Недра, 1973. - 200с.
7. Строительные нормы и правила. СНиП II-23-81*. Стальные конструкции/Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990. –96с.
8. Строительные нормы и правила. СНиП 2.09.03-85. Сооружение промышленных предприятий / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. – 56с.
9. Ведомственные строительные нормы Украины. ВБН В.2.2-58.2-94. Резервуары вертикальные стальные для хранения нефти и нефтепродуктов с давлением насыщенных паров не выше 93,3 кПа. Госкомнефтегаз. - Киев, 1994. – 98с.

Матеріал надійшов до редакції 03.09.04.

УДК 624.04, 004.4

Баженов В.А., д-р техн. наук
Шишов О.В., канд. техн. наук
Іванченко Г.М., канд. техн. наук
Свешніков О.Г.

КОМП'ЮТЕРИЗАЦІЯ ПРЕДМЕТНОЇ ОЛІМПІАДИ З БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Проведення предметних олімпіад у вищих навчальних закладах є дієвим заходом залучення студентів до наукової роботи. Як правило, на олімпіадах пропонується низка нетривіальних задач, для розв'язання яких необхідно не лише знання програмного матеріалу з даної навчальної дисципліни, але й уміння знаходити й використовувати нестандартні прийоми розв'язання конкретних задач.

На кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури рохроблено комплекс комп'ютерних програм, який дозволяє певною мірою автоматизувати процедуру проведення олімпіад з різних технічних дисциплін, зокрема з будівельної механіки. До складу комплексу входять спеціальним чином структурована база задач і рисунків, що заздалегідь підготовлені викладачами, програми, які пред'являють та автоматизують їх підготовку, а також деякі допоміжні файли і програми.

Під час олімпіади студентам надається можливість на власний розсуд вибирати теми, що містяться в базі даних, і розв'язувати запропоновані комп'ютерною програмою задачі. Кількість задач з кожної теми може становити від 5 до 10. Кількість тем не обмежується. Запитання і рисунки до них виводяться в робоче вікно програми. Для надання відповідей виділяється обмежений відрізок часу (150 хвилин). Відповіді вводяться в спеціально призначені для цього поля у вікні програми і аналізуються шляхом порівняння з еталонними відповідями. За кожну правильну відповідь студенту нараховується певна кількість балів. Наприкінці роботи програма повідомляє сумарну кількість балів, набраних студентом протягом сеансу олімпіади. Результати зберігаються на вінчестері.

Отже, комплекс виконує такі дії:

1. Надає можливість вибирати теми з певної дисципліни. Протягом сеансу олімпіади можна переходити до інших тем або повертатись до попередніх.

2. Дозволяє вибирати для розв'язання в будь-якому порядку будь-яку задачу або задачі з обраної теми і виводить на екран текст з умовою задачі, рисунок і, в разі необхідності, варіанти можливих відповідей.
3. Підсумовує кількість балів, набраних студентом.
4. Зберігає результати тестування на вінчестері в спеціальному чином організованих файлах таблиць результатів
5. Дозволяє змінювати навчальну дисципліну, кількість та назви тем, склад білетів без втручання в програмні коди.
6. Дає можливість безпосередньо у процесі сеансу залучати до роботи допоміжні програми: стандартний калькулятор, програму розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, програму визначення коефіцієнтів формул методу переміщень для задач стійкості, короткий довідник з будівельної механіки.
7. Автоматизує процедуру створення задач і рисунків.

На рис. 1 представлено вікно програми, на яке виведена задача з вибірковою відповіддю.

Кінематичний аналіз

Тема Калькулятор Допомога Довідка

Прізвище І.Б. Петренко Ю.О. Шифр групи ПЦБ-39

Вибирайте запитання

1 2 3 4 5

6 7 8 9

Ввести відповідь

Відкласти

Запитання

Представлена система...

4 бали

Варіанти відповіді:

геометрично незмінювана і статично визначувана

геометрично змінювана

ниттєво змінювана

геометрично незмінювана і статично невизначувана

Відповідь правильна Ви здобуваєте 4 бали Набрано 9 балів Залишилось: 149 хв

Рис. 1

Тут у вікно програми виведене запитання, яке потребує надання вибіркової відповіді. Правильну, на думку студента, відповідь необхідно вибрати з наведених і ввести в програму, клацнувши мишею по кнопці “Ввести відповідь”.

На рис. 2 виведене вікно, яке містить задачу, що потребує фіксованої відповіді. Для отримання її студент мусить розв’язати задачу в числах, чисельну відповідь ввести вікно програми і клацнути по кнопці “Ввести відповідь”.

Метод сил

Тема Калькулятор Допомога Довідка

Прізвище І Б Шифр групи

Петренко Ю.О. ПЦБ-39

Вибирайте запитання

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10

Ввести відповідь

Відкласти

Запитання

Скільки основних невідомих методу сил завідомо дорівнює нулю при розрахунку заданої рами з урахуванням симетрії?

5 балів

Відповідь: 5

Відповідь правильна Ви здобуваєте 5 балів Набрано 28 балів Залишилось: 114 хв

Рис. 2

Студент може завершити роботу з програмою в будь-який момент на власний розсуд. Після завершення на екран виводиться таблиця результатів (рис. 3), де наведено кількість балів, набраних студентом по кожній задачі, а також повна кількість балів.

```

*****
Олімпіада з дисципліни <БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА>
29.05.2003
14:16:50
Група ПЩБ-39
Студент Петренко Ю.О.
Запит.  1    2    3    4    5    6    7    8    9    10   Сума
-----
Тема 1   3    3    3    4    4    4    0    0    0    21
Тема 2   5    0    0    0    5    5    0    0    5   -1   19
Тема 3   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
Тема 4   0    0   -1    0    0    0    0    0    0    0   -1
Тема 5   0    5    5    5    5    5    0    0    0    0   20
Тема 6   5   -1    0    3    3    3    0    0    5    5   23
Тема 7   0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
Тема 8   5    5    5   -1    3    0    0    5   -1    0   21
Тема 9   3    3    0    0    0    0    0    0    0    0    6
Тема 10  0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
Тема 11  3    3    3    3    0    0    0    0    0    0   12
-----
Усього  24   18   15   14   20   12    0    5    9    4  121
УСЬОГО НАВРАНО БАЛІВ: 121
Використаний час: 121 хвил. 53 сек.
*****

```

Рис. 3

Баженів В.А., Шишов О.В., Гранат С.Я. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс. – Київ, 1999.- 583с.

Матеріал надійшов до редакції 03.09.04.

УДК 531.31

Дехтярюк Є.С., проф., д.т.н.
Гончаренко М.В.**ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ РЕЗОНАНСІВ
КОМБІНОВАНОЇ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВОЇ СИСТЕМИ**

Викладений в [2] підхід застосовується для аналізу динамічної стійкості споруди, яка представлена на рис. 1 [3]. Задача формулюється таким чином. Розглядається два види параметричного збудження, яке діє на споруду: гармонійне збудження і сума гармонійного і випадкового збудження. Якщо при певних параметрах додаткового випадкового навантаження область динамічної стійкості, що відповідає випадковому збудженню, ширше області динамічної стійкості, що відповідає детермінованому збудженню, то має місце ефект стабілізації, обумовлений додатковим стохастичним навантаженням. Якщо ж навпаки – ширше область стійкості при детермінованому навантаження, має місце ефект дестабілізації.

Для розміщення технологічного устаткування, його обслуговування і ремонту в промислових будівлях влаштовують робочі площадки, які складаються з настилу і підтримуючих його балок, а також огороження і сходів. Дуже часто верстатне обладнання, що знаходиться на цих площадках, створює динамічну дію. Так, наприклад, експериментальні дослідження, що наведені в [4], показують, що при роботі різних типів верстатів, таких як ткацькі верстати, карусельні установки та ін., частоти стохастичних вібрацій, що генеруються, можуть розташовуватися в широкому діапазоні – від 233,8 об/хв. до 1315,68 об./хв.

Кожній власній частоті ω_i відповідає певна форма коливань. Деякі з них обумовлені значною мірою коливаннями окремих елементів споруди. Нижче розглядаються саме такі випадки. Так, частотам $\omega_i \cong 98$ рад/с відповідають коливання опорних колон (умови закріплення кінців – нерухомі шарніри [4]). В першому наближенні рівняння, що описує динамічну стійкість колони, може бути представлене рівнянням типу

$$\ddot{x}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i + (\omega_i^2 + k_{ii}^g (\mu \cos \nu t + f(t)))x_i = 0, \quad (1)$$

де логарифмічний декремент коливань для споруд подібного типу

$$\delta = 0.085 [1], \text{ відповідно } \xi = \frac{\delta}{2\pi} = 0.0135.$$

Параметричне навантаження $N(t)$ для колони складається з статичної складової N_0 , що обумовлена вагою настилу, балок і обладнання, гармонійної та динамічної складових $f(t)$, що виникають внаслідок роботи верстатів:

$$N(t) = N_0 + \mu \cos \omega t + f(t). \quad (2)$$

При наявності статичного стискаючого зусилля зміниться частота колони. Власна частота з врахуванням повздовжньої сили N_0

$$\omega_i = \omega_i \sqrt{1 - \frac{N_0}{N^*}} = 72 \text{ рад/с}, \quad (3)$$

де $N^* = -\frac{\omega_i^2}{k_{ii}^g} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ - критична сила, при якій відбувається статична втрата стійкості.

Приймається, що $f(t)$ - центрований стаціонарний процес з кореляційною функцією

$$\langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \left[\cos(\theta_\alpha |\tau|) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha |\tau|) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2. \quad (4)$$

де θ - прихована частота, σ^2 - дисперсія, α - радіус кореляції.

Області динамічної нестійкості в зоні простого головного резонансу наведені на графіках рис. 3. Суцільною лінією показані межі стійкості при гармонійному параметричному навантаженні. Інші графіки відповідають випадку, коли в параметричному навантаженні присутня стохастична складова.

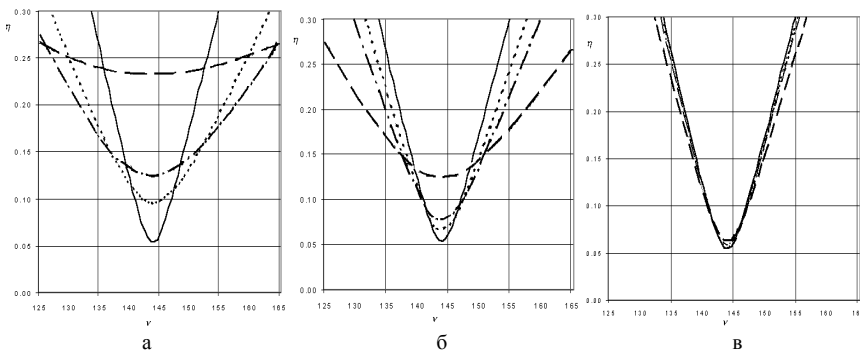


Рис. 3. Области стійкості

Области нестійкості будуються в координатах (η, ν) , де $\eta = k_{11}^g \mu$ - інтенсивність, ν - частота гармонійного навантаження. На рис. 3,а межі стійкості в зоні головного резонансу $2\tilde{\omega}_1$ побудовані для різних значень радіуса кореляції при $\theta = 10$ рад/с, тобто прихована частота випадкового процесу відрізняється від подвоєної першої власної частоти колони $2\tilde{\omega}_1 = 144$ рад/с. Стандарт стохастичного навантаження σ прийнятий 10% від значення N_0 . Штриховою лінією показані межі стійкості при радіусі кореляції $\alpha = 2\tilde{\omega}_1$, штрихпунктирною – при $\alpha = 0.5\tilde{\omega}_1$, пунктирною – при $\alpha = 0.25\tilde{\omega}_1$. Виходячи з рис. 3,а можна зробити такий висновок: при прийнятій частоті прихованої періодичності має місце ефект стабілізації. Причому при збільшенні радіуса кореляції збільшується стабілізуюча дія додаткового випадкового навантаження. На рис. 3, б аналогічним чином показані межі стійкості в зоні головного резонансу для різних значень радіуса кореляції при $\theta = 20$ рад/с. Ці графіки підтверджують висновок, зроблений вище. При збільшенні частоти прихованої періодичності стабілізуюча дія стохастичної складової зменшується. Це видно з рис. 3, в, де показані межі стійкості при $\theta = \tilde{\omega}_1 \approx 72$ рад/с, а при $\theta = 100$ рад/с, 144 рад/с ($2\tilde{\omega}_1$)... графіки практично не відрізняються один від одного. З наведеного вище в даному випадку можна зробити загальний висновок, що додаткова дія стохастичного параметричного навантаження не збільшує зони нестійкості.

Тепер розглянемо області стійкості в зоні комбінаційного резонансу. В першому наближенні такому випадку відповідатимуть коливання за двома ступенями свободи, наприклад, балка з розподіленим навантаженням.

Як правило сталевий настил жорстко прикріплений до балок і забезпечує їх загальну стійкість незалежно від параметрів зовнішнього навантаження. Якщо з конструктивних міркувань в споруді, що розглядається, мають місце окремо розташовані ригелі, то може виникати проблема втрати стійкості плоскої форми згину при динамічному навантаженні типу (2).

Як відомо, якщо тонка та висока балка вигинається в головній площині найбільшої жорсткості, то плоска форма згину за критичним навантаженням стає нестійкою і відбувається випучування балки. Така втрата стійкості при навантаженні двома моментами в площині найбільшої жорсткості розглядалась в [2]. В даному випадку вага настилу і обладнання моделюється рівномірно розподіленим навантаженням, що має сталу і перемінну складові. Опирання, як зазначено в [3], можна прийняти шарнірним.

Система рівнянь динамічної стійкості при гармонійному навантаженні в цьому випадку має вигляд

$$\tilde{M} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \tilde{C} \frac{d \bar{x}}{dt} + (\tilde{K} + \mu \tilde{K}_g \cos vt) \bar{x} = 0. \quad (5)$$

де $\bar{x} = (u, \varphi)^T$, u і φ - відповідно горизонтальне і кутове переміщення середнього перерізу балки при втраті стійкості; $\tilde{M} = \frac{m\ell}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$ - матриця мас, m і ℓ - погонна маса та розрахункова довжина балки, ρ - радіус інерції; \tilde{K} та \tilde{K}_g - матриці жорсткості та геометричної жорсткості, що відповідно дорівнюють

$$\tilde{K} = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} EI \frac{\pi^4}{\ell^4} & 0 \\ 0 & EI_\omega \frac{\pi^4}{\ell^4} + GI_k \frac{\pi^2}{\ell^2} \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}_g = \frac{\ell}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \\ \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) & a \end{bmatrix},$$

EI - жорсткість на згин, GI_k - жорсткість при крученні, EI_ω - секторіальна жорсткість, $a = h/2$ - відстань від осі балки до місця прикладення навантаження.

Власні частоти такої балки без врахування навантаження можна обчислити за формулами

$$\omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_k = \frac{\pi}{\rho \ell} \sqrt{\frac{GI_k \ell^2 + \pi^2 EI \omega}{m \ell^2}}. \quad (6)$$

Якщо параметричне навантаження має сталу складову q_0 , гармонійну $\mu \cos \omega t$ і стохастичну $\varphi(t)$ складові, то система рівнянь (5) набуде вигляду

$$\tilde{M} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \tilde{C} \frac{d \bar{x}}{dt} + \tilde{K} \bar{x} + \tilde{K}_g [q_0 + \mu \cos \omega t + \varphi(t)] \bar{x} = 0. \quad (7)$$

Для того, щоб записати систему у вигляді (14), потрібно перейти до нових перемінних $\bar{z} = (z_1, z_2)^T$

$$\bar{x}(t) = \Lambda \bar{z}(t), \quad (8)$$

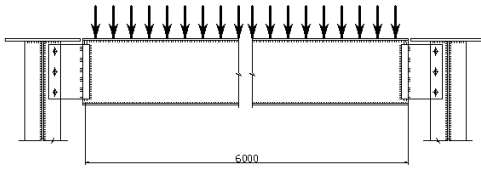
де $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$ - матриця, що утворена з ортонормованих власних

векторів задачі $\tilde{M} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + (\tilde{K} + \tilde{K}_g q_0) \bar{x} = 0$. Відносно нових змінних система матиме вигляд

$$\frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} + \tilde{C}^* \frac{d \bar{z}}{dt} + \tilde{K}^* \bar{z} + \tilde{K}_g^* (\mu \cos \omega t + \varphi(t)) \bar{z} = 0, \quad (9)$$

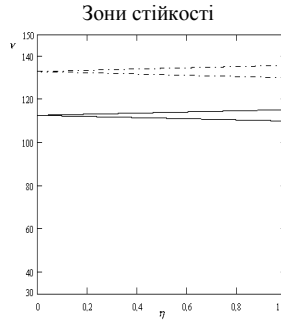
де

$$\begin{aligned} \tilde{C}^* &= \Lambda^T \tilde{C} \Lambda, \\ \tilde{K}^* &= \Lambda^T (\tilde{K} + f_0 \tilde{K}_g) \Lambda = \text{diag}(\tilde{\omega}_i^2), \\ \tilde{K}_g^* &= \Lambda^T \tilde{K}_g \Lambda. \end{aligned}$$



$$\omega_1 = 46.148 \text{ рад / с}, \quad \omega_k = 65.873 \text{ рад / с}, \\ q_0 = 30.86 \text{ кН / м}$$

а



б

Рис. 4. Балка настилу

На рис. 4 показана балка настилу (двотавр №35), для якої наведені частоти і рівномірно розподілене навантаження [3]. Межі динамічної стійкості при гармонійному параметричному збудженні для такої балки показані на рис. 4,б). Межі областей динамічної стійкості побудовані в координатах (ν, η) , де ν - частота, η - інтенсивність гармонійного навантаження, що для простого резонансу визначається виразом $k_{ii}^g \mu$, для комбінаційного – $\mu \sqrt{k_{ij}^g k_{ji}^g}$. Штрих пунктирна лінія обмежує зону нестійкості простого резонансу по крутильній частоті, суцільна лінія – комбінаційного резонансу. Можливість виникнення простих резонансів згідно формули (4) визначається структурою матриці \tilde{K}_g . Як показано вище $k_{11}^g = 0$, отже по першій частоті простий параметричний резонанс виникнути не може. З фізичної точки зору дане навантаження (рис. 4,а) не являється параметричним по відношенню до деформацій згину. Як видно з графіків, зони нестійкості балок настилу досить вузькі і розташовані далеко одна від одної, тому не спричинять небезпечних ситуацій і подальшого аналізу не потребують.

Інша ситуація має місце при дослідженні динамічної стійкості головної балки, конструкція якої представлена на рис. 5. Навантаження, наведене в [3], обчислене при наявності жорсткого настилу. Оскільки розглядається випадок самостійної роботи балки, виникає необхідність розрахунку на стійкість і задане навантаження буде за межею стійкості. Для колони стала складова становила 46% від критичного значення, це саме процентне відношення і прийнятно для балки.

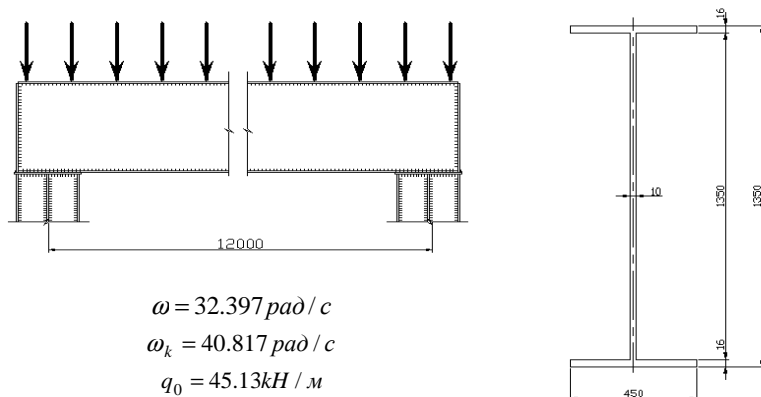


Рис. 5. Головна балка

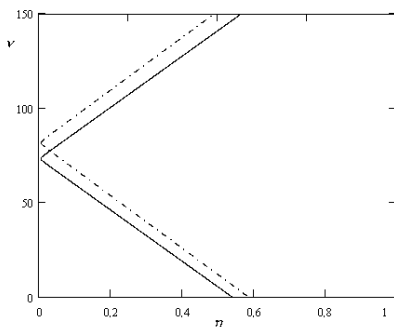


Рис. 6

Загальний вигляд меж областей динамічної нестійкості при гармонійному параметричному навантаженні матиме вигляд, показаний на рис. 6. Область динамічної нестійкості, яка відповідає простому параметричному резонансу, розташована правіше штрихпунктирної лінії. Ця зона обумовлена крутильною частотою, тому її устя наближається до частоти, що дорівнює подвійній крутильній частоті $\nu = 2\omega_k \approx 81.6$.

В цій конструкції, як і в балці настилу, параметричний резонанс, що відповідає частоті згину, не існує. Область, обмежена суцільною лінією, відповідає комбінаційному резонансу, і прилягає до частоти, що дорівнює сумі частот згину та кручення. Області нестійкості значно ширші від показаних в попередній балці, тому можуть виникати небезпечні ситуації.

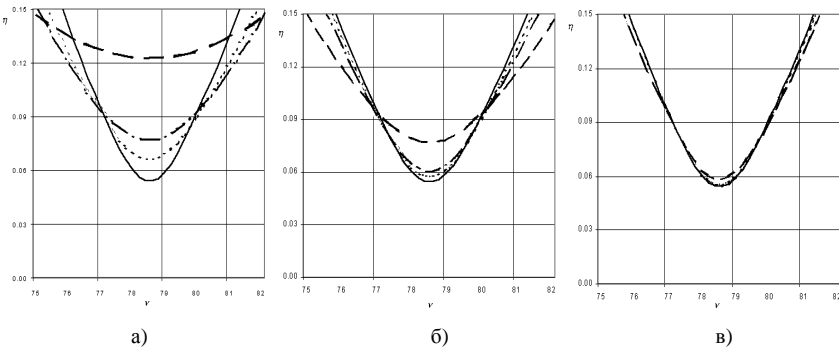


Рис. 7. Области стійкості

Результати дослідження впливу додаткової стохастичної параметричної складової на конфігурацію областей стійкості в зоні головного простого резонансу показані на рис. 7. Наведені графіки аналогічні графікам, які представлені на рис. 3. Досліджуючи головний простий резонанс для балки, можна повторити висновки зроблені для колони - має місце ефект стабілізації, причому при збільшенні радіуса кореляції збільшується стабілізуюча дія додаткового випадкового навантаження безпосередньо в межах частоти головного резонансу. На рис. 7,а) межі стійкості в зоні головного резонансу побудовані для різних значень радіуса кореляції при $\theta = 1$ рад/с. Стандарт стохастичного навантаження σ прийнятий 10% від значення q_0 . Штриховою лінією показані межі стійкості при радіусі кореляції $\alpha = 2\bar{\omega}_k$, штрих пунктирною – при $\alpha = 0.5\bar{\omega}_k$, пунктирною – при $\alpha = 0.25\bar{\omega}_k$. На рис. 7,б) показані межі стійкості в зоні головного резонансу для різних значень радіуса кореляції при $\theta = 2$ рад/с. При збільшенні частоти прихованої періодичності стабілізуюча дія стохастичної складової зменшується. Це видно з рис. 7,в), де показані межі стійкості при $\theta = 10$ рад/с, а при подальшому збільшенні θ графіки практично не відрізняються один від одного.

Внаслідок застосування асимптотичної теорії в першому наближенні доданки з коефіцієнтами матриці геометричної жорсткості k_{11}^g та k_{22}^g будуть мати більш високий порядок малості. Тоді для зручності аналізу областей динамічної стійкості в зоні комбінаційного резонансу потрібно зробити в системі (9) заміну перемінних, щоб отримати в обох рівняннях системи однакову інтенсивність гармонійного параметричного

навантаження. Отже система (9) для дослідження областей стійкості в зоні комбінаційного резонансу приймається

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + c_{11} \frac{du}{dt} + \omega_1^2 \bar{z} + k_{12}^g (\mu \cos \nu t + f(t)) \varphi &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_{22} \frac{d\varphi}{dt} + \omega_1^2 \bar{z} + k_{21}^g (\mu \cos \nu t + f(t)) u &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ввівши нові перемінні і позначення

$$\tilde{u} = \frac{\omega_1}{\sqrt{k_{12}^g}} u, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\omega_{21}}{\sqrt{k_{21}^g}} \varphi, \quad \eta = \mu \frac{\sqrt{k_{12}^g k_{21}^g}}{\omega_1 \omega_2}, \quad f^*(t) = f(t) \frac{\sqrt{k_{12}^g k_{21}^g}}{\omega_1 \omega_2},$$

система (10) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + c_{11} \frac{d\tilde{u}}{dt} + \omega_1^2 \bar{z} + (\eta \cos \nu t + f^*(t)) \tilde{\varphi} &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dt^2} + c_{22} \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} + \omega_1^2 \bar{z} + (\eta \cos \nu t + f^*(t)) \tilde{u} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

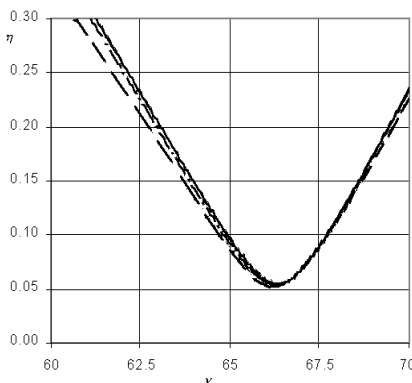


Рис. 8

Результати аналізу конфігурації областей динамічної стійкості в зоні комбінаційного параметричного резонансу показані на рис. 8. Побудувавши межі областей з врахуванням стохастичної складової параметричного навантаження (10% від сталої складової) при різних значеннях θ і α отримуємо графіки, що практично співпадають з межами областей динамічної стійкості при гармонійному збудженні (на рис. 8 показано суцільною лінією). В усій області стабілізація досягає лише

2% . Незначний вплив стохастичної складової можна пояснити малістю коефіцієнтів матриці геометричної жорсткості \tilde{K}_g^* . Тільки при значному збільшенні інтенсивності стохастичного навантаження до рівня сталої

складової спостерігається дестабілізація системи (зона розташована вище від штрихової лінії).

Наведений вище аналіз динамічної стійкості конкретних конструкцій показав, що у випадках, які розглядалися, при врахуванні стохастичної складової в параметричному навантаженні область динамічної нестійкості практично не збільшується, а іноді і зменшується. Але, взагалі кажучи, наведена вібрація змінює межі областей нестійкості, і для більш точної оцінки динамічної стійкості конструкцій потрібно враховувати стохастичний характер параметричного навантаження.

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С.* Будівельна механіка. Динаміка споруд: Навч. Посібник. – К.: ІЗМН, 1998. – 208с.
2. *Дехтярюк Є.С., Гончаренко М.В.* Аналіз стійкості пружних систем в зонах простих і комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.- техн. збірник – К.: КНУБА, 2004.- Вип. 74.
3. *Нілов О.О.* Металеві конструкції. Балки. Колони: Навчальний посібник для студентів будівельних спеціальностей. – К.: ІЗМН, 1997. – 262с.
4. *Цейтлин А.И., Гусева Н.И.* Статистические методы расчета сооружений на групповые динамические воздействия. – М.: Стройиздат, 1979. – 174с.

Матеріал надійшов до редакції 14.09.04.

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук,
Голуб О.О.

МОДЕЛЮВАННЯ СМЕРЧОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ВЕЛИКОГАБАРИТНІ СПОРУДИ

Смерч (торнадо) – рухомий атмосферний вихор, який поширюється зі швидкістю до 20 м/с, а швидкість повітря при обертальному русі досягає сотень метрів за секунду. Повітря в смерчі обертається і одночасно піднімається по спіралі, втягуючи всередину пил, воду, різні предмети. На своєму шляху смерч завдає значних пошкоджень будовам, вириває дерева, переміщує предмети і легкі споруди [1]. Тому при проектуванні найбільш відповідальних об'єктів необхідно проводити їх розрахунок на смерчове навантаження. На сьогодні в Україні і в сусідніх державах не існує нормативної бази на врахування смерчового навантаження при проектуванні, рекомендацій по його моделюванню та алгоритму розрахунку споруд та конструкцій на його дію. В науковій літературі розглядаються декілька спрощених моделей смерчу, але здебільшого для вивчення самого явища, а не його взаємодію з іншими об'єктами. Тому дослідження в цьому напрямку є актуальними.

Для виникнення смерчів найбільш сприятливі умови існують у грозових хмарах, звідки ці вихрі опускаються до землі. У США, де смерчі породжуються приблизно в 40...60 разів частіше, ніж у Європі, їх кількість на рік дорівнює кількості гроз. У пустелях при сильному нагріванні сонцем піщаної поверхні також виникають невеликі смерчі діаметром близько 2...4 м і висотою до 0,5...1 км. В окремих випадках пустельні смерчі можуть існувати до 2 годин [2]. На території України сильні смерчі утворюються досить рідко, але і менш інтенсивні вихрі, враховуючи їх руйнівну дію, також наносять значних збитків навколишньому середовищу і спорудам.

Науковці на основі системи гіпотез, вивчаючи причини породження та кінематику вихрових збурень, створили декілька моделей смерчу, які потребують подальшого аналізу стосовно їх взаємодії з об'єктами будівництва та природними перешкодами. Крім захисту від смерчового навантаження ведеться пошук шляхів використання енергії смерчів в практичних цілях. Найпростішими із запропонованих моделей є циліндрична (рис.1, а) з постійним по висоті радіусом R рухомого стовпа та конусоподібна (рис.1, б), для якої ідеалізований смерчовий стовп міняє по висоті радіус від r до R .

Усі моделі у своїй структурі розрізняють центральну частину – ядро і периферію – мантію. Обертальний рух повітря в ядрі смерчу моделюється з постійною кутовою швидкістю, як у твердому тілі. За межами ядра, у мантії, кутова швидкість з віддаленням від осі обертання поступово зменшується. Горизонтальна швидкість повітря в ядрі вихра складає в середньому 40...50 м/сек, іноді може досягати 100 м/сек. [2].

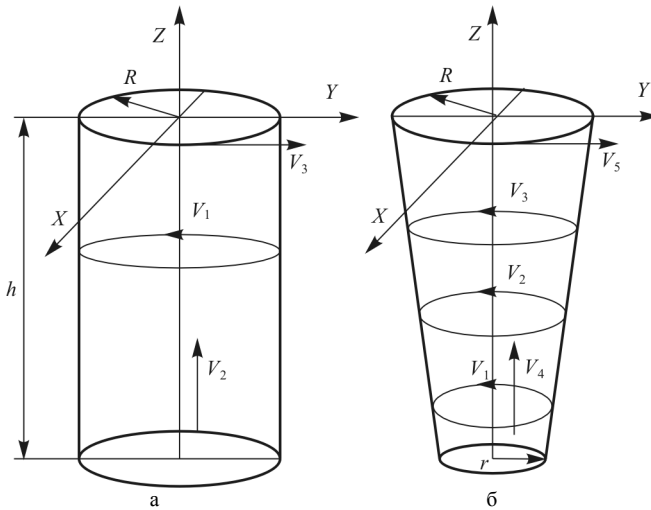


Рис. 1

Дослідження гідрометеорологів показали, що на початковій стадії зародження смерчу всередині грозової хмари утворюється мезоциклон з радіусом 5-10 км. Згори граничний шар повітря, що обертається, знаходиться у циклострофічному балансі, тобто радіальні рухи (до осі і від неї) пригнічені. Тому повітря, яке здійснюється, надходить до мезоциклону, як за звичай, знизу – з ділянки, де потік конвегує. При подальшому розвитку мезоциклону його радіус зменшується до декількох кілометрів, і для збереження кількості руху швидкість обертання повітря повинна збільшуватись (тобто швидкість збільшується при зменшенні висоти). Проаналізувавши процес утворення вихру можна стверджувати, що конусоподібна модель (рис.1, б) є більш повною при описуванні фізичних характеристик смерчу.

На етапі формування смерчу всередині мезоциклону утворюється ядро – область, в якій швидкість обертання досить значна. Швидкості обертального V_1 , V_2 , V_3 та вертикального V_4 (рис.1, б) рухів зростають, вихрова трубка звужується і, витягуючись донизу, досягає поверхні землі

– утворюється смерч. Кінематичні та динамічні особливості вихрових високошвидкісних потоків повітря, які лягли в основу математичних моделей смерчів обумовлюють відмінність смерчового навантаження від моделей статичного та динамічного вітрових впливів, які передбачені нормами проектування [4]. Моделі смерчу будуються на узагальненні даних, отриманих багаторічним спостереженням за цими складними природними явищами [3]. Крім напору, обумовленого поступальним рухом повітря, при смерчі виникають рухомі зони пониженого тиску, викликані обертальним рухом вихру, та додатковий напір від тангенціальної складової швидкості.

Особливість дії смерчу на великогабаритні споруди полягає в її локальності. Наявність локального процесу (до якого відноситься смерч) пояснюється відмінністю будь-якої його характеристики (тиску, температури, щільності і т.д.) від відповідного параметру навколишнього середовища. Тиск в ядрі смерчу менший, ніж в оточуючій атмосфері, що призводить до підтягування повітря з поверхні землі в середину смерчу. Повітря, піднімаючись догори, охолоджується, і його швидкість зменшується. Уявний горизонтальний розріз області атмосфери, охопленої торнадо, показує, що на будь-якій висоті температура, тиск, щільність і маса в середині смерчу будуть відрізнятися від цих характеристик в атмосфері. Очевидно, смерчове навантаження, переміщуючись із швидкістю поступального руху V_5 (рис.1, б) вздовж споруди, спричинюватиме небажані коливання. В свою чергу великогабаритні споруди матимуть зворотній вплив на форму та кінематичні параметри смерчового стовпа.

Потенційна енергія положення (гравітаційна енергія) сумісно з енергією обертального руху значних мас атмосферного повітря є джерелом тієї потужності смерчу, що так вражає діє на свідомість. Вона також є причиною тривалого існування смерчу. За рахунок внутрішнього тертя енергія обертального руху від маси середовища приосьової області передається секундній масі атмосферного повітря по всій висоті смерчу. В свою чергу, від секундної маси потоку центральної області, який обертається, також за рахунок внутрішнього тертя енергія обертального руху передається масі середовища приосьової області. Утворюється своєрідний атмосферний насос, який перекачує через себе значну масу атмосферного повітря. Таким чином реалізується природна газодинамічна самопідтримуюча енергетична система [3]. В реальних смерчах мають місце внутрішні газодинамічні втрати енергії. Їх джерелом є динамічна взаємодія між масою середовища приосьової області та потоком маси в центральній області. Крім цього, мають місце втрати, пов'язані з нерівномірністю розподілення осьової складової швидкості по

радіусу центральної частини смерчу. Можна припустити, що при значній гравітаційній енергії, яка реалізується в смерчі, внутрішні втрати не можуть мати суттєвої ролі, і в математичних моделях ними можна нехтувати.

Грандіозний енергетичний масштаб такого явища природи, яким є смерч, підтверджується свідченнями очевидців та фото- і кінодокументами. По досягненню смерчем поверхні землі його енергія реалізується в неймовірні руйнування. За рахунок власної енергії відбувається руйнування і самого смерчу. Це є наслідком приєднання великих мас різних предметів, „втягнутих” в центральну частину смерчу. Значні приєднані маси атмосферного повітря можуть бути „вкинута” до смерчу за рахунок вітрового впливу. Коли смерч бере на себе великі зусилля, його газодинамічна структура руйнується.

Розглянуті основні механічні властивості реальних смерчів та найпростіші моделі цього природного явища підтверджують достатню складність та різноманітність впливу рухомого потоку повітря на перешкоди на своєму шляху. Побудова математичної моделі цього впливу на поверхні реальних споруд та конструкцій є важливою проблемою, яка потребує подальшого опрацювання.

1. *Наливкин Д.В.* Смерчи. М: Наука, 1984. 112 с.
2. *Хюбюк А.Ф.* Бури и смерчи // Природа. – 1957. – № 7 – С.21-27.
3. *Каплан Л.Г.* Локальные процессы в сплошной жидкой среде и атмосфере. Ставрополь, АСОК, 1993. 214 с.
4. СНиП 2.01.07-85 „Нагрузки и воздействия”, 1988.

Матеріал надійшов до редакції 24.09.04.

УДК 624 .042

Колесник І.А., д-р техн. наук,
Іванова А.П., канд. техн. наук,
Сушкіна Ю.И., магістр

КОЛИВАННЯ РАМНИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ РОЗСИЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ

Рамні конструкції почали застосовуватися лише з початку минулого сторіччя, у зв'язку із широким поширенням залізобетону, для якого рама – найбільш оптимальна конструктивна форма (рис. 1) у порівнянні з металевими і дерев'яними рамами. Історично розвиток залізобетонних конструкцій (і рамних зокрема) відбувався послідовно, від простих форм до більш складних [1].

Рамні конструкції знаходяться під дією різних впливів, у тому числі і коливальних. Виникає необхідність підвищеної уваги до проблеми коливань і більш повного обліку факторів, що супроводжують реальні умови експлуатації рам. До числа таких факторів відноситься розсіювання енергії коливальної системи за рахунок різних

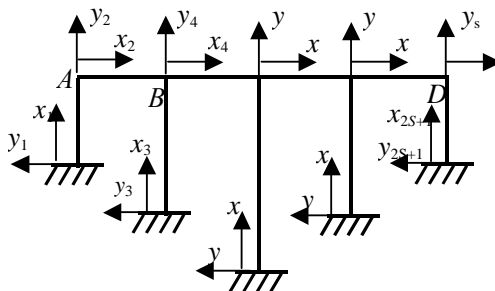


Рис. 1

джерел, що існують в усіх без винятку коливальних системах. З цієї причини вільні коливання конструкції виявляються затухаючими. Основні види втрат енергії при механічних коливаннях:

- втрати енергії в матеріалі гістерезисного типу;
- конструкційне розсіювання енергії;
- аеродинамічні втрати енергії.

Внесок у демпфірування коливань у зазначених видах втрат енергії буде залежати від типу коливань системи і від середовища, у якому ці коливання відбуваються.

Г.С. Писаренко [4] запропонував загальний метод розрахунку коливань механічних систем з урахуванням будь-якого виду розсіювання енергії, базуючись на раніше розробленій нелінійній теорії гістерезисних втрат у матеріалі при коливальному процесі (рис. 2).

Розсіювання енергії виявляється в зменшенні амплітудного значення потенціальної енергії в кожному одиничному обсязі матеріалу “пружини” за цикл коливань. Цю частину загубленої енергії пропонується характеризувати площею умовної петлі гистерезиса, контур якої описується нелінійними залежностями між напругами σ і деформаціями ε , подібно тому, як було прийнято при описі петель гистерезиса, що характеризують недосконалу пружність матеріалу [5].

Аналітичний опис петлі гистерезиса, запропонований Г.С.Писаренко, має вид:

$$\sigma = E \left[\xi \pm \frac{3}{8} \partial_z \left(\xi_0 \mp 2\xi - \frac{\xi^2}{\xi_0} \right) \right]. \quad (1)$$

Тут

$$\partial_z = \partial(\xi_0) + \partial(\xi) + \partial(R) + \partial(C) + \dots, \quad (2)$$

де ξ_0 - початкова амплітуда, яка залежить від відносних деформацій; $\partial(\xi_0)$ - декремент, що залежить від амплітуди коливань; $\partial(\xi)$ - декремент, що залежить від швидкості деформацій; $\partial(R)$ - декремент, що залежить від сухого тертя; $\partial(C)$ декремент, що залежить від жорсткості системи і т.д.

Такий підхід передбачає знання декрементів, як функції тих чи інших факторів, отриманих з експериментів.

Вільні коливання рамних конструкцій (з урахуванням розсіювання енергії в системі) будуть визначатися для кожного стержня диференціальним рівнянням

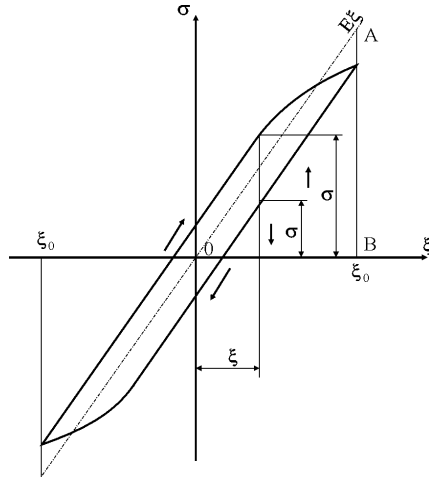


Рис. 2

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] = 0, \quad (3)$$

де EI – жорсткість стержня рами при згині; $y(x,t)$ – прогин у будь-який момент часу t у перетині стержня на відстані x від початку координат; m –

маса одиниці довжини стержня; ℓ – довжина стержня;

$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\overset{\Leftrightarrow}{\Phi} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right]$ функціонал, що враховує розсіювання енергії в системі,

присутність у ньому ε у виді множника вказує на слабкий вплив збурювання, внесеного в рівняння (3) у порівнянні з незбуреним рівнянням (при $\varepsilon=0$).

Уведемо наступні позначення:

$$\alpha^2 = \frac{m}{EI}, \quad (4)$$

$$\overset{\Leftrightarrow}{\Phi} "(y'') = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \left[\overset{\Leftrightarrow}{\Phi} \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right], \quad (5)$$

тоді рівняння (3) буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varepsilon \overset{\Leftrightarrow}{\Phi} "(y''). \quad (6)$$

Якщо збурювання відсутнє ($\zeta=0$), тоді коливання будуть гармонійними з постійною амплітудою і рівномірно обертовим кутом, який залежить тільки від початкових умов:

$$\frac{du}{dt} = 0; \quad \frac{d\theta}{dt} = \varphi \quad (\theta = \varphi \cdot t + \psi). \quad (7)$$

Нелінійне збурювання ($\zeta \neq 0$) обумовлює залежність миттєвої частоти $\frac{d\theta}{dt}$ від амплітуди і викликає появу обертонів у рішенні рівняння (6), а також зменшення амплітуди коливань у результаті розсіювання енергії. Рішення рівняння (6) представимо у виді ряду:

$$y(x, t) = u \cdot X(x) \cdot \cos \theta + \varepsilon \cdot u_1(u, x, \theta) + \varepsilon^2 \cdot u_2(u, x, \theta) + \dots, \quad (8)$$

у котрому $X(x) \cdot \cos \theta$ – рішення незбуреного рівняння (6); $X(x)$ – фундаментальна функція задачі; $u_1(u, x, \theta)$, $u_2(u, x, \theta)$ – періодичні функції кута θ з періодом 2π .

Виходячи з теорії нелінійної механіки, амплітуду u і фазу θ , що є функціями часу t , можна визначити з диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \varepsilon \cdot A_1(u) + \varepsilon^2 A_2(u) + \dots, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varphi + \varepsilon \cdot B_1(u) + \varepsilon^2 B_2(u) + \dots,\end{aligned}\quad (9)$$

де φ – власна частота коливань стержня без урахування затухання.

Задача буде складатися у визначенні наступних функцій:

$$u_1(u, x, \theta), u_2(u, x, \theta), A_1(u), A_2(u), B_1(u), B_2(u), \quad (10)$$

при яких вираз (8) з урахуванням рівнянь (9) буде рішенням рівняння (6).

Для встановлення однозначності функцій (10), що є коефіцієнтами при ступенях малого параметра ε , відповідно до теорії побудови асимптотичних розв'язків [5] повинні бути накладені наступні обмеження – відсутність у них перших гармонік

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} u_1(u, x, \theta) \cdot \cos \theta \cdot d\theta &= 0, & \int_0^{2\pi} u_2(u, x, \theta) \cdot \cos \theta \cdot d\theta &= 0, \\ \int_0^{2\pi} u_1(u, x, \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta &= 0, & \int_0^{2\pi} u_2(u, x, \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Це означає, що величина u у виразі (8) дорівнює амплітуді першої гармоніки коливань.

Попередньо визначивши четверту похідну $y^{IV}(x, t)$ виразу (8), з урахуванням (9), ліву частину рівняння (3) чи (7) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= u \cdot \left[\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - \alpha^2 \cdot \varphi^2 \cdot X(x) \right] \cdot \cos \theta + \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \times \\ &\times \left[-2\varphi \cdot A_1(u) X(x) \cdot \sin \theta - 2\varphi \cdot u B_1(u) X(x) \cdot \cos \theta + \varphi^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \left\{ \left[A_1(u) \cdot \frac{dA_1(u)}{du} - u B_1^{22}(u) - 2\varphi \cdot u B_2(u) \right] X(x) \cdot \cos \theta - \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[2\varphi \cdot A_2(u) + 2A_1(u)B_1(u) + A_1(u) \frac{dB_1(u)}{du} \cdot u \right] X(x) \cdot \sin \theta + \\
& + 2\varphi \cdot A_1(u) \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial u \partial \theta} + 2\varphi \cdot B_1(u) \frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + \varphi^2 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} \Bigg\} + \varepsilon^2 \dots
\end{aligned} \quad (12)$$

Праву частину рівняння (6) розкладемо в ряд по ступенях малого параметра ε

$$\varepsilon \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Phi} " (y) " = \varepsilon \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Phi} " [uX " (x) \cdot \cos \theta] + \varepsilon^2 \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Phi} " [uX " (x) \cdot \cos \theta] \cdot u_1 + \varepsilon^2 \dots \quad (13)$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях ε у правих частинах виразів (12) і (13) до членів m -го порядку включно.

Приймаючи $m = 2$, одержимо наступну систему рівнянь

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - p^2 X(x) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 [-2\varphi \cdot X(x) \cdot A_1(u) \sin \theta - 2\varphi \cdot uX(x)B_1(u) \cos \theta] + \\
& + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + p^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = \overset{\leftrightarrow}{\Phi} [uX " (x) \cos \theta]
\end{aligned}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 \left\{ \left[A_1(u) \frac{dA_1(u)}{du} - uB_1^2(u) - 2\varphi \cdot B_2(u) \right] X(x) \cos \theta - \right. \\
& - \left[2\varphi \cdot A_2(u) + 2A_1(u)B_1(u) + A_1(u) \frac{dB_1(u)}{du} \right] \times \\
& \times X(x) \sin \theta + 2\varphi \cdot A_1(u) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \cdot \partial u} + 2\varphi \cdot B_1(u) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \Bigg\} + \\
& + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta^2} = \overset{\leftrightarrow}{\Phi} " [uX " (x) \cos \theta] \cdot u_1,
\end{aligned} \quad (16)$$

де

$$p^2 = \alpha^2 \cdot \varphi^2 = k_1^4. \quad (17)$$

Вирази (14) – (16) є тими вихідними рівняннями, на підставі яких можуть бути отримані рішення поставленої задачі в нульовому, першому і другому наближеннях.

Загальне рішення рівняння (14), що збігає з рівнянням (3) при $\varepsilon = 0$ з точністю до постійного множника, можна записати [2]:

$$X_{ni} = A_{ni} \cdot S(k_{ni} x) + B_{ni} \cdot T(k_{ni} x) + C_{ni} \cdot U(k_{ni} x) + D_{ni} \cdot V(k_{ni} x), \quad (18)$$

де $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$ - довільні постійні; $S(k_{ni} x), T(k_{ni} x), U(k_{ni} x), V(k_{ni} x)$ - функції Кривої [3]; i - номер стержня; n - тон коливань.

Довільні постійні, які входять у формули для фундаментальних функцій на різних ділянках рами, шляхом використання граничних умов і умов сполучення виражаються через одну з невизначеностей, що залишилися. Таким чином, фундаментальна функція визначається з точністю до постійного множника. За допомогою однієї з граничних умов і умов сполучення, не використовуваних при побудові системи фундаментальних функцій, складається рівняння частот, з якого визначаються корені k_n :

$$k_{ni}^4 = \frac{\varphi_n^2}{b_i^2}, \quad \left(b_i = \sqrt{\frac{EI_i}{m_i}} \right). \quad (19)$$

Для симетричної однопрольотної рами (рис. 3), досліджуваної в цій

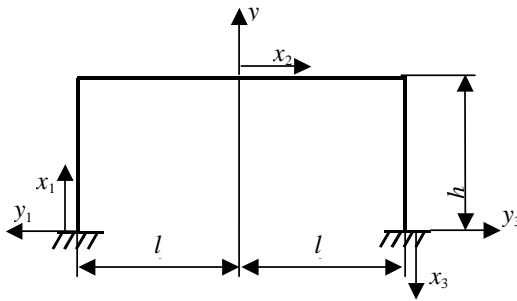


Рис. 3

роботі, система фундаментальних функцій має різний вид для симетричних і косиметричних форм коливань. Будемо вважати, що стійки рами і її ригель мають постійну по довжині й однакову жорсткість ($I_1 = I_2 = I_3 = I$) та погонну масу ($m_1 = m_2 = m_3 = m$).

Тоді, позначаючи

$\alpha_n = k_n \cdot \ell$, ($k_{n1} = k_{n2} = k_{n3} = k_n$) і використовуючи безрозмірну координату

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad (20)$$

одержимо вираз для фундаментальних функцій:

а) для симетричних форм коливань ($n = 2, 4, 6, \dots$)

$$X = \begin{cases} X_{n1} = U(\alpha_n \xi) - A_n V(\alpha_n \xi), & [0 \leq \xi \leq 1], \\ X_{n2} = B_n [U(\alpha_n \xi) - C_n S(\alpha_n \xi)], & [-1 \leq \xi \leq 1], \\ X_{n3} = X_{n1}, & [-1 \leq \xi \leq 0], \end{cases} \quad (21)$$

де

$$A_n = \frac{U(\alpha_n)}{V(\alpha_n)}, \quad B_n = -\frac{S(\alpha_n) \cdot D(\alpha_n)}{A(\alpha_n) \cdot V(\alpha_n)}, \quad C_n = \frac{U(\alpha_n)}{S(\alpha_n)}; \quad (22)$$

б) для кососиметричних форм коливань ($n = 1, 3, 5, \dots$)

$$X_n = \begin{cases} X_{n1} = U(\alpha_n \xi) - D_n \cdot V(\alpha_n \xi), & [0 \leq \xi \leq 1], \\ X_{n2} = E_n [T(\alpha_n \xi) - F_n \cdot V(\alpha_n \xi)], & [-1 \leq \xi \leq 1], \\ X_{n3} = -X_{n1}, & [-1 \leq \xi \leq 0], \end{cases} \quad (23)$$

де

$$D_n = \frac{S_n(\alpha_n) \cdot B(\alpha_n) + T(\alpha_n) \cdot S_1(\alpha_n)}{T(\alpha_n) \cdot B(\alpha_n) + U(\alpha_n) \cdot S_1(\alpha_n)}, \quad (24)$$

$$E_n = -\frac{V(\alpha_n) \cdot S_1(\alpha_n)}{2[T(\alpha_n) \cdot B(\alpha_n) + U(\alpha_n) \cdot S_1(\alpha_n)]},$$

$$F_n = \frac{T(\alpha_n)}{V(\alpha_n)},$$

$$S_1 = 2sh(\alpha_n) \cdot \sin(\alpha_n).$$

Частоти і форми вільних коливань П-образної рами:

а) для симетричних форм коливань

$$\frac{B(\alpha_n)}{D(\alpha_n)} = \frac{C(\alpha_n)}{A(\alpha_n)}, \quad (25)$$

б) для кососиметричних форм коливань

$$\frac{\alpha_n \cdot B(\alpha_n) - S(\alpha_n)}{\alpha_n \cdot D(\alpha_n) + A(\alpha_n)} = \frac{S_1(\alpha_n)}{B(\alpha_n)}. \quad (26)$$

З приведених трансцендентних рівнянь (25) і (26) визначаються корені α_n , зв'язані з частотами вільних коливань залежністю:

$$\varphi_n = \frac{\alpha_n^2}{\ell^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (27)$$

Перші шість коренів рівнянь (25) і (26) мають наступні значення:

а) для симетричних форм коливань: $\alpha_1 = 1,51369$; $\alpha_3 = 3,39480$;
 $\alpha_5 = 4,59523$;

б) для кососиметричних форм коливань: $\alpha_2 = 2,02932$; $\alpha_4 = 4,19725$;
 $\alpha_6 = 5,23906$.

Рішення рівняння (6) у нульовому наближенні згідно (8), можна представити у вигляді

$$y = u \cdot X(x) \cdot \cos \theta. \quad (28)$$

Для обліку розсіювання енергії в системі, варто розглядати рівняння (15), представивши його в такий спосіб:

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + p^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = \Phi'' [u X''(x) \cdot \cos \theta] + \alpha^2 [2\varphi \cdot A_1(u) \cdot X(x) \cdot \sin \theta + 2\varphi \cdot u \cdot B_1(u) \cdot X(x) \cdot \cos \theta]. \quad (29)$$

Для визначення $A_1(u)$ і $B_1(u)$ помножимо рівняння (29) спочатку на $X(x) \cdot \sin \theta$, потім на $X(x) \cdot \cos \theta$, отриманий після цього вираз проінтегруємо по довжині першого стержня конструкції від 0 до h і по циклу від 0 до 2π ; проінтегруємо від $-\ell$ до ℓ для другого стержня по циклу від 0 до 2π ; проінтегруємо від 0 до h для третього стержня по циклу від 0 до 2π , після відповідних перетворень одержимо:

$$A_1(u) = - \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} \Phi'' [u \cdot X''(x) \cdot \cos \theta] \cdot X(x) \sin \theta \cdot dx \cdot d\theta}{2\pi \cdot \alpha^2 \varphi \int_0^h X^2(x) \cdot dx}; \quad (30)$$

$$B_1(u) = - \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} \Phi'' [u \cdot X''(x) \cdot \cos \theta] \cdot X(x) \cos \theta \cdot dx \cdot d\theta}{2\pi \cdot \alpha^2 \varphi \cdot u \int_0^h X^2(x) \cdot dx}. \quad (31)$$

Для другого і третього стержнів рами A_1 і B_1 визначаються аналогічно.

Функції $U_1(u, x, \theta)$ можна визначити, розв'язуючи рівняння (23) за методикою Г.С. Писаренка [3]. Тому що найбільш цікавим представля-

ється перше наближення, то для визначення прогину (з достатнім ступенем точності) можна обмежитися використанням тільки формули (28). Згідно формули (8) ступінь точності буде така, як у наступному виразі:

$$y = u \cdot X(x) \cdot \cos \theta + \varepsilon \cdot U_1(u, x, \theta). \quad (32)$$

Тому, для розв'язання задачі в першому наближенні немає необхідності визначати функцію $U_1(u, x, \theta)$.

Визначивши A_1 і B_1 за формулами (30) - (31) і використовуючи вираз (32), одержимо амплітуду і фазу коливань для першого стержня рами

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} \varepsilon \cdot \Phi \cdot [u \cdot X''(x) \cdot \cos \theta] \cdot X(x) \sin \theta \cdot dx \cdot d\theta}{2\pi \cdot \alpha^2 \varphi \int_0^h X^2(x) \cdot dx}; \quad (33)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi - \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} \varepsilon \cdot \Phi \cdot [u \cdot X''(x) \cdot \cos \theta] \cdot X(x) \cos \theta \cdot dx \cdot d\theta}{2\pi \cdot \alpha^2 \varphi \cdot u \int_0^h X^2(x) \cdot dx}. \quad (34)$$

Аналогічно знайдемо вирази для другого і третього стержнів рами.

Для того, щоб представити диференціальні рівняння (33) і (34) у явному виді, необхідно записати функціонал $\Phi''[u \cdot X(x) \cdot \cos \theta]$ у розгорнутому виді. Для цього використовуємо нелінійні залежності (1) між нормальними напругами і відносною деформацією.

Тоді для першого стержня рами шириною b_1 і висотою h_1 , після відповідних перетворень одержимо:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\int_0^h \frac{d^2}{dx^2} \cdot [\partial_z \cdot u \cdot X''(x)] \cdot X(x) \cdot dx}{2\pi \cdot \alpha^2 \varphi \cdot \int_0^h X^2(x) \cdot dx}; \quad (35)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varphi + \frac{3}{8} \cdot \frac{\int_0^h \frac{d^2}{dx^2} \cdot [\partial_z \cdot u \cdot X''(x)] \cdot X(x) \cdot dx}{\alpha^2 \cdot u \cdot \varphi \cdot \int_0^h X^2(x) \cdot dx}. \quad (36)$$

Знаючи вирази для функції прогину $X(x)$, а також вираз для декре-
мента ∂_z , додатки якого є функціями прогину, і вирішуючи диференці-
альне рівняння (33), можна одержати $u = f_1^I(t)$ і $\theta = f_2^I(t)$. Аналогічно
знаходять $u = f_1^{II}(t)$ і $\theta = f_2^{II}(t)$ для другого стержня рами й $u = f_1^{III}(t)$
і $\theta = f_2^{III}(t)$ для третього стержня.

У подальшому будуть наведені результати наступних досліджень:

- вимушених коливань та їх впливу на частоти вільних коливань сте-
ржнів рами;
- випадків резонансу.

1. Жемочкин Б.Н. Расчет рам. – М.:СИ, 1965. – 400 с.
2. Колесник И.А., Иванова А.П. Колебания рамных конструкций под действием рухомих навантажень // Опір матеріалів та теорія споруд. – 2002. – Вип.. 71. – С. 153 – 166.
3. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. –М.–Л.: Гостехтеориздат. – 1950. – 368 с.
4. Писаренко Г.С. Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. – К.: Наукова думка, 1985. – 240 с.
5. Писаренко Г.С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. – К.: Изд – во АН УССР, 1955. – 237 с.

Матеріал надійшов до редакції 24.09.04.

УДК. 539.3

Соловійов І.Л., канд. техн. наук

КРИТИЧНІ СТАНИ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ З ПЛАТФОРМОЮ ПРИ ПРОСТОМУ І СКЛАДНОМУ ОБЕРТАННЯХ

Велике впровадження оболонкових конструкцій у багатьох галузях промисловості призводить до виникнення проблем щодо їх тривалої й надійної експлуатації. Конструкції роторів турбінних установок сучасних транспортних засобів, як правило, включають тонкостінні пружні тіла. У випадках зміни просторової орієнтації осі обертання ротора, наприклад, при маневруванні літака або корабля, елементи цих тіл знаходяться у стані складного руху, що включає два види обертань і пружні коливання. Гіроскопічні взаємодії між цими видами рухів призводять до виникнення сил інерції дуже складної структури, під дією яких у пружному тілі породжуються поля додаткових статичних і динамічних напружень. Проте особливу небезпеку для пружних тіл можуть мати критичні стани обертання, пов'язані з втратою стійкості їхньої пружної рівноваги [1-3, 5-8, 11-12] або переходом у режим резонансних прецесійних коливань [1, 4, 5, 10-12]. Для встановлення загальних закономірностей появи критичних станів доцільно розглянути особливості статичної і динамічної поведінки еквівалентних твердих тіл. З цією метою проведемо аналіз власних коливань і стійкості жорстких оболонок шарнірно, пружно або жорстко з'єднаних з носієм, який обертається. Вивчимо випадки їх простого і складного обертань.

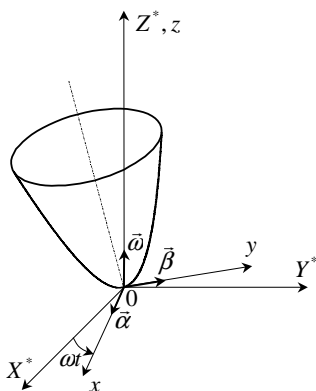


Рис. 1. Розрахункова схема

Дослідження простого і складного обертань жорсткої оболонки проводиться з використанням інерціальної системи координат $OX^*Y^*Z^*$ (рис. 1). Нехай центром своєї меншої основи оболонка приєднана за допомогою пружного шарніра в точці O із основою, що обертається з постійною кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ навколо осі OZ^* . Зв'яжемо з основою систему координат $Oxyz$ з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, так щоб вісь Oz співпала з віссю OZ^* . Припустимо, що тіло може

повертатися щодо осей Ox і Oy на малі кути $\vec{\alpha}$ і $\vec{\beta}$, але не може повертатися в системі $Oxyz$ щодо осі Oz . У вихідному стані вісь кругової симетрії тіла збігається з віссю Oz і $\vec{\alpha} = 0$, $\vec{\beta} = 0$.

Розглянемо обумовлені кутами α і β малі вільні коливання і стійкість рівноваги тіла в системі координат $Oxyz$. При повороті на ці кути на тіло діє пружний момент $\vec{M}^{np} = M_x^{np}\vec{i} + M_y^{np}\vec{j}$, компоненти якого обчислюються за формулами

$$M_x^{np} = -k\alpha, \quad M_y^{np} = -k\beta, \quad (1)$$

де k - коефіцієнт пружності.

Крім цього моменту при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ на тіло діє момент сил інерції $\vec{M}^{in} = M_x^{in}\vec{i} + M_y^{in}\vec{j}$. Відповідно до принципу Даламбера

$$\vec{M}^{in} + \vec{M}^{np} = 0. \quad (2)$$

Для обчислення \vec{M}^{in} виділимо в тілі малий елемент масою Δm і підрахуємо діючу на нього силу інерції $\Delta\vec{p} = -\Delta m \cdot \vec{a}$, де \vec{a} - абсолютне прискорення елемента, що підраховується в системі $Oxyz$ за формулою [9]

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c, \quad \vec{a}^e = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}), \quad \vec{a}^r = d^2\vec{\rho}/dt^2, \quad \vec{a}^c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}^r, \quad (3)$$

де $\vec{\rho} = (x + z\beta)\vec{i} + (y - z\alpha)\vec{j} + (z + y\alpha - x\beta)\vec{k}$ - радіус-вектор елемента, $\vec{v}^r = d\vec{\rho}/dt$ - відносна швидкість в збуреному стані при малих α і β .

Після виконання відповідних операцій у (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \vec{v}^r &= z\dot{\beta}\vec{i} - z\dot{\alpha}\vec{j} + (y\dot{\alpha} - x\dot{\beta})\vec{k}, \quad \vec{a}^e = -\omega^2(x + z\beta)\vec{i} - \omega^2(y - z\alpha)\vec{j}, \\ \vec{a}^r &= z\ddot{\beta}\vec{i} - z\ddot{\alpha}\vec{j} + (y\ddot{\alpha} - x\ddot{\beta})\vec{k}, \quad \vec{a}^c = 2\omega z\dot{\alpha}\vec{i} + 2\omega z\dot{\beta}\vec{j}. \end{aligned} \quad (4)$$

За допомогою цих рівностей обчислимо складові моменту сил інерції

$$\begin{aligned} M_x^{in} &= \gamma \iiint_{(V)} (-z\ddot{\alpha} + 2\omega z\dot{\beta} - \omega^2 y + \omega^2 z\alpha)(z + y\alpha - x\beta) dx dy dz - \\ &\quad - \gamma \iiint_{(V)} (y\ddot{\alpha} - x\ddot{\beta})(y - z\alpha) dx dy dz, \end{aligned}$$

$$M_y^{in} = -\gamma \iiint_{(V)} (z\ddot{\beta} + 2\omega z\dot{\alpha} - \omega^2 x - \omega^2 z\beta)(z + y\alpha - x\beta) dx dy dz + \quad (5)$$

$$+ \gamma \iiint_{(V)} (y\ddot{\alpha} - x\ddot{\beta})(x + z\beta) dx dy dz.$$

Тут γ - густина матеріалу тіла; інтегрування виконується по об'єму тіла V .

Нехтуючи в (5) добутками малих величин і виконуючи операції інтегрування, отримаємо

$$M_x^{in} = (-\ddot{\alpha} + 2\omega\dot{\beta} + \omega^2\alpha)(I_0 - I_z) - (\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha)(I_0 - I_x), \quad (6)$$

$$M_y^{in} = (-\ddot{\beta} - 2\omega\dot{\alpha} + \omega^2\beta)(I_0 - I_z) - (\ddot{\beta} + \omega^2\beta)(I_0 - I_x).$$

З (2), (6) одержимо рівняння вільних коливань тіла в обертовій системі координат

$$I_x\ddot{\alpha} - 2\omega(I_0 - I_z)\dot{\beta} + [\omega^2(I_z - I_x) + k]\alpha = 0, \quad (7)$$

$$I_x\ddot{\beta} + 2\omega(I_0 - I_z)\dot{\alpha} + [\omega^2(I_z - I_x) + k]\beta = 0.$$

За їх допомогою можна досліджувати стійкість стану динамічної рівноваги $\alpha = \beta = 0$ і знаходити частоти і форми вільних коливань. У першому випадку $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$, $\ddot{\alpha} = \ddot{\beta} = 0$ і умова стійкості полягає в позитивності коефіцієнтів $[\omega^2(I_z - I_x) + k]$ при α і β . Тоді критичний стан настає при

$$\omega^2(I_z - I_x) + k = 0 \quad (8)$$

і критичне значення кутової швидкості дорівнює

$$\omega_{кр} = \pm \sqrt{-k/(I_z - I_x)}. \quad (9)$$

Ця рівність свідчить, що при $I_z - I_x > 0$ розглянутий гіроскоп взагалі стійкості не втрачає і для того, щоб він міг втратити стійкість при деякому ω , необхідно виконання умови $I_x > I_z$. Важливо відзначити також, що якщо $k=0$, то гіроскоп стійкий при $I_z > I_x$ і нестійкий при $I_z < I_x$ незалежно від значення ω .

Особливість вільних коливань, що описуються рівняннями (7), пов'язана з наявністю в них гіроскопічних членів. Тому вони допускають розв'язок у формі прецесійних рухів

$$\alpha = A \sin ct, \quad \beta = B \cos ct. \quad (10)$$

Розглянемо спочатку випадок $A=B$. Тоді

$$c_{1,2} = \omega(I_0 - I_z)/I_x \pm \sqrt{\omega^2(I_0 - I_x)^2/I_x^2 + k/I_x}. \quad (11)$$

Якщо $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, то відповідно до (10) вісь гіроскопа рухається в обертовій системі координат з обома частотами по конічній поверхні проти напрямку обертання (обернена регулярна кругова прецесія). Коли одна з частот приймає від'ємне значення, то їй відповідає рух (10) у формі прямої регулярної кругової прецесії.

При $k=0$ із рівності (11) одержимо

$$c_1 = \omega, \quad c_2 = \omega(I_x - I_z)/I_x. \quad (12)$$

Звернемося тепер до випадку $A = -B$. Тоді

$$c_{1,2} = -\omega(I_0 - I_z)/I_x \pm \sqrt{\omega^2(I_0 - I_x)^2/I_x^2 + k/I_x}. \quad (13)$$

$$\text{Якщо } k=0: \quad c_1 = -\omega, \quad c_2 = -\omega(I_x - I_z)/I_x, \quad (14)$$

і знову для $I_x > I_z$ має місце обернена прецесія по обох частотах, а для $I_x < I_z$ по частоті c_2 реалізується пряма прецесія.

Значення ω за яких ці криві перетинають вісь ординат, є критичними, оскільки при них стани статичної рівноваги тіла в обертовій системі координат стають нестійкими. Дійсно, прирівнюючи до нуля праву частину рівності (12), отримаємо, що частоти дорівнюють нулю при

$$\omega = \pm \sqrt{-k/(I_z - I_x)}, \quad (15)$$

що збігається з умовою (9).

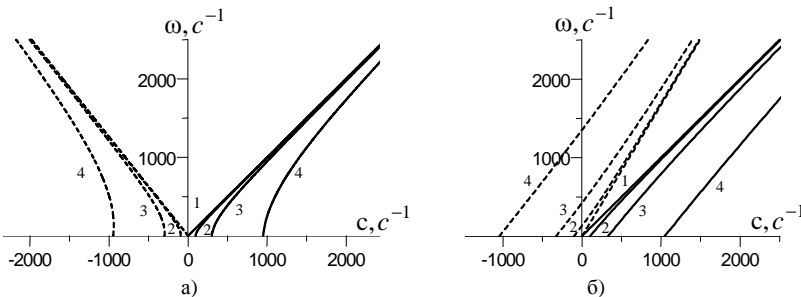


Рис. 2. Залежність частоти власних коливань оболонки від кутової швидкості.

На рис. 2 для різних значень k показані залежності (11) частот c_1 (пунктирні криві) і c_2 (безперервні криві) від ω для тонкостінних конічних тіл товщиною $h=1$ мм, густиною $\gamma=7800$ кг/м³, із довжиною твірної $L=0,6$ м і діаметром меншої основи $d=0,1$ м, що вимірюється по серединній поверхні. Криві пронумеровані в порядку збільшення коефіцієнта k для значень $k=0, 10^4, 10^5, 10^6$ Нм. Можна зауважити, що при $k=0$ залежності $c_i(\omega)$ прямолінійні, із збільшенням k їхні скривлення стають більш помітними. Рис. 2,а відповідає тілу з кутом розкриття $2\alpha=150^\circ$ ($I_z > I_x$), рис.2,б - тілу з кутом розкриття $2\alpha=30^\circ$ ($I_z < I_x$).

Розглянемо тепер випадок складного обертання тіла. Прийmemo, що вісь Oz обертової системи координат $Oxuz$, із якою зв'язане тіло, робить додатковий примусовий поворот із постійною швидкістю $\omega_0 \ll \omega$ у площині X^*OZ^* . Введемо систему координат $OXYZ$, нерухома вісь OY якої збігається з віссю OY^* , а вісь OZ , що повертається, - із віссю Oz . В результаті взаємодії двох обертальних рухів на тіло буде діяти гіроскопічний момент $\vec{M}^{zip} = I_z \vec{\omega} \times \vec{\omega}_0$, що залишається сталим у системі $OXYZ$ і представляється обертовим із кутовою швидкістю $-\omega$ у системі $Oxuz$. Тому в цій системі він має компоненти

$$M_x^{zip} = -I_z \omega \omega_0 \cos \omega t, \quad M_y^{zip} = I_z \omega \omega_0 \sin \omega t, \quad M_z^{zip} = 0. \quad (16)$$

Підставляючи моменти M_x^{zip} , M_y^{zip} в праві частини рівнянь (7), одержимо

$$\begin{aligned} I_x \ddot{\alpha} - 2\omega(I_0 - I_z)\dot{\beta} + [\omega^2(I_z - I_x) + k] \alpha &= -I_z \omega \omega_0 \cos \omega t, \\ I_x \ddot{\beta} + 2\omega(I_0 - I_z)\dot{\alpha} + [\omega^2(I_z - I_x) + k] \beta &= I_z \omega \omega_0 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (17)$$

Розв'язок цієї системи має вид

$$\alpha = (-I_z \omega \omega_0 / k) \cos \omega t, \quad \beta = (I_z \omega \omega_0 / k) \sin \omega t. \quad (18)$$

Він свідчить про те, що в системі координат $Oxuz$ тіло робить рух у формі оберненої прецесії з кутовою швидкістю ω , але оскільки сама система обертається зі швидкістю ω то в системі $OXYZ$ цей рух представляється у формі стаціонарного стану, у якому вісь Oz залишається відхиленою на кут $I_z \omega \omega_0 / k$ у площині YOZ . При цьому критичні стани рівноваги в системі $OXYZ$, яка повертається, або

резонансні прецесійні коливання (18) в системі *Охуз*, яка обертається, не виникають, оскільки кругова частота ω моментів (16) ніколи не стає рівною власним частотам (11).

Методика дослідження пружного деформування тонких оболонок, що обертаються, без обраховування можливого повороту на кути α і β у пружних опорах викладена в [1, 2, 4-6, 10-12]. Вона заснована на використанні рівнянь динаміки оболонок у загальному виді

$$\nabla_{\alpha} \bar{\Gamma}^{\alpha} + \bar{p} = 0, \quad \nabla_{\alpha} \bar{M}^{\alpha} + (e_{\alpha} \times \bar{\Gamma}^{\alpha}) \sqrt{a_{11} a_{22}} = 0, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (19)$$

записаних у криволінійній ортогональній системі координат $ox^1x^2x^3$ з базисними векторами \bar{e}_{α} на поверхні.

У загальному випадку прискорення підраховується по формулах (3), (4), у яких вектори $\bar{\omega}$, \bar{v}^r , \bar{p} повинні бути представлені з урахуванням усіх видів пружних рухів оболонки і її повороту на кути α , β . Для цього прискорення \bar{a}^e , \bar{a}^r , \bar{a}^c (4), підраховані для абсолютно твердої оболонки в базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, представимо в локальному базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ пружної оболонки

$$a^1 = \left[\left(-z \sin x^2 \sin \varphi + r \sin x^2 \cos \varphi \right) \ddot{\alpha} + \left(z \cos x^2 \sin \varphi - r \cos x^2 \cos \varphi \right) \ddot{\beta} + \right. \\ \left. + 2\omega z \cos x^2 \sin \varphi \dot{\alpha} + 2\omega z \sin x^2 \sin \varphi \dot{\beta} + \omega^2 z \sin x^2 \sin \varphi \alpha - \right. \\ \left. - \omega^2 z \cos x^2 \sin \varphi \beta \right] / \sqrt{a_{11}},$$

$$a^2 = \left(-z \cos x^2 \ddot{\alpha} - z \sin x^2 \ddot{\beta} - 2\omega z \sin x^2 \dot{\alpha} + 2\omega z \cos x^2 \dot{\beta} + \right. \\ \left. + \omega^2 z \cos x^2 \alpha + \omega^2 z \sin x^2 \beta \right) / \sqrt{a_{22}},$$

$$a^3 = \left(z \sin x^2 \cos \varphi + r \sin x^2 \sin \varphi \right) \ddot{\alpha} + \left(-z \cos x^2 \cos \varphi - r \cos x^2 \sin \varphi \right) \ddot{\beta} - \\ - 2\omega z \cos x^2 \cos \varphi \dot{\alpha} - 2\omega z \sin x^2 \cos \varphi \dot{\beta} - \omega^2 z \sin x^2 \cos \varphi \alpha + \\ + \omega^2 z \cos x^2 \cos \varphi \beta$$

і складемо їх з відповідними контраваріантними компонентами прискорень пружної оболонки при складному обертанні [1, 4-5, 10-12].

Лінеаризуємо рівняння (19) в околі стану простого обертання із кутовою швидкістю ω . При цьому врахуємо, що оболонка попередньо напружена мембранними силами T^{11}, T^{22} ; радіус r , кут φ і параметри другої квадратичної форми b_{ii} одержують збільшення Δr , $\Delta \varphi = \Delta \vartheta_1$, Δb_{ii}

відповідно, а деформації ε_{ij} визначаються нелінійними співвідношеннями [1-6, 10-12].

До рівнянь теорії оболонок додаються додаткові рівняння на краю $x^1 = 0$

$$\bar{M}_{o\bar{o}}^{np} + \bar{M}^{np} = 0 \quad \text{або} \quad \bar{M}_{o\bar{o}}^{np} - k(\alpha \bar{i} + \beta \bar{j}) = 0, \quad (21)$$

де $\bar{M}_{o\bar{o}}^{np}$ - результуючий момент внутрішніх пружних сил в оболонці на краю $x^1 = 0$.

Для аналізу загальних закономірностей виникнення критичних станів конічних оболонок, які обертаються, побудовані діаграми залежності частот їхніх вільних коливань від кутової швидкості ω для двох оболонок, геометричні й інерційні властивості яких збігаються з властивостями абсолютно твердих оболонок, розглянутих вище.

На рис. 3,а для різних значень k показано характер зміни частот c від ω для випадку $I_z > I_x$, на рис.3,б для випадку $I_z < I_x$ при $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$. Для відповідної абсолютно твердої оболонки така діаграма показана на рис.2,а ($I_z > I_x$), та рис.2,б ($I_z < I_x$). На відміну від твердого тіла пружна оболонка характеризується тим, що вона може коливатися навіть при її жорсткому закріпленні до платформи, що обертається.

На рис.3 жирними безперервними лініями показана залежність c від ω для випадку жорсткого закріплення пружних оболонок до платформи ($k = \infty$), тонкими безперервними лініями показані частотні криві для пружних оболонок із пружним закріпленням до платформи при значеннях $k = 10^4, 10^5$ Нм (рис.3,а), та для $k = 10^4, 10^5, 10^6$ Нм (рис. 3,б).

Для кривої, яка відповідає жорсткому закріпленню оболонки до платформи, встановлені значення $\omega_{кр} = 1660,3 c^{-1}$ (перетин з віссю ординат) і $\omega_{рез} = 1011,2 c^{-1}$ (перетин з променем $\omega = c$) критичних станів оболонки при простому і складному обертаннях (рис. 3,а), та $\omega_{кр} = 1063,9 c^{-1}$, $\omega_{рез} = 2627,1 c^{-1}$ (рис. 3,б). Обчислення показали, що незалежно від k усі криві перетинають промінь при тому самому значенні.

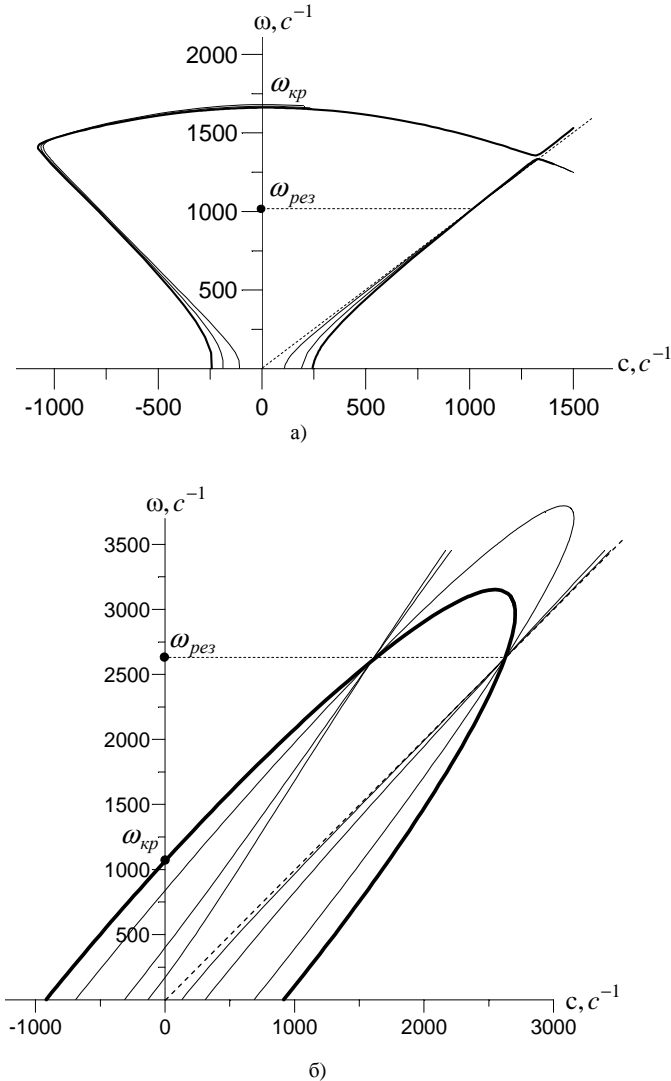


Рис. 3. Залежність частоти власних коливань оболонки від кутової швидкості.

Цей факт свідчить про те, що при складному обертанні резонансне значення кутової швидкості ω не залежить від пружної піддатливості приєднання оболонки до платформи.

1. Белова М.А., Гуляев В.И., Соловьев И.Л. Статические и динамические критические состояния параболических оболочек при простом и сложном вращениях. // *Механика твердого тела.* – 2004. – № 3. – С. 152-163.
2. Гайдайчук В.В., Соловйов І.Л., Белова М.О. Стійкість стаціонарного обертання тонких сферичних оболонок. // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2001, вип. 69. – С. 25-30.
3. Григоренко Я.М., Гуляев В.И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор). // *Прикладная механика.* – 1991. – 27, № 10. – С. 3–23.
4. Гуляев В.И., Гром А.А., Снежко Н.А. Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // *Механика твердого тела.* – 1999. № 2. – С. 156-163.
5. Гуляев В.И., Соловьев И.Л., Белова М.А. О связи критических состояний конических оболочек при простом и сложном вращениях с частотами собственных прецессионных колебаний. // *Проблемы прочности.* – 2004. – № 2. – С. 52-66.
6. Гуляев В.И., Соловьев И.Л., Белова М.А. Устойчивость равновесия стационарного вращения тонких упругих конических оболочек. // *Доповіді НАН України.* – 2001, № 12. – С. 46-51.
7. Егармин Н.Е. О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки. // *Механика твердого тела.* – 1986. – 21, № 3. – С. 142-148.
8. Смирнов А.Л., Товстик П.Е. Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения. // *Современные проблемы механики и авиации.* – М.: Машиностроение, 1982. – С. 280-290.
9. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
10. Gulyayev V.I, Solovjov I.L., Lugovyy P.Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation. // *Journal of Sound and Vibration.* –2001. V. 246., № 3, – pp. 491-504.
11. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Critical states of thin ellipsoidal shells in simple and compound rotations. // *Journal of Sound and Vibration.* – 2004. – Vol. 270. – P. 323-339.
12. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. // *International Journal of Solids and Structures.* – 2004. – Vol. 41. – P. 3565-3583.

Матеріал надійшов до редакції 28.09.04.

УДК 539.3

Соловей М.О. канд. техн. наук
Кривенко О.П.

ВПЛИВ НАГРІВУ НА СТІЙКІСТЬ ГРАНОВАНИХ ПОЛОГИХ СФЕРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Робота є продовженням виконаних за розробленою скінченноелементною методикою [1-3] досліджень стійкості гнучких оболонок різної змінної товщини однакових об'ємів [4-7]. У роботах [4-6] порівнювалась поведінка та несуча спроможність пологих змінної товщини сферичних (гладких і гранованих) оболонок жорстко затиснутих уздовж контуру при дії тиску (рис. 1). В [7] розглянутий вплив попереднього нагріву на стійкість гладких пологих сферичних панелей сталі та лінійно-змінної товщини, що навантажуються рівномірно розподіленим тиском. Особливості впливу попереднього нагріву на стійкість гладких оболонок стимулюють розглядання цієї ж мало вивченої проблеми для гранованих оболонок.

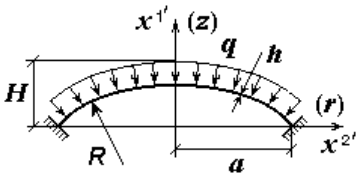


Рис. 1. Сферична панель

Розглядається вплив інтенсивності попереднього нагріву на стійкість гранованих сферичних панелей сталі товщини h . Заміна гладких пологих панелей на грановані, яка застосовується на практиці для спрощення виготовлення оболонок [6], виконана наступним чином. Криволінійна серединна поверхня панелі (рис. 1) замінена на вписану в неї грановану, чверть якої складається з 16 плоских граней, що отримані рівномірним поділом 4×4 вздовж радіуса опорного контуру та по колу (рис. 2).

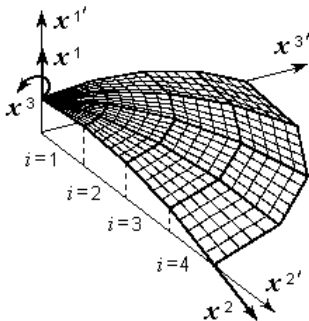


Рис. 2. Скінченноелементна сітка на серединній поверхні гранованої панелі

У виконаних чисельних розрахунках вихідні геометричні та термопружні величини панелей мають ті ж самі чисельні значення, як і у розглянутих в [4-7] прикладах. Це дає можливість

дослідити вплив попереднього нагріву на розглянуті грановані оболонки. Прийняті наступні вихідні величини: стріла підйому $H=0.05$ м, радіус серединної поверхні $R=10.025$ м, радіус опорного контуру $a=1$ м, характерна товщина $h^* = 0.01$ м, модуль пружності (для сталі) $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$, коефіцієнт лінійного теплового розширення $\alpha = 0.125 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$. Властивості матеріалу вважаються сталими та незалежними від температури, бо для розглянутих сталевих оболонок температура нагрівання не виходила за допустимі межі ($-10^\circ\text{C} \div +100^\circ\text{C}$ [8]).

Дослідження збіжності показали, що для моделювання однієї плоскої грані достатньо є сітка 5×5 скінчених елементів (СЕ), а для всієї розрахункової моделі (чверть панелі) - 20×20 СЕ.

Дія на сталеву оболонку нагріву та тиску розглядається як спільний процес навантаження, що виконується за два етапи:

1) На першому етапі оболонка нагрівається рівномірно по об'єму на T градусів. Цей процес, що супроводжується нелінійним деформуванням, може розглядатись як попереднє збурення напружено-деформованого стану оболонки, яке позначається на формах її деформування та втрати стійкості при подальшому силовому навантаженні.

2) На другому етапі оболонка навантажується тиском інтенсивністю q при незмінному (зафіксованому) температурному полі, в результаті чого вона може втратити стійкість.

Дослідження проводились при порівнянні трьох пар гладких і гранованих оболонок сталої товщини h (0.010 м, 0.013 м, 0.020 м) при чотирьох варіантах рівномірного нагріву на $T^\circ\text{C}$ (-10° , 0° , 20° , 100°). Результати і аналіз розрахунків представлені на рис. 3, рис. 4 та в табл. 1 - табл. 3. На рис. 3 результати розрахунків усіх панелей (з табл. 1) зображені у відносному вигляді. Критичні навантаження (верхнє \tilde{q}_{kp}^6 та нижнє \tilde{q}_{kp}^h) представлені на осі \tilde{q}_{kp} як доля від верхнього критичного навантаження $q_{kp}^6(h^*)$ гладкої оболонки сталої товщини h^* , а об'єми \tilde{V} - у долях об'єму цієї ж оболонки $V(h^*)$

$$\tilde{q}_{kp} = q_{kp} / q_{kp}^6(h^*), \quad \tilde{V} = V / V(h^*).$$

Величини критичних навантажень і відповідних прогинів центра для гладких і гранованих оболонок при різних інтенсивностях попереднього нагріву

$T, ^\circ\text{C}$	$q_{кр}, \text{МПа}$ $u_{кр}^I, \text{м}$	$h, \text{м}$					
		0.010		0.013		0.020	
		Гладка	Грано-вана	Гладка	Грано-вана	Гладка	Грано-вана
		$V \times 10^5, \text{м}^3$	$V \times 10^5, \text{м}^3$	$V \times 10^5, \text{м}^3$	$V \times 10^5, \text{м}^3$	$V \times 10^5, \text{м}^3$	$V \times 10^5, \text{м}^3$
		3146	3069	4196	4094	6274	6119
-10	$q_{кр}^e$	0.1870	0.2024	0.2267	0.2381	0.4788	0.5056
	$q_{кр}^н$	0.0517	0.0554	0.1148	0.1222	0.3736	0.3958
	$u_{кр}^{Ie}$	-1.0030	-0,9794	-1,4280	-1,4680	2,1900	2,2460
	$u_{кр}^{In}$	-6.9630	-6.9480	-6.4930	-6.4300	-5.7620	-5.7110
0	$q_{кр}^e$	0.2261	0.2365	0.2668	0.2748	0.5375	0.5652
	$q_{кр}^н$	0.0556	0.0597	0.1212	0.1289	0.3901	0.4107
	$u_{кр}^{Ie}$	-0.6770	-0.6930	-1.1507	-1.1633	-1.9428	-2.0781
	$u_{кр}^{In}$	-7.2451	-7.1818	-6.8383	-6.7671	-6.0353	-6.0413
20	$q_{кр}^e$	0.2826	0.3032	0,3266	0,3451	0.6629	0.6958
	$q_{кр}^н$	0.0640	0.0681	0.1351	0.1428	0.4158	0.4389
	$u_{кр}^{Ie}$	-0.1882	-0.1675	-0.7690	-0.7068	-1.5560	-1.5350
	$u_{кр}^{In}$	-7.7400	-7.6590	-7.2680	-7.2580	-6.4770	-6.4180
100	$q_{кр}^e$	0.1817	0.1930	0.4338	0.4609	1.2053	1.3630
	$q_{кр}^н$	0.1010	0.1057	0.1960	0.2057	0.5328	0.5458
	$u_{кр}^{Ie}$	0.6449	0.6091	0.4949	0.5353	-0.1677	-0.1238
	$u_{кр}^{In}$	-9.0390	-9.1040	-8.7310	-8.7100	-7.9591	-7.9940

Таблиця 2

Оцінка впливу інтенсивностей попередніх нагрівів на величини критичних навантажень гранованих панелей (відносно ненагрітих)

$h, \text{ м}$	$\Delta(q_{кр}^e), \%$			$\Delta(q_{кр}^H), \%$		
	-10° C	20° C	100° C	-10° C	20° C	100° C
0.010	-14.4	28.2	-18.4	-7.2	14.1	77.0
0.013	-13.4	25.6	67.7	-5.2	10.8	59.6
0.020	-10.5	23.1	141.1	-3.6	6.9	32.9

Таблиця 3

Різниця критичних навантажень, прогинів центра й об'ємів гранованих і гладких оболонок однакової товщини (відносно гладких)

$h, \text{ м}$	$\Delta(V), \%$	$\Delta(q_{кр}^e), \%; \Delta(u_{кр}^{I^e}), \%$				$\Delta(q_{кр}^H), \%; \Delta(u_{кр}^{I^H}), \%$			
		-10° C	0° C	20° C	100° C	-10° C	0° C	20° C	100° C
0.010	-2.45	8.2	4.6	7.3	6.2	7.2	7.4	6.4	4.6
		-2.4	2.4	-11.0	-5.5	-0.2	-0.9	-1.0	0.7
0.013	-2.43	5.0	3.0	5.7	6.2	6.4	6.3	5.7	4.9
		2.8	1.1	-8.1	8.2	-1.0	-1.0	-0.1	-0.2
0.020	-2.47	5.6	5.2	5.0	13.1	5.9	5.9	5.5	2.4
		2.6	7.0	-1.3	-18.3	-0.9	0.1	-0.9	0.5

Величина інтенсивності попереднього нагріву неоднаково впливає на втрату стійкості гранованих оболонок різної товщини (табл. 2). Охолодження панелей на 10° C призводить до появи стискуючих напружень і тому природнім є падіння (у порівнянні з ненагрітими) величин верхнього (на 10.5% - 14.4%) та нижнього (на 3.6% - 7.2%) критичних навантажень (рис. 3,а).

Нагрів відносно тонкої ($h=0.01\text{ м}$) гранованої оболонки на 20° C призводить до підвищення $q_{кр}^e$ на 28.2%. Більш інтенсивний нагрів на 100° C викликає, як і в випадку гладкої оболонки такої ж товщини [7], зворотній ефект - падіння $q_{кр}^e$ на 18.4%. Виявлена нелінійна залежність зміни $q_{кр}^e$ при зміні інтенсивності попереднього нагріву пояснюється (як і у випадку гладких панелей) еволюцією відповідних форм деформування та втрати стійкості (рис. 8, рис. 12 в [7]).

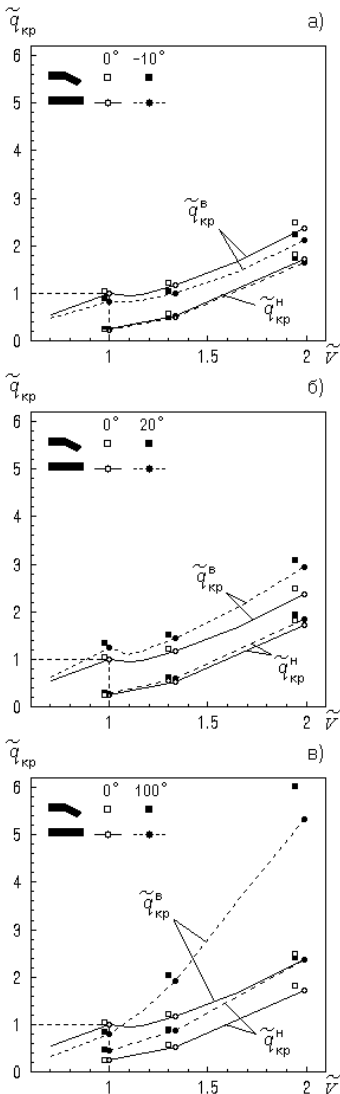


Рис. 3. Залежності " $\tilde{q}_{кр} - \tilde{V}$ " для гранованих і гладких панелей при попередньому нагріві

Для більш товстих гранованих оболонок ($h=0.013\text{м}$, $h=0.020\text{м}$) підвищення інтенсивності попереднього нагріву веде до послідовного

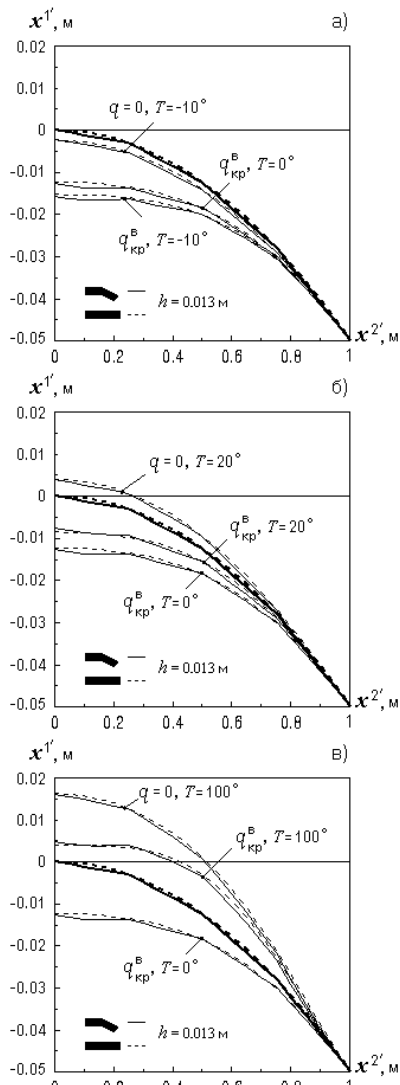


Рис. 4. Форми деформування та втрати стійкості гранованою і гладкою панелями сталой товщини ($\tilde{V} = 1.334$)

зростання величин верхнього та нижнього критичних навантажень. Так нагрів на 20°C збільшує $q_{кр}^{\epsilon}$ відповідно в 1.25 і 1.23 рази, а нагрів на 100°C - в 1.67 і 2.41 рази (рис. 3,б та рис. 3,в).

Розглядаючи вплив попереднього нагріву на несучу спроможність гранованих і гладких оболонок, можна сказати наступне. При заміні гладких панелей на грановані об'єми останніх зменшуються (незалежно від товщин панелей) на 2.5% (табл. 1, табл. 3). При цьому для усіх розглянутих прикладів відбувається тільки збільшення критичних навантажень: верхніх - у межах 3% - 13.1%, нижніх - у межах 2.4 % - 7.4%.

Для гранованих і гладких панелей форми нелінійного деформування та форми втрати стійкості практично не розрізняються, як це видно на прикладі оболонок товщиною $h=0.013$ м при різних величинах попередніх нагрівів (рис. 4,а,б,в, де вихідна форма панелей зображена жирними лініями). Співпадіння форм деформування, очевидно, пояснюється пологістю розглянутих панелей.

Таким чином, в проведених дослідженнях виявлений суттєвий вплив попереднього нагріву на несучу спроможність пологих гранованих панелей при дії тиску. Доцільність використання на практиці пологих гранованих панелей доводиться їх порівнянням з гладкими тієї ж товщини: при спрощенні виготовлення маємо, хоч і незначне, але підвищення несучої спроможності конструкції.

1. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатошарових оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА, 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
2. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П., Аят Н.* Стійкість гнучких оболонок в умовах складного термосилового навантаження // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА, 1999. - Вип. 65. - С. 75-90.
3. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
4. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Вплив змінної товщини на стійкість пологих панелей при дії рівномірного тиску // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Збірник наукових праць. - Випуск 4(27).- Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2003. - С. 15-20.
5. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
6. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2003 р. - Вип. 72. - С. 83-96.

7. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість гладких пологих сферичних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2004 р. - Вип. 74.
8. *Металлические конструкции. В 3-х томах. Т 1. Элементы стальных конструкций: Учеб. пособие для строит. вузов / В.В.Горев, Б.Ю.Уваров, В.В. Филиппов и др.; Под ред. В.В.Горева.* - М.: Высш. школа, 1997. - 527 с.

Матеріал надійшов до редакції 01.10.04.

УДК 539.3

Цихановський В.К., д-р техн. наук,
Прусов Д.Е., канд. техн. наук.

МЕТОД СКИНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕОДНОРІДНОГО ПІВПРОСТОРУ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ І ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

В останній час у зв'язку з розробкою загальних алгоритмів розв'язання задач теорії пружності, пластичності і повзучості та ефективних чисельних методів їх комп'ютерної реалізації, перспектива визначення напружено-деформованого стану (НДС) в неоднорідних та анізотропних матеріальних середовищах була значно розширена. Однак великі труднощі і досі викликає практичне застосування тих чи інших математичних моделей та методів щодо розрахунку реальних об'єктів. Розв'язання задач визначення НДС з позицій механіки деформівного твердого тіла та побудови розрахункових областей, від теорії побудови універсальних розрахункових моделей для ґрунтових масивів та елементів конструкцій і до алгоритмів та програм їх чисельної реалізації, є надзвичайно актуальною задачею.

Лесовидні ґрунти, які при зволоженні є прикладом геометрично та фізично неоднорідної ґрунтової основи, займають більше 70% території України. Відмінна їх особливість полягає у тому, що в напруженому стані під дією зовнішнього навантаження чи власної ваги конструкцій і ґрунту при замочуванні вони дають додаткові осідання та можуть знижувати свою міцність [1,2,3].

Основними признаками лесових ґрунтів, що відрізняються від інших різновидів ґрунтів, які мають з ними близькі фізико-механічні характеристики, являються: пілуватий гранулометричний склад, недоущільненість, наявність макропор, вертикальних каналців, що покриті зовні нальотом вуглекислих солей, вапна, гіпсу або інших цементуючих матеріалів, вміст останків рослин, швидке розмочування у воді, велика водопроникненість, максимальний вміст солей в середньому за глибиною, переважна кількість пілуватих фракцій (до 50%) та незначний (до 20%) вміст глинистих часток, однорідність гранулометричного складу [3]. Лесові ґрунти, у переважній більшості, мають глинисті агрегати, що складаються з зерен кварцу, польових шпатів різних розмірів зв'язаних глинистим або іншого складу цементом. При збільшенні вологості лесових ґрунтів порушується рівновага між гравітаційними силами вільної води і капілярним тиском менісків в межах зони зволоження, виникає інфільтрація, ненасичений потік наближається до зон з тонкими плівками води. По мірі заповнення

пор ґрунту водою та стабілізації її витрат розвивається фільтрація, під дією сил тяжіння волога рухається через увесь шаровий простір.

Неводостійкість водно-колоїдних та кристалізаційних зв'язків при зволоженні лесових ґрунтів під навантаженням приводить до руйнування структури та подальшого ущільнення частинок ґрунту. В ґрунтах з неводостійкою структурою для розвитку осадок достатньо зв'язаної та капілярної вологи. При цьому за рахунок миттєвого розклинювання гідрофільних частинок порушуються зв'язки, а згодом – матеріал цементу розчиняється. Таке явище дестабілізації має затяжний характер [3].

Рекомендовані у нормах заходи, що враховують особливості просідаючих ґрунтів, зводяться лише до виконання умови

$$\sigma_{zp} + \sigma_{zg} \leq P_{sc}, \quad (1)$$

де σ_{zp} – вертикальний додатковий тиск у ґрунті від експлуатаційного навантаження; σ_{zg} – вертикальний тиск від власної ваги ґрунту та дорожнього або аеродромного одягу; P_{sc} – мінімальний тиск, при якому починають з'являтися явища просідання ґрунту при його повному водонасиченні.

При невиконанні умови (1) необхідно окрім ущільнення верхнього шару ґрунтової основи передбачати заходи для запобігання явищ додаткового просідання ґрунту: попереднє замочування просідаючої товщі, повну або часткову заміну слабого ґрунту подушками з піску, гравію, щебеню та інших непросідаючих матеріалів.

При проектуванні дорожніх та аеродромних покриттів, а також захисних споруд ґрунтових укосів і насипів, що знаходяться на ділянках з ґрунтовими умовами II типу по просіданню, для покращення властивостей ґрунту передбачається влаштування водовідвідної та дренажної систем, а також гідроізоляційного шару під дорожнім або аеродромним одягом. Але ці заходи на практиці часто бувають малоефективними або недостатніми.

Для розв'язання вищезазначеної проблеми та вдосконалення розрахунку, особливо нежорстких або полегшених жорстких аеродромних покриттів при наявності у ґрунтовій активній товщі вищезгаданих включень і взагалі при неоднорідності ґрунтової основи, пропонується моделювання ґрунтової основи дискретним неоднорідним півпростором при урахуванні для дискретно-локальних зон рівнянь стану для анізотропного матеріалу, еквівалентного реальному лесовому ґрунту. Враховуючи необхідність урахування додаткових просадок ґрунтової основи під дією експлуатаційного навантаження, що складається з лесових ґрунтів, при постановці задачі дослідження напружено-деформованого стану тривимірного неоднорідного півпростору необхідно враховувати геометричну і фізичну нелінійність. Побудову дискретної моделі тривимірного півпростору пропонується здійснити з використанням методу скін-

ченних елементів на базі модифікованої моментної схеми скінченних елементів [4,5].

Моментна схема методу скінченних елементів (МССЕ) використовує апроксимації функцій переміщень, деформацій і напружень на основі тензорних рядів [6]. Ефективність такого підходу при використанні МССЕ зумовлена, перш за все, об'єднанням переваг двох найбільш ефективних чисельних методів — проекційного і варіаційного, а також інваріантністю тензорних рядів по відношенню до будь-яких довільних криволінійних систем координат. У МССЕ виключення відомого у теорії МСЕ негативного явища некоректного врахування жорстких зміщень на елементарному рівні досягається відкиданням старших членів розкладання функцій деформацій, що описують повороти і зсуви. З точки зору теорії МСЕ це відповідає мінімізації других інваріантів функції деформації.

Розглянемо шестигранний криволінійний скінченний елемент (СЕ), віднесений до локальних криволінійних координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 (рис. 1).

Відповідно вектори основного і взаємного базисів в елементарних околах скінченних елементів визначаються через радіус-вектор $\vec{r}_{(e)}$ (у точці М):

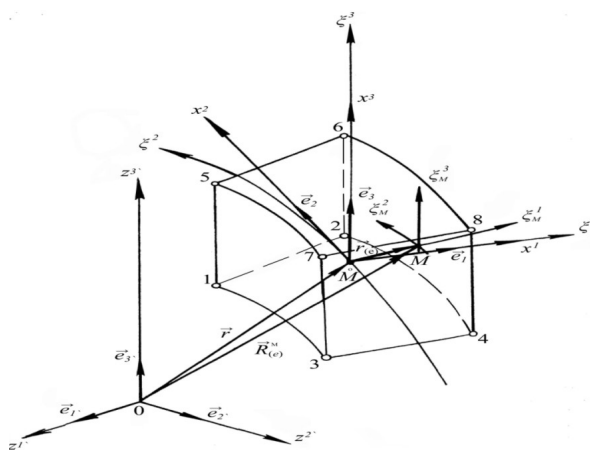


Рис. 1. Шестигранний криволінійний СЕ в локальних криволінійних координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

$$\bar{e}_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{\partial \vec{R}_{(e)}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial(\vec{r} + \vec{r}_{(e)})}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}_{(e)}}{\partial \xi^i}. \quad (2)$$

Одночасно з криволінійними координатами ξ^i точкам скінченного елемента (підобласті $r_{(e)}$) можна поставити у відповідність прямолінійні координати x^1, x^2, x^3 (рис. 1), початок яких співпадає з початком ξ^1, ξ^2, ξ^3 , в яких масштабні вектори $\bar{e}_i(0,0,0)$ як частковий випадок для центра СЕ. Враховуємо, що координати ξ^i і x^i зв'язані між собою взає-

мно однозначними достатньо гладкими функціями, а радіус-вектор $\vec{r}_{(e)}$ визначається відповідно початку координат

$$\vec{r}_{(e)} = x_{(e)}^m \vec{e}_m; \quad x_{(e)}^m = x_{(e)}^n (\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (3)$$

Вектор переміщень \vec{u} в області $r_{(e)}$ наведемо розкладанням у тензорний ряд Маклорена з утриманням чотирьох членів ряду:

$$\begin{aligned} \vec{u} = & \vec{u}_{(0)} + \vec{r}_{(e)} \cdot \nabla \vec{u} \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \vec{r}_{(e)} \vec{r}_{(e)} \times \\ & \times \nabla \nabla \vec{u} \Big|_{(0)} + \frac{1}{6} \vec{r}_{(e)} \vec{r}_{(e)} \vec{r}_{(e)} \cdots \nabla \nabla \nabla \vec{u} \Big|_{(0)} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

У скалярному вигляді відносно системи координат x^i ряд (4) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} u = & u^0_i + x^n \nabla_n u_i^0 + \frac{1}{2} x^m x^n \nabla_m \nabla_n u_i^0 + \\ & + \frac{1}{6} \nabla_l \nabla_m \nabla_n u_i^0 x^l x^m x^n + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

де коваріантні похідні у загальному випадку обчислюються як складні функції відносно координат x^i у відповідності з (3). Тобто у початку координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 маємо:

$$\begin{aligned} \nabla_i u_j^0 = & \frac{\nabla \varphi_i}{\partial x^i} \Big|_{(0)} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial \xi^s} \cdot \frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} \right) \Big|_{(0)}; \\ \nabla_m \nabla_i u_j^0 = & \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^m \partial x^i} \Big|_{(0)} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^n} \left(\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \xi^s} \right) \frac{\partial \xi^n}{\partial x^m} \right) \Big|_{(0)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналіз чисельних дослідів [4,5] виявив, що розкладення функцій переміщення у ряди Маклорена (4) відносно локальних криволінійних ξ^i і прямолінійних x^i координат при однаковій кількості утримуваних членів ряду має однаковий порядок апроксимації. При цьому коефіцієнти ряду (5), як коваріантні похідні від вектора переміщень, які є похідними по прямолінійним координатам (у початку координат), взаємно однозначно визначаються як похідні по криволінійним координатам за формулою(6). Це дозволяє розглядати для кри-

волінійних координат СЕ переміщення безпосередньо як функції x^i і відповідно глобальних координат z^i , що суттєво спрощує співвідношення, тобто при використанні метрики у центрі СЕ. При чисельному інтегруванні у локальній області $r_{(e)}$ всі співвідношення інтегрування утримуються у координатах ξ^i .

Використовуючи прямолінійні координати x^i , маємо трансформацію криволінійного шестигранника у вигляді косокутового паралелепіпеда (рис.2) і, як правило, при виводі матриць жорсткості для СЕ, місцеві вісі яких не співпадають з глобальними, звичайно використовують функції переміщень у глобальних координатах.

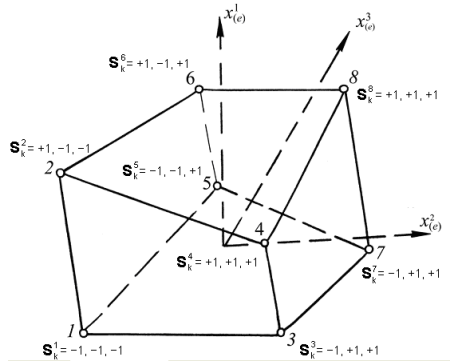


Рис. 2. Шестигранний ізопараметричний СЕ в локальних координатах x^1, x^2, x^3 .

У тривимірному просторі $r_{(e)}$ для ізопараметричного СЕ апроксимуючі функції координат і переміщень у глобальній системі координат можна навести при ідентифікації вузлів СЕ за допомогою умовних лагранжевих координат $S_i = \pm 1$ у вигляді:

$$z^i(x_{(e)}^i) = \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{S_3 \pm 1} \prod_{k=1}^3 \left(S_{(k)} x_{(e)}^{(k)} + \frac{1}{2} \right) z_{S_1 S_2 S_3}^i ; \quad (7)$$

$$u^i(x_{(e)}^i) = \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{S_3 \pm 1} \prod_{k=1}^3 \left(S_{(k)} x_{(e)}^{(k)} + \frac{1}{2} \right) u_{S_1 S_2 S_3}^i ,$$

де $S_{(k)}$ - умовні лагранжеві координати, що дорівнюють +1 або -1 при $x_{(e)}^k$ більше або менше 0 відповідно; $x_{(e)}^k = \pm \frac{1}{2}$ - місцеві нормалізовані коор-

динати СЕ; $z'_{S_1 S_2 S_3} \equiv z'_n$ – вузлові координати СЕ у глобальному базисі;

$u'_{S_1 S_2 S_3} \equiv u'_n$ – вузлові переміщення СЕ у глобальному базисі.

Формули для обчислення компонент розкладень деформацій у ряд Маклорена для прямокутного паралелепіпеда модифікованої МССЕ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \Big|_{(0)} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(0)} x^2 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^3 + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^2 x^3; \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(0)} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(0)} x^1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^3 + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^1 x^3; \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \Big|_{(0)} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^1 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^1 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^2 + \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} \Big|_{(0)} x^1 x^2; \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^3} \right) x^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} x^3 x^3; \\
 \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1} \right) \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^1 \partial x^2} \right) x^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} x^2 x^2; \\
 \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^1 \partial x^2} \right) x^1 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} x^1 x^1.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Підкресленими членами розкладання функцій деформацій у ряд Маклорена запропонована модифікована схема МСЕ відрізняється від стандартної МССЕ [4].

Виходячи з представлень вектора переміщень \bar{u} в області $r_{(e)}$ у вигляді ряду (5), а також з урахуванням повного кубічного поліному апроксимації переміщень [4], умов мінімуму доданку квадратів моментів деформацій допоміжного закону розподілу переміщень у області $r_{(e)}$ і перетворень косокутних місцевих координат полілінійного скінченного елемента у формі криволінійного шестигранника, беремо за основу структуру розкладень деформацій у вигляді (8). Таким чином число членів розкладень функцій деформацій, у тому числі скінченних, для СЕ у вигляді криволінійного шестигранника складає: для ε_{ij} , $i = j$ – чотири члени ряду; для ε_{ij} , $i \neq j$ – три члени ряду.

Запропонована методика одержання основних співвідношень МСЕ більш ефективна, якщо величини визначити у місцевій системі координат

нат, а перетворення до глобальної системи координат виконати після отримання нелінійної матриці реакцій або матриці жорсткості.

Представляючи тензори функцій приростів скінченних деформацій і приростів напружень у тензорний ряд Маклорена в області $r_{(e)}$ з утриманням трьох членів ряду маємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}x_{(e)} &= \mathcal{K}_{(0)} + \bar{r}_{(e)} \cdot \nabla \mathcal{K}_{(0)} + \frac{1}{2} \bar{r}_{(e)} \cdot \nabla \nabla \mathcal{K}_{(0)} \cdot \bar{r}_{(e)}; \\ \mathcal{A}x_{(e)} &= \mathcal{A}_{(0)} + \bar{r}_{(e)} \cdot \nabla \mathcal{A}_{(0)} + \frac{1}{2} \bar{r}_{(e)} \cdot \nabla \nabla \mathcal{A}_{(0)} \cdot \bar{r}_{(e)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Розглянемо варіацію енергії деформації для скінченного елемента області $r_{(e)}$ відносно довільної деформованої конфігурації $C_{(e)}^t$, зумовленої приростами деформацій Коші-Гріна γ_{ij} у довільно близькій конфігурації $C_{(e)}^{t+\Delta t}$ з урахуванням еволюції деформування суцільного середовища:

$$\delta U_{(r_{(e)})} = \int_{r_{(e)}} \sigma^{*ij} \delta \gamma_{ij} dU_{(e)}, \quad (10)$$

де $\sigma^{*ij} = \sigma^{1ij} + \sigma^{ij}$ – повний другий симетричний тензор напружень Піола-Кірхгофа, що визначається відносно невикривленої конфігурації $C_{(e)}^{t=0}$. Виконаємо інтегрування у криволінійному СЕ, коли переміщення віднесені до прямокутних косокутних координат, що співпадають з криволінійною місцевою системою координат у центрі СЕ. При цьому скористаємося одержаними виразами розкладань функції деформації і напружень у ряд Маклорена в області $r_{(e)}$. У відповідності з введеними приростами деформацій і напружень (9) інтегрування здійснюється у межах від $x^i = -1/2$ до $x^i = +1/2$ (рис.2). Після інтегрування маємо:

$$\begin{aligned} \delta U_{(r_{(e)})} &= \sqrt{G} \left(N^{ij} \delta \xi_{ij}^* + \frac{1}{12} M_k^{ij} \delta \varphi_{ij,k}^* \varpi_{(ij)}^{(kk)} + \right. \\ &+ \frac{1}{144} M_{ks}^{ij} \delta_j^i \delta \psi_{ij,ks}^* \varpi_{(sijij)}^{(kksks)} + \frac{1}{12} (-1)^{i+j} N^{ij} \delta \psi_{ij,ks}^* \varpi_{(jijij)}^{(iksk)} + \\ &+ \left. \frac{1}{12} (-1)^{i+j} M_{ks}^{ij} \delta \xi_{ij}^* \varpi_{(jijij)}^{(iksk)} + \frac{1}{80} (-1)^{i+j} M_{ks}^{ij} \delta_j^i \delta \psi_{ij,ks}^* \varpi_{(jijij)}^{(iksk)} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Підкресленими членами у (11) відрізняються вирази варіацій енергії деформацій СЕ для стандартної схеми МССЕ і запропонованої модифікованої. Підставивши у (11) варіації

$$\begin{aligned} \delta \xi_{ij}^* &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1}^* C_j^{k'} \Big|_{(0)} S_i u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} ; \\ \delta \varphi_{ij,k}^* &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1}^* (C_j^{k'} \Big|_{(0)} S_i S_k u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \varpi_{(i)}^{(k)} + \frac{1}{2} C_{j,k}^{k'} S_i u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \varpi_{(j)}^{(k)}); \\ \delta \psi_{ij,ks}^* &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1}^* u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} (C_j^{k'} \Big|_{(0)} S_i S_k S_s u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \varpi_{(ij)}^{(ks)} + \\ &+ \frac{1}{2} C_{j,k}^{k'} S_i S_s u_{S_1 S_2 S_3}^{k'} \varpi_{(ij)}^{(ks)} + \frac{1}{2} C_{j,s}^{k'} S_i S_k \varpi_{(ij)}^{(ks)} + \frac{1}{4} C_{j,ks}^{k'} S_i \varpi_{(jiii)}^{(ks)}) \times \begin{cases} \varpi_{(k)}^{(s)} \text{ при } \delta_{i,j}^i; \\ \varpi_{(j)}^{(i)} \text{ при } (-1)^{i+j} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

остаточно отримуємо:

$$\delta U(r_{(e)}) = \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} R_{P_1 P_2 P_3}^i \delta u_{P_1 P_2 P_3}^i, \quad (13)$$

де $R_{P_1 P_2 P_3}^i$ — нелінійна матриця реакції об'ємного СЕ.

З використанням варіаційного рівняння першого принципу віртуальної роботи [5] і виразу (13) без урахування інерційних сил одержимо нелінійне варіаційне рівняння рівноваги через сумування по вузлах СЕ-моделі:

$$\sum_{G=1}^N \left[R_G^i \delta u_{(G)}^i - P_G^i \delta u_{(G)}^i - Q_{G(\alpha)}^i u_{(G\alpha)}^i - Q_{G(\beta)}^i u_{(G\beta)}^i \right] = 0, \quad G=1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

де N — число вузлів СЕ-моделі.

Із виразу (14) можна отримати рівняння рівноваги СЕ-моделі у довільний момент часу при умові рівності нулю коефіцієнтів при відповідних кожній з варіацій компонент вузлових переміщень:

$$R_G^i - P_G^i - Q_G^i = 0. \quad (15)$$

У запропонованій методиці дослідження ґрунтового півпростору на основі співвідношень нелінійної теорії пружності передбачається визначення другого критичного навантаження, при якому у ґрунті виникають суцільні області граничного напруженого стану. Для опису процесу роз-

витуку зсувних деформацій використовується постулат стійкості Друкера-Прагера [7]:

$$\alpha I_1 + \sqrt{I_2} - K = 0; \alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}; K = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad (16)$$

де $I_1 = I_1(\boldsymbol{\sigma})$ - перший інваріант тензора напружень; $I_2 = I_2(\boldsymbol{\sigma})$ - другий інваріант тензора напружень; φ - кут внутрішнього тертя у ґрунті; c - питоме зчеплення ґрунту.

Остаточно задача урахування пластичної течії в дискретній області півпростору в ітераційному процесі методу подовження за параметром збудження зводиться до корекції тензора пружностей [5]:

$$\boldsymbol{\epsilon}_4^{(e,p)} = \boldsymbol{\epsilon}_{21}^{(e)} - 36 c^2 \beta \boldsymbol{S} \boldsymbol{S} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (17)$$

де $\beta = (h + 18 c I_1 (\boldsymbol{S} \boldsymbol{\epsilon}))^{-1}$; $h = \frac{c}{1 - c/E_0}$; E_0 — модуль деформації ґрунту;

$$\boldsymbol{S} \boldsymbol{\epsilon} \equiv \text{dev} \boldsymbol{\epsilon}.$$

Розроблена математична модель дослідження пружного півпростору з використанням нелінійного пружно-пластичного деформування твердого тіла з урахуванням фізико-механічних характеристик ґрунту є розвитком існуючої теорії лінійно-деформованого півпростору для дослідження граничного стану ґрунтових основ при суцільному розвитку зсувних деформацій.

1. *Цытович Н.А.* Механика ґрунтов. – М.: ГИЛСЛ і СМ, 1963. – 635с.
2. *Цытович Н.А., Тер-Мартirosян З.Г.* Основы прикладной геомеханики в строительстве. – М.: Высшая школа, 1981. – 317с.
3. *Гольдштейн М.Н.* Механические свойства ґрунтов. – М.: Стройиздат, 1973. – 375с.
4. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и Альтенбаха. – Киев: Вища школа. Гол. вид. 1982. – 480с.
5. *Баженов В.А., Цихановський В.К., Кислюк В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – Київ: КНУБА, 2000. – 386с.
6. *Сахаров О.С.* Тензорні ряди в моментній схемі методу скінченних елементів/ Опір матеріалів і теорія споруд, вип. 68. – Київ: КНУБА, 2000 С.122-129.
7. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. – М: Изд-во иностр. лит., 1963. – 312с.

Матеріал надійшов до редакції 04.10.04.

УДК 624.01

Баженов В.А., д-р техн. наук
Слободян Я.О., канд. техн. наук

АВТОМАТИЗАЦІЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ СИСТЕМ СПОРУД

Актуальність. При автоматизованому проектуванні будівельних конструкцій ставиться задача одержати найбільш економічне розв'язання, що забезпечує зниження матеріалоемності споруди. Традиційно цю задачу намагаються вирішувати шляхом розгляду обмеженого числа різних варіантів конструктивних рішень, обраних на основі інтуїції і досвіду. Однак, аналіз показує, що при цьому навіть, у найпростіших випадках для залізобетонних конструкцій типу балок і рамних каркасів перевищення витрат матеріалів складає в середньому 7-10%, а в окремих випадках до 15-20% у порівнянні з розв'язаннями, отриманими методами оптимального проектування.

У широкому значенні під оптимальним проектуванням будівельних конструкцій розуміють відшукування таких архітектурно-конструктивних рішень, при яких приведені витрати, що враховують технологічні витрати, зв'язані з експлуатацією споруди та ін., будуть мінімальними за умови забезпечення усіх вимог, пропонованих до розглянутої проектної задачі. Однак необхідність урахування великого числа різних факторів ускладнює розв'язання задачі в такій постановці.

Задачу суттєво звужують, і показником якості (чи критерієм оптимальності) приймається об'єм, вага чи вартість матеріалу конструкції. Однак, і в такій постановці задача є досить складною і рідко доводиться до практичної реалізації в умовах реального проектування через наявність великої кількості обмежень. У розвитку досліджень по оптимізації залізобетонних конструкцій можна виділити ряд етапів.

На першому етапі дослідники ставили перед собою задачу розробити аналітичні методи оптимізації з метою одержання формул для відшукування оптимальних параметрів, і більшість авторів прагнуло одержати спрощені розв'язання по відшукуванню деякої функції вартості конструкцій при наявності обмежень у вигляді рівності, що відображає умову міцності нормальних перетинів.

Другий етап у дослідженнях оптимізації залізобетонних конструкцій зв'язаний з розвитком обчислювальної техніки, що спричинило за собою якісна зміна підходу до розрахунку і проектування конструкцій і знаменувало перехід до нових методів, відомим як методи математичного

програмування. Як правило, ставилася, задача одержання оптимального розв'язання на один вид навантаження, що в умовах реального проектування є недостатнім. Тому більшість розглянутих підходів до оптимізації проектування конструкцій не знайшли широкого застосування в проектній практиці.

До третього етапу в дослідженнях питань оптимального проектування залізобетонних конструкцій можна віднести ряд комплексних досліджень, основаних на сполученні різних підходів.

Постановка задачі. У роботі ставиться задача одержання оптимальних теоретичних площ подовжньої арматури для елементів стержневих залізобетонних конструкцій споруд на деформованій основі у випадку багатьох навантажень. Задача формулюється стосовно до розробки методів розрахунку з урахуванням перерозподілу зусиль від непружних властивостей матеріалів конструкцій і ґрунтових основ споруд у рамках системи автоматизованого проектування будівельних споруд на основі ПК ЛІРА (рис. 1).



Рис. 1. Система автоматизації оптимального проектування об'єктів будівництва на основі ПК ЛІРА [2].

При розв'язанні задачі передбачається, що геометрична схема споруди, форма і розміри поперечних перетинів задані. При виводі формул розглядаються стержневі системи. Варіюваними параметрами при цьому є площі стиснутої (розтягнутої) арматури. По довжині кожного стержня системи вибираються характерні перетини, і підбір арматури виконується для відповідних ділянок стержнів.

Задача в цьому випадку розв'язується в два етапи. На попередньому етапі, використовуючи традиційну практику розрахунків і конструювання, визначаються деякі припустимі перетини арматури і виконується розрахунок системи з урахуванням перерозподілу зусиль на дію кожного з навантажень. На основному другому етапі, використовуючи отримані результати, визначається оптимальне армування при багатьох навантаженнях.

Розглянемо метод розв'язання нелінійної задачі другого етапу. Приймаючи допущення про незначну зміну зусиль і переміщень на кожній кроці оптимізації при досить малих змінах армування і, використовуючи при формулюванні відповідних обмежень по міцності дані про напружено-деформований стан і жорсткісних характеристиках, сформовані на попередньому кроці розрахунку, одержуємо лінеаризовану систему обмежень. Це дозволяє проводити оптимізацію окремо для кожного розглянутого перетину елемента конструкції. При цьому трудомісткість розв'язання задачі суттєво знижується.

Задача оптимального армування перетинів стержневих систем споруд від дії багатьох навантажень у загальному випадку розрахунку по міцності у термінах математичного програмування формулюється в такий спосіб: мінімізувати лінійну форму об'єму (вартості) арматури

$$V = \sum_{i=1}^m A_{si} p_i, \quad i=1,2,\dots,m; S=1,2,\dots,g \quad (1)$$

при нелінійних обмеженнях умов міцності [1] від навантаження S :

$$M^S \leq \sum_i^m \sigma_{si} A_{si} h_{0i} + R_b A_b z_b; \quad N^S \leq \sum_i^m \sigma_{si} A_{si} + R_b A_b \quad (2)$$

конструктивних обмеженнях площ i -тої ділянки армування A_{si} .

$$A_{si,\min} \leq A_{si} \leq A_{si,\max}, \quad (3)$$

Лінеаризовані умови міцності можна записати у вигляді:

$$\Delta M^S \leq \sum_{i=1}^m \sigma_{si} \Delta A_{si} h_{0i}; \Delta N^S \leq \sum_{i=1}^m \sigma_{si} \Delta A_{si}. \quad (4)$$

Формування виразів (4) дозволяє сформулювати задачу лінійного програмування, як кроку оптимізації армування від дії декількох розрахункових комбінацій зусиль. Задача оптимального армування на кожному кроці оптимізації зводиться до розв'язання наступної задачі лінійного програмування.

Максимізувати функцію зменшення об'єму (вартості) арматури

$$\Delta V = \sum_{i=1}^m \Delta A_{si} p_i \quad (5)$$

при лінійних обмеженнях умов міцності

$$\Delta M^S \leq \sum_{i=1}^m \sigma_{si} \Delta A_{si} h_{0i}; \Delta N^S \leq \sum_{i=1}^m \sigma_{si} \Delta A_{si} \quad (6)$$

і конструктивними обмеженнями

$$A_{si,\min} \leq A_{si} \mp \Delta A_{si} \leq A_{si,\max}. \quad (7)$$

Нерівності (6), (7) у матричному вигляді:

$$AB \leq C, \quad (8)$$

де A - матриця (симплекс-таблиця 1), що складається з коефіцієнтів при приростах ΔA_{si} , B - вектор елементів ΔA_{si} ; C - вектор обмежень (симплекс-таблиця 1), що включає елементи: $\Delta M^S, \Delta N^S, A_{si,\min} - A_{si}, A_{si,\max} - A_{si}$.

За допомогою симплекс-методу на k кроці оптимізації розв'язується нерівність (8) і визначаються приріст площі ΔA_{si} . У результаті оптимізації визначаються нові значення площі арматури по формулі.

$$A_{si}^k = A_{si}^{k-1} \mp \Delta A_{si}^k.$$

Значення A_{si}^k є вихідними для наступного $k+1$ кроку оптимізації.

Процес оптимізації закінчується за умови

$$\Delta V = \sum_{i=1}^m \Delta A_{si} p_i \leq \varepsilon.$$

Симплекс-таблиця 1

А				С
Типи ділянок арматури				Вектор обмежень
1	2	3	4	
$\sigma_{s1}h_{01} + \sigma_{s3}h_{03}$	$\sigma_{s2}h_{02}$	$\sigma_{s4}h_{04} + \sigma_{s6}h_{06}$	$\sigma_{s5}h_{05}$	ΔM^1
$\sigma_{s1} + \sigma_{s3}$	σ_{s2}	$\sigma_{s4} + \sigma_{s6}$	σ_{s5}	ΔN^1
$\sigma_{s1}h_{01} + \sigma_{s3}h_{03}$	$\sigma_{s2}h_{02}$	$\sigma_{s4}h_{04} + \sigma_{s6}h_{06}$	$\sigma_{s5}h_{05}$	ΔM^2
$\sigma_{s1} + \sigma_{s3}$	σ_{s2}	$\sigma_{s4} + \sigma_{s6}$	σ_{s5}	ΔN^2
...
$\sigma_{s1}h_{01} + \sigma_{s3}h_{03}$	$\sigma_{s2}h_{02}$	$\sigma_{s4}h_{04} + \sigma_{s6}h_{06}$	$\sigma_{s5}h_{05}$	ΔM^S
$\sigma_{s1} + \sigma_{s3}$	σ_{s2}	$\sigma_{s4} + \sigma_{s6}$	σ_{s5}	ΔN^S
-1				$A_{s1,3} - A_{s1,3,max}$
+1				$A_{s1,3,min} - A_{s1,3}$
	-1			$A_{s2} - A_{s2,max}$
	+1			$A_{s2,min} - A_{s2}$
		-1		$A_{s4,6} - A_{s4,6,max}$
		+1		$A_{s4,6,min} - A_{s4,6}$
			-1	$A_{s5} - A_{s5,max}$
			+1	$A_{s5,min} - A_{s5}$

1. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции.
2. Городецкий А.С., Слободян Я.Е. и др. / Программный комплекс ЛИРА-Windows. Теоретические основы. - Киев: НИИАСС. - 1997. -Т. 5. -90 с.

Матеріал надійшов до редакції 18.10.04.

УДК 539.3:589.03:589.04:624.04

Станкевич А.М., канд. техн. наук,
Шкельов Л.Т., канд. техн. наук

ДОСВІД ВИКОРИСТАННЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ МЕТОДА ПРЯМИХ

Значна більшість наближених методів розв'язку крайових задач засновано на зведенні складних класів рівнянь до більш простих, методи розв'язування яких відомі. При цьому застосовуються різні способи апроксимації шуканих функцій. Подача їх у вигляді функціональних рядів із невизначеними коефіцієнтами (методи Рітца, Бубнова-Гальоркіна). Для знаходження невизначених коефіцієнтів, частіше, використовуються енергетичні принципи. Чисельна апроксимація функцій використовується в методі кінцевих різниць.

Метод скінчених елементів заснований на розчленуванні об'єкта на окремі частини стандартної форми та представленні шуканої функції в межах окремого елемента у вигляді сплайнів різних порядків.

Усі зазначені вище методи дозволяють замінити складні вихідні рівняння наближено еквівалентною системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Чисельно-аналітична апроксимація використовується в диференційно-різницевому методі або "методі прямих". У цьому випадку за однією із змінних зберігається аналітичний характер шуканих функцій, а за іншими змінними передбачається дискретний характер шуканих функцій. Це дозволяє крайову задачу для рівнянь у частинних похідних звести до крайової задачі для системи звичайних лінійних диференційних рівнянь. Не можна однозначно стверджувати, який із зазначених методів має беззаперечну перевагу. Кожен із них має певні переваги та недоліки. Очевидно, найбільш вірним буде твердження, що кожен метод має свою раціональну сферу застосування.

На кафедрі опору матеріалів КНУБА над розвитком методу прямих та його застосуванням для розв'язання прикладних задач працюють Шкельов Л.Т., Морсков Ю.А., Корбаков О.Ф., Одинець Є.А., Станкевич А.М. Характерною особливістю варіанта методу прямих, який вони розвивають, є побудова такої системи звичайних диференційних рівнянь, для якої в замкненій аналітичній формі можна отримати загальний розв'язок. До складу такого розв'язку входять довільні сталі в такій кількості, яка дозволяє задовольнити граничні умови в точках перетину прямих з границею об'єкта. У результаті чисельна реалізація методу

зводиться до складання та розв'язку системи граничних алгебраїчних рівнянь із наступним визначенням конкретних значень шуканих функцій та пов'язаних з ними величин.

Для переходу від вихідних двомірних і тримірних диференціальних рівнянь до системи звичайних диференціальних рівнянь і подальшого розв'язку цієї системи розроблений чіткий і достатньо простий алгоритм. Це досягнуто завдяки прийняттю допущення про періодичний характер змін шуканих функцій за дискретним напрямком і зведенню процедури чисельного диференціювання до простих матричних операцій, а саме, до множення диференційованого виразу на відповідну матрицю. У подальшому ці матриці будемо називати матрицями диференціювання.

Усього використовується три види матриць диференціювання A, B, C . Матриці A і B , являють собою двохдіагональні матриці, відповідно, з верхнім і нижнім кутовим елементом. Усі компоненти матриць A і B за абсолютним значенням дорівнюють одиниці. Матриця C є трьохдіагональною з кутовими коефіцієнтами. Множення диференційованого вектора зліва на матрицю A дає кінцево-різницеву похідну цього вектора першого порядку у лівих різницях. Відповідно, при множенні на матрицю B отримуємо першу похідну у правих різницях. Множення на матрицю C дає похідну в центральних різницях. Матриця C дорівнює добутку матриць A і B , а саме:

$$C = A \cdot B = B \cdot A.$$

Непарна похідна $n^{\text{го}}$ порядку може бути записана у декількох варіантах:

$$\underbrace{A \cdot B \cdot A \cdot B \cdots A \cdot B \cdot A}_n = \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdots C}_{(n-1)\frac{1}{2}} \cdot A = A \cdot \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdots C}_{(n-1)\frac{1}{2}},$$

$$\underbrace{B \cdot A \cdot B \cdot A \cdots B \cdot A \cdot B}_n = \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdots C}_{(n-1)\frac{1}{2}} \cdot B = B \cdot \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdots C}_{(n-1)\frac{1}{2}}.$$

Парну похідну $n^{\text{го}}$ порядку можна записати таким чином:

$$\underbrace{A \cdot B \cdot A \cdot B \cdots A \cdot B}_n = \underbrace{B \cdot A \cdot B \cdot A \cdots B \cdot A}_{n\frac{1}{2}} = \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdots C}_{n\frac{1}{2}}.$$

Матриця C може бути подана як добуток трьох матриць

$$C = V \left\{ -\beta_k^2 \right\} V.$$

Елементи квадратної матриці V визначаються за формулою:

$$V_{ik} = \frac{\sqrt{n}}{n} \left(\sin \frac{2ik\pi}{n} + \cos \frac{2ik\pi}{n} \right).$$

Компоненти діагональної матриці β_k^2 дорівнюють:

$$\beta_k^2 = -\frac{\lambda_k}{\Delta^2},$$

де $\lambda_k = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{n}$.

Матриця V має ту властивість, що пряма і зворотна матриці рівні:

$$V \cdot V = E.$$

Звідси випливає, що $C^n = V \left\{ (-)^n \beta_k^{2n} \right\} V$.

Використання цього співвідношення дозволяє істотно спростити вираз для похідних.

Підкреслимо ще одну особливість розробленої методики. Вона полягає у використанні перехресних прямих, що дозволило більш простіше задовольнити граничні умови.

Наведений алгоритм розроблений у прямолінійних прямокутних координатах і в полярних координатах. Користуючись зазначеним методом, отримані числові розв'язки задач і досліджена збіжність методу. Наведемо перелік розв'язаних задач:

- згин пластин довільної конфігурації;
- згин пластин з отвором;
- згин пластин на пружній основі;
- плоский напружений стан пластин довільної конфігурації;
- плоский напружений стан пластин з отвором;
- пластинчасті системи;
- напружений стан пластин при згині без використання гіпотез Кірхгофа;
- кругові циліндричні оболонки замкнені та відкриті;
- циліндричні оболонки з діафрагмами;

- системи, які складаються із замкнених циліндричних оболонки і круглих пластин.

На перспективу намічено дослідження щодо використання методу для вирішення таких задач:

- згин пластин без використання гіпотез Кірхгофа;
- багатошарові пластини;
- оболонки без використання гіпотез Кірхгофа – Лява.

1. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542с.
2. *Ридель В. В., Гулин Т. В.* Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 205с.

Матеріал надійшов до редакції 29.10.04.

УДК 624.073

Солоний В.А.

ЗАСТОСУВАННЯ СХЕМ ОДНОПРОГІННИХ ЕКВІВАЛЕНТНИХ БАЛОК ДО ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ

Розглядається методика розв'язання задачі визначення критичного навантаження центрально стиснутого стояка змінного перетину з однією віссю симетрії (початковий стрижень) (рис. 1,а₁), доводячи його до замінюючого стрижня постійного перетину цієї ж форми нормального поперечного перетину (в подальшому поперечний перетин), довжини, характеру опирання та матеріалу (рис. 1,в) для розрахунків на стійкість за нормативною методикою БНтП або омега-методу. Змінний перетин визначає, що форма поперечного перетину зберігається по всій довжині розглянутого стояка, а площа перетину різна.

Перехід здійснюється заміною початкового стрижня допоміжним стрижнем сходово змінного перетину (рис. 1,б₁). Еквівалентність допоміжного стрижня з початковим досягається наближенням його вигнутої осі при поперечному згині до вигнутої осі початкового стрижня від того ж навантаження.

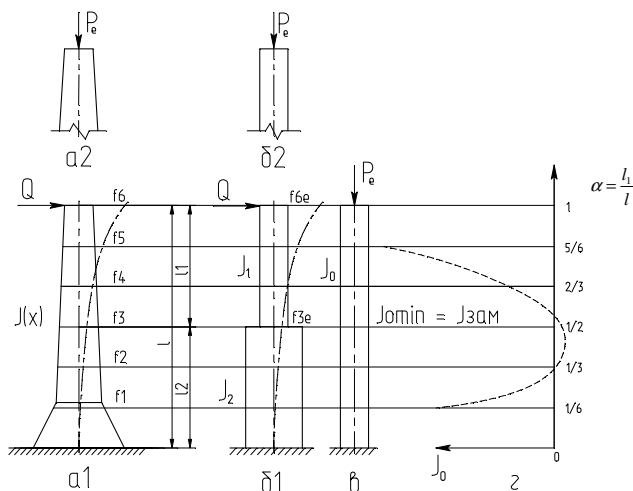


Рис. 1

Еквівалентність визначається (рис. 1,а₁, 1,б₁) рівністю прогину при поперечному згині вільних кінців $f_\delta = f_{\delta e}$ та прогину f_i перерізу

сполученого зі сходиною f_{ie} еквівалентного стрижня, тобто умови $f_i = f_{ie}$. Для кожного $\alpha = l_1/l$ знаходиться J_1 і J_2 . Геометричні параметри заміняючого стрижня (рис. 1,в) знаходимо за умови рівності ейлерового навантаження односхідчатого еквівалента та заміняючого стрижня вважаючи, що відбувається втрата стійкості II-го роду.

Шукаємо найменше критичне навантаження, коли вигнута вісь прийме найпростішу форму при умові, що розглядувані стояки не мають згиннокрутної та місцевої втрати стійкості.

Прогини визначаються в позначених (контрольних) перетинах початкового стрижня (рис. 1,а₁) при поперечному згині від навантаження на вільному кінці.

Критичною умовою втрати стійкості еквівалентного стрижня є рівняння [6]:

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P_e l_1^2}{E J_1}}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P_e l_2^2}{E J_2}}\right) = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}. \quad (1)$$

Щоб отримати чисельний зв'язок параметрів жорсткості односхідчатого еквівалента з заміняючим стояком постійного перетину

замість P_e підставляємо значення $P_e = \frac{\pi^2 E J}{4l^2}$ (2) в (1), що дає

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{J}{J_1}}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_2}{l} \cdot \sqrt{\frac{J}{J_2}}\right) = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}. \quad (3)$$

Позначимо

$$\alpha = \frac{l_1}{l}, 1 - \alpha = \frac{l_2}{l}, z = \frac{J}{J_2}, \beta = \frac{J_1}{J_2}, J_1 = \beta \cdot J_2. \quad (4)$$

Тоді

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi \alpha}{2 \sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{z}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(1-\alpha)}{2} \cdot \sqrt{z}\right) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (5)$$

Співвідношення (5) зв'яже параметри жорсткості еквівалентного стрижня з однією сходиною зміни перетину та параметра жорсткості заміняючої консолі постійного перетину. Значення Z знаходиться методом підбору.

Використавши (5) знаходимо Z_i , а по Z_i знаходимо J_i заміняючого стояка при положенні сходинок i . Нас цікавить критичне навантаження заміняючого стояка, тому серед багатьох J_i значень шукаємо найменше

$J_i = J_{o \text{ мін}}$ (рис. 1,г). Крім цього, можемо визначити прогини еквівалента та порівняти їх з прогинами контрольних перетинів початкового стрижня.

Геометричні параметри перетину еквівалента визначаємо після знаходження параметрів α , J_1 , J_2 .

Для стояків, навантажених за рис. 1, a_2 , b_2 ейлерове навантаження дозволяють знаходити енергетичні методи: Релея, Тимошенка, Рітца, Галеркіна. Точне (у розумінні P_e) досягається при використанні точного рівняння вигнутої осі. Інакше похибка може бути більшою 5%.

Використання в якості вигнутої осі при поздовжньому згині рівняння вигнутої осі при поперечному згині дає при застосуванні енергетичного методу прийнятний результат та надає широкі можливості у обчисленні розрахункових параметрів. Заміна початкового стрижня еквівалентним з підбором параметрів його вигнутої осі при контролюванні прямим порівнянням прогинів відповідних перетинів початкового стояка та еквівалента дозволяє досягти рівності ейлерового навантаження. Це підтверджують результати розрахунків у стовпчику № 6 табл. 1 виконаних автором.

Еквівалент з одною сходинкою жорсткості дозволяє обмежитись визначенням трьох параметрів: α , J_1 , J_2 . Можна порівняти і за більшою кількістю перетинів. При цьому зростає об'єм розрахунків, а точність росте незначно (див. табл. 1 стовпець 6). Підвищувати точність, коли сам підхід залишається приблизним, не має сенсу.

Звернемося до параметрів заміняючого стрижня (рис. 1,в). Для визначення критичного навантаження відповідно БНтП потрібно знати форму перетину, його площу та радіус інерції заміняючого стрижня.

Застосуємо поняття питомого радіуса інерції [4], який визначається як відношення радіуса інерції до сторони квадратного перетину рівновеликої площі

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{J}}{A}. \quad (6)$$

Для частини еквівалента, що прилягає до закладання

$$\rho_2 = \frac{r_2}{\sqrt{A_2}} = \frac{\sqrt{J_2}}{A_2}.$$

Використовуючи (6), вимагаємо $\rho = \rho_2$.

Тоді

$$\frac{\sqrt{J}}{A} = \frac{\sqrt{J_2}}{A_2}; \quad \frac{r}{\sqrt{A}} = \frac{r_2}{\sqrt{A_2}}, \quad (7)$$

що дозволяє визначити площу і радіус інерції заміняючого стрижня.

$$A = A_2 \cdot \sqrt{\frac{J}{J_2}} \quad \text{або} \quad A = A_2 \sqrt{z}, \quad (8)$$

$$r = r_2 \sqrt{\frac{A}{A_2}} \quad \text{або} \quad r = r_2 \sqrt[4]{z}. \quad (9)$$

Після чого знаходимо $P_{кр} = \varphi AR$.

Щоб оцінити придатність отриманих результатів з БНТП перейдемо до розрахункових параметрів l_1 .

$$\frac{P_{кр}}{A_1} = \sigma_1 \rightarrow \frac{\sigma_1}{R} = \varphi_1 \rightarrow \mu_1 l_1 = r_1 \lambda_1 \rightarrow \mu_1 = \frac{r_1 \lambda_1}{l_1}.$$

Аналогічно для відрізка l_2 . Ці ж параметри можна визначити аналітично. Приклад, наведений в [2], використаний для створення контрольної серії. Наведемо повну умову цієї задачі. Це консоль з двома сходящими зміни жорсткості. При цьому

$$i_1 = \frac{1}{2} i_2 = \frac{1}{3} i_3; l_1 = h_1; l_2 = 2h_1; l_3 = 3h_1; J_1 = \frac{1}{9} J; J_2 = \frac{4}{9} J; J_3 = J.$$

Знаходимо ейлерове навантаження використавши схему стояка (див. табл. 1, рядок 1, стовпець 2).

$$P_e = \frac{v^2 EJ_1}{h_1^2},$$

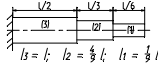
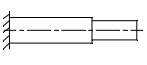
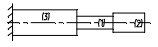
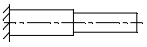
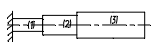
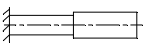
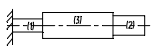
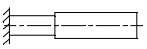
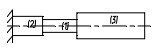
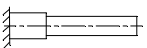
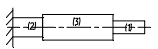
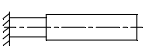
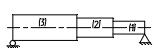
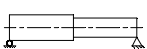
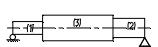
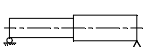
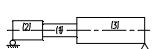
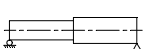
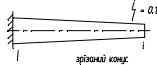
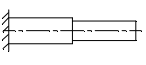
де $h_1 = \frac{l}{6}$ і $v = \arccos \sqrt{0.6} = 39^\circ 13,5' = 0,6845$ [2]. Позначимо всю

довжину стояка l і $J_1 = \frac{1}{9} J$, тоді $P_e = \frac{4v^2 EJ}{l^2}$ (а).

Для заміняючого стояка $P_e = \frac{\pi^2 EJ_0}{4l^2}$ (б). Звідси для прикладу 1,

порівнявши (а) і (б), отримаємо $\frac{J_0}{J} = \frac{16v^2}{\pi^2} = 0,760055$.

Таблиця 1

	Початкова стійка	J_0	Односходинковий еквівалент	$J_{зам}$	$\delta, \%$
1	 $l_1 = l; l_2 = \frac{2}{3}l; l_3 = \frac{1}{6}l$	0.760055		0.76244	0.3
2		0.4444444		0.42863	-3.6
3		0.226506		0.22578	-0.3
4		0.256407		0.25671	0.1
5		0.286697		0.27458	-4.2
6		0.544674		0.54483	0.3
7		0.496789		0.49635	-0.1
8		0.632291		0.63229	0
9		0.25		0.25	0
10	 при зміні коєф.	0.487		0.48637	-0.2

Приклади 2÷9 складені переставленням відрізків з різною жорсткістю та заміною опирання. Аналогічно знайдені відповідні відношення у стовпчику 3 таблиці для прикладів 2÷9. У випадку 10 використовуємо табл. 28 [1]. Похибка підрахована як

$$\delta\% = \frac{J_{зам} - J_0}{J_0} \cdot 100\% ,$$

де $J_{зам}$ – момент інерції замінюючого стояка постійного перетину, знайдений по запропонованому методу.

Для сходинкових стояків та деяких форм зміни перетину є методики та таблиці, за якими можна знайти P_e , але нема засобів знаходження

критичного навантаження, тому порівняння зроблено на рівні моментів інерції замінюючого стрижня постійного перетину.

Для прикладів 1, 5, 10 табл. 1 на рис. 2 наведені графіки зміни похибки від параметрів сходового еквівалента. Всі графіки в інтервалі $0 \div 1$ мають абсолютний мінімум, знаходження якого не було метою.

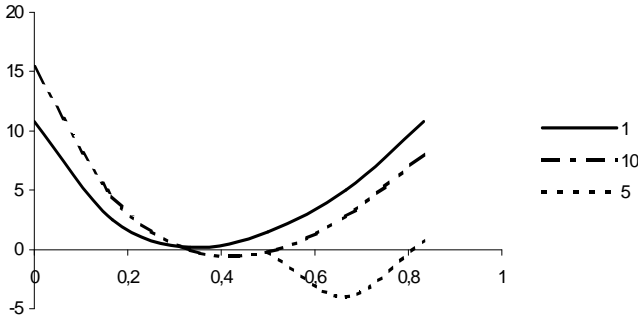


Рис. 2. Графік зміни похибки $\delta, \%$ від положення сходинки еквівалента α

В якості вирішення приймалися параметри сходинкового еквівалента найближче до мінімального значення жорсткості його замінюючого стрижня при обумовленому кроці місцезнаходження сходинки.

Можливі витоки похибок:

1. Приблизне виконання зближення вигнутих осей.
2. Визначення положення сходинки і відношення моментів інерції замінюючого стояка близьке до мінімуму.
3. Шукані величини — корені трансцендентних рівнянь визначаються наближено.
4. Потрапляємо на ділянку пружно-пластичних деформацій при визначенні $P_{кр}$ по еквіваленту постійного перетину.
5. Точність визначення коефіцієнта φ та розрахункового опору матеріалу по таблицях. За результатами розрахунків (останній стовпчик табл. 1) похибка була не більше 5%.

Методика складна та громіздка, але реалізується на персональному комп'ютері. Приклади на рис. 3 вирішені автором з використанням всього або частини арсеналу засобів наведеного прикладу. На рис. 4 наведені деякі приклади, вирішення яких можливе по наведеній методиці, але на цьому далеко не обмежуються її можливості.

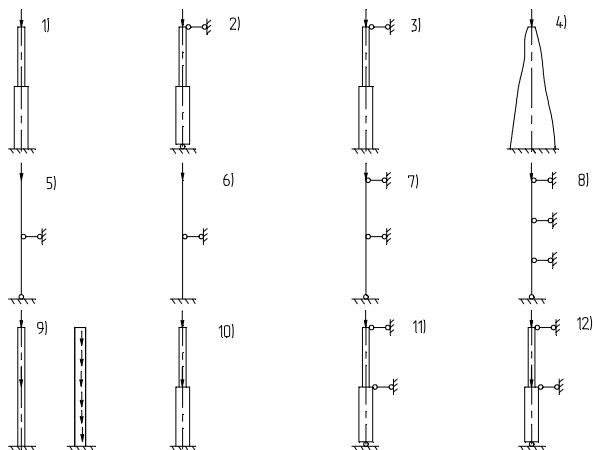


Рис. 3. Схеми задач, які вирішені з використанням розглянутої методики

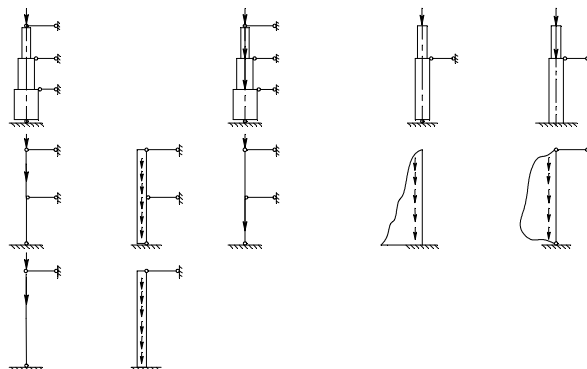


Рис. 4. Деякі варіанти задач, що вирішуються з використанням даної методики

1. Динник А.Н. Продольный изгиб. Кручение. – Академия Наук СССР, 1955.
2. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1949.
3. Пиковский А.А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. – М.: Физматгиз, 1961.
4. Строительная механика и расчет сооружений. 1984.-№3. стр.69.
5. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Том 1.– М.: Физматгиз, 1960.
6. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Том 2. – М.: Наука, 1965.

Матеріал надійшов до редакції 15.11.04.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Ворона Ю.В.</i> Методика чисельного дослідження нестационарних коливань пружних об'єктів	3
<i>Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.</i> Алгоритм моделювання розвитку тріщини в просторових тілах із застосуванням напіваналітичного метода скінченних елементів . . .	13
<i>Шульга М.О., Безверхий О.І., Корнієнко В.Ф.</i> Динаміка розгалуженої дискретно-континуальної системи при зміні швидкості буксирування на хвилях	27
<i>Гоцуляк Є.О., Барвінко А.Ю., Шах В.В.</i> Відновлення стійкості потоншених оболонок шляхом встановлення ребер жорсткості	35
<i>Баженов В.А., Шишов О.В., Іванченко Г.М., Свешиников О.Г.</i> Комп'ютеризація предметної олімпіади з будівельної механіки . . .	43
<i>Дехтярюк Є.С., Гончаренко М.В.</i> Дослідження параметричних резонансів комбінованої пластинчато- стержневої системи	47
<i>Іванченко Г.М., Голуб О.О.</i> Моделювання смерчового навантаження на великогабаритні споруди	57
<i>Колесник І.А., Іванова А.П., Сушкіна Ю.И.</i> Колівання рамних конструкцій з урахуванням розсіювання енергії	61
<i>Соловійов І.Л.</i> Критичні стани тонких оболонок, пружно зв'язаних з платформою при простому і складному обертаннях	71
<i>Соловей М.О., Кривенко О.П.</i> Вплив нагріву на стійкість гранованих пологих сферичних оболонок	80
<i>Цихановський В.К., Прусов Д.Е.</i> Метод скінченних елементів у задачах дослідження неоднорідного півпростору з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності . . .	87

<i>Баженов В.А., Слободян Я.О.</i> Автоматизація оптимального проектування просторових систем споруд	96
<i>Станкевич А.М., Шкельов Л.Т.</i> Досвід використання та перспективи розвитку метода прямих	101
<i>Солоний В.А.</i> Застосування схем однопрогінних еквівалентних балок до задач стійкості	105

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 75

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку .04. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. . Умовн. Фарбо-відб.
Облік.-вид. арк. . Тираж 100. Зам. № .

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

Фірма "ВІПОЛ"

м. Київ, вул. Волинська, 60. 03151