

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 76

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2005

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 21 грудня 2005 року, протокол № 13.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 76 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2005. – 104 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,
м. Київ, 03037,
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2005

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Солодей І.І., канд. техн. наук,
Андрієвський В.П.,
Сизевич Б.І.

МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ І ВЕКТОР ВУЗЛОВИХ РЕАКЦІЙ СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ НМСЕ

Отримані розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) для косокутного призматичного неоднорідного скінченого елемента з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині його поперечного перерізу і показана ефективність їх застосування при розв'язанні задач термов'язкопружнопластичності.

Вступ. Значна кількість відповідальних елементів машинобудівних конструкцій являють собою просторові призматичні тіла складної форми, що перебувають під дією довільно розподілених у просторі та часі силового і температурного навантажень. Визначення їх несучої здатності потребує розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності в нестационарному температурному полі, що є можливим лише із застосуванням чисельних методів, зокрема метода скінчених елементів (МСЕ) та його ефективних модифікацій, до яких відноситься напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ). На теперішній час досвід застосування НМСЕ поширений на широке коло задач механіки деформівного твердого тіла [1, 2, 3].

Урахування нелінійного деформування (деформацій пластичності і повзучості) потребує залучення покрокових алгоритмів моделювання процесу навантаження й ітераційного розв'язання отримуваних систем рівнянь на кожному кроці задачі. При цьому кількість кроків розв'язання задачі про моделювання тривалого деформування в умовах повзучості під впливом навіть сталого навантаження при ізотермічному навантаженні може становити порядку тисячі, а, зважаючи на складність форми досліджуваних об'єктів і суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, кількість невідомих становитиме 100 000 і більше. У випадку змінного в часі навантаження, зумовленого зокрема наявністю нестационарного температурного поля, складність задачі і, пов'язаний з цим обсяг обчислювальних витрат збільшується на порядок.

Суттєве зменшення кількості невідомих дискретної моделі може бути

досягнуто із використанням косокутних скінчених елементів (СЕ), розв'язувальні співвідношення яких враховують змінність компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ. Це потребує розширення скінченоелементної бази в напрямку створення нових модифікацій СЕ, що враховують зазначені геометричні особливості СЕ на основі розгляду напружено-деформованого стану досліджуваних об'єктів в термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій. Як свідчить аналіз літературних джерел, область застосування неоднорідних косокутних СЕ істотно обмежена неоднорідними косокутними СЕ з шарнірними граничними умовами [11]. Тому є необхідним розроблення неоднорідного косокутного СЕ, що дозволяє моделювати довільні граничні умови.

Метою даної роботи є отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ для призматичних тіл з довільними граничними умовами на торцях із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ і оцінка ефективності їх використання при розв'язанні задач.

Вихідні співвідношення. Розглянемо просторове тіло, що утворене рухом деякої поверхні складної, не обов'язково однозв'язної конфігурації, вздовж напрямної у вигляді відрізка прямої. Зовнішні впливи складаються з розподіленого у просторі навантаження $q = q(z^i)$ і температурного поля $T = T(z^i)$. Фізико-механічні характеристики матеріалу передбачаються залежними від температури T і просторових координат z^i : $E = E(z^i, T)$, $\nu = \nu(z^i, T)$.

В подальшому такі тіла будемо називати неоднорідними призматичними тілами (рис. 1).

Для дослідження процесів деформування зазначених тривимірних неоднорідних призматичних конструкцій доцільно використовувати наступні системи координат: базисну z^j – декартову систему координат, яка є незмінною і призначена для задання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (вісі $z^{1'}$ та $z^{2'}$ базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь $z^{3'}$ орієнтована вздовж напрямної); місцеву систему координат x^i , природньо пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта, при цьому вісь x^3 збігається за напрямком з $z^{3'}$.

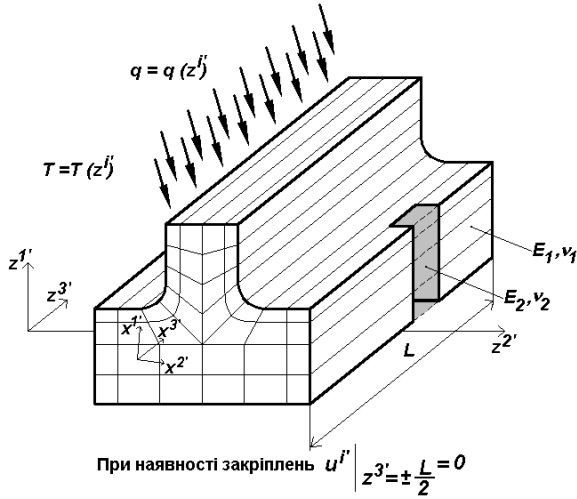


Рис. 1. Неоднорідне призматичне тіло

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z_{,j}^{i'}$, що обумовлює зв'язок між місцевою та базисною системами координат [4]:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z_{,3}^{\alpha} = z_{,\alpha}^{3'} = 0. \quad (1)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

Компоненти метричного тензора g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'}. \quad (2)$$

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат компоненти метричного тензора мають наступні значення:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad g_{33} = \left(z_{,3}^{3'} \right)^2. \quad (3)$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій ε_{ij} через переміщення u_i в місцевій системі координат [4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (4)$$

де Γ_{ij}^k – символи Кристофеля другого роду.

Подамо переміщення та символи Кристофеля в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_{s'} z_{s',k}^{s'}, \quad (5)$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{l'}^k z_{l',i}^{m'} z_{l',j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} + x_{l'}^k z_{l',i}^{m'} \frac{\partial z_{l',j}^{m'}}{\partial z^{m'}}, \quad (6)$$

де $x_{l'}^k$ – компоненти тензору, оберненого до (1).

Підставивши переміщення (5) та символи Кристофеля (6) в місцевій системі координат в вираз для визначення компонент деформацій (4) після зведення подібних, зважаючи, що $z_{s',k}^{s'} \cdot x_{l'}^k = \delta_{l'}^{s'}$, одержимо загальний вираз для деформацій в місцевій криволінійній системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{l'} z_{l',j}^{l'} + u_{l'} z_{l',i}^{l'} \right) - u_{l'} z_{l',i}^{m'} z_{l',j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'}. \quad (7)$$

В декартовій базисній системі координат дорівнюють нулю всі символи Кристофеля, тому, з урахуванням (1), вираз (7) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(u_{l',\alpha} z_{l',\beta}^{l'} + u_{l',\beta} z_{l',\alpha}^{l'} \right); \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(u_{l',\alpha} z_{l',3}^{l'} + u_{l',3} z_{l',\alpha}^{l'} \right); \\ \varepsilon_{33} &= u_{l',3} z_{l',3}^{l'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Фізичні компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (9)$$

При термов'язкопружнопластичному деформуванні просторових тіл компоненти прирощення повної деформації $d\varepsilon_{ij}$ можуть бути подані сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$, температурних деформацій

$d\varepsilon_{ij}^T$, деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^p$ та деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^c$, тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c. \quad (10)$$

Компоненти тензору напружень σ^{ij} запишемо через компоненти тензору пружних деформацій у відповідності із узагальненим законом Гука [4]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e. \quad (11)$$

Компоненти тензора пружних сталих C^{ijkl} для ізотропного тіла знаходимо з співвідношення:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (12)$$

де коефіцієнти Ляме λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^i, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^i, T)$ [4]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (13)$$

Фізичні компоненти тензора напружень в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}. \quad (14)$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (15)$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^k, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, $\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при $T = T_0$.

Область пружних деформацій обмежена у просторі напружень поверхнею текучості [6]:

$$f_p(\sigma^{ij}, \vartheta, T) = 0. \quad (16)$$

У відповідності з гіпотезою ізотропного зміцнення при умові текучості Мізеса рівняння поверхні текучості має вигляд:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\vartheta, T)]^2 = 0, \quad (17)$$

де $\tau_s(\vartheta, T)$ – межа текучості при чистому зсуві; ϑ – параметр зміцнення

$$\text{Одквіста, } \vartheta = \int_{\epsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p.$$

Компоненти девіатора напружень s_{ij} , які входять у вираз (17), визначаються за формулою:

$$s_{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma^{kl} g^{ij}. \quad (18)$$

Девіатор напружень пов'язаний із пластичними деформаціями у відповідності з асоційованим законом пластичного течіння:

$$\epsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}. \quad (19)$$

При виникненні деформацій повзучості, поруч із зміцненням необхідно враховувати появу і зростання з часом довільно орієнтованих у просторі дефектів матеріалу, що зменшують ефективний поперечний перетин тіла при незмінній геометрії. Для опису цього процесу в рівнянні використовуваної теорії повзучості вводиться параметр пошкоженості матеріалу – ω [8].

По аналогії з (17) до розгляду запроваджується поверхня повзучості – функція другого інваріанту девіатора головних напружень, що обмежує область деформацій повзучості у просторі головних напружень [7, 8]:

$$f_c = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_c(\vartheta_c, T, \xi_i^c, \omega)]^2 = 0, \quad (20)$$

де $\vartheta_c = \int_{\epsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^c d\epsilon_{ij}^c$ – параметр Одквіста, при повзучості; $\xi_i^c = \frac{d\epsilon_i^c}{dt}$ –

інтенсивність швидкості деформацій повзучості; ϵ_i^c – інтенсивність деформацій повзучості; t – час; ω – параметр пошкоженості Качанова-Работнова, $0 \leq \omega \leq 1$ [8].

Вираз (20) може бути поданий у вигляді наступного рівняння:

$$\xi_i^c = f_1(\sigma^{ij}, \vartheta_c, \omega, T). \quad (21)$$

Конкретизація виразу (21) може бути здійснена, наприклад, на основі

теорії накопичення пошкоджень Ю.М.Работнова:

$$\xi_i^c = D \left(\frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m, \quad (22)$$

де $\sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s^{ij}/2}$ – інтенсивність нормальних напружень; D, m – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Взаємозв'язок компонент тензора швидкостей деформацій повзучості ξ_{ij}^c і напружень при застосуванні вище перелічених теорій повзучості приймається у вигляді:

$$\xi_{ij}^c = \frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i}. \quad (23)$$

Для опису змінення з часом параметру пошкоженості застосовується кінетичне рівняння:

$$\frac{d\omega}{dt} = f_2(\sigma^{ij}, \vartheta_c, \omega, T), \quad (24)$$

яке може бути подане у вигляді узагальненого виразу [5]:

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[\frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta. \quad (25)$$

Розглянуті співвідношення дозволяють проводити опис процесів нелінійного деформування просторових тіл, що знаходяться в неоднорідному температурному полі.

Неоднорідний косокутний призматичний скінчений елемент з довільними граничними умовами. Для апроксимації просторових неоднорідних призматичних тіл використовуються просторові неоднорідні призматичні скінчені елементи (рис. 2), що являють собою призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді прямої.

Кожному скінченому елементу (СЕ) поставлена у відповідність місцева система координат x^i , яка природньо пов'язана з геометрією об'єкта, так що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину скінченого елемента (рис. 2), а x^3 спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із z^3 . При цьому в місцевій системі

координат поперечний перетин CE відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах CE . Вигляд призматичного CE в місцевій системі координат наведений на рис. 3.

Будемо вважати, що компоненти тензору пружних сталих та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензору g_{ij} , а також коефіцієнт лінійного розширення α_T дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину CE :

$$C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}; \quad g = \overset{\circ}{g} = g \Big|_{x^\alpha=0};$$

$$\alpha_T = \overset{\circ}{\alpha}_T = \alpha_T \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (26)$$

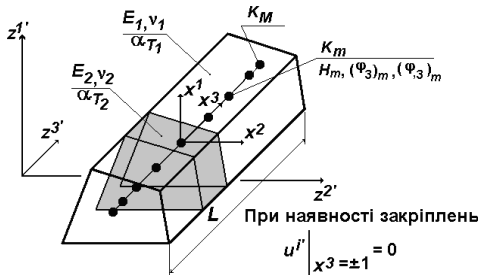


Рис. 2. Неоднорідний призматичний скінчений елемент в базисній системі координат

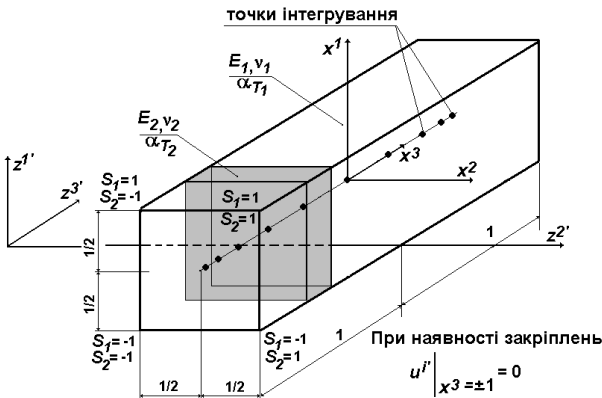


Рис. 3. Неоднорідний призматичний скінчений елемент в місцевій системі координат

Розподілення переміщень і температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (27)$$

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (28)$$

де $u_{m'(S_1S_2)}$, $T_{(S_1S_2)}$ – вузлові значення переміщень і температури, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

Визначимо похідні від переміщень в центрі поперечного перетину СЕ виходячи з прийнятого закону їх розподілення (27):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)} S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2),3}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2)} S_1 S_2; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1S_2),3} S_\alpha. \end{aligned} \quad (29)$$

Аналогічно, виходячи з (28), визначимо похідні від температури в центрі поперечного перетину СЕ:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)}; \quad \overset{\circ}{T}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1S_2)} S_\alpha. \quad (30)$$

В напрямку утворюючої переміщення, температура та їх похідні по напрямку x^3 апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій $\Phi^{(l)}$ – поліномам Лагранжа ($l=0,1$) і Міхліна ($l=2,\dots,L$):

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L u_{m'}^l \Phi^{(l)}; \quad u_{m',3} = \sum_{l=0}^L u_{m'}^l \Phi_{,3}^{(l)}; \quad (31)$$

$$T = \sum_{l=0}^L T^l \Phi^{(l)}; \quad T_{,3} = \sum_{l=0}^L T^l \Phi_{,3}^{(l)}; \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[(1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right].\end{aligned}$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь [2].

Скінчені елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу призматичних тіл. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення. Як показано в роботах [2, 3, 9], застосування моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) [10] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Подамо компоненти тензору повних фізичних деформацій в поперечних перетинах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) [9] відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} x^\beta,\end{aligned}\tag{33}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

В випадку лінійного зв'язку між фізичними компонентами тензора напружень та деформацій використовуємо узагальнений закон Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (34)$$

де $\tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}$.

Запишемо вираз для компонент тензора напружень через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена (33):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \tilde{C}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2\tilde{C}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \tilde{C}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} x^1 \right) + \\ & + 2\tilde{C}^{ij13} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} x^2 \right) + 2\tilde{C}^{ij23} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} x^1 \right) + \\ & + \tilde{C}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} x^2 \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Після перегрупування складників, що містять величини деформацій та їх похідних, застосовуючи позначення

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} &= \tilde{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} &= \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} + \tilde{C}^{ij13} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} &= \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \tilde{C}^{ij23} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1}, \end{aligned} \quad (36)$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} x^1. \quad (37)$$

Відкидаючи з (37) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елемента, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}, \end{aligned} \quad (38)$$

де значення коефіцієнтів $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{ij}$ обчислюються в точках інтегрування K_m , що розташовані в поперечних перетинах вздовж вісі x^3 (рис. 2).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компоненти тензора напружень в місцевій системі координат (14):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} = g_{12}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} = g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} = \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} &= g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}. \end{aligned} \quad (39)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена, отримані з урахуванням (9), матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}^{\circ} g_{22}^{\circ}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{12}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \left. \frac{\partial \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^{\beta}=0} = \frac{\partial (\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)}^{\circ})}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\beta} &= \frac{1}{g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\beta}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^{\circ}}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}},$$

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = g_{\alpha(\alpha)} \Big|_{x^\beta=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Коефіцієнтом розкладення $\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\beta=0}$ нехтуємо, як величиною більш

високого порядку малості.

Запишемо коефіцієнти розкладу деформацій (40) через переміщення в базисній системі координат:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(u_{m',i} z_{,j}^{m'} + u_{m',j} z_{,i}^{m'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \epsilon_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial (u_{\gamma,\alpha} z_{,\alpha}^{\gamma})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = u_{\gamma,12} z_{,\alpha}^{\gamma} + u_{\gamma,\alpha} z_{,12}^{\gamma} \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \left(u_{\gamma,3(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + u_{\gamma,3} z_{,12}^{\gamma} + u_{3',12} z_{,3}^{3'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} &= u_{3',3\alpha} z_{,3}^{3'} \Big|_{x^\alpha=0}. \end{aligned} \quad (41)$$

Введемо наступні позначення для значень похідних від переміщень $u_{m',i}$ і компонент тензора перетворення $z_{,i}^{m'}$ в центрі СЕ: $u_{m',i} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{m',i}$,

$z_{,i}^{m'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{u}_{m',i} \overset{\circ}{z}_{,j}^{m'} + \overset{\circ}{u}_{m',j} \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'} \right); \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{u}_{\gamma,12} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{\gamma,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{u}_{\gamma,3(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{\gamma,3} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{3',12} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right); \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{u}_{3',3\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}. \end{aligned} \quad (42)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень в поперечному перерізі СЕ (29):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma(S_1 S_2)} \left(S_{\alpha} z_{,\beta}^{\gamma} + S_{\beta} z_{,\alpha}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1 S_2)} S_{\alpha} z_{,3}^{\gamma} + \frac{1}{2} u_{\gamma(S_1 S_2),3} z_{,\alpha}^{\gamma} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1 S_2),3} z_{,3}^{\gamma} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma(S_1 S_2)} \left(2S_1 S_2 z_{,\alpha}^{\gamma} + S_{\alpha} z_{,12}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1 S_2)} \left(2S_1 S_2 z_{,3}^{\gamma} \right) + \right. \\
&\quad \left. + u_{\gamma(S_1 S_2),3} \left(S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1 S_2),3} \left(2S_{\alpha} z_{,3}^{\gamma} \right) \right].
\end{aligned} \tag{43}$$

Із урахуванням розкладу переміщень в напрямку утворюючої (31), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{\gamma(S_1 S_2)}^l \left(S_{\alpha} z_{,\beta}^{\gamma} + S_{\beta} z_{,\alpha}^{\gamma} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{m'(S_1 S_2)}^l \left(S_{\alpha} z_{,3}^{\gamma} \Phi^{(l)} + \frac{1}{2} z_{,\alpha}^{\gamma} \Phi_{,3}^{(l)} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{3'(S_1 S_2)}^l z_{,3}^{\gamma} \Phi_{,3}^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{\gamma(S_1 S_2)}^l \left(2S_1 S_2 z_{,\alpha}^{\gamma} + S_{\alpha} z_{,12}^{\gamma} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{m'(S_1 S_2)}^l \left\{ \left(2S_1 S_2 z_{,3}^{\gamma} \right) \Phi^{(l)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u_{\gamma(S_1 S_2),3} \left(S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma} \right) \Phi^{(l)} \right\} \right];
\end{aligned} \tag{44}$$

$$+ \left(S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \Bigg\};$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{3(S_1 S_2)}^l \left(2S_{\alpha} z_{,3}^{\gamma} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right].$$

Виведення рівнянь рівноваги та матриці жорсткості неоднорідного косокутного призматичного скінченного елемента. Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи N СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (45)$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (46)$$

Подаючи, відповідно до МССЕ, фізичні компоненти тензору напружень (38) і тензору деформацій (33) через їх значення у центрі елемента отримаємо:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\ \left. + 2 \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} \delta \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\ \left. + \left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta} x^{\beta} \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (47)$$

Виконуючи інтегрування останнього виразу з урахуванням значень наступних інтегралів :

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0,$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}, \quad (48)$$

для варіації енергії деформації одного СЕ одержимо:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (49)$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень (39) і деформацій (40) в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3, \quad (50)$$

або, у матричній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{g} dx^3, \quad (51)$$

$$\text{де } \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\};$$

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} \right\}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} \right\}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{23} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{13} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} \right\}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{23} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{33} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{13} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{33} \right\}. \end{aligned}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} &= \sum_{l=0}^L \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right] \Phi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] \Phi_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l; \\ \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} &= \sum_{l=0}^L \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] \Phi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \Phi_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l, \end{aligned} \quad (52)$$

де

$$\begin{aligned} \{ u \}_l^T &= \{ u_{i(-1;-1)}^l \quad u_{i(1;-1)}^l \quad u_{i(-1;1)}^l \quad u_{i(1;1)}^l \}; \\ \left[\overset{\circ}{B}_\alpha \right] &= \left[\overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(1;1)}; \\ \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right] &= \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(1;1)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(S_1, S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(S_1, S_2)}$ у виразі (53)

для неоднорідних косокутних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (44):

$$\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} \right) & \frac{1}{2} \left(S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} & \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} S_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} S_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \end{bmatrix};$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} (B_{1,\alpha})_{11} & (B_{1,\alpha})_{12} & 0 \\ 0 & 0 & (B_{1,\alpha})_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$(B_{1,\alpha})_{11} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{1'} - \frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$(B_{1,\alpha})_{12} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} - \frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$(B_{1,\alpha})_{23} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} - \frac{1}{4} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (B_{2,\alpha})_{21} & (B_{2,\alpha})_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \end{bmatrix},$$

де

$$(B_{2,\alpha})_{21} = \frac{1}{4} \left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^1 + \overset{\circ}{z}_{,12}^1 \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^1 \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$(B_{2,\alpha})_{22} = \frac{1}{4} \left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^2 + \overset{\circ}{z}_{,12}^2 \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^2 \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}.$$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій (52) через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \left(\delta\{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{-T} \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{-T} \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta\{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{-T} \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{-T} \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \\ &= \sum_{l=0}^L \delta\{u_l\}^T \left\{ \overset{\circ}{R} \right\}_l, \end{aligned} \quad (54)$$

де $\left\{ \overset{\circ}{R} \right\}_l$ – вектор вузлових реакцій СЕ:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\} &= \left[\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{-T} \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{-T} \varphi_{,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} dx^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{-T} \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{-T} \varphi_{,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} dx^3 \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \\ &= \left[\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{-T} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{-T} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{-T} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{-T} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Виконуємо чисельне інтегрування за напрямком x^3 :

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_m^{(l)} H_m = \{ \sigma \}_{l1} ,$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} H_m = \{ \sigma \}_{l3} , \quad (56)$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_m^{(l)} H_m = \{ \sigma \}_{l\alpha} ,$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} H_m = \{ \sigma \}_{l\alpha 3} ,$$

з урахуванням результатів якого отримаємо вираз для обчислення компонент вектору вузлових реакцій СЕ:

$$\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\} = \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \{ \sigma \}_{l1} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \{ \sigma \}_{l3} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \{ \sigma \}_{l\alpha} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T \{ \sigma \}_{l\alpha 3} \right) \right\} \sqrt{g} . \quad (57)$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} , \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} , \quad (58)$$

де, у відповідності із законом Гука (11),

$$\left[\overset{\circ}{D} \right] = \left[\overset{\circ}{C}^{ijkl} \right] , \quad \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] = \left[\left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij33} \right] \right] .$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергій деформування СЕ (54) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right\} \sqrt{g} dx^3 . \quad (59)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left(\delta \{u\}_l^T \right) [K]_{ln} \{u\}_n, \quad (60)$$

де $[K]_{ln}$ – матриця жорсткості неоднорідного косокутного призматичного СЕ:

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}^T \varphi^{(l)} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix} \varphi^{(n)} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix} \varphi_{,3}^{(n)} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T \varphi^{(l)} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \begin{bmatrix} \circ \\ D_{,\alpha} \end{bmatrix} \times \right. \\ & \left. \times \left(\begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix} \varphi^{(n)} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_{,3}^{(n)} \right) \right\} \sqrt{g} \, dx. \quad (61) \end{aligned}$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком x^3 з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$\begin{aligned} [D]_{00}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} H_m; \\ [D]_{30}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} H_m; \\ [D]_{03}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \varphi_{,3} \varphi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \varphi_{,3} \varphi_m^{(n)} H_m; \\ [D]_{33}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \varphi_{,3} \varphi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} \varphi_{,3} \varphi_m^{(n)} H_m; \\ [D]_{00\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \circ \\ D_{,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \begin{bmatrix} \circ \\ D_{,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} H_m; \quad (56) \\ [D]_{30\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \circ \\ D_{,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \begin{bmatrix} \circ \\ D_{,\alpha} \end{bmatrix} \varphi_m^{(n)} H_m; \end{aligned}$$

$$[D]_{03\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m;$$

$$[D]_{33\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m.$$

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T [D]_{00}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T [D]_{30}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T [D]_{03}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \right. \\ & + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T [D]_{33}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{00\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \right. \\ & + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{30\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] + \right. \\ & \left. \left. + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \right) \right\} \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (63)$$

Необхідно зауважити, що при розв'язанні задач термов'язко-пружнопластичності, для кожної з M точок інтегрування обчислюються не тільки значення координат x^3 , значення базисних функцій $(\varphi^l)_m$, їх похідних $(\varphi^l)_{,3}$, та вагових функцій H_m , але й величини температур, величини прирощень деформацій пластичності і повзучості, їх накопичені величини, а також величини параметра пошкодженості матеріалу.

Отримані вирази матриці жорсткості (63) і вектору вузлових реакцій (57) неоднорідного косокутного призматичного скінченного елемента дозволяють будувати дискретні моделі для неоднорідних призматичних тіл складної форми. Урахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі призматичного СЕ дозволяє зменшити обмеження на співвідношення розмірів сторін і косокутність поперечного перерізу СЕ, що, в свою чергу, дозволить зменшити кількість невідомих в дискретних моделях НМСЕ.

Розв'язання тестових прикладів. З метою доведення ефективності використання розроблених розв'язувальних співвідношень НМСЕ для призматичних тіл з довільними граничними умовами на торцях із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині

поперечного перерізу CE , розглянуто наступний тестовий приклад про двовісний розтяг паралелепіпеду розмірами $20 \times 20 \times 10$ см в умовах плоскої деформації в напрямку z^3 . Внаслідок симетрії розрахункова схема і дискретні моделі побудовані для $1/4$ об'єкта (рис. 4). Вихідні дані: розтягуюче зусилля $q = 1 \text{ кг/см}^2$, модуль пружності $E = 1 \text{ кг/см}^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

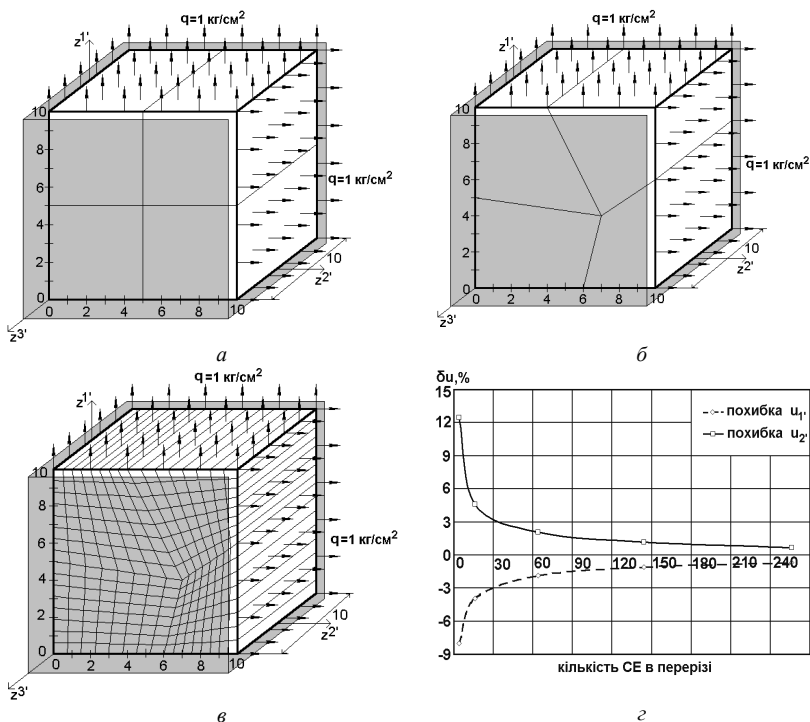


Рис. 4. Тестовий приклад про двовісний розтяг паралелепіпеду:
 а) дискретна модель з ортогональною сіткою CE ; б) дискретні моделі тіла з неортогональною (косокутною) сіткою CE ; в) залежність похибки обчислення переміщень від загальної кількості CE в поперечному перерізі тіла по відношенню до еталонного розв'язку

В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий для ортогональної сітки (рис. 4,а). Результати, отримані для косокутної сітки (рис. 4,б) з врахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу CE , повністю співпали з еталонним розв'язком.

Як видно з наведеної залежності похибки обчислення переміщень від загальної кількості СЕ в поперечному перерізі тіла по відношенню до еталонного розв'язку (рис. 4,г), врахування змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ дозволяє отримувати вірогідні результати при значно меншій кількості елементів в площині поперечного перерізу. В даному тестовому прикладі використання розроблених косокутних СЕ дозволило скоротити кількість невідомих більш ніж в 60 разів при збереженні похибки отриманого розв'язку в межах 1%.

Висновки. В даній роботі отримані вирази матриці жорсткості (63) і вектору вузлових реакцій (57) неоднорідного косокутного призматичного СЕ з довільними граничними умовами. Ефективність його застосування доведена на тестовому прикладі про двовісний розтяг паралелепіпеда в умовах плоскої деформації – кількість невідомих при розв'язанні задачі скоротилася більш ніж 60 разів. Отже, врахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі СЕ дозволяє отримувати вірогідні результати при значно меншій кількості невідомих дискретної скінченоелементної моделі, що в свою чергу дозволяє зменшити обчислювальні витрати на порядок і більше.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Козак А.Л., Рутковский В.А., Сахаров А.С.* Численное моделирование разрушения железобетонных конструкций по методу конечных элементов. – К.: Наукова думка, 1996. – 360 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
4. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
5. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикладная механика. – 2000. – № 3. – С. 31-66.
6. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
7. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1969. – 420 с.
8. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
9. *Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 479 с.
10. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учётом жестких смещений. // Спротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – с. 147-156.
11. *Сніжко Н.А., Солодей І.І., Овсянніков О.С., Шевченко Ю.В.* Вимушені коливання баштової градирні АЕС під дією вітрового навантаження. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С.92–103.

Надійшла до редколегії 12.09.2005 р.

УДК 539.3

Гуляєв В. І., д-р техн. наук,
Белова М. О., канд. фіз.-мат. наук,
Горбунович І. В.

ДО РОЗРАХУНКУ СТІЙКОСТІ ТА КОЛИВАНЬ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ

Ефективним способом проходки шахтових стволів і свердловин великого діаметра є використання бурильних установок роторного типу. Основною умовою підвищення якості проходки стволів і свердловин є проведення буріння із заданою рейсовою швидкістю та із забезпеченням вертикальності осі ствола. Невиконання цих вимог призводить до звичайних утрат енергетичних ресурсів і часу. Наприклад, для бурових установок роторного типу при проходці шахтових вентиляційних стволів відхилення осі ствола від вертикалі не повинно перевищувати 1м на 100м глибини.

Великі глибини буріння, що визначають значні навантаження, та ефективність проходки стволів і свердловин викликають необхідність проведення розрахунків напружено-деформованого стану бурильної колони (БК), який багато в чому залежить від режимів буріння. Крім того, ефективність проходки стволів часто залежить від тих граничних режимів, які можуть розвинути бурові установки. Усе це вимагає врахування динамічних навантажень, як найбільш небезпечних ускладнень у процесі буріння [4, 7, 9]. Для цього необхідно дослідити напружено-деформований стан БК при динамічних навантаженнях і умови втрати її стійкості, яка є однією з основних причин відхилення буріння від заданого вертикального напрямку. При дослідженні цих проблем виникають певні труднощі, які досі у теорії розрахунку БК не були достатньо вивчені. До основних із них можна віднести вимушені коливання систем із розподіленими і зосередженими масами та вивчення на їх основі процесів у бурових установках, а також стійкості колони як вагомого стержня, що зазнає розтягу-стиску, при різних граничних умовах і великих глибинах буріння. Крім того, значна частина методів розв'язання практичних задач - це наближені методи, точність яких в існуючій літературі не оцінено. Тому розробка нових моделей динамічних процесів, уточнення розрахунків на міцність і стійкість БК та оцінка існуючих наближених розв'язків із визначенням границь їх застосування, що сприяють встановленню ефективних режимів буріння, якості проходки стволів і свердловин, запобіганню аварійних ситуацій, є

актуальною і важливою проблемою будівельної механіки та механіки деформованого твердого тіла.

Багаторічний досвід експлуатації бурильних установок свідчить, що від статичного навантаження БК руйнуються рідко. Більшість аварій на бурових установках відбувається від динамічних навантажень, які обумовлюють процеси руйнування конструкцій установок.

Із урахуванням технологічних процесів буріння на БК при роторному способі буріння діють різноманітні види навантажень, основними з яких є:

- розтяг на верхній ділянці колони від власної ваги колони та ваги обважнювачів із долотом;
- стиснення на нижній ділянці колони;
- згин на нижній ділянці колони;
- додаткові динамічні навантаження, що виникають при обертанні колони, при ударних процесах і вимушених коливаннях;
- крутильний момент, необхідний для обертання колони і руйнування породи;
- навантаження, обумовлені наявністю тертя з боку промивної рідини.

У процесі роторного буріння виникають статичні та динамічні навантаження. Якщо врахування статичних навантажень, як правило, особливих труднощів не завдає, то розрахунок на динамічні навантаження вимагає знання певних законів коливань, що викликає ускладнення у проведенні розрахунків.

Нехай бурильна колона обертається з кутовою швидкістю ω . Для побудови рівнянь її руху введемо інерційну систему координат $OXYZ$ з початком у точці підвісу і пов'язану з колоною систему координат $Oxyz$ з осями $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, яка обертається разом з нею. У вихідному недеформованому стані осі OZ і Oz співпадають із поздовжньою віссю колони. Будемо досліджувати стійкість колони і її коливань у системі координат $Oxyz$, що обертається. Прийmemo, що пружні переміщення її елементів вздовж осей Ox і Oy складають u і v , переміщеннями вздовж осі Oz знехтуємо.

Динамічна рівновага колони описується рівняннями згину балки в площинах xOz і yOz відповідно

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_y. \quad (1)$$

Тут M_x, M_y - внутрішні моменти в розглянутому перерізі балки, які діють відносно осей, що проходять через центр перерізу паралельно осям

Ox і Oy ; q_x і q_y - інтенсивності зовнішніх навантажень, напрямлених паралельно відповідним осей.

Підкреслимо, що у випадку, який розглядається, для функцій M_x , M_y стандартні рівності

$$M_x = EI \frac{d^2 v}{dz^2}, \quad M_y = EI \frac{d^2 u}{dz^2}$$

є неприйнятні, оскільки балка попередньо напружена повздовжньою силою T і зовнішнім крутильним моментом M_z , що викликає додаткові згинаючі моменти у балці при її деформуванні [6, 8]. Тому для згинаючих моментів використовуються формули

$$M_x = EI \frac{d^2 v}{dz^2} - Tv + M_z \frac{du}{dz}, \quad (2)$$

$$M_y = EI \frac{d^2 u}{dz^2} - Tu + M_z \frac{dv}{dz},$$

в яких другі доданки в правих частинах визначають додаткові згинаючі моменти, обумовлені ексцентриситетом повздовжньої сили розтягу T при деформуванні балки, а треті доданки представляють добавки до згинаючих моментів, спричинені проектуванням зовнішнього крутильного моменту M_z на осі Ox і Oy при скривленні осьової лінії балки.

Для обчислення складових q_x і q_y повздовжнього розподіленого навантаження на балку необхідно враховувати, що в межах $0 < z < L$, де L - довжина балки, на неї не діють ніякі активні сили і роль цих сил виконують сили інерції, викликані обертанням балки та її пружними коливаннями. Тому вектор \vec{q} цього навантаження знаходиться за допомогою рівності

$$\vec{q} = -\rho F \vec{a}, \quad (3)$$

де ρ - густина матеріалу балки, F - площа її поперечного перерізу, \vec{a} - абсолютне прискорення елемента, що розглядається. Знаходячи вектор \vec{q} , урахуємо, що механічна поведінка балки розглядається в системі координат $Oxuz$, яка обертається; у зв'язку з цим рух кожного елемента є

складним. У цьому випадку його абсолютне прискорення \vec{a} обчислюють за формулою Коріоліса [2]

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c, \quad (4)$$

де \vec{a}^e , \vec{a}^r , \vec{a}^c - вектори переносного, відносного та коріолісового прискорення відповідно.

Вектор переносного прискорення \vec{a}^e знаходять за формулою

$$\vec{a}^e = \vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r}), \quad (5)$$

де $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + z\vec{k}$ - радіус-вектор елемента балки в системі координат $Oxyz$.

Виконавши відповідні векторні операції, дістанемо

$$a_x^e = -\omega^2 u, \quad a_y^e = -\omega^2 v, \quad a_z^e = 0. \quad (6)$$

Складові вектора відносного прискорення в напрямках осей координат $Oxyz$ визначаються рівностями

$$a_x^r = \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad a_y^r = \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad a_z^r = 0. \quad (7)$$

Вектор коріолісового прискорення \vec{a}^c елемента балки обчислюється за формулою

$$\vec{a}^c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}^r, \quad (8)$$

де \vec{V}^r - вектор відносної швидкості елемента зі складовими

$$V_x^r = \frac{du}{dt}, \quad V_y^r = \frac{dv}{dt}, \quad V_z^r = 0. \quad (9)$$

Враховуючи рівності (7), (8), дістаємо

$$a_x^c = -\omega \frac{dv}{dt}, \quad a_y^c = \omega \frac{du}{dt}, \quad a_z^c = 0. \quad (10)$$

Підставляючи знайдені значення компонент прискорень (6), (7), (10) в (4), а потім у (3), отримаємо складові вектора сил інерції

$$q_x = -\rho F \left(-\omega^2 u - 2\omega \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right),$$

$$q_y = -\rho F(-\omega^2 v - 2\omega \frac{du}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2}). \quad (11)$$

Після переходу від звичайних похідних до частинних на основі співвідношень (1), (2), (11) будують рівняння коливань балки, яка обертається і напружена поздовжньою силою T і крутильним моментом M_z

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \rho F \omega^2 u - 2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \rho F \omega^2 v + 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

За допомогою цієї системи можна досліджувати динамічну поведінку і стійкість бурильної колони. Роль повздовжньої сили T в цьому випадку виконує внутрішня сила, що викликається дією реакцій на верхньому кінці закріплення і на нижньому кінці спирання ріжучого інструмента, а також силами ваги самої колони. Крутильний момент M_z , що діє на колону спричинено силами опору різанню на нижньому кінці та приводним крутильним моментом на верхньому кінці. У зв'язку з цим звичайно вважають, що величина T лінійно змінюється вздовж координати z , а M_z залишається сталим.

Відзначимо, що система (12), не зважаючи на її лінійність, має досить складну структуру, обумовлену наявністю доданків виду $\partial^2(M_z \cdot \partial v / \partial z) \partial z^2$, $-\partial^2(M_z \cdot \partial u / \partial z) \partial z^2$, $-2\rho F \omega \partial v / \partial t$, $-2\rho F \omega \partial u / \partial t$ у першому і другому рівняннях. Так, присутність перших двох доданків призводить до того, що система не допускає розв'язку у формі плоскої кривої й осьова лінія зігнутої колони може бути тільки тривимірною кривою (у даному випадку - спіраллю). Наявність інших двох доданків призводить до складнішого закону зміни форми коливань як за просторовою, так і часовою координатами, виключаючи можливість руху елементів колони з однією спільною фазою.

Зазначене ускладнення форм коливань призводить до суттєвого ускладнення і методики дослідження. Оскільки аналітичні методи для розв'язання цієї системи виявляються неприйнятними, при їх теоретичному моделюванні слід орієнтуватися на чисельні підходи. Проте й при їх використанні виникають суттєві труднощі, пов'язані з необхідністю розглядати колони великої довжини. На великих інтервалах інтегрування система (12) набуває так званої "обчислювальної жорсткості", у результаті чого суттєво погіршується збіжність чисельних

методів її інтегрування. У даній роботі для дослідження системи пропонується використати метод початкових параметрів разом з методом Рунге-Кутта і процедурою ортогоналізації за Годуновим.

Розглянемо алгоритм побудови розв'язку системи (12) на прикладі задачі про стійкість бурильної колони. У цьому випадку рівняння (12) зводяться до виду

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left(T \frac{du}{dz} \right) - M_z \frac{d^3 v}{dz^3} - \rho F \omega^2 u &= 0, \\ EI \frac{d^4 v}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left(T \frac{dv}{dz} \right) + M_z \frac{d^3 u}{dz^3} - \rho F \omega^2 v &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Нехай на кінцях $Z=0$ і $Z=L$ колону шарнірно закріплено і реалізуються крайові умови

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2} \Big|_{z=0} = \frac{d^2 v}{dz^2} \Big|_{z=0} &= 0, \\ u(L) = v(L) = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2} \Big|_{z=L} = \frac{d^2 v}{dz^2} \Big|_{z=L} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Будемо вважати кутову швидкість ω параметром і розглянемо задачу про визначення його значення, при якому колона випинається. Тоді для системи (13), (14) потрібно поставити задачу на власні значення. Для цього запишемо її в векторній формі

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dz^4} = F(z) \bar{y} + \omega^2 y, \quad (15)$$

$$A \bar{y}(0) = 0, \quad B \bar{y}(L) = 0. \quad (16)$$

Тут $\bar{y}(z)$ восьмивимірний вектор невідомих, $F(z)$ змінна матриця коефіцієнтів розміру 8×8 , A, B - сталі матриці розміру 4×8 .

Розв'язок системи (15) будемо у формі Коші [1]

$$\bar{y}(z) = Y(z) \cdot \bar{C}, \quad (17)$$

де $Y(z)$ - матриця Коші розміру 8×8 розв'язків системи (15) з початковими умовами

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$\vec{C} = (c_1, c_2, \dots, c_8)^T$ - шуканий сталий вектор. Його компоненти знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка будується підстановкою правої частини (17) у ліві частини умови (16). Значення ω в (15), при якому визначник матриці коефіцієнтів цієї системи дорівнює нулю, є критичним. При цьому значенні кутової швидкості бурильна колона втрачає стійкість. Форма втрати стійкості будується за допомогою рівності (17) підстановкою в її праву частину знайденого вектора \vec{C} . Аналогічно розв'язується задача про вільні коливання колони у часі в формі гармонік з шуканою частотою. Система рівнянь (12) з частинними похідними зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь, яка потім аналізується за наведеним вище алгоритмом.

Відзначимо, що в окремих випадках рівняння (13), що описують стійкість бурильної колони, мають аналітичні розв'язки, які можуть бути використаними для тестування розглянутої методики. Так, якщо кручення й обертання колони відсутні і вона знаходиться під дією повздовжньої стискуючої сили P , прикладеної на краях $Z = 0$ і $Z = L$, рівняння (13) спрощуються і розпадаються на два незв'язні рівняння

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} - P \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad EI \frac{d^4 v}{dz^4} + P \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Вони визначають Ейлерову критичну силу [5]

$$P_9 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Задача допускає просте розв'язання і у випадку балки, якщо $T = 0$, $M_z = 0$. Тоді система також розпадається

$$EI \frac{d^4 u}{dz^4} - \rho F \omega^2 u = 0, \quad EI \frac{d^4 v}{dz^4} - \rho F \omega^2 v = 0.$$

Із неї можна знайти критичну швидкість [2, 3]

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}}.$$

Проте при навантаженні системи крутильним моментом M_z рівняння (13) є зв'язаними, і задача визначення критичних параметрів системи ускладнюється. У випадку $\omega = 0$, $T = -P = \text{const}$ і $M_z = \text{const}$, її розв'язання наведено в роботі [6]

$$M_z^{KP} = \pm \sqrt{EI} \cdot \sqrt{P_0 + P}.$$

Якщо три фактори навантаження стержня присутні одночасно і сила $T \neq \text{const}$, то задача стійкості не має аналітичного розв'язку. Для його побудови в цьому випадку зручно застосувати описаний вище підхід.

1. *Василенко М.В., Алексейчук О.М.* Теорія коливань і стійкості руху. – К.: Вища школа, 2004. – 526 с.
2. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Э.А. и др.* Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. – Львов: Вища школа, 1983. – 287 с.
3. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
4. *Сароян А.Е.* Теория и практика работы буровой колонны. – М.: Наука 1990. – 264 с.
5. *Светлицкий В.А.* Механика стержней. М.: Высшая школа, 1987. Ч. 2: Динамика. – 304 с.
6. *Федосеев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
7. *Харченко Е.В.* Динамические процессы буровых установок. – Львов: Свиточ, 1991. – 176 с.
8. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
9. *Юртаев В.Г.* Динамика буровых установок. – М.: Наука, 1987. – 155 с.

Надійшла до редколегії 10.08.2005 р.

УДК 539.3

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук
Погорелова О.С., канд. фіз.-мат. наук
Постнікова Т.Г., канд. техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІБРОУДАРНИХ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ВИСОТНОЇ СПОРУДИ З МАЯТНИКОВИМ ГАСИТЕЛЕМ

Розглянуті динамічні процеси, які виникають під дією вітрового навантаження, у висотній споруді з ударним маятниковим гасителем. Запропоновані два закони моделювання сили контактної взаємодії. Запропонований критерій вибору параметрів моделюючої функції.

У даній статті приводяться результати досліджень усталених віброударних режимів коливань в пружних системах, що виникають у висотній споруді, обладнаній ударним маятниковим гасителем, під дією вітрового навантаження. Моделювання удару базується на застосуванні силових характеристик контактної взаємодії. Існує інший підхід, де моделювання удару здійснюється за допомогою відповідних граничних умов з використанням коефіцієнту відновлення. Але такий підхід вимагає чіткої фіксації моменту удару і відповідної корекції початкової фази періодичного навантаження. При наявності у пружній системі більш ніж одної контактуючої пари вказаний підхід приводить до використання багатоточечних крайових задач, що в певній мірі ускладнює відповідні розрахунки. Роздільний опис міжударних рухів і процесу удару може також стати проблематичним при використанні більш загальних концепцій теорії співударів твердих тіл. Тому доцільно виконувати побудову та аналіз єдиної форми запису рівнянь руху елементів віброударних систем на всій часовій осі. Ці рівняння повинні описувати повну сукупність реалізованих рухів. Це досягається за допомогою введення нелінійних залежностей, що відображають процес силової взаємодії тіл, які співударяються, чи їх елементів. Зазначені залежності будуються на основі силових характеристик контактної взаємодії $F(x)$ чи $F(x, \dot{x})$, де x - відстань між тілами, що контактують.

Такий підхід суттєво спрощує побудову, що пов'язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем. Це твердження повною мірою відноситься і до аналізу стійкості усталених періодичних віброударних режимів коливань. При моделюванні удару за допомогою відповідних граничних умов з використанням коефіцієнту відновлення необхідно формулювати спеціальне означення стійкості. В той же час при

застосуванні нелінійних силових характеристик контактної взаємодії аналіз стійкості віброударних рухів може проводитися в рамках класичної теорії Флоке.

Саме такий підхід використовується у даній роботі для розв'язку задачі про усталені віброударні коливання пружної системи – висотної споруди з маятниковим гасителем.

У статті продовжувалися дослідження присвячені вивченню віброударних процесів, які були розпочаті раніше в [1-5].

1. Постановка задачі

Розглядається висотна споруда баштового типу з ударним маятниковим гасителем. Система складається з пружної башти висотою H , до якої кріпиться ударний маятниковий гаситель масою m_m на стержні довжиною l , що схематично зображено на рис. 1. Башта знаходиться під дією розподіленого вітрового навантаження $q(x,t)$. Демпфірування маятника приймається пропорційним першому ступеню його кутової швидкості.

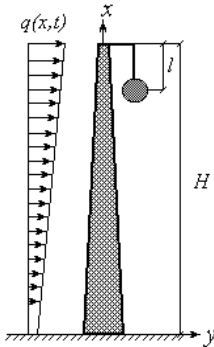


Рис. 1

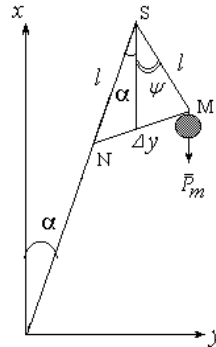


Рис. 2

Для побудови дискретної моделі задачі, що розглядається, застосовується метод узагальнених координат. Переміщення башти представляємо в вигляді зваженої суми базисних функцій, в якості яких вибираються форми власних коливань $\varphi_i(x)$. Дослідження показали, що основний внесок в коливальний процес дають перші дві форми - $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$. Приймемо рівняння вигнутої лінії башти, що змінюється по закону

$$y(x,t) = y_1(t)\varphi_1(x) + y_2(t)\varphi_2(x) . \quad (1)$$

Приєднуючи до башти маятниковий гаситель, отримуємо систему, що схематично зображена на рис. 1. Така система має три степені вільності. За узагальнені координати приймаємо:

$$y_1(t), y_2(t), \Psi(t).$$

Ударна взаємодія між баштою та маятником моделюється за допомогою прикладання до контактуючих тіл відштовхуючої сили контактної взаємодії F , котра залежить від їх відносної відстані NM , яка далі позначена Δy (рис. 2).

При цьому $F(\Delta y) = Cf(\Delta y)$, де C – коефіцієнт відповідності, за допомогою якого моделююча функція $f(\Delta y)$, що має ту чи іншу розмірність в залежності від її вигляду, переводиться в силу з відповідною розмірністю. Функцію f краще за все брати як δ -функцію, але з такою функцією неможливо чисельно інтегрувати рівняння руху системи, тому запропоновані два варіанта функції f , які так чи інакше наближають її до δ -функції.

За першим варіантом функція f , змінюється за експоненціальним законом:

$$f(\Delta y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}, & \Delta y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\Delta y)^2}{2\sigma^2}}, & \Delta y > 0 \end{cases}. \quad (2)$$

У другому варіанті пропонується функція f , що описується формулами:

$$f(\Delta y) = \begin{cases} 0, & d \leq \Delta y, \\ R - \sqrt{R^2 - [d - \Delta y]^2}, & d - \delta \leq \Delta y \leq d, \\ k_3[d - \Delta y] - b, & 0 \leq \Delta y \leq d - \delta, \\ k_3d - b, & \Delta y \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут d – зазор між тілами, при якому виникає відштовхуюча контактна сила взаємодії. При подальшому зменшенні відстані Δy відштовхуюча сила зростає спочатку повільно, по колу радіусу R , поки зазор Δy не стане менше $(d - \delta)$, а потім швидко по закону прямої до повного зближення тіл, коли сила вже зростати не може – тіла відштовхуються, відбувся удар. Параметри b та δ визначаються співвідношеннями:

$$b = R\left(\sqrt{1+k_3^2} - 1\right), \quad \delta = \frac{k_3 R}{\sqrt{1+k_3^2}}. \quad (4)$$

Виходячи з того, що у наших побудовах $d > \delta$, на d накладається таке обмеження:

$$d > \frac{k_3 R}{\sqrt{1+k_3^2}}. \quad (5)$$

Схематично графіки таких функції мають вигляд, представлений на рис. 3, 4.

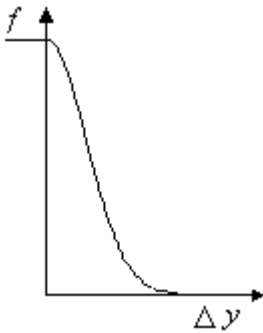


Рис. 3



Рис. 4

Слід відмітити, що при вдалому моделюванні удару за допомогою (2) і (3) ситуація $\Delta y < 0$ неможлива, тому що при $\Delta y = 0$ здійснюється удар маятника о башту, маятник відштовхується і знов $\Delta y > 0$. Та частина графіку, що знаходиться у від'ємній частині осі абсцис, не реалізується. Параметри моделюючої сили слід підбирати таким чином, щоб удар моделювався щонайкраще. Відносна відстань контактуючих тіл – маятника та башти, визначається із трикутника NMS (рис. 2):

$$\Delta y(t) = 2l \sin \frac{\psi(t) + \alpha(t)}{2}. \quad (6)$$

Рівняння руху системи, отримані за допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду, запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{y}_1 + a_{12}\ddot{y}_2 + a_{13}\ddot{\Psi} &= D_1, \\ a_{21}\ddot{y}_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + a_{23}\ddot{\Psi} &= D_2, \\ a_{31}\ddot{y}_1 + a_{32}\ddot{y}_2 + a_{33}\ddot{\Psi} &= D_3, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 + m_m \varphi_1^2(H), \quad a_{12} = m_m \varphi_1(H) \varphi_2(H), \quad a_{13} = lm_m \varphi_1(H) \cos(\psi), \\ a_{21} &= m_m \varphi_1(H) \varphi_2(H), \quad a_{22} = m_2 + m_m \varphi_2^2(H), \quad a_{23} = lm_m \varphi_2(H) \cos(\psi), \\ a_{31} &= lm_m \varphi_1(H) \cos(\psi), \quad a_{32} = lm_m \varphi_2(H) \cos(\psi), \quad a_{33} = l^2 m_m, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \dot{\psi}^2(t) lm_m \varphi_1(H) \sin \psi(t) - 2\xi_1 m_1 \omega_1 \dot{y}_1(t) - K_{11} y_1(t) + p_1(t) + \\ &+ f(\Delta y) [\varphi_1(H) - \varphi_1(H-l)] \cdot \cos \frac{\psi(t) - \alpha(t)}{2}, \\ D_2 &= \dot{\psi}^2(t) lm_m \varphi_2(H) \sin \psi(t) - 2\xi_2 m_2 \omega_2 \dot{y}_2(t) - K_{22} y_2(t) + p_2(t) + \\ &+ f(\Delta y) [\varphi_2(H) - \varphi_2(H-l)] \cos \frac{\psi(t) - \alpha(t)}{2}, \\ D_3 &= -\xi_m \dot{\psi}(t) - m_m g l \sin \psi(t) + f(\Delta y) l \sin \psi(t) \cdot \sin \frac{\psi(t) - \alpha(t)}{2} + \\ &+ f(\Delta y) l \cos \psi(t) \cdot \cos \frac{\psi(t) - \alpha(t)}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_0^L m(x) \varphi_1^2(x) dx, & m_2 &= \int_0^L m(x) \varphi_2^2(x) dx, \\ K_{11} &= \int_0^L EJ(x) (\varphi_1''(x))^2 dx, & K_{22} &= \int_0^L EJ(x) (\varphi_2''(x))^2 dx, \\ p_1(t) &= \int_0^L q(x,t) \varphi_1(x) dx, & p_2(t) &= \int_0^L q(x,t) \varphi_2(x) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

де, як звичайно, E – модуль пружності, $J(x)$ – погонний момент інерції башти, $m(x)$ – її погонна маса. Тут позначено також: ξ_1, ξ_2 – коефіцієнт демпфірування башти, ξ_m – коефіцієнт демпфірування маятника, ω_1, ω_2 – парціальні частоти башти. Кут $\alpha(t)$ – це кут відхилення башти від вертикалі (рис.2), він є малим кутом. Тому

$$\alpha(t) = \frac{y(H)}{H}.$$

Згідно (1)

$$\alpha(t) = \frac{y_1(t)\varphi_1(H) + y_2(t)\varphi_2(H)}{H}. \quad (11)$$

Зовнішнє вітрове навантаження $p_1(t)$ та $p_2(t)$ є випадковим. Для башти без маятника випадкове вітрове навантаження може бути замінено гармонійним навантаженням з частотою, що дорівнює першій парціальній частоті башти ω_1 [6]. Для башти з маятником це твердження, мабуть, має інший вигляд, але поки що поширимо його на систему башта-маятник і подивимось на динамічні процеси в цій системі під дією гармонійного впливу з частотою, яка співпадає з першою парціальною частотою башти ω_1 .

2. Використання методу продовження розв'язку за параметром для побудови кривих навантаження системи башта-маятник

Для розв'язку задачі, що поставлена у п. 1, використовується чисельний метод продовження розв'язку за параметром [7]. Опишемо коротко застосування цього методу щодо віброударних коливань пружної системи з трьома степенями вільності (рис. 2). Запишемо систему рівнянь (7) у вигляді:

$$A\ddot{\bar{y}} = \bar{D}, \quad (12)$$

а розв'язок цієї системи у вигляді:

$$\ddot{\bar{y}} = A^{-1}\bar{D}, \quad (13)$$

де вектор $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, вектор $\bar{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$, $y_3(t) = \psi(t)$, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Як було відмічено в п. 1, в рамках даної задачі як модель вітрового навантаження приймемо гармонійний вплив з частотою, що дорівнює

першій парціальній частоті башти ω_1 . Таким чином, узагальнені навантаження $p_1(t)$ та $p_2(t)$ представляються у вигляді:

$$p_1(t) = \lambda P_{10} \sin \omega t, \quad p_2(t) = \lambda P_{20} \sin \omega t, \quad \omega = \omega_1. \quad (15)$$

де λ - параметр, що характеризує інтенсивність вітрового впливу.

Тоді будемо вважати, що в системі реалізується режим усталених віброударних Т-періодичних коливань. Цей усталений віброударний Т-періодичний режим представляє собою розв'язок системи (12), що задовольняє умовам періодичності (граничним умовам):

$$\begin{aligned} y_i(0) &= y_i(T), \\ \dot{y}_i(0) &= \dot{y}_i(T), \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (16)$$

Будуючи для різних λ розв'язок системи (12), що задовольняє умовам періодичності (16), простежимо еволюцію усталеного віброударного процесу при зміні інтенсивності зовнішнього навантаження. Побудова кривих навантаження проводиться методом продовження розв'язку за параметром λ .

Нехай при деякому значенні параметра навантаження $\lambda = \lambda_k$ на кроці k відомий розв'язок $y_{ik}(t)$ ($i=1,2,3$) системи (12), який задовольняє граничним умовам (16). Цей розв'язок визначається початковими умовами

$$y_{ik}(t) = y_i(t, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k), \quad i=1,2,3. \quad (17)$$

При цьому виконуються умови періодичності:

$$\begin{aligned} y_{ik}(0) &= y_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k), \\ \dot{y}_{ik}(0) &= \dot{y}_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k), \quad i=1,2,3. \end{aligned} \quad (18)$$

Візьмемо наступний $(k+1)$ -ий крок, коли параметр навантаження λ отримав приріст $\Delta\lambda_k$, тоді початкові значення переміщень y_{ik} теж отримують прирости:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \Delta\lambda_k, \\ y_{i,k+1}(0) &= y_{ik}(0) + \Delta y_{ik}, \\ \dot{y}_{i,k+1}(0) &= \dot{y}_{ik}(0) + \Delta \dot{y}_{ik}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (19)$$

На $(k+1)$ -ому кроці теж виконуються умови періодичності:

$$\begin{aligned}
 y_{ik+1}(0) &= y_i(T, y_{1k+1}(0), y_{2k+1}(0), y_{3k+1}(0), \dot{y}_{1k+1}(0), \dot{y}_{2k+1}(0), \dot{y}_{3k+1}(0), \lambda_{k+1}), \\
 \dot{y}_{ik+1}(0) &= \dot{y}_i(T, y_{1k+1}(0), y_{2k+1}(0), y_{3k+1}(0), \dot{y}_{1k+1}(0), \dot{y}_{2k+1}(0), \dot{y}_{3k+1}(0), \lambda_{k+1}) \\
 & \quad i=1,2,3.
 \end{aligned} \quad (20)$$

Підставляючи (19) в ліві та праві частини (20) і розкладаючи функції $y_i, \dot{y}_i, (i=1,2,3)$ в правих частинах (20) в ряд Тейлора відносно приростів $\Delta y_{ik}, \Delta \dot{y}_{ik}, (i=1,2,3)$ та $\Delta \lambda_k$ і відкидаючи члени вище першого порядку відносно приростів, запишемо:

$$\begin{aligned}
 y_{ik}(0) + \Delta y_{ik} &= y_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) + \\
 & \quad \frac{\partial y_i}{\partial y_{1k}(0)} \Delta y_{1k} + \frac{\partial y_i}{\partial y_{2k}(0)} \Delta y_{2k} + \frac{\partial y_i}{\partial y_{3k}(0)} \Delta y_{3k} + \\
 & \quad \frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_{1k}(0)} \Delta \dot{y}_{1k} + \frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_{2k}(0)} \Delta \dot{y}_{2k} + \frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_{3k}(0)} \Delta \dot{y}_{3k} + \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \Delta \lambda_k, \\
 \dot{y}_{ik}(0) + \Delta \dot{y}_{ik} &= \dot{y}_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) + \\
 & \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{1k}(0)} \Delta y_{1k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{2k}(0)} \Delta y_{2k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial y_{3k}(0)} \Delta y_{3k} + \\
 & \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{y}_{1k}(0)} \Delta \dot{y}_{1k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{y}_{2k}(0)} \Delta \dot{y}_{2k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{y}_{3k}(0)} \Delta \dot{y}_{3k} + \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \lambda} \Delta \lambda_k, i=1,2,3.
 \end{aligned} \quad (21)$$

Такі перетворення дають можливість лінеаризувати систему і отримати лінійну систему шести алгебраїчних рівнянь відносно шести невідомих Δy_{ik} та $\Delta \dot{y}_{ik}$ ($i=1,2,3$):

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{ik}(0)} - 1 \right) \Delta y_{ik} + \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{jk}(0)} \Delta y_{jk} + \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{1k}(0)} \Delta y_{1k} + \\
 & + \frac{\partial y_i(T)}{\partial \dot{y}_{2k}(0)} \Delta \dot{y}_{2k} + \frac{\partial y_i(T)}{\partial \dot{y}_{2k}(0)} \Delta \dot{y}_{2k} + \frac{\partial y_i(T)}{\partial \dot{y}_{3k}(0)} \Delta \dot{y}_{3k} = \\
 & = - \frac{\partial y_i(T)}{\partial \lambda_k} \Delta \lambda_k + [y_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) - y_{ik}(0)], \\
 & \quad i = 1, j = 2,3; \quad i = 2, j = 1,3; \quad i = 3, j = 1,2.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Слід звернути увагу на вирази у квадратних дужках у правих частинах всіх рівнянь системи (22). Якщо умови періодичності (16) при $\lambda = \lambda_k$ виконуються точно, ці вирази дорівнюють нулю. Але, внаслідок того, що при дослідженні еволюції віброударного процесу при зміні інтенсивності зовнішнього навантаження застосовується чисельний підхід, умови періодичності задовольняються з нев'язками:

$$\begin{aligned}
 r_{ik} &= y_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) - y_{ik}(0), \\
 r_{i+3,k} &= \dot{y}_i(T, y_{1k}(0), y_{2k}(0), y_{3k}(0), \dot{y}_{1k}(0), \dot{y}_{2k}(0), \dot{y}_{3k}(0), \lambda_k) - \dot{y}_{ik}(0), \quad (23) \\
 i &= 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Значення нев'язки дозволяють вирішити, чи добре знайдені прирости початкових умов, і, як наслідок, самі початкові умови. Коли значення нев'язки розв'язку системи (22) великі, необхідно змінити приріст параметра навантаження λ і знову шукати нові значення приростів початкових умов.

Отже підкреслимо ще раз, що лінійна система алгебраїчних рівнянь (22) дозволяє знайти невідомі прирости початкових умов $\Delta y_{ik}, \Delta \dot{y}_{ik}, i = 1, 2, 3$ такі, що розшуковуються.

Але спочатку треба знайти коефіцієнти цієї системи. Матриця коефіцієнтів має 42 елемента, її вигляд такий:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{jk}(0)} & \frac{\partial y_i(T)}{\partial \dot{y}_{jk}(0)} & \frac{\partial y_i(T)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \dot{y}_i(T)}{\partial y_{jk}(0)} & \frac{\partial \dot{y}_i(T)}{\partial \dot{y}_{jk}(0)} & \frac{\partial \dot{y}_i(T)}{\partial \lambda} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} i &= 1, j = 1, 2, 3; \\ i &= 2, j = 1, 2, 3; \\ i &= 3, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (24)$$

Далі будемо шукати ці коефіцієнти. Введемо заміну змінних в системі (12):

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1(t) &= y_4(t), \\
 \dot{y}_2(t) &= y_5(t), \\
 \dot{y}_3(t) &= y_6(t).
 \end{aligned} \quad (25)$$

Тоді система (12) переписується у вигляді:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

а її розв'язок у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Матриця коефіцієнтів (24), які розшуковуються, з використанням нових невідомих приймає вигляд:

$$\left(\frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{1k}(0)} \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{2k}(0)} \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{3k}(0)} \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{4k}(0)} \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{5k}(0)} \frac{\partial y_i(T)}{\partial y_{6k}(0)} \frac{\partial y_i(T)}{\partial \lambda_k} \right), \quad (28)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Продиференціюємо співвідношення (25) та (27) за початковими значеннями невідомих:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_1}{\partial y_{ik}(0)} \right) = \left(\frac{\partial y_4(t)}{\partial y_{ik}(0)} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_2}{\partial y_{ik}(0)} \right) = \left(\frac{\partial y_5(t)}{\partial y_{ik}(0)} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_{ik}(0)} \right) = \left(\frac{\partial y_6(t)}{\partial y_{ik}(0)} \right), \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_4}{\partial y_{ik}(0)} \\ \frac{\partial y_5}{\partial y_{ik}(0)} \\ \frac{\partial y_6}{\partial y_{ik}(0)} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B \cdot \sin y_3(t) \cdot \frac{\partial y_3(t)}{\partial y_{ik}(0)} \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} + \\ + A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial y_{ik}(0)} \\ \frac{\partial D_2}{\partial y_{ik}(0)} \\ \frac{\partial D_3}{\partial y_{ik}(0)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{array} \right. \quad (29)$$

Тут введені позначення:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} b_{13} = b_{31} = lm_m \Phi_1(H), \\ b_{23} = b_{32} = lm_m \Phi_2(H). \end{array} \quad (30)$$

Таким чином отримуємо шість систем диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язуючи задачу Коши для цих систем, знайдемо коефіцієнти, що записані у вигляді матриці (24), крім останнього стовпця.

Для знаходження останнього стовпця коефіцієнтів в матриці (24) продиференціюємо співвідношення (25) та (27) за параметром навантаження λ_k . Отримуємо ще одну, сьому, систему диференціальних рівнянь, розв'язуючи задачу Коші для якої, знайдемо коефіцієнти $\frac{\partial y_i(t)}{\partial \lambda_k}$, $i=1,2,\dots,6$, які ми шукаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_1(t)}{\partial \lambda_k} \right) = \frac{\partial y_4(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_2(t)}{\partial \lambda_k} \right) = \frac{\partial y_5(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_3(t)}{\partial \lambda_k} \right) = \frac{\partial y_6(t)}{\partial \lambda_k} \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_4(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial y_5(t)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial y_6(t)}{\partial \lambda_k} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B \cdot \sin y_3(t) \frac{\partial y_3(t)}{\partial \lambda_k} A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial D_2}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial D_3}{\partial \lambda_k} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо сім систем диференціальних рівнянь першого порядку, кожне з яких має шість невідомих. Для розв'язання перших шести систем необхідно взяти такі початкові умови [8]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

для першої системи - перший стовпець, для другої - другий і т.п., для шостої системи за початкові умови треба взяти шостий стовпець цієї матриці, тобто для першої системи маємо початкові умови:

$$\left(\frac{\partial y_1(t)}{\partial y_{1k}(0)} \right)_{t=0} = 1, \quad \left(\frac{\partial y_2(t)}{\partial y_{1k}(0)} \right)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial y_3(t)}{\partial y_{1k}(0)} \right)_{t=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial y_4(t)}{\partial y_{1k}(0)} \right)_{t=0} = 0, \left(\frac{\partial y_5(t)}{\partial y_{1k}(0)} \right)_{t=0} = 0, \left(\frac{\partial y_6(t)}{\partial y_{1k}(0)} \right)_{t=0} = 0,$$

для другої системи $\left(\frac{\partial y_2(t)}{\partial y_{2k}(0)} \right)_{t=0} = 1$, решта початкових умов - нульові і т.д. відповідно приведеній матриці. Іншими словами

$$\left(\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_{ik}(0)} \right)_{t=0} = 1, \left(\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_{jk}(0)} \right)_{t=0} = 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad j = 1, \dots, 6, \quad j \neq i.$$

Для сьомої системи (31) згідно з методами теорії диференціальних рівнянь [8] всі початкові умови нульові

$$\left(\frac{\partial y_i(t)}{\partial \lambda_k} \right)_{t=0} = 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (33)$$

Таким чином, наведене вище дозволяє сформулювати основні операції процедури методу продовження розв'язку за параметром при побудові кривих навантаження для висотної баштової споруди з ударним маятниковим гасителем:

1. Припускаємо, що при деякому значенні параметра навантаження $\lambda = \lambda_k$ відомий розв'язок вихідної динамічної системи (12), що задовольняє граничним умовам (16) і цілком визначається початковими умовами. Знаходимо цей розв'язок, розв'язуючи вихідну нелінійну систему диференціальних рівнянь (12) із заданими початковими умовами при даному значенні параметра λ_k прямим чисельним інтегруванням.

2. Надаємо параметрові навантаження λ приріст $\Delta \lambda_k$. При цьому необхідно визначити прирости початкових умов системи (12). Для цього розв'язуємо шість систем диференціальних рівнянь першого порядку (22) з початковими умовами (32) за допомогою прямого чисельного інтегрування. Отримуємо 6×6 невідомих функцій $\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_{jk}(0)}$, $i=1,2,\dots,6$;

$j=1,2,\dots,6$. Знаходимо значення цих функцій при $t=T$, які є коефіцієнтами системи (22).

3. Розв'язуємо сьому систему диференціальних рівнянь першого порядку (31) з нульовими початковими умовами (33) за допомогою прямого чисельного інтегрування. Отримуємо шість невідомих функцій

$\frac{\partial y_i(t)}{\partial \lambda_k}$, $i=1,2,\dots,6$. Знаходимо значення цих функцій при $t=T$, які є коефіцієнтами системи (22).

4. Розв'язуючи систему алгебраїчних лінійних рівнянь (22) знаходимо шість приростів початкових умов $\Delta y_{ik}, \Delta \dot{y}_{ik}$ $i=1,2,3$.

5. Перевіряємо, чи значення приростів початкових умов такі, що розв'язок задачі Коши для системи (12) при новому значенні параметра навантаження $\lambda = \lambda_{k+1}$ задовольняє умовам періодичності, тобто нев'язки малі. Далі основні операції процедури методу продовження розв'язку за параметром при побудові кривих навантаження повторюються. В іншому випадку, коли нев'язка розв'язку велика, приріст параметра навантаження λ зменшують і знов повторюють основні операції чисельної процедури.

Для реалізації алгоритму побудови кривої навантаження методом продовження розв'язку за параметром необхідно визначитися з вихідною точкою. Вона знаходиться шляхом розв'язання задачі Коші для системи (7) з нульовими початковими умовами.

3. Чисельні дослідження та аналіз віброударних рухів, що виникають у реальній висотній споруді

Розглядаємо висотну споруду баштового типу (димову трубу), яка знаходиться під дією вітрового навантаження. Запропонована до розгляду конструкція споруди є типовою.

Висота труби H становить 55 м. Труба являє собою тонкостінну оболонку діаметром 630 мм і товщиною стінки 8 мм. У нижній частині на відмітці +2.0 вертикальна труба переходить у газохід того ж діаметру. З умов міцності та жорсткості на оболонці між відмітками 0,0 та +17,0 запроєктовані три вертикальних ребра таврового перерізу, які переходять в опорні елементи – похилі колони (рис. 5). Вважається, що об'єкт знаходиться у III вітровому районі згідно СНиП 2.01.07-85 з нормативним вітровим тиском, що дорівнює 38 кгс/м^2 .

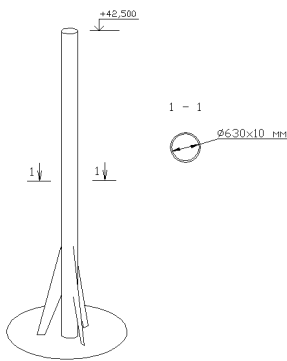


Рис. 5

Для створення розрахункової моделі конструкція була розбита на 11 ділянок. Вагу кожної ділянки і діюче на неї вітрове навантаження було зосереджено в центрі ділянки. Розрахункова модель труби являє собою просторову структуру, яка складається з 33 елементів та 34 вузлів, у 19 з яких зосереджена вага ділянок

конструкції. Скінченні елементи являють собою просторові стержні без врахування зсуву, з'єднання стержнів у вузлах прийнято жорстким. Похилі опорні елементи заземлені в основі. Ділянки з ребрами жорсткості моделюються ділянками колового перерізу підвищеної жорсткості. За допомогою пакету програм „МІРАЖ” був проведений модальний аналіз розрахункової моделі труби.

Башта розглядається як система з двома степенями вільності. Далі в таблиці 1 наведені характеристики башти, які відповідають її двом першим формам коливань.

Таблиця 1

Назва характеристики	1-форма ($i=1$)	2-форма ($i=2$)
Маса башти m_i (кг)	1148.8	1116.8
Парціальна частота коливань ω_i (рад/с)	2.1774	13.6193
Коефіцієнт демпфірування ξ_i	0.024	0.024
Зовнішнє узагальнене навантаження P_{i0} (Н)	189.875	-51.408
Значення i -ої власної форми коливань у вершині башти $\varphi_i(H)$	1.0	1.0
Значення i -ої власної форми коливань в точці удару $\varphi_i(H-l)$	0.809	0.353

Маятниковий гаситель має такі характеристики: маса $m_0 = 300$ кг, довжина стержня $l=3.0$ м, коефіцієнт демпфірування $\xi_m=0.024$.

Коли далі будемо досліджувати вплив параметрів маятника, зокрема його маси m_0 та довжини l на динамічний рух системи, тоді ці параметри будемо змінювати, а поки що вважаємо їх незмінними.

Дослідження були виконані для двох варіантів залежності сили контактної взаємодії F від відстані між тілами, що співударяються – за експоненціальним законом (2) (рис.3) та за комбінованим законом (3) (рис. 4).

3.1 Вибір закону сили контактної взаємодії та підбір її параметрів

Параметри зовнішнього навантаження мають такі значення. Частота зовнішнього впливу, як пояснювалося раніше, дорівнює першій парціальній частоті башти. Поки що працюємо лише на цій частоті: $\omega = \omega_1 = 2.1774$ рад/с.

Параметр інтенсивності зовнішнього навантаження λ змінюється при побудові кривих навантаження, але поки що, для знаходження вихідної

точки та дослідження питання вибору моделюючої сили та підбору її параметрів, візьмемо $\lambda=1.0$.

Для моделювання сили контактної взаємодії F виберемо експоненціальний закон залежності від відстані між тілами, що співударяються (2) (рис. 3). Підбираємо її параметр σ та коефіцієнт відповідності, який позначимо \tilde{C} , таким чином, щоб при певному значенні $\lambda=1.0$ удар моделювався щонайкраще. На рис. 6-9 представлені графіки залежності переміщень тіл ударної системи башта-маятник від часу, фазова траєкторія при одноударному Т-періодичному режимі коливань, що встановлюється, графіки контактної відштовхуючої сили, що виникає в системі згідно інтегруванню, в залежності від часу (рис. 8) та від відстані між баштою та маятником (рис. 9). На рисунках цифрою 1 відмічені криві, що відносяться до башти, а цифрою 2 – до маятника. Амплітуди коливань башти в точці зіткнення $A_{\min} = -0.0095$ м, $A_{\max} = 0.0160$ м.

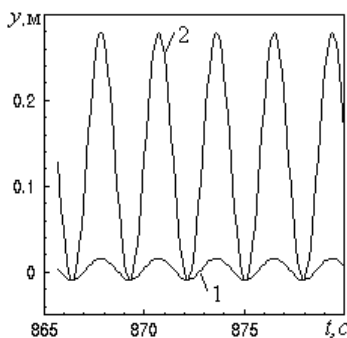


Рис. 6

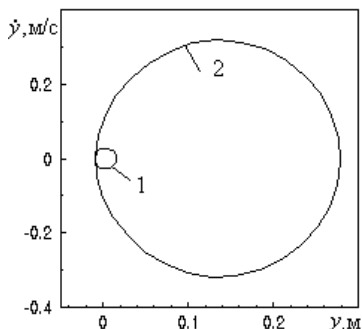


Рис. 7

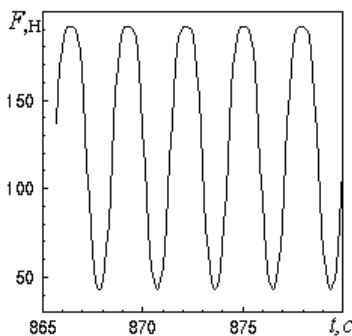


Рис. 8

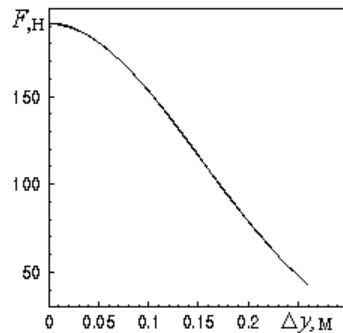


Рис. 9

Графіки одержані при $\tilde{C}=72$ Нм, $\sigma=0.15$ м. Як бачимо на рис. 6 та 7 в момент удару швидкість маятника змінює свій знак, і напрямок його руху стає протилежним.

Під час підбору параметрів моделюючої сили \tilde{C} та σ помічаємо, що якість моделювання удару зберігається незмінно доброю при багатьох інших парах параметрів. Але амплітуди коливань башти відрізняються при цьому в декілька разів. В таблиці 2 для прикладу приведені декілька пар значень цих параметрів і амплітуди коливань башти в точці удару, при цьому якість моделювання удару, як вже відмічалось, залишається доброю.

Таблиця 2

\tilde{C} , Нм	43	53	72	75	79
σ , м	0.06	0.10	0.15	0.16	0.17
A_{\min} , м	-0.055	-0.030	-0.0095	-0.015	-0.0024
A_{\max} , м	0.066	0.037	0.0160	0.012	0.0090

На рис. 10 та 11 для прикладу представлені графіки руху системи при $\tilde{C}=43$ Нм, $\sigma=0.06$ м та $\tilde{C}=79$ Нм, $\sigma=0.175$ м відповідно.

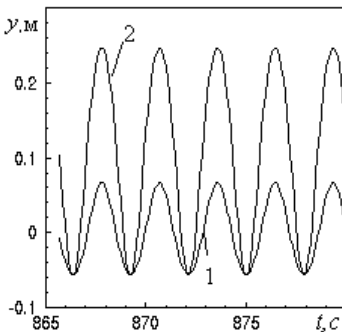


Рис. 10

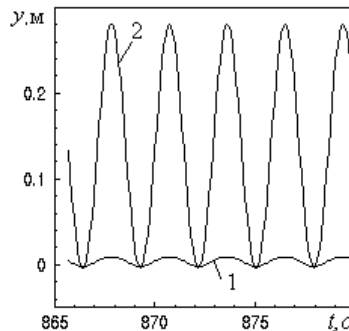


Рис. 11

Таким чином, виникає питання визначення критерію вибору параметрів моделюючої функції. Залишимо поки що це питання відкритим.

Подивимось, що дає комбінований закон залежності моделюючої функції від відстані між баштою та маятником (3) (рис. 4). Спостерігаємо таку саму картину,

як і в попередньому випадку – багато груп параметрів k_3 , R , d та коефіцієнт відповідності \hat{C} моделюючої функції забезпечують рівнозначну якість моделювання удару, при цьому амплітуди коливань башти в точці удару відрізняються в різних випадках в кілька разів (табл. 3).

Таблиця 3

k_3	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
R (м)	0.020	0.025	0.030	0.035	0.040	0.045
d el (м)	0.580	0.550	0.500	0.450	0.400	0.350
\hat{C} (Н/м)	350	310	300	290	300	330
A_{\min} (м)	0.004	-0.002	0.0019	0.0028	-0.0032	-0.012
A_{\max} (м)	0.013	0.0109	0.0066	0.0053	0.0110	0.019

Продовження таблиці 3

k_3	2.2	2.4	2.6	2.7	2.8	2.9
R (м)	0.050	0.055	0.060	0.062	0.064	0.066
d el (м)	0.300	0.250	0.200	0.190	0.180	0.170
\hat{C} (Н/м)	370	440	630	710	820	930
A_{\min} (м)	-0.021	-0.033	-0.047	-0.052	-0.057	-0.060
A_{\max} (м)	0.028	0.039	0.055	0.061	0.067	0.073

На рис. 12-15 представлені графіки руху точки удару башти і маятника, фазова траєкторія та сила F в залежності від часу та відстані між баштою та маятником при $k_3=1.0$, $R=0.020$ м, $d=0.580$ м, $\hat{C}=350$ Н/м.

Змінюючи параметри моделюючої функції і досліджуючи амплітуди коливань башти в точці удару, спостерігаємо таке цікаве явище: коли ми рухаємося по таблиці 3 зліва направо, спочатку амплітуда коливань башти зменшується і досягає майже 0, а потім взаємні коливання башти та маятника змінюють фазу, переходячи з антифази у фазу. При цьому амплітуда коливань башти збільшується (див. рис. 16-19). Підкреслимо, що параметри зовнішнього навантаження при цьому залишаються незмінними: $\lambda=1.0$, $\omega=2.1774$ рад/с.

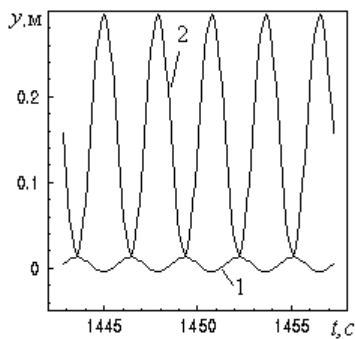


Рис. 12

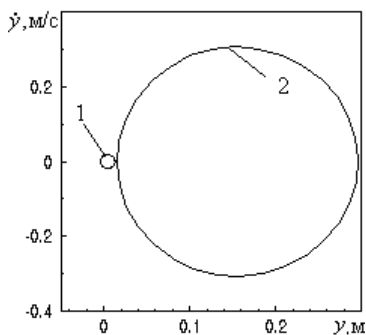


Рис. 13

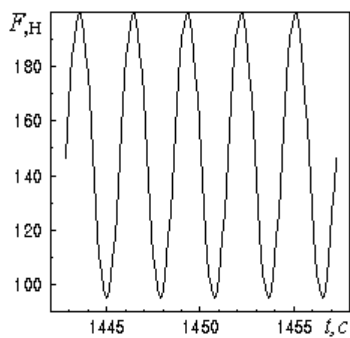


Рис. 14

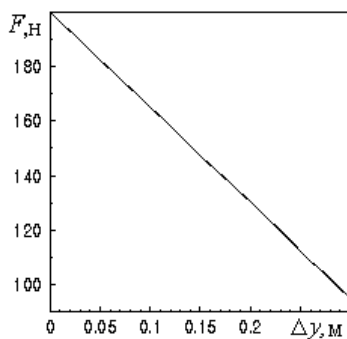
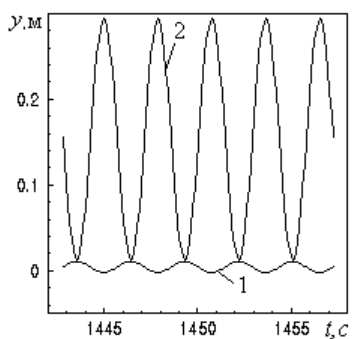


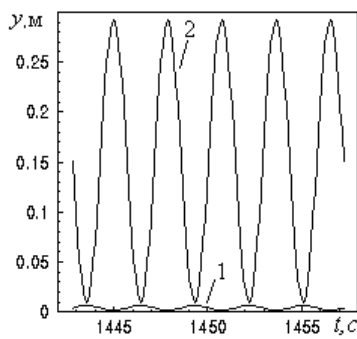
Рис. 15



$$k_3 = 1.2, R = 0.025 \text{ м}, d = 0.550 \text{ м},$$

$$\bar{C} = 310 \text{ Н/м}$$

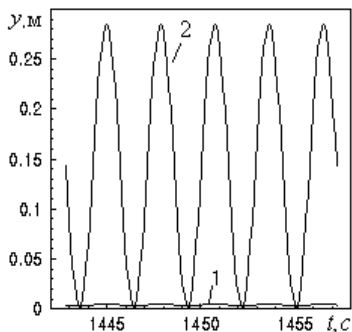
Рис. 16



$$k_3 = 1.4, R = 0.030 \text{ м}, d = 0.500 \text{ м},$$

$$\bar{C} = 300 \text{ Н/м}$$

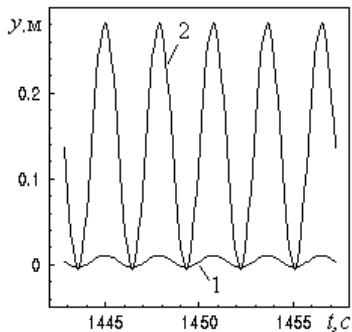
Рис. 17



$$k_3 = 1.6, R = 0.035\text{м}, d = 0.450\text{м},$$

$$\hat{C} = 290\text{Н/м}$$

Рис. 18



$$k_3 = 1.8, R = 0.040\text{м}, d = 0.400\text{м},$$

$$\hat{C} = 300\text{Н/м}$$

Рис. 19

Для наочності спостереження зміни амплітуди приведемо графік руху системи при $k_3 = 2.8, R = 0.064\text{м}, d = 0.180\text{м}, \hat{C} = 820\text{Н/м}$ (рис. 20).

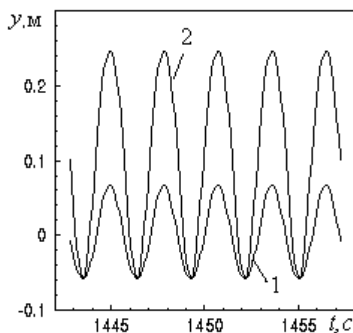


Рис. 20

Таким чином, в цьому випадку також питання критерію вибору параметрів модельючої функції є вельми актуальним.

Залишаючи це питання поки що не закритим та сподіваючись на подальше його дослідження, оберемо спочатку за критерій амплітуду коливань башти в точці удару, значення якої ми отримуємо, якщо не будемо моделювати удар за допомогою сили контактної взаємодії, а розв'яжемо задачу удару маятника та башти, вводячи граничні

умови в момент удару і використовуючи коефіцієнт відновлення e . Відповідні теорія та методика розв'язання задач про динамічний рух в віброударних системах з використанням коефіцієнту відновлення та граничних умов в момент удару були описані раніше в [1-4]. Для башти з маятником, що розглядається, при значенні коефіцієнта відновлення $e = 0.7$ отримуємо такий графік руху башти і маятника (рис. 21). Момент удару представлений на окремому рисунку у крупному масштабі (рис. 22).

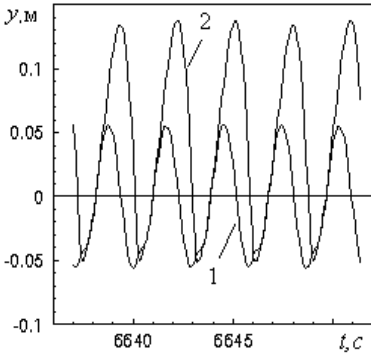


Рис. 21

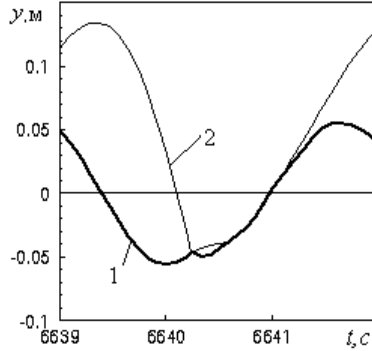


Рис. 22

Амплітуди коливань башти в точці удару мають такі значення:

$$A_{\min} = -0.056 \text{ м}, \quad A_{\max} = 0.056 \text{ м} . \quad (34)$$

Значення цих амплітуд будемо вважати як критерій вибору параметрів функцій, які моделюють силу контактної взаємодії між баштою та маятником. Виходячи з цього виберемо такі значення параметрів моделюючих функцій, при яких амплітуди коливань башти в точці удару співпадають з амплітудами (34).

Для експоненціального закону ці параметри мають значення:

$$\sigma = 0.06 \text{ м та } \tilde{C} = 43 \text{ Нм},$$

для комбінованого закону:

$$k_3 = 2.7, R = 0.062 \text{ м}, d = 0.190 \text{ м}, \tilde{C} = 710 \text{ Н/м}.$$

В цьому випадку одержимо такі графіки руху системи, фазові траєкторії та графіки моделюючої сили згідно інтегруванню в залежності від часу та відстані між баштою та маятником.

Для експоненціального закону:

$$A_{\min} = -0.055 \text{ м}$$

$$A_{\max} = 0.066 \text{ м}$$

Для комбінованого закону:

$$A_{\min} = -0.052 \text{ м}$$

$$A_{\max} = 0.061 \text{ м}$$

Як видно з графіків, ми маємо у цих випадках майже повний збіг графіків та значень амплітуд коливань.

Для побудови кривих навантаження методом продовження розв'язку за параметром в якості вихідної точки ми можемо вибрати будь-яку точку з графіків на рис. 23 та рис. 24.

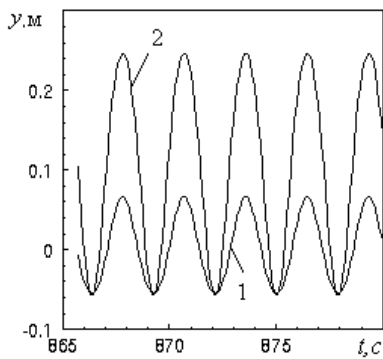


Рис. 23

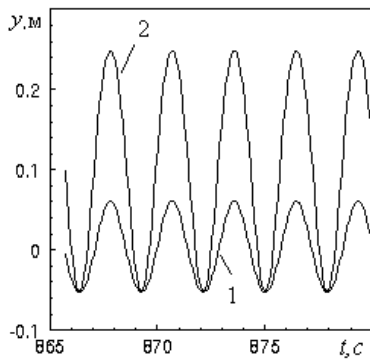


Рис. 24

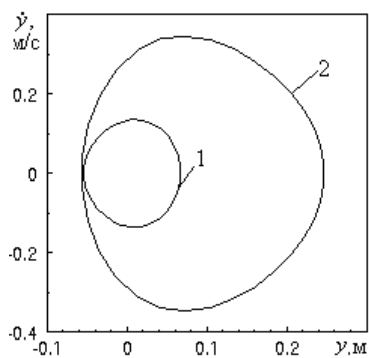


Рис. 25

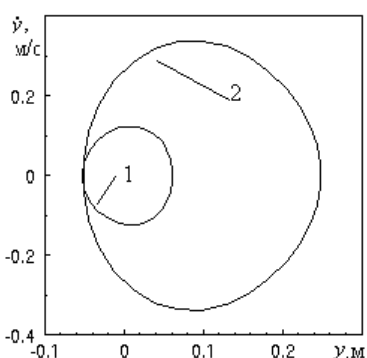


Рис. 26

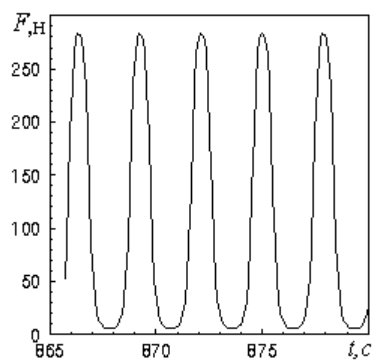


Рис. 27

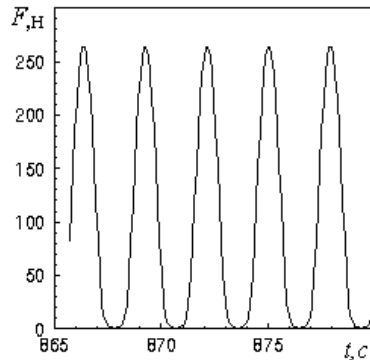


Рис. 28

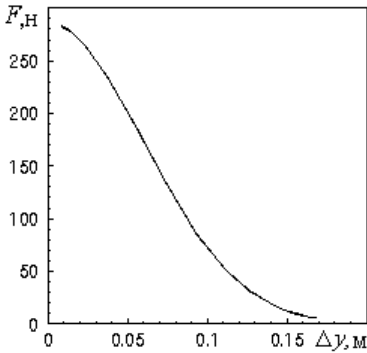


Рис. 29

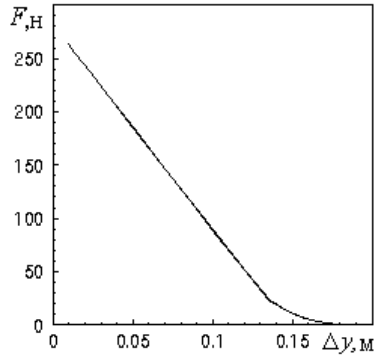


Рис. 30

Підсумовуючи сказане, зробимо висновки.

По-перше, використання моделювання сили контактної взаємодії між баштою та маятником достатньо добре описує вібродинамічні процеси у коливальній системі. При цьому різниці на користь одного із двох законів, що були запропоновані, не визначено. Обидва запропоновані закони, як експоненціальний, так і комбінований, мають ті самі переваги і недоліки.

По-друге, моделювання удару за допомогою сили контактної взаємодії залишається якісним при багатьох групах значень параметрів цієї сили. При цьому амплітуди коливань башти відрізняються в кілька разів. Тому питання розробки надійного критерію вибору цих параметрів є дуже важливим. Як первинний варіант запропоновано за такий критерій брати амплітуду коливань башти в точці удару, отриману при розв'язанні задачі віброударного руху системи за допомогою використання граничних умов в момент удару та коефіцієнту відновлення.

3.2 Побудова кривої навантаження та її аналіз

Дослідження показали, що сила контактної взаємодії суттєво залежить від динамічного стану системи, а саме від параметрів зовнішнього навантаження – його інтенсивності λ та частоти ω . Не розглядаючи поки що питання залежності від частоти навантаження ω , звернемо увагу на залежність від інтенсивності навантаження λ . Подивимось, чи буде зберігатися якість моделювання удару при зміні цього параметру при застосуванні, наприклад, експоненціального закону опису моделюючої сили.

На рис. 31-32 представлені графіки руху системи башта-маятник при таких значеннях параметрів моделюючої сили: $\sigma=0.06$ м та $\tilde{C}=43$ Нм при $\lambda=0.9$ (рис. 31) та $\lambda=1.1$ (рис. 32).

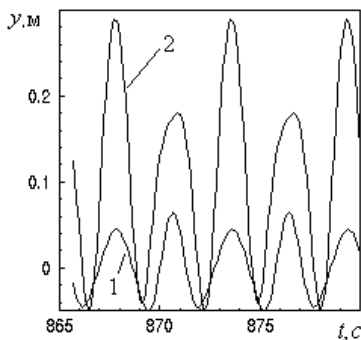


Рис. 31

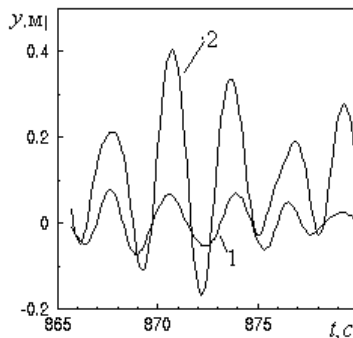


Рис. 32

Порівнюючи ці графіки з даними, наведеними на рис. 23, бачимо, що навіть при такій невеликій зміні інтенсивності навантаження якість моделювання удару не зберігається. Іншими словами, сила контактної взаємодії, яка описується законом (2), незалежним від параметру λ , вже не моделює удар. Тому в ході досліджень було запропоновано ввести в закон моделювання сили контактної взаємодії залежність від λ , а саме:

$$C = \lambda^{1.3} C_1 . \quad (35)$$

Така залежність від параметру інтенсивності навантаження λ була чисельно підібрана і забезпечила непоганий результат. На рис. 33-34 представлені графіки руху системи башта-маятник при тих же значеннях параметрів σ та \tilde{C} , що і на рис.31-32, але при введенні в закон моделюючої функції залежності від λ (35). Графіки отримані для $\lambda = 0.7$ (рис.33) та $\lambda = 1.3$ (рис. 34).

Як бачимо, при більш значній зміні λ якість моделювання удару зберігається задовільною. Тоді при зберіганні гарної якості моделювання удару при зміні λ , тобто при якісному моделюванні сили контактної взаємодії при різній інтенсивності зовнішнього навантаження маємо можливість використати метод продовження розв'язку за параметром і побудувати криву навантаження, тобто криву взаємозалежності напіврозмаху коливань башти в точці удару маятника та інтенсивності зовнішнього навантаження λ . На рис.35 приведена така крива (вона помічена на рисунку цифрою 1). Крім того на рис.35 наведені криві навантаження башти без маятника (вона помічена на рисунку цифрою 0) та башти з маятником, але без удару, тобто динамічним маятником (вона помічена на рисунку цифрою 2).

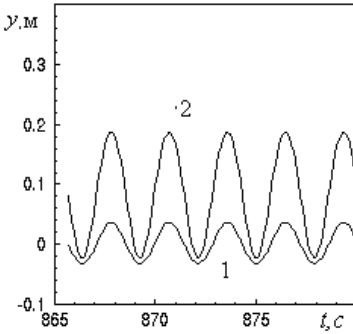


Рис. 33

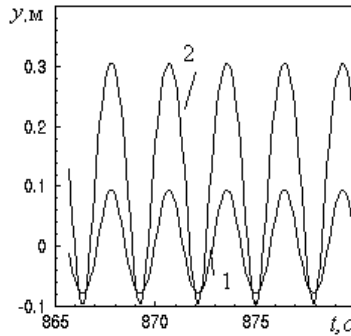


Рис. 34

Аналізуючи ці криві, бачимо, що обидва гасителя, як ударний, так і динамічний, гасять коливання башти дуже добре, зменшуючи амплітуду коливань башти в багато разів. При більшій інтенсивності зовнішнього навантаження ($\lambda > 0.68$)

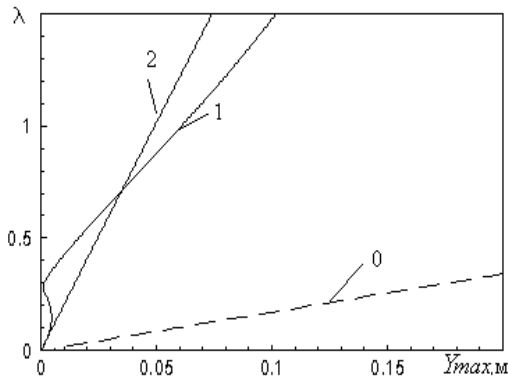


Рис. 35

динамічний гаситель більш ефективний, при меншій інтенсивності ($\lambda < 0.68$) більш ефективним є ударний гаситель. Підкреслимо, що ці висновки зроблені на підставі кривої навантаження, яка будується при фіксованій частоті зовнішнього навантаження ($\omega = \omega_1 = 2.1774$ рад/с).

Аналізуючи криву навантаження башти з ударним маятником, бачимо цікаве явище – петлю при малих значеннях λ . При інтенсивності $\lambda = 0.27$ амплітуда коливань башти в точці удару зменшується майже до 0 (рис. 36), а при ще менших λ вона збільшується. На рис. 37-38 представлені графіки руху системи башта-маятник при значеннях параметру зовнішнього навантаження $\lambda = 0.15$ та $\lambda = 0.10$ відповідно. Відзначимо, що коливання системи башта-маятник перейшли при цьому в антифазу.

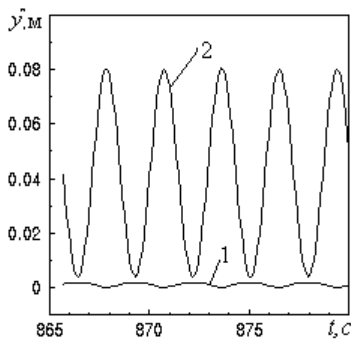


Рис. 36

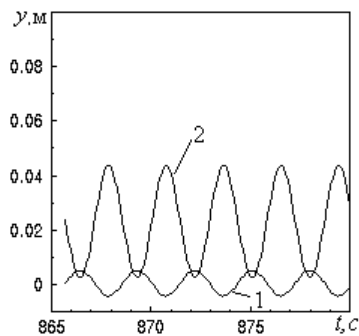


Рис. 37

Таке саме явище складної зміни амплітуди коливань башти і зміни взаємної фази коливань спостерігалися й в іншому випадку, коли змінювались значення параметрів моделюючої функції (див. рис. 16-19). Можна припустити, що таке явище властиво цій складній нелінійній віброударній системі башта-маятник.

Підсумовуючи сказане, зробимо такі висновки.

По-перше, сила контактної взаємодії, яку ми вводимо для моделювання удару, залежить не тільки від відстані між тілами, що співударяються, але й від динамічного стану системи.

По-друге, побудовані криві навантаження для башти без маятника, башти з динамічним безударним маятником та ударним маятником доводять, що

динамічні маятники, як безударні, так і ударні, дуже ефективно гасять коливання башти, зменшуючи амплітуду цих коливань в багато разів (при фіксованій частоті зовнішнього навантаження ω).

По-третє, крива навантаження для башти з ударним маятником демонструє цікаве явище зменшення амплітуди коливань башти майже до 0 і її збільшення при подальшому зменшенні інтенсивності навантаження. При цьому відбувається зміна фази коливань при невеликому навантаженні.

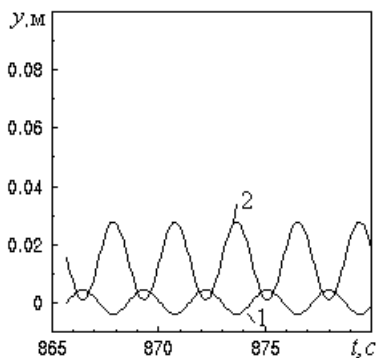


Рис. 38

Підкреслимо ще раз, що дослідження проводились на одній частоті зовнішнього навантаження $\omega = \omega_1$, яка співпадає з першою парціальною частотою башти.

3.3 Аналіз залежності амплітудно-частотних характеристик башти з маятником від довжини та маси маятника

Вище було сказано і доведено, що сила контактної взаємодії, яку ми вводимо для моделювання удару, залежить від динамічного стану системи, зокрема від інтенсивності зовнішнього навантаження λ . Тепер подивимось, чи залежить вона від частоти зовнішнього навантаження ω .

Будемо використовувати моделюючу силу F у такому вигляді, в якому ми вибрали раніше, тобто $\tilde{C} = 43$ Нм, $\sigma = 0.06$ м (експоненціальний закон зміни моделюючої функції), параметр інтенсивності навантаження $\lambda = 1$. Змінимо частоту зовнішнього навантаження (до цієї пори вона дорівнювала першій парціальній частоті башти $\omega = \omega_1 = 2.1774$ рад/с). Подивимось, чи збережеться при цьому якість моделювання удару. На рис. 39, 40 представлені графіки руху системи башта-маятник при невеликій зміні зовнішньої частоти ω - на рис.39 $\omega = 2.00$ рад/с, на рис.40 $\omega = 2.35$ рад/с.

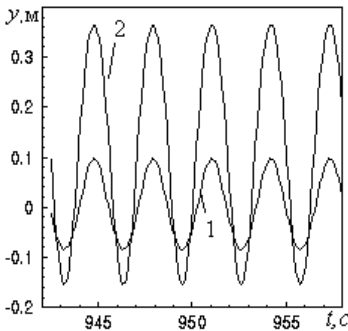


Рис. 39

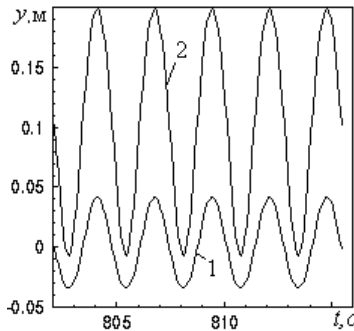


Рис. 40

Порівнюючи з рис. 23, який був отриманий при $\omega = 2.1774$ рад/с, бачимо, що навіть при невеликій зміні частоти зовнішнього навантаження, але при параметрах моделюючої сили, що не були змінені, якість моделювання удару значно погіршується. Тобто така сила вже не моделює удар, звідкіля випливає, що її параметри залежать не тільки від інтенсивності зовнішнього навантаження λ , але і від його частоти ω . Проблема полягає у відповіді на питання, яка ця залежність і як її ввести в закон зміни сили контактної взаємодії. Це питання потребує подальших

досліджень і поки що залишається відкритим. Тому, будуючи амплітудно-частотну залежність системи башта-маятник на кожному кроці необхідно коректувати параметри моделюючої сили, щоб зберегти якість удару.

Подивимось, як впливає частота зовнішнього навантаження ω на амплітуди коливань башти, тобто побудуємо амплітудно-частотні залежності. При цьому простежимо, як ці залежності змінюються при зміні характеристик маятника – його маси та довжини. Порівнюємо також амплітудно-частотні залежності башти без маятника A_0 , башти з маятником але без удару (динамічний маятниковий гаситель) та башти з ударним маятником.

В таблиці 4 приведені напіврозмахи коливань башти без маятника в точці удару при різних частотах зовнішнього навантаження.

Таблиця 4

ω_1 , рад/с	1.80	1.90	1.95	2.00	2.05	2.10	2.17	2.20	2.30	2.40
A_0 , м	0.10	0.14	0.16	0.20	0.27	0.40	0.69	0.63	0.26	0.15

В таблицях 5-7 приведені напіврозмахи коливань башти в точці удару з динамічним (безударним) $A_{1 \text{ дин}}$ та ударним $A_{2 \text{ уд}}$ маятником при його довжині $l=1.5$ м і масах $m_m=100, 200, 300$ кг відповідно.

Таблиця 5

$l=1.5$ м, $m_m=100$ кг

ω_1 , рад/с	1.80	1.90	1.95	2.00	2.05	2.10	2.17	2.20	2.30	2.40
$A_{1 \text{ дин}}$, м	0.16	0.33	0.59	0.67	0.30	0.18	0.10	0.09	0.05	-0.030
$A_{2 \text{ уд}}$, м	0.13	0.20	0.26	0.40	0.74	0.39	0.23		0.12	

Таблиця 6

$l=1.5$ м, $m_m=200$ кг

ω_1 , рад/с	1.80	1.85	1.90	1.95	2.00	2.05	2.10
$A_{1 \text{ дин}}$, м	0.37	0.72	0.49	0.23	0.15	0.10	0.077
$A_{2 \text{ уд}}$, м			0.35	0.77		0.36	

Таблиця 7

$$l=1.5 \text{ м}, m_M=300 \text{ кг}$$

ω_1 , рад/с	1.65	1.70	1.75	1.80	1.70	1.85	1.90	1.95
$A_{1 \text{ дин}}$, м	0.20	0.30	0.60	0.66	0.30	0.26		0.020
$A_{2 \text{ уд}}$, м							0.61	0.40

Подивимось тепер, як впливає довжина маятника на амплітуди коливань башти. В таблиці 8 приведені напіврозмахи коливань башти в точці удару з динамічним та ударним маятником при його довжині $l=3.0\text{м}$ і масі $m_M=200 \text{ кг}$.

Таблиця 8

$$l=3.0 \text{ м}, m_M=200 \text{ кг}$$

ω_1 , рад/с	1.85	1.90	1.95	2.00	2.05	2.15	2.25	2.35	2.45	2.55	2.65
$A_{1 \text{ дин}}$, м			0.027	0.035	0.044	0.065	0.11	0.23	0.41	0.19	0.11
$A_{2 \text{ уд}}$, м	0.22	0.50	0.43	0.32	0.23	0.13	0.10	0.070	0.055	0.045	0.036

На рисунках 41-44 побудовані криві, які відповідають цим таблицям: на рис. 41-43 для маятника довжиною $l=1.5 \text{ м}$, а на рис. 44 – довжиною $l=3.0 \text{ м}$. Криві, які відповідають башті без маятника позначені цифрою 0 (вони нарисовані більш товстою лінією), башті з маятником без удару – цифрою 1, з маятником з ударом – цифрою 2.

З цих рисунків видно, що динамічний маятниковий гаситель, як ударний так і безударний, зміщує зону резонансних частот башти. Величина цього зміщення різна для ударного та безударного маятників, вона залежить також від маси маятника та його довжини. При більшій довжині ($l=3.0 \text{ м}$) спостерігаємо не тільки зміщення зони резонансу, але також і деяке зменшення резонансної амплітуди коливань.

Цей результат слід вважати попереднім, оскільки закон залежності моделюючої сили від частоти зовнішнього навантаження є ще не достатньо дослідженим, і амплітудо-частотні залежності побудовані “ручну”, але залежності наочно демонструють вплив частоти зовнішнього навантаження на амплітуди коливань башти з маятником і залежність цих коливань від характеристик маятника – його маси і довжини. Тому такі залежності становлять чималий інтерес.

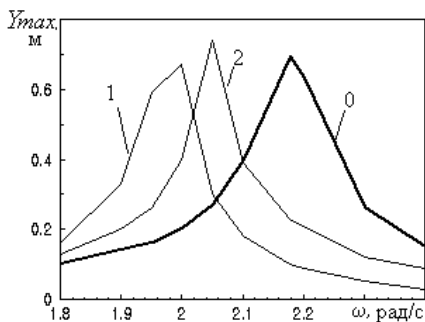


Рис. 41

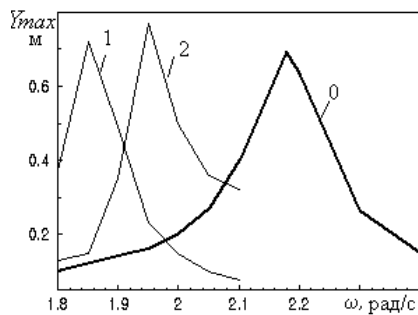


Рис. 42

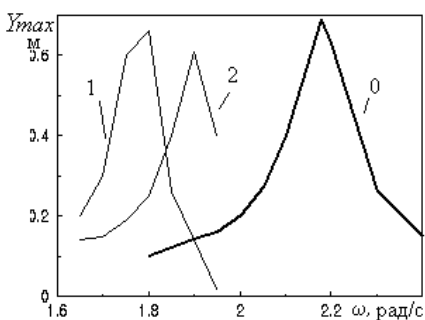


Рис. 43

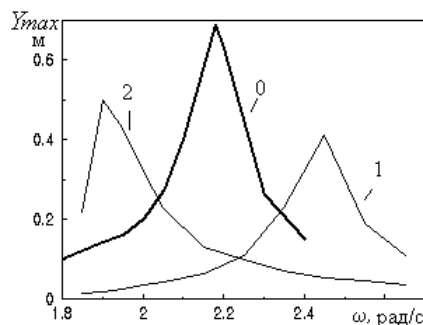


Рис. 44

Підводячи підсумки, зробимо такі висновки.

По-перше, дослідження ще раз довели, що сила контактної взаємодії, яка моделює удар, залежить від динамічного стану системи, зокрема від частоти зовнішнього навантаження.

По-друге, побудовані амплітудно-частотні залежності коливань системи башта-маятник наочно демонструють вплив частоти зовнішнього навантаження, а також характеристик маятника, на амплітуди коливань башти.

Таким чином, підсумовуючи сказане, підкреслимо, що використання сили контактної взаємодії для моделювання удару між баштою і маятником достатнє вдало описує вібродинамічні процеси у коливальній системі. Єдина форма запису рівнянь руху віброударних систем на всій часовій осі дозволяє описати повну сукупність реалізованих рухів, тому цей підхід є дуже перспективним.

Запропоновані закони залежності такої сили від відстані між тілами, що співударяються, мають як переваги, та і недоліки і потребують подальшого удосконалення і дослідження.

1. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Стійкість сталих режимів коливань віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10-18.
2. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2002.-Вип.70.- С.69-80.
3. Постнікова Т.Г., Погорелова О.С., Борисенко В.Г. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при зовнішньому ударному контакті // Матеріали Трьогої Всеукраїнської наукової конференції "Математичні проблеми технічної механіки" - Дніпродзержинськ. - 2003.- С.97.
4. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- С.31-44.
5. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при моделюванні удару із застосуванням нелінійних силових характеристик контактної взаємодії// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2004.-Вип.74.- С.14-23.
6. С.М.Гончаренко Моделювання вітрового навантаження при розрахунку випадкових коливань висотних споруд баштового типу // Доповідь на 65-й науково практичній конференції КНУБА. –К. 2004 р.
7. Баженев В.А., Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П. Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах //Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
8. В.В.Степанов. Курс дифференциальных уравнений. Москва, 1958, 498 с.

Надійшла до редколегії 10.10.2005 р.

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук

ПЕРЕБУДОВА ПЛОСКОГО ФРОНТУ АКУСТИЧНОЇ ХВИЛІ КРИВОЛІНІЙНИМИ ПОВЕРХНЯМИ АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩ

При розповсюдженні нестационарних розривних хвиль в пружних середовищах проявляються ефекти, аналогічні явищу фокусування світлових променів оптичними приладами – лінзами і дзеркалами. Для кількісного опису таких явищ, а також для дослідження їх особливостей можуть бути використаними методи геометричної оптики [1-3].

Актуальними є дослідження особливостей розповсюдження нестационарних розривних хвиль в земній корі, породжуваних вибухами, землетрусом, де практичний інтерес представляють питання геометричної побудови рухомих поверхонь розривів перших похідних польових функцій – ударних хвиль або хвиль сильного розриву.

Для постановки і вирішення таких задач в теорії пружності використовуються методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, який забезпечує хороший кількісний опис багатьох хвильових явищ різної фізичної природи [2, 3].

Променевий метод передбачає виділення функції оптичного шляху хвилі, або ейконалу, і побудова за допомогою рівняння ейконалу системи променів і видозмін рухомого фронту ударної хвилі. Ця задача достатньо легко розв'язується для ізотропних середовищ, проте і там виникають деякі ускладнення, пов'язані з дослідженням взаємодія хвилі з поверхнями розділу середовищ, які відрізняються механічними властивостями (пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища, тощо), внаслідок чого утворюються каустики, де фокусується енергія і значно зростає інтенсивність поля.

При дослідженні закономірностей розповсюдження хвиль сильних розривів у пружних анізотропних середовищах фізична картина динамічних явищ значно ускладнюється, оскільки в цих випадках векторна польова функція для кожного напрямку описує три види хвиль, які відрізняються поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать не лише від поляризації хвилі, а і від напрямку її розповсюдження; промені, в загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових швидкостей і між їх напрямками не завжди є однозначна відповідність.

Постановка задачі. Стан динамічної рівноваги пружного середовища

в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$; $c_{ik,pq}$ – параметри пружності середовища; ρ – густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних зсувів, t – час.

Враховуючи те, що в анізотропних середовищах промені в загальному випадку не ортогональні поверхням хвильових фронтів, розрізнятимемо вектори фазової \mathbf{v} і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронтом хвилі є поверхня постійної фази, де кожен елементарний плоский фрагмент фронту рухається уздовж місцевої одиничної нормалі \mathbf{n} зі швидкістю \mathbf{v} .

Фазові швидкості \mathbf{v} хвилі і вектори її поляризації \mathbf{A} для вибраного напрямку \mathbf{n} можна побудувати із однорідної системи рівнянь [2, 4]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

як власні числа і вектори матриці з коефіцієнтів системи.

Ненульові розв'язки системи (2) існують при виконанні умови

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (3)$$

за допомогою якої для кожного напрямку нормалі \mathbf{n} можна визначити і розташувати у послідовності зменшення три швидкості хвиль, які по різному поляризовані.

Надаючи величині v^2 в системі (2) по черзі одне із знайдених значень $v_r^2(\mathbf{n})$ ($r = 1, 2, 3$), можна відшукати компоненти векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ трьох хвиль, які рухаються в даному напрямі \mathbf{n} зі своїми фазовими швидкостями $\mathbf{v}_r(\mathbf{n})$. Поверхня фронту ударної хвилі визначається співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (4)$$

у якому функція τ повинна задовольняти диференціальному рівнянню в часткових похідних першого порядку [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

яке узагальнює рівняння ейконалу геометричної оптики для пружних анізотропних хвиль.

Величини p_k ($k = 1, 2, 3$), які входять до рівняння (5), є компонентами вектора рефракції $p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v_r(\mathbf{n})$ ($k = 1, 2, 3$).

Хвильовий фронт (4) ударної хвилі в анізотропному середовищі постійної густини будується після знаходження розв'язків рівняння (5), яке методом характеристик приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k / d\tau &= 0, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

У системі (6) перша група рівнянь характеризує розповсюдження хвилі уздовж променя з променевою швидкістю, а друга – показує на прямолінійність променів в анізотропних середовищах постійної густини.

Методика розв'язування. Розглядатимемо два трансверсально-ізотропні середовища в яких осі симетрії пружних параметрів співпадають з віссю Ox_2 декартової системи координат. Завдяки властивостям симетрії відносно осі Ox_2 , компоненти $c_{ik,pq}$ тензора пружних постійних кожного середовища можна подати у формі квадратної матриці [4, 5] з позначеннями λ і μ – параметри Ламе, l, m, p – константи, що відрізняють середовище від ізотропного (параметри анізотропії).

Нехай в середовищі \bar{I} збуджена плоска подовжня ударна хвиля, вектор поляризації якої направлений уздовж осі Ox_2 . Будемо досліджувати дифракцію такої хвилі при її взаємодії з криволінійною вісесиметричною межею G розділу середовищ, вісь симетрії якої також співпадає з Ox_2 . Задача є вісесиметричною, тому досить розглянути явища перебудови і формування слідів ударних хвиль на одній із площин, яка містить вісь симетрії. Приймемо „локально-плоске наближення” [2], відповідно до якого в місці падіння хвилі на елементарну ділянку межі G в площині падіння всі відображені і заломлені хвилі також належатимуть цій площині, тобто треті компоненти всіх векторів поляризації рівні нулю. Це дозволяє застосовувати узагальнений закон Снеллуса [2, 4, 5]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma)}{v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})} = \frac{\sin(\Theta_\mu^{\bar{II}} + \gamma)}{v_\mu^{\bar{II}}(\Theta_\mu^{\bar{II}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (7)$$

де γ – кут нахилу дотичної до поверхні G_1 в точці падіння променя на межу розділу середовищ, $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{I}}$ – кути між віссю Ox_2 і напрямими векторів фазових швидкостей квазіподовжньої qP і квазіпоперечної qS хвиль, відображених в середовище \bar{I} ; $\Theta_v^{\bar{II}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ – аналогічні кути для хвиль, заломлених у середовище \bar{II} ; $v, v_v^{\bar{I}}, v_\mu^{\bar{II}}$ – величини фазових швидкостей хвиль: падаючої подовжньої, відображених і заломлених (нижній індекс 1 відповідає квазіподовжнім, 2 – квазіпоперечним хвилям).

Для випадків анізотропних середовищ співвідношення (7) закону Снелліуса характеризуються тим, що знаменники і чисельники є функціями відповідних кутів $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ і неявно функціями кута γ . Значення кутів $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ ($v, \mu = 1, 2$) відбиття і заломлення променя в деякій точці межі, визначаються вирішенням системи нелінійних рівнянь (7) методом Ньютона спільно з алгоритмом продовження рішення по параметру [3]. Тут в якості провідного параметра зручно вибрати кут нахилу дотичної γ . Тоді, наприклад, для першого рівняння системи (7) при деяких відомих величинах параметра $\gamma = \gamma^n$ і векторів $v_v = v_v^n$ малому приросту провідного параметра $\Delta\gamma$ відповідатимуть прирости направляючих кутів фазових швидкостей пружних хвиль відображених в середовище \bar{I}

$$\Delta\Theta_v^{\bar{I}} = \frac{\cos\gamma \cdot v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}}) + \cos(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v}{\cos(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot dv_v(\Theta_v^{\bar{I}})/d\Theta_v^{\bar{I}}} \cdot \Delta\gamma + r_v, \quad (8)$$

де $r_v = \sin(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin\gamma \cdot v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})$ – нев'язка на даному кроці побудови розв'язку.

Результати досліджень. В задачі, яка розв'язана, досліджувалось трансформування фронтів розривних хвиль, породжених взаємодією плоскої хвилі з параболічною межею розділу середовищ з параметрами $\rho_1 = 2.650 \times 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 4.972 \times 10^{10}$ Па, $\mu_1 = 3.906 \times 10^{10}$ Па для першого середовища, та для другого середовища – $\rho_2 = 2.760 \times 10^3$ кг/м³, $\lambda_2 = 1.587 \times 10^9$ Па, $\mu_2 = 1.429 \times 10^{10}$ Па. Для

обох середовищ значення коефіцієнтів анізотропії змінювались. На рис. 1 показана видозміна фронтів падаючої хвилі (1), фронтів відображених від межі розділу середовищ квазіподовжньої (2) і квазіпоперечної (3) хвиль, та відповідно заломлених квазіподовжньої (4) і квазіпоперечної (5) хвиль. Параметри анізотропії, які відрізняють середовища від ізотропних на цих рисунках приймалися $l_1 = -0.3\lambda_1$, $m_1 = -0.2\mu_1$, $p_1 = 0.1(\lambda_1 + 2\mu_1)$ та $l_2 = -0.6\lambda_2$, $m_2 = 0.2\mu_2$, $p_2 = 0.1(\lambda_2 + 2\mu_2)$. Рис. 1, б відрізняється від рис. 1, а зміною положень середовищ.

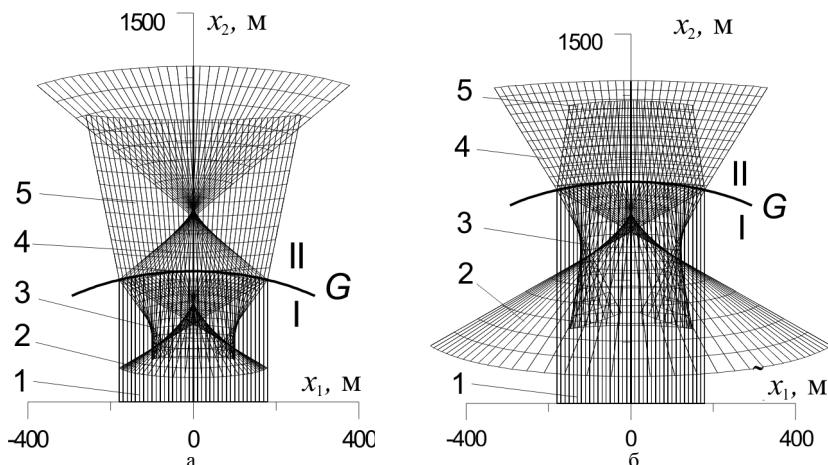


Рис. 1

На рис. 2, а, б показана перебудова фронтів падаючої хвилі (1), відображених від межі розділу середовищ квазіподовжньої (2) і квазіпоперечної (3) хвиль, та заломлених квазіподовжньої (4) і квазіпоперечної (5) хвиль при параметрах анізотропії середовищ $l_1 = -0.5\lambda_1$, $m_1 = -0.3\mu_1$, $p_1 = -0.5(\lambda_1 + 2\mu_1)$ та $l_2 = -0.1\lambda_2$, $m_2 = 0.3\mu_2$, $p_2 = -0.1(\lambda_2 + 2\mu_2)$ при різній послідовності середовищ.

Рисунки. 3, а, б ілюструють трансформацію фронтів відбитих та заломлених хвиль від межі розділу середовищ з параметрами анізотропії $l_1 = 0.1\lambda_1$, $m_1 = 0.2\mu_1$, $p_1 = 0.3(\lambda_1 + 2\mu_1)$ та $l_2 = 0.3\lambda_2$, $m_2 = 0.2\mu_2$, $p_2 = 0.1(\lambda_2 + 2\mu_2)$ при зміні послідовності середовищ.

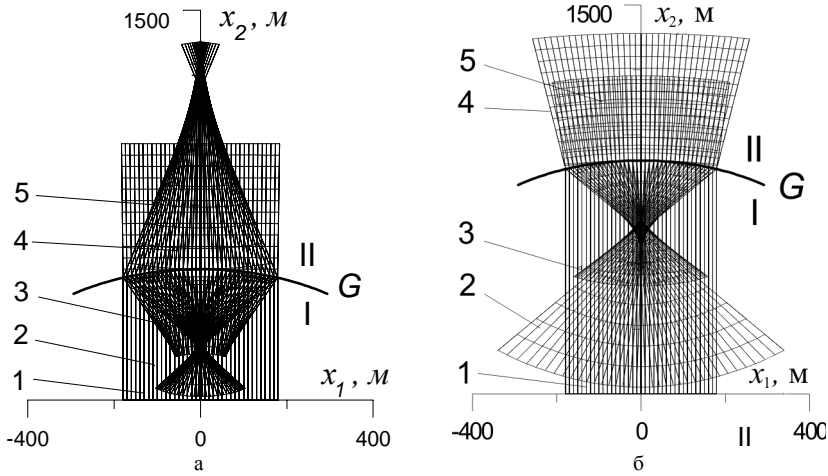


Рис.2

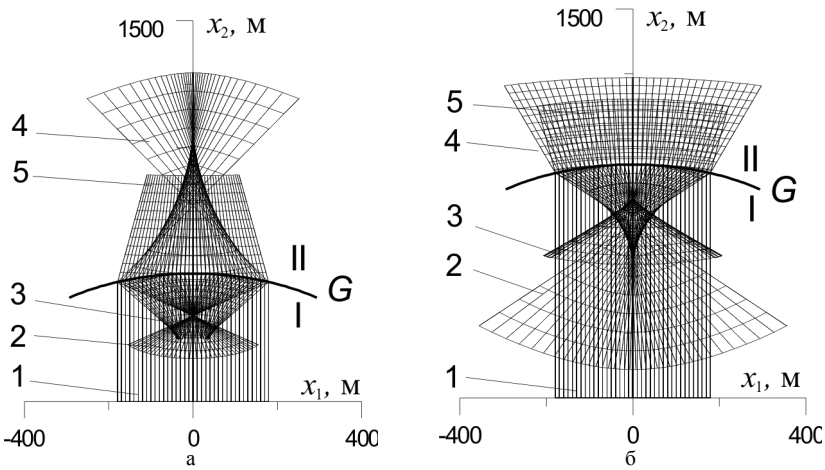


Рис. 3

Приведені результати розрахунку свідчать, що здатність фокусування або розсіювання розривних хвиль межею розділу середовищ залежить не лише від геометрії самої межі та властивостей середовищ, а в значній мірі і від величин параметрів анізотропії середовищ.

1. *Кравцов Ю.А. Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. –Ленинград: Наука, 1980. – 220 с.
3. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн. (Обзор) //Прикл. механика. – 1996. – 32, №12. – С.3-27.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000.– 64, №3.– С. 394–402.
5. *Gulyaev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.

Надійшла до редколегії 21.11.2005 р.

УДК 539.3

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук,
Немчинова Л.Ю.,
Отрашевська В.В.

ЗАЛЕЖНІСТЬ КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ІНТЕНСИВНОСТІ СТОХАСТИЧНОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ВІД РАДІУСА КОРЕЛЯЦІЇ

Розглядаються питання динамічної стійкості пружних систем при стохастичному навантаженні. Для експоненціально корельованих стохастичних збуджень вивчається залежність критичних значень інтенсивності збудження від його радіуса кореляції, значення якого неперервно змінюються в межах певного діапазона.

Розглядаються питання динамічної стійкості пружних систем при стохастичному навантаженні. Класичні результати в цій області одержані для навантаження, яке є стаціонарним білим шумом, тобто дельта-корельованим випадковим процесом. Дослідження корельованих впливів проводяться шляхом розширення фазового простору за рахунок включення до фазових змінних складових зовнішнього впливу, і представлення його за допомогою рівнянь формуючого фільтра у вигляді реакції на білий шум. Це приводить до нелінійності розглядуваної задачі. В даній роботі використовується підхід, який дозволяє для експоненціально корельованого збудження розширювати фазовий простір без використання формуючих фільтрів і, таким чином, не приводить до нелінійної задачі. Це досягається за рахунок представлення вказаного збудження у вигляді нескінченної суми статистично незалежних сигналів з експоненціальною кореляційною функцією.

Вивчається залежність критичних значень інтенсивності стохастичного збудження від його радіуса кореляції. Така залежність для окремих значень радіуса кореляції досліджувалася в [1]. В даній роботі це питання досліджується при неперервній зміні радіуса в межах певного діапазону.

Дискретна динамічна модель тонкостінної конструкції представляється рівняннями

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + \varphi(t)K_G\bar{u} = 0, \quad (1)$$

де M , G , K , K_G – матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості відповідно, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ – n -вимірний вектор динамічних змінних.

Змінне в часі параметричне навантаження задається у вигляді

$$\varphi(t) = \mu z(t), \quad (2)$$

де μ – параметр навантаження, $z(t)$ – експоненціально-корельований нормальний випадковий процес із одиничною дисперсією.

При певних значеннях інтенсивності навантаження втрачається стійкість первісного стану розглядуваної динамічної системи. Існують різні означення стійкості стохастичних систем, це може бути стійкість за імовірністю, стійкість у середньому, по сукупності моментних функцій другого порядку, третього порядку і т.д. При аналізі стійкості відносно моментних функцій задача зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку детерміністичних диференціальних рівнянь. В даній роботі за означення стійкості приймається стійкість відносно моментних функцій другого порядку. Пропоновані методи можуть бути застосовані для дослідження стійкості відносно моментних функцій інших порядків.

Для переходу до рівнянь першого порядку вводяться фазові змінні:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2n}(t))^T = (\bar{x}_1(t) \oplus \bar{x}_2(t))^T = \\ &= (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_n(t))^T. \end{aligned} \quad (3)$$

Щоб дістати рівняння для других моментів фазових координат, складається система рівнянь відносно компонент матриці $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$. Після усереднення по реалізаціях процесу $z(t)$ враховуючи (2) можна записати систему матричних рівнянь відносно матриці других моментів $\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle &= A \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle + \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle A^T + \\ &+ \mu B \langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle + \mu \langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle B^T, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K_G & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Оскільки матриця $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$ розмірності $2n \times 2n$ симетрична, кількість одержуваних рівнянь є надлишковою. Тому за допомогою взаємно-однозначного відображення, описаного у [2], здійснюється перехід із множини симетричних матриць у множину $n(2n+1)$ -вимірних векторів, що складаються із елементів матриць, розташованих не нижче головної діагоналі.

Система (4) містить нові змінні $\langle z x_i x_j \rangle$ ($i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$, $j \leq i$) і незамкнена відносно других моментів. Ці нові змінні є кореляціями процесу $z(t)$ із компонентами вектора розв'язку задачі $\bar{x}(t)$. Ця типова для динамічних систем із стохастичним параметричним збудженням проблема в даній роботі вирішується у випадку, коли $z(t)$ є експоненціально-корельованим нормальним процесом із кореляційною функцією

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad (6)$$

де α – параметр кореляції, який пов'язаний з радіусом кореляції ρ цього процесу співвідношенням $\rho = \frac{1}{\alpha}$. Таким чином, стохастична складова параметричного збудження $\mu z(t)$ має дисперсію μ^2 . Для такого процесу вказана проблема розв'язується шляхом розширення фазового простору, у якому розглядається розв'язок. Це досягається за рахунок апроксимації параметричного збудження $z(t)$ скінченною сумою статистично незалежних телеграфних сигналів ([3]):

$$z(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_N(t), \quad (7)$$

де взаємно-кореляційна матриця телеграфних процесів має вигляд

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = \sigma_{ij} \frac{\sigma_0^2}{N} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (8)$$

Відомо, що при $N \rightarrow \infty$ $z_N(t) \rightarrow z(t)$.

Якщо замінити в (2) $z(t)$ на $z_N(t)$, то, як показано в [3] і [2], застосовуючи операцію усереднення, для дослідження стійкості можна скласти послідовність детерміністичних рівнянь відносно моментних функцій:

$$\begin{aligned} m_{02}(t) &= \langle x_i(t) x_j(t) \rangle, \\ m_{12}(t) &= \langle \xi_1(t) x_i(t) x_j(t) \rangle, \\ &\dots \\ m_{k2}(t) &= \langle \xi_1(t) \xi_2(t) \dots \xi_k(t) x_i(t) x_j(t) \rangle, \\ &\dots \\ m_{N2}(t) &= \langle \xi_1(t) \xi_2(t) \dots \xi_N(t) x_i(t) x_j(t) \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Ця система має вигляд

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix} = S_1 \times \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix}^T \times S_2, \quad (10)$$

де S_1 і S_2 блокові тридіагональні матриці з коефіцієнтами, що не залежать від t [2].

Стійкість тривіального розв'язку автономної системи (10) визначається характеристичними показниками λ , які є коренями алгебричного рівняння

$$\det(R^* - \lambda E^*) = 0, \quad (11)$$

де E – одинична матриця, а матриця R утворена із матриць S_1 і S_2 . Тривіальний розв'язок буде асимптотично стійким, якщо всі характеристичні показники мають від'ємну дійсну частину і асимптотично нестійким, якщо серед характеристичних показників є хоча б один з додатною дійсною частиною.

В даній роботі залежність критичних значень інтенсивності стохастичного параметричного навантаження від радіуса кореляції досліджується на прикладі тривіального розв'язку рівняння Мат'є-Хілла:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0 [1 + \varphi(t)]u = 0. \quad (12)$$

Розглядається питання про вплив радіуса кореляції ρ параметричного збудження на стійкість стохастичної системи. Дослідження проводилися для таких значень параметра загасання ε : 0,05; 0,02 і $\frac{\delta}{2\pi}$ ($\delta = 0,05$).

На рис. 1 зображені границі областей стійкості, побудовані при вказаних значеннях ε . З наведених графіків видно, що залежність критичних значень μ від радіуса кореляції, взагалі кажучи, не є монотонною, монотонність порушується із зменшенням значення ε .

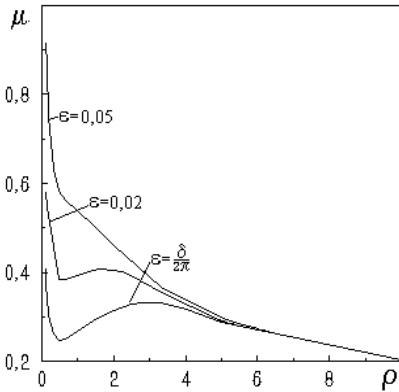


Рис. 1

Зокрема, при $\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi}$ із збільшенням радіуса кореляції спочатку спостерігається досить різке спадання до значення $\mu = 0.249$ при $\rho = 0.5$, потім значення μ дещо збільшується і досягає значення $\mu = 0.333$ при $\rho = 0.286$, а далі монотонно спадає. Такий же характер залежності, але із меншими коливаннями зберігається при $\varepsilon = 0.02$, а вже при $\varepsilon = 0.05$ критичний рівень стохастичного

навантаження тільки спадає із зростанням радіуса кореляції.

1. Дехтярюк Є.С., Немчинова Л.Ю., Отрашевська В.В. Вплив радіуса кореляції стохастичного навантаження на структуру областей стійкості пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА. 2004. – Вип. 74. - С. 48-59.
2. Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В., Гончаренко М.В. Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні. //Авиационно-космическая техника и технология. Харьков “ХАИ”. – 2004.- С.51-58.
3. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

Надійшла до редколегії 31.10.2005 р.

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Іванченко Г.М., канд. техн. наук,
Шишов О.В., канд. техн. наук

ТЕСТУВАННЯ ЯК ОДИН ІЗ ЕФЕКТИВНИХ ІНСТРУМЕНТІВ ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ЗАСВОЄННЯ ЗНАТЬ СТУДЕНТІВ

На кафедрі будівельної механіки розроблено і впроваджено до навчального процесу комп'ютерну програму тестування рівня знань, а також комплекс тестових завдань з дисципліни “Будівельна механіка”. Крім програми-оболонки, яка пропонує тестові завдання і обслуговує базу результатів тестування, також розроблено декілька допоміжних прикладних програм, які при потребі надають допомогу студентам під час тестування (комп'ютерний довідник з будівельної механіки, програма розв'язування систем алгебраїчних рівнянь, тощо). До складу програмного комплексу також входить спеціальним чином структурована база тестових запитань з графічними додатками, база результатів тестувань, програма автоматизації формування тестових білетів та деякі допоміжні файли і програми. При тестуванні програмою виконується перевірка відповідей студента на певну кількість теоретичних і практичних запитань по вибраній темі. Кількість тестових запитань, які протягом сеансу виводяться у робоче вікно програми, варіюється від 5 то 10 за задумом автора контролюючих тестів.

Для відповіді студент має обмежений відрізок часу (40 хвилин). Отримані відповіді програма порівнює із еталонними, заготовленими на стадії створення контрольних запитань. Наприкінці сеансу тестування програма повідомляє користувачу інтегральну оцінку рівня його знань, яка також зберігається в пам'яті комп'ютера у звіті або у відомості.

Білеті для тестування автоматично укомплектовуються контрольними запитаннями із вибраної теми. При цьому використовується випадковий вибір та послідовність у білеті контрольних запитань але передбачено запобігання повторення будь-якого запитання одному студенту при декількох сеансах тестування. Контрольні запитання мають характер або закритих тестів – тестів з вибірковими відповідями, варіанти яких виводяться на екран разом із запитанням (рис. 1), або відкритих тестів – тестів із фіксованими відповідями, які необхідно самостійно визначити в процесі тестування (рис. 2).

2. Кінематичний аналіз

Тема Допомога Довідка

Шифр групи ПЦБ-51

Прізвище І.Б. Винник

Пароль

Вибірайте запитання

1 2 3 4 5

Ввод

6

Не знаю Відкласти

Запитання

Ч наведеному на рисунку повзуні виникають ...

Варіанти відповіді

... горизонтальна силова реакція і момент

... лише вертикальна силова реакція

... вертикальна силова реакція і момент

... лише горизонтальна силова реакція

Перше запитання

Залишилось: 40 хв.




Рис. 1

Як правило, закритими тестами перевіряються знання теоретичних положень, а відкритими – числові результати, отримані при розв’язуванні конкретних задач. В процесі тестування програма вибирає тестові білети випадковим чином.

В залежності від правильності відповідей студенту нараховується певна кількість балів. Результатом тестування є інтегральна оцінка знань та умінь студента із вибраної теми, яка визначається програмою по кількості набраних ним балів.

Прийнята в програмі система нарахування балів наведена в табл. 1.

Таблиця 1

Характер відповіді	Відповідь		
	Правильна	Неправильна	“Не знаю”
Вибірковий	5	0	1
Фіксований	5	1	0

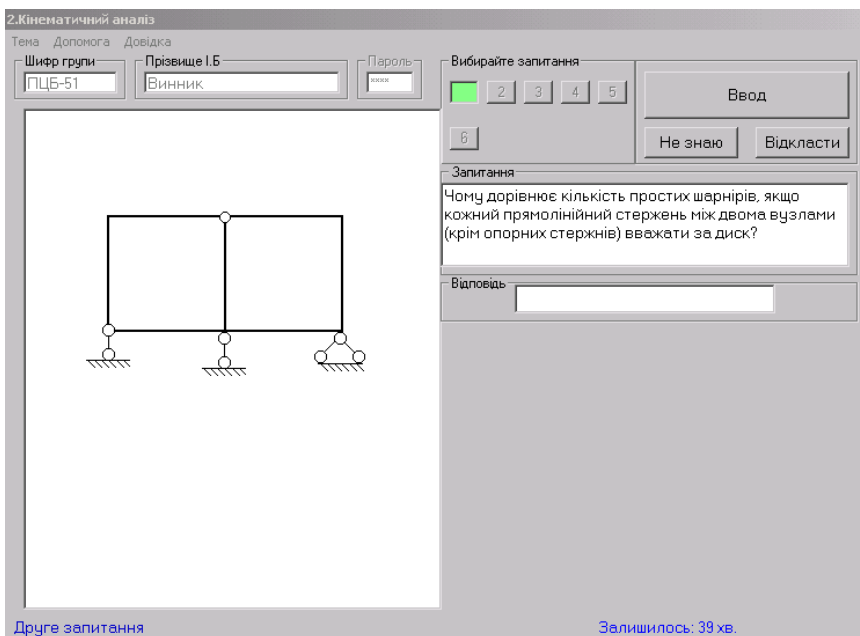


Рис. 2

В таблиці 1 видно, що правильна відповідь на кожне запитання надає студенту 5 балів. Неправильна відповідь для запитання із фіксованою відповіддю дає один бал, тобто „бал за спробу”, а для запитання із вибірковою відповіддю – 0 („нуль”) балів. Натомість відповідь „Не знаю” приносить студенту один бал („бал за відвертість”) для запитання із вибірковою відповіддю і 0 („нуль”) балів для запитання із фіксованою відповіддю.

Інтегральна оцінка тестування залежить від проценту P набраних балів по відношенню до максимально можливої їх кількості. Шкала оцінки наведена в табл. 2.

Повідомлення щодо інтегральної оцінки тестування виводиться в статусний рядок вікна програми після відповіді на останнє запитання білета, а також зберігається на жорсткому диску комп'ютера.

Програма тестування розроблена в двох варіантах: для роботи в автономному режимі та для роботи в мережному режимі. В першому (автономному) варіанті програмні файли і база тестових білетів встановлюються на кожний окремий комп'ютер. На цьому ж комп'ютері зберігаються результати тестування. Цей варіант може бути застосований

студентами для самотестування. Другий (мережний) варіант може бути застосований за умови наявності локальної мережі, коли всі робочі комп'ютери підключені до сервера або до якогось певного комп'ютера, який відіграє роль сервера. В цьому випадку всі програмні файли і база тестових білетів розташовані на сервері. Тут також розміщено базу результатів тестувань.

Таблиця 2

Процент набраних балів P	Інтегральна оцінка
$P \geq 90 \%$	Відмінно
$90 \% > P \geq 80 \%$	Добре
$80 \% > P \geq 64 \%$	Задовільно
$P < 64 \%$	Не задовільно

Отже, комплекс виконує такі дії:

1. Надає можливість вибрати одну з тем для проведення тестування.
2. Вибирає випадковим чином тестовий білет з обраної теми.
3. Дає можливість студенту вибирати в будь-якому порядку запитання білета і виводить на екран чергові тестові запитання, рисунки і, в разі необхідності, варіанти можливих відповідей.
4. Підсумовує кількість балів, набраних студентом за певними правилами, і залежно від їхньої кількості виставляє оцінку його знанням й умінням з вибраної теми.
5. Зберігає результати тестування на вінчестері.
6. В разі використання програми в мережному варіанті створює і підтримує файли „класних журналів”, в яких зберігаються результати тестувань, а також файли статистики, в яких позначено номери задач, що розв'язувались кожним студентом з кожної теми, та отримані оцінки.

Протягом останніх двох років програму було застосовано для проведення контролю рівня знань з дисципліни “Будівельна механіка”. Курс будівельної механіки було поділено на 12 модулів (тем), студенти мали проходити тестування по всім модулям. Тестувалися всі студенти третього і четвертого курсів спеціальності ПЦБ на будівельному факультеті. Робота студентів з програмою відбувалась в комп'ютерному класі кафедри в позааудиторний час, тобто в рамках самостійної роботи. Під час тестування присутність викладачів була не обов'язковою. Студенти приходили на тестування в будь-який зручний для себе час,

самостійно займали місця біля будь-яких вільних на час тестування комп'ютерів, самостійно ініціювали до роботи програму тестування і працювали з нею індивідуально. У випадку, якщо оцінка результатів тестування не влаштовувала того чи іншого студента, він мав змогу провести повторне тестування, але не більше трьох разів на день. Кількість звернень до програми кожним студентом фіксувалась програмою і при четвертому зверненні студентом до програми вона відмовлялась з ним працювати. Продовжити роботу з програмою студент міг лише наступного дня.

Практика показала, що переважна більшість студентів проходить успішне тестування не за один, а за два, три або й більшу кількість спроб. Якщо отримана позитивна оцінка не задовольняє студента, він може прийти й надалі для її підвищення.

Робота викладача при тестуванні полягає лише в перегляді і у фіксації декілька раз на тиждень збережених на комп'ютері результатів тестування. Крім того, студенти, не сприйнявши негативну реакцію програми на деякі їхні відповіді, як правило, звертаються до викладачів за консультацією та поясненнями їх помилок.

Пропонований комплекс є зручним інструментом для проведення вхідного та модульного контролів, але не можна рекомендувати його для проведення підсумкового контролю.

Розробниками програмного комплексу створено докладну інструкцію з його практичного використання в навчальному процесі. Комплекс може бути рекомендований для тестування рівня знань та умінь студентів з різних інженерних дисциплін.

Аналізуючи результати використання програмного комплексу можна виділити як позитивні, так і деякі негативні моменти.

Позитивним є наступне:

- суттєво зменшується навантаження на викладача під час модульного чи вхідного контролів;
- активізується робота студентів, оскільки навчальна робота набуває ігрового характеру;
- студент може тестуватись незалежно від присутності викладача, в зручний для себе час;
- підвищується достовірність результатів внаслідок вилучення суб'єктивізму викладача;
- за рахунок однотипності тестових білетів всі студенти перебувають у приблизно рівних умовах;
- викладач із супротивника студентів стає його помічником і консультантом.

До негативних моментів можна віднести те, що студент позбавлений можливості формулювати свої думки і висновки з теми тестування.

1. *Баженов В.А., Шишов О.В.* Електронний підручник з будівельної механіки // Опір матеріалів та теорія споруд. Вип.69, 2001, с. 71-74.
2. *Баженов В.А., Шишов О.В., Іванченко Г.М.* Комп'ютеризація тестування рівня знань з технічних дисциплін //Опір матеріалів і теорія споруд, №69, 2001, с.75-79.
3. *Баженов В.А., Шишов О.В., Іванченко Г.М.* Електронний довідник з будівельної механіки Опір матеріалів і теорія споруд Вип. 70, 2002, с.119-126.
4. *Журавель В.Ф. та ін.* Рекомендована практика конструювання тестів професійної компетенції випускників вищих навчальних закладів. /За загал. ред. Ю.В.Сухарнікова К.: Аграрна освіта, 2000. 38 с.

Надійшла до редколегії 22.08.2005р.

УДК 539.376

Пискунов С.О., канд. техн. наук,
 Рутковський В.А., канд. техн. наук,
 Шкриль О.О.

ПРИЗМАТИЧНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ЗМІННОЇ ГЕОМЕТРІЇ

На основі корегування величин компонент метричного тензора отримані вирази матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій напіваналітичного неоднорідного призматичного скінченного елемента змінної геометрії для моделювання напружено-деформованого стану, наближеного до поздовжнього розтягу.

Вступ. Напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ) є ефективною модифікацією методу скінчених елементів (МСЕ) [2, 3, 5], що дозволяє суттєво підвищити ефективність чисельного розв'язання задач про визначення напружено-деформованого стану (НДС) просторових тіл канонічної форми. Одним з таких класів об'єктів є призматичні тіла, що утворені рухом геометричної фігури складної форми, яка визначається контуром поперечного перерізу тіла, вздовж прямолінійної утворюючої.

Традиційно НМСЕ використовується для розрахунку призматичних тіл, геометричні характеристики яких в напрямку z^3 є незмінними. У розрахунковій практиці зустрічаються призматичні тіла змінної в напрямку вісі z^3 площі поперечного перерізу $A = A(z^3)$ (рис. 1).

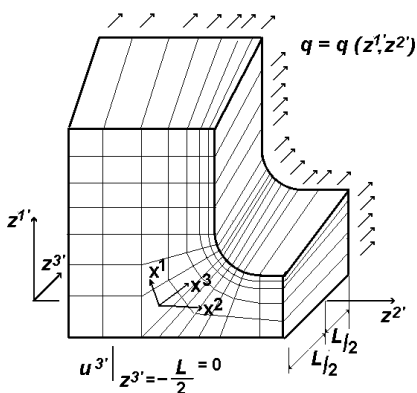


Рис.1. Призматичне тіло змінної площі поперечного перерізу

У частковому випадку завантаження спрямованим вздовж вісі z^3 розтягуючим навантаженням $q = q(z^1, z^2)$, що розподілене по торцю тіла, або розподіленим по об'єму відцентровим навантаженням, розглядуваний об'єкт знаходиться в умовах деформування, наближених до поздовжнього розтягу. Одним із найхарактерніших прикладів таких об'єктів є лопатки турбін.

Метою даної роботи є розробка розв'язувальних співвідношень НМСЕ для призматичних тіл змінної геометрії, перевірка вірогідності і демонстрація можливостей застосування на прикладі практичної задачі енергетичного машинобудування про визначення НДС лопатки газової турбіни.

Матриця жорсткості вектор вузлових реакцій неоднорідного призматичного СЕ змінної геометрії. При застосуванні НМСЕ для моделювання напружено-деформованого стану неоднорідних призматичних тіл нанесення скінчено-елементної сітки проводиться в поперечному перерізі тіла (рис. 1). По довжині використовується один прямолінійний елемент змінної жорсткості – призматичний неоднорідний скінчений елемент (СЕ, рис. 2).

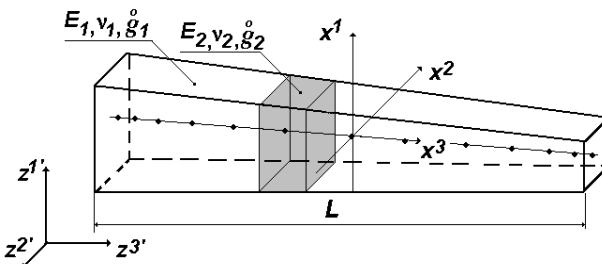


Рис.2. Призматичний неоднорідний скінчений елемент змінної жорсткості

Вздовж вісі СЕ, згідно до вимог правила інтегрування Гаусса, розташовано M точок інтегрування. Розподілення переміщень в межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом, а в напрямку утворюючої для апроксимації переміщень використовується розкладення за системою координатних функцій $\varphi^{(l)}$, утвореною на основі поліномів Лагранжа і Міхліна [1, 2, 3, 5]:

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L \bar{u}_{m'}^l \varphi^{(l)}.$$

Згідно до моментної схеми скінченних елементів [4] величини напружень і деформацій подаються у вигляді розкладу в ряд Маклорена. Вирази матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій отримані виходячи з варіаційного принципу Лагранжа на основі методики, викладеної в [5]. Для урахування зміни площі поперечного перерізу СЕ вздовж утворюючої в підінтегральні вирази розв'язувальних співвідношень введені величини, що характеризують площу поперечних перерізів A_m в точках інтегрування. Кінцеві вирази вектора амплітудних вузлових реакцій і матриці жорсткості неоднорідного призматичного СЕ змінної геометрії мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\} &= \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \{s\}_l + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \{s\}_{l3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \sum_{m=1}^M \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \{s\}_{l\alpha} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T \{s\}_{l\alpha 3} \right) \right\}, \\ [K]_{ln} &= \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T [T]_{00}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T [T]_{30}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T [T]_{03}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T [T]_{33}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [T]_{00\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [T]_{30\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [T]_{03\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [T]_{33\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \{s\}_l = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_m^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m,$$

$$\{s\}_{l3} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m,$$

$$\{s\}_{1\alpha} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$\{s\}_{1\alpha 3} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{00}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{30}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{03}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{33}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$\begin{aligned} [T]_{00\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 = \\ &= \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m , \end{aligned}$$

$$[T]_{30\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 =$$

✘

$$[T]_{03\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_{,3m}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$[T]_{33\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_\alpha \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m dx^3 =$$

$$= \sum_{m=1}^M \varphi_{,3m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}\alpha \right] \varphi_{,3m}^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m ,$$

$$\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m = \frac{A_m}{A|_{z^{3'}=0}} \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} ,$$

A_m – площа поперечного перерізу в точці інтегрування m .

Для обґрунтування вірогідності такого підходу було розглянуто тестовий приклад про розтяг в умовах плоскої деформації в площині $z^1 - z^3$ стрижня зі змінною за лінійним законом площею поперечного перерізу (розміром в напрямку z^1), розрахунок якого був проведений із використанням МСЕ і НМСЕ (рис. 3).

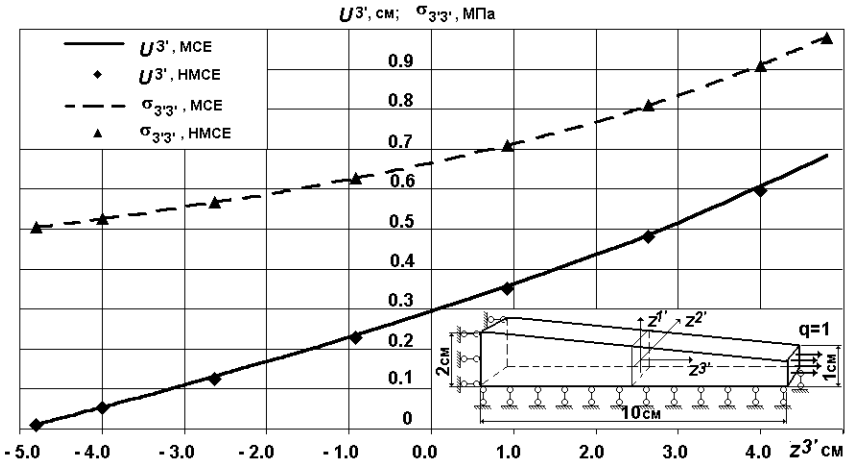


Рис. 3. Стрижень із змінною площею поперечного перерізу: розрахункова схема та розподілення напружень і переміщень по довжині стрижня

Отримані результати розподілення напружень $\sigma_{z^3 z^3}$ і переміщень U^{z^3} за напрямком z^3 свідчать, що похибка визначення напружень і переміщень лежить в межах 1% (рис. 3). Таким чином розроблений в межах НМСЕ підхід може бути використаний для розв'язання прикладних задач.

Визначення напружено-деформованого стану лопатки газової турбіни. Розглядувана лопатка являє собою просторове тіло складної форми,

характерні розміри якого по висоті значно перевищують розміри поперечного перерізу. Лопатка закручена відносно вертикальної вісі, має змінну по висоті площу поперечного перерізу і знаходиться під впливом відцентрового навантаження в неоднорідному як по висоті, так і в поперечних перерізах полі температур.

Результати дослідження просторового напружено-деформованого стану лопатки, виконані в припущенні пружного деформування на основі тривимірного МСЕ засвідчили, що напружено-деформований стан лопатки є суттєво неоднорідним як по висоті, так і в межах поперечних перерізів. На основі цих результатів було обрано поперечний переріз лопатки R^* , комбінація усередненого напруження σ_0 і усередненої температури T_0 в якому є найнебезпечнішою з точки зору порушення суцільності матеріалу і подальшого виникнення тріщини. Для проведення чисельного моделювання деформування пера лопатки було розглянуто його фрагмент в околі небезпечного перерізу R^* , $0.94 R_0 < R < 1.06 R_0$ (рис.4, *a*), в межах якого спостерігається найбільш нерівномірне розподілення напружень. Моделювання впливу верхньої частини лопатки здійснюється шляхом прикладення до перерізу $R=1.06 R_0$ нерівномірно розподіленого навантаження, що відповідає діючим в цьому перерізі напруженням. Крім того, фрагмент завантажений розподіленим за об'ємом відцентровим навантаженням p . Розглядуваний фрагмент лопатки може бути віднесений до неоднорідних призматичних тіл. Відповідна дискретна модель НМСЕ, утворена із використанням неоднорідних призматичних СЕ наведена на рис.4, *б*.

Прийнята розрахункова схема і дискретна модель НМСЕ передбачає відсутність закручування відносно вісі z^3 і незмінність площі поперечного перерізу лопатки, що є характерним для кола об'єктів, розрахунок яких традиційно здійснюється на основі НМСЕ. Для урахування впливу закручування фрагмента лопатки на напружено-деформований стан був застосований підхід, що ґрунтується на змінненні вихідної щільності матеріала по площині поперечного перерізу: в центральній частині перерізу (в околі точок 1 та 2), для якої закручування призводить до збільшення напружень, вихідна щільність була збільшена, для периферійних частин перерізу – зменшена. При цьому усереднена по перерізу величина щільності залишилась незмінною.

Лопатка знаходиться в полі дії відцентрових сил, що спрямовані вздовж вісі лопатки і спричиняють напружено-деформований стан, наближений до умов поздовжнього розтягу. Це дозволяє моделювати змінення розмірів поперечного перерізу лопатки в плані із використанням неоднорідних призматичних СЕ змінної жорсткості.

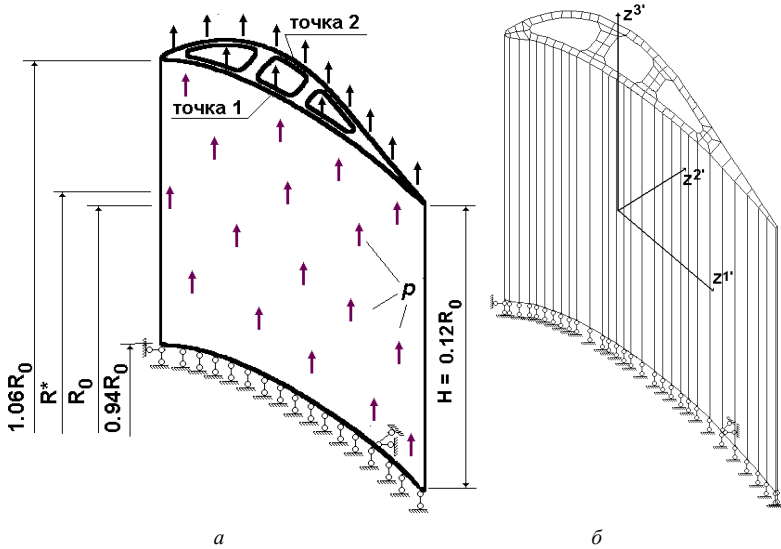


Рис.4. Фрагмент лопатки газової турбіни: а) загальний вигляд; б) дискретна модель НМСЕ

Отримані з урахуванням збіжності в залежності від кількості невідомих дискретної скінченоелементної моделі в поперечному перерізі і за напрямком z^3 розподілення напружень вздовж радіуса фрагмента лопатки (штрихова лінія) в найбільш навантажених точках перерізу в порівнянні з результатами, отриманими із використанням тривимірного МСЕ наведені на рис. 5. Розбіжність результатів становила 3-4%.

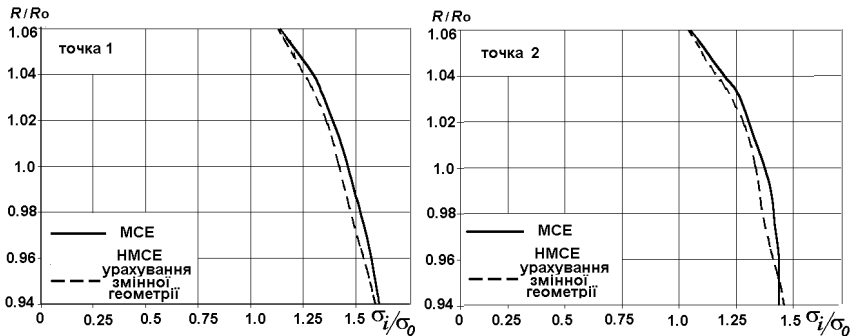


Рис.5. Розподілення інтенсивності нормальних напружень по висоті фрагмента лопатки

Таким чином, застосування розроблених співвідношень дозволяє з високою ефективністю отримувати вірогідні результати розподілення параметрів напружено-деформованого стану для реальних об'єктів без збільшення кількості невідомих, порівняно із випадком дослідження деформування тіл сталої геометрії.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Майборода Е.Е., Пискунов С.О.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах континуальной механики разрушения пространственных тел сложной формы и их систем. Сообщение 1 Разрешающие соотношения полуаналитического метода конечных элементов и алгоритмы решения континуального разрушения при ползучести. // Проблемы прочности.— №5. – 2002.— С.5-16.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Майборода Е.Е., Пискунов С.О.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах континуальной механики разрушения пространственных тел сложной формы и их систем. Сообщение 2 Исследование достоверности результатов и эффективности полуаналитического метода конечных элементов.. // Проблемы прочности". – №6. – 2002. – С 14-19.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Майборода Е.Е., Пискунов С.О.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах континуальной механики разрушения пространственных тел сложной формы и их систем. Сообщение 3. Практическое приложение // Проблемы прочности". – №1. – 2003. – С 67-75.
4. Метод конечных элементов в механике твердых тел/ Под общ. ред. *А.С. Сахарова и И. Альтенбаха*. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982. – 480 с.
5. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел / *В.А.Баженов, А.И.Гуляр, А.С.Сахаров, А.Г.Топор*. – Киев: НИИ СМ, 1993. – 376 с.

Надійшла до редколегії 07.11.2005 р.

УДК 539.3:624.071:624.01

Цихановський В.К., д-р техн. наук,

Прусов Д.Е., канд. техн. наук

МЕТОДИКА МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ПОКРИТТІВ У ВЗАЄМОДІЇ З НЕОДНОРІДНИМ ҐРУНТОВИМ ПІВПРОСТОРОМ

Запропонована методика моделювання півпростору покриття, штучної і ґрунтової основи з використанням моментної схеми скінчених елементів та оболонкового просторового скінченого елемента у нелінійній постановці для дослідження НДС та розрахунку елементів покриттів у взаємодії з неоднорідним ґрунтовим півпростором.

Вступ. Активна зона ґрунтової основи дорожніх та аеродромних покриттів може досягати шести метрів і більше в залежності від властивостей ґрунтових нашарувань. Прикладом неоднорідної ґрунтової основи є лесовидні ґрунти, відмінна особливість яких полягає у тому, що в напруженому стані, під дією колісного навантаження чи власної ваги покриттів і ґрунту при замочуванні вони дають додаткові осідання, та можуть знижувати свою структурну міцність [1, 2, 3]. При проектуванні дорожніх та аеродромних покриттів, що знаходяться на ділянках з ґрунтовими умовами другого типу по просіданню для запобігання замочування ґрунту, передбачається влаштування гідроізоляційного шару під дорожнім або аеродромним одягом. Але ці заходи на практиці часто бувають малоефективними.

Для розв'язання цієї проблеми та вдосконалення розрахунку, особливо нежорстких або полегшених жорстких аеродромних покриттів при наявності у ґрунтовій активній товщі вищезгаданих включень і взагалі при неоднорідності ґрунтової основи пропонується моделювання ґрунтової основи дискретним неоднорідним півпростором при урахуванні для дискретно-локальних зон рівнянь стану для анізотропного матеріалу, еквівалентного реальному лесовому ґрунту. Для розв'язку задач взаємодії конструкцій з ґрунтовими основами є багато різних підходів протилежних точок зору. З існуючих моделей ґрунтових основ можна виділити чотири основні групи: ті, що базуються на гіпотезах прямої пропорційності (Вінклера); ті, що використовують теорію лінійно-деформованого тіла для пружного ґрунтового півпростору; комбінації перших двох; ті, що побудовані з урахуванням зсувних (пластичних) деформацій на основі класичної механіки ґрунтів. Аналіз існуючих модифікацій механічних моделей для зазначених підходів дослідження ґрунтового півпростору підтверджує відоме протиріччя між вимогою до

простоти моделі і прагненням повніше описати деформаційні властивості ґрунтів.

Постановка задачі. У рамках існуючих нормативних документів з урахуванням сучасного стану відповідних наукових доробок можна розглядати контактну задачу взаємодії твердих деформівних тіл з неоднорідним ґрунтовим півпростором з використанням функцій перемінного коефіцієнта постелі [4, 5]. Такий підхід узгоджується з розв'язанням задачі дослідження жорстких аеродромних покриттів, які в основному працюють на згин і розподіляють навантаження на достатньо велику площину ґрунтового півпростору. Ці покриття доцільно розглядати як тонкі плити (пластинки) з використанням розрахункових дискретних моделей за методом скінченних елементів.

Нежорсткі покриття при порівнянні з жорсткими більш слабше підпадають опору на згин, тому що матеріал в їх шарах в основному працює на вертикальний стиск і зсув. При наявності слабких прошарків в ґрунтовій основі нежорстких покриттів більш адекватна для опису напружено-деформованого стану ґрунтового півпростору при наявності включень з елементів конструкцій покриття буде модель нелінійно-деформівного тіла з урахуванням розвитку пластичних деформацій.

Особливе положення займають покриття із гнучких плит (мембранних пластинок), або композитних м'яких оболонок, при цьому співвідношення товщини до розрахункового прогону мають межі $1/100 - 1/300$ і величини очікуваного прогину сягають товщини пластинки або перевищують її. За характером роботи такі мобільні покриття, що застосовуються при улаштуванні військових або тимчасових аеродромів, наближаються до нежорстких за фізико-механічними властивостями штучних основ з низьким опором на згин. Такі конструкції покриттів треба розглядати як гнучкі (м'які) оболонки-пластинки на пружній основі за моделлю Проктора [4] з урахуванням окремих пружно податливих в'язів, що моделюють анкерні пристрої у вигляді гвинтових паль. У такій постановці задача розв'язується з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності (якщо оболонка із композитного полімерного матеріалу) з використанням методу скінченних елементів [6].

Вихідна математична модель задачі. Метод скінченних елементів відноситься до енергетичних методів, тому для постановки задачі як теоретична основа використовується теорія нелінійної механіки ґрунтів на базі механіки суцільного середовища із застосуванням співвідношень в приростах переміщень, деформацій і напружень [6, 7]. З урахуванням співвідношень нелінійної теорії пружності [7] перший принцип віртуальної роботи для статичних задач в актуальній конфігурації тривимірного нелінійно деформівного тіла можна записати у вигляді.

$$\int_v (\sigma'^{ij} + C_{(e,p)}^{ijkl} \gamma_{kl}) \delta \gamma_{ij} dv - \int_v p^i \delta u_i dv - \int_S q^i \delta u_i dS = 0, \quad (1)$$

де σ'^{ij} – компоненти тензора початкових напружень; $C_{(e,p)}^{ijkl}$ – компонент тензора пружностей твердого тіла з урахуванням розвитку пружно-пластичних деформацій; $\delta \gamma_{ij}$ – варіації коваріантних компонент тензора приростів скінченних деформацій Коші-Грина у місцевій системі координат x^i (див. рис.1), p^i, q^i – компоненти узагальнених векторів об'ємних і поверхневих сил у глобальній системі координат $OZ^1Z^2Z^3$, що діють на тіло в актуальній конфігурації і віднесені до відлікової конфігурації; δu_i – варіації компонент вектора приростів переміщень у глобальній декартовій системі координат.

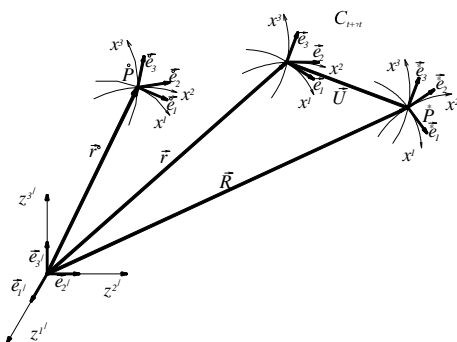


Рис. 1. Системи координат

Варіаційне рівняння (1) відповідно до енергетичних методів описує рівновагу елементарного об'єму будь-якого суцільного середовища, незалежно від його фізичних властивостей. Це представлення реалізує практичний вихід варіаційних задач теорії пружності і теорії граничного напруженого стану, де розв'язки пов'язані з відокремленням зон зсувних (для ґрунтів) пластичних деформацій. Таким чином розглядається детермінована задача статичного ґрунтового суцільного півпростору і у кожній точці (вузлах дискретної моделі і границях між ними) виконуються умови граничного напруженого стану.

Щодо властивостей ґрунтового середовища, розглядається неоднорідний півпростір, який моделюється дискретним відображенням у вигляді набору скінченних елементів, кожний з яких є однорідним твердим тілом з різними фізико-механічними характеристиками ізотропного або ортотропного тіла, але на границях скінченних елементів виконуються умови сумісності деформацій, тобто маємо справу із

сумісними СЕ із забезпеченням нерівномірної сіткової області для апроксимації з певною мірою точності зон концентрацій напружень і розвитку зсувних деформацій, завдяки застосуванню тензора скінченних деформацій, який точно описує переміщення і повороти СЕ як жорсткого цілого.

Щодо граничних умов і параметрів граничних умов, в запропонованій методиці використовуються природні граничні умови (жорсткі), які реалізуються накладанням жорстких в'язів на границях дискретної розрахункової моделі, а також спеціальні граничні умови при взаємодії з анкерними пристроями із введенням рівнянь геометричних кінематичних умов з реалізацією розв'язків варіаційної задачі методом невизначених множників Лагранжа, коли варіаційне рівняння дискретної моделі (1) доповнюється рівнянням умов деформування цієї моделі через систему геометричних зв'язків [7].

У даній роботі критерій стійкості, або текучості ґрунтового півпростору для окремої локальної однорідної ізотропної області, пропонується у найбільш універсальній формі на основі розширеного критерію Мізеса (за рахунок включення в нього залежності від гідростатичних напружень) $\Pi_3\Pi$ з використанням поверхні навантаження за законом Кулона-Мора [4,8,9] і з урахуванням третього інваріанта тензор-девіатора функції напружень через інваріант Лоде-Надаї. Враховуючи, що інваріанти тензора напружень визначаються через компоненти шарової і девіаторної частини функції напружень і допущення про однорідність і ізотропність локального околу півпростору робить їх незалежними від напрямлення нормалей октаедричних площин, розширений модифікований критерій текучості Мізеса можна навести у наступній формі:

$$f(\mathcal{E}, \mathcal{E}^D, \alpha, \varphi, c) = \frac{2}{3} I_1(\mathcal{E}) \times \left(\cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin \varphi \right)^2 - \left[\frac{1}{\sqrt{3}} I_1(\mathcal{E}) \sin \varphi - \sqrt{3} c \cos \varphi \right]^2 = 0, \quad (2)$$

де $\mathcal{E}, \mathcal{E}^D$ — тензори відповідно загальних напружень, напружень девіаторної частини і пластичних деформацій; α, φ, c — відповідно інваріант тензор-девіатора напружень – кут Лоде-Надаї, кут внутрішнього тертя ґрунту і питоме зчеплення ґрунту.

Співвідношення моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) для просторового оболонкового скінченного елемента. Дискретизація тонких оболонок-плит на пружній основі (механічна модель жорсткого

покриття), а також багатошарового неоднорідного півпростору (модель нежорсткого покриття, штучної і ґрунтової основи) реалізована у запропонованій методиці з використанням універсального оболонкового скінченного елемента (СЕ) з 24-ма ступенями вільності (вісім вузлів з 3-ма незалежними переміщеннями, або чотири вузли – при заміні перемінних – з 6-ма узагальненими переміщеннями) [7]. У першому випадку лінійно-пружна ґрунтова основа моделюється “вінклерівською” з перемінним коефіцієнтом постелі, тобто реакція основи у вузлі СЕ – моделі оболонки–плити визначається за формулою [8]:

$$Q_{(0)}^i = -C_{(N)} F_{(N)} n_{(N)}^i n_{(M)}^k U_{(M)}^k; \quad C_{(N)} = \frac{E_{(0)}^N}{h_{(N)}}, \quad (5)$$

де $C_{(N)}$ – значення коефіцієнта постелі у вузлі СЕ-моделі; $n_{(N)}^i$ – компоненти вектора одиничної нормалі до поверхні оболонки у вузлі N ; $F_{(N)}$ – окіл площі серединної поверхні оболонки у вузлі N ; $E_{(0)}^N$ – модуль загальної деформації ґрунту у околі вузла N ; $h_{(N)}$ – товщина стискуваної товщі ґрунтової основи аеродромного покриття.

У другому випадку моделювання півпростору покриття, штучної і ґрунтової основи просторовий елемент працює у плоско-деформованому стані за рахунок накладених в’язів у першому напрямленні глобальної системи координат за нормаллю до півпростору, при цьому відповідно до задачі плоскої деформації перераховується модуль пружності і коефіцієнт Пуассона:

$$E_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (6)$$

Дискретна СЕ-модель тонкої плити на пружній основі, або СЕ-модель плоско-деформівного півпростору у процесі деформування під дією зовнішніх сил розглядаються у трьох станах: натуральному (дійсна конфігурація C^0), початковому (відлікова конфігурація C^c) і деформованому (актуальна конфігурація $C^{t+\Delta t}$). В кожному СЕ введений місцевий косокутний базис у центрі СЕ модулі масштабних векторів \bar{e}_i дорівнюють розмірам СЕ по середнім лініям його поверхні і товщині (або плоско-деформованої моделі півпростору) у центрі СЕ (див. рис 1).

В якості невідомих виступають вузлові переміщення СЕ в глобальній системі координат $OZ^1Z^2Z^3$ (див. рис. 1). Зміна переміщень і координат

точок у межах СЕ визначається полілінійними функціями місцевих координат x^1, x^2, x^3 або x^2, x^3 локальної поверхні півпростору:

$$u^i = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} u^i_{S_1 S_2 S_3} \prod_{\delta=1}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

$-\frac{1}{2} \leq x^{(\delta)} \leq \frac{1}{2}$; $S_{(\delta)} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ – умовні Лагранжеві координати, $u^i_{S_1 S_2 S_3}$ – вузлові переміщення СЕ.

Згідно до процедури МССЕ виконується розкладання функцій деформацій і напружень у ряд Макларена у центрі СЕ. Функції деформацій у актуальній конфігурації зводять до функцій тензор-градієнтів вектора переміщень тому маємо [7]:

$$\nabla_i u_j(x_{(e)}^{i(j)}) = \xi_{ij}^{**} + \varphi_{ij,k}^{**} x^k \omega_i^k + \psi_{ij,ks}^{**} x^k x^s \omega_{(sii)}^{(kks)}; \quad (8)$$

$$\sigma^{ij} = N^{ij} + M_k^{ij} x^k \omega_{(i)}^{(k)} + M_{ks}^{ij} x^k x^s \omega_{(kii)}^{(ks)}, \quad (9)$$

де

$$\omega_{ij\dots}^{ks\dots} = \omega_i^k \omega_j^s \dots; \omega_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при } i \neq k; \\ 0 & \text{при } i = k \end{cases}$$

$$N^{ij} = \sigma^{ij} \Big|_{(0)}; M_k^{ij} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^k} \Big|_{(0)}; M_{ks}^{ij} = \frac{\partial^2 \sigma^{ij}}{\partial x^k \partial x^s} \Big|_{(0)}.$$

Враховуючи вирази (7) (9), з використанням варіаційного рівняння (1) для просторового оболонкового елемента після інтегрування одержуємо вираз варіації енергії деформації СЕ:

$$\delta U_{(e)} = \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} R_{P_1 P_2 P_3}^{t'} \delta u_{P_1 P_2 P_3}^{t'}, \quad (10)$$

де $R_{P_1 P_2 P_3}^{t'}$ – коефіцієнти нелінійної матриці реакцій СЕ:

$$R_{P_1 P_2 P_3}^{t'} = \sqrt{G} \left(\frac{1}{4} N^{ij} Z_{,j}^{t'} P_i + \frac{1}{24} M_k^{ij} Z_{,j}^{t'} P_i P_k + \frac{1}{144} M_{st}^{ij} Z_{,j,s}^{t'} P_i \omega_{(i)}^{(t)} \right), \quad (11)$$

де \sqrt{G} – об'єм СЕ у відліковій конфігурації C^t ;

$$Z'_{j,*} = \frac{\partial \left(Z' + \frac{1}{2} u'^2 \right)}{\partial x^j}; \quad Z'_{j,s,*} = \frac{\partial^2 \left(Z' + \frac{1}{2} u'^2 \right)}{\partial x^j \partial x^s}.$$

Систему нелінійних рівнянь рівноваги SE-моделі одержимо з виразу повної потенціальної енергії [7]:

$$\sum_{N=1}^{N=M} \left(R'_N - Q'^*_N \right) \delta u'^N = 0; \quad N = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

де M – число вузлів SE-моделі.

Через незалежність варіацій переміщень, що допускається в'язами одержимо остаточно систему нелінійних рівнянь рівноваги SE-моделі з просторовим оболонковим скінченним елементом [7]:

$$\sum_{N=1}^M \left(R'_N - Q'^*_N \right) = 0, \quad \text{або} \quad \sum_{N=1}^M h'_N = 0, \quad (13)$$

де h'_N – вектор нев'язки у вузлі SE-моделі.

Для розв'язання системи нелінійних рівнянь (1) достатньо великого порядку використовується спеціальний алгоритм, що побудований на комбінації методів подовження по параметру збурення та Ньютон-Канторовича, також подовженням за розвитком пластичних деформацій. Рекурентну формулу ітераційного процесу розв'язку квазістатичної задачі

$$h(U, t) = 0; \quad t \in [0, 1]$$

на кроці за часом $t + \Delta t$, “ $n + 1$ ” можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} [K_{GL}^{(n)}] \{ \Delta u_{i+1}^{n+1} \}_L &= \{ Q(u_i^n) \}_{(G)} - \{ R(u_i^n) \}_{(G)}; \\ \{ u_{i+1}^{n+1} \} &= \{ u_i^{n+1} \} + \{ \Delta u_{i+1}^{n+1} \}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $[K_{GL}^{(n)}]$ – лінеаризована матриця жорсткості SE-моделі, що обчислюється формулами наведеними, у [7]. Критерієм завершення ітераційного процесу (14) за „ i ” є зниження норми вектора нев'язки:

$$\{ r(u_{i,t}^{n+1}) \} = \{ Q(u_i^{n+1}) \} - \{ R(u_i^{n+1}) \} \quad (15)$$

до заданої малої величини:

$$\left(r^{i,k}, r^{i,k} \right) \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Висновки. Розглянута методика математичного моделювання багатозарового півпростору покриття, штучної і ґрунтової основи дозволяє проводити дослідження нежорстких дорожніх та аеродромних покриттів з метою оцінки впливу наявності слабкого прошарку в ґрунтовій основі покриття на прогин покриття, з урахуванням анізотропних властивостей неоднорідного ґрунтового півпростору, а також дослідження жорстких покриттів для оцінки кількісних значень параметрів напружено-деформованого стану за переміщеннями, згинними моментами і реакцією пружної ґрунтової основи.

1. *Гольдштейн М. Н.* Механические свойства ґрунтов. – М.: Стройиздат, 1973. – 375 с.
2. *Харр М.Е.* Основы теоретической механики ґрунтов. – М.: Изд-во лит. по стр-ву, 1971.- 320с
3. *Цытович Н. А.* Механика ґрунтов. – М.: ГИЛСЛи СМ, 1963. – 635 с
4. *Кузнецов В.И.* Упругое основание. Расчёт балок, плит и рам. – М.: ГИЛСА, 1952. – 296 с.
5. *Горбунов-Посадов М.* Расчёт конструкций на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1953.
6. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикладная механика. – К.: Ин-т механики НАН Украины. – 2002. – Т.38 (48), №6. – С.24-63.
7. *Баженов В.А., Цыхановский В.К., Кислюк В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – К.: КНУБА, 2000. – 386с.
8. *Цыхановський В.К., Прусов Д.Е., Коряк О.С.* Основні співвідношення методу скінченних елементів до розв'язання задачі дослідження неоднорідного анізотропного півпростору// Аеропорти та їх інфраструктура // Матеріали VI Міжнародної науково-технічної конференції „Авіа – 2004”, т. 4. – К.: НАУ, 2004, с. 43.20-43.23
9. *Цыхановський В.К., Прусов Д.Е.* Метод скінченних елементів у задачах дослідження неоднорідного півпростору з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.75.– Київ,КНУБА.– 2004.– С.87–98.
10. *Шимановский А.В., Цыхановский В.К.* Теория и расчёт сильно нелинейных конструкций. – Киев: Изд-во „Сталь”, 2005. – 423 с.

Надійшла до редакції 03.09.2005 р.

УДК 624.034

Цимбал С.Й., канд. техн. наук
Богославець Н.М.,
Х.Р. Шейхназарі

ФАКТОРИ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ВЕЛИЧИНУ МОДУЛЯ ДЕФОРМАЦІЇ

Дослідженнями встановлено, що модуль деформації є величина змінна. Його величина, як на рівні підшви фундаменту, так і по глибині в межах стисливої зони залежить від величини напружень та стану ґрунту основи.

Сучасні методи розрахунку осідання основи фундаментів неглибокого закладання ґрунтуються на використанні теорії лінійно деформованого напівпростору. За допомогою цих методів можна визначити осідання тільки в межах невеликого діапазону тиску в фазі ущільнення. Однак, для розрахунку осідання основ, на які із умови міцності може бути допущений більш високий тиск, необхідно розробити методику визначення осідання основ фундаментів і в фазі зсувів. Нелінійна залежність між деформаціями і напруженнями в розрахунках осідання основи фундаментів може бути врахована при використанні змінного модуля деформації, але чинники, що впливають на його величину, досліджені недостатньо. В даній статті зроблена спроба виявити основні фактори, які впливають на величину модуля деформації.

Результати чисельних випробувань і досліджень, проведених різними авторами, показують, що залежність між деформаціями і напруженнями, які виникають в основі фундаментів (штампів), завжди криволінійна. В ґрунтах при дії на них зовнішнього навантаження і при розвантаженні виникають як пружні, так і залишкові деформації. Величина залишкових деформацій, як правило, у багато разів більше пружних деформацій. Графік залежності $S = f(P)$ при одноразовому навантаженні, що має місце при будівництві будівель і споруд, відзеркалює сумарні (загальні) деформації.

Деформаційні властивості ґрунтів характеризуються модулем загальних деформацій, який, згідно нормативних документів, є величина постійна для відповідних ґрунтових умов. Однак, експериментальні дослідження багатьох авторів підтверджують, що модуль загальних деформацій ґрунтів є величина змінна. В останні роки з'явилися деякі пропозиції щодо визначення його змінної величини, одночасно ці зміни пов'язують лише з глибиною, що не відповідає дійсності. Виходячи із

зазначеного, питання змінного модуля деформацій є актуальним і потребує подальшого вивчення.

Дослідженнями Харра [1] була встановлена аналітична залежність зміни модуля деформації з глибиною:

$$E_i = E_1 Z^\lambda, \quad (1)$$

де E_1 – модуль деформації на глибині $Z=1$ м від поверхні землі; $\lambda = (\nu_V - 2)$ – показник степеню λ в залежності від коефіцієнта Пуассона ν .

Приймаючи різні значення для λ ($\lambda < 0$; $\lambda = 0$; $0 < \lambda < 1$; $\lambda = 1$; $\lambda > 1$) автор приводить п'ять різних закономірностей зміни модуля деформації з глибиною (рис. 1). Нажаль, відсутні рекомендації, яка залежність найбільш вірогідно задовольняє розрахунок основ і фундаментів.

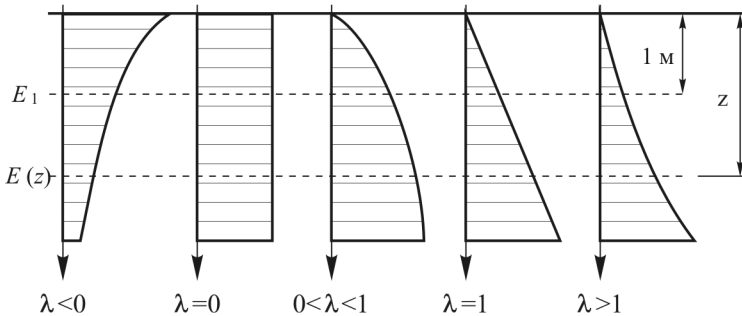


Рис. 1. Характер зміни модуля деформації по глибині

Експериментальні дослідження В.М. Чикишева [2] (випробування штампами площею 0.5 і 4 м²) довели, що зміни модуля деформації ґрунту з глибиною основи можливо апроксимувати залежністю:

$$E_i = \frac{E_k}{1 - A \left(\frac{Z}{r} \right)}, \quad (2)$$

де E_k – компресійний модуль деформації; A – коефіцієнт, який залежить від форми штампа і величини активної зони; Z – глибина від підшви фундаменту (штампа); r – радіус штампа.

Згідно формули (2) безпосередньо під підшвою фундаменту модуль деформації дорівнює компресійному модулю деформації, а на глибині він

наближається до пружного модуля, тобто на порядок більше компресійного.

Розглядаючи формули (1,2) можна зробити висновок, що величина змінного модуля деформації залежить від глибини Z , тобто $E_i = f(Z)$, що не відповідає дійсності.

Для встановлення чинників, від яких залежить величина модуля деформації основи фундаментів, розглянемо результати штампових випробувань, які були проведені на території будівельного майданчика по вул. Воровського в м. Києві.

Основою були суглинки тверді: щільність $1,90 \text{ кН/м}^3$, вологість $0,20$, коефіцієнт пористості 0.64 , питоме зчеплення 28 КПа , кут внутрішнього тертя 22° .

Випробування проводились штампом площею 600 см^2 в свердловині на глибині $7,5 \text{ м}$ за стандартною методикою. Результати випробувань приведені в табл. 1. Модуль деформації визначений за стандартною методикою, дорівнює $24,3 \text{ МПа}$.

Таблиця 1

Результати штампових випробувань		Січний модуль деформації	Модуль деформації за формулою (3)
P , МПа	S , см	E_c , МПа	E_n , МПа
0,0625	0,031	64,80	24,30
0,1250	0,051	23,08	17,82
0,1875	0,103	14,82	12,81
0,2500	0,187	7,45	9,30
0,3125	0,345	7,03	6,80
0,3750	0,516		

За результатами штампових випробувань визначений січний модуль деформації, значення якого наведені в табл. 1. Аналіз отриманих даних дає можливість стверджувати, що модуль деформації є величина змінна, яка залежить від величини напруження, що діє на підшві штампу (фундаменту): чим більше напруження, тим менша величина модуля деформації і навпаки. Січний модуль деформації може використовуватись

як початковий модуль на підшві фундаменту для розрахунку осідання основи. Одночасно необхідно відзначити, що штапові випробування проводять для будівель I і II класу, для інших класів будівель розрахунки осідання основи фундаментів виконують з використанням постійного модуля деформації згідно нормативних документів. В таких випадках початковий змінний модуль деформації в основі під підшовою фундаменту може бути визначений аналітично за виразом:

$$E_n = E_T \exp\left(\frac{P_0 - P_i}{P_0}\right)e, \quad (3)$$

де E_T – постійний модуль деформації за даними нормативних документів; P_0 і P_i – відповідно середнє напруження на підшві фундаменту (штапу), при якому визначався табличний постійний модуль деформації та напруження для якого визначається змінний модуль деформації; e – коефіцієнт пористості ґрунту, в якому знаходиться підшва фундаменту.

Використовуючи експериментальні дані про розрахункову величину постійного модуля деформації 24,3 МПа. за формулою (3) були виконані розрахунки початкового змінного модуля деформації, які для порівняння зведені до таблиці 1. Порівняльний аналіз показує, що характер зміни величини січного модуля деформації і змінного модуля деформації, визначеного за формулою (3), практично співпадають (рис. 2). Формула (3) крім напруження враховує стан ґрунтової основи через коефіцієнт пористості, тобто величина початкового змінного модуля деформації

залежить від напружень на підшві фундаменту та коефіцієнта пористості, чим більша його величина, тим менша величина модуля деформації.

Для розрахунку осідання основи фундаментів в межах стисливої зони необхідно використовувати змінний модуль деформації за глибиною. Його величина на рівні підшви фундаменту

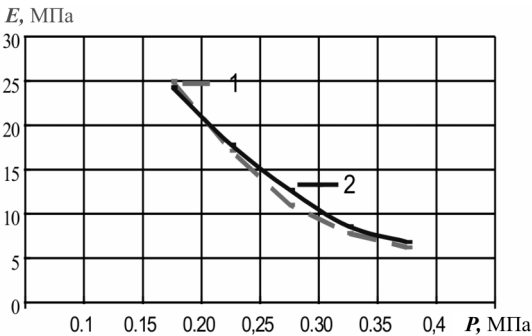


Рис. 2. Графіки залежності модуля деформації від напружень: 1 – результати експериментальних досліджень; 2 – розраховані за формулою (3)

дорівнює, відповідно до напружень, початковому модулю деформації, а на будь – якій глибині визначається із виразу

$$E_i = E_n / \alpha^2 \quad (4)$$

де E_n –початковий модуль деформації, який визначається за формулою (3), або за результатами штампових випробувань як січний модуль; α – коефіцієнт затухання вертикальних напружень з глибиною, який визначається за формулою (1), або за таблицями, що наведені в роботі [3].

Врахування змінного модуля деформації і стану ґрунтової основи фундаментів дає можливість розрахувати осідання основи та побудувати графік залежності $S=f(P)$ на всьому інтервалі навантаження і вибрати найбільш технічно і економічно вигідні умови роботи фундаментів, які будуть забезпечувати стійкість і надійність об'єктів різного призначення.

1. *Харр М.Е.* Основы теоретической механики грунтов. – М.: Стройиздат, 1971. – 319с.
2. *Чикишев В.М.* Исследование характера деформации глинистых грунтов под фундаментами. – М.: Стройиздат, 1978. – 127 с.
3. *Чибіряков В.К., Цимбал С.Й.* Розподіл напружень в основі стовпчастих фундаментів // Основи і фундаменти: Міжвідомчий науково – технічний збірник. – К.: КНУБА, 2005. – Вип.. 29. – с. 132 -137.

Надійшла до редколегії 18.11.2005 р.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.</i> Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченого елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ	3
<i>Гуляєв В. І., Белова М. О., Горбунович І. В.</i> До розрахунку стійкості та коливань бурильної колони	27
<i>Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Дослідження віброударних усталених коливань висотної споруди з маятниковим гасителем	35
<i>Іванченко Г.М.</i> Перебудова плоского фронту акустичної хвилі криволінійними поверхнями анізотропних середовищ	65
<i>Дехтярюк Є.С., Немчинова Л.Ю., Отрашевська В.В.</i> Залежність критичних значень інтенсивності стохастичного параметричного навантаження від радіуса кореляції	72
<i>Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В.</i> Тестування як один із ефективних інструментів оцінювання якості засвоєння знань студентів	77
<i>Пискунов С.О., Рутковський В.А., Шкриль О.О.</i> Призматичний скінченний елемент змінної геометрії	83
<i>Цихановський В.К., Прусов Д.Е.</i> Методика моделювання елементів покриттів у взаємодії з неоднорідним ґрунтовим півпростором	91
<i>Цимбал С.Й., Богославець Н.М., Х.Р. Шейхназарі</i> Фактори, що впливають на величину модуля деформації	99

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 76

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку .05. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. . Умовн. Фарбо-відб.
Облік.-вид. арк. . Тираж 100. Зам. № .

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

Фірма "ВІПОЛ"

м. Київ, вул. Волинська, 60. 03151