

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

---

Випуск 77

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2005

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*Ю.В. Верюжський*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*Є.О. Гоцуляк*, д-р техн. наук  
*О.І. Гуляр*, д-р техн. наук

*Є.С. Дехтярюк*, д-р техн. наук  
*Г.В. Ісаханов*, д-р техн. наук  
*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*М.О. Шульга*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 21 грудня 2005 року, протокол № 13.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 77 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2005. – 112 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,  
м. Київ, 03037,  
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

© КНУБА, 2005

УДК 539.3

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук,  
**Гуляр О.І.**, д-р техн. наук,  
**Пискунов С.О.** канд. техн. наук,  
**Солодей І.І.**, канд. техн. наук,  
**Шевченко Ю.В.**, аспірант

## **РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ НМСЕ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ З ДОВІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ**

Отримані розрахункові співвідношення НМСЕ для розв'язання просторових задач динаміки неоднорідних незамкнутих тіл обертання з довільними граничними умовами, які забезпечують високу ефективність підходу при використанні косокутних скінченних елементів для побудови дискретних моделей об'єктів складної конфігурації меридіального перетину.

**Вступ.** В роботі [9] викладено методіку визначення динамічних характеристик і моделювання вимушених нестационарних коливань неоднорідних замкнутих тіл обертання. В той же час в різних галузях техніки та будівництва знаходять широке застосування елементи конструкцій, які являють собою неоднорідні незамкнуті тіла обертання з довільними граничними умовами. В зв'язку з цим є актуальним узагальнення зазначеного вище підходу на даний клас об'єктів.

Метою даної роботи є отримання розрахункових співвідношень напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) для розв'язання просторової задачі динаміки неоднорідних масивних, тонкостінних та комбінованих незамкнутих тіл обертання з довільними граничними умовами.

**Постановка задачі.** Розглядаються неоднорідні ізотропні незамкнені тіла обертання (рис. 1), що знаходяться під дією довільного імпульсного навантаження або зміщень, на інтервалі часу  $T \in [t_0, t_1]$ . Неоднорідність фізико-механічних властивостей реальних тіл може бути зумовлена різноманітними причинами: природною неоднорідністю, технологією виготовлення, впливом зовнішніх полів, наприклад температури чи радіаційного опромінення або навмисно організованою структурною неоднорідністю, яка властива практично всім композитам і тому подібне.

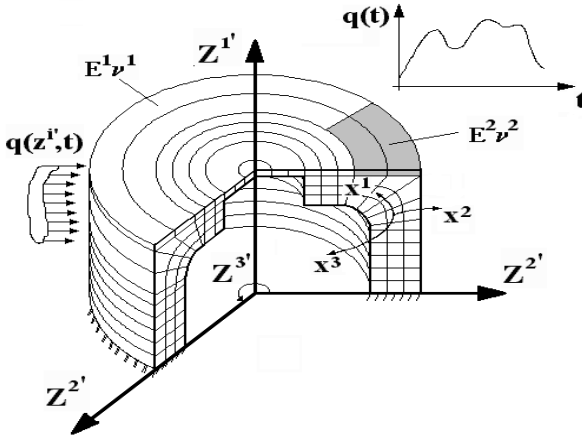


Рис. 1. Неоднорідне незамкнуте тіло обертання з довільними граничними умовами

Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній системі координат  $z^{i'}$ , що в подальшому називається базисною. Для подання напружено-деформованого стану тіла із складною формою поперечного перетину запроваджується місцева криволінійна система координат  $x^i$ , яка пов'язана з геометрією тіла. Вважається, що в будь-якій точці тіла відомий однозначний зв'язок між базисною і місцевою системами координат, який визначається за допомогою прямого і зворотного тензорів перетворення координат:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad x_{,j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^{j'}}. \quad (1)$$

В силу того, що  $z^3$  і  $z^{3'}$  співпадають, та ортогональні до площини поперечного перетину для циліндричної системи координат

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0. \quad (2)$$

Тут і надалі, індекси, що позначені латинськими літерами, приймають значення 1, 2, 3; а грецькими – 1, 2; кома перед індексом показує операцію диференціювання.

Відмінні від нуля компоненти метричного тензора, що визначають масштаби базисних векторів, в ортогональній циліндричній системі координат мають вигляд [2]:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = (z^{2'})^2; \quad (3)$$

Коваріантні компоненти метричного тензора в місцевій системі координат визначаються через відповідні компоненти в базисній:

$$g_{ij} = z_{,i}^{\alpha'} z_{,j}^{\alpha'} + z_{,i}^{3'} z_{,j}^{3'} g_{3'3'}. \quad (4)$$

Контраваріантні компоненти знаходяться по відомим коваріантним:

$$g^{ij} = \frac{A(g_{ij})}{g}, \quad (5)$$

де  $A(g_{ij})$  - алгебраїчне доповнення до елемента  $g_{ij}$  матриці, що побудована по коваріантним компонентам метричного тензора;  $g = \det|g_{ij}|$  - визначник цієї матриці.

Переміщення будь-якої точки тіла визначається компонентами в базисній системі координат  $u_{i'}$ . Компоненти тензору деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [1]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} - 2u_{k'} z_{,i}^{l'} z_{,j}^{m'} \Gamma_{l'm'}^{k'}), \quad (6)$$

де

$$u_{k',i} = \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^i}. \quad (7)$$

Символи Крістофеля другого роду  $\Gamma_{l'm'}^{k'}$  в ортогональній циліндричній системі координат відмінні від нуля і мають наступний вигляд [2]:

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -Z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{Z^{2'}}. \quad (8)$$

Враховуючи (8) співвідношення (7) приймають вигляд:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha}),$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left( z_{,3}^3 u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3} - \frac{2z_{,\alpha}^2 z_{,3}^3 u_{3'}^3}{Z^2} \right), \quad (9)$$

$$\varepsilon_{33} = z_{,3}^3 u_{3',3} + \left( z_{,3}^3 \right)^2 z^2 u_2,$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (10)$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних сталих  $d^{ijkl}$  пов'язані з коефіцієнтами Ламе  $\lambda$  і  $\mu$  співвідношеннями [2]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (11)$$

де  $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ ;  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ;  $E = E(z^{i'})$ ,  $\nu = \nu(z^{i'})$  - значення модуля пружності і коефіцієнта Пуассона в точці тіла, що розглядається.

Фізичні компоненти тензорів деформацій  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ , напружень  $\tilde{\sigma}^{ij}$  та пружних констант  $\tilde{d}^{ijkl}$  визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{kl} &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}, \\ \tilde{\sigma}^{ij} &= \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}, \\ \tilde{d}^{ijkl} &= d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рівновага неоднорідного ізотропного тіла об'ємом  $V$  при наявності інерційних сил, обмеженого поверхнею  $S$ , описується рівнянням, що є наслідком принципу Даламбера, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} z_{,k}^{j'} \sigma^{ki} \right) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'}. \quad (13)$$

Однозначність розв'язання (13) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу  $t_0$ , який приймається за початок часової координати:

$$u(z^{i'}, t_0) = u_0(z^{i'}), \quad \dot{u}(z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(z^{i'}), \quad z^{i'} \in V. \quad (14)$$

При цьому припускається, що на частині поверхні  $S_u$  задані кінематичні граничні умови:

$$u(z^{i'}, t) = \tilde{u}(z^{i'}, t), \quad z^{i'} \in S_u, \quad (15)$$

а на поверхні  $S_p$  з нормаллю  $\vec{n} = n_j e^j$  - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_{,i}^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(z^{k'}, t), \quad z^{k'} \in S_p. \quad (16)$$

В кожний момент часу пружно-деформований стан згаданого тіла повинен задовольняти варіаційному рівнянню руху яке згідно принципам Лагранжа-Даламбера подамо у вигляді:

$$\int_V \rho u^{i'} \delta u_{i'} dV + \int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V f^{i'} \delta u_{i'} dV - \int_{S_p} p^{i'} \delta u_{i'} dS = 0, \quad (17)$$

де  $\tilde{\sigma}^{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  - фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно.

**Неоднорідний круговий скінченний елемент з довільними граничними умовами на торцях.** Скінченні елементи, що пропонується, орієнтовані на розрахунок широкого класу неоднорідних тіл обертання. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення. Як показано в роботах [1,3,4,6,7], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [8] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище "хибного зсуву", що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Для дискретизації неоднорідних просторових тіл при динамічному навантаженні застосовуються кругові незамкнені скінченні елементи (СЕ) (рис.2). В місцевій системі координат їх переріз є квадратом з одиничними сторонами. Початок місцевої системи координат  $x^i$

знаходиться у геометричному центрі елемента, вісі  $x^1$  і  $x^2$  направлені паралельно сторонам поперечного перерізу, а  $x^3$  суміщена із  $z^{3'}$ .

Припускається, що щільність матеріалу  $\rho$ , компоненти тензора пружних постійних  $d^{ijkl}$  і визначник метричного тензора  $g$  незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі:

$$\rho = \rho|_{x^\alpha=0}, \quad d^{ijkl} = d^{ijkl}|_{x^\alpha=0}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{g}|_{x^\alpha=0}. \quad (18)$$

В той же час  $\rho$  і  $d^{ijkl}$  довільно змінюються вздовж осі  $x^3$  і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ в базисній системі координат  $(u; \dot{u}; \ddot{u})_{k'}$ , де  $k'$  - напрямок в базисній системі координат. Позначка “:” відповідає логічному оператору “або”, що означає вибір для розгляду однієї з компонент в круглих дужках.

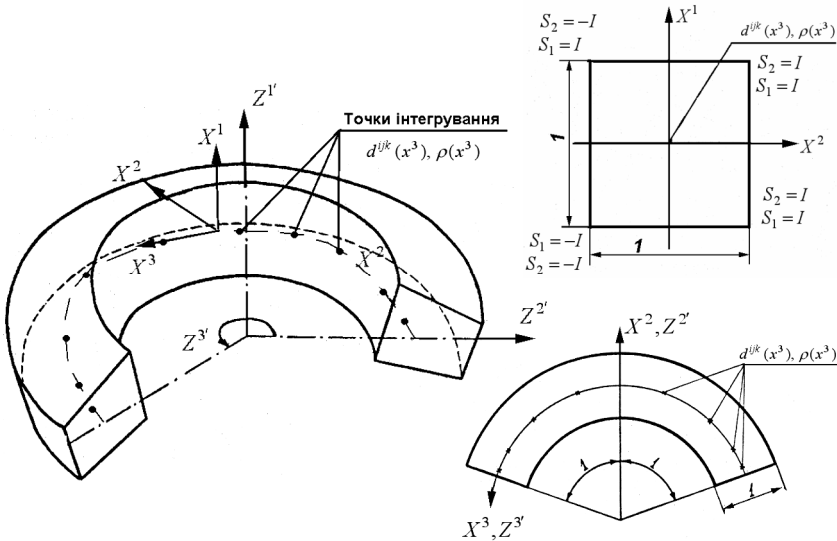


Рис.2. Неоднорідний незамкнений кільцевий скінченний елемент із довільними граничними умовами на торцях



Якщо обмежитися білінійним розподілом переміщень, швидкостей і прискорень в площині перетину елемента і подати їх через вузлові значення поліномами Лагранжа першого ступеня:

$$P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right), \quad (19)$$

можна записати:

$$(u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)} (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}. \quad (20)$$

Індекси  $S_1$  та  $S_2$  визначають положення вузла відносно центру поперечного перерізу елемента і набувають значень  $\pm 1$  (рис. 2).

В центрі поперечного перерізу СЕ переміщення, швидкості, прискорення і їх похідні виражаються формулами:

$$\begin{aligned} (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'} \Big|_{x^\alpha=0} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}; \\ (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k', \beta} \Big|_{x^\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} S_\beta; \\ (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k', 12} \Big|_{x^\alpha=0} &= \sum_{S_1} \sum_{S_2} (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} S_1 S_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Для апроксимації переміщень, швидкостей та прискорень в напрямку утворюючої використовується система координатних функцій  $\psi^l$ :

$$\begin{aligned} (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} &= \sum_{l=l_0}^L (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \psi^l; \\ (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k', 3} \Big|_{x^\alpha=0} &= \sum_{l=l_0}^L (u : \dot{u} : \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l. \end{aligned} \quad (22)$$

Для кільцевого незамкненого СЕ із довільними граничними умовами на торцях  $\psi^l$  – поліноми Лагранжа при  $l = 0, 1$  і Міхліна при  $l = 2, \dots, L$ :

$$\begin{aligned} \psi^0 &= \frac{1}{2} (1 - x^3), & \psi^1 &= \frac{1}{2} (1 + x^3), \\ \psi^l &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, & f^{(l)} &= \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$p^{(l)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{s=0}^l \frac{(-1)^s (l+s)!}{(l-s)! (s!)^2 2^{s+1}} \left[ (1-x^3)^s + (-1)^l (1+x^3)^s \right].$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

У відповідності до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [7,8] компоненти тензору фізичних деформацій в поперечному перетині для кожної точки інтегрування подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\mathcal{E}}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{12}; \\ \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\mathcal{E}}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33,\beta} x^\beta, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{ij} = \tilde{\mathcal{E}}_{ij} \Big|_{x^2=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^2=0}.$$

Визначимо зв'язок між фізичними компонентами тензора переміщень  $\tilde{\sigma}^{ij}$  та тензора деформацій на основі (10) і (12):

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{d}^{ijkl} \tilde{\mathcal{E}}_{kl}, \quad (25)$$

Тоді для компонент тензора напружень використовуючи (24) і (25) можна записати:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} &= \tilde{d}^{ij11} \left( \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{11,2} x^2 \right) + 2 \tilde{d}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{12} + \tilde{d}^{ij22} \left( \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{22,1} x^1 \right) + \\ &+ 2 \tilde{d}^{ij13} \left( \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{13,2} x^2 \right) + 2 \tilde{d}^{ij23} \left( \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{23,1} x^1 \right) + \\ &+ \tilde{d}^{ij33} \left( \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33,2} x^2 \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Застосовуючи позначення:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} &= \tilde{d}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{kl}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} &= \tilde{d}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{11,2} + \tilde{d}^{ij13} \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{13,2} + \tilde{d}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33,2}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} = \tilde{d}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \tilde{d}^{ij23} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} + \tilde{d}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1},$$

отримаємо

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} x^1. \quad (28)$$

Компоненти  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{i(i)}$  ( $\alpha \neq i$ ) відображають напруження згину і їх впливом на точність розв'язку нехтувати не можна, в особливості для оболонки. Відкидаючи з (28) члени вигляду  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{i\alpha}$  як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елемента, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}. \end{aligned} \quad (29)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання фізичних компонент тензора напружень в ряд Маклорена з урахуванням (12):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} = \sqrt{g_{11}^{\circ} g_{22}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} = g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} = \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{33} = g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}; \end{aligned} \quad (30)$$

Для тонких оболонок з навантаженням, що приведене до серединної поверхні в класичній теорії запроваджуються умови рівності нулю нормальних напружень на площадках, які паралельні площині, що дотична до серединної поверхні. Цій умові в рамках МССЕ відповідає наступна гіпотеза:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(\alpha)(\alpha)} = 0, \quad (31)$$

яка визначає постійність нормальних напружень  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(\alpha)}^{\alpha(\alpha)} = 0$ .

З умови (31) отримуємо зв'язок між коефіцієнтами розкладів (29) і (24) в центрі меридіонального перетину СЕ на основі узагальненого закону Гука:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{d}}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl}, \quad (32)$$

а також зв'язок між похідними напружень і деформацій для лінійно-пружного матеріалу, який забезпечує універсальність СЕ, що пропонуються:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{d}}_{\alpha}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl,\alpha}, \quad (33)$$

де

$$\overset{\circ}{\tilde{d}}_{\alpha}^{ijkl} = \overset{\circ}{\tilde{d}}^{ijkl} - \frac{\overset{\circ}{\tilde{d}}^{ij(\alpha)(\alpha)} \overset{\circ}{\tilde{d}}^{(\alpha)(\alpha)kl}}{\overset{\circ}{\tilde{d}}^{(\alpha)(\alpha)(\alpha)(\alpha)}}. \quad (34)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання фізичних компоненти тензора деформацій в ряд Маклорена з урахуванням (12):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \left. \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^r=0} = \left. \frac{\partial \left( \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^r=0} = \\ &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left( \left. \varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \right) \right|_{x^r=0} = \\ &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\tau=0} = \frac{\partial \left( \frac{\mathcal{E}_{\alpha 3}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}} \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\tau=0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}} \left[ \mathcal{E}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\alpha 3} \left( \frac{g_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}}{g_{\alpha\alpha}} + \frac{g_{33, (3-\alpha)}}{g_{33}} \right) \right] \Big|_{x^\tau=0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left[ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3} \left( \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33, (3-\alpha)} \right) \right]. \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33, \beta} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_{33}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\tau=0} = \frac{\partial \left( \frac{\mathcal{E}_{33}}{g_{33}} \right)}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\tau=0} = \\
&= \frac{1}{g_{33}} \left( \mathcal{E}_{33, \beta} - \mathcal{E}_{33} \frac{g_{33, \beta}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^\tau=0} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left( \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33, \beta} - \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33} \overset{\circ}{h}_{33, \beta} \right), \quad (37)
\end{aligned}$$

де  $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{ij} = \mathcal{E}_{ij} \Big|_{x^\tau=0}$ ,  $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{ij, \beta} = \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\tau=0}$ ,  $\overset{\circ}{h}_{ij, \delta} = \frac{\overset{\circ}{g}_{ij, \delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}$ ,  $\overset{\circ}{g}_{ij, \delta} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\delta} \Big|_{x^\tau=0}$ .

Вирази коефіцієнтів деформацій через переміщення з урахуванням незалежності  $z_3^3$  від  $x^\alpha$  мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} \left( z_{, \alpha}^{\gamma'} u_{\gamma', \alpha} + z_{, \alpha}^{\gamma'} u_{\gamma', \alpha} \right) \Big|_{x^\tau=0} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{z}_{, \alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma', \alpha} + \overset{\circ}{z}_{, \alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma', \alpha} \right), \\
\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{12} &= \frac{1}{2} \left( z_{, 1}^{\gamma'} u_{\gamma', 2} + z_{, 2}^{\gamma'} u_{\gamma', 1} \right) \Big|_{x^\tau=0} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{z}_{, 1}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma', 2} + \overset{\circ}{z}_{, 2}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma', 1} \right), \\
\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left( z_{, 3}^{\gamma'} u_{\gamma', \alpha} + z_{, \alpha}^{\gamma'} u_{\gamma', 3} - \frac{2 z_{, \alpha}^{\gamma'} z_{, 3}^{\gamma'} u_{\gamma'}}{z^{\gamma'}} \right) \Big|_{x^\tau=0} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( \begin{matrix} \circ 3' & \circ & \circ \gamma' & \circ & \circ 2' & \circ 3' & \circ \\ z_{,3} u_{3',\alpha} + z_{,\alpha} u_{\gamma',3} - \frac{2 z_{,\alpha} z_{,3} u_{3'} }{z} \end{matrix} \right), \quad (38) \\
\mathcal{E}_{33} &= \left( z_{,3}^3 u_{3',3} + z^{2'} (z_{,3}^3)^2 u_{2'} \right) \Big|_{x^\tau=0} = z_{,3}^3 u_{3',3} + z^{2'} \left( \begin{matrix} \circ 3' \\ z_{,3}^3 \end{matrix} \right)^2 u_{2'}, \\
\mathcal{E}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\tau=0} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha}) \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\tau=0} = \\
&= \left( z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha(3-\alpha)} \right) \Big|_{x^\tau=0} = z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha(3-\alpha)}, \\
\mathcal{E}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \mathcal{E}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\tau=0} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \left( z_{,3}^3 u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3} - \frac{2 z_{,\alpha}^2 z_{,3}^3 u_{3'} }{z^{2'}} \right) \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\tau=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left( z_{,3}^3 u_{3',\alpha(3-\alpha)} + z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',3} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3(3-\alpha)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 z_{,\alpha}^2 z_{,3}^3 u_{3'} }{z^{2'}} - \frac{2 z_{,\alpha}^2 z_{,3}^3 u_{3',(3-\alpha)} }{z^{2'}} + \frac{2 z_{,\alpha}^2 z_{,3}^3 u_{3',3(3-\alpha)} }{(z^{2'})^2} \right) \Big|_{x^\tau=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left( \begin{matrix} \circ 3' & \circ & \circ \gamma' & \circ & \circ 2' & \circ 3' & \circ \\ z_{,3} u_{3',\alpha(3-\alpha)} + z_{,\alpha(3-\alpha)} u_{\gamma',3} + z_{,\alpha} u_{\gamma',3(3-\alpha)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2 z_{,\alpha} z_{,3} u_{3'} }{z} - \frac{2 z_{,\alpha} z_{,3} u_{3',(3-\alpha)} }{z} + \frac{2 z_{,\alpha} z_{,3} u_{3',3(3-\alpha)} }{\left( \begin{matrix} \circ 2' \\ z \end{matrix} \right)^2} \right),
\end{matrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33,\beta} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\tau=0} = \frac{\partial \left( z_{,3}^{3'} u_{3',3} + z^{2'} \left( z_{,3}^{3'} \right)^2 u_{2'} \right)}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\tau=0} = \\ &= \left( z_{,3}^{3'} u_{3',3\beta} + z_{,\beta}^{2'} \left( z_{,3}^{3'} \right)^2 u_{2'} + z^{2'} \left( z_{,3}^{3'} \right)^2 u_{2',\beta} \right) \Big|_{x^\tau=0} = \\ &= z_{,3}^{3'} u_{3',3\beta} + z_{,\beta}^{2'} \left( z_{,3}^{3'} \right)^2 u_{2'} + z \left( z_{,3}^{3'} \right)^2 u_{2',\beta}. \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} z_{,3}^{2'} &= z_{,3}^{2'} \Big|_{x^\tau=0}, \quad z_{,j}^{i'} = z_{,j}^{i'} \Big|_{x^\tau=0}, \quad z_{,12}^{\gamma'} = z_{,12}^{\gamma'} \Big|_{x^\tau=0}, \\ \overset{\circ}{u}_{i'} &= u_{i'} \Big|_{x^\tau=0}, \quad \overset{\circ}{u}_{i',\alpha} = u_{i',\alpha} \Big|_{x^\tau=0}, \quad \overset{\circ}{u}_{3',3} = u_{3',3} \Big|_{x^\tau=0}, \quad \overset{\circ}{u}_{i',\alpha(3-\alpha)} = u_{i',\alpha(3-\alpha)} \Big|_{x^\tau=0}. \end{aligned}$$

При заданому законі апроксимації переміщень (20), коефіцієнти ряду Маклорена обчислюються по формулах:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)} S_\beta + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)} S_\alpha \right], \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ z_{,3}^{3'} u_{3'(S_1, S_2)} S_\alpha + \frac{1}{2} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3(S_1, S_2)} - \frac{z_{,\alpha} z_{,3}^{3'}}{z} u_{3'(S_1, S_2)} \right], \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ z_{,3}^{3'} u_{3',3(S_1, S_2)} + z \left( z_{,3}^{3'} \right)^2 u_{2'(S_1, S_2)} \right], \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)} S_\alpha + 2 z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)} S_\alpha S_{(3-\alpha)} \right], \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ 2 z_{,3}^{3'} u_{3'(S_1, S_2)} S_\alpha S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',3(S_1, S_2)} + \right. \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
& + z, \alpha u_{\gamma', 3(S_1, S_2)} S_{(3-\alpha)} - z, 3 \left[ \begin{array}{c} \circ 2' \\ z, \alpha(3-\alpha) \\ \circ 2' \\ z \end{array} u_{3'(S_1, S_2)} + \right. \\
& \left. + 2 \frac{z, \alpha}{z} u_{3'(S_1, S_2)} S_{(3-\alpha)} - \frac{z, \alpha z, (3-\alpha)}{\left( \begin{array}{c} \circ 2' \\ z \end{array} \right)^2} u_{3'(S_1, S_2)} \right], \\
\circ \varepsilon_{33, \alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ \begin{array}{c} \circ 3' \\ z, 3 \end{array} u_{3'(S_1, S_2)} S_{\alpha} + \frac{z, \alpha z, 3}{2} u_{2'(S_1, S_2)} + z \begin{array}{c} \circ 2' \circ 3' \\ z, 3 \end{array} u_{2'(S_1, S_2)} S_{\alpha} \right].
\end{aligned}$$

Із урахуванням прийнятого у вигляді (22) розкладу переміщень в напрямку утворюючої на основі формули (39) отримаємо для кільцевого СЕ:

$$\begin{aligned}
\circ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{l=0}^L \left( \begin{array}{c} \circ \gamma' \\ z, \alpha \end{array} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l S_{\beta} + \begin{array}{c} \circ \gamma' \\ z, \beta \end{array} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l S_{\alpha} \right) \psi^l; \\
\circ \dot{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{l=0}^L \left[ \left( \begin{array}{c} \circ 2' \\ u_{3'(S_1, S_2)}^l S_{\alpha} - \frac{z, \alpha}{z} u_{3'(S_1, S_2)}^l \end{array} \right) \begin{array}{c} \circ 3' \\ z, 3 \end{array} \psi^l + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \circ \gamma' \\ z, \alpha \end{array} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l \right]; \\
\circ \dot{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{l=0}^L z, 3 \left( u_{3'(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l + u_{2'(S_1, S_2)}^l \begin{array}{c} \circ 2' \circ 3' \\ z \quad z, 3 \end{array} \psi^l \right); \\
\circ \dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{l=0}^L \left( 2 \begin{array}{c} \circ \gamma' \\ z, \alpha \end{array} S_1 S_2 + \begin{array}{c} \circ \gamma' \\ z, 12 \end{array} S_{\alpha} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \psi^l; \\
\circ \dot{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{l=0}^L \left[ \begin{array}{c} \circ \gamma' \\ z, \alpha \end{array} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \circ \gamma' \\ z, 12 \end{array} \right] u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l +
\end{aligned} \tag{40}$$



$$+ z_{,3} \left( 2S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{1}{z} \left( \begin{matrix} \circ 2' \\ z_{,12} + 2z_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{\circ 2' \circ 2'}{z} \end{matrix} \right) u_{(S_1, S_2)}^l \psi^l \right) \Bigg] ;$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L z_{,3} \left( \begin{matrix} \circ 3' \\ z_{,3} \end{matrix} \left( 2z_{,3} S_{\alpha} + \begin{matrix} \circ 2' \\ z_{,\alpha} \end{matrix} \right) u_{2'(S_1, S_2)}^l \psi^l + 2S_{\alpha} u_{3'(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l \right) ;$$

Представимо

$$\dot{\mathcal{E}}_{ij} = \dot{\mathcal{E}}_{(1)ij} + \dot{\mathcal{E}}_{(2)ij} , \quad (41)$$

де

$$\dot{\mathcal{E}}_{(1)\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \left( \begin{matrix} \circ \gamma' \\ z_{,\alpha} \end{matrix} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l S_{\beta} + \begin{matrix} \circ \gamma' \\ z_{,\beta} \end{matrix} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l S_{\alpha} \right) \psi^l ;$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{(1)\alpha 3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L u_{3'(S_1, S_2)}^l \begin{matrix} \circ 3' \\ z_{,3} \end{matrix} \left( S_{\alpha} - \frac{\circ 2'}{z_{,\alpha}} \right) \psi^l ;$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{(1)33} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L z_{,3} \left( \begin{matrix} \circ 3' \\ z_{,3} \end{matrix} \right)^2 u_{2'(S_1, S_2)}^l \psi^l ;$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{(2)\alpha 3} = \frac{1}{8} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L z_{,\alpha} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l ;$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{(2)33} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \begin{matrix} \circ 3' \\ z_{,3} \end{matrix} u_{3'(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l ; \quad (42)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{(1)\alpha\alpha, (3-\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \left( 2 \begin{matrix} \circ \gamma' \\ z_{,\alpha} \end{matrix} S_1 S_2 + \begin{matrix} \circ 2' \\ z_{,12} \end{matrix} S_{\alpha} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \psi^l ;$$

$$\dot{\mathcal{E}}_{(1)\alpha 3, (3-\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \begin{matrix} \circ 3' \\ z_{,3} \end{matrix} \left( 2S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{1}{z} \left( \begin{matrix} \circ 2' \\ z_{,12} \end{matrix} + 2 \begin{matrix} \circ 2' \\ z_{,\alpha} \end{matrix} S_{(3-\alpha)} - \frac{\circ 2' \circ 2'}{z} \right) u_{3'(S_2, S_2)}^l \psi^l \right) ;$$

$$\mathring{E}_{(1)33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \left( \overset{\circ}{z}_{,3}{}^{3'} \right)^2 \left( 2 \overset{\circ}{z}{}^{2'} S_{\alpha} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}{}^{2'} \right) u_{2(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l ;$$

$$\mathring{E}_{(2)\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L \left( \overset{\circ}{z}_{,\alpha}{}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}{}^{\gamma'} \right) u_{\gamma(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l ;$$

$$\mathring{E}_{(2)33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{l=0}^L 2 \overset{\circ}{z}_{,3}{}^{3'} S_{\alpha} u_{3(S_1, S_2)}^l \psi_{,3}^l .$$

**Побудова матриці жорсткості і матриці мас СЕ.** Виходячи з виразу (17), варіація потенційної енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 . \quad (43)$$

Фізичні компоненти тензорів напружень  $\tilde{\sigma}^{ij}$  і деформацій  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  представимо відрізками ряду Маклорена (24) і (29) згідно основних положень МССЕ:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[ \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\ & + 2 \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} \delta \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \\ & \left. + \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}{}^{33} x^{\alpha} \right) \delta \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta} x^{\beta} \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned} \quad (44)$$

Використання МССЕ та прийнятих гіпотез відповідно розподілення компонентів тензору пружних сталей  $d^{ijkl}$ , та визначника матриці компонентів метричного тензору  $\sqrt{g}$  (18), дозволяє виконати інтегрування в межах меридіонального перетину СЕ по  $x^1$  та по  $x^2$  в замкнутому вигляді. Для цього достатньо обчислити наступні інтеграли:

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1; \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0;$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}. \quad (45)$$

Після відповідних перетворень для варіації потенційної енергії  $\delta W$ , отримаємо наступний вираз:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left( \overset{\circ}{\sigma}{}^{(\alpha)(\alpha)}_{(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,\alpha} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (46)$$

Представляючи в (46) фізичні компоненти коефіцієнтів розкладу деформацій та напружень згідно (30) і (35) запишемо:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left[ \overset{\circ}{\sigma}{}^{(\alpha)(\alpha)}_{(3-\alpha)} \delta \left( \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{(3-\alpha)} \delta \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3} \left( \overset{\circ}{h}{}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}{}_{33,(3-\alpha)} \right) \right] + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,\alpha} \delta \left( \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\beta} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33,\beta} \right) \right] \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (47)$$

Сформуємо наступні вектори коефіцієнтів розкладу деформацій та напружень в ряд Маклорена:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \right\}; \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,1} \quad 2 \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \left( \overset{\circ}{h}_{22,1} + \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \right) \right\}; \\
\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,2} \quad 2 \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \right) \right\}; \\
\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{13} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{23} \right\}; \\
\left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{33} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{23} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{33} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{13} \right\}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Тоді вираз варіації потенційної енергії скінченного елемента може бути поданий у векторній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{g} dx^3. \tag{50}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} &= \sum_{l=0}^L \left( \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] \psi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] \psi_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l; \\
\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} &= \sum_{l=0}^L \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] \psi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \psi_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l,
\end{aligned} \tag{51}$$

$$\text{де } \{ u_{i'} \}_l^T = \{ u_{i'(-1;-1)}^l \quad u_{i'(1;-1)}^l \quad u_{i'(-1;1)}^l \quad u_{i'(1;1)}^l \}.$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(-1;-1)} \quad \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(1;-1)} \quad \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(-1;1)} \quad \left[ \overset{\circ}{B}_\alpha \right]^{(1;1)} \right]. \tag{52}$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1;-1)} \quad \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(1;-1)} \quad \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1;1)} \quad \left[ \overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta} \right]^{(1;1)} \right]. \tag{53}$$

Значення компонент підматриць  $\begin{bmatrix} \circ \\ B_{\alpha} \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)}$ ,  $\begin{bmatrix} \circ \\ B_{\alpha, \beta} \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)}$  у виразі (53)

для неоднорідних косокутних кругових елементів визначаються відповідно до формул (42):

$$\begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{1'} & \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{1'} & \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{2'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{z}_{,3}{}^{2'} \\ \overset{\circ}{z}_{,3}{}^{3'} \end{pmatrix}^2 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{1'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{1'} \right) & \frac{1}{2} \left( S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{2'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{2'} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}{}^{3'} \left( S_1 - \frac{\overset{\circ}{z}_{,1}{}^{2'}}{\overset{\circ}{z}} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}{}^{3'} \left( S_2 - \frac{\overset{\circ}{z}_{,2}{}^{2'}}{\overset{\circ}{z}} \right) \end{bmatrix}; \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}{}^{3'} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}{}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}{}^{2'} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,1} \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \left( B_{1,1}^{22} \right)_{11} & \left( B_{1,1}^{22} \right)_{12} & 0 \\ 0 & \left( B_{1,1}^{33} \right)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \left( B_{1,1}^{23} \right)_{33} \end{bmatrix},$$

де

$$\left(B_{1,1}^{22}\right)_{11} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,2} + \frac{S_2}{2} \overset{\circ}{z}_{,12} - \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2} \overset{\circ}{h}_{22,1};$$

$$\left(B_{1,1}^{22}\right)_{12} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,2} + \frac{S_2}{2} \overset{\circ}{z}_{,12} - \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2} \overset{\circ}{h}_{22,1};$$

$$\left(B_{1,1}^{33}\right)_{22} = \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{z}_{,3}\right)^2 \begin{pmatrix} \overset{\circ}{z} & \overset{\circ}{z} S_1 + \overset{\circ}{z}_{,1} - \overset{\circ}{z} & \overset{\circ}{h}_{33,1} \\ 2 \overset{\circ}{z} & \overset{\circ}{z} & \overset{\circ}{h}_{33,1} \end{pmatrix};$$

$$\left(B_{1,1}^{23}\right)_{33} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3} \left( 2 S_1 S_2 - \frac{1}{\overset{\circ}{z}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{z}_{,12} + 2 \overset{\circ}{z}_{,2} S_1 - \frac{\overset{\circ}{z}_1 \overset{\circ}{z}_2}{\overset{\circ}{z}} \\ \overset{\circ}{z} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left( S_2 - \frac{\overset{\circ}{z}_2}{\overset{\circ}{z}} \right) \left( \overset{\circ}{h}_{22,1} + \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \right).$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{2,1} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(B_{2,1}^{22}\right)_{23} \\ \left(B_{2,1}^{23}\right)_{31} & \left(B_{2,1}^{23}\right)_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$\left(B_{2,1}^{22}\right)_{23} = \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3} \left( 2 S_1 - \overset{\circ}{h}_{33,1} \right);$$

$$\left(B_{2,1}^{23}\right)_{31} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,2} S_1 + \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,12} - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,2} \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right);$$

$$\left(B_{2,1}^{23}\right)_{32} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,2} S_1 + \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,12} - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,2} \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right).$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{1,2} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \left(B_{1,2}^{22}\right)_{11} & \left(B_{1,2}^{22}\right)_{12} & 0 \\ 0 & \left(B_{1,2}^{33}\right)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \left(B_{1,2}^{23}\right)_{33} \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} (B_{1,2}^{33})_{22} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{z}_{,3} \\ \overset{\circ}{z}_{,3} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \overset{\circ}{z}_{,2'} & \overset{\circ}{z}_{,2'} & \overset{\circ}{z}_{,2'} \\ 2 \overset{\circ}{z} & S_2 + \overset{\circ}{z}_{,2} - \overset{\circ}{z} & h_{33,2} \end{pmatrix}; \\ (B_{1,2}^{23})_{33} &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3} \begin{pmatrix} 2S_1 S_2 - \frac{1}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{z}_{,12} + 2\overset{\circ}{z}_{,1} S_2 - \frac{\overset{\circ}{z}_1 \overset{\circ}{z}_2}{\overset{\circ}{z}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{z}_1 \\ \overset{\circ}{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,2} \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (B_{2,2}^{22})_{23} \\ (B_{2,2}^{23})_{31} & (B_{2,2}^{23})_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} (B_{2,2}^{23})_{31} &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,1} S_2 + \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,12} - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,1} \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right); \\ (B_{2,2}^{23})_{32} &= \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,1} S_2 + \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,12} - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,1} \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right). \end{aligned}$$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій у ряд Маклорена через коефіцієнти розкладу перемішень, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left( \delta \{u_l\}^T \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T \psi^{(l)} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \psi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \{u_l\}^T \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T \psi^{(l)} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T \psi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{,\alpha} \right) \right) \sqrt{g} dx^3. \quad (55) \end{aligned}$$

Коефіцієнти розкладення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \end{bmatrix} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (56)$$

де, у відповідності із законом Гука,

$$\begin{aligned} \left[ \overset{\circ}{D} \right] &= \left[ \overset{\circ}{d}^{ijkl} \right]; \\ \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] &= \left[ \left[ \overset{\circ}{d}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[ \overset{\circ}{d}^{ij33} \right] \left[ \overset{\circ}{d}^{ij(3-\alpha)} \right] \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергій деформування СЕ (55) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \varepsilon \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \varepsilon \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \left\{ \varepsilon, \alpha \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left\{ \varepsilon, \alpha \right\} \right) \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (58)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left( \delta \{ u \}_l^T \right) [K]_{ln} \{ u \}_n, \quad (59)$$

де  $[K]_{ln}$  – матриця жорсткості неоднорідного незамкнутого кільцевого скінченного елемента з довільними граничними умовами на торцях:

$$\begin{aligned} [K]_{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left( \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T \psi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T \psi_{,3}^{(l)} \right) \left[ \overset{\circ}{D} \right] \times \sum_{n=0}^L \left( \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] \psi^{(n)} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] \psi_{,3}^{(n)} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \psi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T \psi_{,3}^{(l)} \right) \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \times \right. \\ &\left. \left. \times \sum_{n=0}^L \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] \psi^{(n)} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \psi_{,3}^{(n)} \right) \right\} \right\} \sqrt{g} dx. \end{aligned} \quad (60)$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком  $x^3$  з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$[D]_{00}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_m^{(n)} H_m;$$



$$\begin{aligned}
[D]_{30}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_m^{(n)} H_m; \\
[D]_{03}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_{,3m}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_{,3m}^{(n)} H_m; \\
[D]_{33}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_{,3m}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_{,3m}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_{,3m}^{(n)} H_m; \\
[D]_{00\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_m^{(l)} \left[ D_{,\alpha} \right] \psi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_m^{(l)} \left[ D_{,\alpha} \right] \psi_m^{(n)} H_m; \\
[D]_{30\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_{,3m}^{(l)} \left[ D_{,\alpha} \right] \psi_m^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_{,3m}^{(l)} \left[ D_{,\alpha} \right] \psi_m^{(n)} H_m; \\
[D]_{03\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_m^{(l)} \left[ D_{,\alpha} \right] \psi_{,3m}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_m^{(l)} \left[ D_{,\alpha} \right] \psi_{,3m}^{(n)} H_m; \\
[D]_{33\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_{,3m}^{(l)} \left[ D_{,\alpha} \right] \psi_{,3m}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_{,3m}^{(l)} \left[ D_{,\alpha} \right] \psi_{,3m}^{(n)} H_m.
\end{aligned} \tag{61}$$

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

$$\begin{aligned}
[K]_{ln} &= \left\{ [B_1]^T [D]_{00}^{ln} [B_1] + [B_2]^T [D]_{30}^{ln} [B_2] + [B_1]^T [D]_{03}^{ln} [B_2] + \right. \\
&+ [B_2]^T [D]_{33}^{ln} [B_2] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( [B_{1,\alpha}]^T [D]_{00\alpha}^{ln} [B_{1,\alpha}] + \right. \\
&+ [B_{2,\alpha}]^T [D]_{30\alpha}^{ln} [B_{1,\alpha}] + [B_{1,\alpha}]^T [D]_{03\alpha}^{ln} [B_{2,\alpha}] + \\
&\left. \left. + [B_{2,\alpha}]^T [D]_{33\alpha}^{ln} [B_{2,\alpha}] \right) \right\} \sqrt{g}. \tag{62}
\end{aligned}$$

Виходячи з виразу (17) варіація роботи інерційних сил одного скінченного елемента описується співвідношенням:

$$\delta K^e = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \ddot{u}_k^{k'} \delta u_k^{k'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (63)$$

У виразі (63), виконаємо перетворення  $\dot{u}^{k'}$  за формулою:

$$\dot{u}^{k'} = g^{k'j'} \dot{u}_{j'}. \quad (64)$$

Тоді:

$$\delta K^e = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \delta_{(n)}^{(k')} \rho g^{k'j'} \dot{u}_{j'} \delta u_k^{k'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (65)$$

де  $\delta_{(j')}^{(k')}$  – символ Кронекера.

Представляючи прискорення та переміщення через розкладання по поліномам (22), подамо вираз для варіації кінетичної енергії скінченного елемента у наступному вигляді:

$$\delta K^e = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \delta_{(n)}^{(k')} \rho g^{k'j'} \sum_{l=0}^L \dot{u}_{j'}^l \psi^l \sum_{m=0}^M \delta u_k^m \psi^m \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Використовуючи припущення про осереднення маси біля вузла, який розглядається, і враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає одній четвертій частині мас елементів примикаючих до даного вузла, перепишемо варіацію кінетичної енергії у векторній формі:

$$\delta K^e = - \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \delta \left\{ \left[ u_k^{k'} \right]_{(S_1, S_2)}^l \right\}^T [m]_{lm} \left\{ \left[ \dot{u}_{k'}^{k'} \right]_{(S_1, S_2)}^m \right\}, \quad (66)$$

де  $\left\{ \left[ \dot{u}_{k'}^{k'} \right]_l^T \right\} = \left\{ \left[ \dot{u}_{k'}^{k'} \right]_{(-1;-1)}^l \quad \left[ \dot{u}_{k'}^{k'} \right]_{(1;-1)}^l \quad \left[ \dot{u}_{k'}^{k'} \right]_{(-1;1)}^l \quad \left[ \dot{u}_{k'}^{k'} \right]_{(1;1)}^l \right\}$ .

В наведеному співвідношенні (66)  $[m]_{lm}$  – амплітудна “неузгоджена” матриця мас неоднорідного елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \left[ \left[ m^{k'} \right]_{(S_1, S_2)(S_1, S_2)}^{lm} \right] = \frac{1}{4} \sqrt{g} \rho_{lm} \left[ \left[ g^{k'(k')} \right]_{(S_1, S_2)} \right], \quad (67)$$

де

$$\left[ \left[ g^{k'j'} \right]_{(P_1, P_2)} \right] = \text{diag} \left[ \left[ g^{k'j'} \right]_{(-1,-1)} \quad \left[ g^{k'j'} \right]_{(1,-1)} \quad \left[ g^{k'j'} \right]_{(-1,1)} \quad \left[ g^{k'j'} \right]_{(1,1)} \right],$$

$$[g^{kj}]_{(P_1, P_2)} = \text{diag}[g^{1'1'} \quad g^{2'2'} \quad g^{3'3'}].$$

$$\rho_{lm} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \rho \psi^l \psi^m dx^3 = \sum_{k=1}^K (\rho \psi^l \psi^m)_k H_k.$$

Тут:  $\rho_k$  - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає  $k$ -ій точці інтегрування.

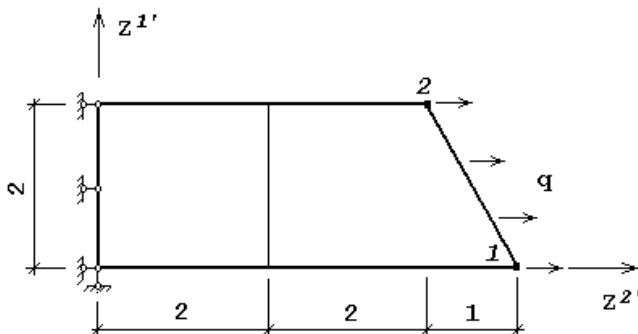


Рис. 3. Розрахункова схема двовимірного пружного стержня

Дослідження впливу компонент розкладу деформацій в ряд Маклорена, що виникають за рахунок диференціювання фізичних компонент тензора деформацій, на збіжність моментної схеми методу скінченних елементів, розглянемо на прикладі двовимірного пружного стержня під дією вісьового розтягуючого тиску, інтенсивністю  $q = 2/\sqrt{5}$  (рис.3). Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона дорівнюють відповідно  $E = 2.2 \times 10^4$ ,  $\nu = 0$ .

Проведено розв'язання ряду задач із зміною сіткових параметрів моделі при урахуванні диференціювання метрики (запропонований підхід) та без нього [1]. В табл.1.1 представлені значення переміщень в контрольних точках 1, 2, в залежності від числа СЕ по товщині стержня.

Рис.4 відображає ці результати у вигляді кривих похибки визначення переміщень, лінії  $a, b$  – [1],  $c, d$  – запропонована методика. Криві  $b, c$  відповідають точці 1,  $a, d$  – точці 2. Збільшення кількості СЕ по довжині моделі не призводило до значного уточнення результатів.

Таким чином, запропонований підхід для скінченних елементів з енергією деформації на базі фізичних компонент тензорів напружень і деформацій та усередненими значеннями фізико-механічних і

геометричних параметрів в області поперечного перетину СЕ забезпечують високу швидкість збіжності результатів до точного і значне скорочення об'ємів обчислень, що пов'язані з чисельним інтегруванням.

Таблиця 1

Кіл-сть СЕ	[1], $\times 10^{-4}$		Запропонований підхід, $\times 10^{-4}$	
	1	2	1	2
1	1.81818	2.27273	2.25851	1.82897
2	2.13705	1.94979	2.26864	1.84322
3	2.20367	1.89888	2.27037	1.84638
4	2.23140	1.87944	2.27116	1.84805
5	2.24536	1.87000	-“-	-“-
6	2.25331	1.86473	-“-	-“-
7	2.25824	1.86149	-“-	-“-
8	2.26150	1.85936	-“-	-“-

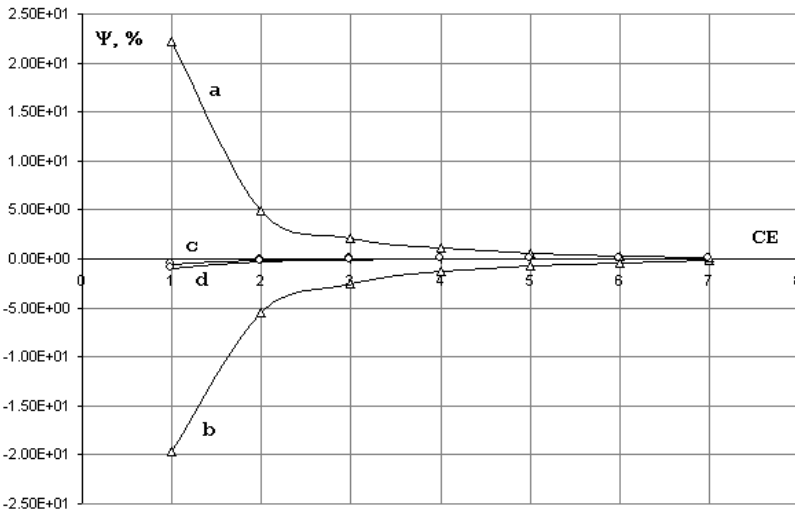


Рис. 4. Результати розрахунку

Розрахункові співвідношення НМСЕ отримані в рамках просторових задач динаміки, що дозволяють розглядати неоднорідні незамкнені тіла обертання із складною формою і структурою поперечного перетину, з довільними граничними умовами на торцях. При виведенні рівнянь не

накладались обмеження на характер розподілення масових і механічних властивостей матеріалів вздовж направляючої.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
2. *Блох В.И.* Теория упругости Харьков: Изд-во Харьк. ун-та. - 1964. -483с.
3. *Гуляр А.И., Козак А.Л., Сахаров А.С., Чорный С.М.* “Применение МСКЭ к расчету круглых пластин и оболочек вращения” // Сопrotивление материалов и теория сооружений. -1978. -Вып.33. -С.81-85.
4. *Гуляр А.И., Сахаров А.С., Чорный С.М.* “Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования” // Сопrotивление материалов и теория сооружений. - 1978, №32 – с.3-10.
5. *Друккер Д.* Вариационные принципы в математическом теории пластичности // Механика.- М.: ИП, 1959.- № 6.
6. *Кислокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А.* “Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек” // Проблемы прочности. -1977. -№7. -С.25-33.
7. *Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
8. *Сахаров А.С.* “Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений” // Сопrotивление материалов и теория сооружений. -1974. -Вып.24. -С.147-156.
9. *Сніжко Н.А., Солодей І.І., Овсянніков О.С., Шевченко Ю.В.* Вимушені коливання баштової градирні АЕС під дією вітрового навантаження. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2004 р. - Вип. 74. - С. 92-103.

*Надійшла до редколегії 20.11.2005 р.*

УДК 539.3

Баженов В.А. д-р техн. наук  
Кривенко О.П. канд. техн. наук  
Соловей М.О. канд. техн. наук

## **ВПЛИВ РЕЖИМІВ ТЕРМОСИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА СТІЙКІСТЬ І ПОЗАКРИТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ОБОЛОНОК СТАЛОЇ ТА СТУПІНЧАТО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ**

Розглянуті питання впливу різних режимів комбінованої дії рівномірно розподіленого тиску та нерівномірного за товщиною температурного поля на втрату стійкості та позакритичну поведінку оболонок сталюї та ступінчато-змінної товщини (з ребрами, каналами й отворами).

Тонкостінні оболонкові конструкції широко використовуються в різних галузях сучасної техніки. При експлуатації вони знаходяться під дією різноманітних силових і температурних навантажень. Температурні поля можуть суттєво впливати на напружено-деформований стан і бути важливим фактором, від якого залежить несуча спроможність конструкції. Руйнування тонких оболонок у таких випадках відбувається, як правило, через різку зміну форми – випучування. Проектувальника може цікавити не тільки момент втрати стійкості, але й позакритична поведінка конструкції. Врахування самозрівноважених внутрішніх напружень від температурних деформацій, що істотно впливають на жорсткість конструкції, дозволяє уточнити величину зовнішнього силового критичного навантаження та поведінку оболонки в до- та позакритичній областях. Різні варіанти термосилового навантаження зустрічаються, наприклад, при розрахунках елементів авіаційних, космічних, будівельних та інших конструкцій внаслідок перепаду температур між тонкою обшивкою та елементами силового каркасу [1, 2].

З технологічних причин оболонки можуть бути послаблені виїмками, каналами, отворами, мати зломи серединної поверхні. З метою запобігання втрати стійкості оболонки проектують змінної товщини, підкріплюють ребрами, накладками. Ці способи раціонального розподілу матеріалу за товщиною звичайно підвищують загальну жорсткість конструкції. Вплив різних законів термосилового навантаження на нелінійне деформування та втрату стійкості подібних конструкцій досліджений у теперішній час недостатньо.

Робота продовжує дослідження за розробленою скінченноелементною методикою [3-5] стійкості гнучких неоднорідних оболонок з різними геометричними особливостями за товщиною [6-14]. У роботах [6-11]

виконаний порівняльний аналіз нелінійних розв'язків тонких гнучких панелей змінної товщини при дії тиску: ребристих, з каналами, виїмками, отворами [6-8], лінійно-змінної товщини та гранованих [9-11]. Дослідженню стійкості та порівнянню несучої спроможності оболонок сталюї та лінійно-змінної товщини при термосиловому навантаженні присвячені роботи [12-14].

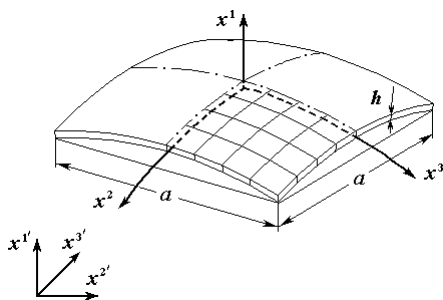


Рис. 1. Полога сферична панель

У даній роботі приведені важливі для практики результати досліджень впливу різних режимів спільної дії температурного та силового навантажень на втрату стійкості та позакритичну поведінку оболонок сталюї та ступінчато-змінної товщини. Дослідження виконані на прикладі пологих квадратних у плані сферичних панелей (рис. 1), які виготовлені з ізотропного матеріалу ( $E$  –

модуль пружності,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення). Властивості матеріалу вважаються сталими та незалежними від температури. Кривина панелі визначається параметром  $K = 2a^2/(Rh)$  [15], де  $h$  – товщина обшивки,  $a$  – розмір у плані,  $R$  – радіус серединної поверхні. За розрахунку в усіх випадках приймалася скінченноелементна модель у вигляді чверті оболонки, що має дві площини симетрії.

1. У першому дослідженні порівнюється поведінка оболонки сталюї товщини при трьох видах термосилових навантажень: 1) рівномірний нормальний тиск інтенсивністю  $q$ ; 2) нерівномірний нагрів; 3) спільна дія тиску та нагріву. При нерівномірному нагріві температура вздовж товщини змінюється за лінійним законом таким чином, що зовнішня поверхня панелі охолоджується на таку ж саму величину  $T^\circ C$ , на яку нагрівається її внутрішня поверхня (температура серединної поверхні залишається незмінною). На краях панель шарнірно скріплена з ребрами, що абсолютно жорсткі на згин у напрямку нормалі та гнучкі у площині дотичній до серединної поверхні оболонки. Кінцеві перерізи панелі закріплені від переміщень вздовж ребер. Прийняті наступні вихідні данні:

$$E = 6.963 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \nu = 0.3, \alpha = 0.25 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}, h = 0.01 \text{ м}, a = 200h, K = 24.$$

При навантаженні тиском втрата стійкості панелі відбувається при величині критичного тиску  $q_{кр}^6 = 2.660 \cdot 10^{-3}$  МПа (рис. 2, крива 1). Цей результат у докритичній і на початку позакритичної областей добре співпадає з нелінійним розв'язком [15] (крива 4).

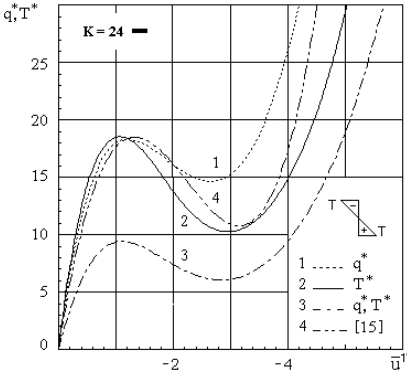


Рис. 2. Діаграми “навантаження–прогин центра панелі”

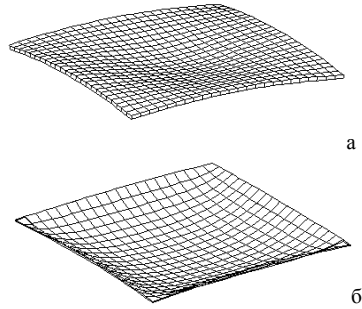
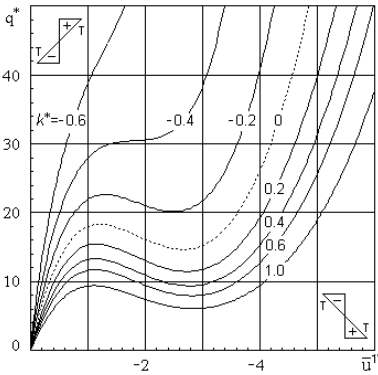
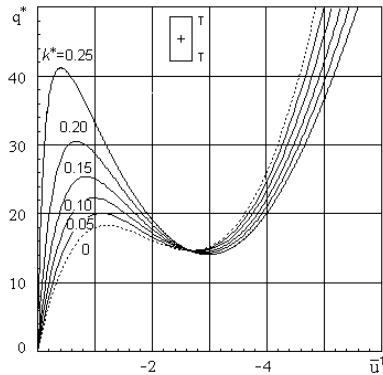


Рис. 3. Форми деформування



а



б

Рис. 4. Діаграми “навантаження–прогин центра панелі”  
а) 1-й та 2-й варіанти, нерівномірний нагрів;  
б) 3-й варіант, рівномірний нагрів



При нерівномірному нагріві втрата стійкості панелі відбувається при критичній температурі  $T_{кр}^6 = 18.548^\circ C$  (крива 2). Для зручності порівняння результати на рис. 2 подані у безрозмірному вигляді

$$q^* = q/k, \quad T^* = T/1^\circ C, \quad \bar{u}^l = u^l/h, \quad (1)$$

де коефіцієнт  $k = q_{кр}^6 / T_{кр}^{*6} = 1.4341 \cdot 10^{-4}$  МПа взятий таким, щоб безрозмірні величини  $T_{кр}^{*6}$  та  $q_{кр}^{*6}$  були чисельно рівні;  $u^l$  – переміщення характерної точки оболонки в декартовій системі координат  $x^l$  (рис. 1).

Спільне навантаження тиском і температурою виконувалося таким чином, щоб при нагріві на  $1^\circ C$  безрозмірні параметри  $q^*$  та  $T^*$  одночасно зростали на одиницю. Втрата стійкості від такого навантаження відбулася при величині безрозмірних параметрів у два рази меншій –  $q_{кр}^{*6} = T_{кр}^{*6} = 9.429$  (крива 3). Таке зниження величини критичного навантаження пояснюється тим, що напрямки одночасної дії тиску та температурного поля співпадають.

Зіставлення результатів розрахунків показує наступне. Для всіх трьох видів навантаження прогини центру панелі в критичних точках практично рівні, форми втрати стійкості (рис. 3, а) та форми деформування панелей у позакритичній області (рис. 3, б) мають однаковий вигляд. Температурне навантаження призводить до більш енергоємного процесу деформування у порівнянні з навантаженням тиском, наслідком чого є більший рівень мембранних і згинних напружень.

2. Продовжимо дослідження розглянутої вище панелі при різних співвідношеннях інтенсивностей нерівномірного температурного нагріву та тиску. Залежність між безрозмірними параметрами інтенсивностей цих двох видів навантажень (1) приймається у вигляді

$$T^* = k^* \cdot q^*, \quad (2)$$

де  $k^*$  – коефіцієнт взаємозв'язку параметрів інтенсивностей тиску та температурного нагріву.

Зміна коефіцієнта  $k^*$  виконувалась у межах  $+1 \div -0.6$ . Розглянутий вище варіант  $k^* = +1$  є верхньою межею та базою для порівняння. Варіанту  $k^* > 0$  відповідає нерівномірний нагрів, при якому верхня поверхня охолоджується на таку саму величину  $T$ , на яку нижня нагрівається. Варіанту  $k^* < 0$  відповідає нерівномірний нагрів, при якому верхня поверхня нагрівається на таку саму величину  $T$ , на яку нижня

оохолоджується. Розглядуваним двом видам нерівномірного нагріву відповідають свої позначки (рис. 4, а). Варіант  $k^*=0$  відповідає дії тільки одного тиску.

Зменшення алгебраїчного значення величини коефіцієнта  $k^*$  веде до збільшення величин верхнього та нижнього критичних навантажень і зменшення деформативності панелей у позакритичній області. При  $k^*\leq-0.4$  оболонка не втрачає стійкість. Таким чином, величину  $k^*=-0.4$  можна прийняти за межу безпечної (з точки зору втрати стійкості) спільної дії нерівномірного температурного нагріву та тиску.

**3.** Замінімо в нашому дослідженні стійкості оболонок нерівномірний за товщиною нагрів на рівномірний (рис. 4, б). У цьому випадку збільшення коефіцієнта  $k^*$  від 0 до 0.25 веде до різкого збільшення величини верхнього критичного навантаження при стабілізації величини нижнього критичного навантаження та практично однакового позакритичного деформування. Таким чином, вплив величини інтенсивності рівномірного нагріву найбільш суттєво проявляється у докритичній області.

Узагальнюючи результати наведених вище досліджень, можна зробити висновок, що рівномірний нагрів пологої панелі у сполученні з тиском веде до більш ефективного підвищення несучої спроможності оболонки у порівнянні з розглянутими варіантами нерівномірного нагріву.

**4.** Вплив на стійкість ребристих оболонок різних варіантів нагріву обшивки та ребер розглянутий на прикладі панелі, яка шарнірно оперта вздовж контуру. Для панелі прийняті наступні вихідні данні:

$E = 20.59 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu=0.3$ ,  $\alpha = 0.120 \cdot 10^{-4}$  град<sup>-1</sup>,  $h=0.01$ м,  $a=60h$ ,  $R=225h$ ,  $K=32$  (рис. 5, а). Оболонка по середині підкріплена із внутрішньої сторони двома перехресними ребрами висотою  $h_p=3h$  та

шириною  $b_p=2h$ . Обшивка панелі та ребра виконані з однакового матеріалу. Розглядалися різні варіанти комбінованої дії рівномірно розподіленого нормального тиску інтенсивністю  $q$ , рівномірного нагріву обшивки оболонки на  $T_o$  градусів та ребер на  $T_p$  градусів. Результати розрахунків подані на рис. 5 - рис. 7 з використанням безрозмірних параметрів: навантаження –  $\bar{q} = a^4 q / (E h^4)$ , переміщення характерної точки –  $\bar{u}^I$  (1), енергії деформування –  $\bar{W} = W / (E h^3)$ .

Порівнювалися чотири варіанти термосилового навантаження.

У першому варіанті оболонка навантажувалась лише тиском (на рисунках відповідні криві позначені написом: 1. q).

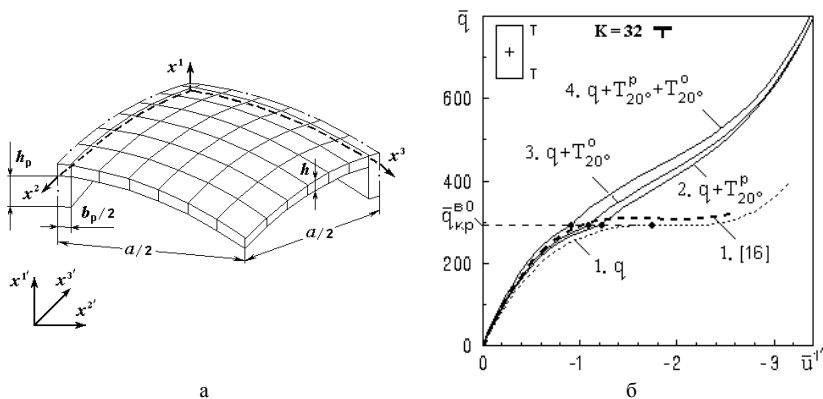


Рис. 5. Діаграми “навантаження–прогин центра ребристої панелі” для чотирьох варіантів комбінованої дії тиску та нагріву

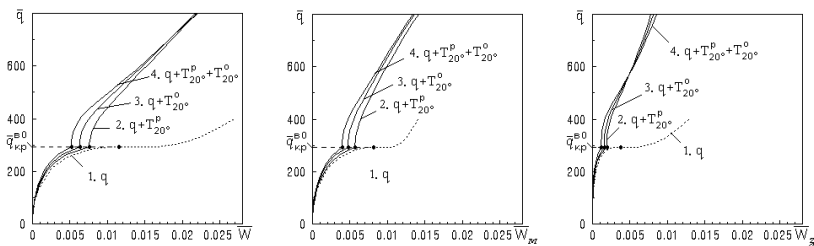


Рис. 6. Діаграми “навантаження–енергія деформування”

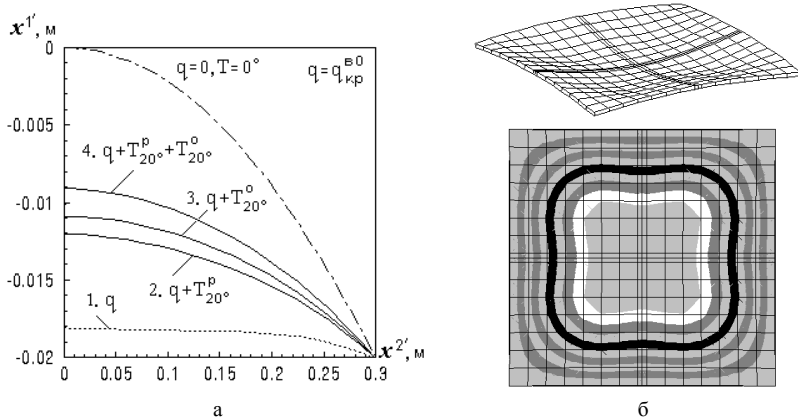


Рис. 7. Форми деформування ребристої сферичної панелі

Порівняльний аналіз результатів при дії лише тиску [6] показав гарний збіг з відомим нелінійним розв'язком [16]. Перший варіант використовується як вихідний для порівняння та визначення впливу різних режимів нагріву на стійкість ребристої оболонки (рис. 5). Відмітимо, що величина верхнього критичного навантаження для ненагрітої панелі становить  $\bar{q}_{кр}^{e0} = 293.4$ .

Очікувалося, що одночасна дія тиску та рівномірного нагріву всієї оболонки або окремих її частин (обшивки та ребер) призведе до різного підвищення величини верхнього критичного навантаження. Режим термосилового навантаження ребристої оболонки був встановлений наступним чином. У той момент, коли інтенсивність тиску, зростаючи, досягала величини  $\bar{q}_{кр}^{e0}$ , обшивка та ребра нагрівались відповідно на  $T^o$  та  $T^P$  градусів. З цього моменту подальша зміна тиску відбувалася при зафіксованому (незмінному) температурному полі.

У другому варіанті навантаження ребра нагрівались на  $20^\circ C$ , а обшивка при цьому залишалася ненагрітою (2.  $q + T_{20}^P$ ).

У третьому варіанті обшивка нагрівалась на  $20^\circ C$ , а ребра залишалися ненагрітими (3.  $q + T_{20}^o$ ).

У четвертому варіанті обшивка та ребра нагрівались разом на  $20^\circ C$  (4.  $q + T_{20}^P + T_{20}^o$ ).

Усі варіанти додаткової дії нагріву призводять до збільшення жорсткості ребристої оболонки та зникнення явища втрати стійкості (рис. 5, б). Найбільш цей ефект проявляється при одночасному нагріві обшивки та ребер, найменш – при нагріві лише ребер. Зміні режиму термосилового навантаження (в момент припинення зростання нагріву при  $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^{e0}$ ) відповідає поява точок злому на діаграмах. При подальшому навантаженні тиском відбувається стабілізація процесу деформування панелей – діаграми “навантаження-прогин центра” збігаються. Деформування ребристої оболонки відбувається з незначною перевагою мембранної  $\bar{W}_m$  складової енергії деформування  $\bar{W}$  у порівнянні з її згинною  $\bar{W}_z$  складовою (рис. 6). Загальна форма деформування панелі для всіх варіантів навантаження однакова (рис. 7, б). Форми деформування ребер, які відповідають різним варіантам навантаження (у

точці  $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^{e0}$ ) показані на рис. 7, а. Вихідній формі ребра відповідає крива з позначкою  $q = 0, T = 0^{\circ}$ .

5. Дослідження впливу на втрату стійкості оболонки послідовності комбінованої дії температурного та силового навантажень виконане на прикладі панелі, що послаблена з внутрішньої сторони чотирма перехресними каналами однакових розмірів: довжиною  $a$ , шириною  $b_k = 2h$  та глибиною  $h_k = 0.3h$  (рис. 8, а). Канали розташовані на відстані  $a/3$  від країв оболонки. Вихідні дані для панелі з каналами взяті з попереднього дослідження (пункт 4). Розглянуті три варіанти послідовності дії тиску та рівномірного нагріву (рис. 8 - рис. 10).

У першому варіанті оболонка навантажувалась лише тиском. Порівняльний аналіз результатів при дії лише тиску [6] показав гарний збіг з відомим нелінійним розв'язком. Перший варіант використовується як вихідний для порівняння впливу різних режимів нагріву на стійкість оболонки з каналами (рис. 8, б). Відмітимо, що величина верхнього критичного навантаження для ненагрітої панелі становить  $\bar{q}_{кр}^{e0} = 178.8$ .

У другому варіанті на оболонку одночасно діють рівномірний нагрів і тиск. У той момент, коли інтенсивність тиску  $\bar{q}$  досягає значення  $\bar{q}_{кр}^{e0}$ , нагрів панелі закінчується при  $T=40^{\circ}\text{C}$ . З цього моменту подальша зміна тиску відбувається при незмінному температурному полі.

У третьому варіанті оболонка спочатку рівномірно нагрівається на величину  $T=40^{\circ}\text{C}$ , а потім навантажується рівномірним тиском при зафіксованому температурному полі.

Результати дослідження подані у вигляді діаграм на рис. 8 - рис. 10, на яких для I-го, II-го та III-го варіантів навантаження введені наступні позначення: I,  $T=0^{\circ}$ ; II,  $T=40^{\circ}$ ; III,  $T=40^{\circ}$ .

Аналіз результатів показав, що в другому варіанті величина верхнього критичного навантаження підвищилась за рахунок температурного поля на 68.3%, у третьому – на 17.7%. Таким чином, другий варіант термосилового навантаження у порівнянні з третім призводить до зростання величини  $\bar{q}_{кр}^e$  на 43.0%, значно підвищуючи при цьому

величину нижнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^h$  – у 11 разів.

Причиною суттєвого збільшення  $\bar{q}_{кр}^e$  в обох задачах є те, що дія температурного поля призводить до деформування оболонки в бік протилежний її деформуванню при дії тиску. Як наслідок, це викликає збільшення жорсткості оболонки.

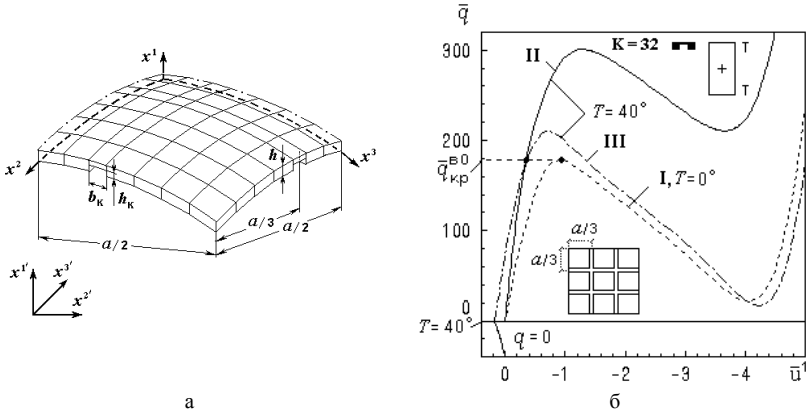


Рис. 8. Діаграми “навантаження-прогин центра панелі з каналами” для трьох варіантів комбінованої дії тиску та нагріву

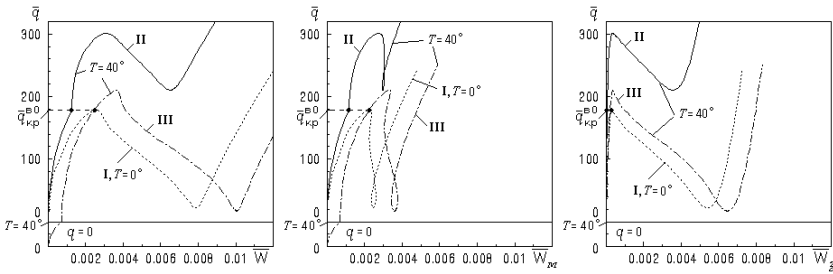


Рис. 9. Діаграми “навантаження-енергія деформування”

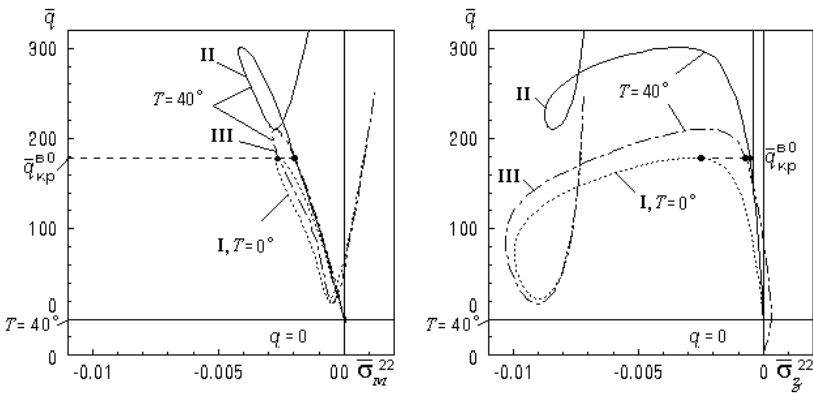


Рис. 10. Діаграми “навантаження-напруження у центрі панелі”

Діаграми на рис. 9 показують відмінності у зміні величин енергії деформування  $\overline{W}$  та її складових (мембранної  $\overline{W}_m$  та згинної  $\overline{W}_z$ ). В точці, коли температурне поле в II-й та III-й задачах закінчує своє зростання, помітне зменшення інтенсивності зростання енергії деформування. Це пояснюється збільшенням жорсткості оболонки за рахунок температурного нагріву. В докритичній області енергія деформування зростає в основному за рахунок мембранної складової, а у позакритичній області – за рахунок згинної складової. Подібна картина також спостерігається на діаграмах (рис. 10) відносно мембранних  $\overline{\sigma}_m^{22} = \sigma_m^{22}/E$  та згинних  $\overline{\sigma}_z^{22} = \sigma_z^{22}/E$  складових напруження в скінченному елементі в околі центра панелі.

**6.** Вплив на втрату стійкості оболонки комбінованої дії попереднього рівномірного нагріву (різної інтенсивності) та подальшого навантаження тиском досліджений на прикладі панелі, що має квадратний центральний отвір шириною  $b_o = 12h$ . Вихідні данні для оболонки з отвором взяті як і в дослідженні пункту 4. Розглянуті чотири варіанти нагріву: на  $T = -20^\circ, 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ\text{C}$  (рис. 11 - рис. 14).

Аналіз результатів розрахунків (рис. 11, табл. 1) показав, що послідовне підвищення температури попереднього нагріву оболонки на  $20^\circ\text{C}$  призводить до рівномірного збільшення величини верхнього критичного навантаження тиском  $\overline{q}_{kp}^e$  на 11.2%, 10.8%, 10.9% та відповідного рівномірного зменшення величини нижнього критичного навантаження  $\overline{q}_{kp}^H$  на 6.7%, 7.4%, 7.9%. При цьому, еволюція нелінійного деформування оболонки відбувається без суттєвої якісної зміни результатів розрахунків.

Таблиця 1

Величини критичних навантажень тиском для різних варіантів нагріту панелі з центральним отвором					
№ варіанта	Комбіноване навантаження	$\overline{q}_{kp}^e$	$\Delta, \%$	$\overline{q}_{kp}^H$	$\Delta, \%$
1	$T = -20^\circ\text{C}, \overline{q}$	140.60	0	38.82	0
2	$T = 0^\circ\text{C}, \overline{q}$	156.40	11.2	36.22	-6.7
3	$T = 20^\circ\text{C}, \overline{q}$	171.50	22.0	33.33	-14.1
4	$T = 40^\circ\text{C}, \overline{q}$	186.80	32.9	30.28	-22.0

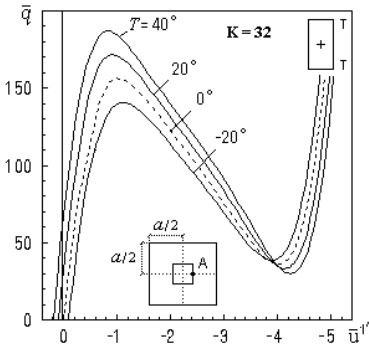


Рис. 11. Діаграми “навантаження-прогин в точці А”

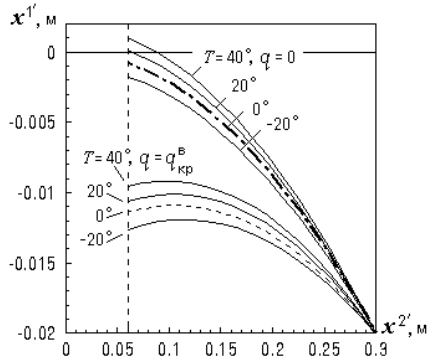


Рис. 12. Форми деформування та втрати стійкості

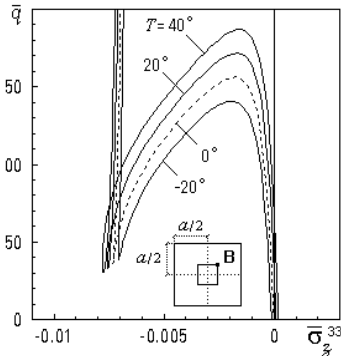
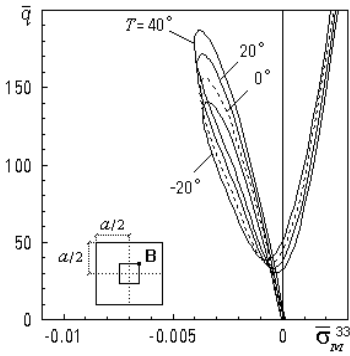


Рис. 13. Діаграми “навантаження-напруження в околі точки В”

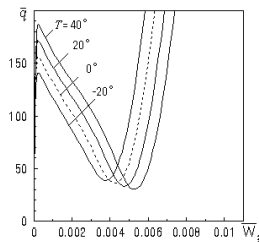
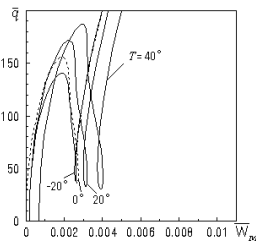
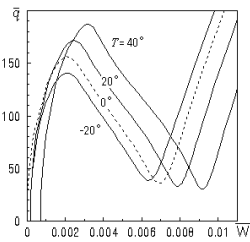


Рис. 14. Діаграми “навантаження-енергія деформування”



Перерізи в площині  $x^1 x^2$  (рис. 12) дають уяву про форми деформування панелі при попередніх нагрівах і в момент втрати стійкості від дії тиску.

Діаграми “навантаження-напруження” (рис. 13) приведені для найбільш напруженої ділянки оболонки (в околі кута отвору – точці В). Мембранні напруження  $\bar{\sigma}_m^{22}$  при переході з докритичної області у закритичну змінюють свій знак, а згинні напруження  $\bar{\sigma}_3^{22}$  при цьому поступово зростають, стабілізуючись після нижньої критичної точки.

На діаграмах рис. 14 наведений розподіл величин безрозмірної сумарної енергії деформування  $\bar{W}$  та її складових (мембранної  $\bar{W}_m$  та згинної  $\bar{W}_3$ ). Енергія деформування у докритичній області зростає за рахунок мембранної складової, а у позакритичній області – в основному за рахунок згинної складової.

Проведені дослідження дозволили виявити існуючі закономірності нелінійного деформування, стійкості та позакритичної поведінки оболонок сталого та ступінчато-змінної товщини для різних режимів комбінованого навантаження нагрівом та рівномірним нормальним тиском. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні різноманітних несучих оболонкових конструкцій та їх елементів.

1. Бушнелл Д. Исследование подкрепленных кольцами оболочек вращения, находящихся под совместным действием температурных и механических нагрузок // Ракетная техника и космонавтика. – 1971. – N3. – С. 64-77.
2. Замула Г.Н., Иерусалимский К.М., Карпова Г.С. Исследование устойчивости и термоустойчивости сложных подкрепленных конструкций // Уч. записки ЦАГИ. – 1989. – Т. XX. – N4. – С. 84-87.
3. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П. Нелінійні рівняння деформування тонких багатошарових оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА, 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
4. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П., Аят Н. Стійкість гнучких оболонок в умовах складного термосилового навантаження // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА, 1999. - Вип. 65. - С. 75-90.
5. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П. Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
6. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П. Стійкість гладких, ребристих та послаблених вирізами гнучких пологих панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2000 р. - Вип. 67. - С. 92-103.
7. Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П. Вплив параметрів ребер на стійкість гнучких панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2001 р. - Вип. 69. - С. 18-24.

8. *Баженев В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гнучких пологих панелей ступінчато-змінної товщини // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Збірник наукових праць. - Випуск 2(13).- Спец. вип. - Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2001. - С. 7-11.
9. *Баженев В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Вплив змінної товщини на стійкість пологих панелей при дії рівномірного тиску // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Збірник наукових праць. - Випуск 4(27).- Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2003. - С. 15-20.
10. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2003 р. - Вип. 72. - С. 83-96.
11. *Баженев В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
12. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості гнучких оболонок при різних законах нерівномірного нагріву // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2002 р. - Вип. 70. - С. 104-109.
13. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість гладких пологих сферичних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2004 р. - Вип. 74. - С. 60-73.
14. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість гранованих пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2004 р. - Вип. 75. - С. 80-86.
15. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.
16. *Ильин В.П., Карпов В.В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. - Л.: Стройиздат, 1986. - 168 с.

*Надійшла до редколегії 07.11.2005 р.*

УДК 539.375

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук,  
**Гуляр О.І.**, д-р техн. наук,  
**Пискунов С.О.**, канд. техн. наук.,  
**Сахаров О.С.**, д-р техн. наук,  
**Шкриль О.О.**

## **ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ $J$ -ІНТЕГРАЛА ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Розроблена нова методика обчислення величини  $J$ -інтеграла Черепанова-Райса на основі метода скінчених елементів (МСЕ), проведена її реалізація в межах напіваналітичного варіанта МСЕ, показана вірогідність і ефективність застосування для просторових задач механіки руйнування.

**Вступ.** Інваріантні інтеграли є основними критеріальними параметрами механіки руйнування [3], які дозволяють розглядати широке коло задач про деформування тіл з тріщинами. Найбільш широко застосованим є  $J$ -інтеграл Черепанова-Райса [4, 15]. Експериментальні методи визначення  $J$ -інтеграла розглянуті в роботах [6, 7, 13, 25]. Розробка загальних підходів до розв'язання просторових задач механіки руйнування вимагає залучення чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів (МСЕ).

Проблема визначення величини  $J$ -інтеграла на основі МСЕ розглянута в низці наукових публікацій [3, 6, 9–11, 13, 14, 16–25 та ін.]. Для визначення  $J$ -інтеграла використовується підхід, що ґрунтується на його безпосередньому обчисленні по контуру (для двовимірних задач) [14, 18] або по поверхні інтегрування, що охоплює фронт тріщини (для тривимірних задач) [21], а також методи обчислення  $J$ -інтеграла по області [3, 9, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24]. Загальною рисою згаданих методів є використання співвідношень, що містять величини напружень і градієнти переміщень. Для просторових задач обчислення  $J$ -інтеграла із використанням зазначених підходів є досить складною задачею. При цьому, при розробці відповідних алгоритмів автори накладають певні обмеження на форму і розміри області інтегрування: так, в роботі [3] пропонується обирати область інтегрування у вигляді малої трубки, що суперечить теоретичним положенням про інваріантність  $J$ -інтеграла відносно області інтегрування. Крім того, в літературі наявні дані про неінваріантність визначеної шляхом обчислення вздовж контура на

основі МСЕ величини  $J$ -інтеграла [10, 11, 14]. Зазначені висновки зроблені на основі аналізу результатів розв'язання двовимірних задач.

Таким чином актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла є створення ефективних методик обчислення  $J$ -інтеграла в просторовій постановці, зокрема із урахуванням особливостей побудови дискретних скінченоелементних моделей, та дослідження вірогідності і ефективності їх застосування в просторових задачах механіки руйнування.

Значна кількість відповідальних елементів конструкцій в різних галузях техніки являє собою просторові призматичні тіла складної форми, що знаходяться під впливом довільно розподілених у просторі навантажень, і містять початкові тріщини. Ефективним засобом скінченоелементної апроксимації об'єктів зазначеного класу в задачах механіки деформівних тіл є напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ) [1], область застосування якого до теперішнього часу поширена і на задачі механіки руйнування [2].

Метою даної роботи є розробка і реалізація в межах НМСЕ методики визначення  $J$ -інтеграла Черепанова-Райса, що ґрунтується на використанні величин напружень і градієнтів переміщень, дослідження вірогідності цього підходу при розв'язанні просторових задач механіки руйнування, а також розробка нової узагальненої методики обчислення  $J$ -інтеграла, орієнтованої на дискретне подання параметрів напружено-деформованого стану в межах процедури розв'язання задачі МСЕ та перевірка її вірогідності.

Вихідні співвідношення механіки руйнування. У загальному випадку для оцінки тріщиностійкості і визначення несучої здатності тіл з тріщинами використовується  $J$ -інтеграл Черепанова-Райса, розподілення якого вздовж фронту тріщини при довільному розподіленні зовнішніх впливів є нерівномірним.

Величина  $J$ -інтеграла характеризує щільність енергії  $W$ , що звільнюється при збільшенні довжини тріщини на  $\partial\ell$  [3]:

$$J = -\frac{\partial W}{\partial \ell}, \quad (1)$$

де  $W$  – енергія деформування об'єму  $V$ ,  $\partial\ell$  – нескінченно малий приріст довжини тріщини.

В кожній точці фронту тріщини величина  $J$ -інтеграла обчислюється за довільною поверхнею  $F$ , що обрана в околі зазначеної точки, охоплює фронт тріщини і має характерний розмір  $\Delta$  вздовж фронту тріщини (рис. 1). При цьому для обчислення  $J$ -інтеграла використовується вираз,

отриманий на основі гіпотез про суцільність середовища, де розповсюджується тріщина, і співвідношень теорії пружності:

$$J = \frac{1}{\Delta} \int_F \left( W n_t - \bar{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot (\hat{\nabla} u)^T \cdot \bar{t} \right) dF, \quad (2)$$

де  $W$  – величина повної енергії деформування, в загальному випадку

$$W = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \hat{\sigma} \cdot d\hat{\varepsilon}, \quad \text{при пружному деформуванні } W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}; \quad \hat{\sigma} - \text{тензор}$$

напружень,  $\hat{\varepsilon}$  – тензор деформацій,  $\bar{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні інтегрування  $F$ ;  $\bar{t}$  – вектор, що визначає напрямок розвитку тріщини в точці фронту, де обчислюється  $J$ -інтеграл;  $n_t$  – проекція нормалі  $\bar{n}$  на напрямок вектора  $\bar{t}$ ;  $\hat{\nabla} u$  – градієнт переміщень.

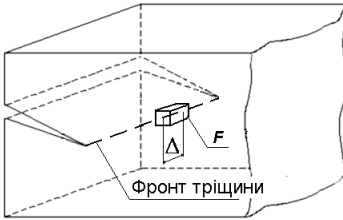


Рис. 1. Поверхня інтегрування

Згідно з [15] величина  $J$ -інтеграла є інваріантною відносно контура інтегрування, що дозволяє використовувати його для формулювання критерія руйнування у вигляді

$$J \leq J_{lc},$$

де  $J_{lc}$  – величина, що визначається

експериментально згідно з [14].

**Скінченоелементна дискретизація просторових тіл з тріщинами на основі НМСЕ.** НМСЕ являє собою ефективну модифікацію МСЕ, що ґрунтується на об'єднанні МСЕ із методом розділення змінних. Згідно із загальною концепцією НМСЕ подання невідомих величин переміщень здійснюється шляхом їх розкладення вздовж однієї характерної координати  $z^3$  за системою безперервних гладких базисних функцій. В площині поперечного перерізу тіла  $z^1 - z^2$  здійснюється скінчено-елементна дискретизація тіла. При цьому в напрямку  $z^3$  застосовується один скінчений елемент (СЕ), форма якого визначається особливостями конфігурації досліджуваного об'єкта [1].

В даній роботі розглядаються призматичні неоднорідні тіла. Для опису геометрії і зовнішніх впливів застосовується базисна декартова система координат  $z^i$ . Фізико-механічні характеристики тіла залежать від просторових координат;  $q_k(z^i)$  – довільно розподілені у просторі навантаження. В залежності від розташування фронту тріщини відносно

вісі  $z^3$  виділяють тіла з поперечними і поздовжніми тріщинами [2]. Скінченоелементна дискретизація зазначених об'єктів наведена на рис. 2.

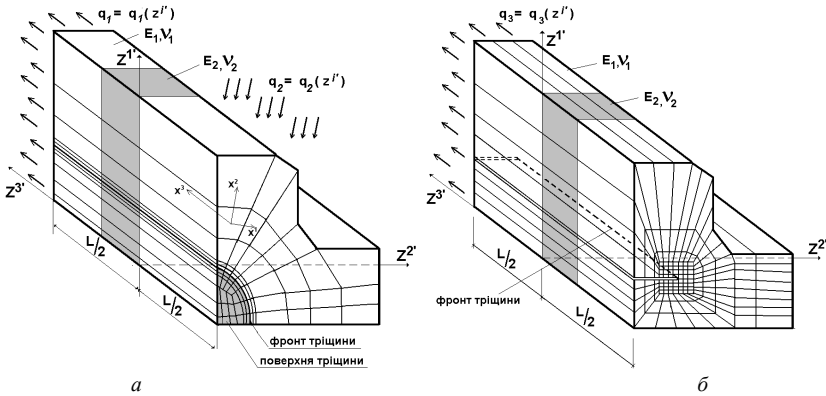


Рис. 2. Призматичні неоднорідні тіла із поперечною (а) і поздовжньою (б) тріщинами

**Алгоритм розв'язання систем рівнянь НМСЕ.** Розв'язання систем рівнянь великої розмірності є найбільш трудомістким етапом розв'язання задач механіки деформованого твердого тіла на основі МСЕ. У загальному випадку система рівнянь МСЕ може бути подана у вигляді:

$$[K]\{u\} = \{P\},$$

де  $[K]$  – матриця жорсткості системи;  $\{u\}$  – вектор невідомих вузлових переміщень;  $\{P\}$  – вектор вузлових навантажень.

При використанні НМСЕ та відповідному поданні переміщень і зовнішніх навантажень у вигляді розкладу за системою базисних функцій  $\Psi^l$ :

$$u_{k'} = \sum_{l=0}^L U_{k',l} \Psi^l, \quad \{Q_l\}^m = \int_{-1}^1 Q_m \Psi^l \sqrt{g} dx^3, \quad (3)$$

вектори переміщень, вузлових навантажень, вузлових реакцій  $\{R\}$  і матриця жорсткості набувають блочної структури. В зв'язку з цим для розв'язання отриманої системи рівнянь НМСЕ раціональним є використання блочно-ітераційних алгоритмів. Відповідно, на кожній ітерації  $n$  кроку  $m$  для розв'язання системи рівнянь НМСЕ застосовується алгоритм [1, 2]:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} (\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m), \quad (4)$$

де  $\beta$  – параметр релаксації,  $1 < \beta < 2$ .

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L \left( \{ \Delta u \}_l^n \right)^2 \leq \varepsilon \sum_{l=0}^L \left( \{ u \}_l^n \right)^2 . \quad (5)$$

де  $\varepsilon$  – точність розв’язання системи рівнянь,  $\varepsilon = 10^{-2} \dots 10^{-4}$ .

Для доведення ефективності запропонованого алгоритму в задачах механіки руйнування розглянуто тестову задачу про деформування просторового призматичного тіла з боковою тріщиною, під впливом розтягуючого навантаження, розрахункова схема і дискретна модель НМСЕ для якого наведені на рис. 3. Проведені дослідження збіжності величини переміщення  $u^1$  у вузлі  $K$ , розташованому перед фронтом тріщини в площинах  $z^3 = 0$  (всередині тіла) і  $z^3 = \pm 1$  (на бічній поверхні) засвідчили, що похибка визначення переміщення в межах 2% досягається вже при  $\varepsilon = 10^{-2}$  при кількості ітерацій  $N=4$ .

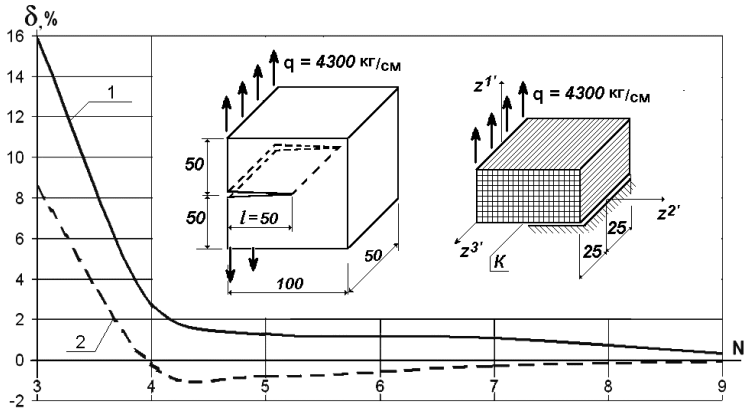


Рис. 3. Призматичне тіло з боковою тріщиною: розрахункова схема, дискретна модель НМСЕ і збіжність результатів розв’язання задачі на основі алгоритма (4)–(5): 1 –  $z^3 = \pm 1$ ; 2 –  $z^3 = 0$

**Методика обчислення  $J$ -інтеграла на основі НМСЕ за величинами напружень і градієнтів переміщень.** Зважаючи на скінченоелементну дискретизацію об’єкта, згідно із наданими в [15] рекомендаціями, поверхню інтегрування  $F$  (див. рис. 1) доцільно обрати у формі призми, що охоплює фронт тріщини. Вигляд поверхні інтегрування для

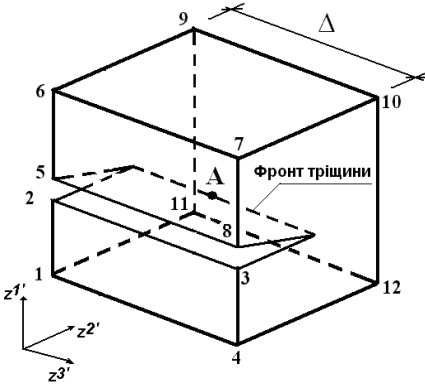


Рис. 4. Поверхня інтегрування призматичної форми для тіл з поздовжніми тріщинами

поздовжньої тріщини подано на рис. 4. Необхідно зазначити, що для випадку поперечної тріщини розташування поверхні інтегрування відносно базисної системи координат може змінюватись (величина  $\Delta$  буде вимірюватись в площині  $z^1 - z^2$ ).

Поверхня для обчислення  $J$ -інтеграла в околі кожної з точок фронту тріщини буде складатися з контурної ( $F_k = F_{1,2,3,4} + F_{5,6,7,8} + F_{6,7,9,10} + F_{9,10,11,12} + F_{1,4,11,12}$ ) та

двох бічних ( $F_1 = F_{4,7,10,12}$  і  $F_2 = F_{1,6,9,11}$ ) поверхонь. Відповідно,  $J$ -інтеграл може бути поданим сумою складових по цим поверхням:

$$J = \frac{1}{\Delta} (J_{F_k} + J_{F_1} + J_{F_2}). \quad (6)$$

Подамо компоненти тензора напружень, градієнтів переміщень, а також компоненти нормалі  $\vec{t}$  і її проекції  $n_i$  в місцевій системі координат:

$$\sigma = \sigma^{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad \nabla u = \zeta_{ij} \bar{e}^i \bar{e}^j, \\ \bar{n} = n_i \bar{e}^i, \quad \vec{t} = t^s \bar{e}_s,$$

$$\bar{n} \cdot \sigma \cdot (\nabla u)^T \vec{t} = n_i \bar{e}^i \cdot \sigma^{mn} \bar{e}_m \bar{e}_n \cdot \zeta_{kl} \bar{e}^k \bar{e}^l \cdot t^s \bar{e}_s = n_i \sigma^{ik} \zeta_{kl} t^l.$$

Таким чином отримуємо покомпонентний вираз для обчислення  $J$ -інтеграла в місцевій системі координат):

$$J = \frac{1}{\Delta} \int_F \left( W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{kl} t^l \right) dF. \quad (7)$$

При скінчено-елементному обчисленні  $J$ -інтеграла за формулою (7) для виконання інтегрування обирається контур  $S$ , який лежить в площині, перпендикулярній до фронту тріщини. В місцевій системі координат контур має прямокутну форму і проходить через центри СЕ. В



межах кожного елемента інтегрування здійснюється за віссю, вздовж якої контур перетинає СЕ. У межах тих СЕ, що містять кутові точки контуру, інтегрування проводиться за двома ділянками, що відповідають напрямкам осей із урахуванням відповідних проекцій нормалі до контуру  $\vec{n}$  на вектор напрямку розвитку тріщини  $\vec{t}$ . Такий контур для випадку поздовжньої тріщини показаний на рис. 5.

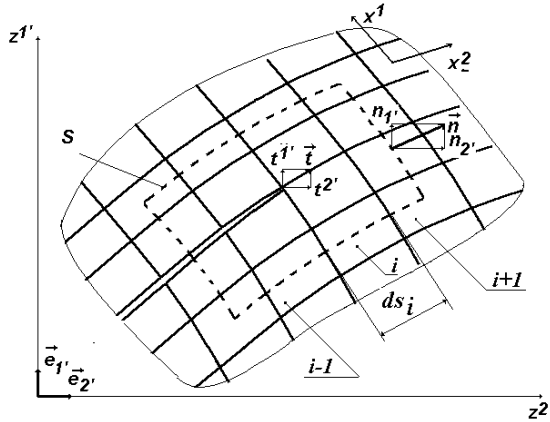


Рис. 5. Контур для обчислення  $J$ -інтеграла на дискретній моделі МСЕ

З урахуванням скінченоелементної дискретизації тіла, для покомпонентного подання  $J$ -інтеграла отримуємо:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_S \left( W t^j n_j - n_m \sigma^{mn} \nabla_k u_n t^k \right) ds = \\
 &= \sum_{i=1}^{N_e + n_e} \left( W t^j n_j - n_m \sigma^{mn} \nabla_k u_n t^k \right) ds_i, \quad (8)
 \end{aligned}$$

де  $N_e$  – загальна кількість СЕ, крізь які проходить обраний для обчислення  $J$ -інтеграла контур;  $n_e$  – кількість СЕ, що містять кутові точки контуру;  $ds_i$  – довжина відрізка контуру в межах  $i$ -го СЕ;  $W$  – енергія деформування тіла (системи з  $N_e$  СЕ):

$$W = \sum_{i=1}^{N_e} W_i = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} \sqrt{g}.$$

При реалізації розглянутого алгоритма обчислення  $J$ -інтеграла в межах НМСЕ конкретизація отриманого покомпонентного виразу (8) залежить від орієнтації фронту тріщини відносно осі  $z^3$ .

В тілах з поперечними тріщинами обчислення  $J$ -інтеграла виконуються у вузлах сітки, що апроксимують фронт тріщини (рис. 6). Характерний розмір  $\Delta$  при цьому визначається розміром СЕ вздовж фронту тріщини.

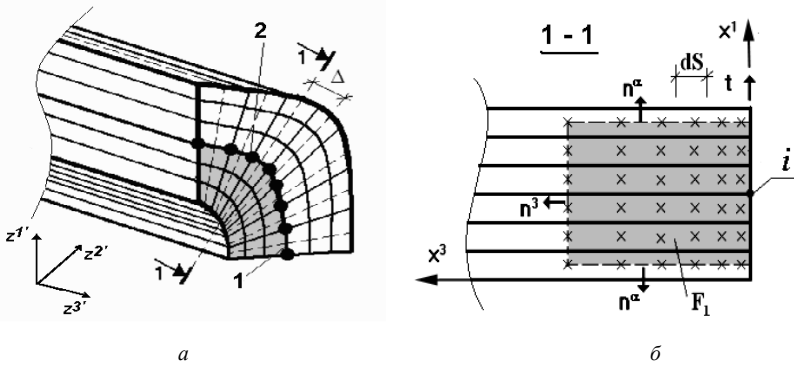


Рис. 6. Схема визначення  $J$ -інтеграла в тілах з поперечними тріщинами:  
 а) загальний вигляд дискретної моделі НМСЕ і розташування точок визначення  $J$ -інтеграла; б) розташування контура інтегрування;  
 1- фронт тріщини; 2- точка  $i$  визначення  $J$ -інтеграла

В кожній точці фронту тріщини  $i$  величина  $J$ -інтеграла на контурній поверхні обчислюється за формулою:

$$J_{F_k}^i = J_S^i \Delta, \quad (9)$$

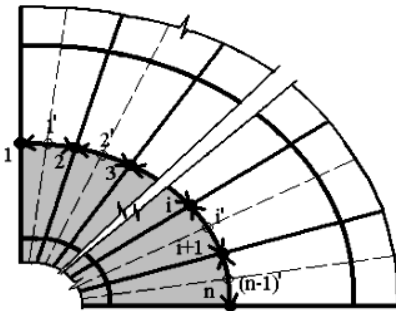


Рис. 7. Зведення контурних інтегралів до вузлів

Узагальнений вираз  $J$ -інтеграла містить величини напружень, деформацій та градієнтів переміщень, що обчислюються в центрі кожного з СЕ, розташованих вздовж фронту тріщини. Відповідно, величини  $J_S^i$  визначаються величинами  $J$ -інтеграла, обчисленими вздовж контурів, які лежать в площинах, що проходять через центри СЕ (точки  $1^*$ ,  $2^*$ .... $(n-1)^*$ ), див. рис. 7),

після чого приводяться до точок фронту тріщини (вузлів дискретної моделі):

$$J_S^i = J_S^1, \quad i=1;$$

$$J_S^i = \frac{J_S^{(i-1)} + J_S^i}{2}, \quad 1 < i < n;$$

$$J_S^i = J_S^{(n-1)}, \quad i=n.$$

Згідно із (6), величина  $J$ -інтеграла в кожній точці  $i$  фронту тріщини становить:

$$J^i = \frac{1}{\Delta} (J_{F_k}^i + J_{F_1}^i + J_{F_2}^i). \quad (10)$$

Обчислення  $J$ -інтеграла для тіл з поздовжніми тріщинами проводиться в точках інтегрування 1, 2, ...,  $n$  (рис. 8).

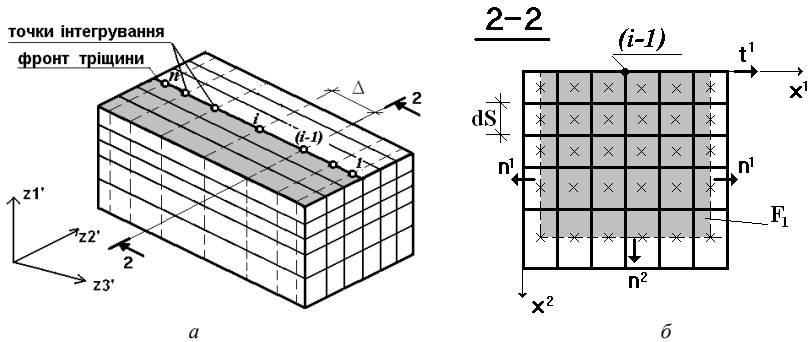


Рис. 8. Схема визначення  $J$ -інтеграла в тілах з поздовжніми тріщинами

Теоретично величина  $J$ -інтеграла є інваріантною відносно форми і величини контуру інтегрування. Зважаючи на похибки, що виникають при чисельній апроксимації напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини, становить інтерес визначення розмірів контуру інтегрування і мінімального розміру СЕ в околі вершини тріщини.

З цією метою було розглянуто тестовий приклад про одновісний розтяг квадратної пластини з центральною тріщиною при пружному деформуванні [12]. Визначення  $J$ -інтеграла проведено за формулою (7) із використанням рівномірної сітки 20x20 СЕ. Для обчислення величини  $J$ -інтеграла розглядалися прямокутні контури, кожна із сторін яких розташована на однаковій відстані, визначеній кількістю СЕ  $N_e$ , від

вершини тріщини. Були розглянуті контури при  $N_e = 2, 3, 4$  і  $9$  (рис. 9, *a*). Результати свідчать, що збіжність з точністю близько 2% досягається при використанні контуру, розташованого на відстані трьох характерних розмірів СЕ від вершини тріщини (рис. 9, *б*). Більше віддалення контура і, відповідно, збільшення його розміру, призводить до зменшення похибки лише на 0,2%.

У подальшому визначення  $J$ -інтеграла проводилось із використанням контуру з трьох елементів на різних регулярних СЕ сітках. Найрідшою сіткою, на якій може бути застосований контур при  $N_e = 3$ , є сітка  $6 \times 6$  СЕ при характерному розмірі СЕ  $\ell_e = \frac{1}{3} \ell_{тр}$ , де  $\ell_{тр}$  – довжина тріщини (рис.10, *a*). Результати, отримані при подальшому згущенні сітки до  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $30 \times 30$  СЕ при розмірі елемента, відповідно,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$  і  $\frac{1}{15}$  довжини тріщини, засвідчили, що збіжність з похибкою близько 2% досягнута при  $\ell_e = \frac{1}{10} \ell_{тр}$  (рис. 10, *б*).

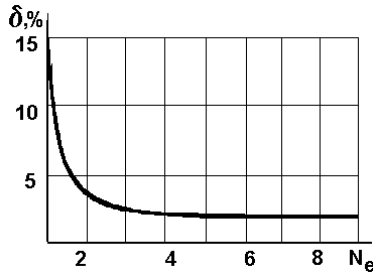
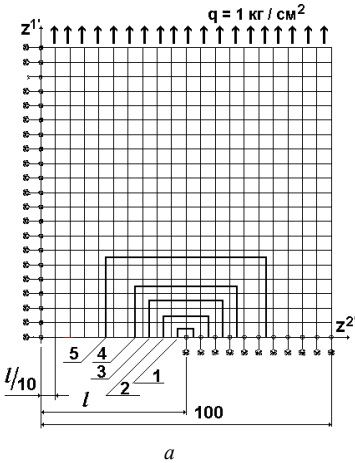


Рис. 9. Пластина з центральною тріщиною: контури для обчислення (*a*) і збіжність величини  $J$ -інтеграла (*б*)

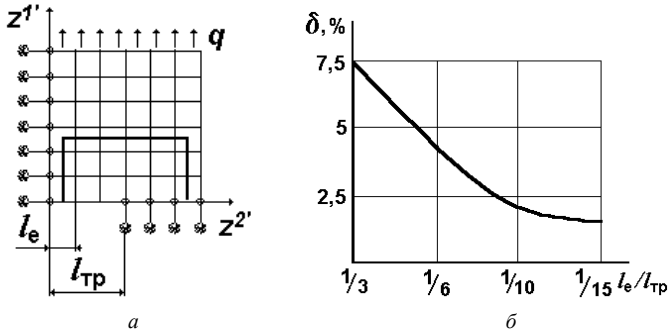


Рис. 10. Мінімально припустимий контур (а)  
і збіжність величини  $J$ -інтеграла (б)

Отже, були визначені мінімально необхідні розміри контуру інтегрування, кількість і характерні розміри СЕ для вірогідного обчислення величини  $J$ -інтеграла.

В розглянутому тестовому прикладі в околі вершини тріщини реалізований напружено-деформований стан, обумовлений лише розтягуючим навантаженням. У випадку при розгляді деформування призматичного тіла з боковою тріщиною (рис. 3) внаслідок прикладення розтягуючого навантаження на відстані  $l$  від фронту тріщини напружено-деформований стан суттєво обумовлений відповідною згінною складовою.

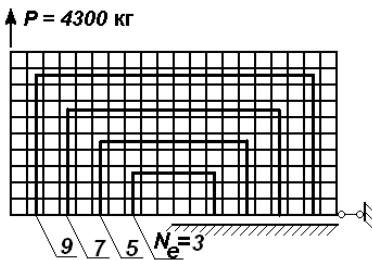


Рис.11. Розрахункова схема  
призматичного тіла з боковою тріщиною

На першому етапі розв'язання зазначеної задачі проведено в двовимірній постановці на основі МСЕ із використанням дискретної моделі, наведеної на рис.11, б. Величина  $J$ -інтеграла, отримана із використанням контурів, що складаються з трьох і дев'яти СЕ, збігається з наведеним в роботі [12] еталонним значенням з похибкою в межах 2%.

Подальший розгляд задачі в просторовій постановці (рис. 12) засвідчив суттєві не тільки кількісні, а й якісні відмінності розподілень  $J$ -інтеграла вздовж фронту тріщини порівняно із результатами, отриманими за обчисленими прямим методом величинами коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН)  $K_I$ :  $J = kK_I^2/E$ ,  $E$  – модуль пружності матеріалу. Крім

того, був проведений аналіз похибки визначення величин  $J$ -інтеграла  $J_0$ , отриманих по замкненому контуру, що містить вершину тріщини (рис. 12, показаний на дискретній моделі штриховою лінією), які теоретично повинні дорівнювати нулю. В даному випадку величина  $J_0$  визначалась як різниця величин  $J$ -інтеграла, обчислених по П-подібній частині замкненого контура і по горизонтальній лінії, що проходить вздовж берегів тріщини. Виявилось, що відмінність від нуля величин  $J$ -інтеграла по замкненому контуру, характеризується величиною похибки  $\delta_{J_0}$  до еталонного розв'язку, неухильно зростає із збільшенням розміру контура. При цьому величина  $\delta_{J_0}$  є різною в різних точках фронту тріщини (рис. 13, табл. 1) і досягає 60%. Це обумовлено розривністю полів напружень на границях скінчених елементів. Таким чином, характер розподілення напружень та градієнтів переміщень в дискретних моделях не відповідає вимогам, сформульованим для визначення інваріантного  $J$ -інтеграла в межах континуальних областей.

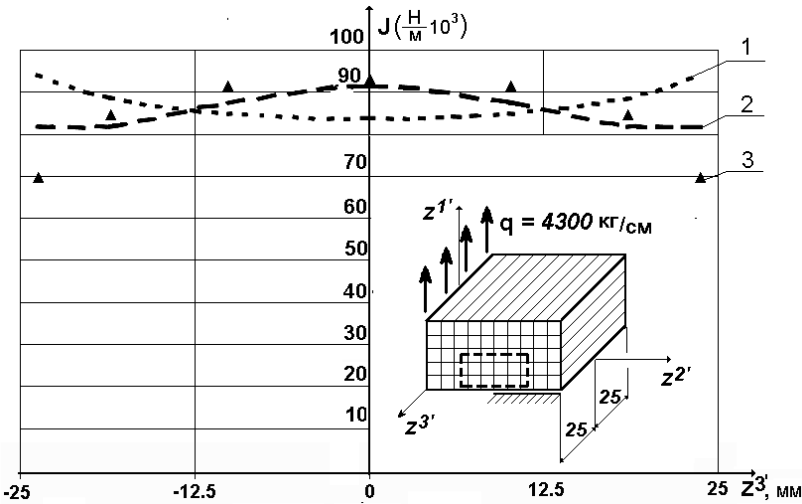


Рис. 12. Результати обчислення  $J$ -інтеграла для призматичного тіла з боковою тріщиною в просторовій постановці: 1– для контура інтегрування з 9 елементів; 2– для контура інтегрування з 3 елементів; 3– прямий метод

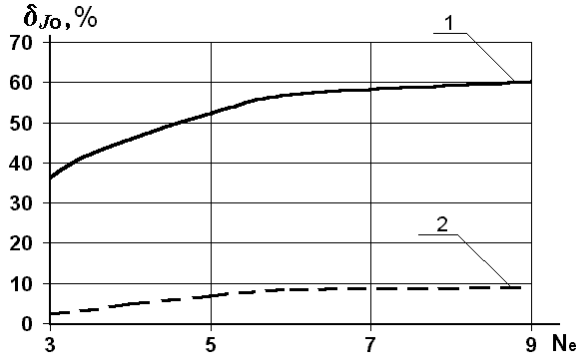


Рис. 13. Похибка обчислення  $J$ -інтеграла по замкнутому контуру в призматичному тілі з боковою тріщиною:

1– на бічних поверхнях ( $z^3 = \pm 25$  мм); 2– в середньому перерізі ( $z^3 = 0$ ).

Таблиця 1

$z^3, \text{ мм}$	Похибка обчислення $J$ -інтеграла по замкнутому контуру $\delta_{JO}, \%$	
	$N_e = 3$	$N_e = 9$
- 24.75	-35.97	-60.35
- 18.5	0.74	-9.25
- 10.25	5.71	6.98
0	2.43	8.89
10.25	5.71	6.98
18.5	0.74	-9.25
24.75	-35.97	-60.35

Для усунення зазначених недоліків і вірогідного обчислення  $J$ -інтеграла необхідним є розробка підходів, які ґрунтуються на величинах, пов'язаних із процедурою скінченоелементного розв'язання задачі механіки деформівного твердого тіла.

**Методика обчислення  $J$ -інтеграла за величинами вузлових переміщень  $u$  і вузлових реакцій  $R$ .** Розглянемо контур довільної форми, що проходить в напрямку вісі  $x_1$  через середини СЕ, і по границях СЕ паралельно вісі  $x_2$  (рис. 14).

$J$ -інтеграл (2) за зазначеним контуром може бути поданий у вигляді:

$$J = \int_S (Wn_i - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'l'} t^{l'}) ds. \quad (11)$$

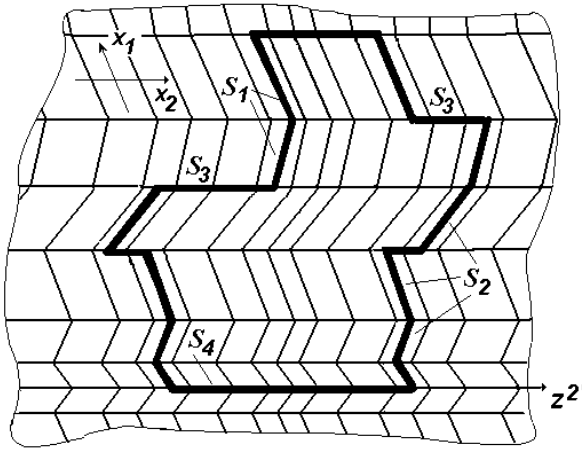


Рис. 14. Довільний контур для обчислення  $J$ -інтеграла

Після розгоргання добутку в останньому складнику за індексом  $l$ , зважаючи, що  $t^1 = 0$ ,  $t^2 = 1$ ,  $t^3 = 0$  отримаємо:

$$J = \int_s (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds. \quad (12)$$

Відповідно до напрямку зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до відрізків ламаної, що утворює контур, виділимо наступні його складові: ламані лінії, відрізки яких збігаються за напрямком з вісями  $x_1$  CE –  $s_1$  і  $s_2$ , а також відрізки ламаних та прямі паралельні вісі  $z^{2'}$  –  $s_3$  і  $s_4$ . В загальному випадку кількість відрізків, що складають зазначені складові контура, може бути довільною. Відповідно, подамо (12) у вигляді:

$$J = \int_{s_1} (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_1 + \int_{s_2} (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_2 + \\ + \int_{s_3} (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_3 + \int_{s_4} (Wn_t - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_4 ;$$

З урахуванням значень проекції нормалі  $n_t$  на напрямок  $z^{2'}$  ( $n_t|_{s_1} = -1$ ,  $n_t|_{s_3} = 1$ ,  $n_t|_{s_2} = n_t|_{s_4} = 0$ ) останній вираз для обчислення  $J$ -інтегралу набуде вигляду:



$$\begin{aligned}
 J &= \int_{s_1} (-W - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_1 + \int_{s_2} (-n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_2 + \\
 &\quad + \int_{s_3} (W - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_3 + \int_{s_4} (-n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'}) ds_4 = \\
 &= \int_{s_3} W ds_3 - \int_{s_1} W ds_1 - \int_{s_1} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds_1 - \int_{s_2} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds_2 - \\
 &\quad - \int_{s_3} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds_3 - \int_{s_4} n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds_4,
 \end{aligned}$$

або, з урахуванням скінчено-елементного подання контуру:

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{j=1}^{N_3} W ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} W ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds)_j - \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{N_2} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds)_j - \sum_{j=1}^{N_3} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds)_j - \sum_{j=1}^{N_4} (n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2'} ds)_j, \quad (13)
 \end{aligned}$$

де  $N_1, N_2, N_3, N_4$  – кількість скінчених елементів на відповідних ділянках контура.

Розглянемо відрізок контуру інтегрування в межах одного скінченного елемента (рис. 15).

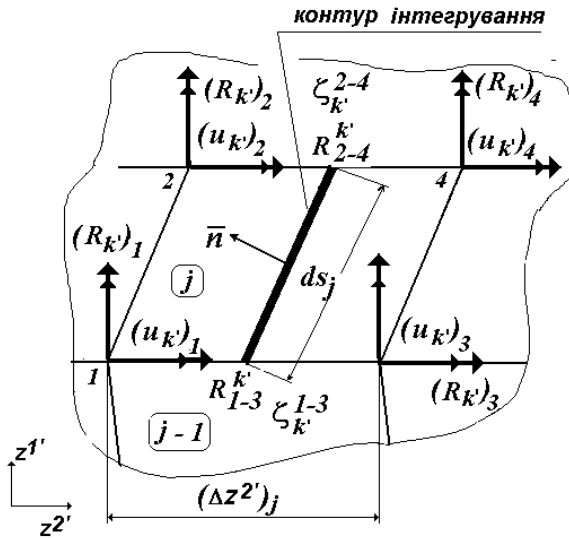


Рис. 15. Фрагмент контуру інтегрування в межах СЕ

Величина енергії деформування СЕ  $W$ , обчислена вздовж відрізка  $ds$  дорівнює

$$W ds_j = \frac{1}{2(\Delta z^{2'})} \{u\}_j \{R\}_j, \quad (14)$$

де  $\{u\}_j, \{R\}_j$  – вектори переміщень і вузлових реакцій кожного СЕ, через які проходить контур:  $\{u\}_j = \left\{ \left\{ u_k \right\}_j \right\}$ ,  $\{R\}_j = \left\{ \left\{ R_k \right\}_j \right\}$ ,  $k=1, 2, 3$  відповідає напрямкам  $z^1, z^2, z^3$ , а  $i=1, 2, 3, 4$  відповідає нумерації вузлів в межах СЕ (рис. 15).

Введемо наступні позначення:

$$R_{2-4}^{k'} = n_i \sigma^{ik'} \frac{ds}{2}, \quad R_{1-3}^{k'} = n_i \sigma^{ik'} \frac{ds}{2}.$$

В той же час ці величини можуть бути подані із використанням вузлових реакцій елемента:

$$R_{2-4}^{k'} = \frac{R_2^{k'} + R_4^{k'}}{2}, \quad R_{1-3}^{k'} = \frac{R_1^{k'} + R_3^{k'}}{2}.$$

Аналогічно можуть бути подані величини градієнтів на сторонах 1–2 і 3–4 СЕ:

$$\zeta_{k'2'}^{2-4} = \frac{(u_{k'})_4 - (u_{k'})_2}{\Delta z^{2'}}, \quad \zeta_{k'2'}^{1-3} = \frac{(u_{k'})_3 - (u_{k'})_1}{\Delta z^{2'}}.$$

З урахуванням цього та формули (14) вираз для контурного інтеграла (13) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} J = & \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j \{R\}_j - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j \{R\}_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_1} \left( R^{k'} \frac{(\{u_k\}_3 + \{u_k\}_4) - (\{u_k\}_1 + \{u_k\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left( R^{k'} \frac{\{u_k\}_4 - \{u_k\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_3} \left( R^{k'} \frac{(\{u_k\}_3 + \{u_k\}_4) - (\{u_k\}_1 + \{u_k\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_4} \left( R^{k'} \frac{\{u_k\}_4 - \{u_k\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j. \quad (16) \end{aligned}$$

Таким чином, контурний інтеграл (2) може бути представлений із використанням величин вузлових реакцій і вузлових переміщень.

Для часткового випадку регулярної в напрямку  $z^{2'}$  скінчено-елементної сітки може бути доведено дорівнювання нулю величини  $J$ -інтеграла при його обчисленні по замкненому контуру, що охоплює вершину тріщини.

З цією метою розглянемо фрагмент дискретної моделі, скінчено-елементна сітка в межах якого є регулярною в напрямку  $z^{2'}$ . Після розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану МСЕ для області дискретної моделі  $ABCDEFGHKLMP$ , що має довільну форму і містить  $N$  вузлів, відомі величини переміщень і вузлових реакцій.

Нехай інша підобласть  $A'B'C'D'E'F'G'H'K'L'M'P'$ , дискретна структура якої тотожна попередній, зміщена на величину  $\Delta z^{2'}$ . Вектори переміщень і вузлових реакцій, першої підобласті позначимо  $\{u\}_1$  і  $\{R\}_1$ , а другої –  $\{u\}_2$  і  $\{R\}_2$ :

$$\{u\}_1 = \left\{ \{u\}_j \right\}, \{R\}_1 = \left\{ \{R\}_j \right\}, \{u\}_2 = \left\{ \{u\}_j \right\}, \{R\}_2 = \left\{ \{R\}_j \right\},$$

де  $j$  – наскрізні номери СЕ в дискретній моделі;  $j = 1, 2, \dots, N$ , для  $\{u\}_1$  і  $\{R\}_1$ ,  $j = M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, N + M_1$  для  $\{u\}_2$ ,  $\{R\}_2$ ,  $N$  – кількість СЕ, через які проходять контури,  $M_1$  – кількість СЕ, які охоплені контурами за напрямком  $x_1$ .

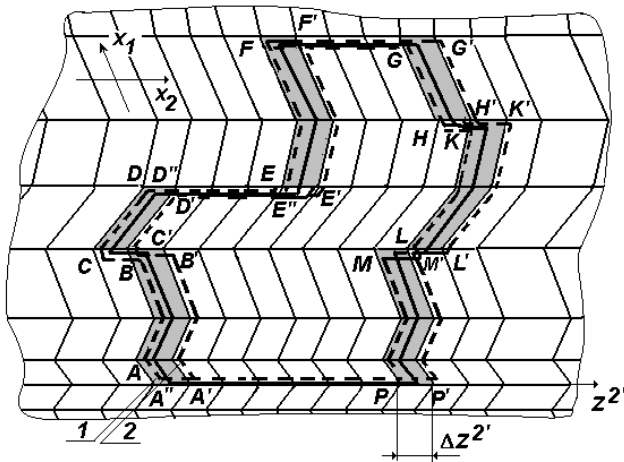


Рис. 16. Розташування контура інтегрування для двох станів тіла

Запишемо наступну тотожність:

$$J = -\frac{\partial W}{\partial \ell} = \int_V \frac{\partial W}{\partial \ell} dV - \int_V \frac{\partial W}{\partial \ell} dV, \quad (17)$$

де  $W$  – енергія деформування об'єму  $V$ ,  $\partial \ell$  – нескінченно малий зсув контура.

Перший складник в виразі (17) для розглядуваного фрагмента дискретної моделі згідно із теоремою Клапейрона може бути поданий як різниця величин робіт вузлових реакцій на відповідних переміщеннях:

$$\frac{1}{\Delta z^{2'}} \left( \frac{1}{2} \{u\}_1 \{R\}_1 - \frac{1}{2} \{u\}_2 \{R\}_2 \right). \quad (18)$$

Подамо другий складник в формулі (17) у вигляді добутку двох величин:

$$\left( \frac{\{u\}_1 - \{u\}_2}{\Delta z^{2'}} \right) \left( \frac{\{R\}_1 + \{R\}_2}{2} \right). \quad (19)$$

Після розкриття дужок отримаємо

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\{u\}_1 - \{u\}_2}{\Delta z^{2'}} \right) \left( \frac{\{R\}_1 + \{R\}_2}{2} \right) = \\ & = \frac{1}{2\Delta z^{2'}} \left( \{u\}_1 \{R\}_1 - \{u\}_2 \{R\}_2 - \{u\}_2 \{R\}_1 + \{u\}_1 \{R\}_2 \right). \end{aligned}$$

Згідно із теоремою Бетті про взаємність робіт  $\{R\}_2 \{u\}_1 = \{R\}_1 \{u\}_2$ .

Таким чином:

$$\frac{1}{2\Delta z^{2'}} (\{u\}_1 \{R\}_1 - \{u\}_2 \{R\}_2) \equiv \frac{1}{2\Delta z^{2'}} (\{u\}_1 - \{u\}_2) (\{R\}_1 + \{R\}_2).$$

Отже, величина  $J$ -інтегралу (17) по замкненому контуру тотожно дорівнює нулю:

$$J = \frac{1}{2\Delta z^{2'}} (\{u\}_1 \{R\}_1 - \{u\}_2 \{R\}_2) - \frac{1}{2\Delta z^{2'}} (\{u\}_1 - \{u\}_2) (\{R\}_1 + \{R\}_2) = 0. \quad (20)$$

Оскільки розглядуваний фрагмент знаходиться в стані рівноваги, для кожного внутрішнього вузла обох під областей реакції дорівнюють нулю. Відповідно, величина  $J$ -інтегралу, отримана із використанням виразів (16) і (20) для даного випадку буде однаковою.

Проведене застосування розробленого підходу до визначення величин  $J$ -інтеграла до задачі про згин призматичного тіла з боковою тріщиною засвідчило незалежність величини  $J$ -інтеграла від контуру інтегрування і майже повну тотожність з еталонним розв'язком (рис. 17). Крім того слід відзначити, що при застосуванні для обчислення  $J$ -інтеграла величин переміщень і вузлових реакцій на відміну від результатів, отриманих із застосуванням величин напружень і градієнтів переміщень, похибка  $\delta_{JO}$  обчислення  $J$ -інтеграла по замкненому контуру не перевищує 1% при будь-яких розмірах контура.

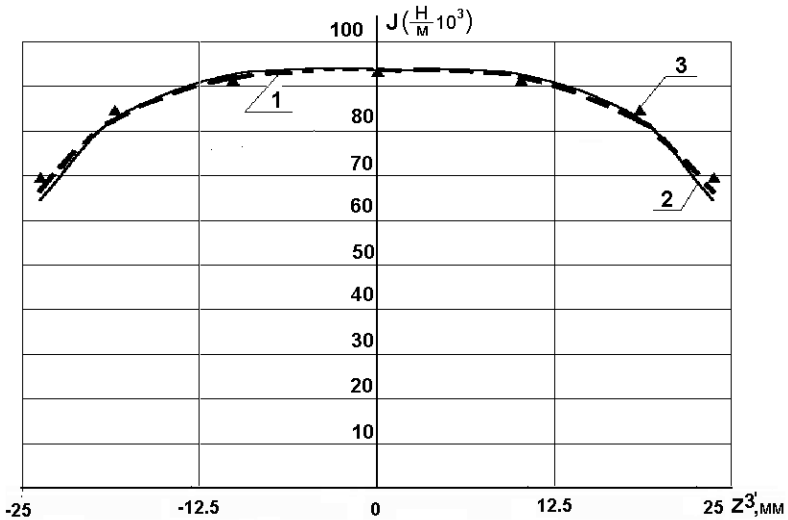


Рис. 17. Розподіл  $J$ -інтеграла вздовж фронту тріщини :  
1 – контур з 3 елементів; 2 – контур з 9 елементів; 3 – прямий метод.

Проведені дослідження збіжності результатів розв'язання задачі засвідчили, що для забезпечення збігу із еталонним результатом при обчисленні  $J$ -інтеграла за величинами напружень і градієнтів переміщень, необхідним є значне згущення скінчено-елементної сітки що, відповідно, призводить до невиправданих обчислювальних витрат (рис. 18). Це наглядно демонструється в порівнянні з результатами, отриманими із використанням величин вузлових реакцій і переміщень. Так, для отримання величини  $J$ -інтеграла з точністю порядку 2,5% в цьому випадку достатньо скінчено-елементної сітки розміром лише  $5 \times 10$  SE. Слід відзначити, що збіжність досягається при використанні як ортогональних (рис. 3), так і косокутних (рис. 19) дискретних моделей, а також при розгляді даного об'єкта як тіла з поперечною тріщиною.

Характерний розмір СЕ в вершині тріщини при цьому є майже в 25 разів меншим, ніж для досягнення тієї ж точності при обчисленні  $J$ -інтеграла із використанням величин напружень і градієнтів переміщень.

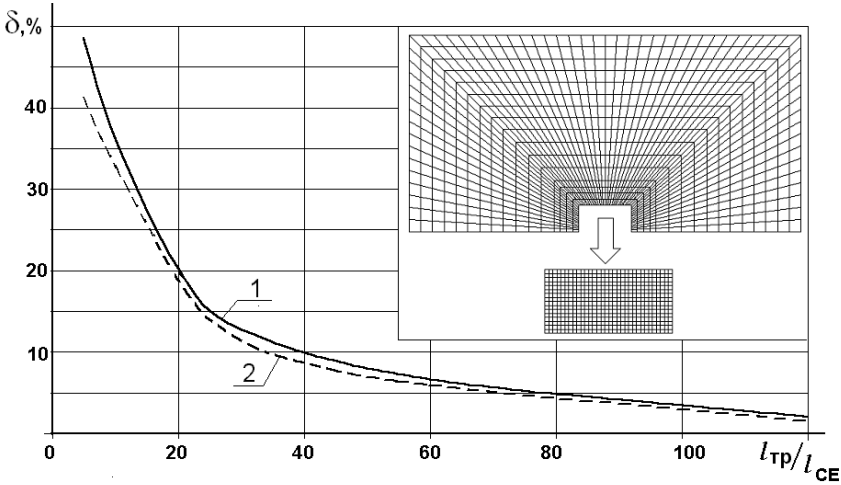


Рис. 18. Збіжність метода при використанні контура з 3 елементами:  
1 – похибка обчислення  $J$ -інтеграла по замкнутому контуру;  
2 – похибка обчислення  $J$ -інтеграла

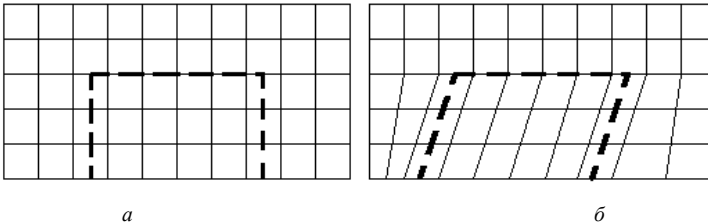


Рис. 19. Контури для обчислення  $J$ -інтеграла за методом реакцій, побудовані на ортогональній (а) і косокутній (б) СЕ сітках

Отримані в даній роботі результати засвідчили, що визначення  $J$ -інтеграла із використанням величин напружень і градієнтів переміщень при розв'язанні задач механіки руйнування на основі МСЕ призводить до складних обчислювальних процедур. При цьому отримані в просторовій постановці розподілення величини  $J$ -інтеграла вздовж фронту тріщини містять не лише суттєві кількісні, а й якісні відмінності, що спостерігаються як при використанні різних контурів інтегрування, так і при порівнянні із прийнятим за еталонний результатом обчислення  $J$ -

інтеграла на основі прямого методу. Уточнення результатів призводить до необхідності згущення скінчено-елементної сітки до досягнення характерними розмірами СЕ величин, що є на два порядки меншими ніж довжина тріщини. Розроблений підхід обчислення  $J$ -інтеграла із використанням вузлових реакцій і переміщень є вільним від зазначених недоліків: В цьому випадку суттєво спрощується процедура обчислення  $J$ -інтеграла в кожній з точок фронту тріщини, отримані результати є інваріантними відносно контура інтегрування, а необхідні для досягнення високої точності обчислення величини  $J$ -інтеграла характерні розміри СЕ є в 24 рази більшими, ніж в попередньому випадку, що забезпечує порівняно невелику розмірність дискретних моделей.

Таким чином, розроблений новий підхід до обчислення  $J$ -інтеграла на основі МСЕ забезпечує вірогідність отримуваних результатів і є ефективним засобом розв'язання просторових задач механіки руйнування.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ./ Под ред. С.Атлури.* – М.: Мир, 1990. – 392 с.
4. *Дж. Райс* Математические методы в механике разрушения. В книге: Разрушение т. 2. Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975 – 764 с.
5. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 1980. – 256 с.
6. *Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г.* Расчет энергетического интеграла для тел с вырезами и трещинами при упругопластическом деформировании. // Тр. ЦКТИ – 1988. – №246. – С. 67 – 73.
7. *MP 1-95.* Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. Механика катастроф. – М.: МИБСТС, 1995. – с.7 – 82.
8. *Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
9. *Никишков Г.П.* Метод эквивалентного объемного интегрирования для для расчета параметров механики разрушения несимметричных трещин. – Препринт МИФИ. – 031-87. – 20 с.
10. *Носиков А.И., Горохов М.Ю., Семенов А.С., Мельников Б.Е.* Инвариантность  $J$ -интеграла для трещины в материале с негладкой диаграммой деформирования.// Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Тр. VI Межд. конф. – С.-Петербург: СПбГТУ, 2005. – С. 350–359.
11. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука. – 1985. – 504 с.
12. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие, т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

13. *Синайський В.М.* Определение параметров разрушения методом рентгеноструктурного анализа. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2002. – т.68. – № 4. – С.35 – 38.
14. *Сиратори М., Миецу Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения / Пер. с японск. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
15. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640с.
16. *Anderson T.L.* Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. – CRC Press Boca Raton, Ann Arbor, Boston, 2000. – 793 p.
17. *Hellen T.K.* On the Method of Virtual Crack Extensions. – Int. Journal for Numerical Methods of Engineering. – Vol.9. – 1975. – pp.187–207.
18. *Kishimoto K., Aoki S., Sakata M.* On the path independent integral  $J$ . – Engineering Fracture Mechanics. – 1980. – V.13.– p.841–850.
19. *de Lorenci H.G.* On the Energy Release Rate and  $J$ -integral of 3–D Crack Configurations. – Int. Journal of Fracture. – Vol.19. – 1982. – pp.183–193.
20. *de Lorenci H.G.* Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method. – Engineering Fracture Mechanics. – Vol.21. – 1985. – pp.129–143.
21. *Murakami T., Salo T.* Three-dimensional  $J$ -integral calculations of path-trough surface crack problems // Comput. And Structures. – 1983. – V.17. – N 5-6. – p.731–736.
22. *Parks D.M.* A stiffness Derivative Finite Elements Technique for Determination of Crack Tip Intensity Factors // Int. Journal of Fracture. – Vol.10. – 1974.– pp.487–502.
23. *Parks D.M.* The Virtual Crack Extensions Method for Nonlinear Material Behavior. – Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – Vol.12. – 1977. – pp.353–364.
24. *Shih G.F., Moran B., Nakamura T.* Energy Release Rate Along a Three-Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body. – Int. Journal of Fracture. – Vol.30. – 1986.– pp.79–102.
25. *Smith C.W.* Measurement of fracture parameters in three dimensional cracked body problems. //Прикладная механика – 2003. – т.39, № 5. – С.3 – 27.

*Надійшла до редколегії 18.11.2005 р.*



УДК 539.3

Гоцуляк Є.А., д-р техн. наук,  
Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук,  
Лук'янченко О.О., канд. техн. наук,  
Борисенко В.Г., канд. техн. наук

## ПОБУДОВА РЕДУКОВАНИХ РІВНЯНЬ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ЗГИНУ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Розроблений ефективний чисельний підхід до побудови на основі стандартних процедур сучасних обчислювальних комплексів скінченноелементного аналізу редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем.

В статті [1] автори запропонували методику побудови засобами сучасних обчислювальних комплексів редукованих моделей для дослідження стійкості динамічних станів пружних систем при параметричному навантаженні. Редукування відбувалося за допомогою метода узагальнених координат. Редукована модель визначалася своїми редукованими матрицями мас, жорсткості, демпфірування та геометричної жорсткості і мала вигляд

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \beta f(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0, \quad (1)$$

де редуковані матриці мас  $M^*$ , демпфірування  $C^*$ , жорсткості  $K^*$ , геометричної жорсткості  $K_G^*$  розмірністю  $m \times m$  представлялися відповідно виразами:

$$M^* = V^T M V, \quad (2)$$

$$C^* = V^T C V, \quad (3)$$

$$K^* = V^T K V, \quad (4)$$

$$K_G^* = V^T K_G V. \quad (5)$$

Для побудови редукованої матриці мас і матриці демпфірування визначалися частоти власних коливань та відповідні власні форми. За допомогою обчислювальної процедури визначення реакції системи на узагальнені переміщення, які описують форми коливань, будувалася редукована матриця жорсткості. Для побудови редукованої матриці геометричної жорсткості виконувалися процедури розв'язання задачі стійкості та визначення реакції системи на задане поле переміщень у вигляді форм втрати стійкості конструкції.

За допомогою запропонованої методики були побудовані редуковані рівняння параметричних коливань балки та оболонки від дії повздовжніх сил, рами від дії зосереджених вертикальних сил. Але при тестуванні запропонованої методики в задачах динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем виникла необхідність змінити процедуру отримання редукованої матриці геометричної жорсткості.

В даній роботі для цього в докритичному напруженому стані знаходяться реакції конструкції на узагальнені переміщення, які описують форми коливань, що нормовані з урахуванням малого параметру. Далі згортання оператора на основі базису, що складається з форм коливань, і знаходження різниці між згорнутими операторами в околі докритичного і ненавантаженого станів дозволяють формувати редуковану матрицю геометричної жорсткості. В роботі застосована процедура розв'язання задачі нелінійної статyki при поетапному навантаженні пружної системи. Вона формулюється таким чином

$$(K^* + K_G^*)(U + V) = P + R, \quad (6)$$

де  $U$  та  $V$  - вектор вузлових переміщень від навантаження та матриця, складена з форм вільних коливань,  $K^*$ ,  $K_G^*$  - редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості відповідно,  $P$  - вектор вузлових навантажень,  $R$  - матриця реакцій пружної системи на форми вільних коливань. Тут

$$K^*U = P, \quad K_G^*U = 0. \quad (7)$$

Якщо представити  $R = R_K + R_{K_G}$ , тут  $R_K$  - матриця реакцій пружної системи на задане поле переміщень при лінійній постановці задачі, тоді

$$K^*V = R_K. \quad (8)$$

Нелінійність має місце при розв'язанні задачі

$$\lambda K_G^*V + \lambda^2 SVV + \lambda^3 TVVV = \lambda R_{K_G^*}, \quad (9)$$

де  $\lambda$  - коефіцієнт, що дозволяє зменшувати поле переміщень за модулем,  $S$  - квадратичний оператор,  $T$  - кубічний оператор.

Квадратичні та кубічні оператори при малому  $\lambda$  дають значно менший вклад ніж лінійний, тому вираз можна переписати у вигляді

$$\lambda K_G^*V = \lambda R_{K_G^*} \quad \text{або} \quad K_G^*V = R_{K_G^*}. \quad (10)$$

При формулюванні задачі необхідно виконати умову ортогональності вектора  $P$  до всіх векторів матриці  $R$

$$R^T P = 0. \quad (11)$$

Це дає можливість ввести такі граничні умови, які дозволяють визначити реакцію пружної системи по тих степенях свободи, що є ортогональними дії навантаження.

Процедура розв'язання нелінійної задачі статички з поетапним навантаженням дозволяє визначити матрицю реакцій системи  $R_{zaz}$ , яка може бути представлена у вигляді

$$(K^* + K_G^*)V = R_{zaz}. \quad (12)$$

Тоді редукована матриця геометричної жорсткості  $K_G^*$  визначається за формулою

$$K_G^* = (R_{zaz} - R_K)^T V. \quad (13)$$

Таким чином, в задачах динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем побудова редукованої матриці геометричної жорсткості виконується за допомогою згортання оператора на основі базису, що складається з форм коливань, і знаходження різниці між згорнутими операторами в околі докритичного і ненавантаженого станів.

В роботі запропонований чисельний підхід, протестований на задачах побудови редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину тонкостінної високої балки та стержневих ферм.

Висока балка, яка навантажена парами  $M(t)$  в площині найбільшої жорсткості, представлена на рис. 1.

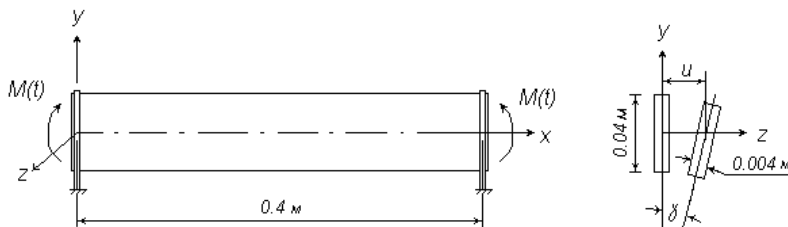


Рис. 1. Тонкостінна висока балка

Геометричні та механічні характеристики балки приймалися такими:  
 $F = 0.00016 \text{ м}^2$ ,  $J_y = 2.133 \text{ Е} \cdot 10^{-4}$ ,  $J_z = 2.133 \text{ Е} \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,

$E = 2.06 \text{ E11 Па}$ ,  $G = 0.792 \text{ E11 Па}$ ,  $\eta = 0.3$ ,  $J_k = 8.0128 \text{ E-10 м}^4$ ,  
 $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ .

Навантаження приймалося у вигляді  $M(t) = M_0 \cos \theta t$ ,  $M_0 = 1 \text{ Нм}$ .

Періодичне навантаження, що діє у площині найбільшої жорсткості балки, є параметричним навантаженням по відношенню до згино-крутильних деформацій із площини її дії. Якщо малі бокові збудження з часом затухають, то плоска форма згину динамічно стійка. У випадку виникнення інтенсивних згинно-крутильних коливань балки із площини найбільшої жорсткості при малих бокових збудженнях плоска форма згину динамічно нестійка.

Відповідна задача динамічної стійкості плоскої форми згину балки описується [2] рівняннями з періодичними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + \omega_{ku}^2 \left[ u_k - \frac{M(t)l^2}{k^2 \pi^2 EJ_y} \gamma_k \right] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + \omega_{k\gamma}^2 \left[ \gamma_k - \frac{M(t)}{GJ_k} u_k \right] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

де  $u$  - згин балки в площині  $Ouz$ ,  $\gamma$  - кут закручування,  $EJ_y$  - жорсткість балки в площині  $Oxu$ ,  $GJ_k$  - крутильна жорсткість,  $M(t)$  - періодичне навантаження.

Частоти згинних  $\omega_{ku}^2$  та крутильних  $\omega_{k\gamma}^2$  коливань ненавантаженої балки визначаються за формулами

$$\omega_{ku} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \left( \frac{EJ_y}{\rho F} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega_{k\gamma} = \frac{k\pi}{rl} \left( \frac{GJ_k}{\rho F} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

тут  $\rho$  - питома вага балки,  $r$  - полярний радіус інерції.

Граничні умови балки при шарнірному опиранні по обох кінцях записуються таким чином

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) = \gamma(0, t) = \gamma(l, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma(l, t)}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Введемо позначення

$$y_k(t) = \begin{bmatrix} u_k(t) \\ \gamma_k(t) \end{bmatrix} - \text{вектор узагальнених координат,}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} \omega_{ku}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{k\gamma}^2 \end{bmatrix} - \text{редукована матриця жорсткості,} \quad (17)$$

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega_{ku}^2 l^2}{k^2 \pi^2 EJ_y} \\ \frac{\omega_{k\gamma}^2}{GJ_k} & 0 \end{bmatrix} - \text{редукована матриця геометричної жорсткості.}$$

Матриці жорсткості і геометричної жорсткості нормовані по матриці мас. Тоді розрахункова модель (1) в матричній формі набуває вигляду

$$\ddot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + M(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0. \quad (18)$$

Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину балки зводиться до визначення редукованих матриць жорсткості  $K^*$  та геометричної жорсткості  $K_G^*$ .

Спочатку за допомогою обчислювального комплексу формується модель конструкції, задаються її геометричні і механічні характеристики. Далі виконується розрахунок конструкції на вільні коливання. В результаті розрахунку отримані дві перші частоти згинних та крутильних коливань  $\omega_{1u}$ ,  $\omega_{1\gamma}$  і відповідні форми власних коливань  $\bar{\varphi}_{1u}$ ,  $\bar{\varphi}_{1\gamma}$  (рис. 2,3).

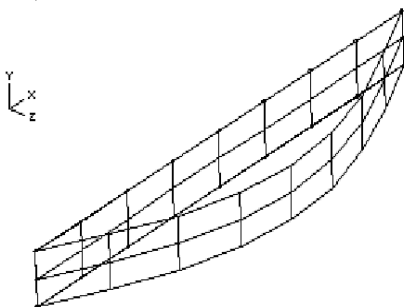


Рис. 2. Перша згинна форма коливань балки  
( $\omega_{1u} = 366.57 \text{ c}^{-1}$ )

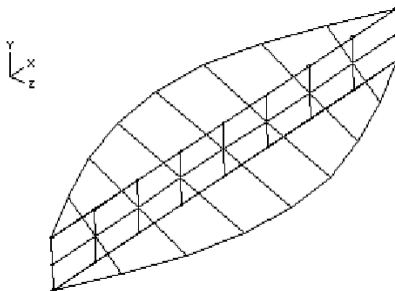


Рис. 3. Перша крутильна форма коливань балки  
( $\omega_{1\gamma} = 3962.81 \text{ c}^{-1}$ )

Далі формується файл з новими граничними умовами та навантаженнями. У блок граничних умов [7] додаються граничні умови у вигляді в'язів, що перешкоджають переміщенням в усіх вузлах балки і переміщенням в вузлах, в яких прикладаються моменти  $M(t)$ . У блок навантажень додаються навантаження, які відповідають першим формам згинних та крутильних коливань. Форми коливань балки були зменшені у 10000 разів для більш точного статичного розрахунку. Для кожної форми виконаний статичний розрахунок конструкції і визначена відповідна реакція  $K\bar{\varphi}_{1u}, K\bar{\varphi}_{1\gamma}$ . Матриця власних форм нормована по матриці мас, тобто  $\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i = E$ , де  $E = \text{diag}(1, 1)$ . Тому після обчислення редукована матриця жорсткості отримана у вигляді діагональної матриці  $K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1\gamma}^2)$ . Виконана процедура розв'язання нелінійної задачі статики на поетапне навантаження конструкції. Отримана редукована матриця суми матриць жорсткості та геометричної жорсткості  $K^* + K_G^*$ . Редукована матриця геометричної жорсткості обчислена за формулою

$$(K^* + K_G^*) - (K^*) = K_G^*. \quad (19)$$

Для даної балки результати чисельних розрахунків порівнювались з аналітичними.

Результати, що отримані за допомогою обчислювального комплексу:

- редукована матриця жорсткості

$$K^* \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.34386 \times 10^{-3} & 2.822028 \times 10^{-7} \\ -2.92944 \times 10^{-12} & 1.5645092 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

- сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості

$$(K^* + K_G^*) \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.34386 \times 10^{-3} & 3.41605 \times 10^{-5} \\ 3.473628 \times 10^{-5} & 1.564575 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & 3.387829 \times 10^3 \\ 3.473628 \times 10^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Результати, що отримані аналітично:

- перші частоти згинних та крутильних коливань, що отримані за формулами (2):

$$\omega_{lu} = \frac{3.1415^2}{0.4^2} \left( \frac{2.06 \times 10^{11} \times 2.133 \times 10^{-10}}{7800 \times 0.00016} \right)^{\frac{1}{2}} = 365.99 \text{ c}^{-1},$$

$$\omega_{1\gamma} = \frac{3.1415}{0.014 \times 0.4} \left( \frac{0.792 \times 10^{11} \times 8.0128 \times 10^{-10}}{7800 \times 0.00016} \right)^{\frac{1}{2}} = 3961.67 \text{ c}^{-1},$$

- редукована матриця жорсткості

$$K^* = \begin{bmatrix} 133948 & 0 \\ 0 & 15694830 \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Тут  $a_{11} = a_{22} = 0$ , коефіцієнти  $a_{12}$  та  $a_{21}$  обчислюємо за формулами

$$a_{12} = \frac{l^2}{k^2 \pi^2 EJ_y} \times \omega_{lu}^2, \quad (21)$$

$$a_{12} = \frac{0.4^2}{1 \times 3.1415^2 \times 2.06 \times 10^{11} \times 2.133 \times 10^{-10}} \times 365.99^2 = 49.424,$$

$$a_{21} = \frac{1}{GJ_k} \times \omega_{1\gamma}^2, \quad (22)$$

$$a_{21} = \frac{1}{0.792 \times 10^{11} \times 8.0128 \times 10^{-10}} \times 3961.67^2 = 2.401 \times 10^5,$$

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & 49.424 \\ 2.401 \times 10^5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Розглянемо задачу

$$a_{11} \times a_{22} - (M^*)^2 a_{12} \times a_{21} = 0. \quad (23)$$

Визначимо добуток діагональних членів  $a_{11} \times a_{22}$  та  $a_{12} \times a_{21}$  редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості:

- аналітичні коефіцієнти

$$a_{11} \times a_{22} = 365.99^2 \times 3961.67^2 = 21.02 \times 10^{11},$$

$$a_{12} \times a_{21} = 49.424 \times 2.401 \times 10^5 = 11.86 \times 10^6,$$

- коефіцієнти, що отримані за допомогою обчислювального комплексу

$$a_{11} \times a_{22} = 366.57^2 \times 3962.81^2 = 21.02 \times 10^{11},$$

$$a_{12} \times a_{21} = 3388 \times 3474 = 11.77 \times 10^6.$$

Добутки коефіцієнтів приблизно однакові за значенням.

Таким чином, редуковані рівняння динамічної стійкості плоского згину високої балки набувають вигляду:

- в аналітичній постановці

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 365.99^2 [u_k - 3.689 \times 10^{-4} \gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 3961.67^2 [\gamma_k - 0.0153 u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3 \dots), \quad (24)$$

- в чисельній постановці

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 366.57^2 [u_k - 2.521 \times 10^{-5} \gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 3962.81^2 [\gamma_k - 0.221 u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (25)$$

Також будуються редуковані моделі ферм різної конфігурації, які навантаженні періодичними вертикальними силами  $P(t)$ , прикладеними до верхнього поясу ферми або парами сил  $P(t)$  в площині найбільшої жорсткості (рис. 4).

Геометричні та механічні характеристики ферми приймалися такими:

а) матеріал:  $E = 2.06 \text{ E}11 \text{ Па}$ ,  $G = 0.792 \text{ E}11 \text{ Па}$ ,  $\eta = 0.3$ ,

$\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ;

б) розкоси та стійки: 2 кутики 90x56x8:  $F = 22.36 \text{ E} - 04 \text{ м}^2$ ,

$J_z = 387.518 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ,  $J_y = 54.066 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ,  $J_k = 4.286 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ;

в) нижній пояс: 2 кутики 100x65x7  $F = 22.46 \text{ E} - 04 \text{ м}^2$ ,

$J_z = 128.575 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ,  $J_y = 227.964 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ,  $J_k = 3.368 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ;

2 кутики 125x80x10  $F = 39.4 \text{ E} - 04 \text{ м}^2$ ,  $J_z = 345.907 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ,

$J_y = 623.032 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ,  $J_k = 11.976 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ;



г) верхній пояс: 2 кутики 160x100x12  $F = 60.08E - 04 \text{ м}^2$ ,  
 $J_z = 3268.23 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ,  $J_y = 477.129 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ ,  $J_k = 26.41 \text{ E} - 08 \text{ м}^4$ .

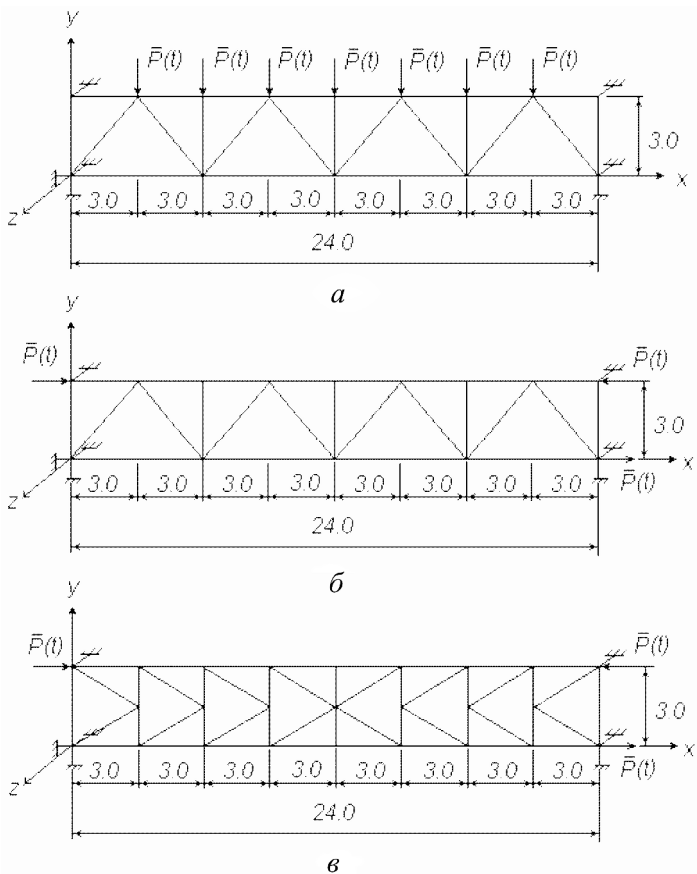


Рис. 4. Ферми

Періодичне навантаження, що діє у площині найбільшої жорсткості ферми, є параметричним навантаженням по відношенню до згинно-крутильних деформацій із площини її дії.

Навантаження приймалося у вигляді  $P(t) = P_0 \cos \theta t$ , де  $P_0 = 1 \text{ Н}$  (рис.4, а),  $P_0 = 0.333 \text{ Н}$  (рис.4, б) та  $P_0 = 333.33 \text{ Н}$  (рис. 4, в).

Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину ферми зводиться до визначення редукованих матриць жорсткості  $K^*$  та геометричної жорсткості  $K_G^*$ . Алгоритм побудови редукованих моделей ферми виконується аналогічно алгоритму, що наведений вище.

Для ферм виконаний розрахунок на вільні коливання. Отримані дві перші частоти згинних та крутильних коливань  $\omega_{1u}$ ,  $\omega_{1\gamma}$  і відповідні форми власних коливань  $\bar{\varphi}_{1u}$ ,  $\bar{\varphi}_{1\gamma}$  (рис. 5-8).

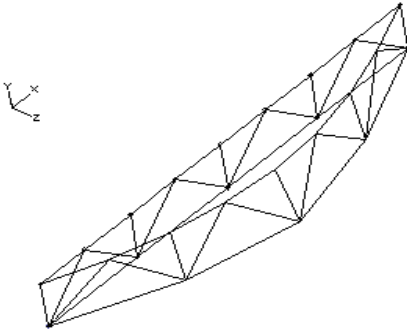


Рис. 5. Перша згинна форма коливань ферми (рис. 4, а, б)  
( $\omega_{1u} = 4.174 \text{ c}^{-1}$ )

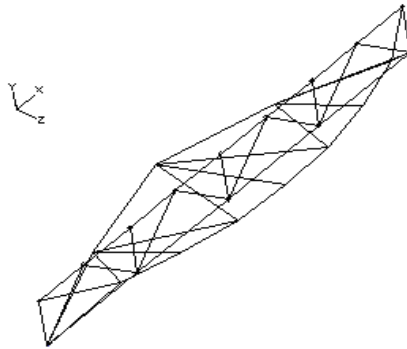


Рис. 6. Перша крутильна форма коливань ферми (рис. 4, а, б)  
( $\omega_{1\gamma} = 9.013 \text{ c}^{-1}$ )

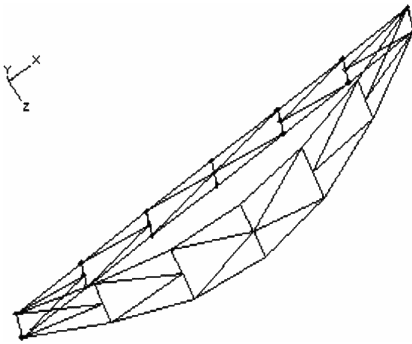


Рис. 7. Перша згинна форма коливань ферми (рис. 4, в).  
( $\omega_{1u} = 6.881 \text{ c}^{-1}$ )

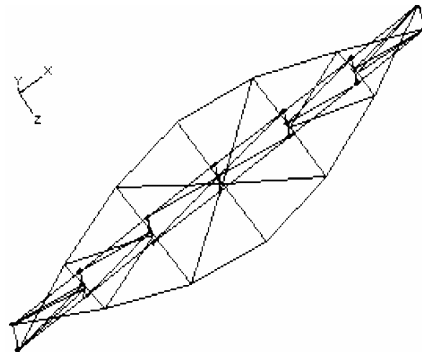


Рис. 8. Перша крутильна форма коливань ферми (рис. 4, в)  
 $\omega_{1\gamma} = 15.305 \text{ c}^{-1}$

Для більш точного статичного розрахунку форми коливань ферм були зменшені у 1000 (рис.4а,б) та 100 (рис.4в) разів. Для кожної форми виконаний статичний розрахунок конструкції і визначена відповідна реакція  $K\bar{\varphi}_{1u}, K\bar{\varphi}_{1\gamma}$ . Матриця власних форм нормована по матриці мас, тобто  $\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i = E$ , де  $E = \text{diag}(1, 1)$ . Тому після обчислення редукована матриця жорсткості отримана у вигляді діагональної матриці  $K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1\gamma}^2)$ . Виконана процедура розв'язання нелінійної задачі статики на поетапне навантаження конструкції. Отримана редукована матриця суми матриць жорсткості та геометричної жорсткості  $K^* + K_G^*$ . Редукована матриця геометричної жорсткості обчислена за формулою (6).

Для ферми (рис. 4,а), що навантажена зосередженими силами з  $P_0 = 7 \times 1\text{Н} = 7\text{Н}$ , отримані такі результати чисельних розрахунків:

- редукована матриця жорсткості

$$K^* \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.742405 \times 10^{-7} & 8.554474 \times 10^{-12} \\ -4.422486 \times 10^{-11} & 8.126646 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості

$$(K^* + K_G^*) \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.742447 \times 10^{-7} & -9.989894 \times 10^{-12} \\ -6.277403 \times 10^{-11} & 8.126534 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості отримана за формулою

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -1.854436 \times 10^{-3} \\ -1.854916 \times 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, редуковані рівняння динамічної стійкості плоского згину ферми набувають вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 4.174^2 [u_k - 1.061 \times 10^{-4} \gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 9.013^2 [\gamma_k - 0.221 \times 10^{-4} u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

Для ферми (рис. 4,б), що навантажена парою сил з моментом  $M_0 = 0.333 \times 3 = 1\text{Нм}$ , отримані такі результати чисельних розрахунків:

- редукована матриця жорсткості

$$K^* \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.742405 \times 10^{-7} & 8.554474 \times 10^{-12} \\ -4.422486 \times 10^{-11} & 8.126646 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості

$$(K^* + K_G^*) \times 10^{-8} = \begin{bmatrix} 1.742407 \times 10^{-7} & 7.563598 \times 10^{-12} \\ -4.518841 \times 10^{-11} & 8.126645 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -9.908760 \times 10^{-5} \\ -9.635504 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, редуковані рівняння динамічної стійкості плоскої форми згину ферми набувають вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 4.174^2 [u_k - 0.572 \times 10^{-5} \gamma_k] = 0, \\ \dot{\gamma}_k + 9.013^2 [\gamma_k - 0.118 \times 10^{-5} u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (27)$$

Для ферми (рис.4в), що навантажена парою сил з моментом  $M_0 = 333.33 \times 3 = 1000 \text{ Нм}$ , отримані такі результати чисельних розрахунків:

- редукована матриця жорсткості

$$K^* \times 10^{-4} = \begin{bmatrix} 4.736573 \times 10^{-3} & -2.271458 \times 10^{-6} \\ -8.445043 \times 10^{-7} & 2.343064 \times 10^{-2} \end{bmatrix},$$

- сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості

$$(K^* + K_G^*) \times 10^{-4} = \begin{bmatrix} 4.735788 \times 10^{-3} & -1.663324 \times 10^{-4} \\ -1.648769 \times 10^{-4} & 2.343152 \times 10^{-7} \end{bmatrix},$$

- редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -1.657182 \\ -1.657214 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, редуковані рівняння динамічної стійкості плоского згину ферми набувають вигляду:

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 6.881^2[u_k - 0.0349\gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 15.305^2[\gamma_k - 0.00707u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (28)$$

Запропонований чисельний підхід дозволить будувати редуковані моделі для визначення областей динамічної стійкості плоскої форми згину різних пружних систем, які можуть бути застосовані при їх дослідженні та проектуванні.

1. Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г. Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. -№74.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956 - 600с.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978—Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. 352 с., ил.
5. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. - М.: Наука, 1979 - 336 с.
6. Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В. Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2003. -№72.- с.51-59.
7. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

*Надійшла до редколегії 14.11.2005 р.*

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук,  
Голуб О.О.

## КІНЕМАТИКА СМЕРЧУ І ЙОГО ВЗАЄМОДІЯ З ПОВЕРХНЯМИ

Смерч – вихор атмосферного повітря, який при швидкісному обертанні та поступальному русі на своєму шляху завдає значних пошкоджень легким спорудам. Для прогнозування динамічного впливу повітряного потоку на конструкції і врахування його на стадії проектування споруд необхідна ефективна динамічна модель цього явища. Побудові такої моделі передуює дослідження кінематичних властивостей смерчового вихору.

Існує декілька моделей смерчу для визначення його кінематичних характеристик. Найбільш оптимальною та простою моделлю є стокова, яка використовується при вивченні стоку рідин, адже у смерчу, як показують експериментальні дослідження в газодинамічних камерах, виникають аналогічні явища закручування повітря [1].

Газодинамічна структура смерчу розглядається в ідеалізованих умовах. Смерч моделюється закрученим потоком атмосферного повітря з віссю симетрії, перпендикулярною поверхні землі. Висота потоку – від грозової хмари, у якому він зароджується, до деякої поверхні, розташованої над землею й паралельній її обрію. Дана умова дозволяє аналітично виключати вплив на динамічні процеси смерчу маси води та твердих предметів, які залучаються до обертового газового потоку при досягненні ним поверхні землі. Також у найпростішій моделі не враховуються зовнішні впливи на смерч рухомих повітряних мас, які переміщуються в різних напрямках („вітровий” вплив). На рис.1 показана газодинамічна структура смерчу, в якій можна виділити три області плин: 1 – приосьову („ядро” смерчу), 2 – центральну („каскад”), 3 – периферійну („стік”). В основу структури покладений аналіз свідчень численних очевидців цього дивного і загадкового явища природи великої руйнівної сили, а також теоретичних та експериментальних робіт із закручених потоків рідин і газів, виконаних науковцями.

При формуванні смерчу між зовнішньою атмосферою та приосьовою областю виникає перепад питомої потенційної енергії тиску. Крім того, за рахунок внутрішнього тертя, до обертового руху повітря приосьової області залучається сусіднє їй атмосферне повітря, що обумовлює утворення обертового осесиметричного потоку атмосферного повітря зі

швидкістю в радіальному напрямі до приосьової області  $V_r$ . Надходження до центральної частини смерчу мас повітря компенсується його витратою – в центральній частині утворюється обертовий потік атмосферного повітря, у якому має місце рух часток повітря догори з осьовою швидкістю  $V_z$  – у напрямку зменшення атмосферного тиску. Таким чином навколо приосьової області – частини грозової хмари – утворюється закручений осесиметричний обертовий потік атмосферного повітря. Частина потоку, яка характеризується в основному радіальною  $V_r$  та круговою  $V_\phi$  компонентами вектора швидкості, будемо відносити до периферійної області смерчу. Вона невидима, що є причиною відсутності опису її в науково-популярній літературі. Частина потоку, що характеризується в основному осьовою  $V_z$  й круговою  $V_\phi$  компонентами вектора швидкості, будемо відносити до центральної області смерчу (рис. 1). По досягненні смерчем поверхні землі в його центральну область утягуються різні предмети й вона стає видимою. У науково-популярній літературі вона називається „каскадом”.

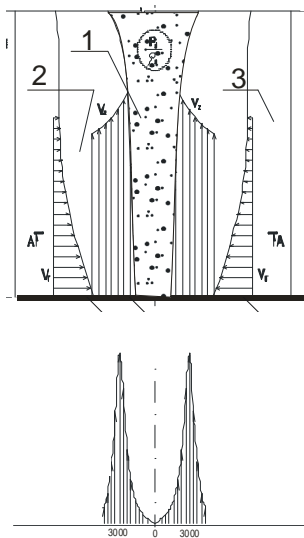


Рис. 1 Схема вертикального розрізу смерчу та епіюра тиску  $P$

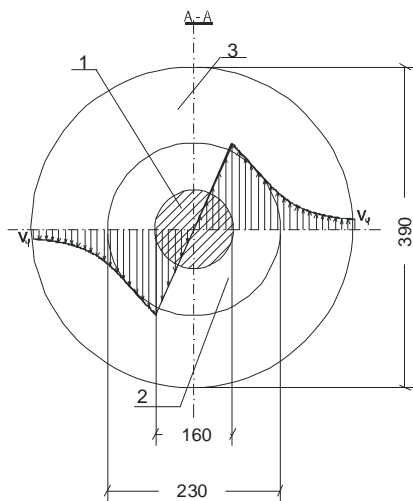


Рис. 2 Епіюра дотичної складової швидкості повітря

На рис. 2 показана епіюра швидкості повітря при обертальному русі повітря в моделі смерчу, де прийнято обертання частинок повітря приосьової області за законом твердого тіла

$$\frac{V_\varphi}{r} = \omega = \text{const} , \quad (1)$$

де:  $V_\varphi$  – кругова швидкість,  $r$  – поточний радіус,  $\omega$  – кутова швидкість. Крім того, в приосьовій області порівнюючи із зовнішнім середовищем має місце понижений тиск.

Реальні смерчі мають приблизно такі геометричні параметри: діаметр ядра – 160 м, діаметр центральної зони – 230 м, ширина периферійної зони – 80 м. Виходячи з відомих закономірностей закручених плиннів рідин і газів, можна вважати – обертний рух часток повітря, що становлять периферійну й центральну області смерчу, щодо його осі симетрії відбувається за законом сталості циркуляції швидкості [4]:

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = V_\varphi r = \text{const} . \quad (2)$$

Використовуючи циліндричну систему координат  $r, \varphi, z$  з віссю  $r = 0$  можна записати систему диференціальних рівнянь Громеки-Ламба [5] з виключенням впливу на кінематичні та динамічні параметри руху та стан в периферійній і центральній областях гравітаційної енергії при умові, що

$$g \ll \frac{V_\varphi^2}{r} . \quad (3)$$

Після приведення її до вигляду:

$$d \left| \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right| = 2 \begin{vmatrix} dr & r d\varphi & dz \\ V_r & V_\varphi & V_z \\ \omega_r & \omega_\varphi & \omega_z \end{vmatrix} . \quad (4)$$

Тут  $V_r, V_\varphi, V_z$  – проекції вектора швидкості на осі координат,  $V^2 = V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2$ ,  $P$  – тиск,  $\rho$  – щільність,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $V_\varphi^2/r$  – відцентрове прискорення.

Компоненти швидкості обертального руху:

$$\omega_r = 0,5(r^{-1} \partial V_z / \partial \varphi - \partial V_\varphi / \partial z) , \quad (5)$$

$$\omega_\varphi = 0,5(r^{-1} \partial V_z / \partial \varphi - \partial V_\varphi / \partial z) , \quad (6)$$

$$\omega_z = 0,5(r^{-1} (\partial (r V_\varphi) / \partial r - \partial V_r / \partial \varphi)) . \quad (7)$$



Для дослідження кінематики закрученого потоку в периферійній і центральній областях можна виділити елемент смерчу, ширина якого на багато менша висоти смерчу,  $\Delta h \ll H$  (рис. 3).

Для потенціальних потоків справедлива рівність  $\omega_r = \omega_\varphi = \omega_z = 0$ .

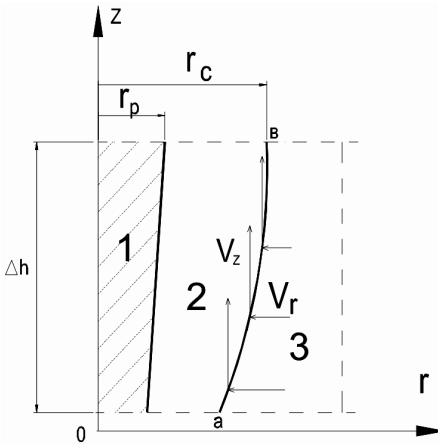


Рис. 3 Фрагмент вертикального розрізу смерчу

За умови осесиметричного потоку,  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ , маємо:

$$V_r(\varphi) = \text{const}, \quad (8)$$

$$V_\varphi(\varphi) = \text{const}, \quad (9)$$

$$V_z(\varphi) = \text{const}. \quad (10)$$

При цьому з виразів для (6) та (7) отримуємо відповідно:

$$V_\varphi(z) = \text{const}, \quad (11)$$

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = V_\varphi r = \text{const}. \quad (12)$$

Отримані закономірності закручених потоків підтверджені експериментально іншими дослідниками [3]. Вони підтверджують, що рух потоку повітря в периферійній області смерчу характеризують компоненти швидкості  $V_r$  та  $V_\varphi$ , в центральній області смерчового стовпа – компоненти швидкості  $V_z$  й  $V_\varphi$ . Отже, у периферійній області:  $V_r(z) = \text{const}$ ,  $V_z = 0$ , а у центральній області:  $V_z(r) = \text{const}$  і  $V_r = 0$ . Звідси видно, що у закручених потенційних потоках рідини й газу перехід від радіального ( $V_r$ ) руху часток до їх осевого ( $V_z$ ) руху відбувається в точках сполучення даних рухів, у яких  $V_z \perp V_r$ . Геометричним місцем точок сполучення є лінія сполучення a-b (рис. 3).

З диференціального рівняння лінії стоку  $\frac{dr}{V_r} = \frac{rd\varphi}{V_\varphi} = \frac{dz}{V_z}$  виходить, що в периферійній області лінії стоку є логарифмічними спіралями  $\frac{dr}{r} = \frac{V_r}{V_\varphi} d\varphi$ . У

центральної області лінії стоку є гвинтові лінії. Дані закручені потенційні потоки відомі в механіці рідини й газу [2]. Перше складається із двох потенційних потоків – „плоский вихор” + „стік”. Друге – „плоский вихор” + „плоско-паралельний потік”. З диференціального рівняння лінії сполучення

$dz = \frac{V_z}{V_r} dr$  можна бачити, що вона є параболою. Отже, поверхня сполучення є параболічною поверхнею обертання.

Оскільки стік рідини, яка обертається ідентично руху середовища у вихровій камері, то тиск можна приблизно описати співвідношенням:

$$p = 2\rho v^2 \left( 0,5 - \frac{1}{1 + (r^2/R_v)^2} \right) + C. \quad (13)$$

У ряді випадків необхідно оцінити руйнуючі фактори смерчу. Згідно (5), надлишковий тиск при ( $C = 0$ ) на периферії смерчу при  $r \rightarrow \infty$  буде  $p = \rho v^2$ . Цей тиск забезпечує рух середовища у вихрі, тому  $p = \Delta P$ . Звідси одержуємо оцінку для максимальної швидкості потоку в смерчі

$$v_{\max} = \sqrt{\Delta P / \rho}, \quad (14)$$

а навантаження на поверхню споруди визначатимуться по формулі

$$\sigma = p - p_0 = 2\Delta P. \quad (15)$$

Використовуючи приведені співвідношення можна побудувати епюру тиску смерчу на горизонтальну поверхню. Для смерчу з геометричними розмірами показано на рис. 1, та рис. 2 в місцях максимуму тангенціальної швидкості навантаження на поверхню становить біля 3000 Па.

1. *Смольський І.Н.* Аэродинамика и процессы в вихревых камерах. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1992. 300 с.
2. *Гупта А., Лилли Д., Сайред Н.* Закрученные потоки. – М: Мир, 1987.
3. *Мельников А.П., Косоуров К.Ф., Тихоненко А.П.* Основы аэрогидромеханики. – Л.: ИЛИИГВФ, 1940. 634 с.
4. *Политов В.С., Головин А.Г.* Некоторые вопросы газодинамики закрученных потоков // Некоторые вопросы исследований вихревого эффекта и его промышленное применение: Сборник. – Куйбышев, 1974. с. 197//200.
5. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1991. 597 с.

Поступила до редколегії 20.12.2005р.

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,  
Ворона Ю.В., канд. техн. наук,  
Щербатюк О.М.

## ПОБУДОВА ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ КОМБІНОВАНИХ СИСТЕМ

Пропонується методика дослідження реакції комбінованих пружних систем на квазістаціонарні стохастичні впливи. Комбінована система може складатись з масивних та тонкостінних елементів. Узагальненими координатами, за допомогою яких будується динамічна модель, є власні форми коливань окремих елементів та форми деформованого стану системи внаслідок одиничних переміщень точок контакту елементів. Викладений алгоритм побудови матриць мас та жорсткості комбінованої системи в базисі узагальнених координат.

В даній роботі реакція системи на стохастичний вплив розглядається як результат взаємодії двох моделей – моделі нестаціонарного стохастичного навантаження та моделі комбінованої конструкції. Серед важливих стохастичних впливів, що діють на реальні конструкції, ознаками явної нестаціонарності характеризується сейсмічний. В наш час оптимальною з точки зору адекватності та простоти справедливо вважається квазістаціонарна модель, в рамках якої прискорення точок ґрунту представляється у вигляді добутку деякої функції, що залежить тільки від часу, та функції, яка відповідає стаціонарному випадковому процесу [1]:

$$\ddot{u}_g(t) = A_0 P(t) \varphi(t), \quad (1)$$

де  $A_0$  - деяка додатна константа;  $\varphi(t)$  - центрована стаціонарна випадкова функція часу,  $P(t)$  - квазііюгинаюча, яку обирають, як правило, у вигляді обмеженої детерміністичної функції, що спочатку зростає до максимуму, а потім асимптотично прямує до нуля при збільшенні  $t$  [1].

Випадкову функцію часу можна подати у вигляді стохастичного інтегралу Фур'є:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

де спектр  $Q(\omega)$  - центрована узагальнена випадкова функція частоти  $\omega$ , що задовольняє умову стохастичної ортогональності:

$$\langle \bar{Q}(\omega)Q(\omega') \rangle = S_Q(\omega)\delta(\omega - \omega'); \quad (3)$$

$S_Q(\omega)$  - спектральна щільність процесу.

Внаслідок такого представлення навантаження задача в будь-якій постановці зводиться до багаторазового розв'язання рівняння (диференціального, алгебраїчного чи інтегрального), що містить в правій частині складову навантаження  $A_0 P(t)e^{i\omega t}$ , при різних значеннях параметра  $\omega$  з подальшим чисельним визначенням кореляційної функції реакції об'єкту:

$$\begin{aligned} K_u(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega) \bar{u}_{j\omega}(x, t_1) u_{j\omega}(x, t_2) d\omega \equiv \\ &\equiv \sum_{l=-L}^L S_\varphi(\omega_l) \bar{u}_{j\omega}(x, t_1) u_{j\omega}(x, t_2) \Delta\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

При цьому у виразі (1) квазіігнауюча  $P(t)$  до деякого моменту повинна дорівнювати нулю, після чого досить швидко зростати до максимуму, а потім повільно спадати. З огляду на такі обставини для квазіігнауючої можна обрати аналітичний вираз:

$$P(t) = \eta(t) t e^{-ct}, \quad (5)$$

де  $\eta(t)$  - одинична функція Хевісайда.

Така модель є універсальною по відношенню до об'єкту розрахунку, тобто її з однаковим успіхом можна застосовувати для моделювання навантаження плоских і просторових, тонкостінних і масивних, однорідних та комбінованих конструкцій.

Будемо розглядати комбіновані пружні системи, які складаються з оболонково-стержневих та масивних конструкцій. Складна конструкція представляється як сукупність взаємозв'язаних елементів. Деформований стан окремих елементів записується в узагальнених координатах, які визначаються через характерні переміщення. Характерні переміщення відносяться до двох класів: переміщення, які обумовлені наявними в'язями, та внутрішні переміщення елементу, що визначають зміну положень внутрішніх точок цього елементу відносно в'язів. Для оболонково-стержневих підконструкцій обидва класи переміщень будуються методом скінчених елементів, а для масивних підконструкцій - на основі апарату методу потенціалу. Внутрішні переміщення будуються на основі форм власних коливань окремих підконструкцій.

Для дослідження об'єктів неканонічної форми використовують чисельні процедури, що базуються на дискретизації розрахункової області. Результатом застосування таких процедур зазвичай є матричні рівняння відносно значень переміщень у вузлах сітки, яка покриває об'єкт:

$$[M]\{u\} + [K]\{u\} = \{G\} . \quad (6)$$

В наш час найбільш поширеним сітковим методом є метод скінченних елементів (МСЕ), який поєднує прозорість основних співвідношень та універсальність по відношенню до більшості інженерних задач [2]. З особливою опуклістю переваги МСЕ проявляються в задачах про напружений стан тонкостінних конструкцій (пластин, оболонки, стержнів та їх комбінацій). Що стосується розрахунку масивних елементів конструкцій, то в цьому випадку привабливою виглядає ідея розділити співвідношення, які пов'язують між собою невідомі на границі об'єкту, та представлення, які визначають переміщення та напруження всередині розрахункової області. Таку ідею реалізує метод потенціала, один з варіантів якого метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР) базується на наступному інтегральному представленні (формулі Соміліани [3,4])

$$0.5u_k(x) + \int_{\Gamma} u_j(y) T_{jk}^*(y, x) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_j(y) U_{jk}^*(y, x) d\Gamma_y, \quad (7)$$

де  $U_{jk}^*$  та  $T_{jk}^*$  - відповідно фундаментальна матриця задачі та її узагальнена похідна.

В свою чергу для багаторазового розв'язання задачі можна обрати три шляхи. Перший з них – кроковий за часовою змінною, коли розв'язок в даний момент часу є водночас початковою умовою для задачі в наступний момент. Такий підхід є надто трудомістким, оскільки при високих значеннях параметра  $\omega$  функція  $A_0 P(t) e^{i\omega t}$  є швидкоосцилюючою і тому виникає потреба в дуже малих кроках за часом.

Інший підхід, пов'язаний з перетворенням Фур'є задачі, приводить до диференціальних рівнянь еліптичного типу, що описують усталені коливання конструкції. Для розв'язання таких рівнянь з успіхом може бути застосований будь-який чисельний метод. Так, застосування методу потенціала в цьому випадку базується на інтегральних рівняннях з ядрами В.Д. Купрадзе [3], чисельне розв'язання яких за МГІР не становить труда. Нажаль, переваги цього підходу нівелюються необхідністю багаторазово виконувати зворотне перетворення Фур'є, що робить і цю процедуру надто трудомісткою.

Зрозуміло, що для підвищення ефективності алгоритму необхідно виділити і накопичити інформацію, яка є інваріантною відносно параметрів навантаження. Такою інваріантною інформацією є дані про частоти і форми власних коливань окремих елементів конструкції, за допомогою яких можна побудувати ефективний метод розв'язку динамічної задачі.

Будемо застосовувати метод нормальних координат, тобто подавати кожен складову переміщення наступним чином [6]

$$u_{j\omega}(x,t) = \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)}(x) y_m(\omega,t), \quad (8)$$

де  $\varphi_j^{(m)}(x)$  -  $m$ -а форма коливань об'єкту, нормована таким чином, що

$$\int_V \varphi_j^{(m)} \varphi_j^{(n)} dV = \delta_{mn} . \quad (9)$$

Тут через  $V$  позначена область, яку займає об'єкт розрахунку.

Отже, незалежно від типу вихідної системи, використовуючи (8) та (9), приходимо до системи незв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку відносно нормальних координат

$$y_m(\omega,t) + \Omega_m^2 y_m(\omega,t) = G_m(t) , \quad (10)$$

де

$$G_m(t) = -A_0 P(t) e^{i\omega t} \int_V \varphi_j^{(m)} dV .$$

Чисельне розв'язання кожного з цих рівнянь, наприклад, за методом лінійних прискорень, не викликає жодних труднощів та дозволяє отримати результати з достатньою точністю.

Таким чином, ключовим моментом пропонованого методу є визначення частот і форм власних коливань всієї конструкції, після чого легко можуть бути знайдені залежності від часу нормальних координат, а потім за (8) складові переміщення.

Будемо виходити з того, що для кожної складової підконструкції вже визначені власні частоти і форми, причому точки, які є спільними для суміжних підконструкцій, вважаються жорстко закріпленими. Надалі для простоти обмежимося двома суперелементами: пружним масивним фундаментом, що лежить на скальному ґрунті, та пружною рамною конструкцією, яка спирається на фундамент. Знаходження власних частот і форм рами з легкістю може бути здійснено за допомогою будь-якої з відомих скінченно-елементних програм [7]. Аналогічні характеристики масива

пропонується визначати на основі співвідношень методу потенціала [8,9,10]. Зазначимо, що власні форми як рами, так і масиву зазвичай визначаються в декартовій системі координат, яку будемо вважати природним базисом. В цьому базисі досить просто будується матриця мас всієї конструкції за умови, що всі інерційні характеристики є зосередженими. Поряд з природним створимо допоміжний базис, який зручно використовувати для побудови матриці жорсткості всієї моделі, а також для утворення матриці мас, якщо маси є розподіленими. Кожна узагальнена координата допоміжного базису є вектором, довжина якого дорівнює загальній кількості ступенів свободи всієї конструкції. При цьому кожна узагальнена координата відповідає або певній формі коливань одного з суперелементів (при цьому інший елемент є нерухомим), або реакції всієї системи на одиничне переміщення вздовж в'язі між суперелементами (при цьому переміщення вздовж інших в'язей дорівнюють нулю).

Структурна схема матриці переходу  $[C]$ , яка пов'язує між собою величини, що характеризують жорсткість, інерційні та демпфіруючі властивості системи в природному та допоміжному базисах для випадку двох суперелементів, наведена на рис. 1.

$F_1$ $F_2$ -- -- $F_{m_1}$	Форми коливань першого суперелемента	<b>0</b>	<b>0</b>
$F_{m_1+1}$ $F_{m_1+2}$ -- -- $F_{m_1+m_2}$	<b>0</b>	Форми коливань другого суперелемента	<b>0</b>
$F_{m_1+m_2+1}$ -- -- $F_{m_1+m_2+m_3}$	Переміщення точок конструкції внаслідок одиничного переміщення в'язей		1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 -- 0 0 0 0 1

Рис. 1. Структурна схема матриці переходу

В структурній схемі використані наступні позначення:  $F_i$  –  $i$ -та узагальнена координата в допоміжному базисі  $[F]$ ;  $m_1$ ,  $m_2$  – кількість взятих до уваги форм коливань відповідно першого та другого суперелементів;  $m_3$  – кількість в'язей між суперелементами. Зазначимо, що елементи кожного рядка матриці переходу  $[C]$  є природними координатами відповідної узагальноної координати  $F_i$ .

Згідно [5] узагальнена компонента матриці мас буде мати вигляд:

$$m_{ik} = \rho \sum_j \int_V F_j^{(m)} F_j^{(k)} dV. \quad (11)$$

Внаслідок того, що ми розділили переміщення на дві категорії - переміщення, викликані зсувом в'язів, та внутрішні переміщення (форми коливань) підконструкції – матриця мас набуває вигляду, схематичне зображення якого наведено на рисунку 2.

$$[M]^a = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -0 & M_{1,m1+m2} & - & m_{1,N} \\ 0 & 1 & -0 & M_{2,m1+m2} & - & M_{2,N} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -1 & - & - & - \\ \hline M_{m1+m2,1} & M_{m1+m2,2} & - & M_{m1+m2,m1+m2} & - & M_{m1+m2,N} \\ - & - & - & - & - & - \\ M_{N,1} & M_{N,2} & - & - & - & M_{N,N} \end{array} \right]$$

Рис. 2. Структура матриці мас

Зазначимо, що діагональна одинична підматриця (лівий верхній блок) утворюється завдяки ортогональності та нормуванню форм власних коливань для кожної підконструкції.

Окремо слід зупинитись на випадку, коли для комбінованої системи обрана модель із зосередженими масами. Внаслідок такої моделі алгоритм побудови узагальненої матриці мас в допоміжному базисі починається з утворення матриці мас  $[M]^n$  в природному базисі, де вона є діагональною. Перехід в допоміжний базис легко здійснюється за допомогою матриці переходу:

$$[M]^a = [C]^T [M]^n [C]. \quad (12)$$

Як наслідок, матриця  $[M]^a$  набуває такого самого вигляду, що й у загальному випадку (рис. 2).

Згідно [5] будь-який коефіцієнт матриці жорсткості може бути представлений наступним чином:

$$K_{ij} = \int_D \{\tau\}_i^T \{e\}_j dD, \quad (13)$$

де  $\{\tau\}$ ,  $\{e\}$  – відповідно вектори напружень і деформацій, які визначаються шістьма компонентами

Як бачимо, кожен коефіцієнт матриці жорсткості дорівнює роботі, яку здійснюють напруження, що відповідають  $i$ -му узагальненому переміщенню, на деформаціях, які відповідають  $j$ -му узагальненому



переміщенню. Зрозуміло, що цей коефіцієнт дорівнює також роботі, яку здійснює сукупність узагальнених зовнішніх сил, що відповідають  $i$ -му узагальненому переміщенню, на  $j$ -му узагальненому переміщенні.

З урахуванням вищенаведеного зауваження, матриця узагальненої жорсткості в допоміжному базисі може схематично бути представлена наступним чином

$$[K] = \begin{bmatrix} K^F & 0 \\ 0 & K^C \end{bmatrix}$$

Рис. 3. Структура матриці жорсткості

Підматриця  $[K^F]$  є діагональною матрицею. Це є наслідком ортогональності форм власних коливань елементів конструкції, а також специфіки будови узагальнених координат допоміжного базису. Порядок цієї підматриці є довільним і залежить тільки від кількості форм коливань кожного суперелемента, які беруться до уваги, що в свою чергу визначається потрібною точністю. Оскільки форми коливань нормовані відносно матриці мас, то

$$K_{i,i}^F = \Omega_i^2, \quad (14)$$

де  $\Omega_i$  – власна частота коливань суперелемента при зафіксованих в'язях.

Підматриця  $[K^C]$  є матрицею жорсткості, коефіцієнти якої дорівнюють реакціям у в'язях між підконструкціями при одиничному переміщенні вздовж однієї з них. Таким чином, порядок цієї квадратної матриці дорівнює кількості в'язей між суперелементами.

Права верхня підматриця є нульовою матрицею, оскільки робота, що її виконують реакції в'язей на внутрішніх переміщеннях, дорівнює нулю (за визначенням суперелементи здійснюють власні коливання при нерухомих в'язях). З огляду на симетрію матриці жорсткості, ліва нижня підматриця також є нульовою матрицею.

Після того, як знайдені частоти і форми коливань всієї комбінованої конструкції, подальше розв'язання задачі стає досить простим. Якщо прийняти, що квазігогинаюча має вигляд (5) та припустити, що внутрішнє тертя в матеріалі характеризується незалежним від частоти коливань параметром демпфірування  $\xi$ , то рівняння (10) набуде такого вигляду:

$$\ddot{y}_m(\omega, t) + 2\xi\Omega_m\dot{y}_m(\omega, t) + \Omega_m^2 y_m(\omega, t) = B_m t e^{i(\omega-c)t} \eta(t), \quad (15)$$

де

$$B_m = A_0 \int_V \varphi_j^{(m)} dV .$$

Зазначимо, що система (15) є системою незалежних (непов'язаних одне з одним) диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами. Розв'язок кожного з цих рівнянь може бути знайдений в замкненій формі [10].

Після визначення розв'язку системи (15) за допомогою співвідношення (8) отримуємо кореляційну функцію реакції об'єкту:

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m(\omega, t_2) \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m(\omega, t_2) S_\varphi(\omega) \right] d\omega. \quad (16)$$

В свою чергу дисперсію переміщень точок конструкції отримуємо, поклавши в (16)  $t_1 = t_2 = t_2$ . Тоді

$$\sigma_u^2(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} \bar{y}_m \cdot \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m \cdot S_\varphi(\omega) d\omega. \quad (17)$$

Таким чином ми побудували алгоритмічну основу для розрахунку нестационарних випадкових коливань комбінованих пружних систем.

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
2. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общей А.С.Сахарова и И.Альтенбаха. К.: Вища школа, 1982. – 479 с.
3. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 472 с.
4. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. *Харти В.С.* Динамический анализ конструкций, основанный на исследовании форм колебаний отдельных элементов // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 4. – том 3. – С. 130-138
6. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
7. *Басов К.А.* ANSYS в примерах и задачах. – М.: Компьютер Пресс, 2002. – 224 с.
8. *Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E.* Three-dimensional structural vibration analysis by the Dual Reciprocity BEM // Computational Mechanics, 1998. – vol. 21. – P. 372-381.
9. *Chen W., Tanaka M.* New Insights in Boundary-only and Domain-type RBF Methods // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000. – vol. 1. – P. 145-151.
10. *Баженов В.А., Дехтярюк С.С., Ворона Ю.В.* Методика чисельного дослідження нестационарних коливань пружних об'єктів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2004. – Вип. 75. – С. 3-12.

Надійшла до редколегії 16.11.2005 р.

УДК 539.3

Гоцуляк Є.О., д-р техн. наук,  
Барвінко А.Ю., канд. техн. наук,  
Костіна О.В., канд. техн. наук,  
Шах В.В., асп.

## ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ РЕЗЕРВУАРА ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ З УРАХУВАННЯМ НЕДОСКОНАЛОСТІ ФОРМИ

Розроблена методика дослідження стійкості оболонкових конструкцій з урахуванням початкових недосконалостей. Розв'язані задачі нелінійної стійкості циліндричної оболонки, недосконалості якої задані у вигляді форми втрати стійкості, а також нафтоналивного резервуара з реальними недосконалостями.

На основі використання сучасного скінченноелементного програмного комплексу розроблена методика дослідження стійкості оболонкових конструкцій з урахуванням початкових недосконалостей [5-8]. Недосконалості можуть бути задані як у вигляді форми втрати стійкості, яка отримана в результаті розв'язку лінійної задачі, так і у вигляді будь-якої функції, що характеризує технологічні зміни форми серединної поверхні оболонки. У першому випадку розв'язується лінійна задача стійкості і компоненти вектора форми втрати стійкості додаються до відповідних координат серединної поверхні оболонки. У другому випадку результати польових випробувань записуються в таблицю, яка характеризує відхилення недосконалої поверхні від ідеальної. Згідно з цією таблицею будується сплайнова поверхня, у вузлах скінченноелементної сітки визначаються реальні відхилення, які також додаються до відповідних координат ідеальної поверхні. На основі моделі оболонки з недосконалою геометрією будується триангуляційна скінченноелементна сітка і виконується нелінійний аналіз деформування оболонки, який дозволяє отримати криву станів рівноваги і визначити критичне навантаження недосконалої оболонки.

Розв'язана задача нелінійної стійкості циліндричної ребристої оболонки, недосконалості якої задані у вигляді форми втрати стійкості, при дії поверхневого тиску. Розглядається оболонка (рис. 1) радіусу  $R = 11.40$  м, висотою  $L = 11.85$  м з 8 поясами по висоті, що мають різні товщини, відповідно з низу до верху: 9,3; 7,2; 6,0; 5,2; 4,2; 4,2; 4,1; 4,0 мм. У верхній частині оболонка підкріплена 21 вертикальним ребром з кутиків  $\perp 100 \times 8$  довжиною 2,5 м, що своїми полками приварені до стінки оболонки. Скінченноелементна модель оболонки по колу має 168

поділок, вздовж твірної - 16. Модель складається з 2856 вузлів та 5439 елементів. Стінки оболонки моделюються плоскими трикутними елементами, ребра жорсткості – трьома балочними елементами.



Рис. 1. Зовнішній вигляд резервуара ємністю 5000 м<sup>3</sup>

За допомогою процедури розв'язання лінійної задачі стійкості знайдене критичне значення поверхневого тиску на оболонку  $q_{кр}=913.587$  Н/м<sup>2</sup> та перша форма втрати стійкості оболонки, що має вздовж твірної одну півхвилю (рис. 2), а по колу – 21 (рис. 3).

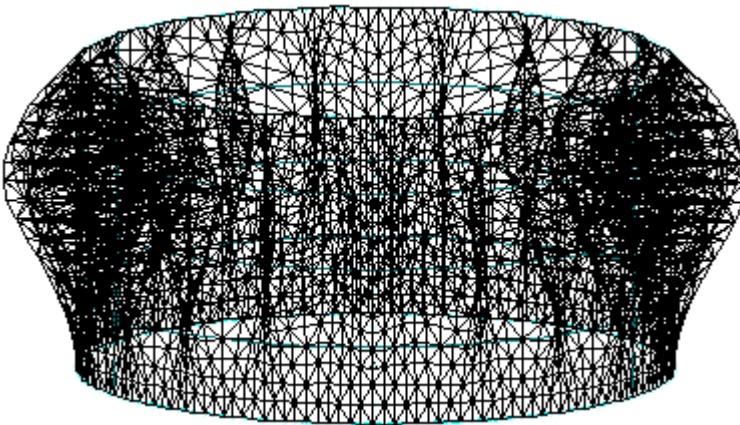


Рис. 2. Перша форма втрати стійкості оболонки (вигляд збоку)

За допомогою спеціально створеної програми була сформована скінченноелементна модель циліндричної оболонки з урахуванням початкової недосконалості у вигляді першої форми втрати стійкості. Далі розв'язувалась нелінійна задача стійкості недосконалої оболонки при дії критичного поверхневого тиску з використанням відповідної процедури обчислювального комплексу (рис. 4).

Недосконалість моделювалась формою втрати стійкості з заданим в долях товщини максимальним переміщенням. Залежність відносного критичного поверхневого тиску від різних початкових недосконалостей оболонки представлена на рис. 5.

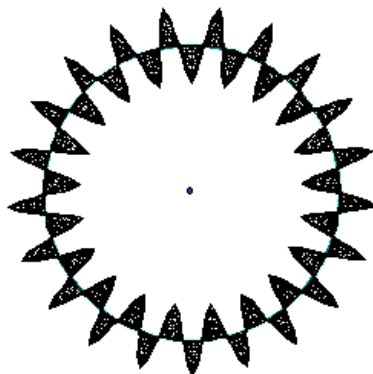


Рис. 3. Перша форма втрати стійкості оболонки (вигляд зверху)

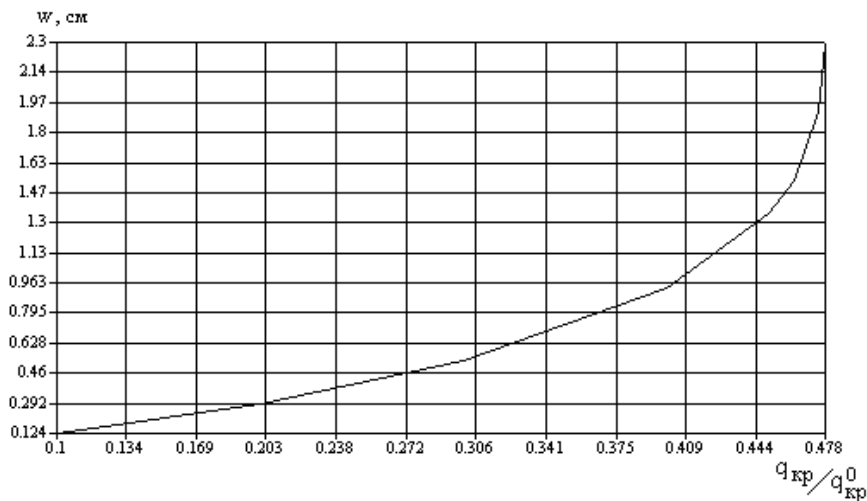


Рис. 4. Крива навантаження поверхневим тиском недосконалої оболонки

Тут  $q_{кр}^0$  та  $q_{кр}$  – критичне значення поверхневого тиску оболонки без урахування початкової недосконалості і недосконалої оболонки відповідно,  $\xi_0$  – початкова недосконалість оболонки,  $h_{\min}$  – мінімальна товщина оболонки.

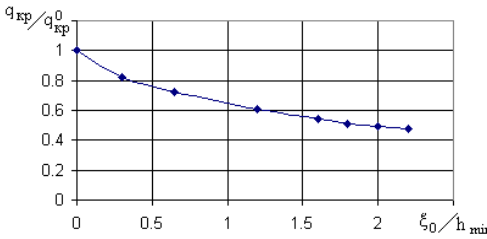


Рис. 5. Графік залежності критичного поверхневого тиску від параметру початкової недосконалості оболонки

наведеними вище, яка має реальні початкові недосконалості, що отримані з результатів теодолітної зйомки (табл. 1). Розв'язано задачу нелінійного деформування оболонки при дії зовнішнього рівномірного тиску в нелінійній постановці.

Проведені також дослідження стійкості оболонки нафтоналивного резервуара (рис. 1), стінка якого має технологічні відхилення від ідеальної циліндричної форми, що виникли в результаті виготовлення способом рулонування. Розглядається оболонка змінної товщини з параметрами,

Таблиця 1

Відхилення радіусу оболонки резервуара, мм

№ поясу	Номер твірної											
	1	2	3	4	5	6	7	8м	9	10	11	12
VIII	-102	-17	18	40	20	24	9	27	-68	-69	-52	-114
VII	-67	-12	5	44	23	18	9	35	-85	-48	-52	-101
VI	-73	-12	-8	26	20	15	9	47	-85	-86	-52	-89
V	-70	6	-7	22	23	6	0	87	-75	-69	-52	-76
IV	-60	-11	-7	8	13	12	0	73	-68	-61	-52	-57
III	-64	-22	-19	-8	-7	3	17	47	-51	-61	-59	-38
II	-47	-21	-19	-8	-7	-3	-25	29	-41	-43	-59	-32
I	-35	-19	-13	-8	-7	-6	-9	10	-31	-13	-36	-19

На рис. 6 наведена форма деформування оболонки на 20 кроці навантаження, а графік залежності переміщення характерного вузла від навантаження зовнішнім тиском зображений на рис. 7.

Аварії нафтоналивних резервуарів можуть мати серйозні наслідки щодо екологічної ситуації. Забезпечення стійкості стінок резервуарів є однією із умов їх працездатності, а саме, забезпечення безперебійного технологічного режиму роботи станцій перекачки, переробних заводів, баз збереження готових продуктів. Розроблена методика, яка реалізована в алгоритмі та сучасному програмному комплексі у вигляді надбудови, дає можливість задавати реально вимірні недосконалості серединної поверхні оболонки і на основі отриманих результатів розрахунків пропонувати заходи з підвищення стійкості резервуарів.

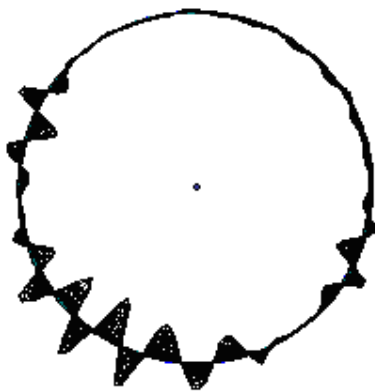


Рис. 6. Форма деформування оболонки резервуара (вигляд зверху)

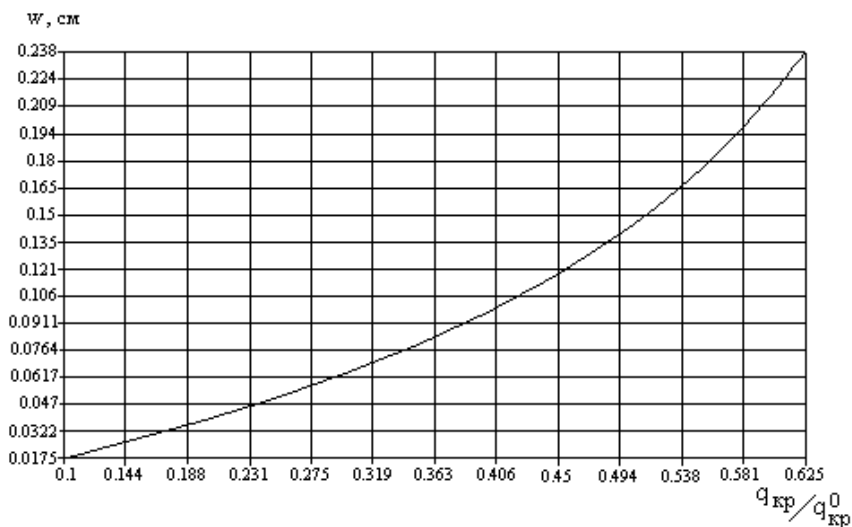


Рис. 7. Крива станів рівноваги недосконалої оболонки

1. *Арбош И.* Влияние начальных прогибов на устойчивость оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение, 1980. – С.222-259.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
3. *Доннелл Л.Г., Ван К.* Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии // Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит.-ры. – 1951. – №408, С.91 – 107.
4. *Койтер В.Т.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Сб. перев. иностр. статей. – 1960. – №5, С.99 – 110.
5. *Гоцуляк Е.А., Прусов Д.Э., Аранчий Н.Е.* Об устойчивости геометрически несовершенных оболочек общего вида // Прикладная механика: Междунар. науч. журнал. – 2000. – Т.36. – № 11. – С. 82–87.
6. *Гоцуляк Е.А., Аранчий Н.Е., Костина Е.В.* Криволинейный конечный элемент в теории тонких оболочек произвольной конфигурации // Сборник трудов Международного симпозиума по проблемам тонкостенных пространственных систем.-Грузия, Тбилиси, 4-5 июля, 2001.-С.58-64.
7. *Є.О.Гоцуляк, А.Ю.Барвінко* Определение величины допустимых отклонений геометрической формы вставок при замене совмещенного в одну линию вертикального монтажного соединения стенки на соединение с разбежкой вертикальных сварных швов по поясам // Автомат. сварка–2003, №3.– С.36-40.
8. *Є.О.Гоцуляк, А.Ю.Барвінко, В.В.Шах* Стійкість стінок вертикальних сталевих резервуарів, підкріплених ребрами жорсткості // Металлические конструкции. Взгляд в прошлое и будущее. Сборник докладов. Ч.1. Изд-во “Сталь”, 2004 – С. 444-450.

*Надійшла до редколегії 17.11.2005 р.*



УДК 539.3

Кобієв В.Г., канд. техн. наук

### МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ОБОЛОНОК ПРИ ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ З ВИСОКИМ РІВНЕМ ЕНЕРГІЇ

Розглядаються динамічні процеси високошвидкісного деформування оболонок обертання з довільним обрисом меридіану [1] під дією імпульсних навантажень з високим рівнем енергії. Відмітною рисою таких імпульсивних навантажень є високий рівень напружень в матеріалі, діючих за короткий проміжок часу (до  $3,5 \cdot 10^{-3}$  с) та визначаючих високу швидкість деформування ( $\epsilon \approx 10^3$  1/с) [1], [2]. Основні характеристики процесу навантажень подані у таблиці 1.

Таблиця 1

Тиск	Па	$1 \times 10^6$	$100 \times 10^6$
Швидкість напору	м/с	40	200
Час дії	с	$0,7 \times 10^{-3}$	$3,5 \times 10^{-3}$
Щільність енергії	Дж/м <sup>2</sup>	$28 \times 10^3$	$70 \times 10^6$

Процеси імпульсного навантаження та деформування оболонок у такий спосіб характеризуються наявністю фазових переходів від одного стану матеріалу до деякого іншого. Імпульсне навантаження великої інтенсивності приводить до появи та розвитку пластичних деформацій та супроводжується значними змінами геометрії самих оболонок. При моделюванні таких процесів, які відносяться до класу несталих, треба ураховувати ефекти як фізичної, так і геометричної нелінійності.

Постановка задачі та вихідні співвідношення. У роботі розглядаються процеси пружно-пластичного деформування оболонкових конструкції у осесиметричній постановці при умовах жорсткого закріплення країв оболонок.

Опис кінематики руху і деформування оболонок ведеться в просторових, в загальному випадку криволінійних системах координат [3].

Рух оболонки визначається по відношенню до інерціальної системи відліку, за яку приймається циліндрична система координат у тривимірному просторі [1].

Просторова метрика описується фундаментальним метричним тензором

$$\hat{G} = g_{i'j'} \vec{e}^{i'} \vec{e}^{j'}, \quad (1)$$

де  $e^{k'}$  – базисні вектори системи  $Z_{k'}$ ,  $(i, j, k)=1, 2, 3$ ;  $g_{i'j'}$  – коваріантні компоненти:

$$[g_{i'j'}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix},$$

$r$  – радіальна координата точок оболонки.

Для розгляду деформованого стану використовується супроводжуюча (лагранжева) криволінійна система координат, яка нерозривно зв'язана з частками середовища і деформується разом з ним. Перехід координат з глобального базису у місцевий реалізується за відомими формулами перетворення

$$\hat{C} = C_i^{k'} \vec{e}^i \vec{e}_{k'}, \quad (2)$$

де

$$[C_i^{k'}] = \begin{bmatrix} z_{,1}^{1'} & z_{,1}^{2'} & 0 \\ z_{,2}^{1'} & z_{,2}^{2'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad z_{,i}^{k'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial x^i}. \quad (3)$$

Метрика простору у цій системі координат характеризується метричним тензором  $\hat{g}$  з компонентами:

$$g_{\alpha\beta} = C_{\alpha}^{\gamma'} \cdot C_{\beta}^{\gamma'}; \quad g_{33} = z_{2'} \cdot z_{2'}; \quad (\alpha, \beta, \gamma) = 1, 2. \quad (4)$$

Динамічне навантаження враховується тензором швидкостей деформацій, який зв'язаний з градієнтом швидкості переміщень [4]

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \dot{u}_{\beta} + \nabla_{\beta} \dot{u}_{\alpha}); \quad \dot{\varepsilon}_{33} = \nabla_3 \dot{u}_3; \quad \dot{u}_{\gamma} = \frac{du_{\gamma}}{dt}, \quad (5)$$

$$\nabla_i \dot{u}_j = \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x^i} - \dot{u}_k \Gamma_{ij}^k; \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Основним припущенням, що приймається для опису деформацій, є положення, що за достатньо малий проміжок часу поточні деформації, які виникають у тілі, змінюються на нескінченно малу величину, а повні деформації дорівнюють сумі отриманих таким чином деформацій

$$\Delta \varepsilon_{ij} \rightarrow d\varepsilon_{ij} \text{ при } \Delta t \rightarrow dt; \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* + \Delta \varepsilon_{ij}. \quad (7)$$

Нескінченно малі прирости таких деформацій по суті представляють собою компоненти тензора нескінченно малих деформацій, що відповідають переміщенню елемента за малий проміжок часу

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} \cdot \Delta t. \quad (8)$$

Враховуючи, що вказані прирости деформацій розраховуються для даного (миттєвого) стану тіла, а поточна система координат є "вмороженою" в елементарний об'єм тіла, прийняте допущення дозволяє застосовувати поняття тензора нескінченно малих деформацій для опису великих деформацій. Останнє отримується шляхом накопичення нескінченно малих приростів деформацій [4]. Це положення визначає геометричну основу прийнятої моделі деформування.

Співвідношення (5), які записуються через швидкості переміщень в інерціальній системі, мають вигляд:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (C_{\beta}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma,\alpha} + C_{\alpha}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma,\beta}), \quad \dot{\varepsilon}_{33} = -\dot{u}_2 \cdot C_3^{3'} \cdot C_3^{3'} \Gamma_{3'3'}^2 = \dot{u}_2 z^2. \quad (9)$$

У випадку пружного ізотропного середовища компоненти тензора напружень визначаємо за законом Гука [3]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (10)$$

де  $C^{ijkl}$  - компоненти тензора пружностей, що дорівнюють

$$C^{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{kl} \right], \quad (11)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона.

Компоненти  $\sigma^{ij}$  представляються у вигляді суми двох складових

$$\sigma^{ij} = \sigma g^{ij} + S^{ij}, \quad (12)$$

де перший доданок є кульовою частиною тензора напружень, а другий – девіатор напружень.

При цьому гідростатичний тиск  $\sigma$  у точці середовища, що розглядається, визначається формулою

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma^{kj} g_{kj}. \quad (13)$$

Властивості девіатора напружень  $S^{ij}$  характеризуються рівнянням поверхні, що проходить через початок координат, утвореної головними напруженнями  $\sigma_i$ , та рівнонахилена до осей

$$S_i^i = S^{ij} g_{ij} = 0. \quad (14)$$

В пластичній області поведінка матеріалу підкоряється асоційованому закону течії з ізотропним зміцненням [5]. За вихідні положення прийняте:

1) Тіло оболонки ізотропне.

2) Повні прирости складових тензора деформацій  $d\varepsilon_{ij}$  дорівнюють сумі пружних  $d\varepsilon_{ij}^{(e)}$  та пластичних  $d\varepsilon_{ij}^{(p)}$  деформацій:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{(e)} + d\varepsilon_{ij}^{(p)}. \quad (15)$$

3) Пластична зміна об'єму відсутня

$$d\varepsilon_i^{(p)} = 0, \quad (16)$$

тобто відносна зміна об'єму і середнє напруження зв'язані поміж собою залежністю, як і при пружній деформації:

$$d\theta = d\sigma / K, \quad (17)$$

де  $K = \frac{E}{[3 - (1 - 2\nu)]}$  - об'ємний модуль пружності.

4) Зона пружних деформацій обмежена поверхнею навантаження у дев'ятивимірному просторі навантажень, рівняння якої в загальному випадку має вигляд:

$$f(\tilde{S}^{ij}, \varepsilon_{ij}^{(p)}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}, \chi) = 0, \quad (18)$$

де  $\tilde{S}^{ij}$  - компоненти девіатора активних напружень;  $\chi$  - параметр зміцнення.

5) Прирости пластичних деформацій повністю визначаються компонентами активних напружень

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = d\lambda \cdot \tilde{S}^{ij}, \quad (19)$$

де  $d\lambda$  – скалярний множник, який залежить від історії навантаження та швидкості деформування у даній точці середовища оболонки:

$$\bar{S}^{ij} = S^{ij} - a^{ij}, \quad (20)$$

де  $a^{ij}$  – компоненти тензора мікронапружень.

Наведені рівняння дозволяють описувати процеси пружно-пластичного деформування твердих тіл з траекторіями навантаження малої та середньої кривизни.

Математичні моделі пружно-пластичного середовища. Щодо вибору закону стану слід зауважити, що для матеріалу з ізотропним та трансляційним зміцненням рівняння поверхні (18), що асоціюється з енергетичною умовою течії Мізеса [5], приймає вигляд

$$f = S^{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} \sigma_{(s)} \sigma_{(s)}, \quad (21)$$

де  $\sigma_{(s)}$  - гранична інтенсивність напружень.

У деяких дослідженнях [6], [7], існують передумови щодо функціональних залежностей при урахуванні впливу швидкості деформацій, які мають наступний вигляд

$$\sigma_{(s)} = \sigma_{(s)}(\chi, \dot{\epsilon}_{ij}); \quad \chi = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\epsilon}^{ij(p)} \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}} dt. \quad (22)$$

Якщо прийняти за вихідне це положення, то можна встановити співвідношення між прирiстами компонентів тензорів напружень та деформацій з урахуванням залежностей (22).

При пластичному деформуванні зображуюча точка у просторі тензора напружень повинна залишатися на поверхні навантаження. Враховуючи залежність рівняння поверхні навантаження від величин, що входять у (22), цю умову можна записати у формі рівності

$$df = \frac{\partial f}{\partial S^{ij}} dS^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi = 0. \quad (23)$$

Для рівняння поверхні навантаження (21) умова (23) приймає вигляд:

$$S_{ij} dS^{ij} = \frac{2}{3} \sigma_{(s)} \left( \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \chi} d\chi \right). \quad (24)$$

Використовуючи закон Гука у прирістах

$$dS^{ij} = C^{ijkl} d\epsilon_{kl}^{(e)}, \quad (25)$$

виключимо  $dS^{ij}$  з (24). Для цього, виходячі із співвідношень (15), виразимо прирісти компонентів тензора пружних деформацій через прирісти повних та пластичних деформацій та підставимо у (25). Тоді

$$dS^{ij} = C^{ijkl} d\epsilon_{kl} - C^{ijkl} d\epsilon_{kl}^{(p)}. \quad (26)$$

Підставляючи (26) у (24), отримуємо такий вираз

$$S_{ij} C^{ijkl} d\epsilon_{kl} - S_{ij} C^{ijkl} d\epsilon_{kl}^{(p)} = \frac{2}{3} \sigma_{(s)} \left( \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} d\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \chi} d\chi \right). \quad (27)$$

З урахуванням (19) вираз для параметра  $\chi$  приймає вигляд:

$$d\chi = \frac{2}{3} \sigma_{(s)} d\lambda. \quad (28)$$

Перетворимо рівність (27) з урахуванням (19) та (28), тоді отримуємо:

$$S_{ij} C^{ijkl} d\epsilon_{kl} - S_{ij} S_{kl} C^{ijkl} d\lambda = \frac{2}{3} \sigma_{(s)} \left( \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{2}{3} \sigma_{(s)} \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \chi} d\lambda \right). \quad (29)$$

Звідси одержуємо співвідношення для скалярного множника:

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma} (S_{ij} C^{ijkl} d\epsilon_{kl} + R^{ij} d\epsilon_{ij}), \quad (30)$$

де

$$\gamma = S_{ij} S_{kl} C^{ijkl} + \left( \frac{2}{3} \sigma_{(s)} \right)^2 \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \chi}; \quad R^{ij} = -\frac{2}{3} \sigma_{(s)} \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}. \quad (31)$$

Зв'язок між прирістами девіатора напружень тензора повних напружень та прирістом тензора повних деформацій можна встановити із (26), передчасно замінив  $d\epsilon_{ij}^{(p)}$  його значенням через (19) та використовуючи формулу (30). У результаті знаходимо:

$$dS^{ij} = \left( C^{ijkl} - \frac{1}{\gamma} r^{ij} r^{kl} \right) d\epsilon_{kl} - \frac{1}{\gamma} r^{ij} R^{kl} d\epsilon_{kl}, \quad (32)$$

де  $r^{ij} = C^{ijkl} S_{kl}$ ,  $r^{kl} = C^{klmn} S_{mn}$ .

Рівняння (32) повністю визначає зв'язок між прирістами компонентів тензора деформацій та прирістами компонентів тензора напружень в пружно-пластичному середовищі з урахуванням історії навантаження і залежності процесу деформування від швидкості деформацій.

Перший доданок у (32) можна трактувати як приріст напружень, що був визваний прирестом повних деформацій, а другий – як приріст напружень, що був визваний змінною швидкості деформацій, тобто

$$dS^{ij} = dS_{(\varepsilon)}^{ij} + dS_{(\dot{\varepsilon})}^{ij}, \quad (33)$$

де  $dS_{(\varepsilon)}^{ij} = C^{ijkl} \cdot d\varepsilon_{kl}$ , або  $dS_{(\dot{\varepsilon})}^{ij} = \frac{1}{\gamma} r^{ij} R^{kl} d\dot{\varepsilon}_{kl}$ .

У теорії динамічного навантаження оболонок фізичні моделі течії, на жаль, поки що мало застосовуються.

Щодо аналізу кривих текучості [7]  $\sigma$ - $\varepsilon$  застосовують лише, як правило, емпіричні методи, які не враховують механізм зміцнення – знеміцнення матеріалу. Тут  $\sigma$  - миттєва границя текучості або опір деформації;  $\varepsilon$  - справжня (логарифмічна) деформація.

При динамічному навантаженні металевих оболонкових конструкцій, що розглядаються у даній роботі, вигляд кривих зміцнення при, так би мовити, в умовах “теплої” деформації [2], коли метал руйнується раніше, ніж на кривих  $\sigma$ - $\varepsilon$  досягається область стійкої течії, звично описуються рівняння виду:

$$\sigma_s = \sigma_e + k\varepsilon^n, \quad (34)$$

де  $\sigma_e$  - границя пружності;  $k$  та  $n$  - константи даного матеріалу, що залежні від умов деформацій. Тобто приймається ізотропне зміцнення із степеневим законом.

Для процесів динамічного навантаження, що розглядаються у даній роботі, довірчий інтервал цих коефіцієнтів лежить у межах [6]:

$$37,4 \leq k \leq 43,3; \quad 0,118 \leq n \leq 0,177.$$

Опис напружено-деформованого стану окремої оболонки, яка вільно деформується або взаємодіє з жорсткими перегородками [8], здійснюється на основі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона [9], що забезпечує критерій істинного руху, віднесеного до скінченного інтервалу часу. Використання цього принципу приводить до наступного варіаційного рівняння руху

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (W - K) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta A \cdot dt, \quad (35)$$

де  $\delta$  - знак варіації;  $W$  - робота деформації;  $K$  - робота інерційних сил;  $A$  - робота зовнішніх сил.

Умовами можливості інтегрування рівняння (35) є умови нерозривності в лагранжевому поданні  $\rho dV = \rho_0 dV_0$ .

За параметр процесу деформування, що варіюється, приймають переміщення окремих точок середовища оболонки. В результаті цього складники виразу (35) отримують вигляд

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma} \cdot \delta \hat{\varepsilon} dV; \\ \delta K &= \int_V \rho \cdot \ddot{z} \delta \bar{u} dV; \\ \delta A &= \int_V (\bar{F} \delta \bar{u}) dV + \int_S (\bar{P} \delta \bar{u}) dS. \end{aligned} \quad (36)$$

Початкові та граничні умови:  $z(0) = z_0$ ,  $\sigma(0) = \sigma_0$ ,  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ ,  $z(0) = z_0$ ,  $\rho(0) = \rho_0$ ,  $u(0) = 0$ , где  $z(z^1, z^2, z^3)$  – координати точок оболонки;  $u$  – вектор переміщень;  $z = dz/dt$ ;  $z = d^2z/dt^2$ ;  $\rho$  – густина середовища в тілі оболонки;  $\sigma, \varepsilon$  – тензор напружень і деформацій.

За розрахункову математичну модель процесів, що розглядаються, приймається дискретна модель процесу динамічного деформування пружно-пластичних тіл. Під цим розуміється процедура дискретизації розв'язуючих рівнянь (36) за просторовими змінними і наступне інтегрування цих рівнянь по скінченних інтервалах часу. Просторова дискретизація здійснюється шляхом використання варіаційно-різницевого методу і модифікованого методу скінченних елементів – моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [9]. Інтегрування дискретних рівнянь руху, які отримані за допомогою цих методів, здійснюється за допомогою явної різницевої схеми наскрізної лічби, сталість якої забезпечується вибором кроку в часі за умовою Куранта [10]

$$\Delta t < k[l_{\min} / v],$$

де  $l_{\min}$  – мінімальний лінійний розмір елемента,  $v$  – швидкість звуку у середовищі.

Інтеграл по часу для кожного елемента подається у вигляді суми інтегралів по  $M$  інтервалах часу  $\Delta t_n$ , що приводить до такого виразу



$$\delta T = \sum_{n=1}^M \left[ \int_{t_{n-1}}^{t_n} (W - K) dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \delta A dt \right] = 0. \quad (37)$$

Із припущення, що проміжки  $\Delta t_n$  для тіла, що розглядається є достатньо малими, інтеграли, які входять у вираз (37), замінюються їх значенням в центрах цих проміжків:

$$\delta T = \sum_{n=1}^M \delta T_n \Delta t_n, \quad (38)$$

де  $\delta T_n = \delta(W_n - K_n) - \delta A_n = 0$ .

Водночас дискретизація за об'ємом середовища оболонки за допомогою моментної схеми скінченних елементів (число скінченних елементів дорівнює  $\kappa$ ) для  $\delta W_n$  приводить до виразу

$$\delta W_n = \sum_{N=1}^{\kappa} \delta W_n^N, \quad (39)$$

$$\delta W_n^N = \int_{V_n} (\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \delta \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} + \tilde{\sigma}^{33} \delta \tilde{\epsilon}_{33}) dV_n^N, \quad (40)$$

при

$$\delta \tilde{\epsilon}_{ij} = \delta(\tilde{\epsilon}_{ij}^{(n)} + \tilde{\epsilon}_{ij}^{(n+1)} \cdot \Delta t) = \Delta t \cdot \delta \tilde{\epsilon}_{ij}^{(n+1)}, \quad (41)$$

$$\delta W_n^N = \Delta t \int_{V_n} (\tilde{\sigma}^{\alpha\beta} \delta \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} + \tilde{\sigma}^{33} \delta \tilde{\epsilon}_{33})_{(n)} dV_{(n)}^N, \quad (42)$$

де знак  $\square$  над відповідною величиною означає її фізичні компоненти.

При будові дискретної моделі досліджуваної області прийнято скінченний елемент з полілінійним розподіленням розв'язуючих функцій в його межах:

$$\dot{u}_{\alpha'} = \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} \dot{u}_{\alpha'}^{(S_1, S_2)} \prod_{\delta=1}^2 \left( S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right),$$

де  $S_{(\delta)}$  – відносні координати вершин скінченного елемента;  $x^{(\delta)}$  – місцеві координати його вершин.

Дискретизація співвідношень (36) по об'єму середовища оболонки, зокрема за допомогою МССЕ, варіаційно-різницевого методу та звичайної схеми МСЕ, з наступною підстановкою в рівняння і подальшим

його інтегруванням приводить до системи звичайних диференціальних рівнянь руху:

$$[M]\{\ddot{u}\}^{(n)} + \{R\}^{(n)} - \{Q\}^{(n)} = 0, \quad (43)$$

де  $[M]$ -матриця мас;  $\{\ddot{u}\}^{(n)}$ ;  $\{R\}^{(n)}$ ;  $\{Q\}^{(n)}$ -матриці-стовпці векторів вузлових прискорень, внутрішніх та зовнішніх сил відповідно.

Із розв'язання системи (43), який отримується за допомогою чисельних методів прямого інтегрування по явній кінцево-різницевої схемі [10] з урахуванням граничних умов по відомих  $\{R\}^{(n)}$  та  $\{Q\}^{(n)}$ , знаходять значення прискорень  $\{\ddot{u}\}^{(n)}$  на кожному інтервалі часу  $\Delta t_n$ , після чого використовуються рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} \dot{u}^{\alpha'(n+1)} &= \dot{u}^{\alpha'(n)} + \ddot{u}^{\alpha'(n)} \cdot \Delta t_{(n)}; \\ z^{\alpha'(n+1)} &= z^{\alpha'(n)} + \dot{u}^{\alpha'(n)} \cdot \Delta t_{(n)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Рекурентні співвідношення (44) дозволяють визначити значення швидкостей переміщень і координати вузлів дискретної моделі в кожний момент часу  $\Delta t_{n+1}$  процесу деформування.

Алгоритм визначення напружено-деформованого стану оболонки на поточному часовому шарі полягає у тому, що на будь-якому поточному проміжку часу  $[\Delta t_n, \Delta t_{n+1}]$  при визначенні параметрів напружено-деформованого стану оболонки виконується наступне.

Для кожного скінченного елемента дискретної моделі у базовій системі координат послідовно обчислюються:

- 1) Метричні характеристики  $J$ -го скінченного елемента в конфігурації, що відповідає моменту часу  $t_n$ , та матриця мас;
- 2) Вузлові компоненти вектора зовнішніх зусиль  $Q_{(n+1)}$ , котрі залежать від параметра інтенсивності навантаження  $q_{(n+1)}$  та метрики  $M_{(n)}$ ;
- 3) Вузлові компоненти вектора внутрішніх зусиль  $R_{(n+1)}$ , що відповідають накопиченим напруженням;
- 4) Компоненти вектора вузлових прискорень  $u_{(n)}$ .

Визначення повних напружень та пластичних деформацій виконується на кроці обчислення вузлових реакцій  $R_{(n+1)}$ . Тут для кожного скінченного елемента на відріжку часу, що належить до часового інтервалу  $[\Delta t_n, \Delta t_{n+1}]$ , обчислюються:

- 1) Тензор швидкості деформацій – 
$$\hat{\varepsilon}^{(n)} = f \left( \bar{u}^{(n)}, \hat{g}^{(n)} \right).$$

$$2) \text{ Приріст тензора напружень } - \quad \Delta \hat{\sigma}^{(n+1)} = \left( \hat{C} \cdot \hat{\epsilon} \right) \cdot \Delta t .$$

$$3) \text{ Накопичені повні напруження } - \quad \hat{\sigma}^{(n+1)*} = \hat{\sigma}^{(n)} + \Delta \hat{\sigma}^{(n+1)}$$

$$4) \text{ Кульова частина тензора повних напружень } - \quad \hat{\sigma}_V^{(n+1)} = \frac{1}{3} \hat{\sigma}^{(n+1)} \hat{g}^{(n)} .$$

$$5) \text{ Девіатор тензора напружень } - \quad \hat{S}^{(n+1)*} = \hat{\sigma}^{(n+1)*} - \hat{\sigma}_V^{(n+1)} .$$

6) У разі роботи матеріалу скінченного елемента у пластичній стадії проводиться корективка девіатора напружень у відповідності до прийнятого закону стану.

Потім на основі різниці між величинами  $S^{(n)}$  і  $S^{(n+1)}$  девіатора тензора напружень визначаються прирісти пластичних деформацій та накопичені до моменту часу  $\Delta t_n$  пластичні деформації

$$\Delta \hat{\mathcal{E}}^{(n+1)(p)} \Rightarrow \hat{S}'^{(n+1)*} - \hat{S}^{(n+1)} ; \hat{\mathcal{E}}^{(n+1)} = \hat{\mathcal{E}}^{(n)} + \Delta \hat{\mathcal{E}}^{(n+1)} .$$

Повні напруження знаходять як суму кульової частини тензора повних напружень і девіатора тензора напружень

$$\hat{\sigma}^{(n+1)} = \hat{\sigma}_V^{(n+1)} + \hat{S}^{(n+1)} .$$

Повні вузлові прискорення знаходять шляхом визначення суми внесків до прискорень  $u^{(n+1)}$  від скінчених елементів, що примикають до  $J$ -го вузла. Після цього здійснюється цикл по всіх вузлах сіткової області, у результаті якого обчислюються та аналізуються компоненти вектора швидкості переміщень  $u$  та нової координати  $Z$ . У випадках, коли процес руху обмежений будь-якою жорсткою перегородою, одержані координати та компоненти швидкості переміщень коректуються з урахуванням граничних умов, що задаються. Після визначення вказаних вище характеристик здійснюється перерахунок геометричних параметрів дискретної моделі та перехід до нової метрики, чим досягається урахування геометричної нелінійності задачі.

Представлена методика моделювання нестационарних процесів пружно-пластичного геометрично нелінійного деформування оболонок при імпульсних навантаженнях з високим рівнем енергії реалізована у вигляді комплексу структурованих обчислювальних блоків, написаних на алгоритмічній мові Фортран.

Для ілюстрації методики подається приклад формоутворення фланцю із трубчастої деталі у вигляді циліндричної оболонки при дії зовнішнього навантаження з тиском 80 МПа на часовому інтервалі 100 мкс. Вихідні дані та розрахункова схема наведені на рис. 1, сіткова область оболонки за методом МССЕ представлена на рис. 2, процес формоутворення поданий на рис. 3. Розподіл головних напружень у тілі оболонки на проміжній стадії її деформування показаний на рис. 4.

## Формообразующие операции МИОМ

### Отбортовка фланца на конце трубчатой заготовки

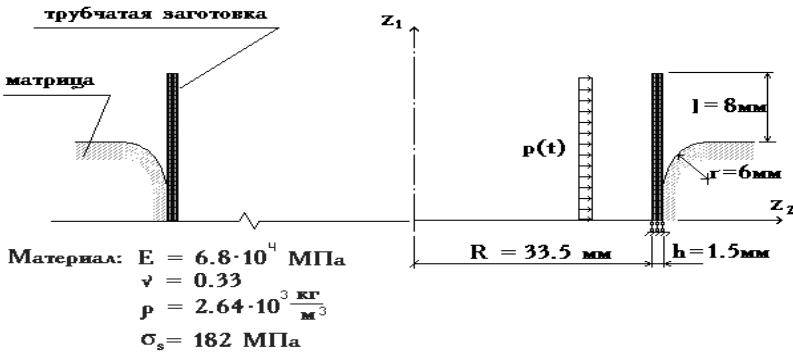


Рис. 1. Вихідні дані та розрахункова схема

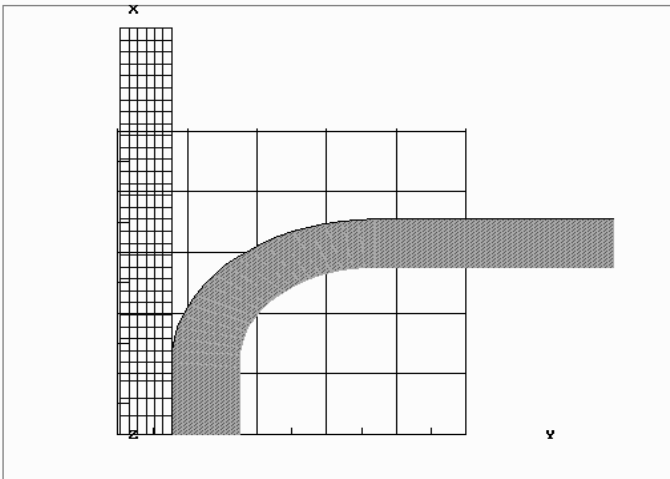


Рис. 2. Сіткова область оболонки за методом МССЕ

### Динамика процесса формообразования фланца

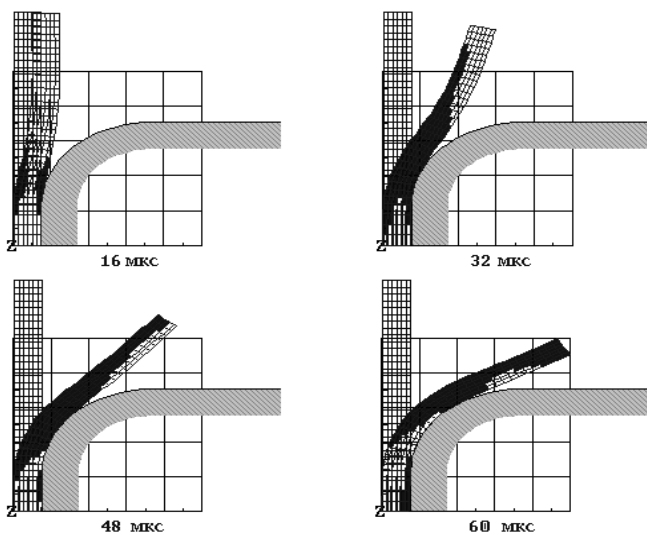


Рис. 3. Динаміка процесу пружно-пластичного деформування

### Изолинии напряжений в расчетном сечении фланца

$t = 60 \text{ мкс}$

Главные максимальные напряжения ( МПа )

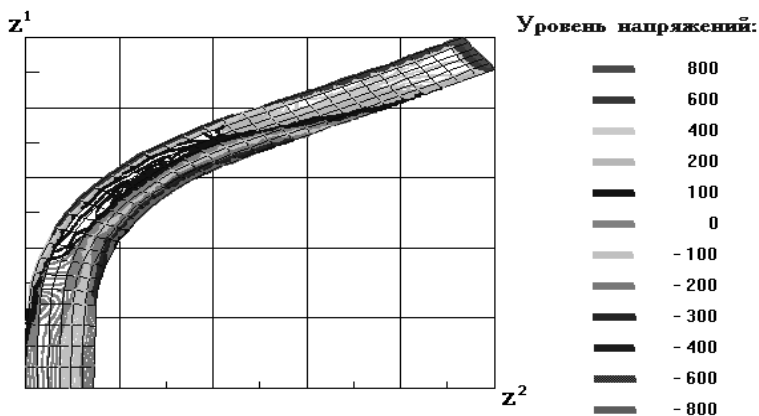


Рис. 4. Розподіл головних напружень в тілі оболонки

1. *Кобієв В.Г., Костира Н.О.* Нестационарные пружно-пластичные деформирования оболочек при импульсных воздействиях с высокой плотностью энергии. Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, вип. 69, 2001. - С. 86-95.
2. Упруго-пластическое деформирование и разрушение материалов при импульсном нагружении /Степанов Г.В.; отв. ред. Лебедев А.А.; АН УССР. Ин-т проблем прочности. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с.
3. *Блах В.И.* Теория упругости. - Харьков, ХГУ, 1964 г.
4. *Работнов Ю.Н.* Маханика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 772 с.
5. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. 2-е изд. перераб. и допол. –М.: Наука, 1969. – 420 с.
6. Скоростное деформирование элементов конструкций./ Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В. и др. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1989. - С. 51-63, 90-92, 98-103, 130-143, 165-172.
7. *Филиппов А.П.* Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – Киев: Наук. думка, 1978 г. – 183 с.
8. *Кислоцкий В.Н., Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в контактных задачах динамики упругопластичных тел. – В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивельник, 1983, вып. 42. – С. 11-17.
9. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. –М.: Мир, 1965. – 408 с.
10. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.

*Надійшла до редколегії 18.11.2005 р.*

## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Солодей І.І., Шевиченко Ю.В.</i> Розрахункові співвідношення нмсе просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами . . .	3
<i>Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.</i> Вплив режимів термосилового навантаження на стійкість і позакритичну поведінку оболонок сталого та ступінчато-змінної товщини . . . . .	30
<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.</i> Особливості визначення $J$ -інтеграла для дискретних моделей метода скінченних елементів . . . . .	43
<i>Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Борисенко В.Г., Лук'янченко О.О.</i> Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем . . . . .	65
<i>Іванченко Г.М., Голуб О.О.</i> Кінематика смерчу і його взаємодія з поверхнями . . . . .	78
<i>Баженов В.А., Ворона Ю.В., Щербатюк О.М.</i> Побудова дискретних динамічних моделей комбінованих систем . . . . .	83
<i>Гоцуляк Є.О., Барвінко А.Ю., Шах В.В., Костіна О.В.</i> Дослідження стійкості циліндричної оболонки резервуара з урахуванням недосконалостей форми . . . . .	91
<i>Кобієв В.Г.</i> Моделювання нестационарних процесів пружнопластичного геометрично нелінійного деформування оболонок при імпульсних навантаженнях з високим рівнем енергії . . . . .	97

Наукове видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

Випуск 77

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку .05. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.  
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. . Умовн. Фарбо-відб.  
Облік.-вид. арк. . Тираж 100. Зам. № .

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

---

Фірма “ВІПОЛ”

м. Київ, вул. Волинська, 60. 03151