

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

---

Випуск 79

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2006

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*Ю.В. Верюжський*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*Є.О. Гоцуляк*, д-р техн. наук  
*О.І. Гуляр*, д-р техн. наук

*Є.С. Дехтярюк*, д-р техн. наук  
*Г.В. Ісаханов*, д-р техн. наук  
*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*М.О. Шульга*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 20 грудня 2006 року, протокол № 13.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 79 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2006. – 120 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,  
м. Київ, 03037,  
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

© КНУБА, 2006

УДК 539.375

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук**Гуляр О.І.**, д-р техн. наук**Піскунов С.О.**, канд. техн. наук**Сахаров О.С.**, д-р техн. наук**Шкриль О.О.**

## **МЕТОД РЕАКЦІЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ $J$ -ІНТЕГРАЛА В ПРОСТОРОВИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ**

Виконаний аналіз вірогідності та інваріантності результатів обчислення  $J$ -інтеграла Черепанова-Райса в дискретних моделях методу скінченних елементів із використанням величин вузлових реакцій і переміщень при пружнопластичному деформуванні.

**Вступ.** При наявності пружнопластичних деформацій для оцінки тріщиностійкості просторових тіл найбільшого використання здобув  $J$ -інтеграл Черепанова-Райса. Значна частина таких конструкцій являють собою призматичні тіла, ефективним засобом розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла для яких є напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ) [2]. В роботі [3] на основі НМСЕ проведено реалізацію методики обчислення  $J$ -інтеграла на основі величин напружень та градієнтів переміщень (метод напружень) для призматичних тіл з поперечними та поздовжніми тріщинами. Аналіз результатів чисельних експериментів виявив, що при пружному деформуванні для певного кола задач (пластина із центральною тріщиною, нескінченне тіло з еліптичною тріщиною, напівнескінченне тіло з напівеліптичною тріщиною) метод напружень дозволяє отримувати вірогідні результати, що задовольняють ознакам фундаментальній властивості інваріантності  $J$ -інтеграла – незалежності від контура інтегрування і дорівнювання нулю по замкненому контуру. Розв'язання задачі про згин призматичного тіла із боковою тріщиною виявило тенденцію порушення цих ознак інваріантності – зростання похибок обчислення як власне величини  $J$ -інтеграла, так і його значень по замкненому контуру при збільшенні контуру інтегрування. Спроба досягти необхідної точності результатів потребувала значного згущення скінченно-елементної сітки і накладання обмежень на розмір контура інтегрування. В зв'язку з цим була проведена розробка і реалізація нової методики обчислення  $J$ -інтеграла, що ґрунтується на використанні для обчислення  $J$ -інтеграла величин, що безпосередньо входять в рівняння методу скінченних елементів – вузлових реакцій та переміщень (метод реакцій). Величини  $J$ -інтеграла отримані при пружному деформуванні за методом реакцій виявились інваріантними до

контура інтегрування, при цьому відповідна точність результатів була досягнута без додаткового згущення скінченноелементної сітки.

Метою даної роботи є подальше порівняння результатів обчислення  $J$ -інтеграла на основі методу напружень і методу реакцій в задачах механіки руйнування при пружнопластичному деформуванні.

**1. Метод реакцій.** В кожній точці фронту тріщини величина  $J$ -інтеграла обчислюється за довільною поверхнею  $F$ , що обрана в околі зазначеної точки, охоплює фронт тріщини і має характерний розмір  $\Delta$  вздовж фронту тріщини [1] (рис.1,а):

$$J_k = \frac{1}{\Delta} \int_F \left( W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) dF, \quad (1)$$

де  $W$  – величина повної енергії деформування, в загальному випадку

$$W = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \hat{\sigma} \cdot d\hat{\varepsilon}, \quad \hat{\sigma} \text{ – тензор напружень, } \hat{\varepsilon} \text{ – тензор деформацій, при}$$

пружному деформуванні  $W = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij}$ ;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні інтегрування  $F$ ;  $n_j$  – компоненти зовнішньої нормалі до контуру інтегрування;  $u_i$  – переміщення.

При скінченно-елементному обчисленні  $J$ -інтеграла використовується по компонентне подання формули (1) [3], а для виконання інтегрування обирається контур  $S$ , який лежить в площині, перпендикулярній до фронту тріщини. В подальшому, так само як і в [3], для обчислення величини  $J$ -інтеграла розглядались прямокутні контури, кожна із сторін якого розташована на однаковій відстані, визначеній кількістю  $SE$   $N_e$ , від вершини тріщини (рис.1,б).

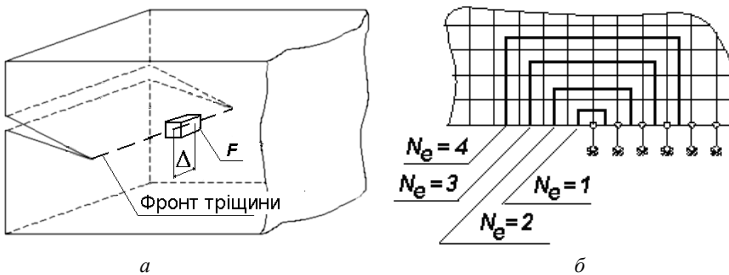


Рис.1. Поверхня інтегрування(а) та контури інтегрування на дискретній моделі (б)

Згідно запропонованого і реалізованого авторами в [3] метода реакцій обчислення  $J$ -інтеграла за контуром довільної конфігурації (рис.2,а) здійснюється за формулою:

$$J = J(u, R) = \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j^T \{R\}_j - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j \{R\}_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{N_1} \left( R^{k'} \frac{(\{u_k\}_3 + \{u_k\}_4) - (\{u_k\}_1 + \{u_k\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left( R^{k'} \frac{\{u_k\}_4 - \{u_k\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{N_3} \left( R^{k'} \frac{(\{u_k\}_3 + \{u_k\}_4) - (\{u_k\}_1 + \{u_k\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_4} \left( R^{k'} \frac{\{u_k\}_4 - \{u_k\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j,$$

де  $\{u\}_j$ ,  $\{R\}_j$  – вектори переміщень і вузлових реакцій кожного СЕ, через які проходить контур:  $\{u\}_j = \{\{u_k\}_i\}$ ,  $\{R\}_j = \{\{R_k\}_i\}$ ;  $k=1, 2, 3$  відповідає напрямкам  $z^1, z^2, z^3$ , а  $i=1, 2, 3, 4$  відповідає нумерації вузлів в межах СЕ (рис. 2, б).

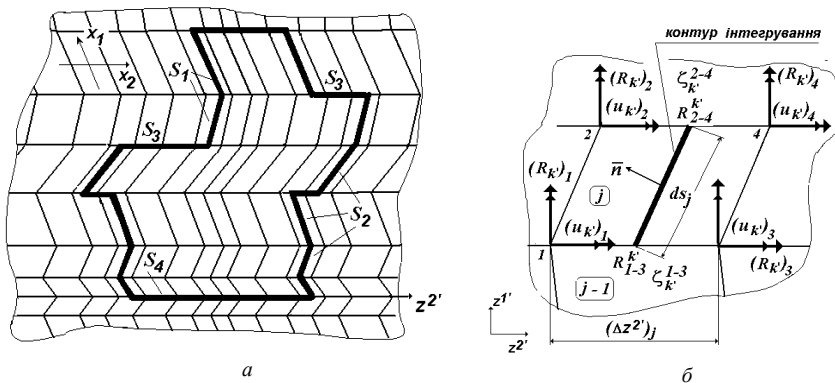


Рис.2. Довільний контур для обчислення  $J$ -інтеграла (а), та його фрагмент в межах СЕ (б)

Співставлення результатів, отриманих на основі методів реакцій та напружень проводилось на задачі про пружнопластичне деформування призматичного тіла з боковою тріщиною в просторовій постановці. Відповідна розрахункова схема та дискретна модель показані на рис.3, пружнопластичні характеристики матеріалу відповідають сталі 12Х2МФА [4].

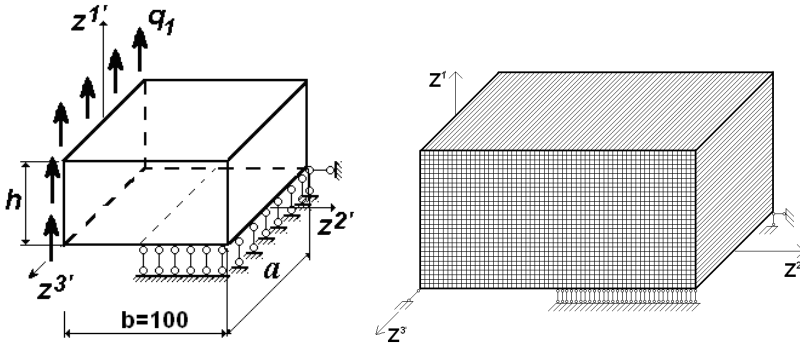


Рис.3. Розрахункова схема (а) та дискретна модель (б) призматичного тіла з боковим надрізом

Для запобігання локальних пластичних деформацій в точках прикладення зосередженого навантаження  $q$ , проведена його заміна статично еквівалентним розподіленням по поверхні  $z^2 = 0$  навантаженням  $q_1 = P/ha$ . Виконані дослідження збіжності засвідчили, що в даному випадку для забезпечення вірогідності визначення  $J$ -інтеграла за методом реакції достатнім є застосування скінченноелементної сітки розмірністю  $30 \times 60$  SE.

Аналіз результатів обчислення  $J$ -інтеграла, отриманих із застосуванням зазначених розрахункової схеми і дискретної моделі, проведений на всіх стадіях пружнопластичного деформування. Зокрема, розподілення  $J$ -інтеграла по товщині призматичного тіла, отримані при пружному деформуванні, при  $q_1 = 2800$  кг/см, наведені на рис.4. Як видно, збільшення розмірності дискретної моделі і відповідне зменшення характерних розмірів SE і абсолютних розмірів контуру інтегрування не тільки не дозволяє досягти дорівнювання нулю величини  $J$ -інтеграла по замкнутому контуру, а і не дає змоги позбутися його залежності від розмірів контуру при використанні методу напружень. Зокрема, похибка обчислення  $J$ -інтеграла за контуром при  $N_e = 8$  (контур від вершини тріщини проходить через 8 елементів вздовж  $z^2$ ) на сітці  $30 \times 60$  SE, геометричні розміри якого збігаються із розмірами контура при  $N_e = 3$  на сітці  $10 \times 20$  SE, є такою ж самою. Відмінності результатів, отриманих на різних контурах, не зменшуються із згущенням сітки і набувають максимальних значень на торцевих поверхнях тіла ( $z^3 = \pm 25$  мм).

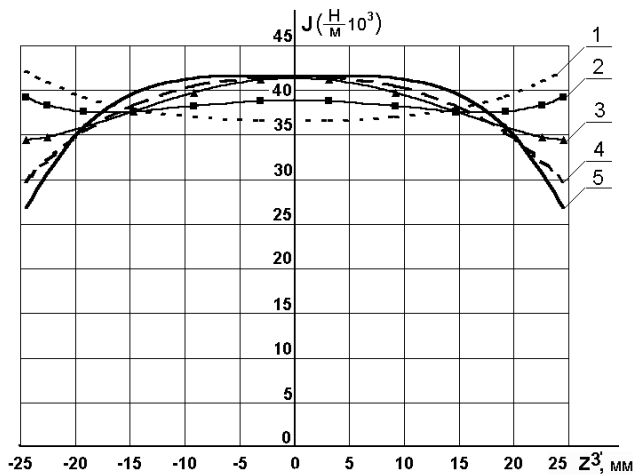


Рис.4. Розподілення  $J$ -інтеграла вздовж фронту тріщини, дискретна модель 30x60 SE:

1– 4 – обчислення  $J$ -інтеграла із використанням методу напружень: 1–  $N_e = 20$ ; 2–  $N_e = 12$ ; 3–  $N_e = 9$ ; 4–  $N_e = 3$ ;  
5– метод реакцій.

Аналіз отриманих розподілень величин  $J$ -інтеграла за напрямком  $z^3$  при пружнопластичному деформуванні засвідчив, що із зростанням навантаження і відповідним зростанням рівня деформацій пластичності відмінності величин  $J$ -інтеграла, обчислених за методом напружень і реакцій збільшуються. Зокрема, при величині навантаження  $q=5000$  кг/см і рівні деформацій пластичності біля 6 %, похибка обчислення величини  $J$ -інтеграла є в 2,5 разі більшою ніж при пружному деформуванні (рис.5), причому ця різниця збільшується із збільшенням контуру. Таким чином, результати, отримані при пружному деформуванні не дозволяють провести прогнозування рівня похибки величин  $J$ -інтеграла при наявності деформацій пластичності, що підкреслює необхідність використання методу реакцій, який дозволяє отримувати інваріантні величини  $J$ -інтеграла.

Змінення величин  $J$ -інтеграла, обчислених із використанням різних контурів за методом напружень проілюстроване залежностями похибок  $J$ -інтеграла на торцях тіла відносно еталонного розв'язку (результати методу реакцій) від розмірів контура і рівня деформацій пластичності. Як видно, при збільшенні розмірів контура спостерігається зростання похибки на всіх стадіях пластичного деформування (рис.6).

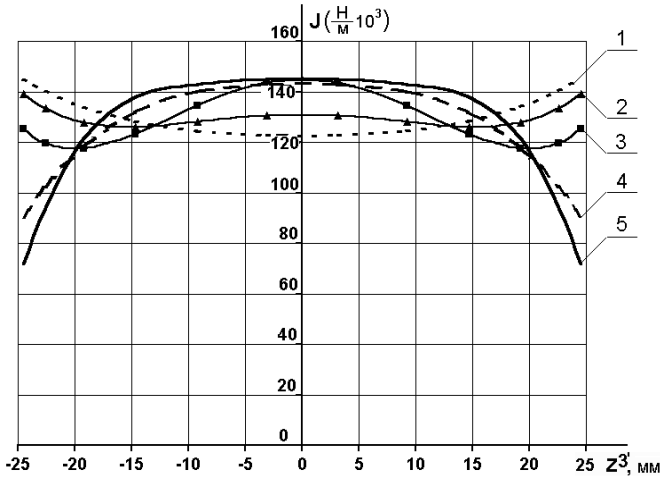


Рис.5. Розподілення  $J$ -інтеграла вздовж фронту тріщини при пружнопластичному деформуванні: 1–4 – метод напружень:

1 –  $N_e = 20$ ; 2 –  $N_e = 12$ ; 3 –  $N_e = 9$ ; 4 –  $N_e = 3$ ;

5 – метод реакцій

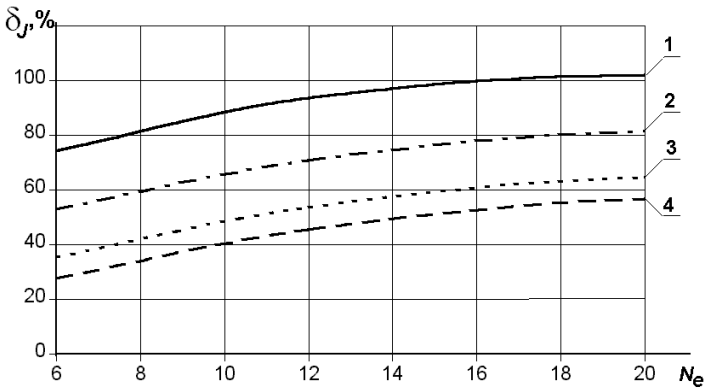


Рис.6. Залежність похибки обчислення  $J$ -інтеграла при різних рівнях навантажень від розмірів контура інтегрування:

1 –  $q = 5000$ ; 2 –  $q = 4000$ ; 3 –  $q = 3000$ ; 4 –  $q = 2800$  кг/см.

Похибка обчислення  $J$ -інтеграла зростає також і при збільшенні рівня максимальних пластичних деформацій  $\varepsilon_p$  (рис.7). Необхідно зазначити, що отриманий в даній задачі рівень деформації пластичності (біля 6%) є



досить невеликим, але навіть в цьому випадку величина похибки перевищує 100%.

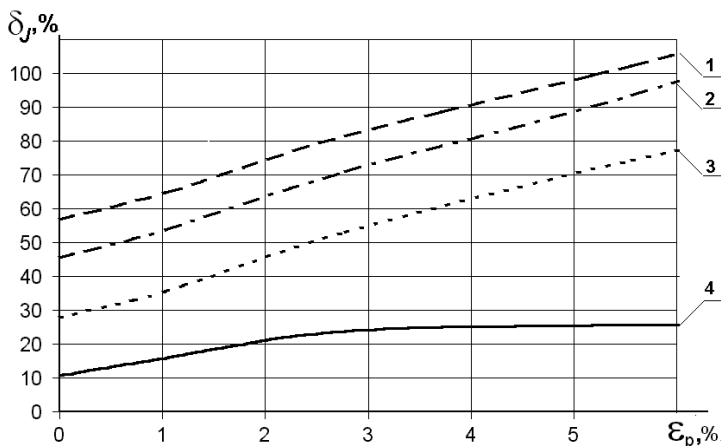


Рис.7. Залежність похибки обчислення  $J$ -інтеграла від рівня деформацій пластичності для різних контурів інтегрування:

1 -  $N_e = 20$ ; 2 -  $N_e = 12$ ; 3 -  $N_e = 9$ ; 4 -  $N_e = 3$ .

Для більш детального аналізу виконання умов незалежності величин  $J$ -інтеграла від шляху інтегрування, досліджувалось дорівнювання нулю інтеграла, обчисленого із використанням величин напружень і градієнтів переміщень по замкнутому контуру. Конфігурація обраного замкнутого контура забезпечує виключення з розгляду привершинної зони пластичності. Внутрішні межі контуру обрані на відстані трьох елементів від вершини тріщини, а зовнішні межі, що визначають в даному випадку величину  $N_e$ , змінювались від 6 до 20 елементів. Такий контур при  $N_e=6$ , побудований на фрагменті дискретної моделі, показаний на рис.8.

Похибка визначення  $J$ -інтеграла по замкнутому контуру, обчислена відносно величини  $J$ -інтеграла отриманого методом реакцій, також зростає як при збільшенні контуру інтегрування (рис.8), так і при збільшенні рівня деформацій пластичності (рис.9).

Таким чином, в умовах пружнопластичного деформування похибка визначення  $J$ -інтеграла за методом напружень при змінні контура інтегрування є суттєво більшою порівняно з пружною постановкою задачі і зростає при збільшенні деформацій пластичності. У випадку нелінійного деформування зменшення контура інтегрування є обмеженим [1], що може призвести до неможливості отримання коректних результатів.

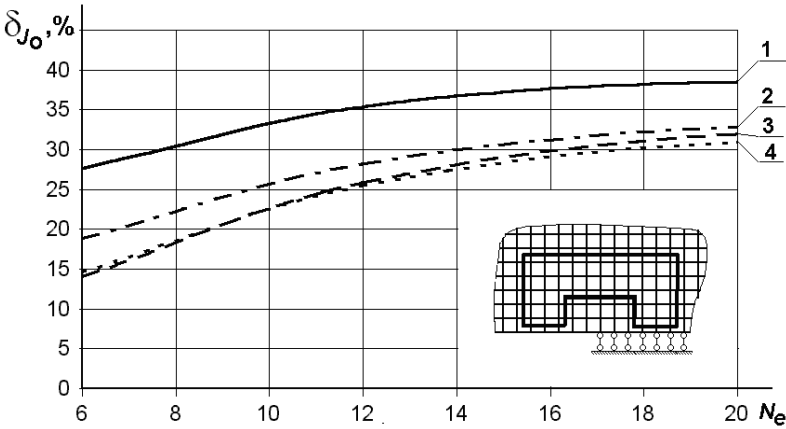


Рис.8. Залежність похибки обчислення  $J$ -інтеграла по замкнутому контуру при різних рівнях навантажень від розмірів контура інтегрування:  
1 –  $q = 5000$ ; 2 –  $q = 4000$ ; 3 –  $q = 3000$ ; 4 –  $q = 2800$  кг/см.

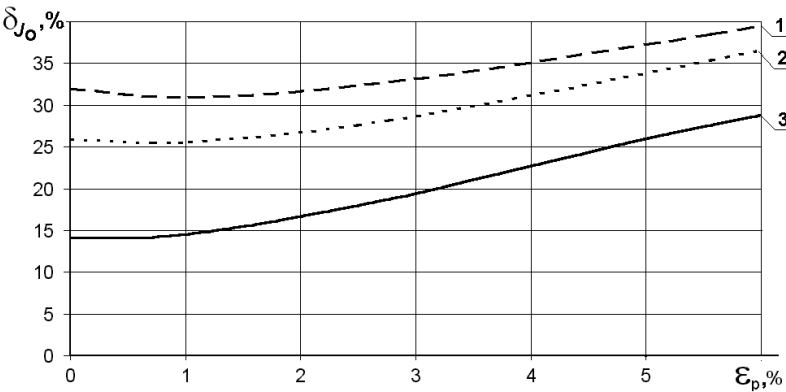


Рис. 9. Залежність похибки обчислення  $J$ -інтеграла по замкнутому контуру від рівня деформацій пластичності для різних контурів інтегрування:  
1 –  $N_e = 20$ ; 2 –  $N_e = 12$ ; 3 –  $N_e = 9$ .

Із використанням методу реакцій було проведено розв'язання задачі про деформування компактного зразка (рис.10), виготовленого зі сталі 12Х2МФА, для якої  $E = 2.05 \times 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ . Закон пластичного деформування має наступний вигляд [4]:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_m} = 1 + 0.645(\bar{\varepsilon}_p)^{0.388}, \quad \sigma_m = 637 \text{ МПа}.$$

Традиційно розрахунок компактного зразка здійснюється в умовах плоскої деформації. Дискретні моделі, розроблені з урахуванням симетрії для половини зразка містять 288 вузлів (рис.11,а) і 625 вузлів (рис.11,б). Значення  $J$ -інтеграла, обчислені на цих СЕ сітках за умов пружного деформування компактного зразка відрізняються в межах 1%, що свідчить про досягнення збіжності за сітковими моделями.

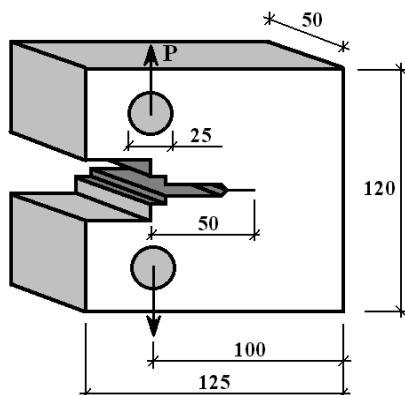


Рис.10. Компактний зразок

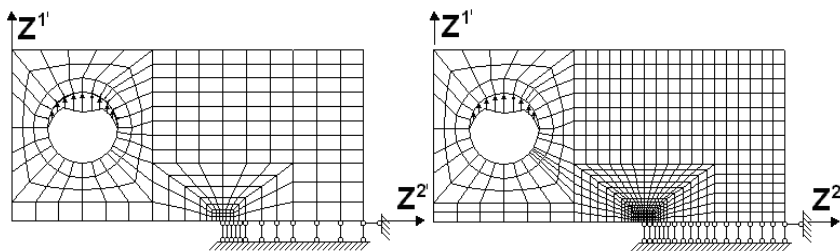


Рис. 11. Дискретні моделі компактного зразка

Отримані значення  $J$ -інтеграла при різних величинах навантажень збігаються з наведеними в [4], що підтверджує вірогідність застосованого алгоритму визначення  $J$ -інтеграла в задачах пластичності (рис.12).

Зважаючи на те, що товщина компактного зразка обмежена, його розрахунок потрібно виконувати в просторовій постановці. Дискретна модель НМСЕ, що побудована із використанням неоднорідних призматичних СЕ, наведена на рис.13. Розмірність СЕ моделі в поперечному перерізі визначена на основі дослідження збіжності в двовимірній постановці.

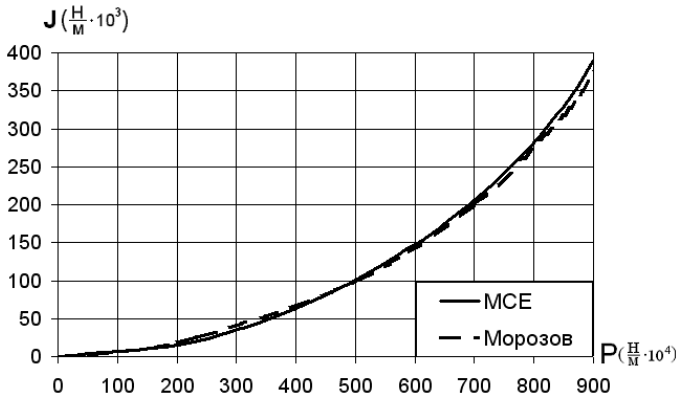
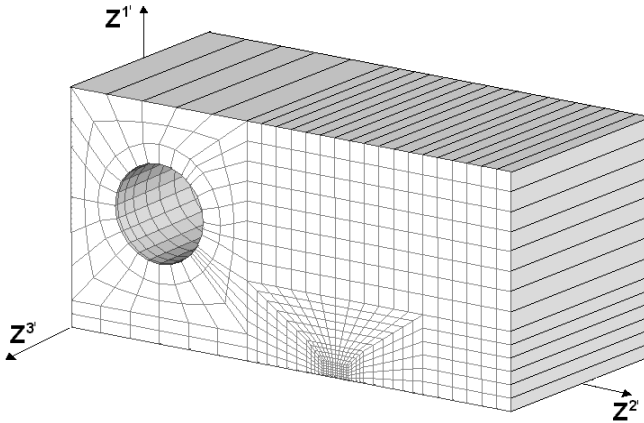
Рис. 12. Результати визначення  $J$ -інтеграла в двовимірній постановці

Рис. 13. Дискретна модель НМСЕ для компактного зразка

Збіжність розв'язку НМСЕ при пружному деформуванні досягається при використанні в розкладі переміщень 12 гармонік. Проведене порівняння результатів обчислення параметрів НДС, отриманих в двовимірній і тривимірній постановках засвідчило, що НДС є суттєво просторовим. Для ілюстрації на рис.14, 15 наведено розподілення напружень  $\sigma^{33'}$  та переміщень  $U_{1'}$  в СЕ, який розташований над вершиною тріщини.

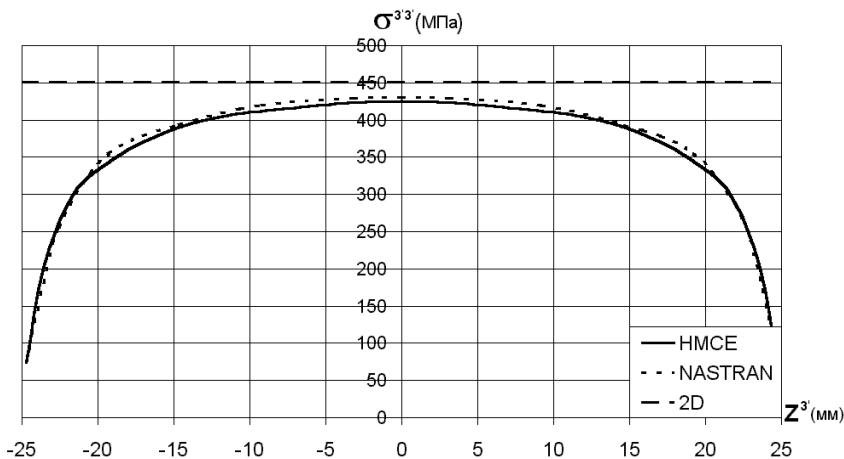


Рис.14. Розподіл напружень по товщині зразка

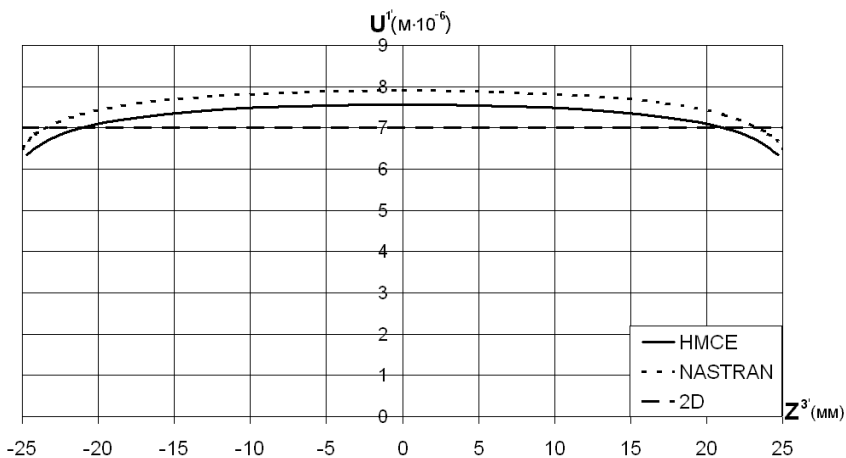


Рис.15. Розподіл переміщень по товщині зразка

Як можна побачити, напруження всередині (при  $z^3 = 0$ ) і на бічних поверхнях зразка (при  $z^3 = \pm 25$  мм) значно відрізняються між собою, при цьому напруження отримані в двовимірній постановці є більшими. Вірогідність усіх результатів підтверджена шляхом розв'язання задачі із використанням програмного комплексу NASTRAN. Слід зазначити, що

отримання розв'язку задачі на цьому комплексі потребує на порядок більших обчислювальних витрат в порівнянні з НМСЕ.

Відповідно до просторового характеру НДС розподіл  $J$ -інтеграла по товщині зразка є також змінним. Аналіз збіжності величин  $J$ -інтеграла, отриманих на основі методу реакцій засвідчив, що збіжність розподілу  $J$ -інтеграла по товщині зразка досягається при використанні 12 гармонік (рис.16).

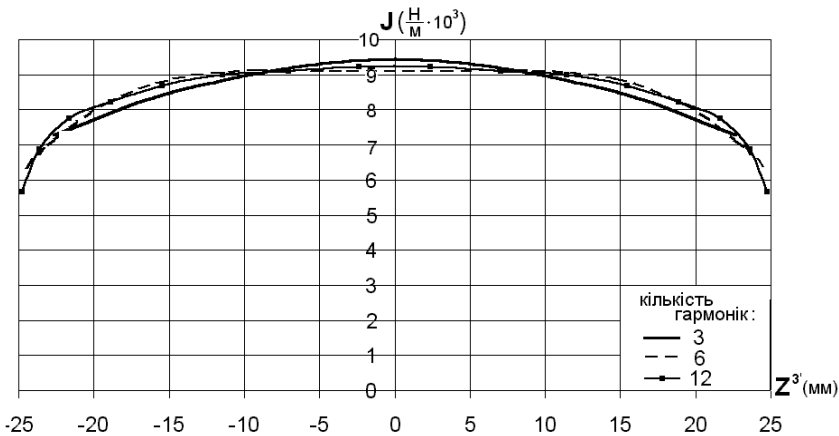


Рис.16. Збіжність  $J$ -інтеграла за кількістю гармонік

При пружному деформуванні значення  $J$ -інтеграла всередині зразка є більшим, а на бічних поверхнях – меншим, ніж отримане в двовимірній постановці (рис.17). Розподіл величин  $J$ -інтеграла, що також були обчислені за величинами вузлових реакцій та перемішень, отриманих в програмному комплексі NASTRAN, співпадає з результатами отриманими із застосуванням НМСЕ.

Подальший розв'язок задачі при пружнопластичному деформуванні засвідчив, що із збільшенням рівня пластичних деформацій різниця між значеннями  $J$ -інтеграла на бічних поверхнях та в центрі збільшується (рис.18).

Різниця між значеннями  $J$ -інтеграла, обчисленими в двовимірній і просторовій постановках також збільшується із зростанням рівня деформацій пластичності (рис.19): цей висновок ілюстрований отриманими розподіленнями абсолютних величин  $J$ -інтеграла по товщині компактного зразка при різних рівнях навантаження (рис.19), а також залежністю різниці між величинами  $J$ -інтеграла в просторовій і

двовимірній постановках, віднесених до відповідних значень  $J$ -інтеграла в просторовій постановці (рис.20).

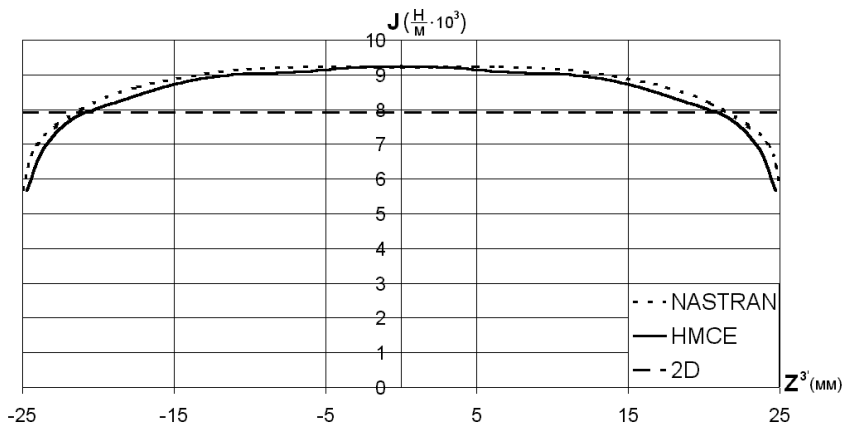


Рис.17. Розподіл величин  $J$ -інтеграла, обчислених за реакціями та переміщеннями, визначеними на різних СЕ базах

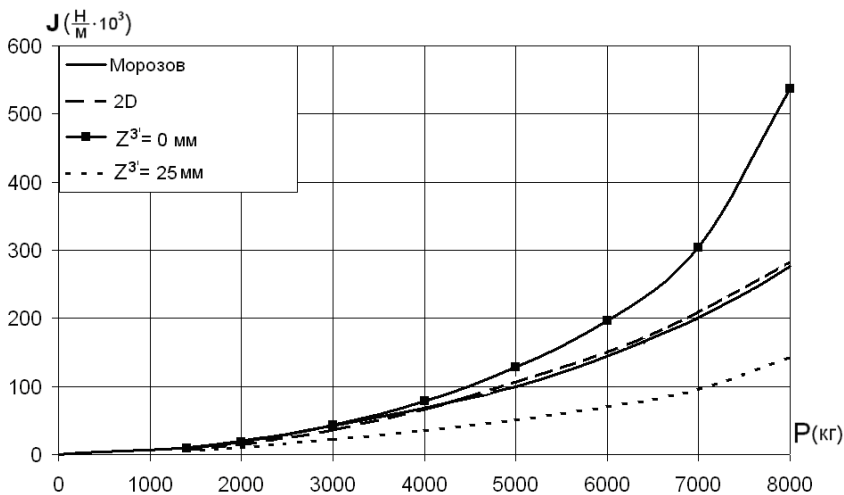


Рис.18. Залежність величин  $J$ -інтеграла від прикладеного навантаження

Найбільші відмінності (більш ніж в два рази) спостерігаються в серединній частині зразка. Необхідно відзначити, що величини  $J$ -інтеграла, отримані в просторовій постановці є більшими, ніж в двовимірній постановці, що вказує на недопустимість використання

результатів розрахунку в двовимірній постановці для оцінки несучої здатності просторових об'єктів.

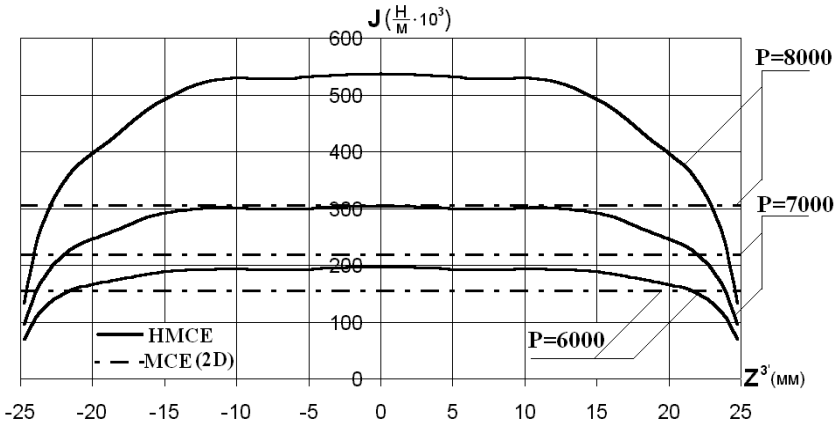


Рис.19. Розподіл  $J$ -інтеграла вздовж фронту тріщини при зростанні рівня навантаження

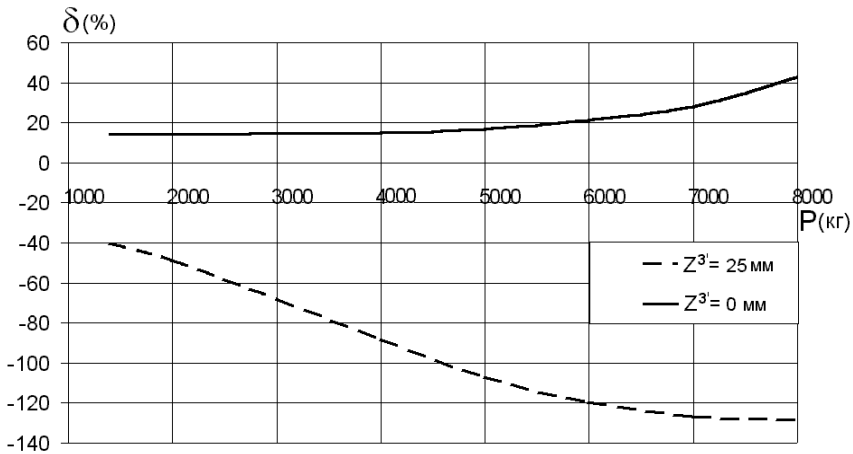


Рис.20. Відносна різниця результатів обчислення значень  $J$ -інтеграла в двовимірній і просторовій постановках

Таким чином, обчислення  $J$ -інтеграла за методом напружень може виявитись непридатним в просторових нелінійних задачах механіки руйнування. В той же час, метод реакцій забезпечує збереження



фундаментальної властивості інваріантності  $J$ -інтеграла як при пружному так і при пружнопластичному деформуванні.

Отримані результати розв'язання задачі про деформування компактного зразка виявили значні відмінності величин  $J$ -інтеграла, отриманих в просторовій і традиційно використовуваної для цієї задачі двовимірній постановках. Відмінності результатів двовимірного та тривимірного розрахунків можуть сягати більше 120%. Таким чином, для вірогідного визначення параметрів нелінійної механіки руйнування необхідним є дослідження деформування таких задач в тривимірній постановці.

1. *Атдури С.* Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Особливості визначення  $J$ -інтеграла для дискретних моделей метода скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2005.- Вип. 77.- С. 43-64.
4. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 256 с.

*Надійшла до редколегії 21.11.2006 р.*

УДК 539.3

Гуляр О.І., д-р техн. наук,  
Пискунов С.О., канд. техн. наук,  
Максим'юк Ю.В.  
Сизевич Б.І.

## **РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ МССЕ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ УШКОДЖЕНОСТІ МАТЕРІАЛУ**

Отримані розрахункові співвідношення МССЕ для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружності з урахуванням ушкодженості матеріалу для вісесиметричних тіл обертання. Використання чотирикутних скінченних елементів довільної форми з урахуванням змінності компонент метричного тензора забезпечує високу ефективність підходу.

**Вступ.** Значна кількість відповідальних елементів конструкцій, що являють собою вісесиметричні тіла обертання, в процесі виготовлення і експлуатації терплять великих формозмінень, які нерідко проходять при підвищених температурах, що призводить до зміни фізико-механічних характеристик матеріалу і розвитку різного виду деформацій. Зважаючи на можливість одночасного виникнення деформацій пластичності і повзучості, обумовлених як наявністю силового навантаження, так і наявністю зовнішніх температурних впливів, визначення несучої здатності цих об'єктів потребує розв'язання задач термов'язкопружності з урахуванням ушкодженості матеріалу. Вірогідність розв'язання таких задач механіки деформівного твердого тіла суттєво залежить від адекватності використовуваних фізичних співвідношень розглядуваним процесам деформування матеріалу, зокрема урахуванню наявності великих деформацій та ушкодженості матеріалу.

Метою даної роботи є отримання розрахункових співвідношень (МССЕ) геометрично нелінійних задач термов'язкопружності для вісесиметричних тіл обертання з урахуванням ушкодженості матеріалу.

**1. Вихідні співвідношення геометрично нелінійної задачі.** При дослідженні геометрично нелінійних задач для вісесиметричних тіл обертання доцільно використовувати дві системи координат: базисну і місцеву (Лагранжеву).

Розглянемо вісесиметричне тіло (рис.1.1) в базисній круговій циліндричній системі координат  $z^{i'}$ , вісь  $z^{1'}$  яка співпадає з віссю обертання, а  $z^{2'}$  спрямована вздовж радіуса. Базисна система координат є незмінною і призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови. В свою чергу місцева система координат  $x^i$  призначена для отримання розрахункових співвідношень в границях СЕ.

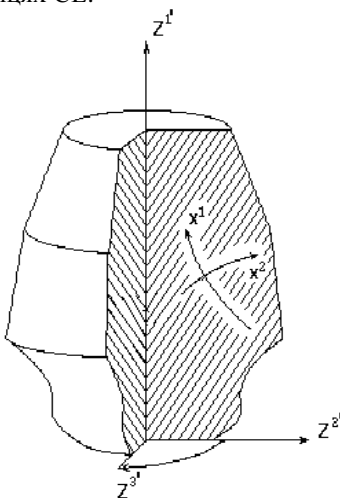


Рис.1.1. Вісесиметричне тіло в базисній круговій циліндричній системі координат

### 1.1.Визначення деформацій в геометрично нелінійних задачах.

Опис напружено-деформованого стану об'єктів в процесах, що супроводжуються великими подовженнями і поворотами, як правило, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій  $x^i$  і актуальній  $X^i$ . Повні деформації в актуальній конфігурації визначаються співвідношенням

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(F^{ij} - G^{ij}). \quad (1)$$

де  $F^{ij}$  – компоненти міри деформації Фінгера, що дорівнюють відповідним компонентам метричного тензору в початковій відрахунковій конфігурації  $g_o^{ij}$ ,  $F^{ij} = g_o^{ij}$ ,  $G^{ij}$  – компоненти метричного тензору в актуальній конфігурації.

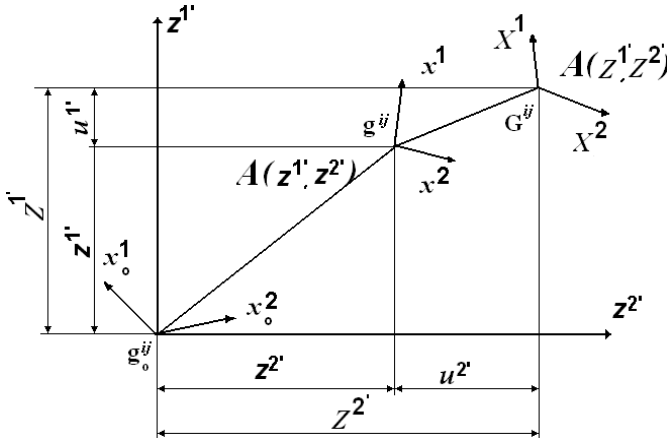


Рис 1.2.

Введемо проміжну перемінну відрахункову конфігурацію  $x^i$  (рис.1.2), компоненти метричного тензора якої позначимо через  $g^{ij}$ . Перемінну відрахункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора був малою величиною порівняно з  $G^{ij}$ :

$$\Delta G^{ij} = (G^{ij} - g^{ij}) \ll G^{ij}. \quad (2)$$

Використовуючи перемінну відрахункову конфігурацію представимо деформацію в вигляді суми компонент, обумовлених переходом від початкової відрахункової до перемінної і від перемінної до актуальної конфігурації:

$$\varepsilon_o^{ij} = \varepsilon^{ij} + \Delta \varepsilon^{ij},$$

де

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (g_o^{ij} - g^{ij}),$$

$$\Delta \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (g^{ij} - G^{ij}) = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij}. \quad (3)$$

Коваріантні компоненти  $\Delta G^{ij}$  визначаються з умови:

$$G^{ik} G_{kj} = \delta_j^i. \quad (4)$$

Представимо компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації в відповідності з (2):

$$(g^{ik} + \Delta G^{ik})(g_{kj} + \Delta G_{kj}) - \delta_j^i = 0. \quad (5)$$

Нехтуючи приростом малих величин  $\Delta G^{ik} \Delta G_{kj}$ , одержуємо :

$$\Delta G^{ik} g_{kj} + \Delta G_{kj} g^{ik} = 0,$$

звідси

$$\Delta G^{ik} = -\Delta G_{kj} g^{ik} g^{jl}. \quad (6)$$

Коваріантні компоненти приросту деформацій в актуальній конфігурації відносно перемінної відрахункової дорівнюють:

$$\Delta \varepsilon_{kl} = \Delta \varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta \varepsilon^{ij} g_{ik} g_{jl} = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij} g_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2} \Delta G_{kl}. \quad (7)$$

На (рис.1.2) показано положення деякої точки А, що належать відрахунковій і актуальній конфігурації.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла для актуальної і проміжної відрахункової конфігурації відомі компоненти тензору перетворення  $z_{,\beta}^{\alpha'}$ , і  $Z_{,\beta}^{\alpha'}$  відповідно, що обумовлюють зв'язок між місцевою та базисною системою координат:

$$z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}, \quad Z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X_{\beta}}. \quad (8)$$

Подамо компоненти метричного тензору  $g_{mn}$  в місцевій системі координат через коефіцієнти перетворення і компоненти метричного тензора базисної декартової системи координат:

$$g_{ij} = z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0, \quad g_{3'3'} = (z^{2'})^2$$

$$g_{\alpha\beta} = z_{\alpha}^{v'} z_{\beta}^{v'}, \quad g_{33} = (z^{2'})^2$$

Аналогічно,

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{v'} Z_{\beta}^{v'}, \quad G_{33} = (Z^{2'})^2. \quad (9)$$

Нове положення точки А в системі  $z^{i'}$  визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = z^{\alpha'} + u^{\alpha'}.$$

Диференціюючи по  $x^i$ , визначимо компоненти тензора перетворення:

$$Z_{,\beta}^{\alpha'} = z_{,\beta}^{\alpha'} + u_{,\beta}^{\alpha'}.$$

Представимо коваріантні компоненти метричного тензора  $G_{\alpha\beta}$  в актуальній конфігурації через компоненти тензора перетворень:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= (z_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'}) (z_{,\beta}^{v'} + u_{,\beta}^{v'}) = \\ &= z_{,\alpha}^{v'} z_{,\beta}^{v'} + z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} \\ G_{33} &= (z^{2'} + u^{2'})^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Перепишемо (10) в вигляді :

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta}, & G_{33} &= g_{33} + \Delta G_{33}, \\ \text{де } \Delta G_{\alpha\beta} &= z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'}, & \Delta G_{33} &= \left( 2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи (11) в (7), опускаємо в подальшому знак  $\Delta$  запишемо геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних і контраваріантних компонент приросту деформації в проміжній відрахованій конфігурації:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'}), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left( 2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Згідно з прийнятим припущенням, співвідношення (12) справедливе при малих  $\Delta\varepsilon_{kl}$  і великих переміщеннях.

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} u_{,\alpha}^{v'}), \\ \hat{\varepsilon}_{33} &= z^{2'} u^{2'}. \end{aligned} \quad (13)$$

**1.2. Основні співвідношення термов'язкопружнопластичності.** При наявності незворотних деформацій пластичності і повзучості зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається на основі співвідношень теорії пластичного течіння і теорії спрочнення [5]. В цьому випадку прирощення повних деформацій  $d\varepsilon_{ij}$  може бути подане сумою прирощень пружних деформацій  $d\varepsilon_{ij}^e$ , прирощень деформацій пластичності  $d\varepsilon_{ij}^p$  і прирощень деформацій повзучості  $d\varepsilon_{ij}^c$ , та

температурних складових деформацій  $d\varepsilon_{ij}^t$  тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^t. \quad (14)$$

Передбачається, що пружні деформації є малими. Повні напруження  $\sigma^{ij}$  визначаються через компоненти тензора пружних деформацій відповідно до узагальненого закону Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (15)$$

$$C^{ijkl} = \left[ \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right],$$

де коефіцієнти Ляме  $\lambda$  та  $\mu$  визначаються через коефіцієнт Пуассона  $\nu = \nu(z^i, T)$  і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E = E(z^i, T)$ , що залежать від температури  $T$ :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (16)$$

Температурні деформації малі і визначаються формулою:

$$\varepsilon_{ij}^t = \beta^t T g^{ij}, \quad (17)$$

де  $\beta^t = \beta^t(T)$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Прирощення пластичних деформацій визначається згідно з асоційованим законом [ 5 ]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}, \quad (18)$$

де  $f_p$  – функція текучості ;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} / 3$  – компоненти девіатора напружень;  $\sigma_0 = \sigma_{ii}$ :

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\vartheta_p, T)]^2 = 0, \quad (19)$$

де  $\tau_s(\vartheta_p, T)$  – межа текучості при чистому зсуві;  $\vartheta_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ij p}}$  – параметр зміцнення Одквіста.

Прирошення деформацій повзучості визначаються на основі теорії зміцнення:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij}, \quad (20)$$

де  $f_c$  – функція, що визначає поверхню повзучості:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi^i)]^2 = 0; \quad (21)$$

$\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi^i)$  – межа текучості при чистому зсуві;  $\vartheta_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon^{ij c}$  –

параметр зміцнення Одквіста;  $\xi^i = \frac{d\varepsilon_c^i}{dt} = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\xi_{ij}^{zc} d\xi_c^{ij}$  – інтенсивність

швидкостей деформацій повзучості.

Тензор деформацій повзучості величина індиферентна. Швидкості деформацій повзучості повинні задовольняти цій властивості. Для цього від тензору деформацій повзучості необхідно визначити об'єктивну похідну за часом. Для отримання індиферентної величини швидкості деформацій повзучості обчислюються об'єктивна похідна Олдройда:

$$\mathcal{E}_c^i = \frac{\partial \varepsilon_c^{ij}}{\partial t} \bar{R}_i \bar{R}_j = \dot{\varepsilon}_c^{ij} \bar{R}_i \bar{R}_j,$$

де  $\bar{R}_i, \bar{R}_j$  – векторні бази в актуальній конфігурації.

Параметри  $\tau_c, \tau_s, \nu, E$  в рівняннях стану (19) і (21) визначаються із дослідів на простий розтяг або стиск циліндричних зразків при різній температурі нагріву деталей і швидкості деформації. Діаграми спрочнення, побудовані в координатах  $\sigma^i$  (інтенсивність напруження)- $\vartheta_c$  (параметр Одквіста, який для одномірного деформування співпадає з інтенсивністю логарифмічної міри деформації  $\varepsilon_i$ ), які показано в роботі [11], достатньо повно характеризують поведінку матеріалу за границями пружності в процесах, що є близькими для простих і супроводжуються великими пластичними деформаціями.

Виконуючи диференціювання виразу (15), встановлюємо взаємозв'язок між природженнями напружень і природженнями пружних деформацій:



$$d\sigma^{ij} = \left[ \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] d\varepsilon_{kl}^e + \\ + \frac{\partial}{\partial T} \left[ \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] dT \varepsilon_{kl}^e, \quad (22)$$

де, згідно з формулою (14),

$$d\varepsilon_{kl}^e = d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^c - \left( d\varepsilon_{kl}^i - \frac{\partial \beta_T}{\partial T} dT \cdot T \cdot g_{kl} \right).$$

Для визначення прирощень деформацій пластичності скористуємося співвідношеннями (18). Оскільки при пластичному деформуванні зображувальна точка залишається на поверхні текучості, то виконується рівність:

$$d f_p = \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} ds^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial f_p}{\partial T} dT. \quad (23)$$

Часткові похідні в рівнянні (23) по  $s^{ij}$ ,  $\vartheta_p$ ,  $T$  дорівнюють:

$$\frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = s^{ij}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p}, \quad \frac{\partial f_p}{\partial T} = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial T}. \quad (24)$$

Перепишемо співвідношення (23) з урахуванням (24). Оскільки  $s_{ij} ds^{ij} = s_{ij} d\sigma^{ij}$ , отримаємо:

$$s_{ij} d\sigma^{ij} - 2\tau_s \left( \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right) = 0. \quad (25)$$

Враховуючи співвідношення (22) і (23), рівняння (25) можна записати у вигляді:

$$s_{ij} \left[ \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^c) + \\ + s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[ \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] dT \cdot \varepsilon_{kl}^e = 2\tau_s \left( \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} d \vartheta_p + \frac{\partial \tau_s}{\partial T} dT \right).$$

Подамо прирощення пластичних деформацій відповідно до формули (24). Після відповідних перетворень запишемо вираз  $\lambda_p$  для ізотропного матеріалу:

$$\lambda_p = \frac{2G s^{kl} d\varepsilon_{kl} + \beta_p dT}{\gamma^p}, \quad (26)$$

де 
$$\gamma_p = 2G s^{kl} s^{kl} + \frac{4}{3}\sqrt{3} \tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} = 4\tau_s^2 \left( G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right),$$

$$\beta_p = s_{ij} \frac{\partial}{\partial T} \left[ \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e.$$

Аналогічно визначимо величину скалярного модуля  $\lambda_c$ , що дозволяє обчислити прирощення деформацій повзучості:

$$\lambda_c = \frac{2G s^{kl} d\varepsilon_{kl} + \beta_c dT - \rho_c}{\gamma^c}, \quad (27)$$

де 
$$\beta_c = s_{ij} \frac{\partial \left[ \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right]}{\partial T} \varepsilon_{kl}^e, \quad \gamma_c = 4\sigma_{ic}^2 \left( G + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_c}{\partial \vartheta_p} \right).$$

Після підставлення значень  $d\varepsilon_{kl}^c$  та  $d\varepsilon_{kl}^p$  через знайдені  $\lambda_c$  і  $\lambda_p$  в рівняння (22) отримаємо:

$$\begin{aligned} d\sigma^{ij} = & \left\{ \left[ \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - 4G^2 s^{ij} s^{kl} \left( \frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times \\ & \times d\varepsilon_{kl} - \left\{ \left[ \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - \left( \frac{\beta_c}{\gamma^p} + \frac{\beta_p}{\gamma^c} \right) s^{kl} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial T} \left[ \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e \right\} dT + \\ & + \left[ \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \frac{\rho_c}{\gamma^c} s_{kl}. \end{aligned}$$

Позначивши множник попереду  $dT$  через  $Q^{ij}$ , а третій складник  $D^{ij}$ ,

отримаємо:

$$d\sigma^{ij} = \left\{ \left[ \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] - 4 G^2 s^{ij} s^{kl} \left( \frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right) \right\} \times \\ \times d\varepsilon_{kl} + Q^{ij} dT + D^{ij} = d\sigma_{ij}^* - d\sigma_c^{ij}$$

де  $d\sigma_{ij}^*$  – прирощення напружень, що визначаються з урахуванням залежності фізично-механічних параметрів від розвитку деформацій пластичності і повзучості;  $d\sigma_c^{ij} = Q^{ij} dT + D^{ij}$  – прирощення напружень, пов'язані зі зміною фізико-механічних характеристик при змінній температурі та швидкості деформацій повзучості.

**1.3. Вихідні співвідношення континуальної механіки руйнування в умовах повзучості при тривалому статичному навантаженні.** Процес накопичення деформацій повзучості супроводжується появою в матеріалі мікроскопічних хаотично орієнтованих дефектів. Для урахування їх впливу на несучу здатність матеріалу в роботах [6,7] було запропоновано використовувати феноменологічний параметр ушкодженості  $\omega$ ,  $0 \leq \omega \leq 1$ , фізичний зміст якого пов'язується із відношенням площі поперечного перерізу дефектів до загальної площі поперечного перерізу тіла.

Цей підхід, що ґрунтується на використанні моделі безперервно-ушкодженого середовища, є переважним. Методологія розв'язання задач повзучості з використанням феноменологічного параметру ушкодженості стала основою для створення самостійного розділу механіки – континуальної механіки руйнування, що використовується для визначення довговічності елементів конструкцій та встановлює взаємозв'язок між процесом накопичення розсіяних ушкоджень і макроруйнуванням (розвитком тріщин).

При наявності континуального руйнування вираз функції поверхні повзучості (21) набуває вигляду:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - \left[ \sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i, \omega) \right]^2 = 0. \quad (28)$$

Значене рівняння може бути конкретизоване, наприклад, із застосуванням теорії накопичення ушкоджень Ю.М.Работнова [7]:

$$\xi_i^c = D \left( \frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m, \quad (29)$$

або іншими рівняннями, що враховують наявність ушкодженості

матеріалу.

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості вирази вигляду (29) потребують доповнення рівнянням змінення з часом параметра ушкодженості.

При побудові таких рівнянь припускається, що прирощення функції  $\omega(t)$  за малий проміжок часу  $t$  залежить від поточного стану матеріалу (значення параметра ушкодженості) та навантажень (силових, деформаційних і температурних впливів) [2, 4 та ін.]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \Phi(\omega, p_j), \quad (30)$$

де  $\Phi(\omega, p_j)$  – деяка функція;  $p_j$  – вектор навантажень, що характеризує силові, деформаційні, температурні та інші зовнішні впливи.

Узагальненням цих та подібних рівнянь є наведений в роботах [2] вираз:

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[ \frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta, \quad (31)$$

де  $C, B, m, q, r, \beta$  – константи матеріалу.

Величина  $\sigma_e$ , що входить до кінетичного рівняння ушкодженості є значенням еквівалентного напруження, обчисленого відповідно до обраного критерію міцності [2], наприклад максимального нормального напруження  $\sigma_e = \sigma_1$ , інтенсивності дотичних напружень  $\sigma_e = \sigma_i$ , критерію Г.С.Писаренка – О.О.Лебедева:

$$\sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{\text{окт}} + (1 - \chi) \sigma_1. \quad (32)$$

Згідно з роботою [2] найбільш загальною структурою виразу для еквівалентного напруження при ізотропному характері накопичення ушкодженості є

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}), \quad (33)$$

де  $I_1(\sigma_{ij}), I_2(s_{ij})$  – відповідно перший і другий інваріанти тензора  $\sigma_{ij}$  і дівіатора  $s_{ij}$  напружень;  $\alpha, \beta, \gamma$  – константи матеріалу,  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

Конкретизація виразу (33) для практичних розрахунків має вигляд:

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_i. \quad (34)$$

Спосіб подання ушкодженості у вигляді скалярної величини є найбільш використовуваним у розрахунковій практиці [6, 7]. Використання скалярного параметра ушкодженості дозволяє проводити чисельні дослідження, використовуючи наявні експериментальні дані про властивості матеріалів.

## 2. Розрахункові співвідношення МСЕ для геометрично нелінійної вісесиметричної задачі.

**2.1. Моментна схема скінчених елементів.** Для чисельного моделювання процесів термов'язкопружнопластичного деформування вісесиметричних тіл на основі МСЕ використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою прямокутник довільної форми (рис. 2.1,а).

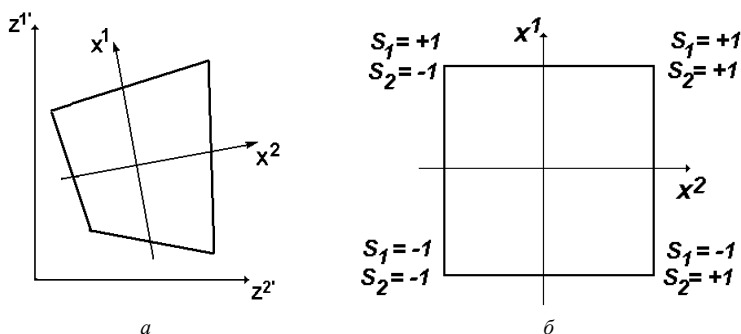


Рис. 2.1. Вісесиметричний СЕ в базисній (а) і місцевій (б) системі координат

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат  $x^i$ , так що осі  $x^1$  і  $x^2$  спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з однічною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2 (рис.2.1,б). Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ.

Будемо вважати, що компоненти тензора пружних сталей  $C^{ijkl}$ , коефіцієнт температурного розширення  $\alpha_T$  та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора  $g_{ij}$ , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}{}^{ijkl} = C^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \alpha_T = \overset{\circ}{\alpha}_T = \alpha_T \Big|_{x^\alpha=0}, \quad g = \overset{\circ}{g} = g \Big|_{x^\alpha=0}, \quad (35)$$

Розподіл переміщень і температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right),$$

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (36)$$

де  $u_{m'(S_1, S_2)}, T_{(S_1, S_2)}$  – вузлові значення переміщень і температури, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат  $x^i$ .

Визначимо переміщення та їх похідні в центрі поперечного перетину СЕ, виходячи з прийнятого закону їх розподілу (36):

$$\overset{\circ}{u}_{i'} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1, S_2)},$$

$$\overset{\circ}{u}_{i', \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1, S_2)} S_\alpha,$$

$$\overset{\circ}{u}_{i', 12} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1, S_2)} S_1 S_2, \quad (37)$$

Аналогічно, виходячи з (36), визначимо температуру та її похідні в центрі поперечного перетину СЕ:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)},$$

$$\overset{\circ}{T}_{, \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} S_\alpha. \quad (38)$$

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [3, 8] компоненти тензора приросту повних фізичних деформацій для проміжної відрахункової конфігурації у поперечному перетині скінченного елемента подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{12}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\mathcal{E}}}_{33, \beta} x^\beta,$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}. \quad (39)$$

У випадку лінійного зв'язку між приростом фізичних компонент тензора напружень та деформацій використовуємо узагальнений закон Гука (15) :

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl},$$

$$\text{де } C_{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \quad (40)$$

Запишемо вираз для компонент приросту тензора напружень через коефіцієнти розкладу приросту деформацій в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \tilde{C}^{ij11} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2 \tilde{C}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \\ & + \tilde{C}^{ij22} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} x^1 \right) + \tilde{C}^{ij33} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} x^2 \right) \end{aligned}$$

Застосовуючи позначення

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} = & \tilde{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} = & \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} = & \tilde{C}^{ij22} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1}, \end{aligned} \quad (41)$$

отримаємо запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,1}^{ij} x^1. \quad (42)$$

Відкидаючи з рівняння (42) члени вигляду  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{i\alpha}$  як такі, що не дають внеску в енергію деформування елемента, подамо приріст фізичних компонент тензора напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{33} x^\alpha, \quad (43)$$

де  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}$  і  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{ij}$  – коефіцієнти розкладення приросту напружень.

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент приросту фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням їх подання через компоненти приросту тензора напружень в місцевій системі координат:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{\alpha\alpha} &= \overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}, & \tilde{\sigma}^{12} &= \overset{\circ}{g}_{12} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, & \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} &= \overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha\alpha}, \\ \tilde{\sigma}^{33} &= \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}, & \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{33} &= \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{33},\end{aligned}\quad (44)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент приросту фізичних деформацій в ряд Маклорена, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha}, & \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, & \tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}^{\circ} &= \left. \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^{\beta}=0} = \frac{\partial(\varepsilon_{\alpha\alpha}/g_{\alpha\alpha})}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right) \\ \tilde{\varepsilon}_{33,\alpha}^{\circ} &= \left. \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^{\alpha}} \right|_{x^{\beta}=0} = \frac{\partial(\varepsilon_{33}/g_{33})}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta}=0} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left( \varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33,\alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^{\beta}=0} = \\ &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right),\end{aligned}\quad (45)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{(\alpha)\beta,\alpha} = z_{,\alpha}^{\nu'} z_{,\beta(\alpha)}^{\nu'}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} \Big|_{x^{\gamma}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\gamma} = \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^{\gamma}} \Big|_{x^{\gamma}=0},$$

$$\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}, \quad \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta}=0},$$

$$\overset{\circ}{h}_{33,\alpha} = \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}}, \quad \overset{\circ}{g}_{33,\alpha} = \frac{\partial g_{33}}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta}=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{33} = g_{33} \Big|_{x^{\beta}=0}.$$

Запишемо коефіцієнти розкладу приросту деформації (45) через переміщення в базисній системі координат, що за формулою співпадає з



(13). Як буде показано така формула надалі може бути використана і при визначенні нелінійних зв'язках між деформаціями і переміщеннями згідно (12) :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( z_{,i}^{\nu'} u_{,j}^{\nu'} + z_{,j}^{\nu'} u_{,i}^{\nu'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \left( z^{2'} u_{2'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,(\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right) \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \\ &= \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',(\alpha)} + z_{,(\alpha)}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial \left( z^{2'} u_{2'} \right)}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = \left( z_{,\alpha}^{2'} u_{2'} + z^{2'} u_{2',\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0}. \end{aligned}$$

Введемо наступні позначення для значення похідних від переміщень  $u_{,i}^{\nu'}$  і компонент тензора перетворень  $z_{,i}^{\nu'}$  в центрі СЕ:

$$u_{,i}^{\nu'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{,i}^{\nu'}, \quad z_{,i}^{\nu'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{\nu'}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\beta}^{\nu'} + \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'} \right), & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{z}^{2'} \overset{\circ}{u}_{2'}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \overset{\circ}{u}_{,\alpha}^{\nu'}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha(3-\alpha)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень в поперечному перерізі СЕ:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{(S_1 S_2)}^{\nu'} \left( S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\nu'} + S_\beta \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \right) \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \overset{\circ}{z}^{2'} u_{2'(S_1, S_2)} \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{(S_1 S_2)}^{\nu'} \left( 2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} + S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\nu'} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ u_{3',3(S_1,S_2)} S_\alpha + \frac{\overset{\circ}{z}, 2'}{2} u_{2'(S_1,S_2)} + \overset{\circ}{z}, 2' u_{2'(S_1,S_2)} S_\alpha \right], \quad (47)$$

**2.2.Отримання матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій для вісесиметричного СЕ.** Опис процесу деформування вісесиметричних тіл обертання здійснюється відповідно до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи, що складається з  $N$  СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (48)$$

Запишемо приріст варіації енергії деформації одного СЕ у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (49)$$

Подаючи в останньому виразі компоненти приросту тензора напружень і тензора деформацій через їхні значення у центрі елемента (39) (43) подані відповідно до МССЕ, отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \times \right. \\ & \times \delta \left( \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{\alpha\alpha}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + 2 \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{12} + \\ & \left. + \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha}_{,33} x^\alpha \right) \delta \left( \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}^{33,\beta} x^\beta \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (50) \end{aligned}$$

Обчислимо такі інтеграли:

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0,$$

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases} \quad (51)$$

Виконуючи інтегрування виразу (50) з урахуванням (51) для приросту варіації енергії деформації одного СЕ, одержимо:

$$\delta W = \left[ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \left( \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}_{,\alpha}{}^{33} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (52)$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень і деформацій в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\delta W = \left[ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left( \overset{\circ}{\sigma}{}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \left( \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}{}^{33} \delta \left( \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33,\alpha} \right) \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}.$$

У матричній формі цей вираз буде мати вигляд:

$$\delta W = \left\{ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (53)$$

де

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \ 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}{}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33,\alpha} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{22} \overset{\circ}{h}{}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33,1} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{22,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{22} \overset{\circ}{h}{}_{22,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33,2} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{11} \overset{\circ}{\sigma}^{22} \overset{\circ}{\sigma}^{12} \overset{\circ}{\sigma}^{33} \right\},$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)3} \right\}. \quad (54)$$

Коваріантні компоненти тензора приросту нелінійних деформацій в проміжній відрахунковій конфігурації (12) можна співвідношеннями аналогічними за формулою з (13) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \bar{z}_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + \bar{z}_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} \right), \quad \varepsilon_{33} = \bar{z}{}^{2'} u^{2'}. \quad (55)$$

Коефіцієнти перетворень подамо у вигляді:

$$\bar{z}{}^{v'} = z^{v'} + \frac{1}{2} u^{v'}, \quad \bar{z}_{,\beta}{}^{v'} = z_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'}, \quad (56)$$

Можна показати, що вираз (53) тотожно дорівнює (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \left( z_{,\alpha}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}{}^{v'} \right) u_{,\beta}{}^{v'} + \left( z_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'} \right) u_{,\alpha}{}^{v'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + z_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} \right) = \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} + z_{,\beta}{}^{v'} u_{,\alpha}{}^{v'} + u_{,\alpha}{}^{v'} u_{,\beta}{}^{v'} \right) \\ \varepsilon_{33} &= \left( z^{2'} + \frac{1}{2} u^{2'} \right) u^{2'}. \end{aligned}$$

Виразимо вектор деформацій (53) і їх похідних в центрі СЕ через вектор вузлових переміщень:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = [\bar{B}] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} = [\bar{B}_1] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} = [\bar{B}_2] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad (58)$$

де

$$\left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u^1_{(s_1, s_2)} \\ u^2_{(s_1, s_2)} \end{matrix} \right\}. \quad (59)$$

Для зручності представлення розділимо матриці  $[\bar{B}]$ ,  $[\bar{B}_1]$ ,  $[\bar{B}_2]$  на блоки:

$$\left[ \overset{\circ}{B} \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B} \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B} \right]^{(+1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B} \right]^{(-1;+1)} \left[ \overset{\circ}{B} \right]^{(+1;+1)} \right]$$

$$\begin{aligned} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] &= \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{(+1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{(-1;+1)} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{(+1;+1)} \right] \\ \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] &= \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{(+1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{(-1;+1)} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{(+1;+1)} \right] \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \left[ \overset{\circ}{B} \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 \\ \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}'_{,2} \end{bmatrix}, \\ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{22,1} \right) & \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{22,1} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left( 2 \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 + \overset{\circ}{z}'_{,2} + \overset{\circ}{z}'_{,2} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \end{bmatrix}, \\ \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) & \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left( 2 \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 + \overset{\circ}{z}'_{,2} + \overset{\circ}{z}'_{,2} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \end{bmatrix} \\ \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}, & \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \left. \frac{\partial \bar{g}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^\beta=0}, \\ \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}}, & \overset{\circ}{g}_{33,\alpha} &= \left. \frac{\partial \bar{g}_{33}}{\partial x^\alpha} \right|_{x^\beta=0}, & \overset{\circ}{g}_{(\alpha)\beta,\alpha} &= \overset{\circ}{z}'_{,\alpha} \overset{\circ}{z}'_{,\beta} \overset{\circ}{v}'_{,\alpha}(\alpha), \\ \overset{\circ}{g}_{33} &= \bar{g}_{33} \Big|_{x^\beta=0}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами

розкладання прирощень деформацій законом Гука (43), матрична форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}, \alpha \right\} = \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}, \alpha \right\}, \quad (60)$$

де, у відповідності із законом Гука (15),

$$\left[ \overset{\circ}{D} \right] = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{C} 1111 & \overset{\circ}{C} 1122 & \overset{\circ}{C} 1133 & \overset{\circ}{C} 1112 & \overset{\circ}{C} 1113 & \overset{\circ}{C} 1123 \\ \overset{\circ}{C} 2211 & \overset{\circ}{C} 2222 & \overset{\circ}{C} 2233 & \overset{\circ}{C} 2212 & \overset{\circ}{C} 2213 & \overset{\circ}{C} 2223 \\ \overset{\circ}{C} 3311 & \overset{\circ}{C} 3322 & \overset{\circ}{C} 3333 & \overset{\circ}{C} 3312 & \overset{\circ}{C} 3313 & \overset{\circ}{C} 3323 \\ \overset{\circ}{C} 1211 & \overset{\circ}{C} 1222 & \overset{\circ}{C} 1233 & \overset{\circ}{C} 1212 & \overset{\circ}{C} 1213 & \overset{\circ}{C} 1223 \\ \overset{\circ}{C} 1311 & \overset{\circ}{C} 1322 & \overset{\circ}{C} 1333 & \overset{\circ}{C} 1312 & \overset{\circ}{C} 1313 & \overset{\circ}{C} 1323 \\ \overset{\circ}{C} 2311 & \overset{\circ}{C} 2322 & \overset{\circ}{C} 2333 & \overset{\circ}{C} 2312 & \overset{\circ}{C} 2313 & \overset{\circ}{C} 2323 \end{bmatrix},$$

$$\left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{C} ij(3-\alpha)(3-\alpha) \right] \left[ \overset{\circ}{C} ij33 \right] \right]. \quad (61)$$

Компоненти матриці пружних сталей обчислюються із використанням компонент метричного тензора, що відповідають проміжній відрахунковій конфігурації.

Обчислимо варіацію приросту нелінійних деформацій (12):

$$\delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{v'} \delta u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} \delta u_{,\alpha}^{v'} + 2u_{,\alpha}^{v'} u_{,\beta}^{v'} \right). \quad (62)$$

Представимо варіацію нелінійних деформацій аналогічно (55) :

$$\delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left( Z_{,\alpha}^{v'} \delta u_{,\beta}^{v'} + Z_{,\alpha}^{v'} \delta u_{,\alpha}^{v'} \right), \quad (63)$$

$$\text{де} \quad Z^{v'} = z^{v'} + u^{v'}, \quad Z_{,\beta}^{v'} = z_{,\beta}^{v'} + u_{,\beta}^{v'}, \quad (64)$$

При їх підстановці в (63) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} \left( (z_{,\alpha}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'}) \delta u_{,\beta}^{v'} + (z_{,\beta}^{v'} + u_{,\beta}^{v'}) \delta u_{,\alpha}^{v'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{v'} \delta u_{,\beta}^{v'} + u_{,\alpha}^{v'} \delta u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} \delta u_{,\alpha}^{v'} + u_{,\beta}^{v'} \delta u_{,\alpha}^{v'} \right) = \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{v'} \delta u_{,\beta}^{v'} + z_{,\beta}^{v'} \delta u_{,\alpha}^{v'} + 2u_{,\beta}^{v'} \delta u_{,\alpha}^{v'} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 \\ \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}}_1 \end{bmatrix}^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{Z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{H}_{221} \right) & \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{Z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{H}_{221} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left( 2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 + \overset{\circ}{Z}'_{,1} + \overset{\circ}{Z}'_{,2} \overset{\circ}{H}_{331} \right) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{Z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 \overset{\circ}{H}_{112} \right) & \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{Z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{Z}'_{,1} S_1 \overset{\circ}{H}_{112} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left( 2 \overset{\circ}{Z}'_{,2} S_2 + \overset{\circ}{Z}'_{,2} + \overset{\circ}{Z}'_{,2} \overset{\circ}{H}_{332} \right) \end{bmatrix}$$

$$\overset{\circ}{H}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} = \frac{\overset{\circ}{G}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}}{\overset{\circ}{G}_{\alpha(\alpha)}}, \quad \overset{\circ}{G}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} = \frac{\partial \overset{\circ}{G}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0},$$

$$\overset{\circ}{H}_{33, \alpha} = \frac{\overset{\circ}{G}_{33, \alpha}}{\overset{\circ}{G}_{33}}, \quad \overset{\circ}{G}_{33, \alpha} = \frac{\partial \overset{\circ}{G}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0}, \quad \overset{\circ}{G}_{33} = \overset{\circ}{G}_{33} \Big|_{x^\beta=0},$$

$$\overset{\circ}{G}_{(\alpha)\beta, \alpha} = \overset{\circ}{Z}'_{, \alpha} \overset{\circ}{Z}'_{, \beta} \overset{\circ}{v}'_{, \beta(\alpha)}.$$

Вираз для варіації енергії деформації матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{l=0}^L \left( \delta \{u_l\}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \{u_l\}^T \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}}_1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}^T \right) \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{, \alpha} \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} \\ &= \sum_{l=0}^L \delta \{u_l\}^T \left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\}_l \end{aligned}$$

$$\text{де } \left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\}_l = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}}_1 \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{, 1} \right\} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{, 2} \right\} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (65)$$

– вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням повних напружень в актуальній конфігурації.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо лінійний зв'язок між приростом деформацій і приростом переміщень:

$$\delta W = \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge, \alpha \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge, \alpha \right\} \right) \right\} \sqrt{g}^{\circ}. \quad (66)$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \wedge \right\} = \left[ \overset{\circ}{B} \wedge \right] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}$$

$$\left[ \overset{\circ}{B} \wedge \right]_{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 \\ \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' \end{bmatrix},$$

$$\left[ \overset{\circ}{B} \wedge \right]_{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{221} \right) & \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,12} S_2 + 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{221} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left( 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' S_1 + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' S_{33,1} \right) \end{bmatrix},$$

$$\left[ \overset{\circ}{B} \wedge \right]_{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_1 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) & \frac{1}{2} \left( \left( \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,12} S_1 + 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} S_1 S_2 \right) - \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,1} S_2 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left( 2 \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' S_2 + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}'_{,2} + \overset{\circ}{z} \overset{\circ}{z}' S_{33,2} \right) \end{bmatrix},$$

де  $\overset{\circ}{h}$ ,  $\overset{\circ}{z}$ ,  $\overset{\circ}{\beta}'$  визначаються згідно формул (45), (8).

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left( \delta \left\{ u \overset{\circ}{y}'_l \right\} \right) [K]_{ln} \left\{ u \right\}_n, \quad (67)$$

де  $[K]_{ln}$  – матриця жорсткості вісесиметричного СЕ:

$$[K]_{ln} = \left\{ \left[ \overset{\circ}{B} \wedge \right]^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left[ \overset{\circ}{B} \wedge \right] + \right.$$



$$+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{D}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{D}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_2 \end{bmatrix} \right) \sqrt{g} \right]. \quad (68)$$

**3. Розв'язання тестових прикладів.** З метою доведення ефективності використання розроблених розрахункових співвідношень МССЕ для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням ушкодженості матеріалу для вісесиметричних тіл обертання із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ, розглянуто тестову задачу про згин защемленої по контуру круглої пластини навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис.3.1).

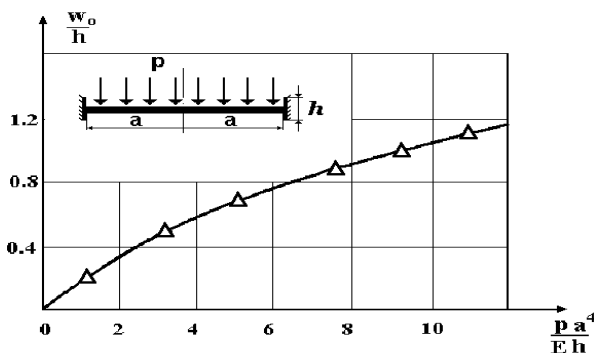


Рис.3.1

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними:  $a=0.2$  м,  $h=0.01$  м модуль пружності  $E = 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ . В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий в роботі [10], що показаний на рис.3.1 суцільною лінією в вигляді залежності безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження. Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ, із використанням зображеної на рис.3.1. дискретної моделі, показані на рис.3.1 трикутниками, майже повністю збігаються із еталонним розв'язком.

**Висновки.** Отримані розрахункові співвідношення МСЕ – вирази матриці жорсткості (68) і вектору вузлових реакцій (65) – для розв'язання геометрично нелінійних задач термов'язкопружнопластичності з урахуванням ушкодженості матеріалу вісесиметричних тіл. Розв'язання тестової задачі засвідчило вірогідність отриманих результатів.

1. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьков. ун-та. - 1964. – 483с.
2. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикладная механика. – 2000. – №3. – С.31–66.
3. *Гуляр А.И., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1978, №32 – с.3-10.
4. *Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник.* / Под ред.Шестерикова С.А.-М.:Машиностроение,1983.-101 с.
5. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1969. – 420 с.
7. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. - М.: 1966. – 752 с.
8. *Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
9. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. –1974. –Вып.24. –С.147-156.
10. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука,1966.-456 с.
11. *Тормахов М.Н.* О связи между напряжениями и конечными пластическими деформациями при простом нагружении в пространстве истинных напряжений // Рук. деп. ВИНТИ №7899-В. – 13 с.

*Надійшло до редакції 22.11.2006 р.*

УДК 539.3

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук,  
**Гуляр О.І.**, д-р техн. наук,  
**Солодей І.І.**, канд. техн. наук,  
**Шевченко Ю.В.**, аспірант

### **АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ ДЛЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ НАШВАНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Важливим етапом в реалізації обчислювальних систем для розв'язання просторових задач динаміки є вибір оптимальних, з точки зору швидкості і складності процесів деформування, алгоритмів інтегрування рівнянь руху у часі, особливістю яких в даній роботі є їх розвиток в рамках НМСЕ. Відомо, що вибір того чи іншого алгоритму пов'язаний із швидкістю протікання процесу деформування та характеру навантажень. При аналізі перехідних процесів найбільше розповсюдження отримав метод узагальнених координат, який припускає розклад розшукуваного рішення в ряд по формах власних коливань. В цілому, для розв'язання систем рівнянь динаміки рекомендовані прямі методи безпосереднього інтегрування по часовій координаті, залишаючи модальні методи для проблем, що пов'язані з використанням нижньої частини частотного спектру. Широке розповсюдження отримали неявні схеми інтегрування за часом (метод Н'юмарка, метод  $\theta$ -Вільсона), які допускають у порівнянні з явними значно більший крок по параметру. Специфіка алгебраїчних рівнянь НМСЕ зумовлена порушенням ортогональності базисних функцій у просторі оператора пружності для тіл із змінними вздовж направляючої параметрами жорсткості і мас. Явно виділена клітинна структура як матриці жорсткості, так і матриці мас, є підставою для використання алгоритмів, що комбінують прямі та ітераційні методи розв'язання. Поєднання ітераційних циклів, що з однієї сторони пов'язані з порушенням однорідності об'єкту вздовж направляючої, а з іншої є природними для самих алгоритмів (метод ітерацій у підпросторі) дозволяє значно зменшити обчислювальні витрати на розв'язання задачі. Для ефективного пошуку рішення задач динаміки, на сьогоднішній день, потрібно володіти всім набором засобів аналізу, чітко представляти правила і границі їх застосування. До того ж, високі вимоги до розрахункових моделей, що закладені до сучасної нормативної бази припускають розгляд динамічних навантажень різного рівня інтенсивності, які можуть діяти на конструкцію в один і той же момент часу, що в свою чергу потребує ретельного дослідження меж достовірного використання того чи іншого алгоритму.

**Вступ.** Задача визначення переміщень, швидкостей та прискорень традиційно зводиться до розв'язання системи звичайних дифференціальних рівнянь 2-го порядку для моменту часу  $t$ , яка отримана після просторової скінченно-елементної дискретизації [2]:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{Q\}. \quad (1)$$

Методика обчислення коефіцієнтів матриць мас  $[M]$ , жорсткості  $[K]$  та вектора зовнішніх навантажень  $\{Q\}$  на основі кільцевого незамкненого неоднорідного скінченного елемента з довільними граничними умовами на торцях приведена в роботі [5].

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу  $t_0$ , який приймається за початок часової координати [4]

$$\{U\}|_{t=t_0} = \{U_0\}, \quad \{\dot{U}\}|_{t=t_0} = \{\dot{U}_0\}. \quad (2)$$

Особливістю напіваналітичного метода скінченних елементів є характерна блокова структура амплітудних матриць та векторів вирішуючих рівнянь:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{l_0 l_0} & \cdots & [K]_{l_0 m} & \cdots & [K]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [K]_{ll_0} & \cdots & [K]_{ll} & \cdots & [K]_{ll} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{Ll_0} & \cdots & [K]_{Lm} & \cdots & [K]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{l_0 l_0} & \cdots & [M]_{l_0 m} & \cdots & [M]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [M]_{ll_0} & \cdots & [M]_{ll} & \cdots & [M]_{ll} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M]_{Ll_0} & \cdots & [M]_{Lm} & \cdots & [M]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \{U\}^T &= \{U_{l_0}^T\} \cdots \{U_l^T\} \cdots \{U_L^T\}, \\ \{\dot{U}\}^T &= \{\dot{U}_{l_0}^T\} \cdots \{\dot{U}_l^T\} \cdots \{\dot{U}_L^T\}, \\ \{\ddot{U}\}^T &= \{\ddot{U}_{l_0}^T\} \cdots \{\ddot{U}_l^T\} \cdots \{\ddot{U}_L^T\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\{Q\}^T = \{\{Q\}_{l_0}^T \quad \dots \quad \{Q\}_l^T \quad \dots \quad \{Q\}_{L}^T\}. \quad (6)$$

Кожний блок матриць (3), (4) представляє собою стрічкову амплітудну підматрицю, що зформована для двовимірної сіткової області, яка апроксимує поперечний переріз тіла.

У класичному випадку НМСЕ, для однорідних вздовж направляючої тіл обертання при використанні базисних функцій у вигляді рядів Фур'є система рівнянь (1) розпадається на низку незалежних амплітудних систем для кожного із членів ряду:

$$[M]_{ll} \{\ddot{U}\}^l + [K]_{ll} \{U\}^l = \{Q\}_l, \quad l = l_0 \dots L. \quad (7)$$

При аналізі тіл обертання із змінними вздовж направляючої фізико-механічними параметрами або незамкнених тіл обертання з довільними граничними умовами не вдається досягти розділу змінних та подати задачу у вигляді (7).

Методи прямого інтегрування. Розглянемо метод Ньюмарка, який представляє клас неявних умовно стійких схем інтегрування [3]. Невідомі значення амплітудних векторів переміщень та швидкостей в момент часу  $t+\Delta t$  представимо через значення цих же параметрів на попередньому кроці за часом по скінченно-різницеvim формулам:

$$\begin{aligned} \{\dot{U}\}^{t+\Delta t} &= \{\dot{U}\}^t + \left[ (1-\delta)\{\ddot{U}\}^t + \delta\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} \right] \Delta t, \\ \{U\}^{t+\Delta t} &= \{U\}^t + \{\dot{U}\}^t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{U}\}^t + \alpha \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\delta \geq 0.5$ ,  $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$  - умови, які визначають стійкість схеми інтегрування, що розглядається.

Подаючи  $\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}$  через  $\{U\}^{t+\Delta t}$ :

$$\{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[ \{U\}^{t+\Delta t} - \{U\}^t - \{\dot{U}\}^t \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{U}\}^t \right] + \{\ddot{U}\}^t, \quad (9)$$

запишемо кінетичну енергію системи для того ж момента часу:

$$[M] \{\dot{U}\}^{t+\Delta t} = \{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} - \{\bar{R}_\rho\}^t, \quad (10)$$

де

$$\{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} = a_0 [M] \{U\}^{t+\Delta t}, \quad (11)$$

$$\{\bar{R}_\rho\}^t = [M] \{a_0 \{U\}^t + a_2 \{\dot{U}\}^t + a_3 \{\ddot{U}\}^t\}, \quad (12)$$

які визначають собою частини вузлових інерційних амплітудних реакцій в моменти часу  $t+\Delta t$  та  $t$ .

Тоді система рівнянь (1) для набуває вигляду:

$$\{K\}^{t+\Delta t} \{U\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t}, \quad (13)$$

де

$$\{K\}^{t+\Delta t} = [K]^{t+\Delta t} + a_0 [M] \quad - \quad (14)$$

ефективна амплітудна матриця жорсткості задачі динаміки,

$$\{Q\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}^t \quad - \quad (15)$$

ефективний амплітудний вектор зовнішніх навантажень,

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1.$$

Вирішуючи систему рівнянь (13) одержуємо значення амплітуд переміщень у момент часу  $t+\Delta t$ , за якими обчислюємо амплітуди швидкостей та прискорень для момента часу  $t+\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t} &= a_0 \left( \{U\}^{t+\Delta t} - \{U\}^t \right) - a_2 \{\dot{U}\}^t - a_3 \{\ddot{U}\}^t, \\ \{\dot{U}\}^{t+\Delta t} &= \{\dot{U}\}^t + a_6 \{\ddot{U}\}^t + a_7 \{\ddot{U}\}^{t+\Delta t}, \end{aligned} \quad (16)$$

де  $a_6 = \Delta t(1 - \delta)$ ,  $a_7 = \delta \Delta t$ .

За допомогою формул гармонійного аналізу:

$$\{U\}_{coord}^{t+\Delta t} = \sum_{l=l_0}^L \{U\}_l^{t+\Delta t} \psi_{k'}^l, \quad (17)$$

знаходимо координатні значення переміщень, а також координатні значення всіх параметрів напружено-деформованого стану тіла.

$\{U\}_{coord}^{t+\Delta t} = \{u_{k',e}^{t+\Delta t}\}$ ,  $\psi_{k'}^l$  - базисні функції для апроксимації невідомих задачі вздовж направляючої,  $k'$  - індекс, що визначає базисну просторову систему координат [1],  $e$  - індекс вузлів дискретної моделі.

Так як усі блоки матриці (13) не нульові, застосування прямих методів, серед яких найбільше розповсюдження отримав фронтальний метод Гауса [3], для вирішення систем типу (13) призведе до невиправдано великих витрат машинного часу. Поряд з прямими методами розв'язання систем лінійних рівнянь широко використовуються ітераційні методи, які забезпечують задану точність результатів [3]. Апроксимація конструкції вздовж направляючої майже ортогональною в енергетичному просторі оператора теорії пружності системою базисних [тригонометричних або поліноміальних] функцій забезпечує добру обумовленість матриці (14). У даному випадку віддають перевагу блоково-ітераційним процедурам, серед яких однією з найбільш ефективних є метод блокової (групової) релаксації, який полягає в застосуванні методу послідовної верхньої релаксації до груп невідомих:

Клітинна структура систем рівнянь напіваналітичного метода скінченних елементів природно визначає вибір блоку ітераційного процесу у вигляді підсистеми, що формується для одного члена ряду розкладу невідомих вздовж направляючої:

$$\{U\}_{j,i+1}^{l,t+\Delta t} = \{U\}_i^{l,t+\Delta t} + \omega [K]_{ll}^{-1} \left( \{G\}_l^{t+\Delta t} - \{\tilde{R}\}_{l,i}^{t+\Delta t} \right), \quad (18)$$

де  $\{\tilde{R}\}_{l,i}^{t+\Delta t}$  - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації  $i$  кроку  $t+\Delta t$ , який визначається співвідношенням:

$$\{\tilde{R}\}_{l,i}^{t+\Delta t} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{U\}_{i+1}^{m,t+\Delta t} + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{U\}_i^{m,t+\Delta t}, \quad (19)$$

$\{U\}_{i+1}^{m,t+\Delta t}$ ,  $\{U\}_i^{m,t+\Delta t}$  - амплітудні значення вузлових переміщень в момент часу  $t+\Delta t$  на ітераціях  $i+1$  та  $i$  відповідно,  $\omega$  - параметр релаксації ( $1 \leq \omega < 2$ ).

На кожному кроці за часом ітераційний процес закінчується на ітерації  $I=i$ , якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{U\}_i^{l,t+\Delta t} \right\|, \quad (20)$$

де  $\{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}$  - прирощення амплітудних переміщень на ітерації  $i$  у момент часу  $t+\Delta t$ ,  $\{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t} = \sum_{i=1}^I \{\Delta U\}_i^{l,t+\Delta t}$  - вектор прирощень

амплітудних переміщень у момент часу  $t+\Delta t$ ,  $\| \{\Delta U\} \| = \{ \Delta U \}^2$ ,  $\varepsilon$  - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

З метою достовірності вище викладеної методики для призматичних тіл розглянуто коливання консольної жорстко закріпленої балки, довжиною  $L = 10$  дюймів з квадратним поперечним перетином  $1 \times 1$  дюймів [1]. Апроксимація об'єкту здійснюється 10 СЕ по довжині балки. До верхньої і нижньої площин балки прикладається вертикальне рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $p = 2.85$  фунтів/дюйм - по  $p/2$  до кожної площини. Навантаження прикладається миттєво і не змінюється в процесі деформування. Рішення задачі отримане при різних кроках інтегрування у часі на часовому проміжку  $t \in [0; 12.15 \cdot 10^{-3}]$  с.

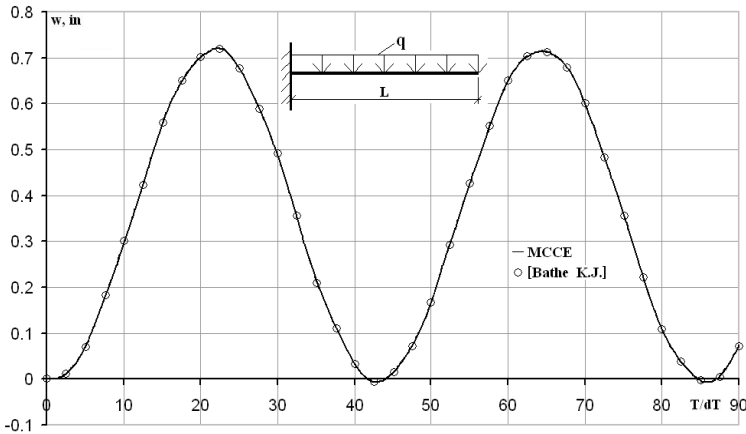


Рис. 1

За еталонні прийняті результати, отримані в роботі [1]. В табл.1 наведені максимальні переміщення крайньої точки консольної балки та період коливань при рішенні за допомогою програмних комплексів NASTRAN та MCCE. Проведена внутрішня збіжність результатів розрахунку. За базовий крок інтегрування в часі прийнято  $\Delta t = 1.35 \cdot 10^{-4}$  с. Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого при найменшому кроці в часі -  $0.5\Delta t$  що добре узгоджується з еталонним результатом.



Таблиця 1

MMCE				
$\Delta t$	w, in	%	Період $T \times 10^{-3}$ , c	%
0.5 $\Delta t$	7.25	0	5.65	0
1 $\Delta t$	7.24	0.14	5.67	-0.35
2 $\Delta t$	7.20	0.69	5.74	-1.56
4 $\Delta t$	7.12	1.79	5.87	-3.95
Nastran				
$\Delta t$	w, in	%	Період $T \times 10^{-3}$ , c	%
0.5 $\Delta t$	7.37	0	5.61	0
1 $\Delta t$	7.30	0.95	5.67	-1.07
2 $\Delta t$	7.27	1.39	5.78	-3.03
4 $\Delta t$	7.07	4.06	6.32	-12.66

В той же час для підтвердження достовірності наведеної методики для однорідних тіл обертання проведено аналіз динамічного деформування жорстко защемленого по краям віссиметричного купола під дією рівнорозподіленого навантаження інтенсивності  $p=600$  lb/in [1]. Навантаження прикладається миттєво в початковий момент часу і не змінюється на всьому проміжку часу, що розглядається  $t \in [0; 10^{-3}]$ sec. Геометричні розміри купола: середній радіус -  $R = 22.27$  in; товщина купола -  $h = 0.41$  in; кут розвору -  $\alpha = 26.67$ . Фізико-механічні характеристики:  $E = 10.5 \times 10^6$  lb/in<sup>2</sup>;  $\nu = 0.3$ ;  $\rho = 2.45 \times 10^{-4}$  lb-sec<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>. Крок інтегрування в часті  $\Delta t = 0.5 \cdot 10^{-5}$ . За еталонні прийняті результати отримані в роботі [1].

На рис. 2. представлений графік вертикального переміщення середини купола при рішенні за допомогою програмних комплексів NASTRAN та MMCE, що добре узгоджуються з еталонним рішенням. В табл. 2 приведені результати внутрішньої збіжності рішення, при розв'язку з різними кроками в часі, в точках екстремумах графіка функцій переміщень середини купола.

Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого при найменшому кроці в часі -  $0.5 \Delta t$ , що засвідчує гарну поведінку збіжності алгоритмів обох програмних комплексів.

Щоб підтвердити достовірність MMCE в порівнянні з традиційним MCE було розглянуто коливання однорідного товстостінного сталевого нескінченного циліндра з характеристиками матеріалу:  $E=2.1 \times 10^{11}$  Па,  $\rho=7.8 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu=0$ , під дією рівнорозподіленого по частині зовнішньої

поверхні тиску з інтенсивністю  $q_a=1$  Па. Схема навантаження та геометричні розміри моделі показані на рис. 3, де  $R_{\text{зов}}=2$  м,  $R_{\text{внутр}}=1$  м,

$\alpha=45^\circ$ ,  $(q_a = \begin{cases} 0, & \alpha < 45^\circ \\ -1, & \alpha \geq 45^\circ \end{cases} \text{ Па})$ . Навантаження прикладене миттєво і

утримувалось на всьому інтервалі дослідження  $t \in [0; 8 \cdot 10^{-3}]$  с. По товщині моделі утримували 15 СЕ, по кільцевій координаті 72 СЕ. Проведено внутрішню збіжність рішення при вихідному кроці інтегрування в часі  $\Delta t=0.4 \cdot 10^{-4}$  с.

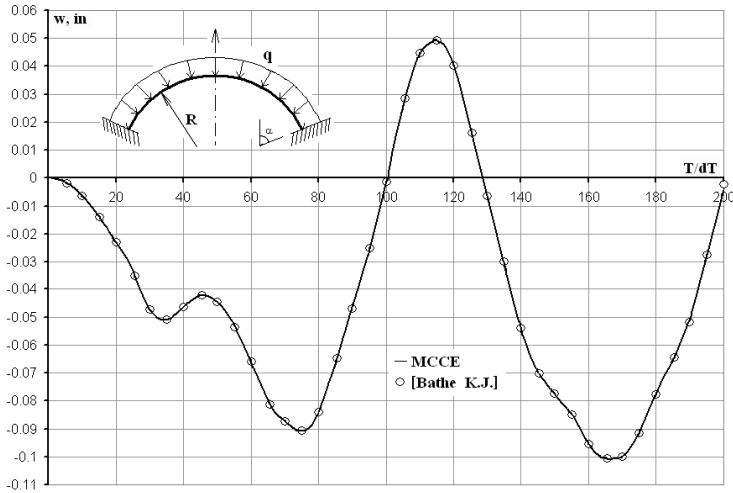


Рис. 2

Отримані рішення задачі пружного динамічного деформування циліндра за допомогою МСЕ та НМСЕ при різних кроках інтегрування в часі.

В табл. 3 наведено внутрішню збіжність горизонтального переміщення точки  $D$  при розрахунках з різними кроками в часі. Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого при найменшому кроці в часі  $-0.5\Delta t$ , що засвідчує однакову поведінку традиційного МСЕ та НМСЕ.

Проведено апробацію методики для суттєво неоднорідних тіл обертання. В якості тестового прикладу було розглянуто коливання товстостінного сталевого неоднорідного нескінченного циліндра з характеристиками матеріалу:  $E_1=2.1 \times 10^{11}$  Па,  $E_2=1.05 \times 10^{11}$  Па,  $\rho=7.8 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu=0$ , під дією рівнорозподіленого по частині зовнішньої

поверхні тиску з інтенсивністю  $q_a=1\text{Па}$ , ( $q_a = \begin{cases} 0, \alpha < 45^\circ \\ -1, \alpha \geq 45^\circ \end{cases}$  Па). Схема навантаження та геометричні розміри моделі показані на рис. 4.

Таблиця 2

HMCE				
$\Delta t$	1 максимум ( $t=1.7 \cdot 10^{-4}$ )	%	2 максимум ( $t=3.6 \cdot 10^{-4}$ )	%
$0.5\Delta t$	-5.08 e-02	0.00	-9.13 e-02	0.00
$1\Delta t$	-5.09 e-02	-0.16	-9.08 e-02	0.49
$2\Delta t$	-5.15 e-02	-1.21	-9.00 e-02	1.40
$4\Delta t$	-5.06 e-02	0.53	-8.88 e-02	2.67
$\Delta t$	3 максимум ( $t=5.75 \cdot 10^{-4}$ )	%	4 максимум ( $t=8.4 \cdot 10^{-4}$ )	%
$0.5\Delta t$	4.99 e-02	0.00	-1.02 e-01	0.00
$1\Delta t$	4.93 e-02	1.30	-1.01 e-01	0.79
$2\Delta t$	4.94 e-02	1.06	-1.01 e-01	0.52
$4\Delta t$	4.65 e-02	6.97	-9.54 e-02	6.09
Nastran				
$\Delta t$	1 максимум ( $t=1.7 \cdot 10^{-4}$ )	%	2 максимум ( $t=3.6 \cdot 10^{-4}$ )	%
$0.5\Delta t$	-5.21 e-02	0.00	-8.89 e-02	0.00
$1\Delta t$	-5.23 e-02	-0.38	-8.91 e-02	-0.23
$2\Delta t$	-5.28 e-02	-1.34	-8.87 e-02	0.23
$4\Delta t$	-5.18 e-02	0.58	-8.63 e-02	2.93
$\Delta t$	3 максимум ( $t=5.75 \cdot 10^{-4}$ )	%	4 максимум ( $t=8.4 \cdot 10^{-4}$ )	%
$0.5\Delta t$	5.00 e-02	0.00	-9.81 e-02	0.00
$1\Delta t$	4.99 e-02	0.20	-9.77 e-02	0.41
$2\Delta t$	4.94 e-02	1.20	-9.37 e-02	4.49
$4\Delta t$	4.19 e-02	16.20	-9.30 e-02	5.20

Отримані рішення задачі пружного динамічного деформування циліндра за допомогою МСЕ та HMCE. По товщині моделі утримували 15 CE, по кільцевій координаті 72 CE.

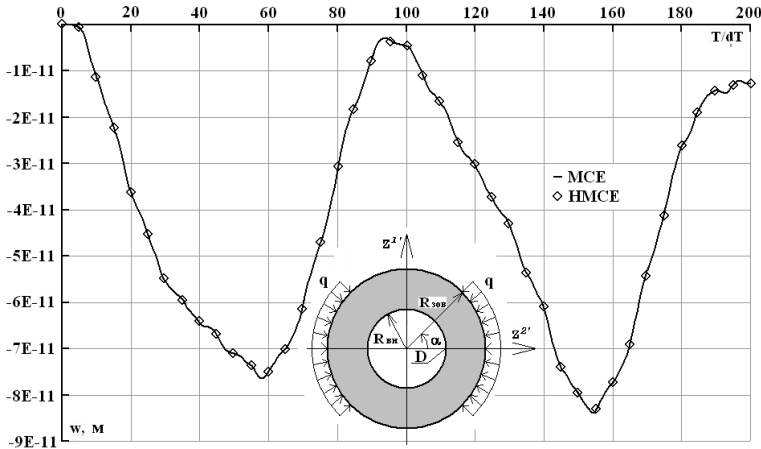


Рис. 3

Таблиця 3

$\Delta t$	MCE		HMCE	
	w, м	%	w, м	%
$0.5\Delta t$	-7.56e-11	0.00	-7.61e-11	0.00
$1\Delta t$	-7.64e-11	-1.09	-7.71e-11	-1.28
$2\Delta t$	-7.42e-11	1.83	-7.48e-11	1.65
$4\Delta t$	-7.36e-11	2.59	-7.42e-11	2.47

В табл. 4 приведено горизонтальне переміщення точки  $D$  при розрахунках з різними кроками в часі. За вихідний крок інтегрування у часі прийнято  $\Delta t=0.4 \times 10^{-4}$  с.

При обчисленні похибки у відсотках до рішення отриманого при найменшому кроці в інтегрування часі –  $0.5\Delta t$ , отриманий результат засвідчує гарну збіжність з еталонним.

Розклад невідомих за власними формами. В багатьох випадках для розв'язання системи звичайних диференціальних лінійних рівнянь руху дискретної моделі (1) при заданих початкових умовах (2) використовується чисельний підхід заснований на розкладі розшукуваного рішення по формам власних коливань конструкції.

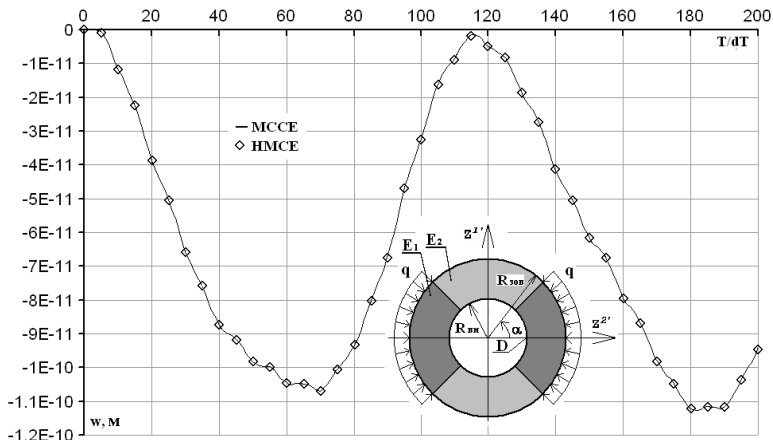


Рис. 4

Таблиця 4

$\Delta t$	MCE		HMCE	
	w,М	%	w,М	%
$0.5\Delta t$	-1.06 e - 10	0.00	-1.07 e - 10	0.00
$1\Delta t$	-1.06 e - 10	0.55	-1.07 e - 10	0.25
$2\Delta t$	-1.06 e - 10	0.66	-1.05 e - 10	1.99
$4\Delta t$	-1.05 e - 10	1.69	-1.04 e - 10	2.52

Перехід до нормальних координат здійснюється в результаті лінійного перетворення:

$$\{U\} = [\Phi]\{X\}, \tag{21}$$

де

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \{\Phi\}_{r_0}^{l_0} & \dots & \{\Phi\}_{r_r}^{l_0} & \dots & \{\Phi\}_{\Omega}^{l_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{\Phi\}_{r_0}^l & \dots & \{\Phi\}_{r_r}^l & \dots & \{\Phi\}_{\Omega}^l \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\Phi\}_{r_0}^L & \dots & \{\Phi\}_{r_r}^L & \dots & \{\Phi\}_{\Omega}^L \end{bmatrix}, \{X\}^T = \{x_{r_0} \dots x_r \dots x_{\Omega}\}, \tag{22}$$

$\{\Phi\}_{r_r}^l$  - l-та амплітуда r-ї власної форми дискретної моделі, що знаходиться за допомогою модального аналізу конструкції;  $x_r(t)$  -

невідомі вагові коефіцієнти рішення для  $r$ -ої власної форми;  $\Omega$  – кількість власних форм, які утримуються при лінійному перетворенні.

Виконавши підстановку (21) в (1) і домноживши зліва на  $[\Phi]^T$  :

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{X}\} + [\Phi]^T [K][\Phi]\{X\} = [\Phi]^T \{Q\}, \quad (23)$$

отримаємо систему рівнянь (23), яка з урахуванням ортогональності власних форм:

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = [I], \quad [\Phi]^T [K][\Phi] = [\Lambda], \quad (24)$$

$$\text{де } [\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{r_0} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_\Omega \end{bmatrix}, \quad \lambda_r - \text{ власне значення } r\text{-ої власної форми,}$$

перетворюється до низки незалежних диференціальних рівнянь вигляду:

$$[I]\{\ddot{X}\} + [\Lambda]\{X\} = [\Phi]^T \{Q\} \quad (25)$$

з початковими умовами у вигляді:

$$\{X_0\} = [\Phi]^T [M]\{U_0\}, \quad \{\dot{X}_0\} = [\Phi]^T [M]\{\dot{U}_0\}, \quad (26)$$

тут

$$\{X_0\}^T = \{x_{r_0}^{t_0} \quad \dots \quad x_r^{t_0} \quad \dots \quad x_\Omega^{t_0}\}, \quad \{\dot{X}_0\}^T = \{\dot{x}_{r_0}^{t_0} \quad \dots \quad \dot{x}_r^{t_0} \quad \dots \quad \dot{x}_\Omega^{t_0}\}.$$

Рішення звичайного диференціального рівняння 2-го порядку (25) подається інтегралом Дюамеля:

$$\{X\}^t = [CC]^t \{X\}^{t_0} + [SS]^t \{\dot{X}\}^{t_0} + \int_{t_0}^t [SS]^{t-\tau} [\Phi]^T \{Q\} d\tau, \quad (27)$$

де

$$[CC]^r = \text{diag}[\cos \theta_r \tau], \quad [SS]^r = \text{diag}\left[\frac{\sin \theta_r \tau}{\theta_r}\right], \quad \theta_r = \sqrt{\lambda_r}.$$

Для кожного з рівнянь можна записати

$$x_r^t = x_r^{t_0} \cos \theta_r t + \dot{x}_r^{t_0} \frac{\sin \theta_r t}{\theta_r} + \frac{1}{\theta_r} \int_{t_0}^t \sum_{l=l_0}^L \{\Phi\}_r^{lT} \{\mathcal{Q}\}_l^\tau \sin \theta_r (t-\tau) d\tau, \quad (28)$$

Обчислення інтегралу виконується чисельно на основі формули прямокутників.

Розв'язання проблеми власних значень. Узагальнена проблема власних значень, з якої повинні бути визначені  $\Omega$  власних рішень, тобто амплітудні матриці  $[\Phi]$  та  $[\Lambda]$ , формулюється у вигляді

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Lambda], \quad (29)$$

при цьому набір власних векторів  $[\Phi] \in [M]$  - ортогональним, тобто задовольняє умовам (24), та  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r \leq \dots \leq \lambda_\Omega$ .

При аналізі вільних коливань найбільш ефективним для визначення спектру власних форм та частот є метод зворотніх ітерацій у підпросторі з ортогоналізацією по Граму-Шмідту.

Використовуючи деякий набір початкових векторів  $[\tilde{Y}]_1$  на кожній ітерації  $n = 1, 2, \dots$  обчислюємо наступні наближення:

$$[K][\tilde{Y}]_{n+1} = [\mathcal{Q}]_n, \quad [\mathcal{Q}]_n = [M][\tilde{Y}]_n \quad (30)$$

де

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \{\mathbf{Y}\}_{r_0}^{l_0} & \dots & \{\mathbf{Y}\}_r^{l_0} & \dots & \{\mathbf{Y}\}_\Omega^{l_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{\mathbf{Y}\}_{r_0}^l & \dots & \{\mathbf{Y}\}_r^l & \dots & \{\mathbf{Y}\}_\Omega^l \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\mathbf{Y}\}_{r_0}^L & \dots & \{\mathbf{Y}\}_r^L & \dots & \{\mathbf{Y}\}_\Omega^L \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{Q}] = \begin{bmatrix} \{\mathcal{Q}\}_{r_0}^{l_0} & \dots & \{\mathcal{Q}\}_r^{l_0} & \dots & \{\mathcal{Q}\}_\Omega^{l_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{\mathcal{Q}\}_{r_0}^l & \dots & \{\mathcal{Q}\}_r^l & \dots & \{\mathcal{Q}\}_\Omega^l \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\mathcal{Q}\}_{r_0}^L & \dots & \{\mathcal{Q}\}_r^L & \dots & \{\mathcal{Q}\}_\Omega^L \end{bmatrix}.$$

Ортогоналізовані амплітудні вектори розшукуваного рішення, які формують амплітудну матрицю  $[\mathbf{Y}]$  обчислюються у відповідності до процедури Грама-Шмідта:

$$\{\mathbf{Y}\}_{r,n+1}^l = \{\tilde{\mathbf{Y}}\}_{r,n+1}^l - \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_{l,n+1}^s \{\tilde{\mathbf{Y}}\}_{s,n}^l, \quad (31)$$

де

$$\alpha_{l,n+1}^s = \sum_{m=l_0}^L \{\tilde{\mathbf{Y}}\}_{s,n}^{lT} [M]_{lm} \{\tilde{\mathbf{Y}}\}_{r,n+1}^m,$$

або у векторному вигляді:

$$[Y]_{n+1} = [\bar{Y}]_{n+1} [R]_{n+1}, \quad (32)$$

де  $[R]_{n+1}$  - верхня трикутна матриця.

Припускаючи, що початкові амплітудні вектори з  $[\tilde{Y}]_1$  не ортогональні до розшукуваного набору власних форм, при завершенні ітераційного циклу отримаємо:

$$[Y]_{n+1} \rightarrow [\Phi], [R]_{n+1} \rightarrow [\Lambda]. \quad (33)$$

Для виконання умов ортогональності (24) нормуємо набір амплітудних векторів  $[\tilde{Y}]_{n+1}$  у розумінні приведення їх довжин до одиниці з ваговою матрицею  $[M]$ :

$$[\tilde{Y}]_{n+1} = \frac{[Y]_{n+1}}{\left([Y]_{n+1}^T [M] [Y]_{n+1}\right)^{1/2}}. \quad (34)$$

На кожній  $n$ -ій ітерації із співвідношення Релея обчислюємо наближення до власних чисел:

$$[\Lambda]_{n+1} = \frac{[\bar{Y}]_{n+1}^T [K] [\tilde{Y}]_n}{[\bar{Y}]_{n+1}^T [M] [\bar{Y}]_{n+1}}. \quad (35)$$

Збіжність ітераційного процесу перевіряється за допомогою:

$$\frac{|\lambda_{r,n+1} - \lambda_{r,n}|}{\lambda_{r,n+1}} \leq \varepsilon, \quad \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n}^l \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n}^l \right\|. \quad (36)$$

Похибка  $\varepsilon$  повинна бути менше або рівною  $10^{-2s}$ , якщо власні значення  $[\Lambda]$  потрібно обчислити з точністю до  $2s$  цифр. Власний вектор тоді буде мати  $s$  або більше вірних цифр.

Основним кроком методу зворотніх ітерацій у підпросторі є розв'язання системи рівнянь (30) для визначення амплітудної  $[\bar{Y}]_{n+1}$ , більш близької до власних векторів у порівнянні з попереднім наближенням  $[\tilde{Y}]_n$ .

Для неоднорідних тіл або при використанні для апроксимації вздовж направляючої системи майже ортогональних базисних функцій матриця



$[K]$  рівняння (30) має багатодіагональну структуру, тому на кожній  $n$ -ій ітерації методу зворотніх ітерацій для розв'язання систем лінійних рівнянь (30) найбільш ефективно використовувати процедуру методу блочних ітерацій з верхньою релаксацією. Розмір блоку методу блочної верхньої релаксації визначається амплітудними підматрицями жорсткості та мас. Тоді процес розв'язання набуває вигляду:

$$\{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i+1} = \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i} + \omega [K]_{ll}^{-1} \left( \{Q\}_{r,n}^l + \{R\}_{r,n+1}^{l,i} \right), \quad (37)$$

де  $\{R\}_{r,n+1}^{l,i}$  - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації  $i$ , який визначається співвідношенням:

$$\{R\}_{r,n+1}^{l,i} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{m,i+1} + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,n+1}^{m,i}. \quad (38)$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації  $I=i$ , якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^l \right\|, \quad (39)$$

де  $\{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i}$  - прирощення амплітудних невідомих на ітерації  $i$ ,

$\{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^l = \sum_{i=1}^I \{\Delta \bar{Y}\}_{r,n+1}^{l,i}$  - вектор прирощень амплітудних невідомих,

$\|\{\Delta \bar{Y}\}\| = \|\{\Delta \bar{Y}\}\|^2$ ,  $\varepsilon$  - наперед задане мале додатнє число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

У загальному випадку ітераційні процеси будуються послідовно. Сумарна кількість ітерацій відповідає добутку кількості ітерацій на двох ітераційних циклах.

В даній роботі пропонується підхід що ґрунтується на можливості одночасного проведення ітераційних процедур методу зворотніх ітерацій та ітераційного процесу, що викликаний наявністю задіагональних членів матриць мас та жорсткості. Для одного блоку методу блочної верхньої релаксації, (30) можна записати як:

$$\sum_{m=l_0}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m = \{Q\}_{r,k}^l, \quad \{Q\}_{r,k}^l = \sum_{m=l_0}^L [M]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{r,k}^m. \quad (40)$$

Ітераційний процес подається у вигляді:

$$\{\bar{Y}\}_{r,k+1}^l = \{\bar{Y}\}_{r,k}^l + \omega [K]_{ll}^{-1} (\{Q\}_{r,k}^l + \{R\}_{r,k}^l), \quad (41)$$

де

$$\{R\}_{r,k}^l = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k}^m. \quad (42)$$

Процедура ортогоналізації має вигляд:

$$\{Y\}_{r,k+1}^l = \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^l - \sum_{s=1}^{r-1} \alpha_{l,k+1}^s \{\tilde{Y}\}_{s,k}^l, \quad (43)$$

$$\text{де } \alpha_{l,k+1}^s = \frac{\sum_{m=l_0}^L \{\tilde{Y}\}_{s,k}^{mT} [M]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m}{\sum_{m=l_0}^L \{\tilde{Y}\}_{s,k}^{mT} [M]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{s,k}^m}.$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації  $K=k$ , якщо виконуються умови:

$$\frac{|\lambda_{r,k+1} - \lambda_{r,k}|}{\lambda_{r,k+1}} \leq 10^{-2s} \quad \text{та} \quad \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=l_0}^L \{\Delta \bar{Y}\}_r^l \right\|, \quad (44)$$

$\{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l$  - прирощення амплітудних невідомих на ітерації  $k$ ,

$\{\Delta \bar{Y}\}_r^l = \sum_{k=1}^K \{\Delta \bar{Y}\}_{r,k}^l$  - вектор прирощень амплітудних невідомих,

$\|\{\Delta \bar{Y}\}\| = \|\{\Delta \bar{Y}\}\|^2$ ,  $\varepsilon$  - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Власні значення та нормований вектор властивих форм обчислюємо за формулами:

$$[\Lambda]_{k+1} = \frac{\sum_{m=l_0}^L \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^{mT} [K]_{lm} \{\tilde{Y}\}_{r,k}^m}{\sum_{m=l_0}^L \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^{mT} [M]_{lm} \{\bar{Y}\}_{r,k+1}^m}, \quad (45)$$

$$\{\tilde{Y}\}_{r,k+1}^l = \frac{\{Y\}_{r,k+1}^l}{\left( \sum_{m=l_0}^L \{Y\}_{r,k+1}^{mT} [M]_{lm} \{Y\}_{r,k+1}^m \right)^{1/2}}. \quad (46)$$

Для прискорення ітераційного процесу існують апріорні оцінки вибору кількості утриманих власних форм і частот. Наприклад в роботі [3] пропонується вибір  $\Omega = \min\{2P, P+8\}$ , де  $P$  - необхідна кількість власних форм та частот, що повинні бути визначені з достатньою точністю, [6] пропонує підхід  $\Omega = 4P/3$ . Проведені дослідження показали, що для задач  $\Omega < 10-15$  ефективніше використовувати перший підхід, але при збільшенні частотного спектру значно зростає та стає переважною ефективність другого підходу.

З метою проведення апробації даної методики розкладу по власним формам для однорідних тіл обертання проведено аналіз коливань жорстко защемленого по краям вісесиметричного купола під дією рівнорозподіленого навантаження інтенсивності  $p=600$  фунтів/дюйм [1]. Вихідні данні розглянуто в попередній частині. Навантаження прикладається миттєво в початковий момент часу і не змінюється на всьому проміжку часу, що розглядається  $t \in [0; 10^{-3}]$ с, при рішенні утримувався крок інтегрування в часі  $\Delta t=0.5e-5$ .

На рис. 5 представлено графік вертикального переміщення середини купола при рішенні за допомогою програмних комплексів NASTRAN та MMCE при утриманні різної кількості власних частот.

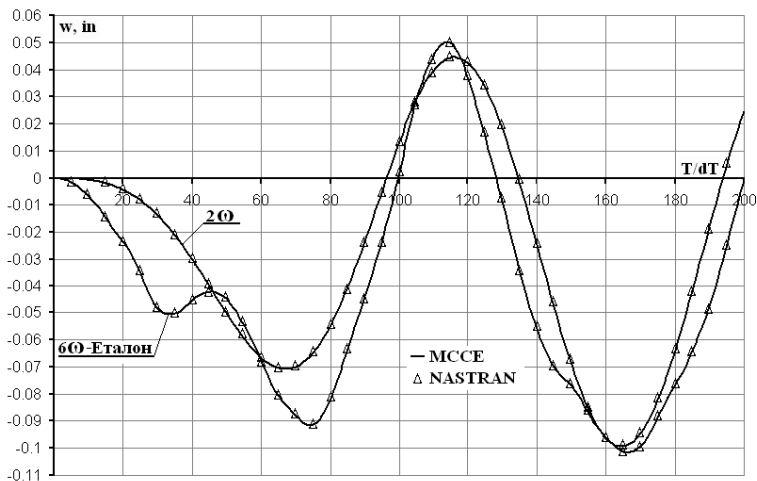


Рис. 5

В табл. 5 приведені результати збіжності отриманого рішення при різній кількості утриманих власних частот в точках екстремумів графіка

функцій переміщень середини купола. Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого при рішенні даної задачі прямим методом, що добре узгоджується з еталонним результатом. Як засвідчили отримані результати похибка не перевищує 2% в порівнянні з еталонним рішенням досягається вже при утриманні 6 і більше власних форм.

Таблиця 5

К-сть w	HMCE			
	1 максимум	%	2 максимум	%
2w	-	-	-7.08 e -02	-22.64
4w	-4.82 e -02	-5.49	-8.98 e -02	-1.95
6w	-5.11 e -02	0.31	-9.12 e -02	-0.37
8w	-5.09 e -02	0.00	-9.16 e -02	0.00
К-сть w	3 максимум	%	4 максимум	%
2w	4.46 e -02	-10.58	-9.94 e -02	-2.24
4w	5.02 e -02	0.51	-9.93 e -02	-2.26
6w	4.97 e -02	-0.40	-1.02 e -01	-0.02
8w	4.99 e -02	0.00	-1.02 e -01	0.00
К-сть w	Nastran			
	1 максимум	%	2 максимум	%
2w	-	-	-6.84 e -02	-23.06
4w	-4.84 e -02	-7.63	-8.89 e -02	0.00
6w	-5.19 e -02	-0.95	-8.89 e -02	0.00
8w	-5.24 e -02	0.00	-8.89 e -02	0.00
К-сть w	3 максимум	%	4 максимум	%
2w	4.48 e -02	-10.04	-9.74 e -02	-1.22
4w	5.01 e -02	0.60	-9.56 e -02	-3.04
6w	5.00 e -02	0.40	-9.78 e -02	-0.81
8w	4.98 e -02	0.00	-9.86 e -02	0.00

Для підтвердження реалізації HMCE в порівнянні з традиційним MCE було розглянуто коливання товстостінного сталевого однорідного нескінченного циліндра. Розрахункова схема, характер навантаження та фізико-механічні данні приведено вище.

Отримані рішення напружено-деформованого стану конструкції за допомогою МСЕ та НМСЕ при розкладі рішення по власним частотам. По товщині моделі утримували 15 СЕ, по кільцевій координаті 72СЕ. Крок інтегрування у часі становив  $\Delta t=0.4 \times 10^{-4}$ с.

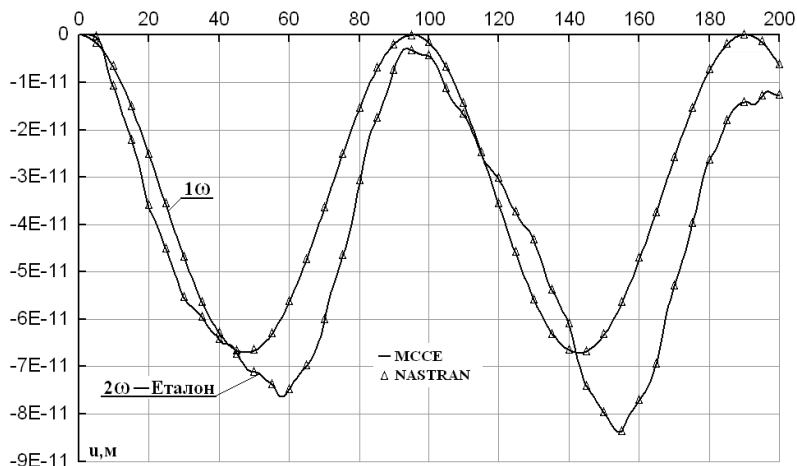


Рис. 6

Таблиця 6

NASTRAN				
	1 max $t=2.32e-3$ с	%	2 max $t=6.16e-3$ с	%
прямий	-7.58E-11	0.00	-8.30E-11	0.00
8w	-7.58E-11	0.03	-8.28E-11	0.20
4w	-7.62E-11	-0.59	-8.38E-11	-0.96
2w	-7.58E-11	-0.05	-8.35E-11	-0.55
1w	-7.09E-11	6.51	-7.09E-11	14.65
HMCE				
	1 max $t=2.32e-3$ с	%	2 max $t=6.16e-3$ sec	%
прямий	-7.64E-11	0.00	-8.38E-11	0.00
8w	-7.63E-11	0.08	-8.34E-11	0.49
4w	-7.68E-11	-0.51	-8.44E-11	-0.65
2w	-7.63E-11	0.16	-8.41E-11	-0.31
1w	-6.71E-11	12.23	-6.71E-11	20.00

В табл. 6 приведено горизонтальне переміщення точки  $D$  при розрахунках з утриманням різної кількості власних частот. Похибка у відсотках обчислювалась до рішення отриманого прямим методом. Результати розрахунків засвідчують похибку менше 1% в порівнянні з еталонним рішенням при використанні 2 і більше власних частот.

1. *Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L.* "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis" // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*- 1975.- 5, N 2, PP. 353-386.
2. *Баженов В.А., Гулярь А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
3. *Bate K., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.
4. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. -483с.
5. *Баженов В.А., Гулярь А.И., Піскунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - С. 3-29.
6. *Сахаров А.С., Кислюкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с

*Надійшло до редакції 24.11.2006 р.*

УДК 539.3

Гоцуляк Є.О., д-р техн. наук  
Лук'янченко О.О., канд. техн. наук  
Костіна О.В., канд. техн. наук  
Шах В.В.

## **СТІЙКІСТЬ СТІНОК ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ З УРАХУВАННЯМ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ ФОРМИ**

Розроблена методика дослідження стійкості циліндричних оболонок з урахуванням початкових недосконалостей. Розв'язані задачі нелінійної стійкості циліндричної оболонки, недосконалості прийняті із замірів реальних конструкцій.

Для повного опису загальних закономірностей напружено деформованого стану оболонок з параметрами, що залежать від багатьох факторів, апарат лінійних диференціальних рівнянь виявляється недостатнім, остільки в його рамки не вкладаються найбільш цікаві і характерні особливості нелінійних систем. До них відносяться не лише кількісна зміна параметрів системи в просторі, пов'язана із величиною початкових недосконалостей і способу прикладання навантаження, але й якісні зміни, що приводять до виникнення критичних станів, розгалуженню нових рішень і втраті стійкої рівноваги.

Математичні методи, що дозволяють досліджувати нелінійні диференціальні рівняння, надто складні і трудомісткі для дослідження складних нелінійних систем із багатоваріантними параметрами. В тих випадках, коли властивості оболонки і діюче на неї навантаження залежать від декількох факторів, оболонка може мати велику кількість критичних станів, розмірність яких на одиницю менше числа незалежно варійованих змінних. Проблема побудови таких різноманітностей у загальному випадку надзвичайно складна, тому в теорії диференціальних рівнянь вона часто замінюється задачею пошуку лише обмеженого об'єму інформації якісного характеру, що стосується питань аналізу кількісної зміни властивостей системи при варіюванні її параметрів.

Задачі нелінійної стійкості систем, які деформуються, в ряді випадків мають особливості, що полягають у чутливості до неправильної форми, нерівномірності прикладання навантаження, недоліках в технології виготовлення та в неоднорідності фізичних характеристик матеріалів. Наявність малих недосконалостей форми оболонки може значно понизити її критичне навантаження. Вказана особливість має велике практичне значення і тому дана робота націлена на дослідження впливу

початкових прогинів. Один із підходів вивчення запропонований Койгером і заключається в застосуванні асимптотичного аналізу, заснованого на загальній теорії закритичної поведінки. В даному випадку чуттєвість до недосконалостей описується як міра початкової післякритичної поведінки і визначення першого нульового коефіцієнта в степеневій залежності параметра навантаження від амплітуди форми втрати стійкості. Метод Койтера отримав широке поширення у розрахунковій практиці, але його використання накладає жорстке обмеження на величину недосконалості і її форму. Інший метод полягає в прямому аналізі нелінійного деформування оболонки із викривленою формою серединної поверхні на основі одного із сіткових методів дискретизації розв'язувальних співвідношень. Але такий спосіб не набув поширення до останніх часів через значні витрати машинного часу.

Розвитку нових ідей у розумінні нелінійної механіки в значній мірі допомогла поява комп'ютерів. Їх використання для нелінійного аналізу оболонок зараз досягло такого рівня, що дає можливість досліджувати глобальну поведінку тонкостінних систем, включаючи питання побудови в заданій області станів траєкторії навантаження, встановлення точок втрати стійкості і т. ін.

В той же час для задач практики необхідний аналіз різних типів недосконалостей у оболонках, які характеризуються не лише наявністю загального безперервного початкового фону недосконалостей обмеженої амплітуди, але й специфічними типами прогинів із середніми й великими амплітудами, які викликані технологічними причинами: виготовленням полотниць із листового прокату, їх зварюванням, монтажем приварюванням до них дискретних ребер, що мають свої недосконалості форми і т. ін.

В основу даної роботи покладено практичні задачі дослідження особливостей поведінки на різних стадіях навантаження з врахуванням фактичної геометрії таких тонкостінних конструкцій як стінки нафтоналивних резервуарів. Вказані оболонки мають великі геометричні розміри (діаметр до 60 м і висоту до 18 м і більше), тому натурні випробування на стійкість практично неможливі. Всі обмеження знімаються завдяки можливостям сучасних програмних комплексів, що дозволяють побудувати моделі по фактичній геометрії, задати відповідні граничні умови, прикласти різноманітні навантаження та отримати задовільні результати для практики.

Початкові недосконалості оболонок є фактичними відхиленнями твірних стінок резервуарів від вертикалі, які отримані в результаті польових досліджень, тобто є відхиленнями поверхні від ідеальної.



Відхилення дані для точок перетину твірних із горизонтальними границями поясів оболонки.

Розрахункові моделі оболонок створені в скінченноелементному програмному комплексі із використанням сплайн-кривих, що будуються по вихідним точкам твірних оболонок в циліндричній системі координат. Для цього вихідні відхилення твірних додаються до відповідних координат ідеальної поверхні і по зміненим координатам будуються сплайн-криві, а потім сплайнові поверхні. На основі моделі оболонки із недосконалою геометрією будується трикутна скінченноелементна сітка, при цьому кількість вузлів моделі набагато перевищує кількість вихідних точок твірних оболонок. В результаті формується нейтральний файл, що містить геометрію оболонки і блок з координатами вузлів скінченноелементної моделі в декартовій системі координат.

Значення відхилень малі у порівнянні із розмірами оболонки до того ж у обчислювальному комплексі не передбачений масштабний множник для їх візуалізації. Тому виникла необхідність створити програму, що дозволяє вводити масштабний множник для візуалізації відхилень твірних оболонок. Для візуалізації фактичних недосконалостей оболонки створена спеціальна програма, що дозволяє радіальні відхилення усіх точок твірних оболонок представляти у визначеному масштабі і перетворювати їх у відхилення вузлів скінченноелементної моделі в декартовій системі координат. Програма написана на мові ФОРТРАН99 і орієнтована на скінченноелементний комплекс. В результаті створений новий нейтральний файл із оновленим блоком координат вузлів моделі оболонки з урахуванням обраного масштабу відхилень.

Запропонований підхід реалізований на прикладі дослідження стійкості чотирьох резервуарів об'ємом 20000 кубічних метрів із розмірами  $R_{cp}=19.98$  м,  $H=17.9$  м, та товщиною стінки 15-7мм. Стінки мають специфічні відхилення від ідеальної циліндричної форми, що виникли в результаті виготовлення способом рулонування, під час транспортування та монтажу рулонів. Крім того початкові відхилення могли набути нових форм за період експлуатації, під час аварій, гідроударів, ремонтів тощо. Отже оболонки з наведеними вище параметрами мають змінну товщину стінки по висоті і мають реальні початкові недосконалості, отримані з результатів теодолітної зйомки.

Основні задачі дослідження полягали у визначенні критичних значень осьового стиснення та бокового тиску окремо для кожного навантаження та при їх сумісній дії для оболонки, що має недосконалості форми, відслідкувати процес втрати стійкості оболонки на різних етапах. Далі наведені результати на прикладі оболонки резервуара РВС №6С.

На рис. 1 а, б представлена отримана скінченноелементна модель оболонки резервуара в різних площинах, як приклад візуалізації фактичних недосконалостей моделі.

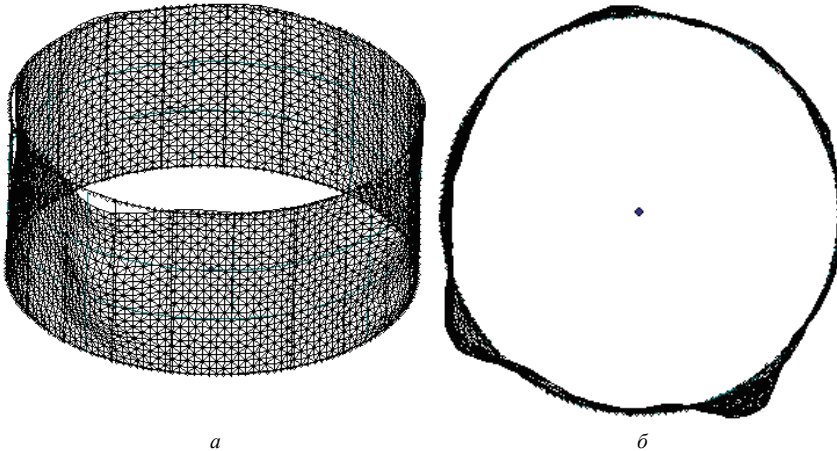


Рис. 1. Скінченноелементна модель оболонки, що побудована на основі фактичної геометрії стінок резервуарів: а) вид збоку; б) вид зверху

Дослідження оболонки під дією бокового тиску базується на використанні процедури обчислювального комплексу розв'язання нелінійної задачі статики. Будуються криві навантаження недосконалої оболонки резервуара для двох точок, в яких на різних стадіях навантаження спостерігаються максимальні переміщення та визначається значення коефіцієнта критичного навантаження. Таким чином, недосконала оболонка резервуара втрачає стійкість при  $\beta_{кр}=0.744$  (рис. 2).

На рис. 3 показані форми деформування оболонки резервуара на різних стадіях навантаження. Максимальні еквівалентні напруження із зовнішньої сторони оболонки (Plate Top VonMises Stress) при боковому тиску  $q=0.05q_{кр}^0$  і  $q=0.45q_{кр}^0$  спостерігаються в 3558 елементі і становлять 0.685МПа і 6.531МПа відповідно; при  $q=0.744q_{кр}^0$  - в 3555 елементі і становлять 40.894МПа; при  $q_{кр}=0.744q_{кр}^0$  - в 2722 елементі і становлять 65.658МПа. Максимальні еквівалентні напруження, що виникли при дії бокового тиску на оболонку резервуара, значно нижче розрахункового опору сталі  $R_y=240$ МПа.

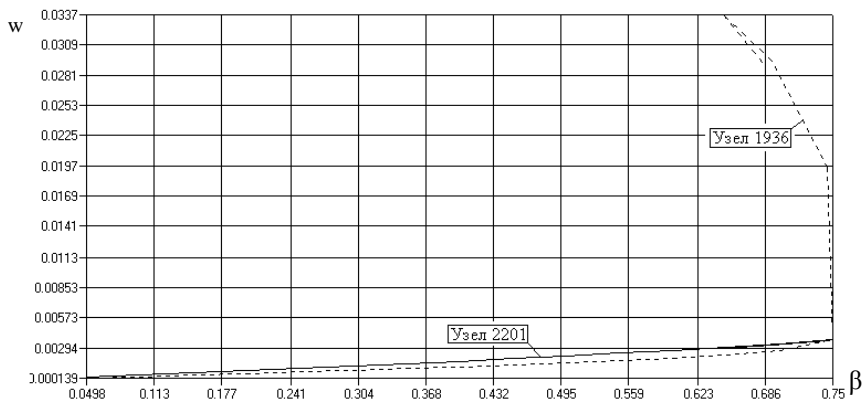
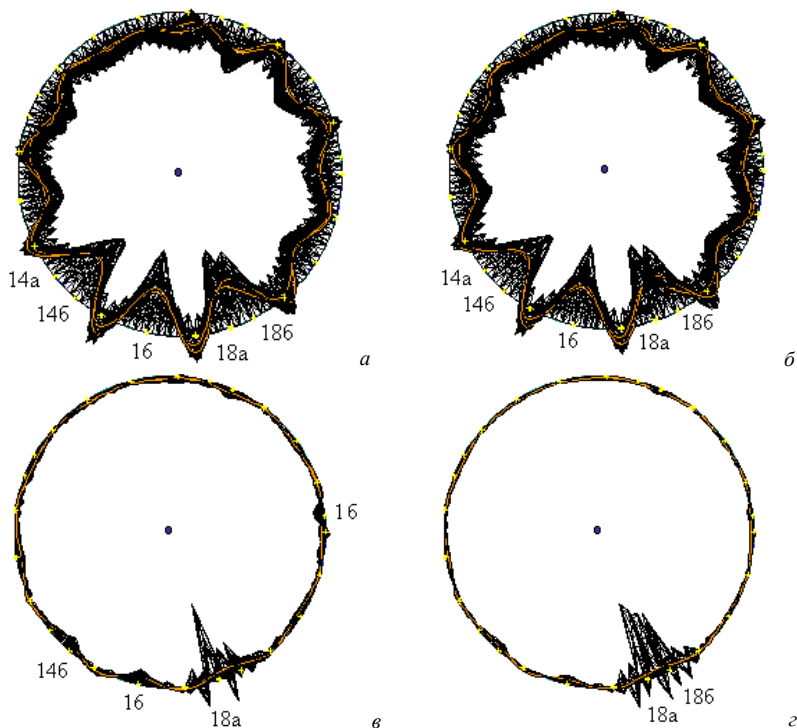


Рис. 2. Криві навантаження боковим тиском недосконалої оболонки резервуара

Рис. 3. Деформування недосконалої оболонки від бокового тиску на різних стадіях навантаження а)  $q = 0.05q_{кр}^0$ ; б)  $q = 0.45q_{кр}^0$ ; в)  $q = 0.744q_{кр}^0$ ; г)  $q_{кр} = -0.684q_{кр}^0$

Нижче наведені результати дослідження стійкості недосконалої оболонки резервуара при осьовому стисненні. Використовуючи процедуру розв'язання нелінійної задачі статичної обчислювального комплексу скінченноелементного аналізу, будуються криві навантаження недосконалої оболонки резервуара для трьох точок, в яких на різних стадіях навантаження спостерігаються максимальні переміщення і визначається значення коефіцієнта критичного навантаження. Таким чином, недосконала оболонка резервуара втрачає стійкість при  $\beta_{кр}=0.350$  (рис. 4).

На рис. 5 показані форми деформування оболонки резервуара на різних стадіях навантаження осьовим навантаженням. Максимальні еквівалентні напруження із зовнішньої сторони оболонки (Plate Top VonMises Stress) при осьовому стисненні  $P=0.05P_{кр}^0$  і  $P=0.35P_{кр}^0$  спостерігаються в елементі 5680 і відповідно становлять 3.144МПа та 22.384МПа; при  $P=0.426P_{кр}^0$  і  $P_{кр}=0.386P_{кр}^0$  - в елементі 4028 та відповідно становлять 151.647МПа і 139.736МПа. Максимальні еквівалентні напруження, що виникають при дії осьового стиснення на різних стадіях навантаження, нижче розрахункового опору сталі  $R_y=240$ МПа.

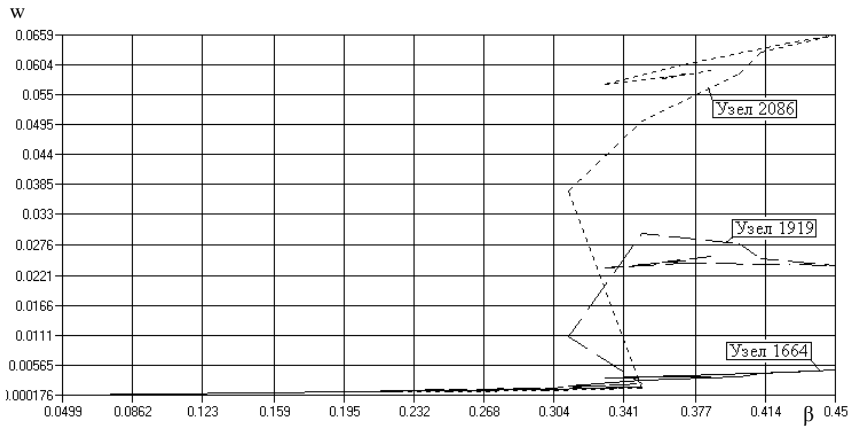


Рис. 4. Криві навантаження осьовим стисненням недосконалої оболонки резервуара

Дослідження стійкості циліндричних оболонок при комбінованій дії осьового стиснення і бокового тиску має особливий інтерес, так як подібне сполучення навантаження характерне для резервуарних конструкцій.

Комбіноване навантаження задається у вигляді  $[\alpha P_{кр}^0; (1-\alpha)q_{кр}^0]$ , де  $\alpha$  - безрозмірний коефіцієнт, який приймає значення від 0 до 1 з кроком 0.1;

$P_{кр}^0$  і  $q_{кр}^0$  - критичні значення осьового стиснення і бокового тиску відповідно при їх окремії дії на досконалу оболонку резервуара.

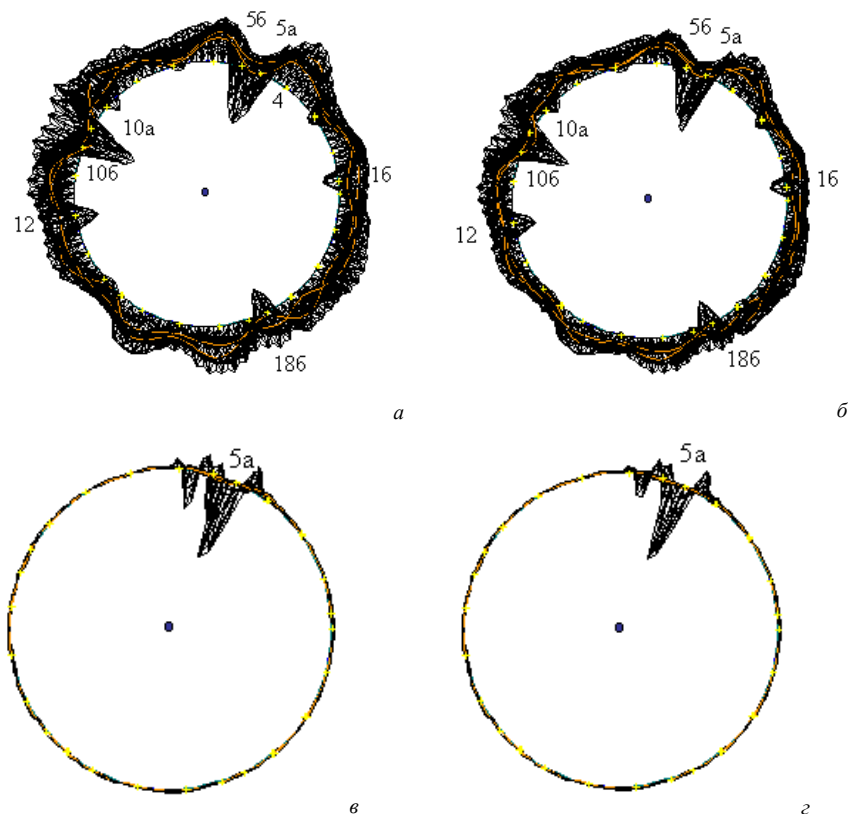


Рис. 5 Форми деформування недосконалої оболонки від дії осьового стиснення

а)  $P=0.05P_{кр}^0$ ; б)  $P=0.35P_{кр}^0$ ; в)  $P=0.426P_{кр}^0$ ; г)  $P_{кр}=0.386P_{кр}^0$

В результаті розв'язання нелінійної задачі статки визначається коефіцієнт критичного комбінованого навантаження  $\beta_{кр}^0$ , що дозволяє визначати критичні значення осьового стиснення і бокового тиску при їх сумісній дії на досконалу і недосконалу оболонку по формулі:  

$$P_{кр}^0 = \beta_{кр}^0 \alpha P_{кр}^0, \quad q_{кр}^0 = \beta_{кр}^0 (1 - \alpha) q_{кр}^0.$$

Значення коефіцієнта критичного навантаження  $\beta_{кр}^0$  було визначено при трьох сполученнях навантажень  $\beta_{кр}^0 [0.3P_{кр}^0; 0.7q_{кр}^0]$ ,  $\beta_{кр}^0 [0.5P_{кр}^0; 0.5q_{кр}^0]$ ,  $\beta_{кр}^0 [0.8P_{кр}^0; 0.2q_{кр}^0]$ .

Таким чином, для чотирьох резервуарів визначені граничні значення напружено-деформованих станів і побудовані діаграми стійкості, встановлені діапазони навантажень, в яких реалізуються умови забезпечення загальної стійкості при дії комбінованого навантаження від сумісної дії бокового тиску і осьового стиснення. В результаті отримані області стійкості оболонки, що обмежені кривими стану рівноваги і осями координат. Визначені крайні границі областей стійкості недосконалих оболонок резервуарів, які порівнюються з границями областей можливих комбінацій бокового тиску і вертикального навантаження (рис. 6 та 7).

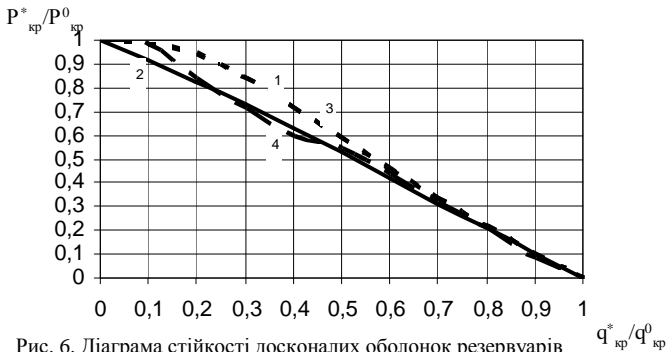


Рис. 6. Діаграма стійкості досконалих оболонок резервуарів при дії комбінованого навантаження  
1-РВС №2; 2-РВС №6А; 3-РВС №1, 4-РВС №6С

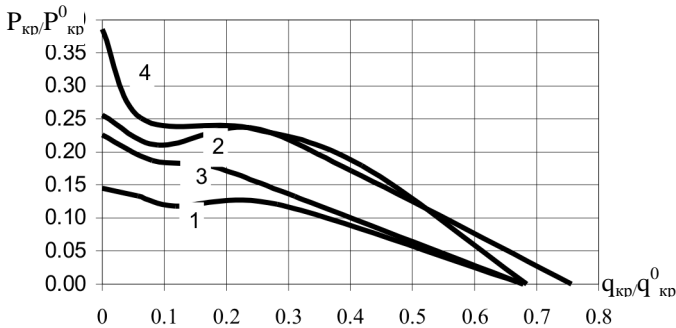


Рис. 7. Діаграма стійкості недосконалих оболонок резервуарів при дії комбінованого навантаження  
1-РВС №2; 2-РВС №6А; 3-РВС №1, 4-РВС №6С

Для перевірки надійності отриманих результатів (рис. 7), можна використовувати теоретичні формули [2] та формули для практичних розрахунків [14].  $\sigma_{cr1}=cEt/r$ ,  $\sigma_{cr2}=KE(r/l)(t/r)^{3/2}$  - критичне напруження в

оболонці від дії рівномірного стиснення паралельно твірним і відповідно при зовнішньому рівномірному тиску; де  $r$  – радіус оболонки;  $t$  – товщина оболонки;  $l$  – висота оболонки;  $c$  і  $K$  - коефіцієнти.

Відмінність між теоретичними і практичними формулами полягає лише у коефіцієнтах  $c$  і  $K$ , що відповідно дорівнюють  $c_T=0.05$ ,  $K_T=0.92$  і  $c_n=0.06$  і  $K_n=0.55$ . Співвідношення між цими коефіцієнтами визначають співвідношення між критичними напруженнями, а отже і критичними навантаженнями.  $c_T/c_n=0.1$  і  $K_T/K_n=0.6$ , згідно рис. 7  $P_{кр}/P_{кр}^0=0.148$  та  $q_{кр}/q_{кр}^0=0.68$  (крива 1), що підтверджує надійність отриманих результатів.

Слід відмітити, що задані недосконалості значно перевищують початковий фон. Тому при їх відсутності поведінка конструкції визначається характером і типом початкового фону і потребує трудомістких загальноприйнятих методів аналізу. Зокрема, при наявності специфічних недосконалостей із значними відхиленнями від ідеальної поверхні (характерно для стінок резервуарів), вплив початкового фону може бути послаблено і навіть подавлено, що спрощує поставлену задачу. Таким чином, виділення специфічних зон, що потребують окремої уваги дозволяє в деяких випадках знехтувати наявністю фону із обмеженою величиною прогинів. Такий підхід підкріплений теоретичними і експериментальними передумовами [10-12]. В такому випадку процес втрати стійкості може бути представлений наступним чином. Починається він із поступового розвитку докритичних деформацій по всій поверхні оболонки, які порівняно менші ніж зони із найбільшими відхиленнями. Перша докритична фаза досить стійка і тривала у часі. Початкові прогини можуть не лише залишатися без змін, а й трансформуватися у нові форми або може відбуватися процес злиття із утворенням геометрично більших недосконалостей. Ці зони і визначають в першу чергу несучу здатність оболонки. У закритичній стадії максимальні деформації відбуваються у вказаних зонах. Вищенаведені особливості деформування оболонок на різних етапах вичерпування несучої здатності можна відслідкувати за рис. 2-5.

На основі проведеного дослідження можна зробити висновок про забезпечення загальної стійкості стінок циліндричних оболонок та уточнити допустимі величини відхилень твірних від вертикалі. Розроблена методика, яка реалізована в алгоритмі та сучасному програмному комплексі у вигляді надбудови, дає можливість задавати реально вимірні недосконалості середньої поверхні оболонки, отримувати результати задовільні для практичних цілей і може бути запропонована для оцінки стійкості оболонок циліндричних резервуарів та пропонування заходів з підвищення їх стійкості.

1. *Арбош И.* Влияние начальных прогибов на устойчивость оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение, 1980. – С.222-259.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
3. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807с.
4. *Доннелл Л.Г., Ван К.* Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии // Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит.-ры. – 1951. – №408, С.91 – 107.
5. *Койтер В.Т.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Сб. перев. иностр. статей. – 1960. – №5, С.99 – 110.
6. *Гоцуляк Е.А., Прусов Д.Э., Аранчий Н.Е.* Об устойчивости геометрически несовершенных оболочек общего вида // Прикладная механика: Междунар. науч. журнал. – 2000. – Т.36. – № 11. – С. 82–87.
7. *Гоцуляк Е.А., Аранчий Н.Е., Костина Е.В.* Криволинейный конечный элемент в теории тонких оболочек произвольной конфигурации // Сборник трудов Международного симпозиума по проблемам тонкостенных пространственных систем.-Грузия, Тбилиси, 4-5 июля, 2001.-С.58-64.
8. *Є.О.Гоцуляк, А.Ю.Барвінко* Определение величины допустимых отклонений геометрической формы вставок при замене совмещенного в одну линию вертикального монтажного соединения стенки на соединение с разбежкой вертикальных сварных швов по поясам // Автомат. сварка–2003, №3.– С.36-40.
9. *Є.О.Гоцуляк, А.Ю.Барвінко, В.В.Шах* Стійкість стінок вертикальних сталевих резервуарів, підкріплених ребрами жорсткості // Металлические конструкции. Взгляд в прошлое и будущее. Сборник докладов. Ч.1. Изд-во “Сталь”, 2004 – С. 444-450.
10. *Гавриленко Г.Д., Ситник А.С.* Устойчивость ребристых оболочек с локальными вмятинами // Прик. механика. – 1985 . – 21, №11. – С.128-130.
11. *Гавриленко Г.Д.* Устойчивость и несущая способность гладких и ребристых оболочек с локальными вмятинами // Прик. механика. – 2004 . – 40, №9. – С.35-64.
12. *Гавриленко Г.Д.* Численный и аналитический подходы к исследованию несущей способности несовершенных оболочек // Прик. механика. – 2003. – 39, №9. – С.44-62.
13. *Гоцуляк Е.А., Заблоцкий С.В.* К исследованию устойчивости оболочек с несовершенствами // Прик. механика. – 1990 . – 26, №4. – С.49-55.
14. Строительные нормы и правила. СНиП II-23-81\*. Стальные конструкции/Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990. –96с.

*Надійшло до редакції 29.11.2006 р.*



УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук  
Кривенко О.П., канд. техн. наук  
Соловей М.О., канд. техн. наук

## ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ПРИ ВРАХУВАННІ ЗАЛЕЖНОСТІ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ ВІД ТЕМПЕРАТУРИ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ ОБОЛОНОК

Оцінений вплив врахування залежності властивостей матеріалу від температури на нелінійні розв'язки в задачі стійкості оболонок. Розглянуті три закони попереднього нагріву пологої сферичної панелі, що навантажується тиском.

Робота присвячена аналізу достовірності розв'язків, що отримуються за розробленою скінченноелементною методикою дослідження напружено-деформованого стану (НДС), стійкості та позакритичної поведінки тонких неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях [1-4]. Методика базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та положеннях моментної схеми скінченних елементів [5]. Такий підхід дозволяє на основі єдиної методики досліджувати тонкі оболонки з геометричними особливостями і неоднорідностями матеріалу при спільній дії силових і температурних полів. Достовірність методики обґрунтовується чисельними дослідженнями збіжності скінченноелементних розв'язків та їх порівнянням з відомими результатами для різних класів задач [2, 6-10].

Рис. 1. Сферична панель, що навантажується температурним і силовим полями

Досліджується збіжність і точність нелінійних розв'язків у задачах стійкості оболонок при врахуванні залежності властивостей матеріалу від температури. Розглядається полого осесиметрична сферична панель, що жорстко затиснута за контуром (рис. 1, а). Матеріал оболонки ізотропний. Панель знаходиться в температурному полі та навантажується зовнішнім рівномірним тиском. Розв'язок цієї задачі отриманий Б.Я.Кантором [11] варіаційним методом у високих наближеннях із застосуванням нелінійної теорії пологих оболонок [12]. Панель розглядалась як пластина сталюї товщини з початковою погіб'ю. Досліджувалися згин і стійкість панелі у "великому" при осесиметричному деформуванні.

Температурне поле прийняте сталим вздовж товщини оболонки та нерівномірним за планом. В [11] це навантаження представлено як нагрів

панелі однією й тією ж кількістю теплоти при трьох варіантах розподілу температурного поля вздовж радіусу  $r$  (рис. 1, б)

$$1. T(t, \bar{r}) = t\bar{r}^2; \quad 2. T(t, \bar{r}) = t\frac{1}{2}; \quad 3. T(t, \bar{r}) = t(1 - \bar{r}^2), \quad (1)$$

де  $\bar{r} = r/a$  – безрозмірна величина радіусу точки за планом,  $a$  – радіус опорного контуру.

Функції (1) підпорядковані умові нормування  $\int_0^1 \frac{T(t, \bar{r})}{t} \bar{r} d\bar{r} = \frac{1}{4}$ .

Фізично цей інтеграл (з точністю до коефіцієнта) розглядається в [11] як задана кількість теплоти. Таким чином, є можливість порівняти вплив на нелінійні розв'язки трьох законів (1), що відповідають збільшенню, сталості та зменшенню температури від полюса до краю.

За МСЕ дія на оболонку нагріву та тиску розглядалась як спільний процес навантаження, що виконується за два етапи.

1. На першому етапі панель навантажується температурним полем  $T(t, \bar{r})$ , параметр якого  $t$  змінюється від  $0^\circ\text{C}$  до заданої величини  $t_0$ . Процес нагріву, що супроводжується нелінійним деформуванням, розглядається як попереднє збурення НДС оболонки, яке при подальшому навантаженні впливає на її форми деформування та втрати стійкості.

2. На другому етапі при зафіксованому температурному полі панель навантажується тиском інтенсивністю  $q$ .

Результати досліджень подані з використанням безрозмірних параметрів

$$\bar{q} = a^4 q / (Eh^4), \quad \bar{t} = t\alpha(a/h)^2, \quad \bar{u}' = u' / h, \quad k = H/h, \quad (2)$$

де  $h$  – товщина оболонки;  $H$  – стріла підйому;  $k$  – параметр, що характеризує пологість панелі;  $E, \nu$  – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона;  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу;  $u'$  – переміщення вздовж декартової осі  $x'$ .

У розрахунках прийняті узгодженні з [11] наступні вихідні данні:  $a=1$  м,  $H=0.03$  м,  $h=0.01$  м,  $k=3$ ,  $t_0=500^\circ\text{C}$ ,  $\bar{t}=5$ ,  $E=2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ .

Згідно до [11] розглянутим панелям характерне осесиметричне нелінійне деформування, що підтвердилося при розрахунках за МСЕ. Тому за розрахункову скінченноелементну модель прийнята чверть оболонки.

Аналіз достовірності розв'язків виконувався шляхом порівняння результатів для двох випадків: при сталому значенні модуля пружності  $E$

та при заданій, як у роботі [11], його залежності від температури  $E = E(T)$ . При цьому нехтувалась залежність від температури коефіцієнта Пуассона та коефіцієнта лінійного розширення.

### **1. Стійкість панелі, властивості матеріалу якої не залежать від температури.**

При дослідженні панелей з незмінним значенням модуля пружності  $E$  маємо гарний збіг діаграм “навантаження-прогин у центрі” панелі для сіток  $10 \times 10$  СЕ,  $15 \times 15$  СЕ та  $20 \times 20$  СЕ (рис. 2). Беручи до уваги можливу складну форму деформування оболонки у позакритичній області, за розрахункову можна прийняти сітку  $20 \times 20$  СЕ. У третьому варіанті розподілу температурного поля для уточнення форми діаграми “ $\bar{q} - \bar{u}^I$ ” у зоні верхньої критичної точки необхідно збільшити сітку вздовж радіуса опорного контуру до  $30 \times 20$  СЕ (рис. 2, в, г).

При першому законі розподілу температурного поля  $T(t, \bar{r})$  діаграма “ $\bar{q} - \bar{u}^I$ ” (рис. 2, а) добре співпадає з результатом роботи [11]. Для другого варіанта розподілу функції  $T(t, \bar{r})$  результат в [11] відсутній. При третьому законі температурного нагріву маємо відносно розв’язку [11] невеликий зсув діаграми вправо (рис. 2, в). Причиною цього є розбіжність розв’язків вже на першому етапі навантаження, на якому згідно [11] попередній нагрів викликає більш інтенсивне деформування оболонки. Розходження розв’язків МСЕ і [11] можна пояснити різною точністю моделювання процесу температурного навантаження. Це підтверджується тим фактом, що розв’язки для ненагрітої панелі повністю збігаються (криві  $T=0$ , рис. 2, б).

Для різних законів нагріву маємо добрий збіг величин верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^e$  (табл. 1). Їх розходження становить  $-7.4\% + 9.6\%$ . Для всіх трьох варіантів попереднього нагріву жорсткість панелі суттєво підвищується, а величина верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^e$  у порівнянні з ненагрітою оболонкою збільшується відповідно в 1.26, 1.65, 2.62 рази. Послідовне збільшення величини  $\bar{q}_{кр}^e$  від першого до третього варіантів пояснюється тим, що в них відповідно збільшується температура нагріву найбільш деформівної центральної частини панелі. Зауважимо, що третій варіант нагріву призводить до найбільшого посилення жорсткості оболонки у докритичній стадії нелінійного деформування та до зворотного ефекту в позакритичній області (рис. 3).

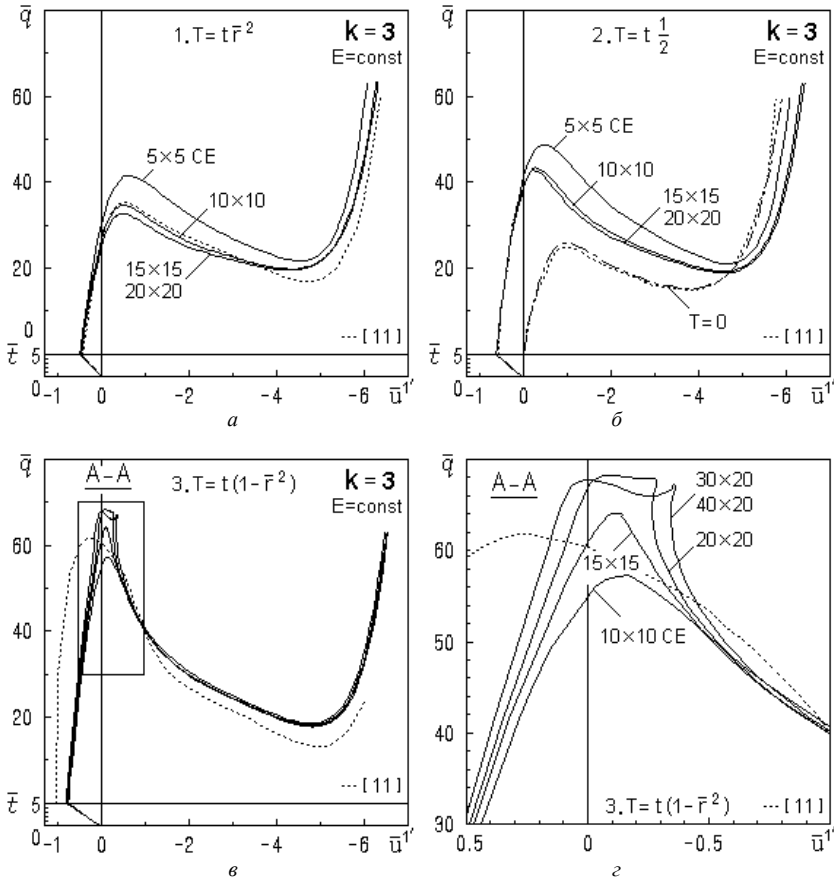


Рис. 2. Діаграми “навантаження-прогин у центрі” панелі

У першому та другому варіантах нагріву форма деформування панелі на етапі навантаження тиском співпадає з формою загальної втрати стійкості оболонки (прокладає її центральна частина). На рис. 4, б, в форми деформування відповідають критичним точкам “а” і “d” на діаграмах “ $\bar{q} - \bar{u}^I$ ” (рис. 3). У третьому варіанті нагріву на етапі навантаження тиском спочатку реалізується форма деформування, що відповідає формі панелі при місцевій втраті стійкості. Форми (рис. 5, б-г) зображені для критичних точок “а”, “b”, “c” на кривих “ $\bar{q} - \bar{u}^I$ ”. Надалі форма деформування послідовно

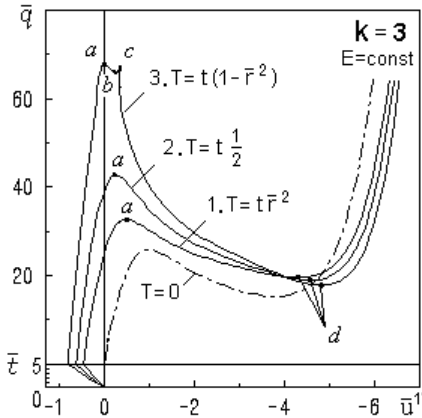


Рис. 3. Порівняння розв'язків для різних законів попереднього нагріву панелі

трансформується у форму загальної втрати стійкості оболонки (рис. 5, д), яка відповідає критичній точці “d” на діаграмі “ $\bar{q} - \bar{u}^I$ ” (рис. 3).

Таблиця 1

Порівняння розв’язків у задачах стійкості сферичних панелей ( $E=const$ )

№ п/п	Закон нагріву	$\bar{q}_{кр}^e, E=const$		$\Delta, \%$
		МСЕ	[11]	
1	$T = t\bar{r}^2$	32.58	35.2	-7.4
2	$T = t\frac{1}{2}$	42.64	—	—
3	$T = t(1 - \bar{r}^2)$	67.76	61.8	9.6
4	$T = 0$	25.85	24.4	5.8

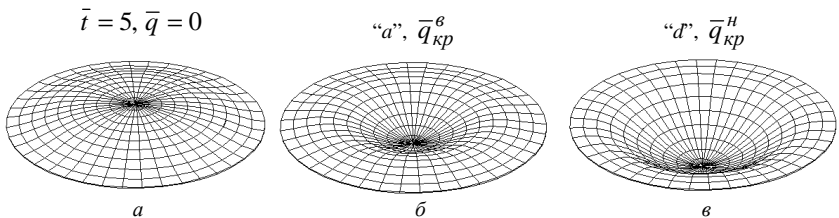


Рис. 4. Форми деформування панелі в характерних точках діаграм “навантаження-прогин” при  $T = t\frac{1}{2}$  та  $T = t\bar{r}^2$  ( $E=const$ )

$\bar{i} = 5, \bar{q} = 0$  “a”,  $\bar{q}_{кр}^e$  “b”

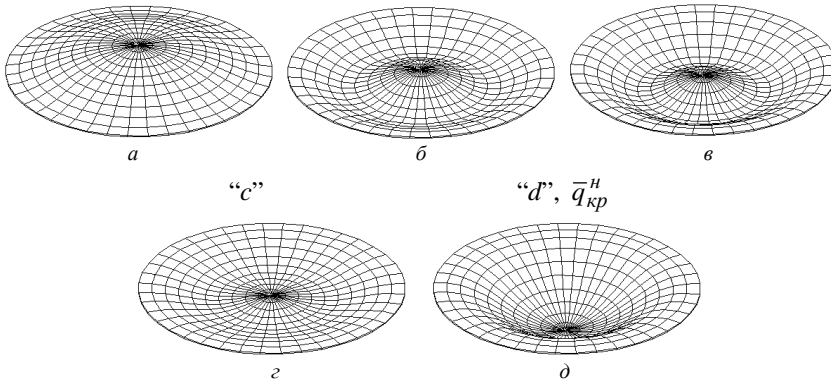


Рис. 5. Форми деформування панелі в характерних точках діаграми “навантаження-прогин” при  $T = t(1 - \bar{r}^2)$  ( $E = \text{const}$ )

## 2. Стійкість панелі, властивості матеріалу якої залежать від температури.

Розроблена методика дозволяє враховувати залежність фізико-механічних параметрів матеріалів оболонки від температури, за рахунок перевизначення на кожному кроці навантаження їх технічних сталей. В якості приклада порівняні розв’язки МСЕ і роботи [11], в якій враховується залежність модуля пружності матеріалу оболонки від температури  $E = E(T)$ .

Залежність величини модуля пружності від температури згідно [11] прийнята в наступному вигляді

$$E(T) = E_0 \left( 1 - \lambda \frac{T(\bar{r})}{t} \right), \quad (3)$$

де  $\lambda = \frac{\beta t}{E_0}$ , коефіцієнт  $\beta = 10^3$  кг/(см<sup>2</sup>·град) [13]. При  $E_0 = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>

та  $t_0 = 500$  °C маємо  $\lambda = 0.25$ .

Дослідження показали, що характер збіжності розв’язків таких самий як і в першому дослідженні ( $E = \text{const}$ ). За достатню сітку для трьох законів попереднього нагріву (1) відповідно прийняті сітки 20×20 СЕ, 20×20 СЕ, 30×20 СЕ. Порівняння з результатами [11] показало гарний збіг діаграм для перших двох законів нагріву (рис. 6, а, б). У третьому варіанті маємо невеликий зсув діаграми МСЕ вправо (рис. 6, в). Як і вище, причина

розходження розв'язків МСЕ і [11] пояснюється різною точністю моделювання температурного навантаження. При всіх трьох законах попереднього нагріву спостерігається гарний збіг величини верхнього критичного навантаження (розбіг складає  $6.3\% + 8.0\%$ , табл. 2).

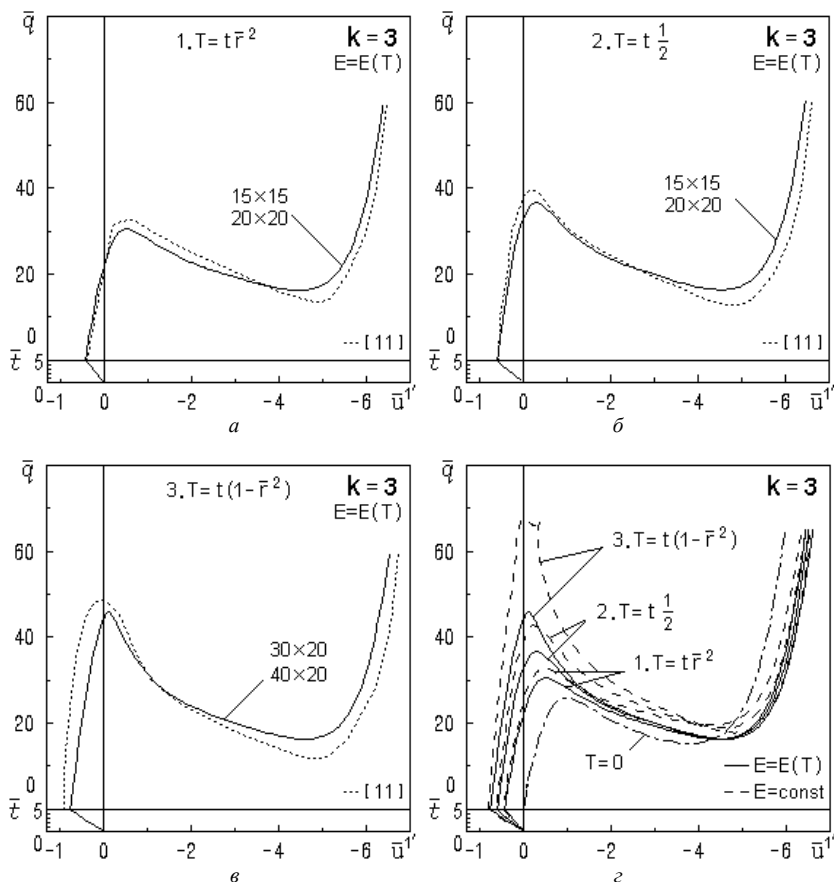


Рис.6. Діаграми “навантаження-прогин у центрі” панелі при врахуванні залежності  $E=E(T)$

Дослідження показали, що характер збіжності розв'язків такий самий як і в першому дослідженні ( $E=const$ ). За достатню сітку для трьох законів попереднього нагріву (1) відповідно прийняті сітки  $20 \times 20$  СЕ,  $20 \times 20$  СЕ,  $30 \times 20$  СЕ. Порівняння з результатами [11] показало гарний збіг діаграм

для перших двох законів нагріву (рис. 6, а, б). У третьому варіанті маємо невеликий зсув діаграми МСЕ вправо (рис. 6, в). Як і вище причина розходження розв'язків МСЕ і [11] пояснюється різною точністю моделювання температурного навантаження. При всіх трьох законах попереднього нагріву спостерігається гарний збіг величини верхнього критичного навантаження (розбіг складає  $6.3\% \div 8.0\%$ , табл. 2).

Таблиця 2

Порівняння розв'язків у задачах стійкості сферичних панелей ( $E=E(T)$ )

№ п/п	Закон нагріву	$\bar{q}_{кр}^g, E=E(T)$		$\Delta, \%$
		МСЕ	[11]	
1	$T = t\bar{r}^2$	30.53	32.6	-6.3
2	$T = t\frac{1}{2}$	36.63	39.8	-8.0
3	$T = t(1 - \bar{r}^2)$	45.80	49.0	-6.5

Нагрів призводить до зменшення модуля пружності  $E$  і, як наслідок, до помітної різниці діаграм “навантаження-прогин” для варіантів  $E=const$  та  $E=E(T)$  (рис. 6, г). Величина верхнього критичного навантаження зменшилася відповідно на 6.3%, 14.1% і 32.4% (табл. 1, табл. 2).

При всіх законах попереднього нагріву для варіанта  $E=E(T)$  на другому етапі навантаження оболонки тиском характерною є форма втрати стійкості з проклацуванням її центральної частини (рис. 4, б, в).

Таким чином, можна зробити висновок, що в задачах стійкості оболонок з високим рівнем температурного навантаження необхідно враховувати залежність властивостей матеріалу від температури.

1. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатопарових поребриних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
2. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности. - 1999. - N 5. - С. 96-102.
3. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // Математическое моделирование в механике



- сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
4. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
  5. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюкий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Головное изд-во. - 1982. - 480 с.
  6. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гладких, ребристих та послаблених вирізами гнучких пологих панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА. - 2000. - Вип. 67. - С. 92-103.
  7. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гнучких пологих панелей ступінчато-змінної товщини // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Збірник наукових праць. - Спец. вип. - Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2001. - С. 7-11.
  8. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив параметрів ребер на стійкість гнучких панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 2001 р.- Вип. 69. - С. 18-24.
  9. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // *Авиационно-космическая техника и технология.* - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
  10. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості оболонок при різних законах нерівномірного нагріву // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 2002 р.- Вип. 70. - С. 104-109.
  11. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек - Киев: Наукова думка, 1971. - 136 с.
  12. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформированных систем. - М.: Наука. - 1967. - 984 с.
  13. *Безухов Н.И. и др.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. - М.: Машиностроение, 1965.

*Надійшло до редакції 01.12.2006 р.*

УДК 539.3

Погорелова О.С., канд. фіз.-мат. наук  
Постнікова Т.Г., канд. техн. наук  
Гончаренко С.М.

## **ЧИСЕЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ УДАРУ СИЛОЮ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ**

За допомогою чисельного аналізу встановлено, що введення в рівняння руху віброударної системи сили контактної взаємодії, що змінюється за законом Герца, дозволяє моделювати удар між тілами, що співударяються, як при гармонічному, так і при випадковому зовнішньому навантаженні. Отриманий закон руху тіл віброударної системи на всій часовій осі, включаючи період удару. Приділено увагу питанню ефективності гасіння коливань.

### **1. Постановка проблеми**

Вивченню руху тіл у віброударних системах і сил взаємодії між тілами присвячено ряд статей і монографій, наприклад [1,2]. Для опису і моделювання ударної взаємодії тіл в таких системах існують різні підходи.

При першому - розрахунок систем з ударними взаємодіями мас засновується на припасуванні розв'язків, що описують суміжні інтервали руху, розділені моментами зіткнень. На етапах руху між ударами й у моменти зіткнень застосовуються різні математичні моделі. У проміжках між зіткненнями мас рух системи звичайно описується лінійними диференціальними рівняннями, а моменти зіткнень - кінцевими співвідношеннями стереомеханічної теорії удару. Для побудови періодичних режимів руху спосіб припасування використовується в сполученні з методом граничних умов із використанням коефіцієнту відновлення. При цьому трудомісткість розрахунків швидко зростає зі збільшенням числа степенів вільності системи і кількості зіткнень її елементів за період руху. Крім того цей підхід не дозволяє реалізувати єдину форму запису рівнянь руху на всій часовій осі і отримати результати загального характеру, що описують якісні властивості руху.

На відміну від першого підходу, заснованого на роздільному опису міжударних рухів і процесу удару, другий підхід дозволяє перейти до єдиної форми запису рівнянь руху віброударних систем на всій часовій осі. Це досягається введенням нелінійних залежностей, що відображають процес силової контактної взаємодії тіл, які співударяються. Такий підхід істотно спрощує побудову, пов'язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем.

У даній роботі приводяться результати чисельних досліджень віброударних режимів коливань, що виникають в пружній системі під дією зовнішнього навантаження. Для моделювання силових характеристик контактної взаємодії застосовується закон Герца. У літературі цей закон часто використовується для дослідження самого процесу удару, залежності максимального значення контактної сили і тривалості удару від форми контактуючих поверхонь, фізичних характеристик матеріалів, початкової швидкості удару і т.п. Проте авторів цікавила проблема побудови коливального руху віброударних системи на всій часовій осі, як в період удару, так і між ударами.

Мета роботи полягає в тому, щоб отримати єдину форму запису рівнянь руху віброударної системи на всій часовій осі, моделюючи удар тіл, що співударяються, силою контактної взаємодії; виконати аналіз віброударних коливань пружної системи під дією гармонічного і випадкового навантаження; встановити, при яких значеннях параметрів приєднане тіло є ударним гасителем коливань основного і наскільки ефективним є таке гасіння.

## 2. Закон контактної взаємодії

Перш за все обумовимо ще раз, що за закон, який моделює силу контактної взаємодії між тілами, що співударяються, прийнятий фундаментальний закон Герца, який описує удар між пружними тілами. Цей закон, не дивлячись на те, що він базується на певних ідеальних умовах, широко застосовувався в різних ситуаціях, пов'язаних з ударом. І на сьогодні закон Герца залишається найбільш поширеним принципом, який використовується для моделювання ударної поведінки.

В попередніх роботах [3,4] для моделювання сили контактної взаємодії, автори використовували інші закони зміни сили – експоненціальний та комбінований. Але при цьому виникали проблеми, які було важко розв'язати. Ці закони не враховували деякі важливі обставини, наприклад залежність моделюючої сили від механічних властивостей матеріалів тіл. Закон Герца вільний від цих недоліків.

Закон Герца встановлює, що для пружного удару тіл сила контактної взаємодії  $F(t)$  має вигляд [5,6]:

$$F(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (1)$$

де  $\alpha(t)$  - відносне зближення тіл,  $K$  - константа Герца:

$$K = \frac{4}{3} \cdot \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}. \quad (2)$$

Тут  $q$ ,  $A$  і  $B$  – табличні константи, які залежать від місцевої геометрії зони контакту, а

$$\delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi}, \quad \delta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2 \pi}, \quad (3)$$

де  $\mu_i$  і  $E_i$  – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл.

Будемо розв'язувати поставлені вище задачі на модельних прикладах.

### 3. Віброударний рух робочих частин робота

У роботі [7] запропонований варіант апроксимації розв'язку рівнянь руху поліномами Тейлора низького порядку. Така апроксимація є можливою завдяки тому, що тривалість удару дуже мала, і в [7] розглядається лише період удару і не розглядається рух ударної системи до і після удару. Основне завдання [7] – визначити контактну ударну силу, яка виникає при співударяннях робочих частин робота. Вже в першому наближенні отримані зручні формули, якими можна скористатися для знаходження контактної сили. На жаль, в базовій формулі в цій статті міститься помилка, а друге наближення взагалі не дає обіцяного результату.

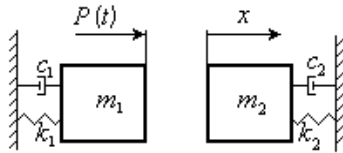


Рис. 1

У [7] модель має параметри, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Параметри моделі робочих частин робота

Назва характеристики	Перше тіло	Друге тіло
Маса $m_i$ , кг	2.0	0.5
Парціальна частота коливань $\omega_i$ , рад/с	70.71067812	141.4213562
Коефіцієнт демпфірування $\xi_i$	0.07071	0.10606

Диференціальні рівняння руху системи мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\xi_1 \omega_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= P(t) - F(t) \\ \ddot{x}_2 + 2\xi_2 \omega_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= F(t) \end{aligned}, \quad (4)$$

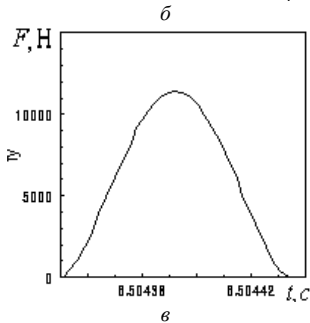
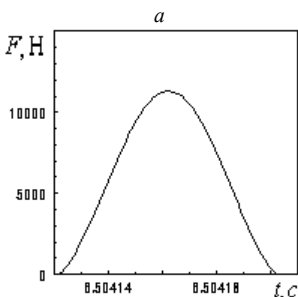
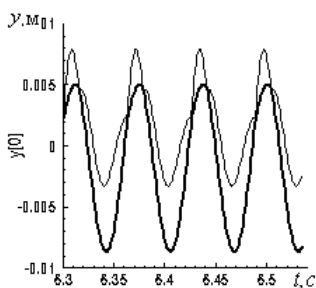


Рис. 2

$$\text{де } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \quad \xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1},$$

$$\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}; \quad F(t) - \text{контактна сила, що діє}$$

лише в період удару. За зовнішнє навантаження прийняте гармонічне  $P(t) = P_1 \cos(\omega t)$ ,  $P_1 = 5,0$  Н. Інші дані прийняті такими: частота зовнішнього навантаження  $\omega = 100,0$  рад/с, модулі Юнга  $E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коефіцієнти Пуассона  $\mu_1 = \mu_2 = 0,3$ , константи Герца  $A = B = 0,5 \text{ м}^{-1}$ ,  $q = 0,318$ .

Чисельно інтегруємо рівняння (4), використовуючи для сили  $F(t)$  закон Герца (1).

Графіки переміщень обох тіл, фазові траєкторії і графіки контактної сили в залежності від часу ідентичні з графіками, отриманими при використанні формули першого наближення, наведеної в [7]. На рис. 2,а наведено графік переміщень обох тіл в залежності від часу, товстою лінією – графік руху першого тіла, тонкою – другого. На графіку добре видно удар і зміну руху другого тіла після удару. На рис. 2,б наведено графік контактної сили  $F(t)$  саме в період удару, отриманий при чисельному інтегруванні рівнянь (4), а на рис. 2,в – за допомогою формули першого наближення з

[7]. Слід відзначити, що їх ідентичність говорить скоріше про гарну якість результату, отриманого в [7], оскільки там дається наближений розв'язок, і ми використовуємо їх перше наближення.

#### 4. Дослідження віброударних режимів коливань двомасової системи

Тепер розглянемо двомасову віброударну систему, схематично зображену на рис. 3. Основне тіло – це лінійний осцилятор маси  $m_1$ , що характеризується жорсткістю  $k_1$  і коефіцієнтом демпфірування  $c_1$ . Приєднане тіло маси  $m_2$ , яке може служити гасителем коливань основного, пов'язане з

ним пружиною жорсткості  $k_2$  з коефіцієнтом демпфірування  $c_2$ . За початок відліку прийняте положення, при якому відстань між тілами дорівнює  $D$  і обидві пружини є недеформованими. Переміщення першого тіла визначається координатою  $x_1(t)$ , другого –  $x_2(t)$ . Основне тіло знаходиться під дією

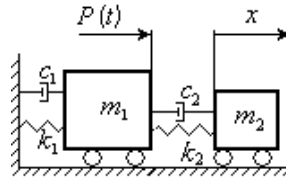


Рис. 3

зовнішнього навантаження  $P(t)$ . Припускається, що під час руху структура системи може змінюватися. Це відбувається внаслідок еволюції динамічних станів вібросистеми і виникнення між її елементами ударних контактів.

Рівняння руху системи мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 + 2\xi_2\omega_2\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) &= P(t) - F(t), \\ \ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) &= F(t) \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ ;  $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$ ,  $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$ ;  $\chi = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $F(t)$  –

моделююча сила контактної взаємодії, яка описується законом (1) і діє лише під час удару. У зв'язку з цим при чисельному інтегруванні рівнянь руху (5) необхідно проводити уточнення початкових умов удару: моменту початку удару, його тривалості, відносної швидкості зближення тіл ( $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ ). Параметри вібросистеми наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Параметри двомасової віброударної системи

Назва характеристики	Основне тіло	Приєднане тіло
Маса $m_i$ , кг	1000.0	100.0
Парціальна частота коливаль $\omega_i$ , рад/с	6.283185	5.646
Коефіцієнт демпфірування $\xi_i$	0.03629	0.2
Константи Герца, які залежать від геометрії контактуючих поверхонь $A, B$ , 1/м	$A=1.0, B=1.0$	
$q (A/B)$	0.3180	
Коефіцієнт Пуассона $\mu_i$	0.3	0.3
Модуль Юнга $E_i$ , Н/м <sup>2</sup>	$2.09934 \cdot 10^{11}$	$2.09934 \cdot 10^{11}$
Початкова відстань між тілами $D$ , м	0.05	

У статті наведені результати чисельних досліджень коливань пружної віброударної системи (5) при різних реалізаціях процесу навантаження - періодичній і випадковій.

#### 4.1. Гармонічне навантаження

На рис. 4 показані основні характеристики усталених вимушених коливань системи (5) при гармонічному навантаженні  $P(t) = P_2 \cos(\omega t)$ . Частота зовнішнього навантаження  $\omega = 9,22566$  рад/с, інтенсивність  $P_2 = 14142,14$  Н. Характеристики руху основного тіла зображені товстою лінією, а приєднаного – тонкою. На графіку залежності переміщень тіл ударної системи від часу (рис.4, а) добре видно удар і видно, як після удару приєднане тіло відскакує від основного. На фазовій траєкторії (рис. 4, б) видно, як в момент удару швидкості тіл системи стрибком змінюють своє значення, а для приєднаного тіла і напрямком. При цьому відносна швидкість тіл залишається тією же самою за величиною, але змінює свій знак: до удару  $-(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 5.4 \text{ м/с}^2$ , після удару  $-(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -5.4 \text{ м/с}^2$ , як і має бути при пружному ударі.

Графік залежності від часу відштовхуючої контактної сили, що виникає в моменти ударів при коливаннях вібросистеми, наведений на рис.4, в. У зв'язку з тим, що тривалість удару мала, графік зміни сили контактної взаємодії саме за час удару в більшому масштабі за часом наведений на рис.4, г.

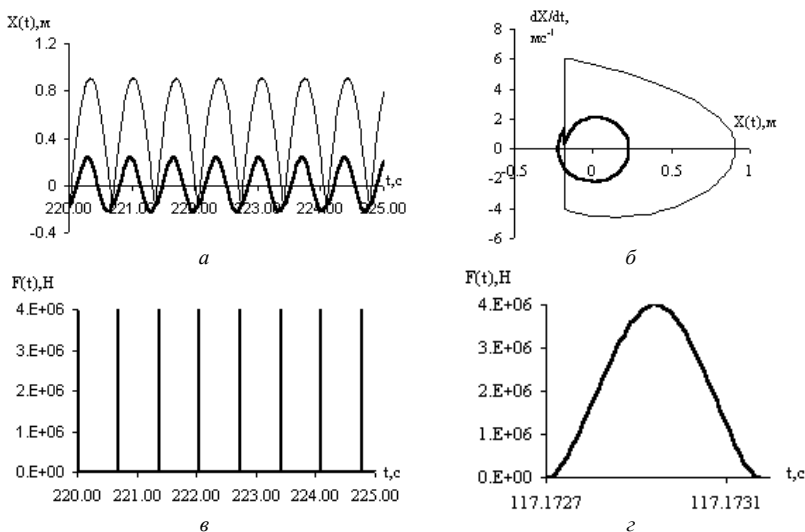


Рис. 4

Отримані результати доводять, що введення в рівняння руху віброударної системи сили контактної взаємодії, що змінюється за законом Герца, добре моделює удар і дозволяє отримати закон руху віброударної системи на всій часовій осі, включаючи період удару.

#### 4.2. Випадкове навантаження

При чисельних дослідженнях випадкових коливань пружної віброударної системи (5) навантаження моделювалося стаціонарним випадковим процесом з прихованою періодичністю. Однобічна спектральна щільність такого процесу може бути представлена формулою [8, 9]:

$$S(\omega) = \frac{2\sigma_{вин}^2}{\pi} \frac{\alpha\theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (6)$$

де:  $\sigma_{вин}^2$  - дисперсія процесу,  $\theta$  - характерна частота процесу,  $\alpha$  - параметр кореляції.

З теорії випадкових процесів відомо [10], що реалізація стаціонарного випадкового процесу може бути обчислена за допомогою його спектральної щільності за формулою:

$$P(t) = \sum_{i=1}^N \cos(\omega_i t + \delta_i) \sqrt{2S(\omega_i) \Delta\omega_i}, \quad (7)$$

де  $N$  - кількість гармонічних складових;  $\delta_i$  - вихідні фази, що є випадковими числами, рівномірно розподіленими на відрізку від 0 до  $2\pi$ . Графік випадкового навантаження  $P(t)$  при  $N=100$ ,  $\theta=6$  рад/с і  $\alpha=5$  рад/с наведено на рис. 5,а. Випадковий процес навантаження був вибраний таким, щоб дисперсії гармонічного і випадкового навантажень співпадали  $\sigma_{вин}^2 = \sigma_2^2 = P_2^2 / 2$ . Шляхом чисельного інтегрування рівнянь (5) при даному випадковому навантаженні були визначені основні характеристики вимушених коливань обох тіл пружної віброударної системи. На рис. 5,б чорним кольором зображено графік переміщень основного тіла, а сірим - приєданого. На рис. 5, в,г представлені переміщення елементів системи і значення контактної сили на невеликому інтервалі часу. Як і при гармонічному навантаженні, на графіку переміщень рис.5,в добре видно, як в результаті удару приєдане тіло відскакує від основного. На рис. 5,д наведені накладені один на один графіки залежності контактної сили від часу лише за період удару (за 3 останні удари з рис. 5,г) у збільшеному масштабі за часом, звідки видно, що тривалість удару є тим меншою, чим більшим є значення контактної сили, що діє між тілами. Таким чином, з цих графіків



виходить, що при випадковому навантаженні сила, описана законом Герца, також достатньо точно моделює пружний удар, що дозволяє отримати рівняння руху віброударної системи і їх розв'язки на всій часовій осі, включаючи період удару.

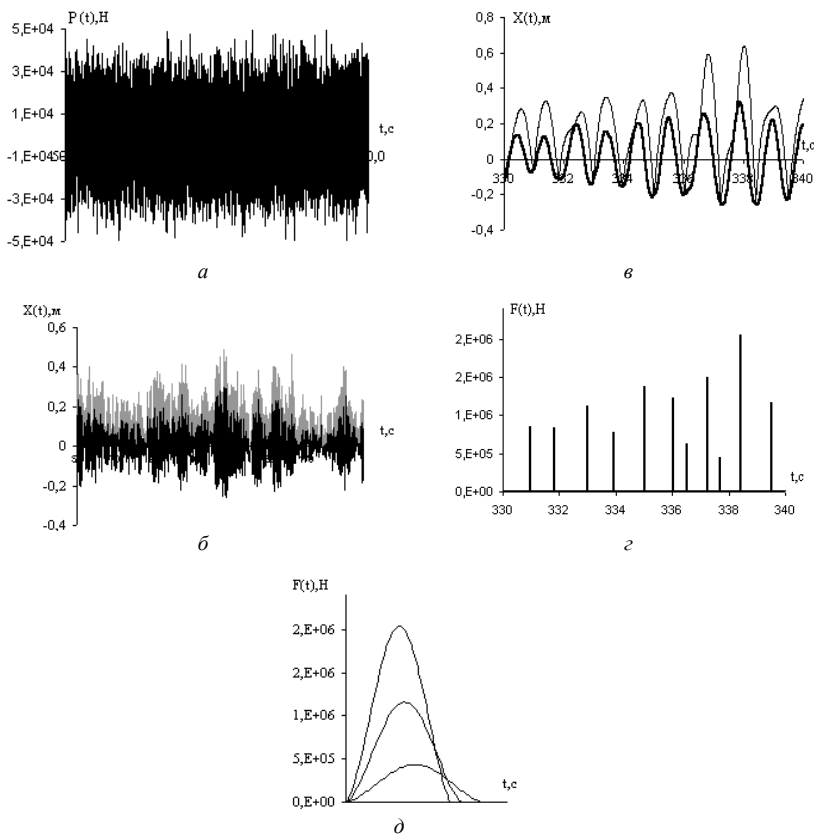


Рис. 5

### 5. Приєднане тіло як гаситель коливань основного

В ході досліджень розглядалося питання про ефективність використання приєданого тіла як гасителя коливань основного. Було проведене порівняння значень середньоквадратичного відхилення переміщень основного тіла в трьох різних варіантах: коли приєднане тіло відсутнє; коли приєднане тіло коливається без обмежень, тобто може служити динамічним гасителем; коли приєднане тіло в процесі коливань співударяється з основним тілом, тобто може грати роль ударного

гасителя. Вважаючи випадковий процес переміщень стаціонарним і ергодичним, знаходимо середньоквадратичне відхилення по його достатньо довгій часовій реалізації.

Результати досліджень наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Середньоквадратичне відхилення переміщень основного тіла ( $m^2$ )

Вид навантаження	Приєднане тіло відсутнє	Режим динамічного гасителя	Режим ударного гасителя
Випадкова $\sigma_{вип}=10000$ Н	0,00905	0,00322	0,00697
Гармонічна $\omega=7,23$ рад/с $P_2=14142,14$ Н	0.57824	0.51755	0.27173
Гармонічна $\omega=9,23$ рад/с $P_2=14142,14$ Н	0.04786	0.05344	0.02215

З таблиці видно, що при дії на віброударну механічну систему з зазначеними параметрами випадкового навантаження приєднане тіло є достатньо ефективним гасителем коливань основного. При цьому динамічний гаситель ефективніший, ніж ударний. Навпаки, при дії на систему гармонічного навантаження при частоті  $\omega=7,23$  рад/с, ударний гаситель ефективніший за динамічний, а при частоті зовнішнього навантаження  $\omega=9,23$  рад/с динамічний гаситель зовсім не гасить коливання основного. У таблиці 3 наведені результати досліджень періодичних коливань вібросистеми при різних значеннях частоти зовнішнього гармонічного навантаження. Результати показують, як зростають розмахи коливань основного тіла, коли частота зовнішнього навантаження наближується до парціальної частоти основного тіла, тобто в області, близької до резонансу.

Виконані дослідження показують, наскільки сильно коливання основного тіла залежать як від параметрів механічної системи, так і від параметрів навантаження. Особливо важливим стає підбір оптимальних параметрів гасителя при різних видах навантаження. Автори статті мають деякий досвід розв'язку задач оптимізації [11] і сподіваються надалі розглянути це питання детальніше.

## 6. Висновки

Отже, результати досліджень доводять, що введення в рівняння руху віброударної пружної системи сили контактної взаємодії, що змінюється за законом Герца, дозволяє моделювати удар між тілами, що

співударяються, як при гармонічному, так і при випадковому зовнішньому навантаженні і отримати закон руху тіл віброударної системи на всій часовій осі, включаючи період удару. Це, у свою чергу, дає можливість надалі застосувати метод продовження рішення за параметром і побудувати криву навантаження і амплітудно-частотну характеристику віброударної системи [12].

Слід зазначити також важливість дослідження можливості використання приєднаного тіла як гасителя коливань основного. Для того, щоб приєднане тіло служило хорошим гасителем, параметри віброударної системи повинні бути підібрані певним чином. Питання оптимального підбору параметрів гасителя вимагає подальшого дослідження.

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.:Наука, 1978. – 352 с.
2. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997 – 336 с.
3. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при моделюванні удару із застосуванням нелінійних силових характеристик контактної взаємодії// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2004.-Вип.74.- С.14-23.
4. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Дослідження віброударних усталених коливань висотної споруди з маятниковим гасителем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2005.-Вип.76.- сс.35-64.
5. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.
7. *Q.F. Wei , W.P. Dayawansa, and P.S. Krishnaprasad* Approximation of dynamical effects due to impact on flexible bodies. – Proceeding of the American Control Conference Baltimore, Maryland, June 1994, pp. 1841-1845.
8. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
9. *Баженов В.А., Ворона Ю.В., Скибіцка О.С.* Стационарні коливання фундаментів при періодичному імпульсному навантаженні// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2002.-Вип.70.- сс.89-95.
10. *Диментерг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 368 с.
11. *Лук'янченко О.О., Постнікова Т.Г.* Оптимізація параметрів ударного гасителя коливань// Збірник наукових праць Міністерства Надзвичайних ситуацій, 2003 р. – сс. 23-28.
12. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.
13. *Постнікова Т.Г.* Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2005 р. Вип. 76.– с.35-64

*Надійшло до редакції 05.12.2006 р.*

УДК 539.3:624.071:624.01

Цихановський В.К., д-р техн. наук  
Прусов Д.Е., канд. техн. наук.

## УТОЧНЕНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ЖОРСТКИХ АЕРОДРОМНИХ ПОКРИТТІВ НА СЛАБКИХ ГРУНТОВИХ ОСНОВАХ З УРАХУВАННЯМ НЕОДНОРІДНОСТІ МАТЕРІАЛУ І ОСОБЛИВОСТЕЙ СТИКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПЛИТ

**Вступ.** Пропонується у найбільш загальному підході розглядати конструкції жорстких аеродромних покриттів як механічні системи з тонких пластинок (плит), у тому числі гнучких, із міцних матеріалів: залізобетону, фібробетону, тришарового композиту (металопрокату, керамзитобетону і сталльної сітки) та інших композитних матеріалів, які взаємодіють з лінійно-пружною неоднорідною ґрунтовою основою.

**Постановка задачі.** За основне навантаження приймається вертикальне колісне навантаження від основних опор сучасних повітряних кораблів типу В-747, ІЛ-62м, А-300(380) та інших. Розрахунки на міцність таких покриттів пов'язані з дослідженням напружено-деформованого стану, розрахункового фрагменту, який складається з набору тонких плит (розмірами 7,5x10(15)м) за розрізною або нерозрізною схемами. На пружній основі з урахуванням однібічних однібічних в'язів. Найбільш поширена розрізна схема взаємодії конструктивних елементів покриттів, тобто необхідне моделювання в розрахункових схемах стикових з'єднань плитних конструкцій, які сприймають тільки зусилля стиску, а згинні моменти мають нульові значення.

**Вихідна математична модель задачі.** У даній методиці розрахунку тонких плит на пружній основі пропонується спрощена математична модель пружної неоднорідної основи з використанням гіпотези пропорційності між додатнім прогином пластини і реакцією пружної основи, при цьому враховується, що коефіцієнт пропорційності є функцією від місцевих координат розрахункового фрагменту покриття:

$$q(x^2, x^3) = -c(x^2, x^3)V, \quad (1)$$

де  $q(x^2, x^3)$  — функція реакції основи;  $c(x^2, x^3)$  — функція коефіцієнта пропорційності (постелі);  $V$  — прогин пластинки у даній точці за нормаллю до серединної поверхні пластинки у деформованому стані.

Величина коефіцієнта постелі залежить від еквівалентного модуля деформації нашарувань штучної і ґрунтової основи покриттів. Функція (1)

визначається за емпіричними формулами, зведеними до двовимірного сплайну, що натягнутий на точковий каркас апроксимуючих функцій у напрямках  $x^2$ ;  $x^3$ , що можуть бути описані функціональним степеневим рядом, коефіцієнти якого визначаються за методом найменших квадратів [1].

Задачі деформування механічних систем, що відрізняються наявністю тільки пружно-піддатливих в'язів, тобто є кінематично-рухомими (наявність зміщень і поворотів елементів дискретної моделі як жорсткого цілого) відносяться до класу нелінійних еволюційних задач і їх розв'язок зводиться до моделювання змін властивостей і структури дискретної моделі (скінченно-елементної моделі) у процесі навантаження [2]. Для дискретної скінченно-елементної моделі тонкої гнучкої пластинки на пружній основі варіаційне рівняння руху можна звести до наступного диференціального рівняння руху SE-моделі за методом в'язкої релаксації:

$$[C]\{\dot{u}\} + \{R(u)\} - \{Q(u)\} + \{S(u)\} = 0, \quad (2)$$

де  $[C]$  — матриця в'язкого демпфірування SE-моделі;  $\{\dot{u}\}$ ,  $\{u\}$  — вектори приростів переміщень і швидкостей SE-моделі;  $\{R(u)\}$ ,  $\{Q(u)\}$ ,  $\{S(u)\}$  — матриці узагальнених реакцій внутрішніх, зовнішніх і опору основи SE-моделі.

Рівноважне положення SE-моделі досягається при умові:

$$\{R(u)\} - \{Q(u)\} + \{S(u)\} = 0, \quad (3)$$

- система нелінійних рівнянь рівноваги SE-моделі.

Допущення про пропорційність між прогином і реакцією основи виконується чітко для циліндричної оболонки, занурену в рідину. Якщо порівнювати цю фізичну модель, для якої математична модель побудована на основі методу в'язкої релаксації [2], то вони повністю співпадають і параметр в'язкої релаксації і коефіцієнт пропорційності дорівнюють  $C(x^\alpha)$ . Виходячи з цього математична модель різницевої схеми оболонки на пружній основі будується на основі рекурентних формул, наведених в [2], з уточненням діагональної матриці жорсткості і вектора зовнішніх впливів, зумовлених впливом лінійно-пружної основи. Для визначення значення коефіцієнта пропорційності основи у даній точці елементарного околу  $r(e)$  необхідно знати товщину стискуваної товщі активного півпростору основи  $h(x^\alpha)$  і значення загального еквівалентного модуля деформації  $E_0(x^\alpha)$ :

$$C(x^\alpha) = \frac{E_0(x^\alpha)}{h_0(x^\alpha)}, \quad (4)$$

тобто маємо функцію коефіцієнта постелі основи з розмірністю кгс/см<sup>3</sup>. Знаючи функцію (4) у скінченно-елементному просторі і приймаючи апроксимуючу функцію у межах  $r(e)$  для коефіцієнта постелі можемо визначити узгоджену матрицю реакцій пружної основи, виходячи із першого принципу віртуальної роботи для СЕ-моделі:

$$\sum_{e=1}^E \left[ \sigma^{*ij} \delta \gamma_{ij} dV_{(e)} - \int_{r(e)} p^i \delta U_i dV_{(e)} - \int_{r(e)} q^i \delta U_i dS_{(e)} + \int_{r(e)} q_{(0)}^i \delta U_i dS_{(e)} \right] = 0, \quad (5)$$

де  $p^i, q^i, q_{(0)}^i$  - компоненти векторів відповідно об'ємних і поверхневих сил зовнішнього навантаження і реакцій основи;  $\sigma^{*ij}$  - компоненти повного тензора напружень.

Після інтегрування по кожній із локальних підобластей  $r(e)$  варіаційне рівняння рівноваги СЕ-моделі (5) має наступний вигляд:

$$\sum_{e=1}^E \left[ \sum_{P_1 P_2 P_3} R'_{P_1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} + \sum_{P_1 P_2 P_3} P'_{P_1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} - \right. \\ \left. - \sum_{P_1=-1 P_2 P_3} Q'_{P_1=-1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} - \sum_{P_1=+1 P_2 P_3} Q'_{P_1=+1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} + \right. \\ \left. + \sum_{P_1=-1 P_2 P_3} S'_{P_1=-1 P_2 P_3} \delta u_{P_1} \right] = 0, \quad (6)$$

де  $R'_{P_1 P_2 P_3}$  - компоненти нелінійної матриці реакцій у вузлах СЕ узагальнених внутрішніх сил;  $P'_{P_1 P_2 P_3}$  - компоненти матриці узагальнених зовнішніх об'ємних сил у вузлах СЕ;  $Q'_{P_1=-1 P_2 P_3}, Q'_{P_1=+1 P_2 P_3}$  - компоненти матриці узагальнених поверхневих сил у вузлах СЕ (на нижній і верхній обмежувальних поверхнях оболонки);  $S'_{P_1=-1 P_2 P_3}$  - компоненти матриці реакцій пружної основи у вузлах СЕ (на нижній обмежувальній поверхні оболонки).

Компоненти зовнішніх сил і сил реакцій пружної основи можна навести наступними формулами:

$$P'_n = \sum_{m=1}^{m_z=8} \sqrt{G} C_{mn}^{(e)} P'_m, \quad n, m = 1, 2, \dots, 8; \\ Q'_{n(\alpha)} = \sum_{m=1}^{m_z=7} \sqrt{Q_{(P_1=-1)}} C_{mn}^{(e)} q'_{m(\beta)}, \quad n, m = 1, 3, 5, 7; \quad (7)$$

$$Q'_{n(\alpha)} = \sum_{m=2}^{m_e=8} \sqrt{Q_{(P_1=+1)}} C_{mn}^{(e)} q'_{m(\beta)}, \quad n, m = 2, 4, 6, 8;$$

$$S'_{n(\alpha)} = \sum_{m=1}^{m_e=7} \sqrt{Q_{(P_1=-1)}} C_{mn}^{(e)} q'_{(0)m(\beta)}, \quad n, m = 1, 3, 5, 7;$$

де  $\sqrt{Q_{(P_1=-1)}}$  - площа нижньої обмежувальної поверхні оболонки в  $r(e)$ ;  $\sqrt{Q_{(P_1=+1)}}$  - площа верхньої обмежувальної поверхні оболонки в  $r(e)$ ;  $C_{mn}^{(e)}$  - локальна матриця Грамма, яка визначається інтегралом по двовірній області  $r(e)$ :

$$C_{mn}^{(e)} \equiv \frac{n(\alpha)}{m(\beta)} \begin{matrix} 1(2) & 3(4) & 5(6) & 7(8) \\ 1(2) & 1/9 & 1/18 & 1/18 & 1/36 \\ 3(4) & 1/18 & 1/9 & 1/36 & 1/18 \\ 5(6) & 1/18 & 1/36 & 1/9 & 1/18 \\ 7(8) & 1/36 & 1/18 & 1/18 & 1/9 \end{matrix}, \quad m, n = 1, 3, 5, 7; \quad \alpha, \beta = 2, 4, 6, 8. \quad (8)$$

Компоненти реакцій основи  $q'_{(0)(m)}$ , що використовуються у (8) визначаються за формулою:

$$q'_{(0)(m)} = -\frac{E_{(0)(m)}}{h_{(0)(m)}} n'_{(m)} u'_{(m)} k'_{(m)} n'_{(m)}. \quad (9)$$

З урахуванням (4)–(8) остаточно отримуємо рекурентну формулу неявного інтегрування диференціального рівняння руху (2):

$$\begin{aligned} & \left[ K_{(NL)}^{i'j'} + C_{(N)}^{(n)} N_{(N)}^{(i')} N_{(M)}^{(j')} \delta^{i'j'} \delta_{(NL)} \right] \Delta \left\{ U_{(L)i+1}^{i'(n+1)} \right\} = \\ & = \left\{ Q_{(N)} \left\{ U_{(N)i}^{i'(n+1)} \right\} \right\} - \left\{ R_{(N)} U_{(N)i}^{i'(n+1)} \right\} - \left\{ S_{(N)}^{i'} \right\} \\ & \left\{ U_{i+1}^{i'(n+1)} \right\} = \left\{ U_i^{i'(n+1)} \right\} + \Delta \left\{ U_{i+1}^{i'(n+1)} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $K_{(NL)}^{i'j'}$  - матриця жорсткості СЕ-моделі, що зумовлена фізико-механічними властивостями матеріалу пластинки і переднапружень на  $n$ -ному кроці подовження за параметром;  $C_{(N)}^{(n)} N_{(N)}^{(i')} N_{(M)}^{(j')} \delta^{i'j'} \delta_{(NL)}$  - матриця приростів жорсткості СЕ-моделі, зумовлених взаємодією з лінійно-пружною основою;  $n_{(N)}^{(i')}$ ,  $n_{(L)}^{(j')}$  - компоненти вектора одиничної нормалі в вузлах  $N$  і  $L$  пластинки;  $C_{(N)}^{(n)} = E_{(0)(N)}/h_{(0)(N)}$  - наведений вузловий коефіцієнт постелі основи;  $n$  —

ітерації, що зумовлені методом подовження за параметром збурення;  $i$  - ітерації

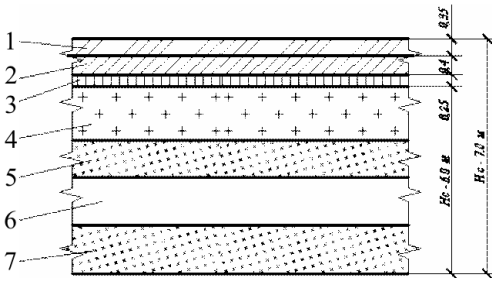


Рис.1. Конструктивна схема покриття:

- 1 – цементобетон марки В45; 2 – бетон марки В35;
- 3 – ґрунтоцемент В10; 4 – супісок лесовидний;
- 5 – супісок пілуватий; 6 – пісок мілкий;
- 7 – супісок пілуватий

за методом Ньютона-Канторовича.

В якості прикладу розглядається задача розрахунку на міцність двошарового бетонного покриття перону на штучній основі із ґрунтоцементу.

Конструктивна схема покриття і активної зони стиску ґрунтової основи наведена на рис. 1.

**Розрахункова модель задачі.** Для здійснення чисельного розрахунку на міцність використання найбільш ефективна схема МСЕ — момент на схема скінченних елементів [2, 3, 4].

Для побудови розрахункової схеми фрагменту покриття при дії колісного навантаження від найбільш сучасного повітряного корабля В-747-400 попередньо були отримані еквівалентні геометричні параметри і фізико-механічні характеристики тришарової конструкції покриття перону, виходячи з граничних подовжньої і згінної жорсткостей реальної конструкції покриття (рис. 1). Схема побудови еквівалентного перерізу покриття і моделі стикового з'єднання тонких плит за розрізною схемою з умови забезпечення максимального кута повороту перерізу плити без порушення сумісності деформацій на границі скінченних елементів (введення порожнини на 1/3 товщини плити і зниження жорсткості елемента включення на стику з'єднання на порядок нижче розрахункової жорсткості плити) наведені на рис.2. Формули для отримання параметрів еквівалентного (приведеного розрахункового) перерізу покриття наведені в [2]. Для отримання вузлових значень функції коефіцієнта постелі (1) у випадку наявності лінзоподібного ґрунтового прошарку з відомими амплітудами і граничними значеннями коефіцієнта постелі  $C_0$  і  $C_{max}$  використовувалась у першому наближенні аналітична сплайн-функція:

$$C_N(x^2, x^3) = C_0 - (C_{max} - C_0) \sin \frac{\pi \cdot x_N^2}{e^2} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x_N^3}{e^3}, \quad (11)$$

де  $x_N^2, x_N^3$  — поточні місцеві координати вузлів розрахункового фрагменту (в глобальній системі координат);  $e^2, e^3$  — розміри



розрахункового фрагменту відповідно по  $z^2$  і  $z^3$  глобальної системи координат (рис. 3).

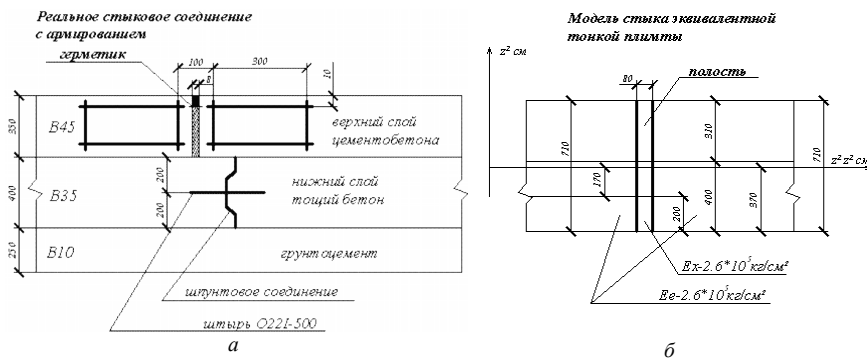


Рис.2. Моделювання стикового з'єднання плит

Дискретна скінченно-елементна модель і розрахункова схема покриття з еквівалентною ізотропною фізичною моделлю:  $E_e=3,027 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ;  $h_e=74 \text{ см}$ ;  $V_e=0,231$  наведені на рис. 3. Скінченно-елементна модель з урахуванням площин симетрії (вздовж вісі фюзеляжу літака) включає 4 плити покриття розмірами  $750 \times 750 \times 75 \text{ см}$ . Сіткова область розрахункового фрагменту побудована так, що включає дискретні моделі пневматичних відбитків коліс основних опор літака В-747-400 — 4 СЕ для кожного відбитку (див. позначені жирною лінією квадратні відбитки на рис. 3), що відповідає 9-ти вузловим зосередженим вертикальним силам (в центрі  $Q_1=85552,12 \text{ кг}$ ; на ребрі  $Q_2=4276,06 \text{ кг}$ ; і на куту  $Q_3=2138,03 \text{ кг}$ ). З урахуванням симетрії колісні відбитки основних опор розміщені на одній плиті для виявлення їх взаємного впливу (див. рис. 4).

Результати розрахунку наведені також у вигляді епюр у перерізах 1-1 і 2-2 розрахункового фрагменту: переміщень, згинних погонних моментів і реакцій основи (рис. 5, 6).

На рис. 4 приведені ізолінії погонних згинних моментів  $M^3_N$ , за якими можна зробити висновок про локальний характер їх розподілу в області основних опор літака.

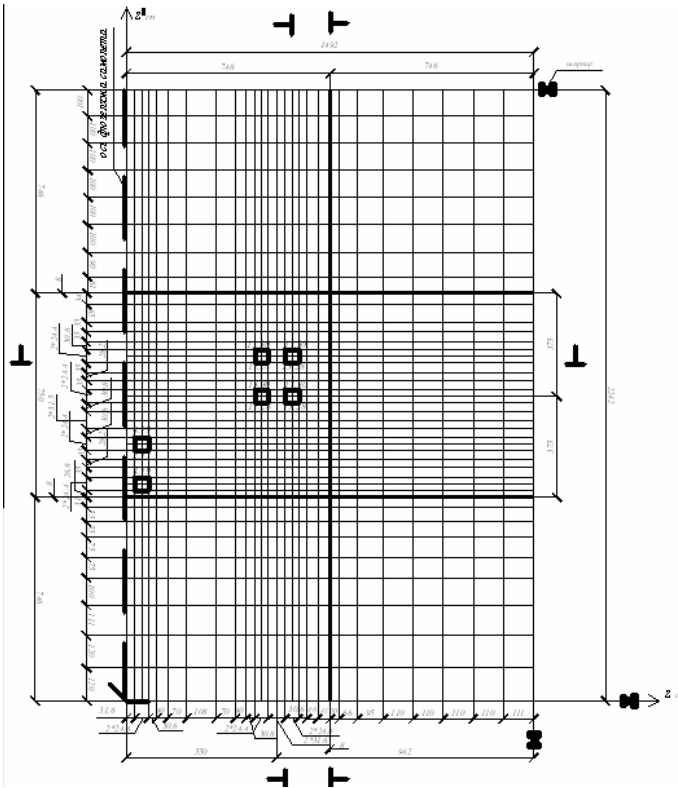
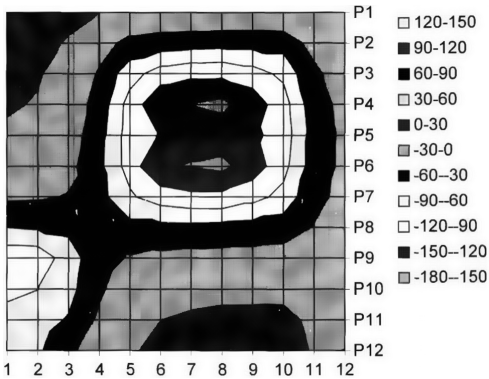


Рис.3. Розрахункова схема покриття перрону

Рис.4. Ізолінії згинних погонних моментів  $M^{33}$  у плиті бетонного покриття

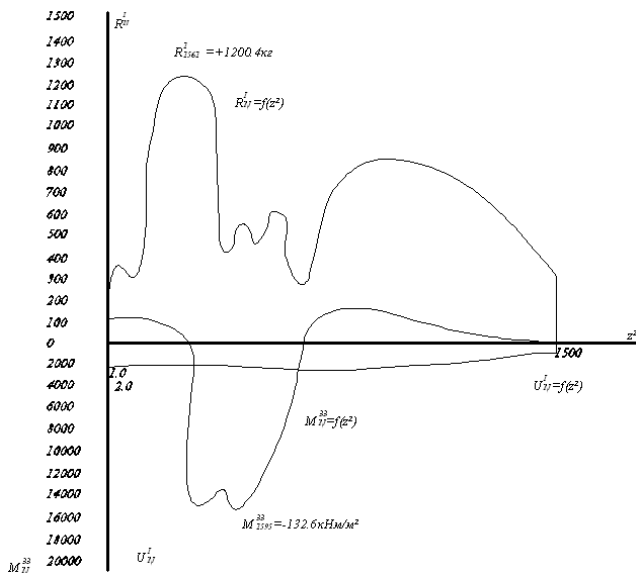


Рис. 5. Епюри у перерізі 1-1: переміщень  $U_N^1$ , згинних погонних моментів  $M_N^{33}$ , і реакцій пружної основи  $R_N^1$

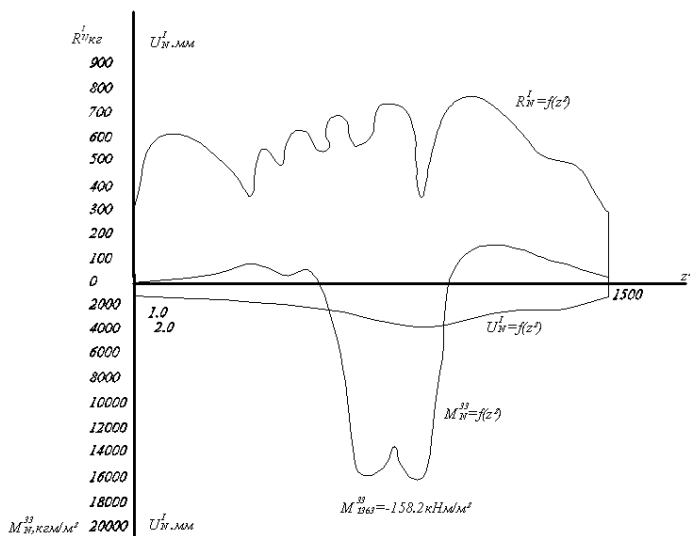


Рис. 6. Епюри у перерізі 2-2: переміщень  $U_N^1$ , згинних погонних моментів  $M_N^{33}$ , і реакцій пружної основи  $R_N^1$

**Висновки.** За результатами розрахунку на міцність можна зробити наступні висновки:

— епюри прогинів мають плавний характер, максимальне значення прогинів при постійному значення коефіцієнта постелі ( $c=4,13 \text{ кг/см}^3$ ) складає  $U_{1267}^1=-1,23 \text{ мм}$ , а при змінному ( $c_0=4,63 \text{ кг/см}^3$ ,  $c_{\max}=4,63 \text{ кг/см}^3$ ) складає  $U_{1579}^1=-1,55 \text{ мм}$ ;

— епюри погонних згинних моментів мають ярко вразливий синусоподібний характер з чітким локальним імпульсом в області дії основної крайньої опори, ординати епюри досягають максимуму на площадках з нормаллю за направленням  $x^3$  при постійному коефіцієнті постелі —  $M_{1363}^{33}=-151,99 \text{ кНм}$ , а при перемінному коефіцієнті постелі —  $M_{1455}^{33}=-170,38 \text{ кНм}$ ;

— епюри вузлових реакцій пружної основи мають нерівномірний, стрибкоподібний характер, деякі імпульси зумовлені нерівномірністю сіткової області. За епюрами вузлових реакцій пружної основи визначається максимальна реакція для розрахунку штирів стикового з'єднання плит покриття.

Результати розрахунку на міцність наведеного прикладу конструктивного рішення бетонного покриття перону свідчить про універсальність запропонованої методики дослідження НДС тонких плит на пружній неоднорідній основі, яка дозволяє урахувати: адекватність впливу стикових з'єднань плит на розподіл внутрішніх зусиль; нерівномірність розподілу у полі плити значень коефіцієнта постелі пружної основи; концентрації нормальних і зсувних напружень у плиті; довілну схему впливів колісного навантаження для будь-якого типу повітряного корабля. Використання чисельних розрахунків на міцність дозволяє зробити аналіз характеру розподілу внутрішніх зусиль у плиті і реакцій пружної неоднорідної ґрунтової основи, і знайти найбільш критичну схему колісного навантаження на комбінацію плит розрахункового фрагменту.

1. *Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробагатько А.А.* Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики). – К.: «Вища школа», 1977. – 408 с.
2. *Баженов В.А., Цыхановский В.К., Кислюцкий В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – К.: КНУБА, 2000. – 386с.
3. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикладная механика. – К.: Ин-т механики НАН Украины. – 2002. – Т.38 (48), №6. – С.24-63.
4. *Сахаров О.С.* Тензорні ряди в моментній схемі метод скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вип.68.– Київ,КНУБА.– 2000.– С.122–129.

*Надійшло до редакції 06.12.2006 р.*

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук

## ВПЛИВ ПОПЕРЕДНІХ НАПРУЖЕНЬ У ЗЕМНІЙ КОРИ НА ПОШИРЕННЯ В НІЙ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ

**Вступ.** Розрив розв'язку рівнянь теорії пружності називається сильним, якщо він має місце у похідних нижчого порядку. Рухомі фронти сильних розривів в нелінійній теорії пружності називають розривними хвилями [1], оскільки до них належать хвилі, перед рухомими фронтами яких середовище знаходиться у ненапруженому стані, за фронтом напруги мають кінцеві величини, а на поверхні фронту вони терплять розрив безперервності. У лінійній теорії пружності рухомі фронти розривів напружень називаються слабкими ударними хвилями. Вони переносять на фронтах скачок тиску і мають швидкість звуку.

У ряді випадків при теоретичному моделюванні явищ поширення в тектонічних структурах нестационарних хвиль, ініційованих сейсмічними процесами або вибухами, можна будувати профілі хвиль, що розповсюджуються, в класі ламаних функцій, вважаючи, що рухомі поверхні, на яких перші похідні від функції переміщень терплять розрив, є фронтами хвиль. При цьому важливо враховувати, що через вікові умови формування механічні параметри скельних порід, що становлять дану тектонічну структуру, володіють властивості неоднорідності і анізотропії. Тому для вивчення їх динамічної поведінки слід застосовувати динамічну теорію пружності анізотропних середовищ [3-5, 8, 10-12].

Особливість тектонічних структур полягає у тому, що їх скельні породи напружені силами тяжіння верхніх шарів, що приводить до необхідності використання нелінійної теорії пружності. Якщо інтенсивність розривної хвилі невелика, то можна її досліджувати на основі рівнянь, лінеаризованих в околі незбуреного стану [2]. Навіть для початкової однорідної ізотропії побудовані таким чином рівняння динаміки формою мають вигляд рівнянь анізотропного середовища, якщо поле попередніх пружних напружень анізотропне. Тому така штучна анізотропія іноді називається „наведеною”. У даній роботі досліджується вплив неоднорідного поля попередніх напружень в однорідному ізотропному пружному середовищі на характер розповсюдження в ньому розривної хвилі, ініційованої в малому сферичному джерелі.

**1. Постановка задачі.** Сформулюємо задачу про поширення розривної хвилі в переднапруженому середовищі з використанням

значень основних величин, в певних межах і з деякими спрощеннями, характерних для верхніх шарів Землі.

Розглянемо напівнескінченне однорідне пружне середовище  $x_3 \leq 0$ . Нехай на її елементи діють сили тяжіння, де  $g$  – прискорення вільного падіння. Під дією цих сил в середовищі створюється поле початкових напружень

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^0 &= \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = g\rho x_3, \\ \sigma_{12}^0 &= \sigma_{23}^0 = \sigma_{31}^0 = 0,\end{aligned}\quad (1.1)$$

яке є рівняннями рівноваги. Воно відповідає гідростатичному розподілу напружень, обумовленим віковими релаксаціями деформацій.

Поширення пружних хвиль в цьому середовищі описується лінеаризованими рівняннями [2]

$$\nabla_i (\sigma^{ij} + \sigma_0^m \nabla_n u^j) - \rho \ddot{u}^j = 0 \quad (i, j, n = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

складеними у базисі  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ .

Тут  $u^i$  – контраваріантні компоненти вектора переміщень; шукані величини без нуля характеризують динамічний стан середовища, ініційований в її переднапруженому стані; крапкою над буквою позначене диференціювання за часом; символ коваріантної похідної визначається формулою

$$\nabla_n u^j = \frac{\partial u^j}{\partial x^n} + \Gamma_{nm}^j u^m, \quad (1.3)$$

де  $\Gamma_{nm}^j$  – символ Крістоффеля другого роду.

Рівняння (1.2) отримані в [2] в припущенні малих деформацій в початковому переднапруженому стані. Рівняння (1.2) в декартовій прямокутній системі координат  $Ox_1x_2x_3$  з урахуванням (1.1) мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \sigma_{ii}^0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{33}^0}{\partial x_3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \rho \ddot{u}_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.4)$$

Побудована система лінеаризованих рівнянь динаміки переднапруженого ізотропного пружного середовища по своїй структурі еквівалентна рівнянням руху неоднорідного анізотропного пружного середовища, які можна представити у вигляді [6]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 c_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} + \sum_{k,p,q=1}^3 \frac{\partial c_{ik,pq}}{\partial x_k} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i=1, 2, 3), \quad (1.5)$$

де  $c_{ik,pq}$  – компоненту тензора пружних постійних. Завдяки симетрії, його зручно подати у формі квадратної (6 x 6) матриці.

Для системи (1.1), (1.2) цій матриці зручно надати форму

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + \rho g x_3 & \lambda - \rho g x_3 & \lambda - \rho g x_3 \\ \lambda - \rho g x_3 & \lambda + 2\mu + \rho g x_3 & \lambda - \rho g x_3 \\ \lambda - \rho g x_3 & \lambda - \rho g x_3 & \lambda + 2\mu + \rho g x_3 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \mu + \rho g x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \rho g x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \rho g x_3 \end{pmatrix}.$$

Важливо зазначити, що в загальному випадку для неоднорідного анізотропного середовища елементи  $c_{ik,pq}$  матриці  $C_{\alpha\beta}$  підпорядковані нерівностям

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad |c_{\alpha\beta}| > 0, \quad (1.7)$$

які витікають з умови позитивної визначеності потенційної енергії середовища.

За допомогою рівнянь (1.5) досліджуються явища поширення фронтів розривних хвиль, породжених ударною дією рівномірного тиску на поверхню сферичної порожнини малого розміру, заглибленої в пружному переднапруженому середовищі уздовж осі  $Ox_3$  на відстані  $x_3 = -h$  від її вільної поверхні  $x_3 = 0$ . У загальному випадку при дії на вільну поверхню анізотропного пружного середовища зовнішнього ударного тиску від неї починають виходити три розривні хвилі, перша – квазіподовжня, дві інші – квазіпоперечні [6]. У даному випадку через симетрію геометричних і механічних параметрів системи щодо осі, інтенсивність квазіпоперечної хвилі, поляризованої в окружному напрямі по відношенню до цієї осі, рівна нулю, тому тут вона розглядатися не буде.

**2. Рішення задачі.** Для вирішення даної задачі використовуємо нульове наближення променевого методу [7-9], яке дозволяє будувати промені і fronti розривних хвиль та обчислювати значення розривів деформацій на поверхні фронту [3-5, 8, 10-12]. Фронт хвилі є поверхня

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = 0, \quad (2.1)$$

під час переходу через яку поле переміщень  $\vec{u}$  залишається безперервним, але, принаймні, одна з часткових похідних першого порядку від його складових терпить розрив безперервності [8].

У регулярних точках поверхні (2.1) її рух визначається вектором нормалі

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } \psi}{|\text{grad } \psi|}, \quad (2.2)$$

де

$$\text{grad } \psi = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \vec{i}_k \equiv \sum_{k=1}^3 p_k \vec{i}_k. \quad (2.3)$$

Швидкість  $v$  руху фронту (2.1) уздовж нормалі  $\vec{n}$  в будь-якій його точці  $N$  називається фазовою. Вона має значення

$$v(N, t) = \frac{-\psi}{|\text{grad } \psi|} \equiv \frac{-p_0}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^3 p_k^2\right)}}. \quad (2.4)$$

Енергія хвилі на її фронті переноситься уздовж променя з променевою швидкістю, яка в загальному випадку не ортогональна поверхням хвильових фронтів і пов'язана з фазовою швидкістю співвідношенням

$$\vec{\xi} \cdot \vec{n} = v. \quad (2.5)$$

У анізотропних середовищах вектор зсуву  $\vec{u}$  в загальному випадку не є паралельним або перпендикулярним напрямку розповсюдження, а визначається вектором поляризації  $\vec{A}$ . Для вибраного напрямку  $\vec{n}$  швидкість  $v$  і вектор  $\vec{A}$  будуються як власні числа і вектори рівнянь Крістоффеля [5, 6], з умов існування нетривіальних розв'язків цієї системи виходить рівняння третього ступеня щодо квадрата фазової швидкості  $v^2$

$$\left| \sum_{k,p,q=1}^3 c_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \rho \delta_{ik} \right| = 0. \quad (2.6)$$

Для побудови хвильового фронту в неоднорідному анізотропному середовищі необхідно знайти розв'язки рівняння, яке з використанням методу характеристик приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$dx_m/d\tau = \xi_m, \quad dp_m/d\tau = \eta_m \quad (m = 1, 2, 3), \quad (2.7)$$



де

$$\xi_m \equiv \xi_m^{(r)}(\vec{n}, x_k) = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (2.8)$$

$$\eta_m \equiv \eta_m^{(r)}(\vec{n}, x_k) = -\frac{1}{2} \sum_{i,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \quad (2.9)$$

Перша група рівнянь системи (2.7) описує поширення хвилі уздовж променя із променевою швидкістю  $\xi_m \equiv \xi_m^{(r)}(\vec{n}, x_k)$ . Друга група рівнянь визначає геометрію цього променя. Якщо пружне середовище однорідне (такі випадки розглянуті в [3-5, 10-12]), то похідні  $\partial \lambda_{ik,pq} / \partial x_m$  у правих частинах рівності (2.9) дорівнюють нулю, тому всі  $\eta_m$  рівно нулю, рівняння другої групи системи (2.7) елементарно інтегруються і проміння виявляється прямолінійними. У випадках, що розглядаються, унаслідок неоднорідності поля поперечної напруженості функції  $\eta_m$  відмінне від нуля і промені набувають викривленість. Тому для інтеграції системи (2.7) доводиться використовувати чисельні методи. При цьому поверхні, що містять знайдені точки променів із координатами, відповідними заданим значенням, визначаються поверхні фронтів розривних хвиль, що трансформуються зі зміною  $\tau$ .

**3. Результати дослідження.** По запропонованій методиці досліджено видозміну фронтів розривних хвиль, які поширюються в пружних середовищах густиною  $\rho = 3180 \text{ кг/м}^3$  із модулем пружності  $E = 8.7 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$  та різними значеннями коефіцієнта Пуассона. Враховуючи осьову симетрію сформульованої задачі, розглядатимемо геометрію променів та слідів фронтів розривних хвиль обох поляризацій на одній із рівноправних вертикальних площинах, які містить джерело розривної хвилі.

На рис.1 показана сітка променів і десять положень фронтів квазіпоперечної розривної хвилі, породженої миттєвою зміною тиску в сферичній порожнині малих розмірів при коефіцієнті Пуассона середовища  $\nu = 0,05$ . Еволюціонуючий фронт квазіподовжньої хвилі, який виникає на поверхні порожнини-джерела одночасно з квазіпоперечною, має менші особливості, тому на малюнку показаний тільки один його стан, співпадаючий за часом з десятим положенням фронту квазіпоперечної хвилі. Видно, що фронт квазіподовжньої хвилі завжди випереджає фронт квазіпоперечної, оскільки її фазова швидкість  $v_{(1)}$  має більше значення, ніж швидкість квазіпоперечної хвилі –  $v_{(2)}$ . На фронті квазіподовжньої хвилі позначені місця його перетину із

променями, які виходять від точок, розташованих на поверхні порожнини-джерела із кроком  $4^\circ$ . Промені квазіпоперечних хвиль, виходячи з тих же точок поверхні джерела, поблизу особливих напрямів (співпадаючих із напрямками осей  $Ox_1$  і  $Ox_3$ ) перетинаються, утворюючи каустики, на яких інтенсивність хвилі значно зростає. Крім того, всі промені, особливо квазіпоперечної хвилі, вигинається у бік ущільнення середовища.

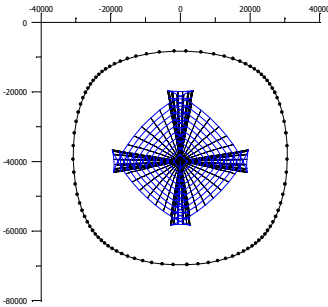


Рис. 1

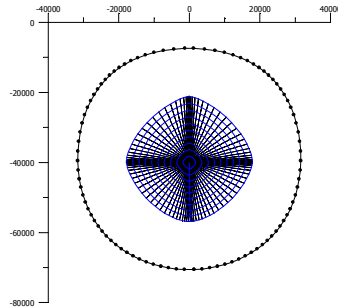


Рис. 2

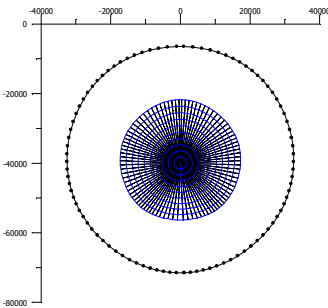


Рис. 3

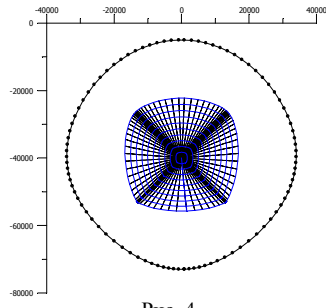


Рис. 4

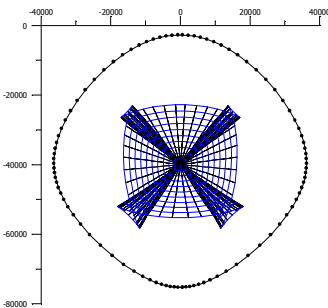


Рис. 5

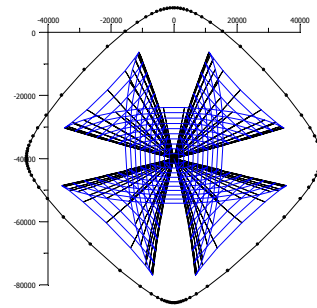


Рис. 6

При зростанні коефіцієнта Пуассона до  $\nu = 0,15$  картина розбіжності променів розривних хвиль обох поляризацій декілька змінюється (рис.2). У цьому середовищі замість каустик поблизу особливих напрямів спостерігається тільки згущування променів, які не перетинаються.

У свою чергу точки перетину сімейства променів з фронтом квазіпоперечної хвилі поблизу цих особливих напрямів залишаються, як і у попередньому випадку, дещо розрідженими.

Найближчим до ізотропного є середовище, що володіє вказаними густиною і модулем пружності, в якій коефіцієнт Пуассона складає  $\nu = 0,20$  (рис. 3). Як квазіпоперечна так і квазіподовжня розривні хвилі мають майже сферичні фронти, на яких рівномірно розташовані точки їх перетину із променями, дещо викривленими у бік зменшення координати  $x_3$ .

Подальше збільшення коефіцієнта Пуассона до  $\nu = 0,25$  приводить до незначного згущення променів квазіподовжньої хвилі в околі особливих напрямів (рис. 4). При цьому промені квазіпоперечних хвиль біля особливих напрямів розріджуються, а оддалік їх – зближуються не перетинаючись.

На рис. 5 зображена геометрія аналогічних фронтів і променів розривних хвиль обох поляризацій для пружного середовища з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,30$ . У такому середовищі криволінійні промені квазіпоперечної хвилі утворюють каустики оддалік особливих напрямів, причому у бік заглиблення в середовище каустики обширніші. Квазіподовжня хвиля навпаки – концентрується уздовж координатних осей  $Ox_1$  і  $Ox_3$ , про що свідчить згущення поблизу осей точок перетину променів з фронтом. Причому унаслідок поперечної напруженості середовища власною вагою це згущення виразніше на великих глибинах.

Зростання коефіцієнта Пуассона до  $\nu = 0,40$  (рис.6) ще більше трансформує фронти розривних хвиль: квазіподовжньої наближається до квадратної форми з концентрацією інтенсивності на вершинах (уздовж осей координат), квазіпоперечної – обширно каустує на решті частин даної площини.

Приведені ілюстрації свідчать про значний вплив на геометрію фронтів розривних хвиль в пружних попередньо напружених середовищах коефіцієнта Пуассона, зміна якого перерозподіляє напрями і характер згущення променів обох хвиль. У місцях таких згущень зростає інтенсивність хвилі. Слід мати на увазі, що у всіх випадках зростання інтенсивності хвилі однієї поляризації супроводжується її зменшенням для хвилі іншої поляризації.

1. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 183с.
2. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. Т.1 Общие вопросы. К.: Наукова думка, 1986.
3. *Гуляев В.И., Иванченко Г.М.* Фокусировка и рассеивание плоских ударных волн на поверхности раздела анизотропных упругих сред //Прикл. механика и техн. физика. – 2002. –**43**, №5. – С. 21–27.
4. *Гуляев В.И., Иванченко Г.М.* Фокусировка и рассеивание плоской акустической волны трансверсально-изотропными упругими линзами //Акустический журнал. – 2004. **50**, №2 – С.177–183.
5. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, №3. – С. 394–402.
6. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982 (Dieulesaint E. et Royer D. Ondes Elastiques Dans Les Solides. Application au Traitement du Signal. Masson et C<sup>ie</sup>, 1974)
7. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304с.
8. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
9. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.: Наукова думка, 1988. 220 с.
10. *Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M.* Focusing and scattering the nonstationary wave by the free surface of an anisotropic elastic medium //Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, №7. – P.86–93.
11. *Gulyaev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2003. – **40**. – P. 237–247.
12. *Lugovoy P.Z., Gouliaev V.I.* Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media. CP505, Shock Compression of Condensed Matter – 1999/ Edited by M.D.Furnish, L.C.Chhabildas and R.S.Nixon //Proceeding of the Conference of the American Physical Society, Snowbird, Utah, USA. – P. 1287-1290.

*Надійшло до редакції 08.12.2006 р.*

УДК 534-21

Шульга Н.Д., канд. техн. наук

### ЧАСТОТИ ПРОПУСКАННЯ І ГРАНИЧНІ ФОРМИ ОБ'ЄМНИХ ХВИЛЬ ПОПЕРЕК СТРУКТУРИ ДВОКОМПОНЕНТНИХ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТИВ З МІЖФАЗНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

Перебіг хвильових процесів в композитних матеріалах визначається механічними властивостями компонент, геометричною структурою матеріалу та якістю міжфазних поверхонь [3]. Адекватний теоретичний опис останнього фактору пов'язаний з суттєвими складностями. Для моделювання тонкого шару з міжфазними недосконаlostями та дефектами, який розділяє дві фази (компоненти) шаруватого композиту з різними фізико-механічними властивостями, вводиться [1, 2, 6] гіпотетична міжфазна поверхня з певними властивостями. Кількісним виразником цих властивостей виступають міжфазні сталі, що входять в механічні умови спряження.

Розглянемо двокомпонентний регулярно-шаруватий композит з міжфазними недосконаlostями та дефектами, механічні властивості ортотропних компонент якого позначимо через  $c_{ij,1}$ ,  $\rho_1$  для шарів товщиною  $h_1$  і  $c_{ij,2}$ ,  $\rho_2$  для шарів товщиною  $h_2$ . Координатні вісі  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  направимо вздовж головних напрямів ортотропії шарів. При поширенні хвиль впоперек структури шарів (вздовж  $x_3$ ) переміщення, деформації і напруження не залежать від координат  $x_1$  і  $x_2$  і тривимірні рівняння малих коливань пружного тіла розпадаються на три незалежні системи

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_{6-m}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{3,6-m}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{3,6-m} = c_{mm}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_3}, \quad m = 3, 4, 5. \quad (1)$$

Рівняння (1) справедливі поза площинами  $x_3 = x_{3,2n-2+q}$  ( $q=1,2$ ,  $n$  – ціле число) розриву властивостей матеріалу, а на самих цих площинах повинні виконуватися [1, 2, 6] контактні умови

$$\begin{aligned} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0, t) &= \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t), \\ u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0, t) &= u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t) + \eta_{3,6-m} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Розв'язок рівнянь (1) для кожного з шарів при гармонічних коливаннях запишемо так

$$u_{6-m} = h \operatorname{Re} \left[ A_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,1}(x_3 - nh + h)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}} + A_{2n-1}^{(2)} \cos k_{mm,1}(x_3 - nh + h) \right] e^{-i\omega t},$$

$$(n-1)h < x_3 < (n-1)h + h_1;$$

$$u_{6-m} = h \operatorname{Re} \left[ A_{2n}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,2}(x_3 - nh + h_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}} + A_{2n}^{(2)} \cos k_{mm,2}(x_3 - nh + h_2) \right] e^{-i\omega t},$$

$$(n-1)h + h_1 < x_3 < nh. \quad (3)$$

В формулах (3) і далі використовуються позначення  $\bar{\rho}_q \rho_{00} = \rho_q$ ,  $\bar{c}_{mm,q} c_{00} = c_{mm,q}$ ,  $\bar{k}_{mm,q} = h_{00} k_{mm,q}$ ,  $k_{mm,q} = \omega \sqrt{\rho_q / c_{mm,q}}$ ,  $\bar{\eta}_{3,6-m} = \eta_{3,6-m} \frac{c_{00}}{h}$ , причому величини  $\bar{\rho}_q$ ,  $\bar{c}_{mm,q}$ ,  $\bar{k}_{mm,q}$ ,  $\bar{\eta}_{3,6-m}$  як і сталі інтегрування  $A_n^{(i)}$ , безрозмірні; нормуючі параметри  $\rho_{00}$ ,  $c_{00}$ ,  $h$  мають розмірності відповідно густини ( $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ), модуля пружності (Па), довжини (м).

Контактні умови (3) на межах  $x_3 = x_{3,2n-1} \equiv (n-1)h + h$  між  $(2n-1)$ -им і  $2n$ -им шарами і на межах  $x_3 = x_{3,2n} \equiv nh$  між  $2n$ -им і  $(2n+1)$ -им шарами приводять до однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}_{2n+1} = \mathbf{M}_{mm}(h_2) \mathbf{A}_{2n}, \quad \mathbf{A}_{2n} = \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{A}_{2n-1}, \quad (4)$$

в яких введені вектор-стовпці  $\mathbf{A}_n = \operatorname{col}[A_n^{(1)}, A_n^{(2)}]$  і матриця  $\mathbf{M}_{mm}^{(ik)}(h_q)$ :

$$\mathbf{M}_{mm}^{(ik)}(h_q) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm}^{(11)}(h_q) & \mathbf{M}_{mm}^{(12)}(h_q) \\ \mathbf{M}_{mm}^{(21)}(h_q) & \mathbf{M}_{mm}^{(22)}(h_q) \end{bmatrix},$$

$$\text{де } \mathbf{M}_{mm}^{(11)}(h_q) = \cos k_{mm,q} h_q, \quad \mathbf{M}_{mm}^{(12)}(h_q) = -\bar{c}_{mm,q} \bar{k}_{mm,q} \sin k_{mm,q} h_q$$

$$\mathbf{M}_{mm}^{(21)}(h_q) = \frac{\sin k_{mm,q} h_q}{\bar{c}_{mm,q} \bar{k}_{mm,q}} + \bar{\eta}_{3,6-m} \cos k_{mm,q} h_q,$$

$$\mathbf{M}_{mm}^{(22)}(h_q) = \cos k_{mm,q} h_q - \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,q} \bar{k}_{mm,q} \sin k_{mm,q} h_q.$$

Якщо розв'язок нескінченної системи однорідних алгебраїчних рівнянь (4) представити [2, 4-6] у вигляді

$$\mathbf{A}_{2n} = \chi_{mm}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm}, \quad \mathbf{A}_{2n-1} = \chi_{mm}^n \mathbf{X}_{mm}, \quad (5)$$

то для визначення скаляру  $\chi_{mm}$  і вектора  $\mathbf{X}_{mm}$  одержимо систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\left( \mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) - \chi_{mm}^{-1} \mathbf{I}_2 \right) \mathbf{X}_{mm} = 0. \quad (6)$$

Тут  $\mathbf{I}_2$  – одинична матриця другого порядку,  $\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) = \mathbf{M}_{mm}(h_2) \mathbf{M}_{mm}(h_1)$  – передаточна матриця для двох шарів товщини  $h_1$  і  $h_2$ .

З умови існування нетривіального розв'язку однорідної системи (6) одержимо характеристичне рівняння

$$\chi_{mm}^2 - 2b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) \chi_{mm} + 1 = 0, \quad (7)$$

оскільки безпосередніми перетвореннями знаходимо, що  $\det \mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) = 1$ , а коефіцієнт

$$\begin{aligned} b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = & \cos k_{mm,1} h_1 \cos k_{mm,2} h_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}} + \frac{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}} - \right. \\ & \left. - \bar{\eta}_{3,6-m}^2 \bar{c}_{mm,1} \bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,1} \bar{k}_{mm,2} \right) \sin k_{mm,1} h_1 \sin k_{mm,2} h_2 - \\ & - \bar{\eta}_{3,6-m} \left( \bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1} \sin k_{mm,1} h_1 \cos k_{mm,2} h_2 + \right. \\ & \left. + \bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2} \sin k_{mm,2} h_2 \cos k_{mm,1} h_1 \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Кожному з нерівних між собою характеристичних чисел  $\chi_{mm,1}$ ,  $\chi_{mm,2}$  відповідають лінійно незалежні між собою власні вектори  $\mathbf{X}_{mm,1}$ ,  $\mathbf{X}_{mm,2}$  і невідомі  $\mathbf{A}_n$  в розв'язку (5) будуть суперпозицією

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2n} = & Q_1 \chi_{mm,1}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm,1} + Q_2 \chi_{mm,2}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm,2}, \\ \mathbf{A}_{2n-1} = & Q_1 \chi_{mm,1}^n \mathbf{X}_{mm,1} + Q_2 \chi_{mm,2}^n \mathbf{X}_{mm,2}. \quad (9) \end{aligned}$$

Невідомі сталі  $Q_1$ ,  $Q_2$  повинні бути визначені з граничних умов.

Для аналізу поширення об'ємних хвиль в характеристичному рівнянні (7) зробимо заміну  $\chi_{mm} = \exp(\pm ihs_{mm})$  і запишемо його в тригонометричному вигляді

$$\cos hs_{mm} = b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}). \quad (10)$$

З представлення (9) випливає, що розв'язок (3) буде обмеженим при  $n \rightarrow \pm\infty$  ( $-\infty < x_3 < +\infty$ ), якщо дисперсійне рівняння (10) матиме дійсні корені. Це матиме місце при умові

$$-1 < b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) < +1, \quad (11)$$

яка і визначає зони пропускання хвиль поперек структури матеріалу.

Фізично обґрунтований однозначний розв'язок рівняння (10) при умові (11) визначається за правилом відбору мод [5]

$$hs_{mm} = (-1)^{N_{mm}^{i-1}} \arccos b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) + 2\pi \left[ \frac{N_{mm}}{2} \right]. \quad (12)$$

Тут  $\arccos b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1})$  – головне значення оберненої тригонометричної функції,  $N_{mm} = 1, 2, \dots$  – порядковий номер зони пропускання об'ємних хвиль (11),  $\left[ \frac{N_{mm}}{2} \right]$  – ціла частина числа.

На межах зон пропускання об'ємних хвиль (11) частота задовольняє одному з рівнянь

$$b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = +1, \quad b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = -1. \quad (13)$$

В першому випадку  $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = +1$  мультиплікатор  $\chi_{mm} = +1$ , а в другому випадку  $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = -1$  мультиплікатор  $\chi_{mm} = -1$ . Тоді з формул (5) випливає, що в першому випадку між сталими інтегрування мають місце залежності

$$A_{2n-1}^{(i)} = A_1^{(i)}, \quad A_{2n}^{(i)} = A_2^{(i)}, \quad (14)$$

тобто період розв'язку дорівнює періоду структури  $h$ , а в другому випадку між сталими інтегрування мають місце залежності

$$A_{2n-1}^{(i)} = (-1)^n A_1^{(i)}, \quad A_{2n}^{(i)} = (-1)^n A_2^{(i)}, \quad (15)$$

тобто період розв'язку дорівнює двом періодам структури  $2h$ .

Повніший аналіз частотних рівнянь на межах зон пропускання хвиль (13) одержимо, виходячи з наступних симетричних і антисиметричних розв'язків відносно серединних площин шарів товщиною  $h_1 = 2H_1$  і  $h_2 = 2H_2$



$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,1}(x_3 - nh + h - H_1)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}} + \tilde{A}_{2n-1}^{(2)} \cos k_{mm,2}(x_3 - nh + h - H_1),$$

$$nh - h < x_3 < nh - h + h_1;$$

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_{2n}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,2}(x_3 - nh + H_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}} + \tilde{A}_{2n}^{(2)} \cos k_{mm,2}(x_3 - nh + H_2),$$

$$nh - h + h_1 < x_3 < nh. \quad (16)$$

Користуючись умовами спряження (2) і залежностями (14), (15) між сталими інтегрування прийдемо до наступного.

На межах зон пропускання  $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = +1$  відбуваються симетричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (SS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_1^{(2)} \cos k_{mm,1}(x_3 - nh + h - H_1), \quad nh - h < x_3 < nh - h + h_1;$$

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_2^{(2)} \cos k_{mm,2}(x_3 - nh + H_2), \quad nh - h + h_1 < x_3 < nh \quad (17)$$

і антисиметричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (AA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_1^{(1)} \frac{\sin k_{mm,1}(x_3 - nh + h - H_1)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}}, \quad nh - h < x_3 < nh - h + h_1;$$

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_2^{(1)} \frac{\sin k_{mm,2}(x_3 - nh + H_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}}, \quad nh - h + h_1 < x_3 < nh. \quad (18)$$

З умов спряження (2) між шарами товщиною  $h_1 = 2H_1$  та  $h_2 = 2H_2$  одержуємо алгебраїчні рівняння

$$\tilde{A}_1^{(2)} \bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1} \sin \bar{k}_{mm,1} H_1 + \tilde{A}_2^{(2)} \bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2} \sin \bar{k}_{mm,2} H_2 = 0,$$

$$\tilde{A}_1^{(2)} \left( \cos \bar{k}_{mm,1} H_1 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1} \sin \bar{k}_{mm,1} H_1 \right) -$$

$$- \tilde{A}_2^{(2)} \left( \cos \bar{k}_{mm,2} H_2 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2} \sin \bar{k}_{mm,2} H_2 \right) = 0 \quad (19)$$

для SS-коливань (17) і алгебраїчні рівняння

$$\tilde{A}_1^{(1)} \cos k_{mm,1} H_1 - \tilde{A}_2^{(1)} \cos k_{mm,2} H_2 = 0$$

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_1^{(1)} \left( \frac{\sin \bar{k}_{mm,1} H_1}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \bar{k}_{mm,1} H_1 \right) + \\ & + \tilde{A}_2^{(1)} \left( \frac{\sin \bar{k}_{mm,2} H_2}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \bar{k}_{mm,2} H_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

для AA-коливаний (18).

З умов існування ненульових розв'язків однорідних систем (19) і (20) випливають частотні рівняння і відношення між сталими інтегрування.

На межах зон пропускання  $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = -1$  відбуваються симетричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (SA-коливання)

$$\begin{aligned} u_{6-m}(x_3) &= \tilde{A}_1^{(2)} \cos k_{mm,1}(x_3 - nh + h - H_1), & nh - h < x_3 < nh - h + h_1; \\ u_{6-m}(x_3) &= \tilde{A}_2^{(1)} \frac{\sin k_{mm,2}(x_3 - nh + H_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}}, & nh - h + h_1 < x_3 < nh \end{aligned} \quad (21)$$

і антисиметричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (AS-коливання)

$$\begin{aligned} u_{6-m}(x_3) &= \tilde{A}_1^{(1)} \frac{\sin k_{mm,1}(x_3 - nh + h - H_1)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}}, & nh - h < x_3 < nh - h + h_1; \\ u_{6-m}(x_3) &= \tilde{A}_2^{(2)} \cos k_{mm,2}(x_3 - nh + H_2), & nh - h + h_1 < x_3 < nh. \end{aligned} \quad (22)$$

З умов спряження (2) між шарами товщиною  $h_1 = 2H_1$  та  $h_2 = 2H_2$  одержуємо алгебраїчні рівняння

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_1^{(2)} \bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1} \sin \bar{k}_{mm,1} H_1 + \tilde{A}_2^{(1)} \cos \bar{k}_{mm,2} H_2 = 0, \\ & \tilde{A}_1^{(2)} \left( \cos \bar{k}_{mm,1} H_1 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1} \sin \bar{k}_{mm,1} H_1 \right) + \\ & + \tilde{A}_2^{(1)} \left( \frac{\sin \bar{k}_{mm,2} H_2}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \bar{k}_{mm,2} H_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

для SA-коливаний і алгебраїчні рівняння

$$\tilde{A}_1^{(1)} \cos k_{mm,1} H_1 - \tilde{A}_2^{(2)} \bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2} \sin \bar{k}_{mm,2} H_2 = 0$$

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_1^{(1)} \left( \frac{\sin \bar{k}_{mm,1} H_1}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \bar{k}_{mm,1} H_1 \right) - \\ & - \tilde{A}_2^{(2)} \left( \cos \bar{k}_{mm,2} H_2 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2} \sin \bar{k}_{mm,2} H_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

для AS-коливань.

З умов існування ненульових розв'язків однорідних систем (23) і (24) одержимо частотні рівняння і відношення між сталими інтегрування.

Одержані результати дозволяють визначити граничні значення частот, що обмежують зони пропускання хвиль впоперек структури матеріалу, і побудувати форми хвиль, які відповідають цим частотам. При чисельному аналізі розглядався композит з механічними властивостями шарів  $\bar{\rho}_1 = 1$ ,  $\bar{c}_{33,1} = 13/3$ ,  $\bar{c}_{44,1} = \bar{c}_{55,1} = 1$ ,  $\bar{\rho}_2 = 2$ ,  $\bar{c}_{33,2} = 70$ ,  $\bar{c}_{44,2} = \bar{c}_{55,2} = 20$  при нормуючих параметрах  $\rho_{00} = \rho_1$ ,  $c_{00} = c_{44,1}$ . Товщини шарів приймалися рівними  $h_1 = 0,3h$  і  $h_2 = 0,7h$ .

На рис. 1 показані дисперсійні залежності для поперечних (рис. 1,а) і поздовжніх (рис. 1,б) хвиль, де по вісях відкладені величини  $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ ,  $\bar{s} = sh$ . Значення міжфазних параметрів  $\bar{\eta}_{33} = \bar{\eta}_{32} = \bar{\eta}_{31} = 0,0$  (міжфазні недосконалості відсутні), 0,1, 0,5, 1,0, 5,0, 10,0 вказані біля кривих на рис. 1.

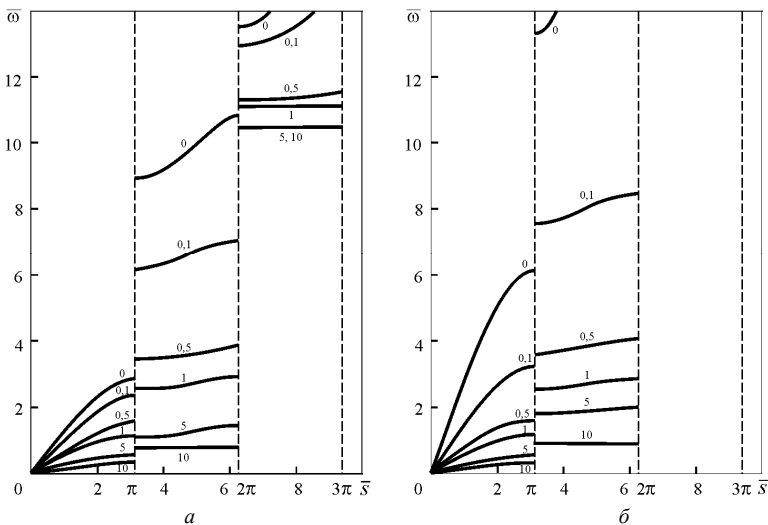


Рис. 1

З наведених графіків випливає, що при збільшенні фазових параметрів зони пропускання хвиль звужуються і вироджуються в дискретний спектр власних частот товщинних коливань шарів товщини  $h_1$  і  $h_2$ . Зони пропускання хвиль при великих значеннях міжфазних параметрів простіше визначати з частотних рівнянь для граничних форм коливань.

На рис. 2 наведені результати розрахунку форм поперечних (рис. 2, а) та поздовжніх (рис. 2, б) хвиль на граничних частотах зон пропускання на двох періодах структури. Фізико-механічні і геометричні параметри такі ж, як і для рис. 1, міжфазні сталі  $\bar{\eta}_{33} = \bar{\eta}_{32} = \bar{\eta}_{31} = 0,5$ . На рис. 2, а показані форми поперечних хвиль, причому крива 2 відповідає верхній границі першої зони пропускання ( $\omega_2 = 1,4731$ , AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ( $\omega_3 = 3,42205$ , SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ( $\omega_4 = 3,81221$ , SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ( $\omega_5 = 11,524375$ , AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання ( $\omega_6 = 11,61749$ , AS-коливання).

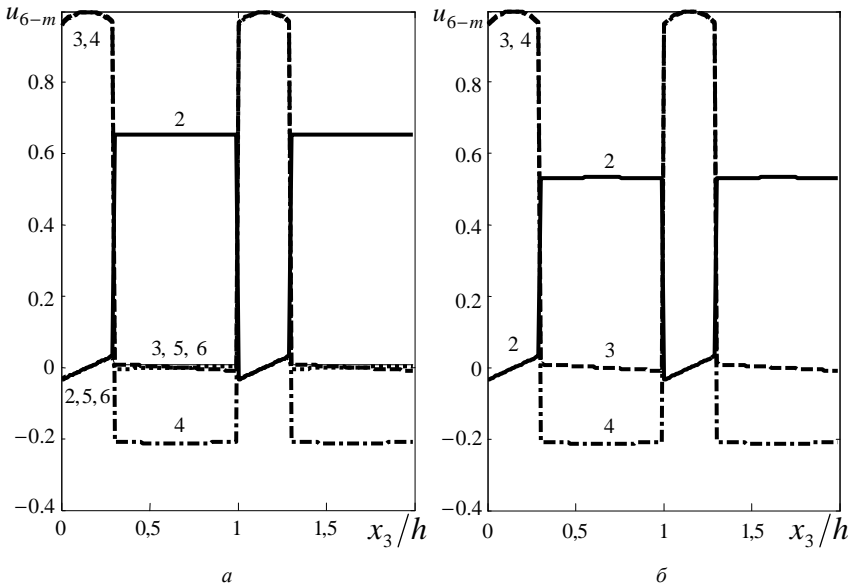


Рис. 2

На рис. 2, б показані форми поздовжніх хвиль, причому крива 2 відповідає верхній границі першої зони пропускання ( $\omega_2 = 1,6319$ , AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ( $\omega_3 = 3,5921$ , SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ( $\omega_4 = 3,97136$ , SS-коливання). При побудові форм приймалося, що максимальна амплітуда коливань в першій зоні пропускання рівна одиниці. Зауважимо, що на нижній границі першої зони пропускання частота  $\bar{\omega} = 0$ , що відповідає поступальному руху жорсткого тіла, зміщення прийнято рівним нулеві і на рис. 2 не показані.

Різка зміна характеру форм на міжфазних прошарках (розриви першого роду на міжфазних площинах в прийнятій феноменологічній моделі) залежить від величини міжфазного параметру  $\bar{\eta}_{3,6-m}$  і зникає при  $\bar{\eta}_{33} = \bar{\eta}_{32} = \bar{\eta}_{31} = 0,0$  (міжфазні недосконалості відсутні). Неперервні ділянки форм мають пологий характер в зв'язку з великим періодом відповідних тригонометричних функцій.

1. *Баженов В.А., Шульга Н.Д.* Скорости распространения длинных волн в слоистых композитах с тонкими прослойками // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 55. – С. 6-10.
2. *Баженов В.А., Шульга Н.Д.* Распространение волн поперек структуры слоистого материала с межфазными прослойками // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1990. – Вып. 56. – С. 3-7.
3. *Композиционные материалы.* В 8-и т. Т.1. поверхности раздела в металлических композитах. – Москва: Мир, 1978. – 438 с. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – Москва: Мир, 1978. – 294 с.
4. *Механика композитов.* В 12 т. Т.2. Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 431 с. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: ПТОО «А.С.К.», 1997. – 394 с.
5. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наукова думка, 1981. – 200 с.
6. *Шульга М.О., Шульга Н.Д.* Дисперсія хвиль поперек структури шаруватих композитів з міжфазними недосконалостями //Деп. в ДНТБ України 13.02.1995 р. № 302 –Ук.95 (Донецкий ун-т. – Донецьк, 1994). – 34 с.

*Надійшло до редакції 12.12.2006 р.*

## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.</i> Метод реакцій для обчислення $j$ -інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування . . . . .	3
<i>Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В., Сизевич Б.І.</i> Розрахункові співвідношення МССЕ геометрично нелінійної задачі термов'язкопружнопластичного деформування вісесиметричних тіл з урахуванням ушкодженості матеріалу . . . . .	18
<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.</i> Алгоритми розв'язання рівнянь рівноваги для динамічних задач напіваналітичним методом скінчених елементів . . . . .	43
<i>Гоцуляк С.О., Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Шах В.В.</i> Стойкість стінок циліндричних оболонок при комбінованому навантаженні з урахуванням недосконалостей форми . . . . .	63
<i>Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.</i> Вплив кривини на стійкість і позакритичну поведінку ребристих панелей . . . . .	73
<i>Погорєлова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.</i> Чисельні дослідження режимів коливань віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії . . . . .	82
<i>Цихановський В.К., Прусов Д.Е.</i> Уточнений чисельний розрахунок жорстких аеродромних покриттів на слабких ґрунтових основах з урахуванням неоднорідності матеріалу і особливостей стикових елементів плит . . . . .	92
<i>Іванченко Г.М.</i> Вплив попередніх напружень у земній корі на поширення в ній розривних хвиль . . . . .	101
<i>Шульга Н.Д.</i> Частоти пропускання і граничні форми об'ємних хвиль поперек структури двокомпонентних шаруватих композитів з міжфазними недосконалостями . . . . .	109

Наукове видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

Випуск 79

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 20.12.06. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.  
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.  
Тираж 100. Зам. № 7-610.

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

---

Віддруковано на ЗАТ “ВПОЛ”  
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.