

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

---

Випуск 80

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2006

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*Ю.В. Верюжський*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*Є.О. Гоцуляк*, д-р техн. наук  
*О.І. Гуляр*, д-р техн. наук

*Є.С. Дехтярюк*, д-р техн. наук  
*Г.В. Ісаханов*, д-р техн. наук  
*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*М.О. Шульга*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 20 грудня 2006 року, протокол № 13.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 80 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2006. – 128 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,  
м. Київ, 03037,  
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

© КНУБА, 2006

УДК 624.04, 004.4

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук  
**Шишов О.В.**, канд. техн. наук

## **ЕЛЕКТРОННИЙ ПІДРУЧНИК З БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ**

Інформаційні технології, які дедалі більше залучаються до навчального процесу у вищих навчальних закладах України, вимагають створення спеціальних навчальних засобів. До таких засобів можна віднести електронні підручники, навчальні посібники, методичні рекомендації тощо.

Електронні навчальні матеріали, порівно з традиційними паперовими виданнями, мають певні особливості. Перш за все, практично відсутні обмеження щодо об'єму підручника. Проте накладаються певні обмеження на обсяг його окремих модулів, які можуть завантажуватись і використовуватись окремо. Це пов'язано з необхідністю швидкої передачі фрагментів підручника через Internet.

Ще одна особливість полягає у можливості супроводжувати електронний підручник програмним забезпеченням, яке можна залучати до роботи безпосередньо з тексту підручника.

Усі електронні підручники можна поділити на два види.

Автономні, для роботи з якими немає необхідності залучати спеціальні програми, призначені для перегляду підручника. Це підручники, створені за допомогою, так званих, гіпертекстових файлів (формат htm). Недоліком таких підручників є спотворення вигляду сторінок тексту при виведенні на екран монітора.

До другого виду можна віднести електронні підручники, для використання яких необхідно використовувати певне програмне забезпечення. Як правило, створюються вони за допомогою програми Adobe Acrobat і файли підручника мають формат pdf (Portable Document Format). Файли pdf мають на порядок менший обсяг, ніж гіпертекстові файли. Розташування тексту підручника, рисунків, формул не змінюється при масштабуванні сторінок на екрані монітора. Крім того, файли підручника легко захистити від внесення несанкціонованих змін.

На кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури розроблено електронний підручник з базового курсу будівельної механіки. В основу електронного підручника покладено розроблені викладачами кафедри підручник [1] та навчальний посібник [2]. Підручник охоплює всі основні теми, присвячені аналізу напружено-деформованого стану статично визначуваних та статично невизначуваних стержневих систем при дії

статичних і динамічних навантажень. Особлива увага приділяється класичним методам розрахунку статично невизначуваних систем (метод сил, метод переміщень, змішаний метод), а також методу скінченних елементів, який покладено в основу переважної більшості сучасних автоматизованих програмних комплексів розрахунку споруд на міцність, жорсткість та стійкість. До підручника додаються оригінальні спеціалізовані прикладні програми, призначені для автоматизованого виконання навчальних завдань, а також для тестування рівня знань та умінь в галузі будівельної механіки.

Підручник складається з 23 глав, які сгруповано у 7 розділів:

1. Основні поняття, принципи та рівняння будівельної механіки
2. Розрахунок стержневих систем методом скінченних елементів
3. Розрахунок статично визначуваних систем
4. Розрахунок статично невизначуваних систем
5. Основи динаміки та стійкості споруд
6. Метод скінченних елементів для двовимірних задач
7. Навчальні програмні комплекси

У першому розділі розглядаються питання кінематичного аналізу систем, тобто правила поєднання окремих елементів різного типу в єдину систему, а також способи визначення реакцій взаємодії між елементами. Тут також обговорюються методи визначення внутрішніх зусиль в елементах системи та способи обчислення будь-яких переміщень від будь-яких зовнішніх дій: силових, температурних та кінематичних. Велика увага приділяється загальним рівнянням будівельної механіки, зокрема енергетичним принципам розрахунку.

Другий розділ присвячено розрахунку стержневих систем методом скінченних елементів. Розглядаються два підходи: метод скінченних елементів у формі методу переміщень та метод скінченних елементів у формі методу сил. Тут розглянуто основні поняття методу, виведено матриці жорсткості стержневих скінченних елементів в локальній та глобальній системах координат при різних способах приєднання стержнів до вузлів, показано побудову матриці жорсткості скінченноелементної моделі, а також визначення внутрішніх зусиль в стержнях системи.

Способи розрахунку статично визначуваних систем зібрано в третьому розділі. Тут докладно розглядаються питання розрахунків ферм, рам, тришарнірних арок на силові дії.

Класичні методи розрахунків статично невизначуваних систем (метод сил, метод переміщень, змішаний метод) розглядаються в четвертому розділі. Показано застосування цих методів для розрахунку рам, нерозрізних балок, ферм тощо на різні зовнішні дії.

П'ятий розділ – це розрахунки стержневих систем на динаміку та стійкість. Докладно обговорені розрахунки стержневих систем з однією,

кількома та нескінченною кількістю ступенів вільності. Особлива увага приділена методу скінченних елементів у задачах динаміки.

В шостому розділі підручника викладено особливості розрахунків методом скінченних елементів двовимірних об'єктів, таких як балки-стіжки та пластини, що згинаються.

Сьомий розділ присвячено автоматизованому навчальному комплексу АСИСТЕНТ, який адаптовано до електронного підручника. Докладно обговорюються можливості комплексу, робота з різними його підсистемами, включно з підсистемою, яка здійснює самотестування знань та умінь з будівельної механіки.

Крім зазначених розділів, до електронного підручника включено додатки, які надають довідкові матеріали стосовно розрахунків статично невизначуваних балок і рам на міцність та стійкість.

Таким чином електронний підручник являє собою своєрідний комплекс, що складається із власне підручника та допоміжного програмного забезпечення. Структура підручника показана на рис. 1.

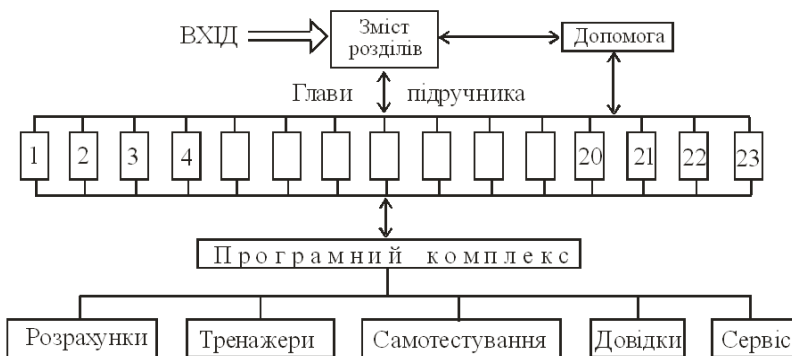


Рис. 1

Фізично підручник являє собою сукупність взаємопов'язаних файлів формату pdf, в кожному з яких розміщено тексти певних глав, додатків, списку літератури, допомоги. Особливе місце займає файл Зміст розділів, через який здійснюється зв'язок з усіма іншими файлами глав підручника.

Для роботи з підручником необхідно встановити на комп'ютері будь-яку версію програми Adobe Acrobat, яка вільно і безкоштовно розповсюджується через Internet. Для звернення до електронного підручника за допомогою згаданої програми в першу чергу завантажується саме цей файл, унаслідок чого на екран монітора виводиться перша сторінка (рис. 2).

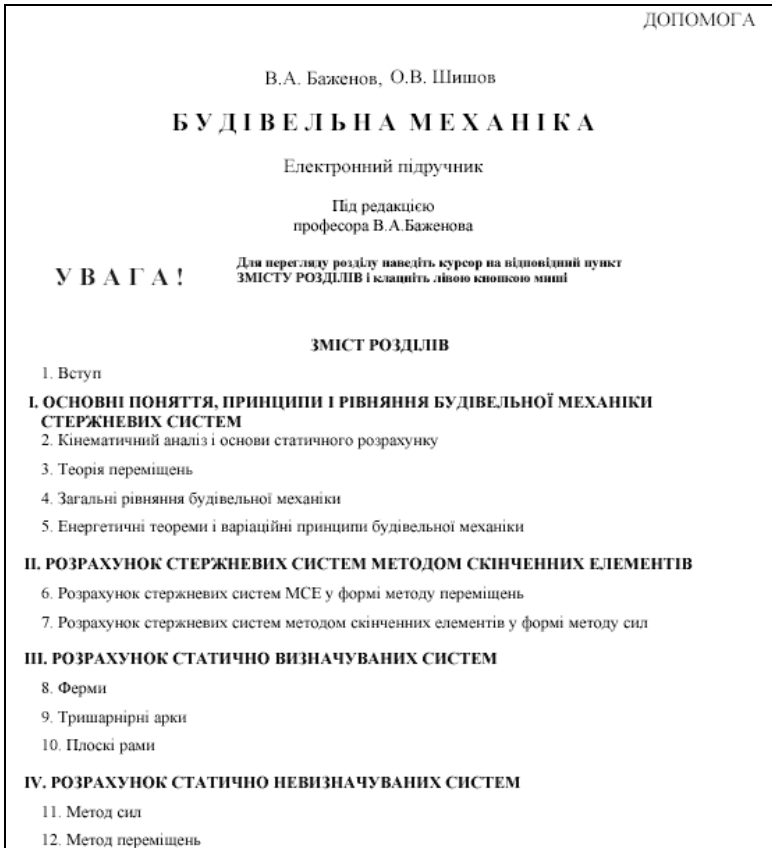


Рис. 2

Перехід до певних розділів або глав підручника здійснюється за допомогою посилань. Речення або слова, які є посиланнями, виділені синім кольором. Натискання мишею на будь-яке речення з посиланням призводить до практично миттєвого завантаження файлу відповідної глави.

Пояснення щодо роботи з підручником здійснюється через посилання ДОПОМОГА, яке розташоване на початку кожної глави. Натискання мишею на означене посилання виводить на екран монітора правила роботи з електронним підручником. Тут пояснюються способи пересування по тексту підручника, правила використання посилань, що розташовані в тексті, способи масштабування зображення на екрані тощо.

Для переходу в межах поточної глави до того чи іншого параграфу доцільно використовувати меню закладок. Для цього достатньо клацнути мишею по кнопці Закладки (Bookmarks) у вертикальному меню, яке розташоване з лівого боку вікна Adobe Acrobat (рис. 3). У результаті відкриється меню закладок (рис. 4).



Рис. 4

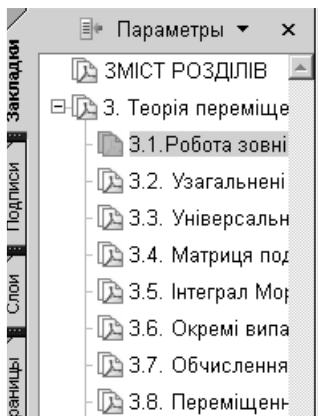


Рис. 5

Кожна із закладок меню є посиланням, яке виводить на екран відповідний фрагмент глави. Через це меню здійснюється повернення до Змісту розділів. Також через закладку ДОПОМОГА, яка розташована в кінці меню, в будь-який момент можна вивести файл з правилами роботи з підручником на екран.

Посилання, розташовані в тексті глав підручника, дозволяють залучити до роботи прикладні програми навчального комплексу. Після завершення роботи з програмою здійснюється автоматичне повернення до тексту глави, де розташоване зазначене посилання.

Через посилання, можна залучити до роботи не окремі прикладні програми комплексу АСИСТЕНТ, але й весь комплекс. При цьому на екран виводиться головне вікно комплексу (рис.б).

Далі можна використовувати комплекс в автономному режимі.

Підручник разом із програмним навчальним комплексом АСИСТЕНТ здатен функціонувати під керуванням операційної системи Windows будь-яких версій, починаючи з Windows 2000.



Рис.6

Електронний підручник з будівельної механіки призначається для студентів будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів України. Особливо важливе значення набуває підручник в галузі дистанційної освіти, дозволяючи підвищити якість знань студентів при аналізі напружено-деформованого стану будівель та споруд у поза аудиторний час. Програмні засоби, що додаватимуться до підручника, сприятимуть поглибленню знань студентів

1. *Баженів В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерний курс. – Київ, 1999.- 583 с.
2. *Баженів В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Розрахункові справи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. – К.: Каравела, 2007 р. –364 с.

*Надійшла до редколегії 24.12.2006 р.*



УДК 539.3

Пискунов С.О. канд. техн. наук  
Шкрить О.О.  
Мицюк С.В.

## ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ КРУГОВИХ ТІЛ

На основі напіваналітичного методу скінченних елементів проведено розробку і реалізацію методики обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень прямим методом при силовому навантаженні.

**Вступ.** Прогрес в різних галузях науки та техніки приводить до створення нових машин, механізмів і конструкцій. Однак, всі конструкції в тій чи іншій мірі мають схильність до руйнування, наслідки яких можуть бути дуже значними, тому актуальним є питання можливості експлуатації деталей та вузлів при наявності в них тріщин. В певних випадках визначення несучої здатності таких тіл можна здійснювати шляхом зведення задачі до двовимірної. Серед існуючих тіл з тріщинами більшість мають складну форму. Нерівномірність розподілу в просторі силового навантаження, прикладеного до таких тіл, та викликаний наявністю тріщин просторовий характер напружено-деформованого стану потребує розглядати поставлену задачу в просторовій постановці.

Розв'язання задачі про визначення несучої здатності просторових тіл при наявності тріщин потребує залучення чисельних методів, найбільш широкого застосування серед яких на сьогоднішній день набуває МСЕ (метод скінченних елементів). Проте, використання традиційного тривимірного варіанту МСЕ для розв'язання просторових задач потребує значних обчислювальних витрат. Суттєве зменшення обчислювальних витрат може бути досягнуто за рахунок використання ефективної модифікації МСЕ – напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ). Це дозволяє розглядати досить широке коло просторових об'єктів, до яких зокрема, відносяться призматичні тіла та тіла обертання.

Як відомо, при лінійному деформуванні, а також в деяких випадках нелінійного деформування, для оцінки несучої здатності тіл з тріщинами використовується коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Визначення КІН здійснюється прямими та енергетичними методами, шляхи реалізації яких для двовимірних задач наведені в [1]. Реалізація прямого методу визначення КІН для призматичних тіл на основі НМСЕ здійснена в [4]. В той же час, значна кількість просторових тіл з тріщинами являють собою тіла обертання (рис. 1, рис. 2).

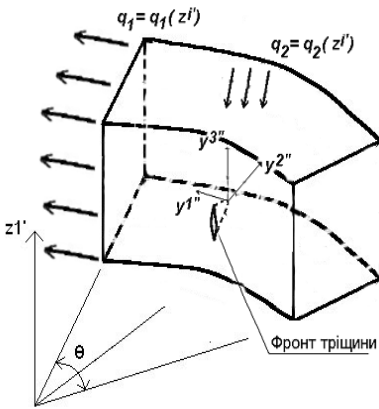


Рис. 1

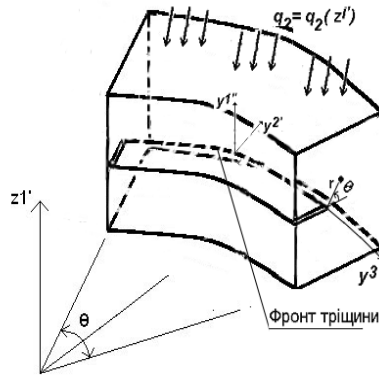


Рис. 2

Таким чином постає необхідність розробки методів визначення КІН для просторових тіл обертання на основі НМСЕ. Метою даної роботи є отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ для дискретизації тіл обертання з тріщинами, реалізація методики визначення КІН прямим методом в досліджуваних об'єктах і проведення аналізу достовірності результатів.

**1. Співвідношення механіки руйнування.** Для опису просторового напружено-деформованого стану в околі фронту тріщини застосовується пов'язана із тріщиною система координат  $y''$ : вісь  $y^{1''}$  спрямована за нормаллю до поверхні тріщини, а  $y^{2''}$ ,  $y^{3''}$  – за дотичною до фронту. У випадку лінійного деформування під впливом силового навантаження напружено-деформований стан в околі вершини тріщини може бути описаний асимптотичними формулами, які встановлюють взаємозв'язок між переміщеннями і напруженнями та КІН  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ :

$$\begin{Bmatrix} u_{1''} \\ u_{2''} \\ u_{3''} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2r}}{G\sqrt{\pi}} \left[ \frac{K_I}{8} \begin{bmatrix} (5-8\nu)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \\ (7-8\nu)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{8} \begin{bmatrix} (9-8\nu)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \\ (-3+8\nu)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix}, \right. \\ \left. K_{III} \sin\frac{\theta}{2} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11''} \\ \sigma^{22''} \\ \sigma^{33''} \\ \sigma^{12''} \\ \sigma^{13''} \\ \sigma^{23''} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ 2\nu \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + K_{II} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ -2\nu \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{bmatrix} + K_{III} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \right], \quad (1)$$

де  $r$ ,  $\theta$  – полярні координати з початком у точці фронту тріщини, для якої визначені КІН;  $G$  – модуль зсуву;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $I, II, III$  – індекси, що визначають тип руйнування.

Для випадку тріщин нормального відриву, що розглядаються найчастіше (тип I, рис.3), в яких переміщення берегів тріщини перпендикулярні її площині, вирази (1) набудуть вигляду:

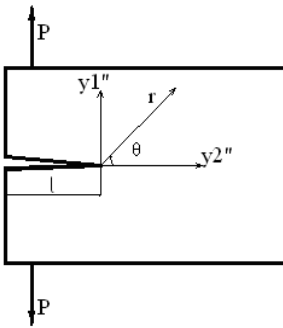


Рис. 3

$$\begin{aligned} \sigma^{11''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma^{12''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{22''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ u_1'' &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ u_2'' &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

## 2. Скінченно-елементна дискретизація тіл обертання з тріщинами.

При моделюванні тіл обертання із тріщинами на основі НМСЕ залежно від розташування тріщини відносно до характерного напрямку (утворюючої) аналогічно до призматичних тіл, розрізняють тіла обертання з поперечною (рис.1) та поздовжньою (рис.2) тріщинами [1;4]. При використанні НМСЕ скінченно-елементна дискретизація об'єкта (як

показано на рис. 4 і рис. 5) відбувається в поперечному перерізі, а вздовж направляючої використовується один скінчений елемент, який повторює форму тіла. Розбивка об'єкта на скінченні елементи передбачає згущення сітки в привершинній області. Результати дослідження з питань визначення кількості скінченних елементів (СЕ) в привершинній зоні та їх характерних розмірів наведені в [3].

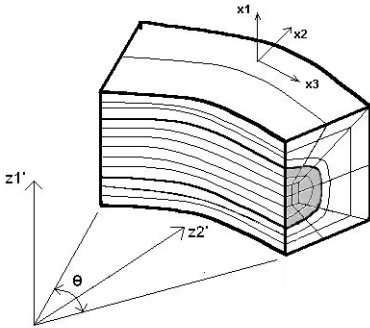


Рис. 4

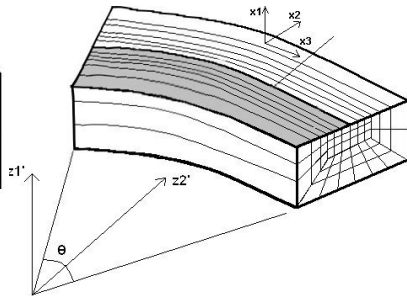


Рис. 5

**3.Круговий неоднорідний незамкнений СЕ.** Для апроксимації просторових неоднорідних кругових тіл використовуються просторові неоднорідні замкнені і незамкнені кругові СЕ (рис. 6), що являють собою криволінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола [1].

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат  $x^i$ , яка природно пов'язана з геометрією об'єкта так, що осі  $x^1$  і  $x^2$  спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ, а вісь  $x^3$  спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із  $z^3$ . При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ (рис. 7) [1;2].

Будемо вважати, що компоненти тензора пружних сталих та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора  $g_{ij}$ , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$C^{ijkl} \approx C^{ijkl} = C^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad g = \hat{g} = g \Big|_{x^\alpha=0} .$$

Розподіл переміщень у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (3)$$

де  $u_{m'(S_1 S_2)}$  – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, що визначають розташування вузлів відносно до центра поперечного перетину елемента в місцевій системі координат  $x^i$ .

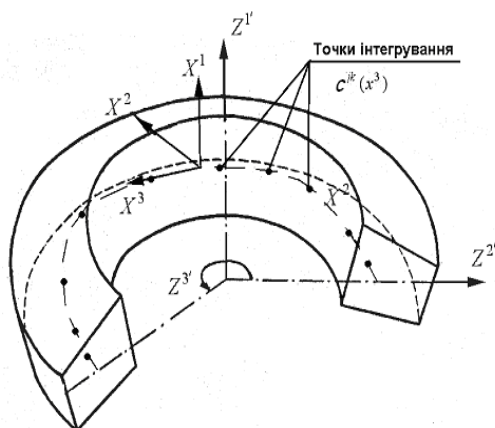


Рис. 6

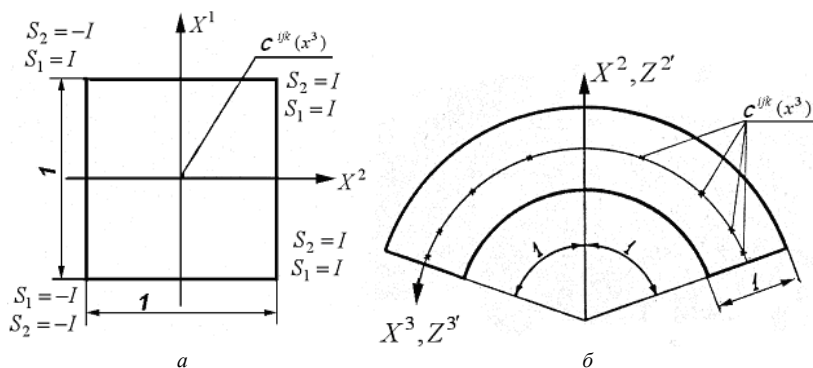


Рис. 7

Для апроксимації переміщень у характерному напрямку  $z^3$  використовується певна система координатних функцій  $\psi^l$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ , що має задовольняти умовам повноти та лінійної незалежності [2]. Конкретизація виразів для  $\psi^l$  здійснюється відповідно до особливостей форми досліджуваного об'єкта і необхідності апроксимації граничних умов на торцях тіла. Зокрема, у випадку замкнених тіл обергання та шарнірно опертих по торцях кругових незамкнених тіл використовуються тригонометричні функції, а для криволінійних незамкнених та призматичних тіл із довільними граничними умовами на торцях – поліноми Лагранжа, доповнені поліномами Міхліна. Такий вибір координатних функцій дозволяє найефективніше апроксимувати різні види граничних умов [2].

Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється відповідно до варіаційного принципу можливих переміщень [3]. Рівняння рівноваги системи, що складається з  $N$  СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0.$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Подаючи в останньому виразі компоненти тензора напружень і тензора деформацій через їхні значення у центрі елемента, відповідно до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) та інтегруючи, для варіації енергії деформації одного СЕ, одержимо вираз вузлових реакцій  $\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_K$  [3]:

$$\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_K = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]_K^T \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]_K^T \varphi_{l,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} dx^3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K^T \boldsymbol{\varphi}^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K^T \boldsymbol{\varphi}_{,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} dx^3 \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \\
& + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} \boldsymbol{\varphi}^{(l)} dx^3 + \right. \\
& \left. + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} \boldsymbol{\varphi}_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (4)
\end{aligned}$$

З урахуванням чисельного інтегрування за напрямком  $x^3$  [3], отримуємо вираз для обчислення компонентів вектора вузлових реакцій неоднорідного кругового незамкненого СЕ з довільними граничними умовами на торцях:

$$\begin{aligned}
\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_K & = \left\{ \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_l + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_2 \right]_K \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_{l3} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{12} \sum_{m=1}^M \left( \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_{l\alpha} + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\}_{l\alpha 3} \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (5)
\end{aligned}$$

Коефіцієнти розкладання прирощень напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{,\alpha} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha} \right\}, \quad (6)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подано отриманий вираз енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left( \delta \left\{ \bar{u} \right\}_l^T \right) [K]_{lnK} \left\{ \bar{u} \right\}_n,$$

де  $[K]_{ln_K}$  – матриця жорсткості неоднорідного кругового незамкненого СЕ:

$$\begin{aligned}
 [K]_{ln_K} = & \left\{ \begin{aligned} & \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K^T [D]_{00}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_2 \right]_K^T [D]_{30}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K + \\ & + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_1 \right]_K^T [D]_{03}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_2 \right]_K + [B_2]_K^T [D]_{33}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_2 \right]_K + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K^T [D]_{00\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K^T [D]_{30\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K + \right. \\ & \left. + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{1,\alpha} \right]_K^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K + \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\bar{B}}_{2,\alpha} \right]_K \right) \left. \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (7)
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Наведені вирази вектора вузлових реакцій (5) і матриці жорсткості (7) неоднорідного кругового незамкненого СЕ, дозволяють утворювати дискретні моделі для неоднорідних кругових незамкнених тіл [1]. Наявність зони згущення призводить до ускладнення топології дискретної моделі і необхідності застосування СЕ, форма поперечного перерізу яких є суттєво косокутною. В цьому випадку при виведенні матриці жорсткості і вектора вузлових реакцій необхідним є урахування змінності компонентів метричного тензора в поперечному перерізі СЕ. Вигляд матриці  $[B]$  для цього випадку наведено в [3].

Розв'язування отриманої системи рівнянь НМСЕ виконується на основі блочно-ітераційних алгоритмів, що обумовлено блочною структурою матриці жорсткості та векторів вузлових реакцій і зовнішнього навантаження. В даній роботі розв'язання системи рівнянь здійснюється на основ методу блочних ітерацій із послідовною верхньою релаксацією [1].

#### 4.Реалізація методики визначення КІН для тіл обертання.

Обчислення КІН виконується в характерних точках вздовж фронту тріщини (рис. 8) в межах площин, що містять ці точки і розташовані перпендикулярно до фронту тріщини. Таким чином задача визначення КІН в точці фронту тріщини в просторовому тілі обертання зводиться до його обчислення в межах площини  $y^1 - y^2$ .



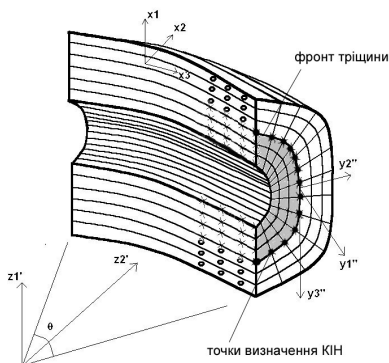


Рис. 8

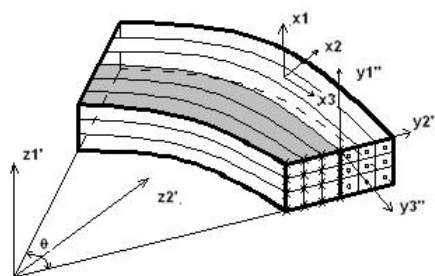


Рис. 9

Враховуючи вимоги методики, пов'язані з явищем сингулярності [7], в точках, розташованих на відстанях менших  $0.1L_{тр}$  ( $L_{тр}$  - довжина тріщини) вздовж осей  $y_1''$   $y_2''$  від вершини тріщини КІН не визначається. Також не визначається КІН за напруженнями в точках, що розташовані ближче  $0.05L_{тр}$  від вісі  $y_2''$  (рис. 10, точки обчислення КІН за напруженнями позначені кружками, за переміщеннями – хрестиками). Враховуючи це, було розглянуто три модифікації цієї методики [4]. Згідно до першої з них (рис.10,а) було відкинуто точки, що знаходяться найближче до вершини тріщини, згідно другої (рис. 10,б) – ці точки було враховано. Також було розраховано КІН лише за переміщенням  $U_K$  в точці, що розташована найближче до вершини тріщини.

При розгляді тіл з поперечними тріщинами привершинні області, в яких проводиться визначення КІН за напруженнями та переміщеннями і його подальше усереднення, розташовані в площині  $z^{1'}$  -  $z^{3'}$ . Обчислення КІН здійснюється після розв'язання задачі про визначення НДС. Визначення КІН за переміщеннями  $K(u)$ , здійснюється у вузлах, а КІН за напруженнями  $K(\sigma)$  – в центрах СЕ (точки  $1 \dots (n-1)$  рис.11). Усереднення для проміжних точок фронту тріщини виконується за прилеглими до неї СЕ:

$$K(\sigma) = \frac{K(\sigma)_{(i-1)} + K(\sigma)_i}{2},$$

а в крайніх точках фронту тріщини значення  $K(\sigma)$  приймаються такими, що обчислені для крайніх елементів:

$$K(\sigma)_1 = K(\sigma)_1, \quad K(\sigma)_n = K(\sigma)_{(n-1)}.$$

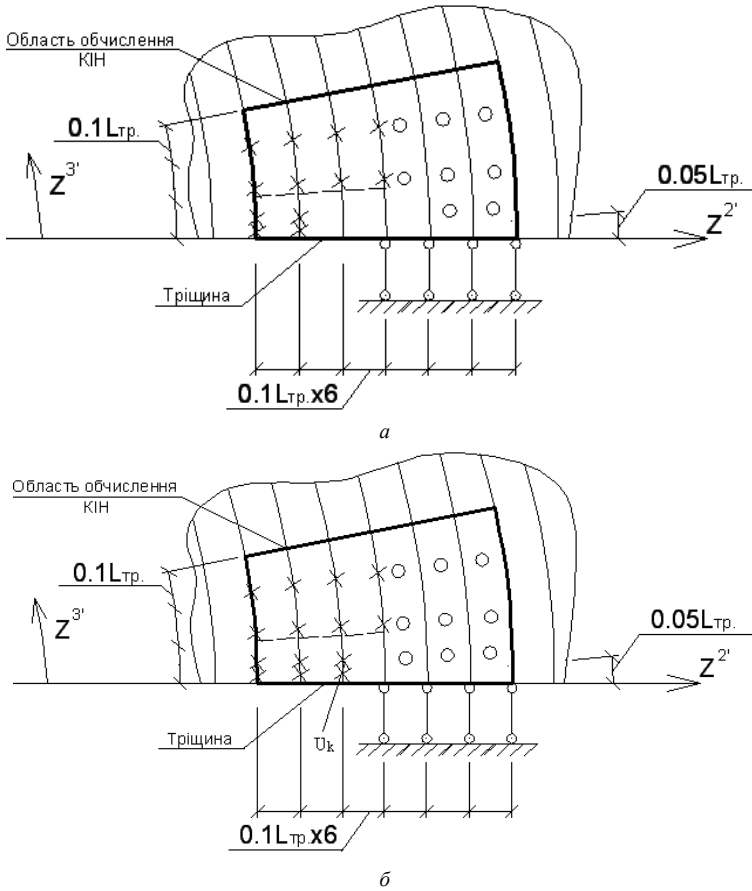


Рис. 10

Тому, для більш точного визначення  $K(\sigma)$  в крайніх точках фронту, рекомендується застосовувати елементи малої товщини.

Обчислені в кожній точці величини КІН за напруженнями і переміщеннями усереднюються до отримання  $\bar{K}(u)$  і  $\bar{K}(\sigma)$ , які в свою чергу усереднюються для отримання кінцевого значення КІН:

$$K = \frac{\bar{K}(u) + \bar{K}(\sigma)}{2}$$

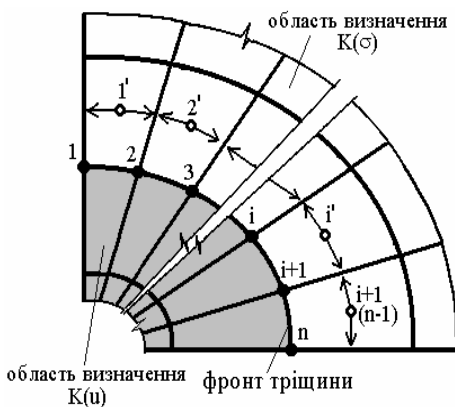


Рис. 11

Для тіл з поздовжніми тріщинами КІН визначаються по всім точкам інтегрування вздовж утворюючої, напрямком якої збігається із напрямком фронту тріщини. Привершинна область для кожної точки інтегрування лежить в площині поверхні тріщини тобто в цьому випадку визначення КІН в межах привершинної області відбувається в поперечному перерізі тіла за аналогією з двовимірними задачами [1].

**5. Дослідження достовірності результатів.** З метою дослідження вірогідності і ефективності НМСЕ в просторових задачах механіки руйнування для тіл обертання було проведено розв'язування задачі визначення КІН в диску з двома тріщинами, що знаходиться під впливом внутрішнього тиску в умовах плоскої деформації. Розрахункова схема диску показана на рис. 12.

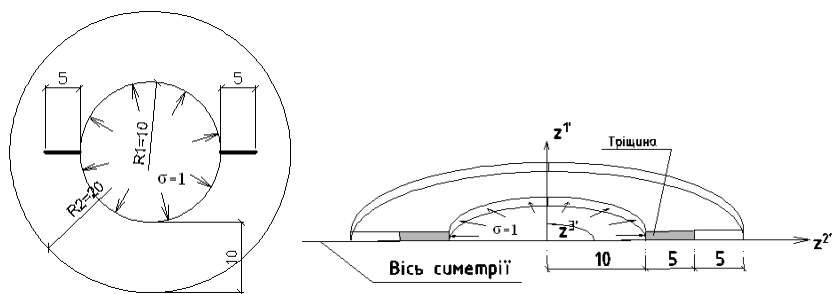
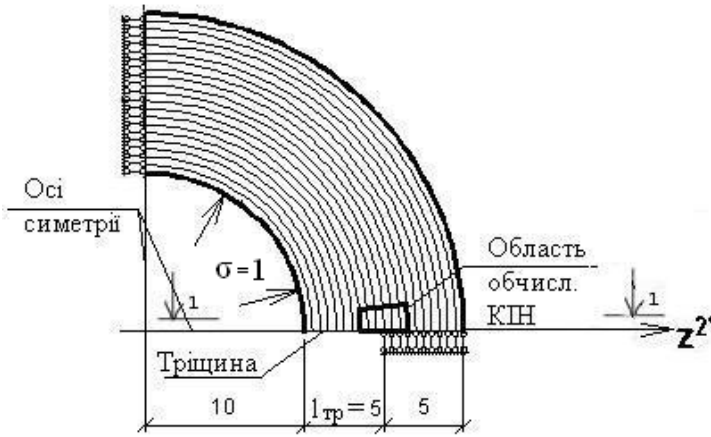
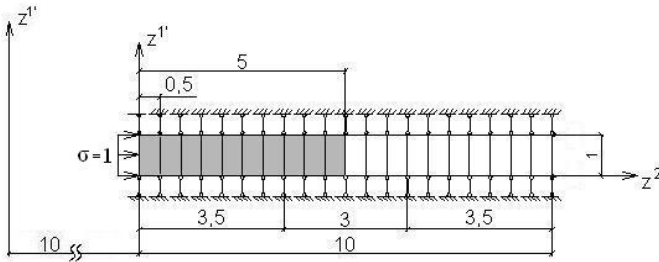


Рис. 12

Внаслідок симетрії розглядалась чверть диска. Розв'язання задачі здійснено із використанням 30 гармонік в представленні переміщень за напрямком  $z^3$ . Вигляд відповідної дискретної моделі НМСЕ в площинах  $z^1-z^2$  і  $z^2-z^3$  наведений на рис.13 а, б.



a



б

Рис. 13

Розрахунок проведений із використанням схем визначення КІН, наведених на рис. 10, а також за переміщенням в найближчому до вершини тріщини вузлі (точка  $K$ , рис 10,б). Результати, у порівнянні із прийнятими за еталонні розв'язками – наведеним в [5] та отриманим авторами за методом піддатливості із використанням дискретної моделі МСЕ (рис.15), наведені в табл.1. Як видно, найкраща точність визначення КІН в просторовій постановці досягається при використанні схеми визначення КІН із урахуванням виключення точок асимптотичних значень напружень і переміщень (рис.10,а).

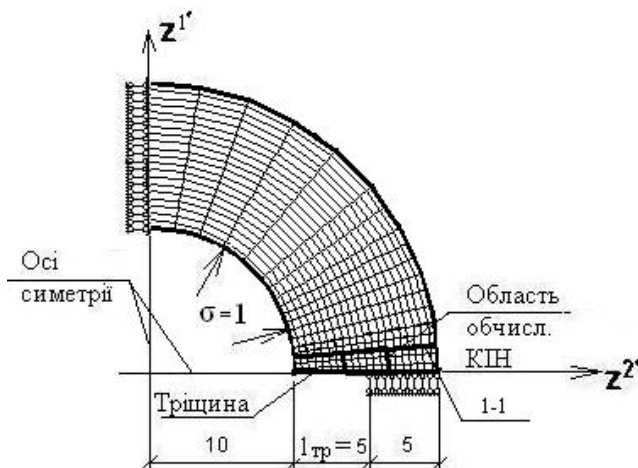


Рис. 15

Таблиця 1

Методи визначення КІН		КІН	$\delta$ , %
Метод піддатливості, МСЕ		2.692	- 0.451
Еталон за Савруком М.П.		2,679	-
Прямий метод, НМСЕ	розрахункова схема за рис.10,а	2.629	1.899
	розрахункова схема за рис.10,б	2.781	- 3.772
	КІН (Uк)	2.448	8.653

**Висновок.** Таким чином, в даній статті наведені основні співвідношення лінійної механіки руйнування при силовому навантаженні, розглянуті принципи і досліджено можливості модифікації методик обчислення КІН прямим методом при її реалізації для тіл обертання. Аналіз результатів показав достовірність використовуваних підходів. Найбільша точність обчислення КІН досягнута при

використанні модифікації методики, згідно до якої усереднення КІН по привершинній області здійснюється без урахування величин КІН по напруженням і переміщеннями, що обчислені в найближчих до вершини тріщини точках.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.:НИИСМ, 1993. – 376 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Слодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з давільними граничними умовами.// Науково технічний збірник „Опір матеріалів і теорія споруд” – Вп.77.К: КНУБА, 2005-112с.
4. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 74. – С. 73–82.
5. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжения в телах с трещинами – Т.2 - 1998.-620с.

*Надійшло до редакції 15.11.2006 р.*

УДК 539.3

Солодей І.І., канд. техн. наук

## МЕТОДИКА АНАЛІЗУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ КОЛИВАНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ТА ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З ДОВІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

**Вступ.** Основні положення та залежності теорії пружності, які описують напружено-деформований стан просторових тіл, достатньо повно і широко відображені в монографіях [4, 14, 15]. Великий внесок в розробку теорії пластичності та узагальнення її на випадок динамічних навантажень внесли роботи [3, 8-11].

Розв'язання систем нелінійних рівнянь в двовимірній і просторовій задачах пластичності відбувається різноманітними модифікаціями методів змінних параметрів пружності чи додаткових навантажень. Область ефективного використання кожного з них має свої обмеження, які змінюються в достатньо широкому діапазоні в залежності від специфіки задачі, що розглядається. Аналіз робіт [16-19], які вміщують огляд літератури, класифікацію та співставлення методів розв'язання систем нелінійних рівнянь, посвідчує, що найбільш ефективними є комбіновані алгоритми, які поєднують в собі переваги окремих процедур.

Проблеми нелінійного нестационарного деформування навіть однорідних конструкцій висвітлені в літературі все ще слабо. Питання нелінійної динаміки однорідних оболонок знайшли своє відображення в роботах [20-23].

Тому, не зважаючи на те, що НМСЕ з відомим формулюванням виявився вельми ефективним, клас задач, що вирішується, залишається досить вузьким. В той же час, чисельні результати, що отримані в [1], свідчать про високу швидкість збіжності рішень при апроксимації параметрів напружено-деформованого стану відрізками рядів Фур'є для задач статички в рамках НМСЕ.

**Постановка задачі.** Розглядаються неоднорідні ізотропні тіла обертання та призматичні тіла з довільними граничними умовами, що знаходяться під дією довільного динамічного навантаження або зміщень, як функції часу.

Опис топологічних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системі координат  $Z^i$ , що в подальшому називається базисною. Для подання напружено-

деформованого стану тіла запроваджується місцева криволінійна система координат  $x^i$ , яка пов'язана з його геометрією.

Рух неоднорідних тіл, описується на основі варіаційного принципу Лагранжа-Даламбера [8]:

$$\int_V \rho \ddot{u}_i^i \delta u_i^i dV + \int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V f^i \delta u_i^i dV - \int_{S_p} p^i \delta u_i^i dS = 0, \quad (1)$$

де  $\tilde{\sigma}^{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  - фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу  $t_0$ , який приймається за початок часової координати:

$$u(Z^i, t_0) = u_0(Z^i), \quad \dot{u}(Z^i, t_0) = \dot{u}_0(Z^i), \quad Z^i \in V. \quad (2)$$

Припускається, що на частині поверхні  $S_u$  задані кінематичні граничні умови:

$$u(Z^i, t) = \tilde{u}(Z^i, t), \quad Z^i \in S_u, \quad (3)$$

а на поверхні  $S_p$  з нормаллю  $\vec{n} = n_j e^j$  - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_{,i}^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(Z^{k'}, t), \quad Z^i \in S_p. \quad (4)$$

Компоненти тензора напружень обчислюються за компонентами тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука. За межею пружності зв'язок між напруженнями і деформаціями прийнятий у відповідності з рівняннями теорії пластичної течії при умові текучості Мізеса для ізотропно-зміцнюваного матеріала [13]. Припускається, що в процесі навантаження в об'ємі тіла виникають пружні  $\varepsilon_{ij}^e$  і миттєві пластичні  $\varepsilon_{ij}^p$  деформації:

1. Матеріал тіла однорідний і ізотропний, зміна його об'єму - лінійно-пружна:

$$\varepsilon_{kk}^p = 0. \quad (5)$$

2. Компоненти тензора приросту деформацій  $d\varepsilon_{ij}$  складаються з приросту пружних  $d\varepsilon_{ij}^e$  і пластичних  $d\varepsilon_{ij}^p$  складових:



$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (6)$$

3. Область пружних деформацій обмежена поверхнею текучості, рівняння якої в просторі напружень має вигляд:

$$f(\sigma^{ij}, \chi) = 0, \quad (7)$$

де  $\chi = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ij p}$  - міра зміцнення (параметер Одквіста), який характеризує накопичену пластичну деформацію.

4. У відповідності з асоційованим законом пластичної течії пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні текучості:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = d\lambda S_{ij}. \quad (8)$$

Для ізотропно зміцнюваного матеріалу при умові текучості Мізеса рівняння поверхні текучості має вигляд:

$$f = \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} - \tau_s^2(\chi), \quad (9)$$

де  $\tau_s$  - межа текучості при чистому зсуві,  $S^{ij} = \sigma^{ij} - \sigma_0 \delta^{ij}$  - компоненти девіатора напружень,  $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma^{ij} \delta^{ij}$ ,  $\delta^{ij}$  - функція Кронекера.

Для дискретизації означеного класу об'єктів використовуються універсальні просторові неоднорідні кільцевий незамкнений [5] та прямолінійний призматичний [6] скінченні елементи з довільними граничними умовами на торцях. За невідомі приймаються вузлові значення переміщень швидкостей та прискорень.

**Розрахункові співвідношення НМСЕ.** Варіація потенційної енергії деформації одного СЕ записана для місцевої системи координат має вигляд:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3 = -1}^1 \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (10)$$

Відповідно до моментної схеми скінченного елемента (МССЕ), вираз (10) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[ \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} \delta \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3, \quad (11)$$

або, у матричній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[ \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (12)$$

Використовуючи закон Гука для опису коефіцієнтів розкладу напружень:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (13)$$

запишемо (12) у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right) \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (14)$$

Для просторових неоднорідних кругового неземкненого та призматичного скінченних елементів з довільними граничними умовами вираз варіації енергії СЕ може бути записаний у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left( \delta \left\{ u \right\}_l^T \right) [K]_{ln} \left\{ u \right\}_n, \quad (15)$$

де  $[K]_{ln}$  – матриця жорсткості неоднорідного призматичного СЕ:

$$[K]_{ln} = \left\{ \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[ D \right]_{00}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[ D \right]_{30}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[ D \right]_{03}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[ D \right]_{33}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \left[ D \right]_{00\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{30\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right] + \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] + \\
& + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right] \left. \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \quad (16)
\end{aligned}$$

Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta K^e = - \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho} \ddot{u}^{m'} \delta u_{m'} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 . \quad (17)$$

Для просторових неоднорідних кругового неземкненого та призматичного скінченних елементів з довільними граничними умовами отримаємо:

$$\delta K^e = - \sum_{l=l_0}^L \sum_{n=n_0}^L \ddot{u}_{m'}^n \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho} \varphi^{(l)} \varphi^{(n)} dx^3 \overset{\circ}{g}{}^{m'm'} \sqrt{\overset{\circ}{g}} \delta u_{m'}^l , \quad (18)$$

або в матричній формі

$$\delta K^e = - \sum_{l=l_0}^L \sum_{n=n_0}^L \left( \delta \{u\}_l^T \right) [M]_{ln} \{ \ddot{u} \}_n , \quad (19)$$

де  $[M]_{ln}$  - амплітудна “неузгоджена” матриця мас неоднорідного вздовж  $x^3$  скінченного елемента:

$$m_{ln}^{m'} = \frac{1}{4} \sqrt{\overset{\circ}{g}} \overset{\circ}{g}{}^{m'm'} \sum_{p=1}^P \overset{\circ}{\rho}_p \varphi_p^{(l)} \varphi_p^{(n)} H_p , \quad (20)$$

де  $\rho_p$  - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає  $p$ -ій точці інтегрування,  $H_p$  - вагова функція чисельного інтегрування вздовж  $x^3$ .

**Інтегрування рівнянь руху у часі.** Для розв’язання задач пружно-пластичного деформування при використанні алгоритмів, заснованих на методі додаткових навантажень, більш раціонально представити енергію деформації системи через вектор реакцій, оскільки коефіцієнти матриці жорсткості стають залежними від поточного напружено-деформованого стану тіла:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [R_\sigma] = \{Q\}. \quad (21)$$

початкові умови записуються у вигляді:

$$\{U\}_{t=t_0} = \{U_0\}, \quad \{\dot{U}\}_{t=t_0} = \{\dot{U}_0\}, \quad (22)$$

де матриця  $[M]$  та вектори  $[R_\sigma]$ ,  $\{Q\}$  отримані внаслідок обходу скінченно-елементної області та процедури асамблювання відповідних компонент матриці та векторів елементів відповідно. Вектори  $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$ ,  $\{\ddot{U}\}$  зкомпоновані з переміщень, швидкостей і прискорень вузлів повної скінченноелементної моделі. Припускається, що для деяких типів задач коефіцієнти матриці жорсткості можуть змінюватись у часі.

Кожний блок матриці  $[M]$  представляє собою стрічкову підматрицю, що зформована для двовимірної сіткової області, яка апроксимує поперечний переріз тіла.

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_{l_0 l_0} & \dots & [M]_{l_0 m} & \dots & [M]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ [M]_{ll_0} & \dots & [M]_{ll} & \dots & [M]_{lL} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [M]_{Ll_0} & \dots & [M]_{Lm} & \dots & [M]_{LL} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\{U\}^T = \{\dot{U}\}_{l_0}^T \dots \{\dot{U}\}_l^T \dots \{\dot{U}\}_L^T, \quad (24)$$

$$\{\dot{U}\}^T = \{\ddot{U}\}_{l_0}^T \dots \{\ddot{U}\}_l^T \dots \{\ddot{U}\}_L^T,$$

$$\{Q\}^T = \{Q\}_{l_0}^T \dots \{Q\}_l^T \dots \{Q\}_L^T. \quad (25)$$

Задача інтегрування рівнянь руху у часі згідно процедури метода Н'юмарка [2] зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь:

$$\{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} + \{R_\sigma\}^{t+\Delta t} = \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t}, \quad (26)$$

де

$$\{\bar{R}_\rho\}^{t+\Delta t} = a_0 [M] \{U\}^{t+\Delta t}, \quad (27)$$

$$\{\overline{\overline{R}}_{\rho}\}^t = [M] \{a_0 \{U\}^t + a_2 \{\dot{U}\}^t + a_3 \{\ddot{U}\}^t\}, \quad (28)$$

які визначають собою частини вузлових інерційних реакцій в моменти часу  $t + \Delta t$  та  $t$ .

$$\{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t} + \{\overline{\overline{R}}_{\rho}\}^t - \quad (29)$$

амплітудний ефективний вектор зовнішніх навантажень.

У випадку розв'язання лінійної задачі теорії пружності стає можливим однозначний перехід (21) до запису через матрицю жорсткості із сталими коефіцієнтами:

$$[\hat{K}]^{t+\Delta t} \{U\}^{t+\Delta t} = \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t}, \quad (30)$$

де  $[\hat{K}]^{t+\Delta t} = [K]^{t+\Delta t} + a_0 [M]$  - ефективна амплітудна матриця жорсткості.

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} [K]_{l_0 l_0} & \dots & [K]_{l_0 m} & \dots & [K]_{l_0 L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ [K]_{ll_0} & \dots & [K]_{ll} & \dots & [K]_{llL} \\ \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{Ll_0} & \dots & [K]_{Lm} & \dots & [K]_{LL} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Амплітудні вектори швидкостей та прискорень обчислюються на основі рішення (30), тобто  $\{U\}^t$ , по формулам:

$$\begin{aligned} \{\ddot{U}\}^t &= a_0 (\{U\}^t - \{U\}^{t-\Delta t}) - a_2 \{\dot{U}\}^{t-\Delta t} - a_3 \{\ddot{U}\}^{t-\Delta t}, \\ \{\dot{U}\}^t &= \{\dot{U}\}^{t-\Delta t} + a_6 \{\dot{U}\}^{t-\Delta t} + a_7 \{\ddot{U}\}^t, \end{aligned} \quad (32)$$

де  $a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$ ,  $a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$ ,  $a_6 = \Delta t(1 - \delta)$ ,  $a_7 = \delta \Delta t$  - коефіцієнти методу Н'юмарка.

**Розв'язання систем нелінійних рівнянь.** Найбільше розповсюдження серед методів розв'язання систем нелінійних рівнянь методом скінченних елементів отримав алгоритм заснований на поєднанні методу додаткових навантажень та ітераційної процедури Н'ютона-Канторовича.

На кожній ітерації  $n$  кроку  $t + \Delta t$  у часі рішення ситеми подається у вигляді:

$$\{U\}_{n+1}^{t+\Delta t} = \{U\}_n^{t+\Delta t} + [\hat{K}]^{-1} (\{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} - \{R\}_n^{t+\Delta t}), \quad (33)$$

$$\{R\}_n^{t+\Delta t} = \{R_\sigma\}_n^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_n^{t+\Delta t}. \quad (34)$$

$\{R_\sigma\}_n^{t+\Delta t}$  - вектор вузлових амплітудних реакцій, що враховує розвиток пластичних деформацій. Компоненти векторів  $\{R_\sigma\}_n^{t+\Delta t}$  та  $\{\bar{R}_\rho\}_n^{t+\Delta t}$  визначаються в результаті обходу скінченноелементної області та асамблювання компонент векторів окремих елементів.

Ітераційний процес закінчується на ітерації  $N=n$  кроку  $t + \Delta t$  при задоволенні нерівності:

$$\left\| \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} - \{R\}_n^{t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon_Q \left\| \{\hat{Q}\}^{t+\Delta t} \right\|, \quad (35)$$

де  $\varepsilon_Q$  - наперед задане мале додатнє число, що визначає точність розв'язання системи нелінійних рівнянь та визначається дослідженням збіжності отриманого рішення.

Як показано в роботі [7], найбільш універсальним і економічним алгоритмом розв'язання одержаної на ітерації  $n$  кроку  $t + \Delta t$  за часом лінійної системи рівнянь є алгоритм блокового методу послідовної верхньої релаксації [1].

Клітинна структура систем рівнянь напіваналітичного метода скінченних елементів природньо визначає вибір блоку ітераційного процесу у вигляді підсистеми, що формується для одного члена ряду розкладу невідомих вздовж направляючої:

$$\{U\}_{n\ i+1}^{t+\Delta t} = \{U\}_{n\ i}^{t+\Delta t} + \omega [\hat{K}]_{ii}^{-1} (\{P\}_{i\ n}^{t+\Delta t} - \{\bar{R}\}_{i\ i}^{t+\Delta t}), \quad (36)$$

де  $\{P\}_{i\ n}^{t+\Delta t} = \{\hat{Q}\}_i^{t+\Delta t} + \{R\}_{i\ n}^{t+\Delta t}$  - амплітудний вектор навантаження на на ітерації  $n$  кроку  $t + \Delta t$ , отриманий з урахуванням дійсних значень напружень при наявності пластичних деформацій,  $\omega$  - параметр релаксації ( $1 \leq \omega < 2$ ).

$$\{\bar{R}\}_{i\ i}^{t+\Delta t} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [\hat{K}]_{im} \{U\}_{i+1}^{m\ t+\Delta t} + \sum_{m=l}^L [\hat{K}]_{im} \{U\}_i^{m\ t+\Delta t}, \quad (37)$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації  $I=i$ , якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}_i^{l+t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon_U \left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}^{l+t+\Delta t} \right\|, \quad (38)$$

де  $\{\Delta U\}_i^{l+t+\Delta t}$  - прирощення амплітудних переміщень на ітерації  $i$ ,  
 $\{\Delta U\}^{l+t+\Delta t} = \sum_{i=1}^I \{\Delta U\}_i^{l+t+\Delta t}$  - вектор прирощень амплітудних переміщень,  
 $\varepsilon_U$  - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи лінійних рівнянь та визначається дослідженням збіжності отриманого рішення.

В загальному випадку ітераційні процеси  $I$  /розв'язання лінійної системи рівнянь (36)/, та  $N$  /розв'язання нелінійної системи рівнянь задачі пластичності (33)/ будуються послідовно. Кількість ітерацій, що потребує розв'язання задачі, дорівнює добутку кількості ітерацій на цих двох циклах.

В даній роботі пропонується поєднання обох ітераційних процедур, що дозволяє значно зменшити загальну кількість ітерацій:

$$\{U\}_{k+1}^{l+t+\Delta t} = \{U\}_k^{l+t+\Delta t} + \omega [K]_{ll}^{-1} \left( \{Q\}_l^{l+t+\Delta t} - \{R\}_{l,k}^{l+t+\Delta t} \right), \quad (39)$$

$$\{R\}_{l,k}^{l+t+\Delta t} = \{R_\sigma\}_{l,k}^{l+t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_{l,k}^{l+t+\Delta t} \quad (40)$$

Ітераційний процес закінчується на ітерації  $K=k$ , якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}_k^{l+t+\Delta t} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}^{l+t+\Delta t} \right\|, \quad (41)$$

де  $\{\Delta U\}_k^{l+t+\Delta t}$  - прирощення амплітудних переміщень на ітерації  $k$ ,  
 $\{\Delta U\}^{l+t+\Delta t} = \sum_{k=1}^K \{\Delta U\}_k^{l+t+\Delta t}$  - вектор прирощень амплітудних переміщень,  
 $\varepsilon$  - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання одержаної системи рівнянь та визначається дослідженням збіжності отриманого рішення.

Розглянемо докладніше процедуру обчислення вектора  $\{R_\sigma\}_{l,k}^{l+t+\Delta t}$ . На першому етапі кожного кроку розв'язання задачі проводиться визначення

напружено-деформованого стану в припущенні пружного деформування. Напруження  $\sigma_k^{ij t+\Delta t}$  на ітерації  $k$  обчислюються за формулою:

$$\sigma_k^{ij t+\Delta t} = \sigma^{ij t} + \Delta \sigma_k^{ij t+\Delta t}. \quad (42)$$

Прирошення напружень  $\Delta \sigma_k^{ij t+\Delta t}$  визначаються із прирощень деформацій за допомогою закону Гука.

Корекція компонент тензора напружень на кожній ітерації  $k$  кроку  $t + \Delta t$  здійснюється за умови  $\tau_s^{t+\Delta t} < T_k^{t+\Delta t}$  згідно з методикою Уїлкінса [12]:

$$\bar{\sigma}_k^{ij t+\Delta t} = \sigma_{\circ k}^{t+\Delta t} + S_k^{ij t+\Delta t} \frac{\tau_s^{t+\Delta t}}{T_k^{t+\Delta t}}, \quad (43)$$

де  $\sigma_{\circ k}^{t+\Delta t} = 1/3 \sigma_k^{ij t+\Delta t} \delta^{ij}$  - компоненти шарового тензору напружень,

$S_k^{ij t+\Delta t} = \sigma_k^{ij t+\Delta t} - \sigma_{\circ k}^{t+\Delta t} \delta^{ij}$  - компоненти девіатора напружень,

$T_k^{t+\Delta t} = \sqrt{1/2 S_{ij k}^{t+\Delta t} S_k^{ij t+\Delta t}}$  - інтенсивність дотичних напружень,  $\tau_s^{t+\Delta t}$  - границя текучості матеріалу.

Для зручності обчислення можна записати:

$$\bar{\sigma}_k^{ij t+\Delta t} = (1-\alpha) \sigma_{\circ k}^{t+\Delta t} \delta^{ij} + \alpha \sigma_k^{ij t+\Delta t}, \quad (44)$$

де  $\alpha = \tau_s^{t+\Delta t} / T_k^{t+\Delta t}$ .

Далі вектор  $\{R_{\sigma} J_{t,k}\}^{t+\Delta t}$  обчислюється за допомогою  $\bar{\sigma}_k^{ij t+\Delta t}$ , перевіряється умова (41), в разі задоволення якої ітераційний процес припиняється.

Дійсні значення деформацій пластичності визначаються як:

$$\varepsilon_{ij}^p t+\Delta t = \varepsilon_{ij}^p t + \Delta \varepsilon_{ij}^p t+\Delta t = \varepsilon_{ij}^p t + (1-\alpha) \bar{S}^{ij t+\Delta t} / G_1. \quad (45)$$

Тут  $\bar{S}^{ij t+\Delta t} = \bar{\sigma}^{ij t+\Delta t} - \bar{\sigma}_{\circ}^{t+\Delta t} \delta^{ij}$

Дослідження ефективності методики. При дослідженні об'єктів з урахуванням незворотніх пластичних деформацій, як правило, найбільший інтерес представляє аналіз утворення та розповсюдження зон



нелінійної роботи матеріалу, а також рівні інтенсивностей пластичних деформацій.

Для обґрунтування вірогідності пружнопластичного деформування тіл з отворами, що порушують осесиметричність форми, отримані рішення для нескінченного циліндра з двома вирізами на внутрішній поверхні (рис.1). Інтенсивність зовнішнього тиску -  $q_a = 0.75 \times 10^8$  Па. Матеріал – ідеально пружнопластичний з межею текучості при чистому зсуві  $\tau_s = 1.7 \times 10^8$  Па.

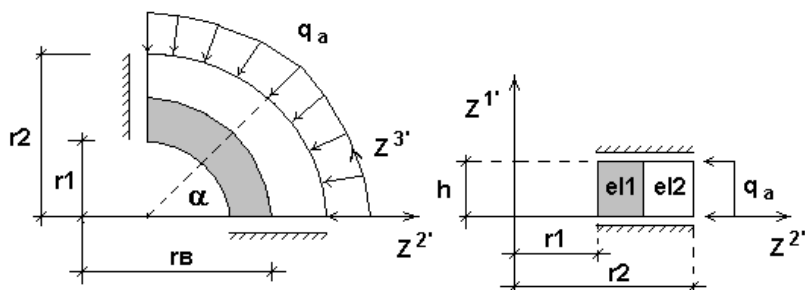


Рис. 1. Розрахункова схема

Навантаження прикладається миттєво та утримується постійним на протязі всього часового інтервалу.

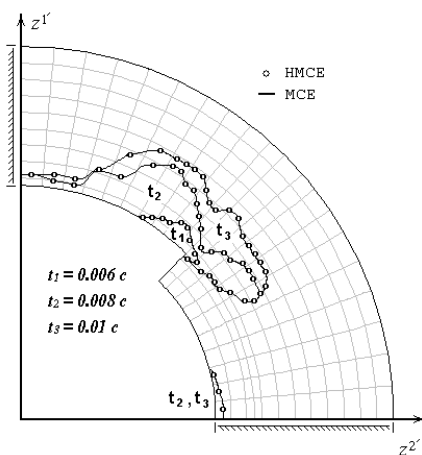


Рис. 2. Зони пластичних деформацій

Вздовж радіуса циліндр апроксимується 14 СЕ двох типів: однорідними – e12 та неоднорідними – e11. Параметри дискретної моделі: крок у часі  $\Delta t = 10^{-4}$  с, інтервал розв'язання  $t/\Delta t \in [1; 200]$ , внутрішній радіус  $r_1 = 10$  м, зовнішній радіус  $r_2 = 20$  м, радіус вирізу  $r_b = 12$  м, кут роствору  $2\alpha = 90^\circ$ . Фізико-механічні характеристики матеріалу:  $E = 2.1 \times 10^{11}$  Па,  $\rho = 7.8 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ . Розв'язання задачі отримано

при апроксимації невідомих 30 базисними функціями вздовж направляючої.

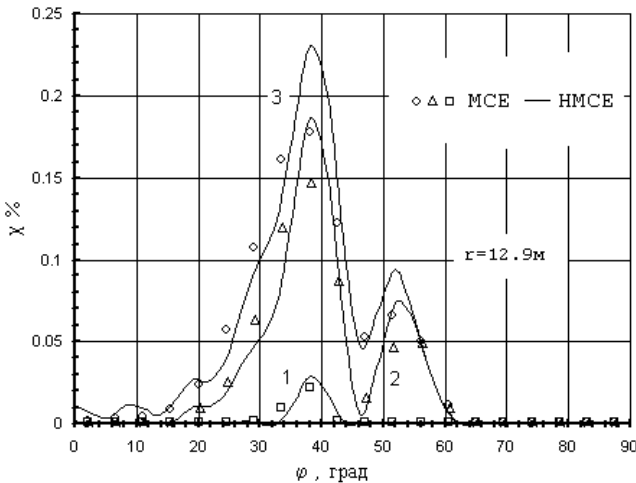


Рис. 3. Інтенсивності пластичних деформацій.  
 $t=0.006\text{с}$  (1),  $t=0.008\text{с}$  (2),  $t=0.01\text{с}$  (3)

Розвиток пластичних деформацій у часі показано на рис.2, 3. Незворотні деформації захоплюють найбільший об'єм матеріалу в області  $Z^3 \in [25^\circ ; 40^\circ]$ . Як видно з наведених даних, на всьому інтервалі навантаження спостерігається кількісне і якісне узгодження результатів MCE та HMCE.

Достовірність застосування створеного чисельного підходу до дослідження пружнопластичних призматичних просторових об'єктів із змінними фізичними параметрами, підтверджена шляхом розв'язання контрольної задачі про нескінченну полосу (рис. 4) з урахуванням нелінійної роботи матеріалу. Полоса знаходиться під дією рівномірно розподіленого по верхній поверхні навантаження  $q_a=0.85 \times 108 \text{Па}$ . Фізико-механічні параметри аналогічні моделі попереднього дослідження. Крок у часі  $\Delta t = 3.2 \times 10^{-6} \text{с}$ . Інтервал часу:  $t/\Delta t \in [0 ; 100]$ . В силу симетричності відносно  $Z1'$  розглядали половину моделі полоси, для якої граничні умови на торцях приймали у вигляді:  $u_3(Z^3 = 0) = 0$ ,  $u_1(Z^3 = 0.1) = 0$ ,  $u_2(Z^3 = 0.1) = 0$ .

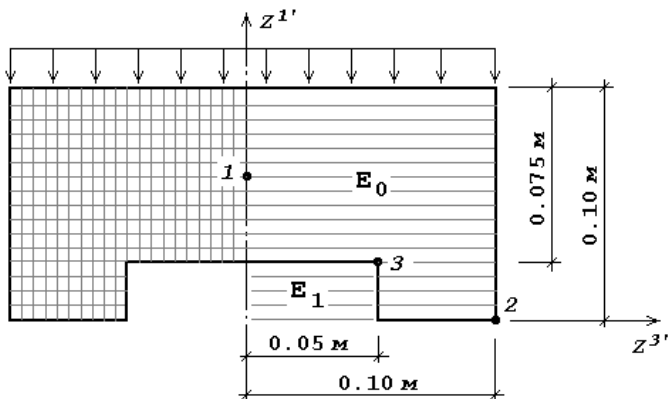
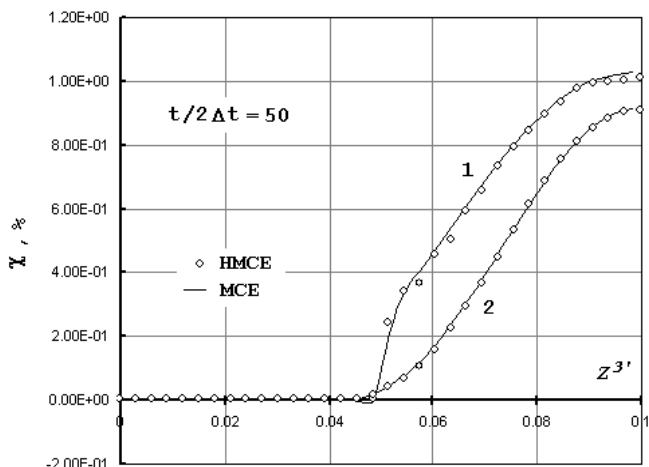


Рис. 4

Дослідження виконані при фіксованій кількості елементів вздовж  $Z1'$ , що дорівнює 16. За контрольні розглядалися точки: 1 - ( $Z1'=0.0625\text{м}$ ,  $Z3'=0.0\text{м}$ ), 2 - ( $Z1'=0.0\text{м}$ ,  $Z3'=0.1\text{м}$ ) в яких виникають максимальні значення переміщень вздовж  $Z1'$  і  $Z3'$  відповідно, та особа точка 3 - ( $Z1'=0.025\text{м}$ ,  $Z3'=0.05\text{м}$ ).

Рис. 5. 1 –  $Z1'=0.028\text{м}$ , 2 –  $Z1'=0.097\text{м}$

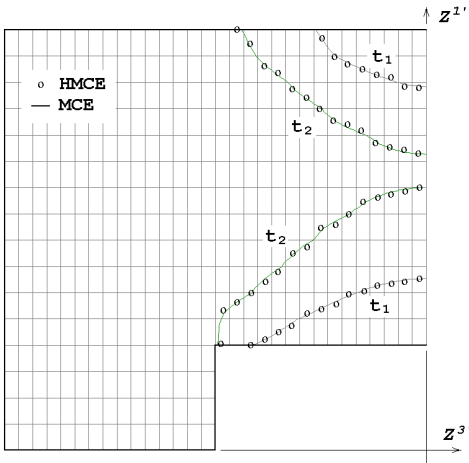


Рис. 6.  $t_1=0.96 \times 10^{-4} \text{с}$ ,  $t_2=3.2 \times 10^{-4} \text{с}$

Накопичені в процесі деформування пластичні деформації, в області, де їх інтенсивності досягають максимальних значень, показані на рис. 5 для зовнішньої та внутрішньої (по лінії вирізу) поверхонь полоси. При цьому розподіл зон нелінійної роботи матеріалу виявляє тенденцію до утворення пластичного шарніру (рис. 6).

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
2. *Bate K., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.
3. *Биргер И.А.* Теория пластического течения при неизотермическом нагружении // Механика и машиностроение. Изв. АН УССР.- 1961.- №1.
4. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. -483с.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Піскунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обергання з довільними граничними умовами. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - С. 3-29.
6. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 76. - С. 3-26.
7. *Гуляр А.И., Половец І.В., Сахаров А.С.* "Численное моделирование на основе метода конечных элементов процессов пластического формоизменения тел вращения при наличии сил трения". -Киев, 1984. -27с., Деп. в УкрНИИТИ, №1788 Ук-Деп.
8. *Друккер Д.* Вариационные принципы в математической теории пластичности // Механика.- М.: ИП, 1959.- № 6.
9. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Модель и алгоритм // Прикладные проблемы прочности и пластичности.- 1975.- Вып. 1.- С.1-18.
10. *Ильюшин А.А.* Пластичность: основы общей математической теории.- М.: Изд-во АН СССР, 1963.- 248 с.
11. *Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ.- 1958.- 22, № 1.- С.78-99.
12. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности.- М.: Изд. технико-теоретич. лит., 1963.- 327 с.

13. *Коротких Ю.Г., Белевич С.М.* Основные уравнения термопластичности при сложном нагружении // Методы решения задач упругости и пластичности.- Горький, 1969.- С.134-141.
14. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости.- М.: Наука, 1980.- 512с.
15. *Лурье А.И.* Теория упругости.- М.: Наука, 1970.- 939с.
16. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения.- М.: Наука, 1980.- 256с.
17. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.- 344с.
18. *Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.* Остаточные напряжения, теория и приложения.- М.: Наука, 1982.- 111с.
19. *Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
20. *Akay H.U.* "Dynamic large deflection analysis of plates using mixed finite element." – Computer and Structures, 1980, 11, p.1-11.
21. *Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L.* "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis" // Int. J. Numer. Meth. Engng.- 1975.- 5, N 2, PP. 353-386.
22. *Geradin M., Idelson N., Hogge M.* "Computational strategies for the solution of large nonlinear problems via quasi-Newton methods." –Computers and Structures, vol. 13, 1981, p.73-81.
23. *Modkar D.P., Povel G.H.* "Finite element analysis of non-linear static and dynamic response." –Int. J. for Numerical methods in eng., 1977, 11, p.499-520.

*Надійшло до редакції 28.11.2006 р.*

УДК 539.3

Гречух Н.А.

Пискунов С.О., канд. техн. наук,

Остапенко Р.М.

## ОБЧИСЛЕННЯ КІН В ПРОСТОРОВИХ ТІЛАХ ОБЕРТАННЯ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Проведено поширення методики обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень прямим методом на основі напіваналітичного методу скінченних елементів на випадок температурного навантаження просторових тіл обертання.

**Вступ.** Складні теплові режими, за яких відбувається експлуатація частини відповідальних елементів конструкцій, мають визначальне значення при оцінці їх напружено-деформованого стану. Наявність великих градієнтів температур призводить до виникнення температурних складових деформацій. У зв'язку з цим актуальним є питання врахування температурних навантажень при проведенні прогнозування руйнування.

Обчислення параметрів механіки руйнування є одним з найважливіших етапів розрахунку об'єктів з тріщинами. Цьому питанню присвячена значна кількість публікацій, в тому числі монографії [1,2]. Їх аналіз свідчить, що при розрахунках на основі методу скінченних елементів (МСЕ) найчастіше використовуються прямі методи, метод податливості, та безпосереднє обчислення  $J$ -інтегралу.

У випадку пружного деформування або виникнення незначних пластичних деформацій у вершині тріщини визначення несучої здатності тіл з тріщинами може бути виконано в межах лінійної механіки руйнування із застосуванням коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН).

Значна кількість відповідальних елементів просторових конструкцій являють собою тіла обертання (рис. 1) До таких тіл, зокрема, відносяться ротори та диски енергетичних установок, фрагменти корпусних деталей, захисні оболонки ядерних реакторів тощо. Враховуючи складність форми вказаних об'єктів і суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, їх необхідно розглядати, застосовуючи тривимірну постановку задачі механіки деформівного твердого тіла. Розв'язання таких задач вимагає залучення чисельних методів. Для тіл обертання доцільним є застосування модифікації методу скінченних елементів (МСЕ) – напіваналітичного МСЕ (НМСЕ).

При використанні НМСЕ скінченно-елементна дискретизація досліджуваних об'єктів відбувається в їх поперечному перерізі, а вздовж

направляючої використовується один скінчений елемент, який повторює форму тіла. При наявності тріщин розбивка об'єкта на скінченні елементи передбачає згущення сітки в привершинній області. Привершинна область має бути розташованою перпендикулярно до фронту тріщини. Для тіл обертання виділяють два типи тріщин: поперечні (рис.1,а), фронт яких розташований в площині поперечного перерізу тіла і є ортогональним до осі  $z^3$ , і поздовжні (рис.1,б), фронт яких збігається за напрямком з віссю  $z^3$ .

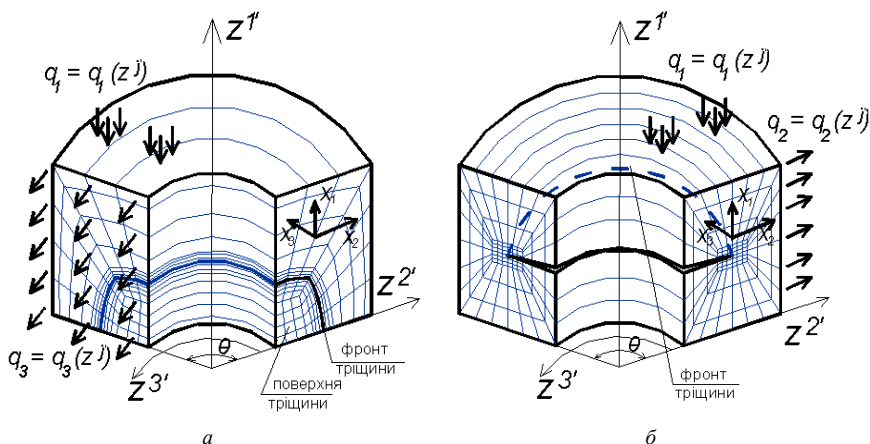


Рис.1. Скінченно-елементна дискретизація тіла обертання з поперечною (а) та поздовжньою (б) тріщинами

Відомий досвід використання НМСЕ стосується задач про визначення КІН в призматичних тілах [6] та тілах обертання [8] з тріщинами лише під дією силових навантажень. Питання визначення температурних деформацій в призматичних тілах розглянуто в [3]. Визначення ж КІН із урахуванням впливу температури до цього часу не проводилось.

Мета даної роботи полягає у виведенні розв'язувальних співвідношень НМСЕ для обчислення температурних деформацій в тілах обертання, реалізації методики визначення КІН при температурному навантаженні та дослідженні вірогідності отримуваних результатів для тіл обертання.

**1. Співвідношення термопружності та лінійної механіки руйнування при температурному навантаженні.** Для дослідження процесів деформування та руйнування тривимірних тіл доцільно використовувати такі системи координат: базисну циліндричну  $z^j$  та місцеву криволінійну систему координат  $x^i$ , природно пов'язану з

геометрією досліджуваного об'єкта. При цьому вісь  $x^3$  збігається за напрямком із віссю  $z^{3'}$ .

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення  $z_{,j}^{i'}$ , що обумовлює зв'язок між місцевою та базисною системами координат [4]:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z_{,3}^{\alpha} = z_{,\alpha}^{3'} = 0. \quad (1)$$

Всі індекси, позначені грецькими буквами, набуватимуть значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Компоненти метричного тензора  $g_{mn}$  в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'}. \quad (2)$$

При дослідженні тіл обертання для базисної циліндричної системи координат відмінними від нуля будуть такі компоненти метричного тензора:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad g_{33} = \left(z_{,3}^{3'}\right) \left(z^{2'}\right)^2. \quad (3)$$

При термосиловому навантаженні повні деформації  $\epsilon_{ij}$  можуть бути подані у вигляді суми пружних (зумовлених зовнішніми силовими факторами)  $\epsilon_{ij}^e$  та температурних (викликаних температурним полем)  $\epsilon_{ij}^T$  складових, тобто

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^T. \quad (4)$$

Компоненти тензору напружень  $\sigma^{ij}$  запишемо через компоненти тензору пружних деформацій у відповідності із узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}^e. \quad (5)$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою:

$$\epsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (6)$$



де  $\alpha_T = \alpha_T(z^k, T)$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу,  $\Delta T = T - T_0$  – приріст температури в досліджуваній точці тіла в даний момент часу відносно його вихідного ненапруженого стану при  $T = T_0$ .

При дії на тіло лише поверхневих навантажень та при заданих на його поверхні переміщеннях для тріщин нормального відриву взаємозв'язок між переміщеннями, напруженнями та коефіцієнтом інтенсивності напружень першого роду (КІН)  $K_I$  в пов'язаній з вершиною тріщини системі координат  $y^{\alpha''}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) визначається формулами :

$$\begin{aligned}\sigma^{1''1''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma^{1''2''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{2''2''} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right),\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}u_{1''} &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}), \\ u_{2''} &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}),\end{aligned}\quad (8)$$

де  $r, \theta$  – полярні координати з початком в вершині тріщини (рис. 2);  $\mu$  – модуль зсуву;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

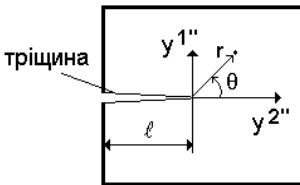


Рис.2

Відповідно, на основі відомих величин параметрів напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини, поданих в системі координат  $y^{\alpha''}$ , у кожній точці в околі вершини тріщини КІН може бути обчислений за формулами:

$$K_I(\sigma) = \frac{\sigma^{1''1''} \sqrt{2\pi r}}{\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)}, \quad (9)$$

$$K_I(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{u_{1''} G}{\sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2G - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)}. \quad (10)$$

Дж. Сі в [10] показав, що формули (7) та (8) лишаються справедливими і у випадку термосилового навантаження. Отримаємо наближені вирази для переміщень в околі тріщини з урахуванням температури. Для цього запишемо закон Гука для точки з температурою  $T$  поблизу вершини тріщини, використовуючи вирази для напружень (7) та припускаючи, наприклад, що виконуються умови плоскої деформації:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot T &= \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} [(1 - \nu^2) \cdot f_x - \nu \cdot (1 + \nu) \cdot f_y], \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} - \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot T &= \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} [(1 - \nu^2) \cdot f_x - \nu \cdot (1 + \nu) \cdot f_x], \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{K_I}{G\sqrt{2\pi r}} \cdot f_{xy}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{де } f_x = f_x(\theta), \quad f_y = f_y(\theta), \quad f_{xy} = f_{xy}(\theta).$$

Відомо, що при відсутності температурного навантаження ( $T=0$ ) розв'язок цієї системи набуде вигляду (8). Простою підстановкою перевіряється, що якщо вважати температуру постійною в околі вершини тріщини, то розв'язками системи (11) будуть функції:

$$u_i = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot F_i(\theta) + \alpha \cdot k \cdot T \cdot y^i, \quad (12)$$

де  $k=1$  у випадку плоского напруженого стану,  $k=1-\nu^2$  у випадку плоскої деформації. Ці співвідношення показують, що для визначення  $K_I$  за переміщенням  $y^{1''}$  при  $\theta = \frac{\pi}{2}$  та  $y^{2''}$  при  $\theta = \pi$  можна використовувати формули (8), оскільки в цьому випадку поправочний член дорівнює нулю.

**2. Неоднорідний круговий незамкнений скінченних елемент.** Для апроксимації просторових неоднорідних тіл обертання застосовуються просторові неоднорідні кругові скінченні елементи, які являють собою криволінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола [2].

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат  $x^i$ , яка природно пов'язана з геометрією об'єкта так, що осі  $x^1$  і  $x^2$  спрямовані вздовж сторін поперечного перерізу скінченного

елемента, а вісь  $x^3$  спрямована вздовж направляючої та співпадає за напрямком з  $z^3$ . При цьому в місцевій системі координат поперечний переріз скінченного елемента відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах скінченного елемента.

Розподіл температури у межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (13)$$

де  $T_{(S_1 S_2)}$  – вузлові значення температури, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, які визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перерізу елемента у місцевій системі координат  $x^i$ .

Згідно з прийнятим законом розподілу (13), визначимо значення похідних від температури в центрі поперечного перерізу скінченного елемента:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)}; \quad \overset{\circ}{T}_{,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_{\alpha}. \quad (14)$$

Одержання виразів для вектора вузлових реакцій і матриці жорсткості здійснюється на основі моментної схеми скінчених елементів та варіаційного принципу Лагранжа. Кінцеві вирази вектора вузлових реакцій і матриці жорсткості мають вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\} = \left\{ \sum_{\gamma=1}^2 \left[ \overset{\circ}{B}_{\gamma} \right] \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l\gamma} + \frac{1}{12} \sum_{\gamma=1}^2 \left[ \overset{\circ}{B}_{\gamma,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l\alpha\gamma} \right\} \sqrt{g}, \quad (15)$$

де

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l1} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \phi^{(l)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \phi_m^{(l)} H_m,$$

$$\{\sigma\}_{I2} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} H_m ,$$

$$\{\sigma\}_{I\alpha 1} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi^{(l)} H_m ,$$

$$\{\sigma\}_{I\alpha 2} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_{,3}^{(l)} H_m$$

– напруження, що обчислюються за величинами деформацій в тому числі з урахуванням температурних складових.

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \left\{ \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta} \right]^T [D]_{\beta\gamma}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{\gamma} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^T [D]_{\beta\gamma\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{\gamma,\alpha} \right] \right\} \sqrt{g} , \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$[D]_{\beta\gamma}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_{\beta}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_{\gamma}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_{\beta}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \psi_{\gamma}^{(n)} H_m ,$$

$$[D]_{\beta\gamma\alpha}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \psi_{\beta}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \psi_{\gamma}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \psi_{\beta}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \psi_{\gamma}^{(n)} H_m$$

– матриця фізико-механічних властивостей матеріалу;

$$\begin{aligned} \beta = 1 \quad \psi_{\beta}^{(l)} &= \varphi_m^{(l)}, & \beta = 2 \quad \psi_{\beta}^{(l)} &= \varphi_{,3}^{(l)}, \\ \gamma = 1 \quad \psi_{\gamma}^{(n)} &= \varphi_m^{(n)}, & \gamma = 2 \quad \psi_{\gamma}^{(n)} &= \varphi_{,3}^{(n)}. \end{aligned}$$

При використанні НМСЕ та відповідному поданні переміщень і зовнішніх навантажень у вигляді розкладання за системою базисних функцій вектор вузлових реакцій  $\{R\}^m$  і матриця жорсткості  $[K]$  набувають блочної структури [2]. Зважаючи на це, для розв'язання отриманої системи рівнянь раціональним є використання блочно-

ітераційних алгоритмів. В даній роботі розв'язання системи рівнянь здійснюється на основі методу блочних ітерацій із послідовною верхньою релаксацією:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} (\{Q_l\}_n^m - \{R_l\}_n^m). \quad (17)$$

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L (\{\Delta u\}_l^n)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L (\{u\}_l^n)^2, \quad (18)$$

де  $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$  – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отриманого розв'язку.

**3. Визначення температурних деформацій.** Розв'язання задачі термопружності передбачає обчислення компонент напружень, що входять до вектора вузлових реакцій із урахуванням температурних складових деформацій. Зважаючи на складність топології дискретної моделі просторового тіла з тріщиною, отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ необхідно проводити в термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій.

Будемо вважати, що визначник матриці, що складена з компонент метричного тензору  $g_{ij}$ , а також коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha_T$  дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$g = g|_{x^\alpha=0}; \quad \alpha_T = \alpha_T|_{x^\alpha=0}. \quad (19)$$

Згідно з моментною схемою скінченних елементів (МССЕ) [9] компоненти тензора фізичних температурних деформацій в поперечному перерізі, що відповідає точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T x^{(3-\alpha)}; \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^T &= 0; \\ \tilde{\varepsilon}_{33}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T x^\beta. \end{aligned} \quad (20)$$

Фізичні компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}. \quad (21)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент температурних деформацій в місцевій системі координат з урахуванням (20) та з підстановкою (6):

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \varepsilon_{\alpha(\alpha)}^T = \alpha_T \Delta T; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \alpha_T \Delta T_{,(3-\alpha)}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12}^T = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \varepsilon_{12}^T = \alpha_T \Delta T \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}};$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33}^T = \frac{1}{g_{33}} \varepsilon_{33}^T = \alpha_T \Delta T;$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33,\beta}^T = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^\beta} = \frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial x^\beta} = \alpha_T \Delta T_{,\beta},$$

$$\text{де } \varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \varepsilon_{ij,\beta}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Коефіцієнтом розкладання  $\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^T}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$  нехтуємо, як величиною більш

високого порядку малості.

Згідно з формулою (21), підставляючи (22), знаходимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha(\alpha)}^T &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T g_{\alpha(\alpha)} = \alpha_T \Delta T g_{\alpha(\alpha)}; \\ \varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T g_{\alpha(\alpha)} = \alpha_T \Delta T_{,(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{12}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{33}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,\beta} \overset{\circ}{g}_{33}.\end{aligned}\quad (23)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій через вузлові температури (14):

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_{\beta}.\end{aligned}\quad (24)$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left[ \overset{\circ}{B}^T \right] \{ T \}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] \{ T \}, \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned}\{ T \}^T &= \{ T_{(-1;-1)} \quad T_{(1;-1)} \quad T_{(-1;1)} \quad T_{(1;1)} \}; \\ \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T \right\};\end{aligned}$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^T \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^T \right\}.$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}^T \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;1)} \right]; \quad (26)$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;1)} \right].$$

Значення компонент підматриць  $\left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)}$ ,  $\left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)}$  у виразі

(26) для неоднорідних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (24):

$$\left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{11} \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{12} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}; \quad \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{\alpha} \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

В цих виразах компоненти метричного тензора для тіл обертання обчислюються згідно формул (3).

**4.Методика обчислення КІН в тілах обертання на основі прямого методу.** У відповідності з існуючими прийомами визначення КІН прямим методом їх значення обчислюються на основі співвідношень (7) та (8) в окремих точках чи вздовж деякої лінії, що проходить через вершину тріщини за результатами визначення напружено-деформованого стану (НДС).

Як показали дослідження [5], найбільш точні результати визначення КІН для поздовжніх тріщин забезпечуються при використанні біля вершини тріщини зони згущення квадратної форми розміром  $6 \times 6$  скінченних елементів (рис. 3) [6]. Поперечний переріз цих елементів має квадратну форму з розмірами  $1/10$  довжини тріщини. В частині зони, що межує з поверхнею тріщини, КІН визначаються за переміщеннями (10), а



в частині зони, що розташована за фронтом тріщини КІН визначаються за величинами напружень (9). В межах кожної із зазначених частин привершинної зони області визначається середнє значення КІН за напруженнями  $K_I(\sigma)$  і переміщеннями  $K_I(u)$ , які в свою чергу усереднюються для визначення результуючого КІН:

$$K_I = \frac{K_I(\sigma) + K_I(u)}{2} \quad (28)$$

Для тіл з повздовжніми тріщинами визначення КІН за переміщеннями здійснюється у вузлах (на схемі позначені хрестиками), а за напруженнями – в центрі скінченних елементів (на схемі позначені кружками), рис. 3. В тілах з поперечними тріщинами точки обчислення КІН за переміщеннями та напруженнями в межах привершинної області визначаються розташуванням точок інтегрування вздовж осі  $z^3$  (рис.4).

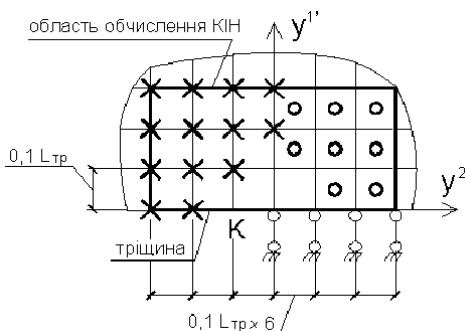


Рис.3. Згущення скінченно-елементної сітки в привершинній зоні тіла з повздовжньою тріщиною

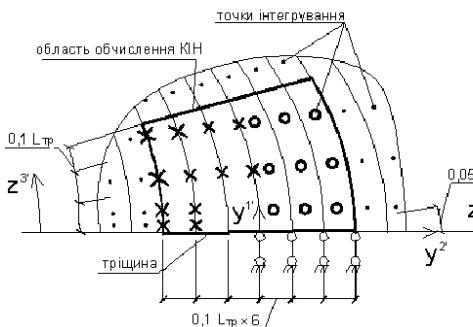


Рис. 4 Привершинна область для обчислення КІН у тілі з поперечною тріщиною і розташування точок інтегрування

Враховуючи вимоги методики, що пов'язані з наявністю сингулярності, при обчисленні КІН за переміщеннями з розгляду виключаються точки, що розташовані на відстанях менших, ніж  $0,1L_{тр}$  вздовж осей  $y^1$  і  $y^2$  від вершини тріщини, а при обчисленні КІН за напруженнями – точки, розташовані ближче, ніж  $0,05L_{тр}$  від осі  $y^2$  ( $L_{тр}$  – характерний розмір тріщини).

Значення КІН також може бути обчислене за переміщенням  $u$  у найближчому до вершини тріщини вузлі, який у випадку поздовжньої тріщини лежить на її поверхні (т. К, рис.3)  $K_I = K_I(u_K)$ .

**5. Вірогідність обчислення КІН прямим методом при температурному навантаженні.** З метою дослідження вірогідності застосування викладеного вище підходу була розв'язана задача про визначення КІН для порожнистого циліндра з середнім радіусом  $R_m = 50\text{см}$ , висотою  $2h = 100\text{см}$ , товщиною стінки  $t = 10\text{см}$  та з зовнішньою кільцевою тріщиною глибиною  $l = 5\text{см}$ , фронт якої збігається із середнім радіусом поперечного перерізу циліндра (рис. 5).

На внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра підтримуються постійні температури, тоді для точки з радіусом  $r$  температура  $T$  описується виразом:

$$T(r) = \Delta T \cdot \ln\left(\frac{R_m + t/2}{r}\right) / \ln\left(\frac{R_m + t/2}{R_m - t/2}\right), \quad (29)$$

де  $\Delta T = 100^\circ$  - перепад температури по товщині стінки.

Враховуючи геометричні розміри циліндра та значення перепаду температури формула (29) набуде вигляду:

$$T(r) = 100 \cdot \ln\left(\frac{55}{r}\right) / \ln\left(\frac{11}{9}\right).$$

У випадку термосилового навантаження визначення КІН за переміщеннями здійснюється на основі формули (12), яка для даного тестового прикладу набуває вигляду:

$$K_I = \frac{u_1 - \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot T \cdot (-z^2 + R_m)}{\sin \frac{\theta}{2} (2 - 4\nu + \cos \theta)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot 2G. \quad (30)$$

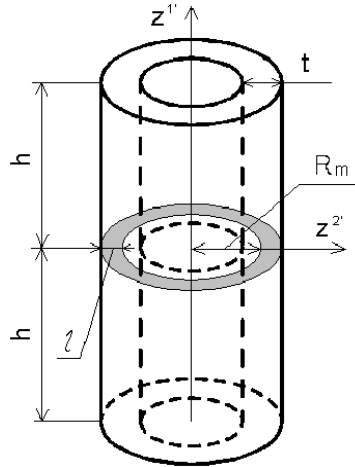


Рис.5. Порожнистий циліндр з зовнішньою тріщиною

Значення температури  $T$  визначається за формулою (29), а  $z^{2'}$  є декартовою координатою, яка в даному випадку змінюється вздовж тріщини в межах привершинної області.

В якості еталонного прийнято результати наведені в [7], де величина КІН подається із використанням безрозмірного множника

$$F = \frac{K_I}{\alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot \sqrt{\pi \cdot l}},$$

який залежить від відносної глибини тріщини і при  $l/t = 0,5$  становить 0,55.

Скінченно-елементна модель (СЕМ), побудована в осях  $z^{1'}$ – $z^{2'}$ , складається з чотирьох сіткових фрагментів (рис.6а). Згідно з [7] при побудові дискретної моделі розміри СЕ привершинної області прийняті 1/10 довжини тріщини (СЕМ №1). Кількість скінчених елементів – 230, кількість невідомих складає 528. Зважаючи на значну похибку отриманої величини КІН (табл.1), було зменшено розміри СЕ у привершинній області до 1/20 довжини тріщини (СЕМ №2, рис.6,б). Кількість невідомих у СЕМ №2 становить 1320, кількість скінчених елементів – 602. Це дозволило зменшити похибку обчислення КІН, отриманого із використанням усереднення по привершинній області, більш ніж вдвічі. Результати визначення  $K_I(u)$  у привершинному вузлі є менш точними у порівнянні з еталонним, ніж при усередненні.

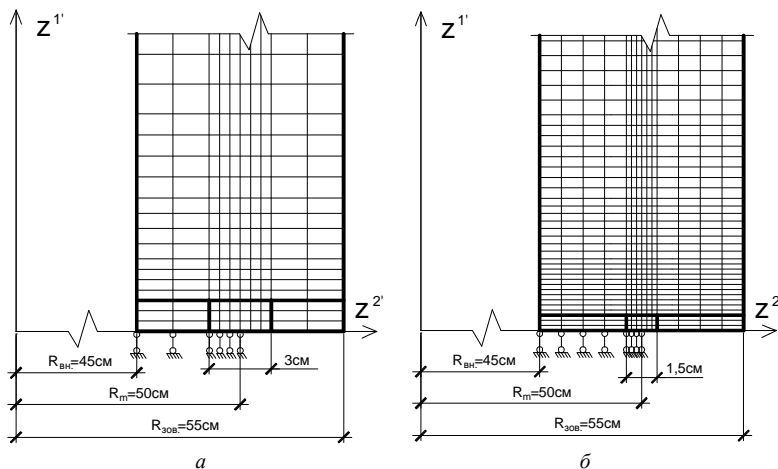


Рис.6. СЕМ для розрахунку КІН в порожнистому циліндрі:  
СЕМ №1 (а) і СЕМ №2 (б)

Таблиця 1

Порівняння КІН, отриманого прямим методом  
в залежності від щільності СЕМ

	СЕМ №1	СЕМ №2
КІН, $\text{кг}/\text{см}^{\frac{3}{2}}$		
$K_I(\sigma)$	$1,301 \times 10^{-3}$	$1,699 \times 10^{-3}$
$K_I(u)$	$2,677 \times 10^{-3}$	$2,491 \times 10^{-3}$
$K_I, (28)$	$1,989 \times 10^{-3}$	$2,095 \times 10^{-3}$
$K_I(u_K)$	$2,4 \times 10^{-3}$	$2,291 \times 10^{-3}$
$K_I, [7]$	$2,179 \times 10^{-3}$	
Похибка, %		
$K_I, (28)$	8,7	3,8
$K_I(u_K)$	9,2	5,1

Отримані результати засвідчили вірогідність розробленої методики для визначення КІН при температурному навантаженні. Для одержання КІН з похибкою в межах 5% необхідним є застосування скінчених елементів, розмір яких є вдвічі меншим ніж для отримання результату такої ж точності при силовому навантаженні. Таким чином, методика забезпечує отримання вірогідних результатів та може бути використана для розв'язання лінійних задач механіки руйнування при температурному навантаженні.

1. *Атлурі С.* Вычислительные методы в механике разрушения. – М.: “Мир”, 1990.-392с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П.* Алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружнопластичності призматичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд. – №78, 2006. – с. 3-17.
4. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьковск. гос. университета, 1964. – 484с.
5. *Гуляр А.И., Степанко В.И.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений для неосимметрично нагруженных тел вращения с кольцевыми трещинами. //Сопротивление материалов и теория сооружений. – К., 1985.- Выпуск 47.- с.40-44.

6. Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – № 73.– 2003. – с.73-84.
7. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 1980. – 256 с.
8. Пискунов С.О., Шкриль О.О., Мицюк С.А. Визначення параметрів лінійної механіки руйнування для неоднорідних кругових тіл при силовому навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. – №78, 2006. – с. 26-39.
9. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учётом жестких смещений. // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – с. 147-156.
10. Си Дж. О сингулярном характере температурных напряжений у вершины трещины. – Труды американского общества инженеров-механиков. Сер.Е, 1962, т.29, №3, с.157-159.

*Надійшло до редакції 09.11.2006 р.*

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,  
Кривенко О.П., канд. техн. наук,  
Соловей М.О., канд. техн. наук,

## **ЗБІЖНІСТЬ І ТОЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ ПРОСТОРОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА В ЗАДАЧАХ НЕРІВНОМІРНОГО НАГРІВУ СТЕРЖНІВ І БАЛОК**

Розглянуті збіжність і точність розв'язків для просторового скінченного елемента при дослідженні напружено-деформованого стану стержнів і балок як тривимірних тіл при дії нерівномірного температурного поля.

Робота присвячена питанню чисельного обґрунтування розробленого методу [1-4] розв'язування задачі статичної стійкості тонких неоднорідних оболонок. Скінченноелементна методика побудована на основі геометрично нелінійних співвідношень тривимірної теорії термопружності та моментної схеми скінченних елементів [5], яка поширена на задачі термопружного деформування оболонок ступінчато-змінної товщини. Апроксимація оболонки за товщиною виконується одним просторовим ізопараметричним скінченним елементом (СЕ).

Розв'язування задач нелінійного деформування оболонок звичайно зводиться до багаторазового розв'язування лінеаризованих систем рівнянь. Ефективність нелінійних методик суттєво залежить від точності лінійного розрахунку. Дослідження збіжності лінійних розв'язків дозволяє виявити основні властивості скінченного елемента та методики нелінійного розрахунку.

Наведені результати дослідження збіжності та точності визначення напружено-деформованого стану стержнів і балок, які розглядаються як тривимірні тіла, при дії нерівномірного температурного поля. У характерних точках відслідковувалися компоненти вектора переміщень і тензора напружень, величини яких можна контролювати.

### **1. Нерівномірний за довжиною нагрів стержня, защемленого на кінцях.**

Розглянутий жорстко затиснутий на кінцях прямий стержень (рис. 1, а), для якого температура у поперечному перерізі прийнята сталою, а її розподіл за довжиною (вздовж осі  $x^3$ ) здійснюється за степеневим законом (рис. 1, б)

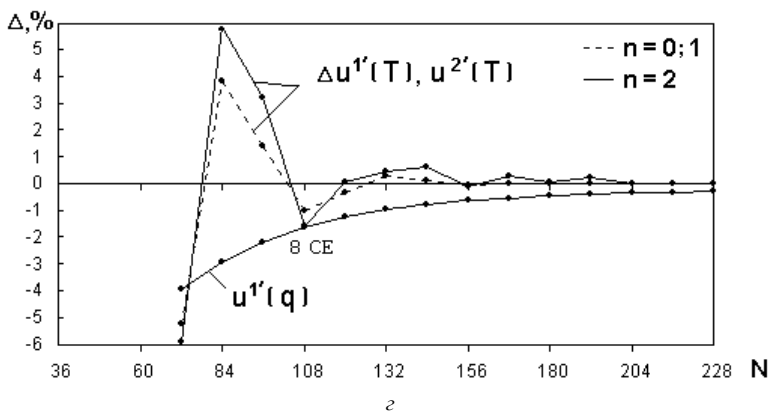
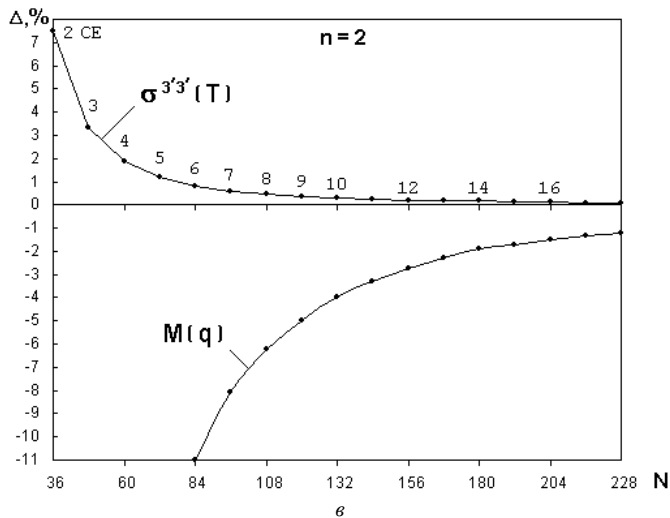
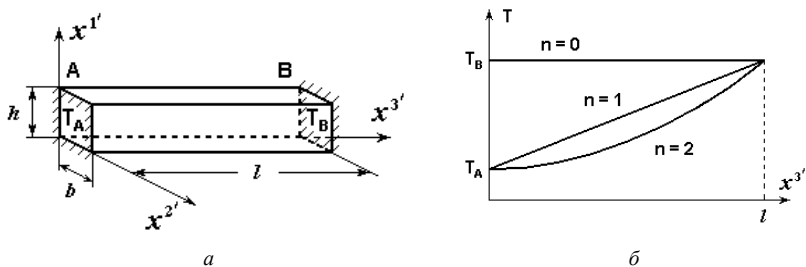


Рис. 1. Збіжність розв'язків для жорстко затиснутого на кінцях стержня при нерівномірних вздовж довжини нагрівах

$$T(x^{3'}) = T_A + (T_B - T_A) \left( \frac{x^{3'}}{l} \right)^n, \quad (1)$$

де  $T_A$  та  $T_B$  – температура на лівому та правому кінцях стержня,  $l$  – його довжина,  $n$  – показник степеня.

Дослідження збіжності отримуваних розв'язків виконане для трьох варіантів зміни температури. При  $n=0$  температура за довжиною стержня є сталою та дорівнює  $T_B$ , при  $n=1$  – змінюється лінійно, при  $n=2$  – за параболічним законом. Вихідні дані взяті згідно до [6]:  $h=4$  см,  $b=5$  см,  $l=80$  см,  $T_A=10^\circ\text{C}$ ,  $T_B=55^\circ\text{C}$ ,  $E=2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup> – модуль пружності ізотропного матеріалу,  $\nu=0$  – коефіцієнт Пуассона,  $\alpha=125 \cdot 10^{-7}$  град<sup>-1</sup> – коефіцієнт лінійного розширення. Результати виконаних досліджень наведені на рис. 1 - рис. 4 та в табл. 1. Для всіх варіантів розподілу температури повздовжнє напруження  $\sigma^{3'3'}$ , що є незмінним за довжиною стержня, при порівнянні результатів визначалося за формулою [6]

$$\sigma^{3'3'} = \alpha \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right) E.$$

Величини напруження  $\sigma^{3'3'}$  при сталому та лінійному законах зміни температури отримані точно, незалежно від густоти скінченноелементної сітки. Така точність пояснюється тим, що в цій задачі для стержня точно апроксимуються граничні умови, геометрія та температурне навантаження. При параболічному законі отримана швидка монотонна збіжність напружень  $\sigma^{3'3'}$  (рис. 1, в;  $N$  – число невідомих,  $\Delta$  – похибка обчислення величин у %). При нагріві стержня за трьома законами для переміщень  $u^1$  та  $u^2$ , що пов'язані з розширенням перерізу на середині довжини, спостерігається швидка осцилююча збіжність (рис. 1, г). Переміщення  $u^1$  є різницею вузлових переміщень ( $u'_g - u'_n$ ) відповідно на верхній ( $x^1 = h$ ) та нижній ( $x^1 = 0$ ) поверхнях стержня, а переміщення  $u^2$  є вузловим переміщенням на серединній поверхні стержня ( $x^1 = h/2$ ). Похибка для напружень  $\sigma^{3'3'}$  пов'язана з апроксимацією більш складного (у порівнянні з лінійним) нелінійного розподілу температури. Поява похибок для вузлових переміщень  $u^1$  та  $u^2$  пояснюється моделюванням крайового ефекту поперечного розширення перерізів стержня біля затиснень його кінців.



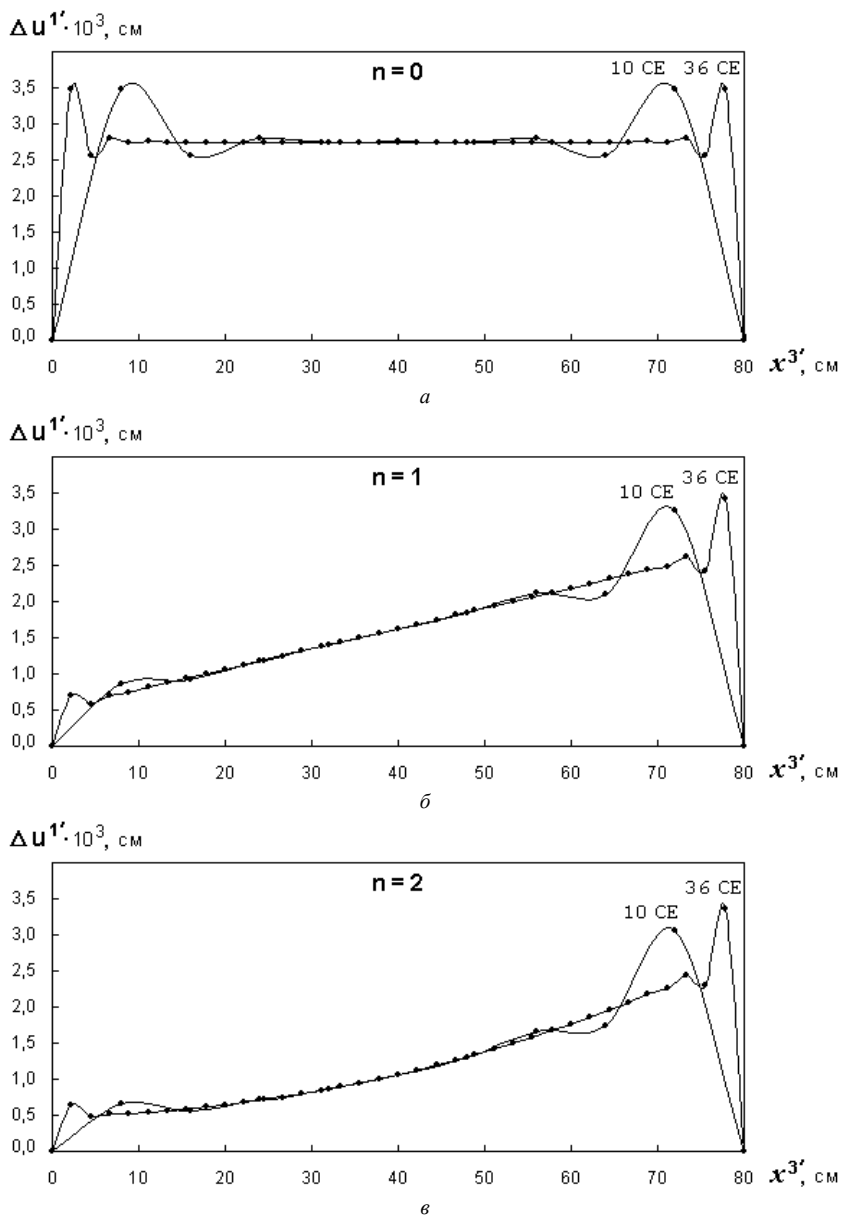


Рис. 2. Крайовий ефект для вертикального розширення у защемленому на кінцях стержні

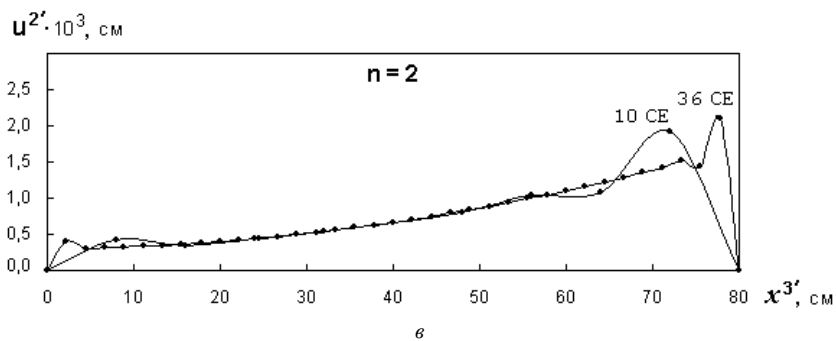
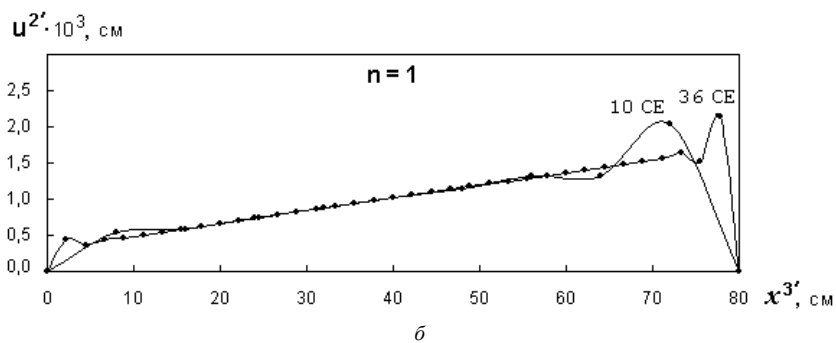
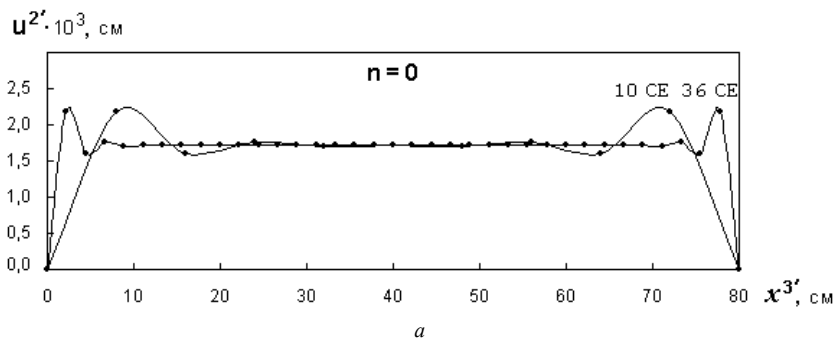


Рис. 3. Крайовий ефект для горизонтального розширення у защемленому на кінцях стержні

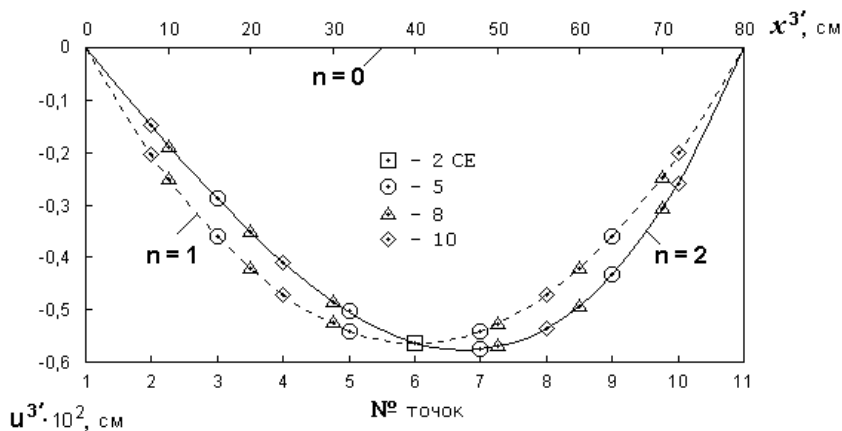


Рис. 4. Епюри повздовжніх переміщень точок защемленого на кінцях стержня

Таблиця 1

Значення повздовжніх переміщень точок защемленого на кінцях стержня при двох нерівномірних за довжиною нагрівах

№ точок	$x^{3'}$ , см	$u_{n=1}^{3'} \cdot 10^2$ , см	$u_{n=2}^{3'} \cdot 10^2$ , см	$(u_{n=1}^{3'} - u_{n=2}^{3'}) \cdot 10^2$ , см
1	0	0	0	0
2	8	-0.2025	-0.1485	-0.0540
3	16	-0.3600	-0.2880	-0.0720
4	24	-0.4725	-0.4095	-0.0630
5	32	-0.5400	-0.5040	-0.0360
6	40	-0.5625	-0.5625	0
7	48	-0.5400	-0.576	0.0360
8	56	-0.4725	-0.5355	0.0630
9	64	-0.3600	-0.4320	0.0720
10	72	-0.2025	-0.2565	0.0540
11	80	0	0	0

На рис. 2 і рис. 3 показані епюри поперечних переміщень  $\Delta u^1$  та  $u^2$  для всіх розглянутих варіантів закону (1) на прикладі двох характерних сіток з рівномірним кроком між вузлами – 10 СЕ та 36 СЕ. Для першої рідкої сітки ефект хвильової поперечної деформації поширюється майже на всю довжину стержня. Для другої більш густої сітки крайовий ефект зосереджується біля опор на  $1/9$  довжини стержня. При будь-якій кількості СЕ, більшій ніж вісім, хвильовий характер деформування спостерігається в межах тільки чотирьох найближчих до опор елементів при незмінній величині їх вузлових поперечних переміщень. У середній частині стержня при достатньому (більше 8) числі СЕ поперечні вузлові переміщення  $\Delta u^1$  та  $u^2$  обчислюються точно, як для тіла, що вільно деформується при температурному нагріві. Ефект хвильової поперечної деформації спостерігається як для лінійного, так і для параболічного законів розподілу температури, як при сталих, так і змінних вздовж стержня кроках сітки. Подальші дослідження підтвердили наявність цього явища також при розгляданні пластин і оболонок, що мають граничні умови жорсткого затиснення.

На рис. 4 наведені епюри повздовжніх вузлових переміщень  $u^3$  при нагріві стержня відповідно за лінійним ( $n=1$ , пунктирна крива) та параболічним ( $n=2$ , суцільна крива) варіантами розподілу температури. Відмітимо, що при згущенні сітки переміщення в обох варіантах є ординатами одних і тих же епюр. Таким чином самі епюри при згущенні сітки не змінюються. Епюра, що відповідає лінійному розподілу температури, є симетричною відносно середини стержня. Епюра, що відповідає параболічному розподілу температури, є кососиметричною відносно першої епюри – на скільки ліва половина суцільної кривої розміщується вище пунктирної, на стільки ж її права частина розміщується нижче (табл. 1).

При сталій за довжиною температурі ( $n=0$ ) повздовжні переміщення  $u^3$  отримані нульовими.

Для порівняння наведені криві збіжності розв'язків при дії на стержень поперечного рівномірно розподіленого тиску інтенсивністю  $q$ : на рис. 1, в – згинаючого моменту  $M$  (на опорах та в центрі), на рис. 1, г – прогину центра стержня  $u^1$ . Відмітимо, що збіжність результатів при дії нагріву настає швидше.

## 2. Нерівномірний за довжиною нагрів вільно опертої балки.

Розглянута вільно оперта балка (рис. 5, а) при тих самих, як і у попередньому прикладі защемленого стержня, законах розподілу температури (1) (рис. 5, б).

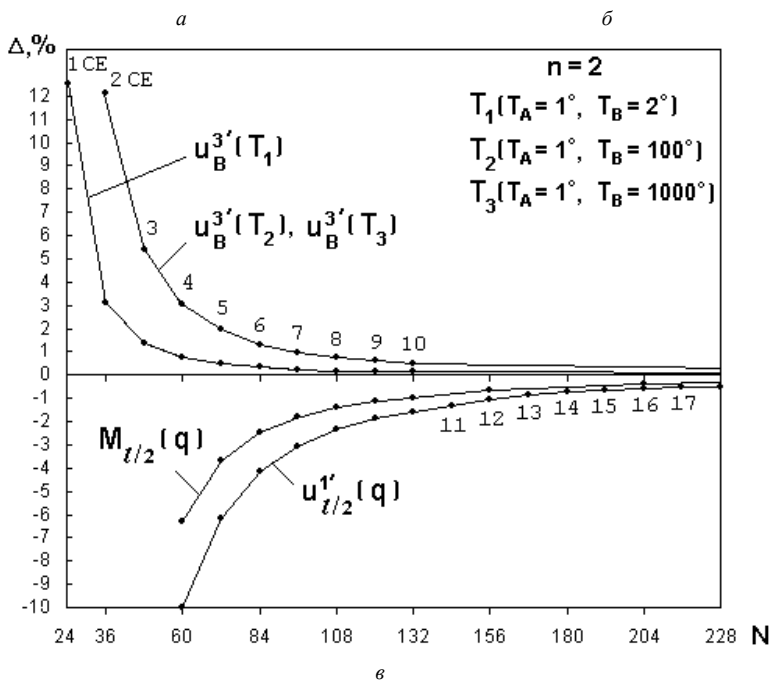
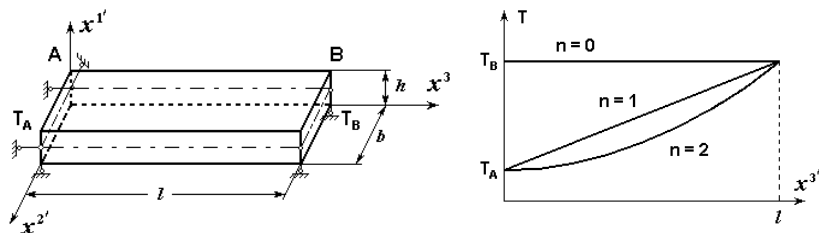


Рис. 5. Збіжність розв'язків для вільно опертої балки при нерівномірних вздовж довжини нагрівах

Прийняті наступні вихідні дані:  $h=1$  см,  $b=1$  см,  $l=10$  см,  $E=10$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu=0$ ,  $\alpha=1$  град<sup>-1</sup>. Розглядались три варіанти величин параметрів

температурного нагріву  $T_A$  і  $T_B$ : відповідно 1)  $1^\circ C$ ,  $2^\circ C$ ; 2)  $1^\circ C$ ,  $100^\circ C$ ; 3)  $1^\circ C$ ,  $1000^\circ C$ . Досліджувалася збіжність і точність обчислення повздовжнього переміщення  $u_B^3$  правого кінця балки (переріз B) (рис. 5, в). Для порівняння результатів застосовувалася формула

$$u_B^3 = \Delta l = \alpha l \left( T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1} \right).$$

Для сталого ( $n=0$ ) і лінійного ( $n=1$ ) законів розподілу температури, як і слід було очікувати, усі компоненти вектора переміщень обчислюються точно. При нагріві за параболічним законом ( $n=2$ ) виявлена залежність досить швидкої збіжності повздовжнього переміщення  $u_B^3$  від різниці величин перепаду температур ( $T_B - T_A$ ). Якщо при порівнянні результатів для перепадів температур на  $1^\circ C$  (1 варіант) та на  $99^\circ C$  (2 варіант) помітна різниця для кривих збіжності, то при порівнянні результатів для перепадів температур на  $99^\circ C$  та на  $999^\circ C$  (3 варіант) криві збіжності співпадають.

На рис. 5, г для порівняння подані криві збіжності розв'язків при дії на балку рівномірно розподіленого тиску інтенсивністю  $q$ : прогину  $u_{l/2}^3$  і згинного моменту  $M_{l/2}$  в середині балки. Крива збіжності для кутів повороту кінців балки співпадає з кривою для  $M_{l/2}$ . Як і у попередньому прикладі збіжність результатів при нагріві настає швидше.

### 3. Нерівномірний за товщиною нагрів консольної балки.

Збіжність і точність розв'язків при лінійному за товщиною (вздовж осі  $x^1$ ) та сталому на серединній поверхні (вздовж осей  $x^2$  і  $x^3$ ) розподілі температури, який викликає згин із площини серединної поверхні, досліджені на прикладі консольної балки (рис. 6, а, б). Вихідні дані взяті згідно до [6]:  $h=10$  см,  $b=10$  см,  $l=200$  см,  $T_B = -10^\circ C$ ,  $T_H = 50^\circ C$ ,  $E=1$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu=0$ ,  $\alpha=118 \cdot 10^{-7}$  град<sup>-1</sup>. Результати досліджень наведені на рис. 6, в і рис. 6, г.

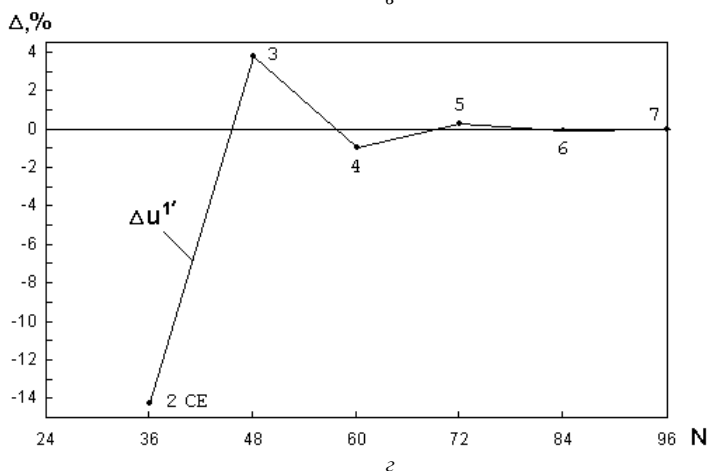
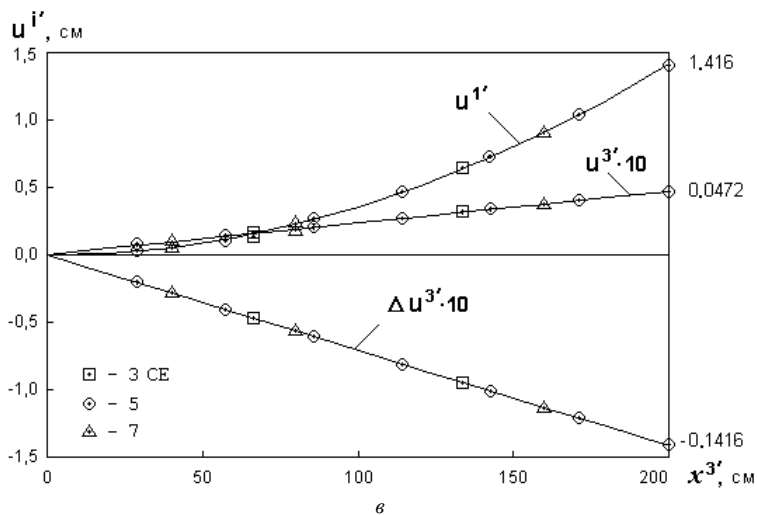
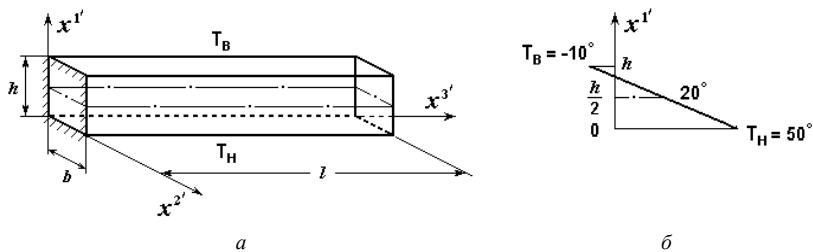


Рис. 6. Збіжність розв'язків для консольної балки при нерівномірному за товщиною нагріві

Для порівняння переміщень точок перерізу вільного кінця балки використовувались наступні формули:

для прогину середини перерізу –  $u^1 = -\alpha l^2 (T_H - T_B) / 2h$ ,

для вертикального розширення перерізу –  $\Delta u^1 = \alpha h (T_H + T_B) / 2$ ,

для повздовжнього переміщення перерізу –  $u^3 = -\alpha l (T_H + T_B) / 2$ ,

для кута повороту перерізу –  $\phi = \Delta u^3 = \alpha l (T_H - T_B) / h$ ,

де  $\Delta u^3$  – різниця вузлових переміщень ( $u_g^3 - u_n^3$ ) відповідно на верхній ( $x^1 = h$ ) та нижній ( $x^1 = 0$ ) поверхнях балки.

Вже один скінченний елемент дає точні значення для переміщень  $u^1$ ,  $u^3$  та  $\Delta u^3$ . Величини цих переміщень не залежать від густоти сітки, тому, наприклад, при розбитті балки на 3, 5 та 7 СЕ, вони точно попадають на теоретичні криві (рис. 6, в). Для переміщення  $\Delta u^1$  характерна швидка осцилююча збіжність (рис. 6, г). Причина появи похибки пов'язана з хвильовим характером поперечної деформації балки у защемленого кінця, як це спостерігалось у попередньому прикладі нагріву жорстко затиснутого на обох кінцях стержня.

На цій же балці з квадратним перерізом досліджена точність розв'язків при аналогічному нерівномірному нагріві, але вже в площині серединної поверхні (лінійному вздовж осі  $x^2$  та сталому вздовж осей  $x^1$  і  $x^{3\odot}$ ). Цей розподіл температури викликає згин балки в площині її серединної поверхні. Прогин кінця балки, яка поділена, наприклад, на 10 СЕ, становить 1.4172 см, що на 0.08% більше від точного результату. Таким чином, розв'язки цих двох задач підтверджують однакові властивості просторового скінченного елемента в напрямку його товщини (в якому прийнята гіпотеза прямої лінії [1]) та в обох напрямках на серединній поверхні СЕ.

Для порівняння розглянуті результати дослідження збіжності та точності розв'язків для консольної балки при дії різних силових навантажень. При дії повздовжнього стиску один СЕ дає точний розв'язок для повздовжньої сили, повздовжніх і поперечних переміщень. При розрахунку на згин із площини серединної поверхні балки моделювання одним СЕ дає точні значення повздовжніх і поперечних сил, а також кута повороту вільного кінця балки; два СЕ дають величину прогину кінця консолі з похибкою 3.8%, три СЕ зменшують її до 0.3%. При згині в площині серединної поверхні балки від пари сил один СЕ дає точний результат по переміщенням і напруженням, а при згині там же від дії



однієї сили один СЕ дає точний розв'язок для кута повороту та напружень, два СЕ дають для переміщення кінця балки під силою похибку 2.3%, три СЕ – 1.1%. При розрахунку консольної балки на кручення один СЕ дає для дотичних напружень та кута повороту похибку в 2%, а два СЕ – 1%.

1. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатопарових поребриних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
2. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности. - 1999. - N 5. - С. 96-102.
3. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
4. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
5. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюкий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Головное изд.-во. - 1982. - 480 с.
6. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. - К.: Вища шк. Головное изд.-во, 1986. - 775 с.

*Надійшло до редакції 13.11.2006 р.*

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,  
Ворона Ю.В., канд. техн. наук,  
Щербатюк О.М.

## ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ КОМБІНОВАНИХ СИСТЕМ

Викладається та застосовується методика дослідження нестационарних коливань пружних комбінованих систем при сейсмічному впливі. Побудова матриць мас та жорсткості системи, що складається з масивних та тонкостінних елементів, здійснюється в базисі узагальнених координат, в якості яких використовуються власні форми коливань окремих складових та форми деформованого стану системи внаслідок одиничних переміщень точок контакту елементів. Наводиться розв'язок модельної задачі про реакцію системи рама-масив на квазістационарне стохастичне збудження основи.

В даній статті розглядаються нестационарні коливання пружної комбінованої системи при стохастичному впливі. Вважається, що система складається з масивних, пластинчастих та стержневих елементів. Для розв'язання задачі будемо користуватись методом нормальних координат, згідно з алгоритмом якого перш за все потрібно знайти власні частоти і форми всієї комбінованої конструкції. Ці характеристики забезпечують нетривіальний розв'язок системи

$$([K] - \omega^2[M])\{\varphi\} = 0, \quad (1)$$

де  $[M]$  і  $[K]$  - матриці мас і жорсткості комбінованої системи,  $\{\varphi\}$  - вектор форми коливань, яка відповідає власній частоті  $\omega$ .

Для побудови матриць  $[M]$  і  $[K]$  найчастіше застосовується метод скінченних елементів (МСЕ) [1], який є універсальним по відношенню до більшості інженерних задач. Особливо помітно переваги МСЕ проявляються в задачах про напружений стан тонкостінних конструкцій (пластин, оболонок, стержнів та їх комбінацій). В той же час при розрахунку масивних елементів конструкцій з МСЕ досить часто успішно конкурують алгоритми методу потенціалу [2,3], які у випадку пружного деформування дозволяють зменшити розмірність задачі шляхом розділення співвідношень, що пов'язують між собою невідомі на границі об'єкту, та представлень, які визначають переміщення та напруження всередині розрахункової області. Поєднати переваги обох методів допомагає суперелементний підхід, в рамках якого спочатку визначаються власні пари окремих складових, причому у випадку

масивних елементів це завдання виконується за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР) [4,5].

Побудову матриць мас та жорсткості для кожного з суперелементів будемо виконувати в декартовій системі координат, яку будемо вважати природним базисом. Поряд з природним створимо допоміжний базис, кожна узагальнена координата якого є або певною формою коливань одного з суперелементів (при цьому інші елементи є нерухомими), або реакцією всієї системи на одиничне переміщення вздовж в'язі між суперелементами (при цьому переміщення вздовж інших в'язей дорівнюють нулю) [6, 7]. В роботі [7] наведена побудова матриць  $[M]$  і  $[K]$  в допоміжному базисі, а також отримана матриця переходу, яка пов'язує між собою величини, що характеризують жорсткість, інерційні та демпфіруючі властивості комбінованої системи в обох базисах. Розв'язок задачі на власні значення (1) дозволяє сформулювати  $N$ -вимірний вектор власних частот з компонентами  $\omega_j$  та матрицю форм коливань  $[\Phi]$  розміром  $N \times N$ , кожен стовпчик якої  $\varphi_j$  є формою коливань всієї конструкції. Через  $N$  тут позначено кількість динамічних ступенів свободи системи.

Необхідно також зупинитись на моделюванні нестационарного навантаження. Будемо тут розглядати навантаження, яке відповідає сейсмічному впливу на конструкцію. Згідно [8] приймемо квазістационарну модель сейсмічного впливу, тобто будемо вважати, що прискорення точок ґрунту можна подати у вигляді добутку деякої функції, що залежить тільки від часу, та функції, яка відповідає стаціонарному випадковому процесу:

$$\ddot{u}_g(t) = A_0 P(t) \zeta(t), \quad (2)$$

де  $A_0$  - деяка додатна константа;  $\zeta(t)$  - центрована стаціонарна випадкова функція часу;  $P(t)$  - квазіобвідна, яку обирають, як правило, у вигляді обмеженої детерміністичної функції, що спочатку зростає до максимуму, а потім асимптотично прямує до нуля при збільшенні  $t$ . В подальшому будемо використовувати квазіогинаючу наступного вигляду:

$$P(t) = \eta(t) t e^{-ct}, \quad (3)$$

де  $\eta(t)$  - одинична функція Хевісайда.

Випадкову функцію часу можна подати у вигляді стохастичного інтегралу Фур'є:

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4)$$

де спектр  $Q(\omega)$  - центрована узагальнена випадкова функція частоти  $\omega$ , що задовольняє умові стохастичної ортогональності:

$$\langle \overline{Q}(\omega)Q(\omega') \rangle = S_Q(\omega)\delta(\omega - \omega'); \quad (5)$$

$S_Q(\omega)$  - спектральна щільність процесу.

З огляду на співвідношення (2-4), задача про реакцію комбінованої системи на кінематичне збудження основи, яке спричинене землетрусом, зводиться до багаторазового (при різних значеннях параметра  $\omega$ ) розв'язання системи:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = -\ddot{u}_g[M]\{1\}, \quad (6)$$

де  $\{u\}$  і  $\{\ddot{u}\}$  - відповідно вектори відносних переміщень та прискорень точок конструкції.

Чисельне визначення кореляційної функції реакції об'єкту виконується за формулою:

$$\begin{aligned} K_u(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\omega) \bar{u}_{j\omega}(x, t_1) u_{j\omega}(x, t_2) d\omega \cong \\ &\cong \sum_{l=-L}^L S_\varphi(\omega_l) \bar{u}_{j\omega}(x, t_1) u_{j\omega}(x, t_2) \Delta\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

В формулі (7) рискою над символом позначені комплексно спряжені величини.

Оскільки застосовується метод нормальних координат, то кожному складову переміщення можна подати наступним чином [9]:

$$u_{j\omega}(x, t) = \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)}(x) y_m(\omega, t), \quad (8)$$

де  $\varphi_j^{(m)}(x)$  -  $m$ -а форма коливань об'єкту, нормована таким чином, що

$$\int_V \varphi_j^{(m)} \varphi_j^{(n)} dV = \delta_{mn}. \quad (9)$$

Тут через  $V$  позначена область, яку займає об'єкт розрахунку.

Використовуючи (7), (8) та ортогональність форм коливань відносно матриць мас і жорсткості, приходимо до системи незв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку відносно нормальних координат

$$y_m(\omega, t) + \Omega_m^2 y_m(\omega, t) = G_m(t), \quad (10)$$

де

$$G_m(t) = -A_0 P(t) e^{i\omega t} \int_V \varphi_j^{(m)} dV.$$

Якщо квазіігинаюча має вигляд (3), а внутрішнє тертя в матеріалі характеризується незалежним від частоти коливань параметром демпфірування  $\xi$ , то кожне з рівнянь системи (10) набуде такого вигляду:

$$y_m(\omega, t) + 2\xi\Omega_m y_m(\omega, t) + \Omega_m^2 y_m(\omega, t) = B_m t e^{(i\omega - c)t} \eta(t), \quad (11)$$

де

$$B_m = A_0 \int_V \varphi_j^{(m)} dV.$$

Оскільки система (11) є системою незалежних (непов'язаних одне з одним) диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами, то розв'язок кожного з цих рівнянь може бути знайдений в замкненій формі [5], після чого за допомогою співвідношення (8) отримуємо кореляційну функцію реакції об'єкту:

$$K_u(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m(\omega, t_2) \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m(\omega, t_1) S_\varphi(\omega) \right] d\omega. \quad (12)$$

В свою чергу дисперсію переміщень точок конструкції отримуємо, поклавши в (12)  $t_1 = t_2 = t$ :

$$\sigma_u^2(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} \bar{y}_m \cdot \sum_{m=1}^M \varphi_j^{(m)} y_m \cdot S_\varphi(\omega) d\omega. \quad (13)$$

Сукупність співвідношень (6-13) утворює алгоритмічну основу для розрахунку нестационарних випадкових коливань комбінованих пружних систем.

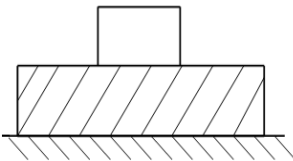


Рис. 1. Модель комбінованої системи

Для демонстрації можливостей розробленого алгоритму була розв'язана задача про коливання рамної конструкції висотою 4 м, прольотом 6 м, перерізом 0.5x0.5 м, що спирається на пружний масив товщиною 6 м, який, в свою чергу лежить на скельній основі (рис.1). Густина матеріалу масиву становить 2000 кг/м<sup>3</sup>, модуль пружності 30000 кПа, а

коефіцієнт Пуассона 0.25. Маса рами зосереджена посередині кожного з елементів, причому маса ригеля 3550 кг, а маса кожної стійки 2500 кг. Модуль пружності матеріалу рами  $3 \times 10^7$  кПа.

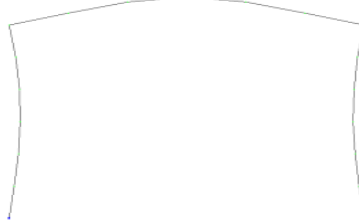
Для рамного елемента власні пари знаходимо за допомогою навчальної версії обчислювального комплексу ЛИРА [10]. Вигляд перших чотирьох форм наведених на рис. 2, причому через  $\Omega^f$  позначені значення власних частот рами.

$$\Omega^f = 38.79 \text{ рад/с}$$



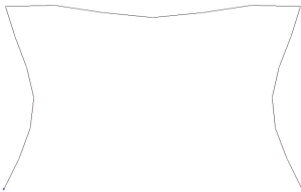
1-а форма коливань

$$\Omega^f = 133.18 \text{ рад/с}$$



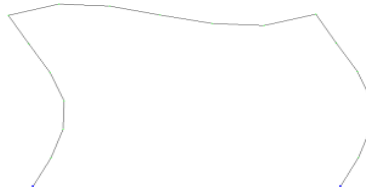
2-а форма коливань.

$$\Omega^f = 267.89 \text{ рад/с}$$



3-я форма коливань.

$$\Omega^f = 317.56 \text{ рад/с}$$



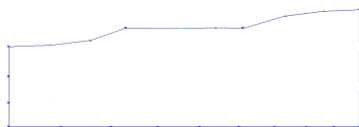
4-а форма коливань.

Рис. 2. Форми власних коливань рамного елемента

Перші вісім форм і частот вільних коливань масивного елемента знайдені за методикою, викладеною в [4, 5]. Чотири з них показані на рис.3, де символом  $\Omega^m$  позначені значення власних частот масиву.

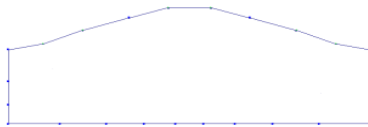
Далі, визначаємо реакцію кожного з елементів на одиничний зсув кожної із спільних точок, тобто знаходимо характерні переміщення, обумовлені в'язями, після чого за методикою, викладеною в [7], будуємо матриці жорсткості і мас всієї комбінованої системи. За наявності матриць жорсткості і мас комбінованої системи визначення власних частот і форм конструкції за відповідним алгоритмом не становить труда.

$$\Omega^m = 23.39 \text{ рад/с}$$



1-а форма коливань

$$\Omega^m = 31.68 \text{ рад/с}$$



2-а форма коливань

$$\Omega^m = 36.64 \text{ рад/с}$$



3-я форма коливань

$$\Omega^m = 38.96 \text{ рад/с}$$

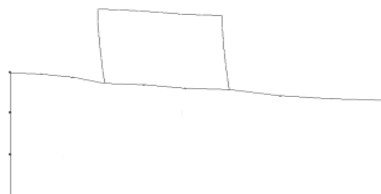


4-а форма коливань

Рисунок 3 – Форми власних коливань масивного елемента

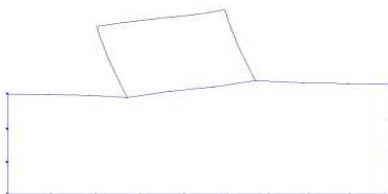
Всього було визначено 16 власних частот і форм коливань комбінованої конструкції, чотири з яких наведені на рис. 4.

$$\Omega = 20.16 \text{ рад/с}$$



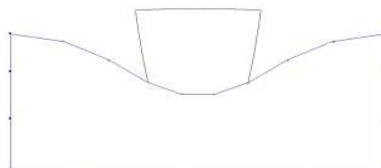
1-а форма коливань

$$\Omega = 25.16 \text{ рад/с}$$



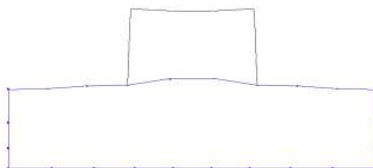
2-а форма коливань

$$\Omega = 30.33 \text{ рад/с}$$



3-я форма коливань

$$\Omega = 32.23 \text{ рад/с}$$



4-а форма коливань

Рис. 4. Форми власних коливань комбінованої системи

На основі результатів модального аналізу було проведено дослідження реакції системи на сейсмічний вплив за двома різними методиками. Розрахунок за першою методикою полягав в безпосередньому інтегруванні рівнянь (11) з правою частиною, яка відповідала кінематичному збудженню у вигляді синтезованої акселерограми, зображеної на рисунку 5,а. Ведучий період зміщення основи  $T_0$  при таких коливаннях приблизно дорівнював 0.4 с. Зміна величини середньоквадратичного відхилення точки, яка розташована посередині ригеля рамного елемента, показана на рисунку 5, б.

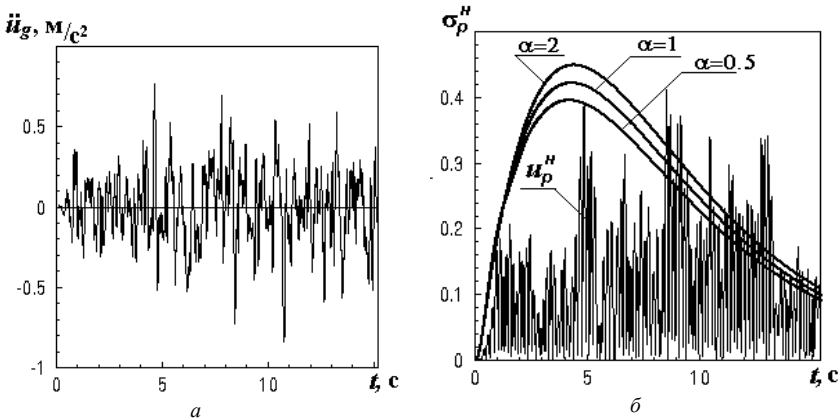


Рис. 5. Нормовані середньоквадратичні переміщення середини ригеля: а – синтезована акселерограма; б – порівняння результатів розрахунку

На цьому ж рисунку наведені графіки зміни відповідної характеристики, отриманої як корінь квадратний із величини  $\sigma_u^2$ , визначеної за формулою (13). При розрахунках вважалося, що стаціонарна складова  $\zeta(t)$  сейсмічного прискорення ґрунту  $\ddot{u}_g(t)$  відповідала процесу з прихованою періодичністю, спектральна щільність якого має вигляд:

$$S_{\varphi}(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + \theta^2 + \alpha^2}{(\omega^2 - \theta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (14)$$

де згідно [11] характерна частота процесу  $\theta = \frac{2\pi}{T_0}$ , а параметр кореляції  $\alpha$  приймав значення 0.5, 1 і 2  $\text{с}^{-1}$ . Параметр  $c$  у виразі для



квазіобвідної (3) дорівнював  $\frac{0.1}{T_0}$ , а константа  $A_0$  приймалася такою, щоб максимальне значення  $P(t)$  у виразі (2) дорівнювало найбільшому за абсолютною величиною значенню прискорення на графіку синтезованої акселерограми.

Порівнюючи результати, наведені на рис. 5, можна відмітити, що в даному випадку для оцінки максимального значення переміщення достатньо було взяти лише одну реалізацію нестационарного випадкового процесу у вигляді синтезованої акселерограми. При цьому найбільше за модулем нормоване переміщення середини ригеля  $u_p^H$  дорівнювало 0.412, тоді як нормовані максимуми  $\sigma_u^H$  становили 0.395, 4.213 і 4.49 при значеннях параметра кореляції  $\alpha$  відповідно 0.5, 1 і  $2 \text{ с}^{-1}$ . В той же час спостерігалась значна розбіжність в оцінках моменту досягнення максимального значення. Так величина  $u_p^H$  досягала максимуму в момент часу  $t = 8.55 \text{ с}$ , а  $\sigma_u^H$  - в моменти 4.18 с, 4.29 с та 4.4 с при згаданих значеннях параметра  $\alpha$ .

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общей А.С.Сахарова и И.Альтенбаха. К.: Вища школа, 1982. – 479 с.
2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 472 с.
3. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
4. Agnantiaris J.P., Polyzos D., Beskos D.E. Three-dimensional structural vibration analysis by the Dual Reciprocity BEM // Computational Mechanics, 1998. – vol. 21. – P. 372-381.
5. Баженов В.А., Дехтярюк С.С., Ворона Ю.В. Методика чисельного дослідження нестационарних коливань пружних об'єктів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2004. – Вип. 75.– С. 3-12.
6. Харти В.С. Динамический анализ конструкций, основанный на исследовании форм колебаний отдельных элементов // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 4. – том 3. – С. 130-138
7. Баженов В.А., Ворона Ю.В., Щербатюк О.М. Побудова дискретних динамічних моделей комбінованих систем об'єктів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2005. – Вип. 77.– С. 83-90.
8. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
9. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
10. Лантух-Лященко А.И. ЛИРА. Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций. – К.М.: Факт, 2001. – 312 с.
11. Лужин О.В. Вероятностные методы расчета сооружений. – М.: МИСИ, 1983. – 122 с.

УДК. 539.3

Гайдайчук В.В., д-р техн. наук

Соловійов І.Л., канд. техн. наук

## **СТІЙКІСТЬ ПОДОВЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ ОСЬОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Проблема дослідження втрати стійкості рівноваги пружних оболонок є однією з центральних у механіці деформівного твердого тіла. Як правило, ці дослідження проводяться з використанням концепції статичного випинання оболонки на основі лінеаризованих розв'язуючих рівнянь. Однак розвиток турбо- та авіабудування показав, що в ряді випадків класичні підходи, що засновані на методах статички, виявляються непридатними для рішення подібних задач, оскільки на оболонковій конструкції цих систем діють неконсервативні зовнішні сили й вони втрачають стійкість рівноваги шляхом переходу в режими коливальних рухів. З урахуванням цієї особливості стійкість рівноваги таких систем повинна перевірятися на основі динамічного підходу. У даній роботі вивчається стійкість рівноваги циліндричних оболонок, що обертаються, під дією осьових слідкуючих навантажень.

Питання аналізу динамічної втрати стійкості рівноваги стержневих конструкцій під дією слідкуючих сил розглянуто в [1, 2], дослідження випинання пружних валів виконано в [3], вивченню стійкості тонких оболонок при простому й складному обертаннях присвячені роботи [4-9]. Враховуючи, що на оболонки роторів турбін авіаційних двигунів крім сил інерції також діють слідкуючі сили осьового стиску або розтягу, можна вважати, що проблема аналізу статичних і динамічних ефектів, що супроводжують цим явищем, є досить актуальною. Дана робота присвячена комп'ютерному моделюванню цих ефектів.

Розглянемо задачу про статичну та динамічну стійкість тонких циліндричних оболонок, які обертаються, під дією осьових стискаючих або розтягуючих слідкуючих сил. Будемо вважати, що один край оболонки є вільним, іншим краєм вона жорстко приєднана до основи, яка обертається. Вісь обертання основи співпадає з віссю оболонки. До вільного краю оболонки прикладені поздовжні рівномірно розподілені слідкуючі сили, що стискають або розтягують її в осьовому напрямку. Досліджується можливість біфуркаційного переходу квазістатичної рівноваги оболонки, яка обертається, до режиму її коливальних.

Для дослідження динамічної втрати стійкості циліндричної оболонки використовується підхід, який запропонований в [2], при аналізі випинання консольних стержнів під дією слідкуючої сили. Він заснований на встановленні залежності частоти власних коливань пружної системи від інтенсивності слідкуючої сили. Значення слідкуючих сил, при яких система втрачає можливість здійснювати вільні періодичні коливання, вважаються критичними. Цей підхід використовується нижче для моделювання втрати стійкості оболонок.

Прийmemo, що тонкостінна циліндрична оболонка пов'язана із жорстким носієм, якій обертається разом із системою координат  $Oxuz$  із

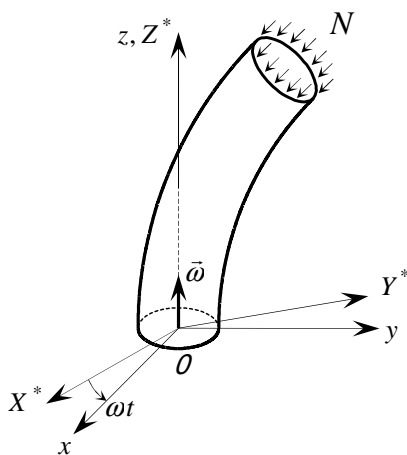


Рис. 1

постійною по модулю кутуюю швидкістю  $\bar{\omega}$  відносно осі симетрії  $Oz$ . Введемо праві системи координат:  $Ox^*Y^*Z^*$  – інерційна система координат із початком у центрі опорного контуру оболонки, вісь  $OZ^*$  збігається з віссю  $Oz$ . На серединній поверхні оболонки введемо ортогональну криволінійну систему координат  $Ox^1x^2x^3$ , у якій координатна лінія  $x^1$  лежить у твірному перерізі,  $x^2$  спрямована в колотовому напрямку,  $x^3$  – уздовж напрямку внутрішньої нормалі до поверхні оболонки.

Рівняння динамічної рівноваги елемента оболонки, що записані у криволінійній ортогональній системі координат  $Ox^1x^2x^3$  з базисними векторами  $\bar{e}_\alpha$  на поверхні, мають вигляд

$$\nabla_\alpha \bar{T}^\alpha + \bar{p} = 0, \quad \nabla_\alpha \bar{M}^\alpha + (e_\alpha \times \bar{T}^\alpha) \sqrt{a_{11}a_{22}} = 0, \quad (\alpha = 1, 2). \quad (1)$$

Тут  $\bar{T}^\alpha$  – вектор внутрішніх сил в оболонці;  $\bar{M}^\alpha$  – вектор внутрішніх моментів;  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні;  $\bar{p}$  – вектор інтенсивності зовнішнього розподіленого навантаження.

Використовуючи співвідношення зв'язку між контраваріантними компонентами функцій внутрішніх сил  $T^{ij}$  й моментів  $M^{ij}$  та коваріантними складовими функцій деформації  $\varepsilon_{ij}$  й зміни кривин  $\mu_{ij}$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= Eh\varepsilon_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/(1-\nu^2), \\ M^{ij} &= Eh^3\mu_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/12(1-\nu^2), \end{aligned} \quad (2)$$

виразивши ці функції через коваріантні компоненти  $u_1, u_2, u_3$  вектора переміщень  $\bar{u}$  і кути повороту  $\vartheta_i$  перерізів

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (\bar{e}_i \cdot \partial\bar{u}/\partial x^j + \bar{e}_j \cdot \partial\bar{u}/\partial x^i + \vartheta_i \cdot \vartheta_j)/2, \quad \vartheta_i = (\partial\bar{u}/\partial x^i)\bar{e}_3, \\ \mu_{ij} &= (\bar{e}^k / c^{ik} \cdot \partial\bar{\Omega}/\partial x^j + \bar{e}^k / c^{jk} \cdot \partial\bar{\Omega}/\partial x^i)/2, \\ \bar{\Omega} &= c^{ij}\vartheta_i\bar{e}_j, \quad (i, j, k = 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

і врахувавши при розкритті векторних операцій у (1) зміну параметрів  $b_i^j$  другої квадратичної форми в процесі деформації оболонки, отримаємо нелінійні рівняння її динамічної рівноваги.

Для розглянутих випадків вектор  $\bar{p}$  є силою інерції складного руху, який знаходиться за формулою  $\bar{p} = -\gamma h \bar{a}$ , де  $\gamma$  – густина матеріалу оболонки;  $h$  – її товщина;  $\bar{a}$  – абсолютне прискорення її елемента.

При моделюванні ефектів втрати стійкості оболонки використовуються геометрично нелінійні співвідношення теорії оболонок і послідовно розглядаються два її стани. Спочатку виділяється стан простого обертання оболонки з кутовою швидкістю  $\omega$  і підраховуються функції, що визначають поля її напружень і деформацій, які виникають від обертання та дії осьової сили. Потім нелінійні рівняння руху лінеаризуються в околі цього стану і з їх допомогою досліджується стійкість оболонки.

У загальному випадку прискорення підраховується за формулами [10]

$$\bar{a} = \bar{a}^e + \bar{a}^r + \bar{a}^c, \quad \bar{a}^e = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}), \quad \bar{a}^r = \frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2}, \quad \bar{a}^c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}^r, \quad (4)$$

у яких вектори  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{v}^r$ ,  $\bar{\rho}$  повинні бути представлені з урахуванням усіх видів пружних рухів оболонки. Тут  $\bar{\rho}$  – радіус-вектор елемента,  $\bar{v}^r = d\bar{\rho}/dt$  – відносна швидкість в збуреному стані.

У результаті виконання векторних операцій (4) знайдемо контраваріантні компоненти векторів прискорень

$$a_e^1 = -\omega^2 r \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 u_1 \sin^2 \varphi / a_{11} + \omega^2 u_3 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}},$$

$$\begin{aligned}
a_e^2 &= -\omega^2 u_2 / a_{22}, \\
a_e^3 &= \omega^2 r \cos \varphi + \omega^2 \left( u_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} - u_3 \cos \varphi \right) \cos \varphi, \\
a_c^1 &= -2\omega \dot{u}_2 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}}, \\
a_c^2 &= 2\omega \dot{u}_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}} - 2\omega \dot{u}_3 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}}, \\
a_c^3 &= 2\omega \dot{u}_2 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}}, \\
a_r^1 &= \ddot{u}_1 / a_{11}, \quad a_r^2 = \ddot{u}_2 / a_{22}, \quad a_r^3 = \ddot{u}_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Особливість цих прискорень полягає в тому, що вони включають доданки  $u_1, u_2, u_3, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$ , які є компонентами вектора пружного зсуву елемента оболонки та його швидкості і вносяться в ліві частини розв'язуючих рівнянь. Це призводить до перебудови структури рівнянь і можливості виникнення критичних станів.

В рівностях (5), що містять велику величину  $\omega^2$ , враховуються зміни геометрії оболонки при її навантаженні і замість  $r$  і  $\varphi$ , які визначають відстань від осі обертання до розглянутого перерізу та кут нахилу дотичної до твірної, використовуються величини  $r + \Delta r$ ,  $\varphi + \Delta \varphi^*$ .

У даній роботі вивчаються критичні стани простого обертання оболонки, що реалізовані по найменш енергоємній формі деформування, по першій гармоніці (за координатою  $x^2$ ). Будемо апроксимувати шукані функції першими гармоніками  $\sin(ct+x^2)$ ,  $\cos(ct+x^2)$  за фазовою координатою  $ct+x^2$ , де  $c$  – частота вільних коливань [8, 9]. Тоді з урахуванням цього спрощення з (1) – (5) можна отримати рівняння вільних коливань

$$\begin{aligned}
& dT^{(11)} / dx^1 - T^{(12)} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) T^{(11)} + \Gamma_{22}^1 T^{(22)} - b_1^1 T^{(13)} - \\
& - \omega^2 \Delta \vartheta_{(1)} r / a_{11} - c^2 u_{(1)} / a_{11} = 0; \\
& dT^{(12)} / dx^1 + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) T^{(12)} - b_2^2 T^{(23)} - \\
& - \mathcal{H}[-\omega^2 \vartheta_{(2)} r / a_{22} - 2\omega c u_{(3)} / \sqrt{a_{22}} - c^2 u_{(2)} / a_{22} - \omega^2 u_{(2)} / a_{22}] = 0; \tag{6} \\
& dT^{(13)} / dx^1 - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) T^{(13)} + b_{11} \Delta T^{(11)} - \mu_{(11)} T_0^{(11)} + b_{(22)} T^{(22)} - \\
& - \mu_{(22)} T_0^{(22)} - \mathcal{H}[-2\omega c u_{(2)} / \sqrt{a_{22}} - \omega^2 u_{(3)} - c^2 u_{(3)}] = 0.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що вільні коливання, які описуються цією системою, мають вигляд гармонійної хвилі, що біжить в напрямку кола з кутовою швидкістю  $c$ . Причому, якщо при  $\omega=0$ , кожна із частот є двократною й ці

хвилі виявляються стоячими, то при  $\omega \neq 0$  кратні частоти розчіплюються на дві та їх моди починають прецесувати у різних напрямках. Від'ємній частоті  $c$  відповідає прецесія в напрямку обертання оболонки (пряма регулярна прецесія); додатній частоті  $c$  – прецесія у зворотному напрямку (зворотна регулярна прецесія).

Часткові розв'язки системи звичайних однорідних лінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку відносно функцій  $u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}, \vartheta_{(1)}, \varepsilon_{(11)}, \varepsilon_{(12)}, \mu_{(11)}, T^{(13)}$  з незалежною змінною  $x^1$  диференціальних рівнянь (6) будуються методом початкових параметрів.

У загальному вигляді система рівнянь (6) може бути подана у формі

$$d\bar{y}/dx = A_1(x)\bar{y}. \quad (7)$$

Тут  $\bar{y} = \bar{y}(x)$  - шукана вектор-функція розміру  $8 \times 1$

$$\bar{y} = (u_{(1)}, u_{(3)}, \vartheta_{(1)}, \varepsilon_{(11)}, \mu_{(11)}, T^{(13)}, u_{(2)}, \varepsilon_{(12)})^T, \quad (8)$$

$x \equiv x^1$  - незалежна змінна, що змінюється в межах  $0 \leq x \leq L$ ,  $A_1(x)$  - матриця коефіцієнтів восьмого порядку, обумовлена рівняннями теорії оболонок і співвідношеннями, що задають коефіцієнти першої і другої квадратичних форм.

Рішення системи (7) повинно задовольняти крайовим умовам

$$B \bar{y}(0) = 0, \quad D \bar{y}(l) = 0, \quad (9)$$

де постійні матриці  $B$  і  $D$  мають розміри  $4 \times 8$ .

Вектор-функція  $\bar{y}(x)$  будується у формі загального розв'язку  $Y(x) \bar{C}$  однорідного рівняння, де  $Y(x)$  - фундаментальна матриця розв'язків.

Вектор  $\bar{C}$  знаходиться з умов (9).

Задача про статичну стійкість оболонки, що обертається, вирішується на основі рівнянь (7) шляхом визначення біфуркаційних значень  $\omega$  ( $c=0$ ), при яких ця система має нетривіальні власні розв'язки. Вони відповідають виродженню визначника матриці системи алгебраїчних рівнянь, що впливає з умов (9), і є критичними.

За допомогою розробленої методики виконано аналіз статичної втрати стійкості циліндричних оболонок при простому обертанні.

Було розглянуто оболонки радіуса  $R=0,05$  м та довжини  $l=1$  та  $2$  м. Товщина оболонки складала  $h=10^{-3}$  м, модуль пружності матеріалу  $E=2,1 \times 10^{11}$  Па; коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,3$ .

Порівняно велике відношення довжини оболонки до її діаметра дозволило досліджувати її стійкість за допомогою двох математичних моделей - теорії балок і теорії оболонок, що описана вище. Спочатку розглядалася статична стійкість оболонок, що обертаються, попередньо напружених поздовжньо розподіленими слідкуючими силами, які стискають або розтягують її в осьовому напрямку. Критичні значення кутових швидкостей обертання оболонки при різних значеннях цих сил наведені в таблиці.

Таблиця 1

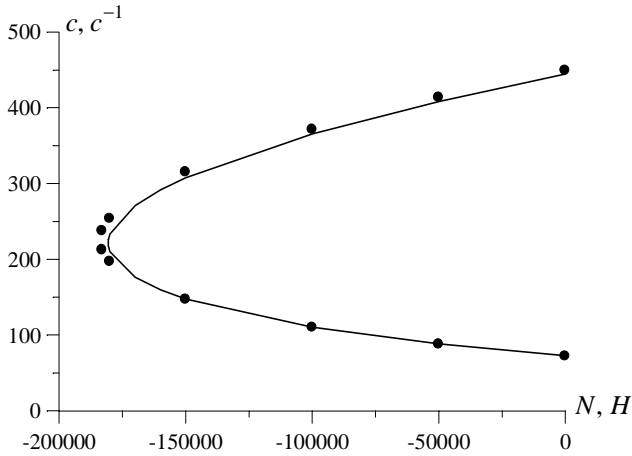
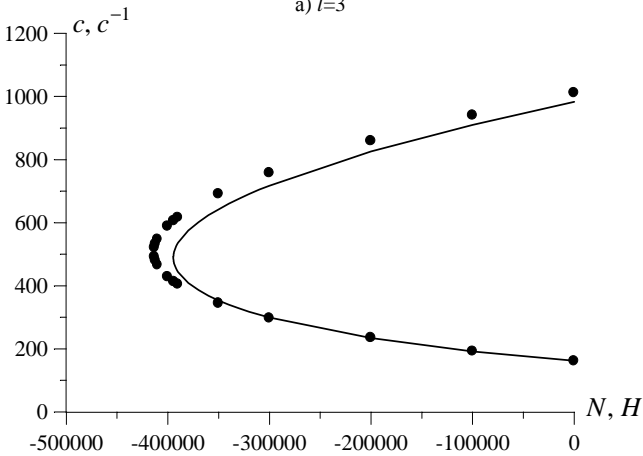
Критичні значення кутових швидкостей обертання оболонок при різних значеннях слідкуючих сил

Тип теорії	$l$ (м)	$N = 0$ $H$	$N = -10^4$ $H$	$N = 10^4$ $H$	$N = -10^5$ $H$	$N = 10^5$ $H$
Теорія оболонок	$l=1$	$639,01 c^{-1}$	$641,48 c^{-1}$	$636,56 c^{-1}$	$664,63 c^{-1}$	$615,37 c^{-1}$
	$l=2$	$162,17 c^{-1}$	$164,79 c^{-1}$	$159,62 c^{-1}$	$192,21 c^{-1}$	$139,58 c^{-1}$
Теорія балок	$l=1$	$645,04 c^{-1}$	$647,77 c^{-1}$	$642,34 c^{-1}$	$673,07 c^{-1}$	$618,72 c^{-1}$
	$l=2$	$161,26 c^{-1}$	$164,01 c^{-1}$	$158,58 c^{-1}$	$192,34 c^{-1}$	$137,14 c^{-1}$

Наведені дані дозволяють зробити висновок про те, що знайдені для оболонок критичні значення кутової швидкості є дещо меншими відповідних значень, які знайдені за теорією балок ( $l=1$ ), та дещо більшими відповідних значень ( $l=2$ ).

Для моделювання динамічних критичних значень оболонок використовується критерій, згідно з яким при втраті стійкості під дією слідкуючої сили, пружна конструкція втрачає здатність вільно коливатись. При цьому дві перші частоти приймають однакові значення та у закритичному стані стають комплексно-спряженими.

За такою методикою були досліджені консольно-опорні циліндричні оболонки з параметрами:  $R=0,05\text{м}$ ,  $h=10^{-3}\text{м}$ ,  $E=2,1 \times 10^{11}\text{Па}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $l=3\text{м}$  та  $2\text{м}$ .

а)  $l=3$ б)  $l=2$ Рис. 2. Залежності першої та другої частот від значення поздовжньої сили  $N$ 

На рис. 2 показані діаграми залежності першої й другої частот цих оболонок від значення поздовжньої сили  $N$  та  $\omega=0$ . Суцільна лінія відповідає теорії оболонок, точки – теорії балок. Видно, що граничні значення сили  $N$  для обох теорій знаходяться близько один до одного. При цьому теорія балок дає дещо завищене значення.



1. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
2. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
3. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
4. Гуляев В.И., Гром А.А., Снежко Н.А. Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Изв. РАН. МТТ. – 1999. № 2. – С. 156-163.
5. Соловйов І.І. Критичні стани тонких оболонок, пружно зв'язаних з платформою при простому і складному обертаннях // Опір матеріалів та теорія споруд. – 2004. – Вип.75. – С. 71-79.
6. Gulyayev V.I, Solovjov I.L., Lugovyy P.Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation. // J. Sound and Vibrat. – 2001, V. 246., № 3, – pp. 491-504.
7. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Critical states of thin ellipsoidal shells in simple and compound rotations. // J. Sound and Vibrat. – 2004. – Vol. 270. – P. 323-339.
8. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 3565-3583.
9. Sivadas K.R. Vibration analysis of prestressed rotating thick circular conical shell // J. Sound and Vibrat. – 1995. – V. 186. №1. – P. 99–109.
10. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

Надійшло до редакції 19.10.2006 р.

УДК 534-21

Медведєв К.В., канд. фіз.-мат. наук,  
 Шульга В.М., канд. фіз.-мат. наук,  
 Корнієнко В.Ф., канд. техн. наук,  
 Ластівка І.О., канд. техн. наук

## ПОШИРЕННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ КІЛОГЕРЦЕВОГО ДІАПАЗОНУ В ФІБРИЛЬНИХ НИТКАХ

Акустичні методи дослідження фізико-механічних властивостей полімерних і композитних матеріалів належать до найбільш інформативних і охоплюють широкий частотний інтервал. Ідентифікація результатів вимірювань, що спирається на фізичні моделі хвильових процесів, залежить від ступеня неоднорідності матеріалу і частот збурення. Теорія поширення акустичних хвиль кілогерцевого діапазону в порожнистих фібрильних нитках, викладена у даній статті, ґрунтується на принципі гомогенізації композитних матеріалів і теорії пружності анізотропного твердого тіла. Представлені теоретичні оцінки швидкостей поширення хвиль базуються на обґрунтованих і апробованих моделях і дозволяють рекомендувати пропоновану методіку для науково-дослідної роботи по вивченню механічних властивостей ниток в практичній роботі із створення і вдосконалення неруйнівних методів контролю якості.

Пустотіла фібрильна нитка є порожнистим круговим циліндром з внутрішнім радіусом  $r_1$  і зовнішнім радіусом  $r_2$  ( $r_2 - r_1 = 2h$  – товщина циліндру,  $r_2 + r_1 = 2r_0$  – діаметр його серединної поверхні). Введемо циліндричну систему координат  $or\theta z$  так, щоб вісь  $oz$  співпадала з віссю циліндричної порожнини. При незалежних від окружної координати  $\theta$  коливаннях фізичні компоненти вектора переміщень  $u_r$ ,  $u_z$  і тензора напружень  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{rz}$  задовольняють рівнянням

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (1)$$

і матеріальним співвідношенням

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{\theta\theta} &= c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{22} \frac{u_r}{r} + c_{23} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{23} \frac{u_r}{r} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \sigma_{rz} &= c_{55} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Континуальне представлення деформації матеріалу фібрильної нитки справедливе при дослідженні хвиль, довжини яких значно перевищують розміри неоднорідності її структури [2, 3]. При такому підході макроскопічні пружні модулі  $c_{ij}$  і густина  $\rho$  композиції як однорідного матеріалу визначаються теоретично [1, 2] по властивостях компонент і геометричній структурі.

Співвідношення (1) і (2) виконуються в усіх внутрішніх точках порожнистого циліндру  $r_0 - h < r < r_0 + h$ . На вільних від зовнішніх впливів бокових поверхнях  $r = r_0 \pm h$  мають місце однорідні граничні умови

$$\sigma_{rr}(r_0 \pm h, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_0 \pm h, z, t) = 0. \quad (3)$$

Для акустичної хвилі, що поширюється вздовж осі  $oz$ , слід скористатися виразами

$$\{u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)\} = r_0 \operatorname{Re}\{u_1(r/r_0), iu_3(r/r_0)\} \exp i(kz - \omega t) \quad (4)$$

для переміщень  $u_r$  і  $u_z$ . Кругова частота  $\omega$  і постійна поширення  $k$  пов'язані з фазовою швидкістю  $v_\phi$  формулою  $kv_\phi = \omega$  (при дійсному хвильовому числі  $k$ ). Введемо безрозмірні величини

$$y = \frac{r}{r_0}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{00}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \varepsilon = \frac{h}{r_0}, \quad \bar{k} = kr_0, \quad \bar{\omega} = \omega r_0 \sqrt{\rho_{00}/c_{00}},$$

де параметри  $c_{00}$  і  $\rho_{00}$  мають розмірність пружної сталості і густини.

Після підстановки формул (4) в співвідношення (2), (1) і (3) одержимо систему двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} c_{11} \left( u_1'' + \frac{1}{y} u_1' \right) + \left( \bar{\rho} \bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 c_{55} - \frac{c_{22}}{y^2} \right) u_1 + \bar{k} (c_{13} + c_{55}) u_3' + \bar{k} \frac{c_{13} - c_{23}}{y} u_3 = 0, \\ c_{55} \left( u_3'' + \frac{1}{y} u_3' \right) + \left( \bar{\rho} \bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 c_{33} \right) u_3 - \bar{k} (c_{13} + c_{55}) u_1' - \bar{k} \frac{c_{23} + c_{55}}{y^2} u_1 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

і граничні умови при  $y = 1 \pm \varepsilon$

$$c_{11} u_1' + \frac{c_{12}}{y} u_1 + \bar{k} c_{13} u_3 = 0, \quad u_3' - \bar{k} u_1 = 0. \quad (6)$$

В формулах (5), (6) і далі риска зверху в безрозмірних величинах  $\bar{c}_{ij}$  та  $\bar{\rho}$  опущена (на використання безрозмірних  $\bar{c}_{ij}$  та  $\bar{\rho}$  вказують безрозмірні  $\bar{\omega}$  і  $\bar{k}$ ), штрихом позначені похідні по змінній  $y$ .

У рівняннях (5) змінна  $y$  змінюється в межах  $1 - \varepsilon < y < 1 + \varepsilon$  і тому їх коефіцієнти є обмеженими функціями з обмеженими похідними будь-якого порядку. Розв'язок такої системи рівнянь в інтервалі  $1 - \varepsilon < y < 1 + \varepsilon$  буде аналітичним і його можна подати [3, 4] степеневими рядами

$$u_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(y-1)^n, \quad u_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(3)}(y-1)^n. \quad (7)$$

Підставимо ряди (7) в рівняння (5), зберемо коефіцієнти при однакових ступенях  $(y-1)^n$  і прирівняємо їх нулеві. В результаті отримаємо алгебраїчні залежності

$$\begin{aligned} & (n+2)(n+1)c_{11}A_{n+2}^{(1)} + (2n+1)(n+1)c_{11}A_{n+1}^{(1)} + (\rho\bar{\omega}^2 - c_{22} + n^2c_{11} - c_{55}\bar{k}^2)A_n^{(1)} + \\ & + (\rho\bar{\omega}^2 - c_{55}\bar{k}^2)(2A_{n-1}^{(1)} + A_{n-2}^{(1)}) + (n+1)(c_{13} + c_{55})\bar{k}A_{n+1}^{(3)} + \\ & + (c_{13} - c_{23} + 2nc_{13} + 2nc_{55})\bar{k}A_n^{(3)} + (nc_{13} + nc_{55} - c_{23} - c_{55})\bar{k}A_{n-1}^{(3)} = 0, \\ & (n+2)(n+1)c_{55}A_{n+2}^{(3)} + (2n+1)(n+1)c_{55}A_{n+1}^{(3)} + (\rho\bar{\omega}^2 - c_{33}\bar{k}^2 + n^2c_{55})A_n^{(3)} + \\ & + (\rho\bar{\omega}^2 - c_{33}\bar{k}^2)(2A_{n-1}^{(3)} + A_{n-2}^{(3)}) - (n+1)(c_{13} + c_{55})\bar{k}A_{n+1}^{(1)} - \\ & - (c_{23} + c_{55} + 2nc_{13} + 2nc_{55})\bar{k}A_n^{(1)} - (c_{23} - c_{13} + nc_{13} + nc_{55})\bar{k}A_{n-1}^{(1)} = 0 \\ & A_{-1}^{(j)} = A_{-2}^{(j)} = 0, \quad j = 1, 3, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

З вигляду формул (8) випливає, що вони дозволяють знайти всі постійні  $A_2^{(j)}$ ,  $A_3^{(j)}$ , ... через чотири перших  $A_0^{(1)}$ ,  $A_0^{(3)}$ ,  $A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(3)}$  і виконати граничні умови (6). З цією метою підставимо в них ряди (7) і зберемо члени при однакових ступенях  $(y-1)^n$  рівних  $(\pm\varepsilon)^n$  при  $y = 1 \pm \varepsilon$ . Після їх попарного додавання і віднімання одержимо рівності

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \{c_{11}[(2n+1)A_{2n+1}^{(1)} + 2nA_{2n}^{(1)}] + c_{12}A_{2n}^{(1)} + c_{13}\bar{k}(A_{2n}^{(3)} + A_{2n-1}^{(3)})\} = 0, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \{c_{11}[(2n+2)A_{2n+2}^{(1)} + (2n+1)A_{2n+1}^{(1)}] + c_{12}A_{2n+1}^{(1)} + c_{13}\bar{k}(A_{2n+1}^{(3)} + A_{2n}^{(3)})\} = 0, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} [(2n+1)A_{2n+1}^{(3)} - \bar{k}A_{2n}^{(1)}] = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} [(2n+2)A_{2n+2}^{(3)} - \bar{k}A_{2n+1}^{(1)}] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо тепер з формул (8) визначити постійні  $A_2^{(j)}$ ,  $A_3^{(j)}$ , ... через чотири перших  $A_0^{(1)} \equiv X_1$ ,  $A_0^{(3)} \equiv X_2$ ,  $A_1^{(1)} \equiv X_3$ ,  $A_1^{(3)} \equiv X_4$  і підставити їх в граничні суми (9), то одержимо систему чотирьох однорідних рівнянь

$$\sum_{\alpha=1}^4 m_{\alpha\beta}(c_{ij}, \rho, \varepsilon, \bar{k}, \bar{\omega}) X_{\alpha} = 0, \quad \beta = 1, \dots, 4. \quad (10)$$

Умова сумісності цієї системи

$$\det\{m_{\alpha\beta}(c_{ij}, \rho, \varepsilon, \bar{k}, \bar{\omega})\} = 0, \quad (11)$$

є дисперсійним співвідношенням, що дозволяє знайти залежність постійної поширення  $\bar{k}$  від частоти  $\bar{\omega}$ , а потім фазову  $v_{\phi} = \frac{\bar{\omega}}{k} \sqrt{\frac{\rho_{00}}{c_{00}}}$  та

групову  $v_{gp} = \frac{d\bar{\omega}}{dk} \sqrt{\frac{\rho_{00}}{c_{00}}}$  швидкості (при дійсних  $\bar{k}$ ). Форма хвилі по радіальній координаті  $r$  визначається по відповідному нетривіальному розв'язку однорідної системи алгебраїчних рівнянь (10), рекурентних залежностях (8), рядах (7), формулах (4) і (2).

Викладений розв'язок має таку ж загальність, точність і можливість аналізу спектральних властивостей циліндричного ортотропного порожнистого циліндру, як і розв'язок для ізотропного або трансверсально-ізотропного циліндру в циліндричних функціях. Єдине ускладнення виникає при великих частотах і великих значеннях постійної поширення, коли обчислювальний процес по описаному алгоритму може стати нестійким. Практично це частоти високого мегагерцевого діапазону.

Зупинимося далі на аналізі дисперсійного співвідношення (11) для циліндрів з діаметрами малих хвильових розмірів (при  $\bar{k} \ll 1$ ).

З структури граничних умов (9) випливає, що в цьому випадку в рядах (7) необхідно утримувати три перших члени. Після необхідних перетворень дисперсійне співвідношення (11) набуває вигляду

$$\det \begin{bmatrix} c_{12}, & c_{13}\bar{k}, & c_{11}, & 0 \\ c_{22} + c_{55}\bar{k}^2 - \rho\bar{\omega}^2, & c_{23}\bar{k}, & c_{12}, & -c_{55}\bar{k} \\ \bar{k}, & 0, & 0 & -1 \\ (c_{23} + c_{55})\bar{k}, & c_{33}\bar{k}^2 - \rho\bar{\omega}^2, & c_{13}\bar{k}, & -c_{55} \end{bmatrix} = 0,$$

звідки випливає

$$c_{11}\rho^2\bar{\omega}^4 + [c_{12}^2 - c_{11}c_{22} + (c_{13}^2 - c_{11}c_{33})\bar{k}^2] \rho\bar{\omega}^2 + (c_{11}c_{22}c_{33} - c_{33}c_{12}^2 - c_{22}c_{13}^2 - c_{11}c_{23}^2 + 2c_{12}c_{23}c_{13})\bar{k}^2 = 0. \quad (12)$$

Якщо в рівнянні (12) перейти до розмірних величин, виразити пружні модулі  $c_{ij}$  за допомогою технічних змінних [1, 2], і замінити хвильове число через частоту і фазову швидкість, тоді одержимо залежність

$$v_\phi^2 = \frac{E_3}{\rho} \frac{1 - \omega^2 r_0^2 \frac{\rho}{E_2}}{1 - \omega^2 r_0^2 \frac{\rho}{E_2} (1 - v_{23}v_{32})}.$$

Оскільки остання формула справедлива при  $\omega^2 r_0^2 \ll 1$ , то розкладаючи останній вираз в ряд по  $\omega^2 r_0^2$  для фазової швидкості  $v_\phi$ , одержимо

$$v_\phi = \sqrt{E_3/\rho} \left( 1 - \frac{1}{2} \omega^2 r_0^2 \frac{\rho}{E_2} v_{23}v_{32} \right). \quad (13)$$

Звідси випливає, що при низьких частотах в нитці поширюється повздовжня хвиля зі стержневою швидкістю  $v_c = \sqrt{E_3/\rho}$ .

Оцінимо величину поправочного члена в формулі (13). При  $f = 10^6$  Гц,  $r_0 = 10^{-6}$  м,  $\sqrt{E_2/\rho} = 10^3 \frac{M}{c}$ ,  $v_{23} = v_{32} = 0,4$  цей член має порядок  $10^{-6}$ , тобто його вплив проявляється лише в мегагерцевому діапазоні. При таких частотах формула  $v_c = \sqrt{E_3/\rho}$  незастосовна. В такому випадку в граничних умовах (9) і рекурентних залежностях (8) необхідно утримувати більшу кількість невідомих  $A_n^{(j)}$ , що потребує застосування комп'ютерних засобів.

Для композиції, матриця якої армована однонаправленою системою волокон, по теорії сумішей [1, 2] макроскопічний повздовжній модуль Юнга і густина визначаються за формулами

$$E_3 = c_m E_m + c_f E_f, \quad \rho = c_m \rho_m + c_f \rho_f. \quad (14)$$

Властивості матриці позначені через  $E_m$ ,  $v_m$ ,  $\rho_m$ , властивості армуючих волокон – через  $E_f$ ,  $v_f$ ,  $\rho_f$ , а їх об'ємний зміст – через  $c_m$  і  $c_f$  ( $c_m + c_f = 1$ ) відповідно.

Використовуючи вираз (14) для ефективного значення модуля Юнга і густини фібрильної нитки, формулу  $v_C = \sqrt{E_3/\rho}$  приведемо до остаточного вигляду

$$v_C = \sqrt{(E_m c_m + E_f c_f) / (\rho_m c_m + \rho_f c_f)}. \quad (15)$$

В реальних умовах акустична хвиля поширюється із затуханням внаслідок поглинання енергії, механізми якого різноманітні і важко піддаються послідовному кількісному опису. Будемо виходити з найпростішого способу врахування дисипативних властивостей матеріалу за допомогою комплексних модулів пружності для матриці і наповнювача

$$E_m = E'_m(1 - i\delta_m), \quad 0 \leq \delta_m \ll 1; \quad E_f = E'_f(1 - i\delta_f), \quad 0 \leq \delta_f \ll 1.$$

Тоді з рівняння руху площини рівних фаз плоскої хвилі і формули (15) для швидкості хвилі  $v'_C$  і коефіцієнта затухання  $\alpha$  одержимо вирази

$$v'_C = \sqrt{\frac{E'_m c_m + E'_f c_f}{\rho_m c_m + \rho_f c_f}}, \quad \alpha = \frac{\omega}{2v'_C} = \frac{\delta_m E'_m c_m + \delta_f E'_f c_f}{E'_m c_m + E'_f c_f}.$$

Оскільки для швидкостей і коефіцієнтів затухання хвиль в компонентах справедливі залежності

$$v'_m = \sqrt{\frac{E'_m}{\rho_m}}, \quad \alpha_m = \frac{\omega \delta_m}{2v'_m}, \quad v'_f = \sqrt{\frac{E'_f}{\rho_f}}, \quad \alpha_f = \frac{\omega \delta_f}{2v'_f},$$

то макроскопічний коефіцієнт затухання хвилі в композиції можна виразити через коефіцієнти затухання хвиль  $\alpha_m$  і  $\alpha_f$  в компонентах

$$\alpha = \frac{1}{v'_C} = \frac{\alpha_m v'_m E'_m c_m + \alpha_f v'_f E'_f c_f}{E'_m c_m + E'_f c_f}.$$

В таблиці наведені розраховані за формулою (15) значення швидкості поширення акустичної хвилі в фібрильній нитці з полікапроаміду (індекс  $m$ ), що наповнений поліетиленом (індекс  $f$ ).

Таблиця 1

$c_f$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
$v_C$	2667	2641	2616	2589	2562	2535	2508	2481
	1143	1140	–	1132	–	1124	–	1116

Верхній рядок відповідає орієнтованому випадку, коли властивості полікапроаміду і поліетилену приймають значення  $E_m = 8031 \text{ МПа}$ ,  $\rho_m = 1140 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_f = 5000 \text{ МПа}$ ,  $\rho_f = 980 \text{ кг/м}^3$ , а нижній рядок – неорієнтованому випадку, коли  $E_m = 1500 \text{ МПа}$ ,  $\rho_m = 1140 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_f = 1140 \text{ МПа}$ ,  $\rho_f = 980 \text{ кг/м}^3$ .

1. Малмейстер А.К., Талууж В.П., Тетере Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
2. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т. Т.1. Механика материалов. – Киев: Наукова думка, 1982. – 368 с. Т.2. Механика элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1983. – 464 с.
3. Механика композитов. В 12-и т. Т.9. Динамика элементов конструкций. – Киев: “А.С.К.”, 1999. – 379 с.
4. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре. – Прикл. механика. – 1974. – 10, № 9. – С. 14-18.

*Надійшло до редакції 14.12.2006 р.*



УДК 531.31

Гончаренко М.В., канд. техн. наук

## ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ В ЗОНАХ КОМБІНАЦІЙНИХ РЕЗОНАНСІВ ПРИ СТОХАСТИЧНОМУ ПАРАМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Динамічне навантаження часто являється визначальним при проектуванні будівель і споруд. При вивченні еволюції динамічних станів при зміні зовнішніх впливів важливою проблемою є дослідження стійкості цих станів. Зокрема при параметричному динамічному навантаженні конфігурація зон стійкості має складний вигляд, а резонанси, що збуджуються, іноді важко прогнозуються.

Дослідження динаміки систем при стохастичному навантаженні мають значно меншу довершеність в порівнянні з подібними задачами при детермінованому навантаженні. Хоч випадковий характер є досить розповсюджений у динамічних процесах. При стохастичному параметричному навантаженні можуть проявлятися різні типи коливань, що характеризуються складними резонансами, зривом коливальних режимів, іншими ефектами.

Природним узагальненням періодичного параметричного впливу є модель стаціонарного випадкового впливу. Спочатку виникає проблема вибору визначення стійкості динамічних станів стохастичних систем. Найбільш поширеними є два визначення стійкості: стійкість відносно моментних функцій та стійкість по імовірності. Перше визначення дещо відрізняється від традиційного визначення стійкості, але за допомогою такого підходу можна в першому наближенні оцінити динамічну стійкість досить широкого класу об'єктів. Визначення стійкості по імовірності ближче до класичного визначення динамічної стійкості в детерміністичній постановці. Однак побудова областей за цим визначенням є складною задачею. Повною мірою таке дослідження може бути здійснене тільки для модельних задач.

Відомо [2], що в зонах простих параметричних резонансів критерій стійкості відносно моментних функцій більш жорсткий, ніж критерій стійкості по імовірності. У даній роботі проводиться порівняння умов динамічної стійкості у зонах комбінаційних резонансів.

Нехай дискретна модель деякої континуальної системи, побудована, наприклад, методом скінченних елементів, записується у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь

$$M \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + C \frac{d \bar{u}}{dt} + K_0 \bar{u} + \psi(t) K_G \bar{u} = 0, \quad (1)$$

де  $\bar{u}(t)$  –  $n$ -мірний вектор-стовпець з координатами  $u_i(t)$ ;  $M$  – матриця мас;  $C$  – матриця демпфірування;  $K$  – матриця жорсткості;  $K_g$  – матриця геометричної жорсткості;  $\psi(t)$  – стаціонарний випадковий процес. За допомогою методу нормальних координат від системи (1) робиться перехід до системи рівнянь у нормальних координатах:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_{0i} \dot{y}_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \mu \psi(t) \sum_{k=1}^n g_{ik} y_k(t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

де  $\bar{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}^T$  – вектор узагальнених координат;  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – модальні параметри згасання;  $\omega_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – частоти власних коливань системи;  $\mu$  – інтенсивність параметричного навантаження;  $\{g_{ik}\}_{i,k=1}^n$  – компоненти перетвореної матриці геометричної жорсткості.

Пряме застосування методу усереднення при побудові границь динамічної стійкості системи (2) пов'язане зі значними принциповими й технічними труднощами. Спрощення задачі може бути пов'язане з типом стаціонарного процесу  $\psi(t)$ . Якщо цей процес достатньо вузькосмуговий відносно пружної системи, що розглядається, то при побудові меж динамічної стійкості мають місце певні спрощення.

Якщо ненульові значення спектральної щільності  $S(\omega)$  випадкового процесу  $\psi(t)$  розташовані у смузі  $\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$ , де  $\omega_0$  – несуча частота,  $\Delta\omega$  – достатньо мале число, то в першому наближенні зони динамічної нестійкості визначаються такими двома випадками [2].

1. При  $\omega_0 = 2\omega_{0i}$  (простий головний резонанс)

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_{0i} \dot{y}_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \mu_2 \psi(t) g_{ii} y_i(t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

2. При  $\omega_0 = \omega_{0i} + \omega_{0j}$  та  $g_{ij} \cdot g_{ji} > 0$  (комбінаційний резонанс сумарного типу) або  $\omega_0 = |\omega_{0i} - \omega_{0j}|$  та  $g_{ij} \cdot g_{ji} < 0$  (комбінаційний резонанс різниці частот)

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_{0i} \dot{y}_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \mu_2 \psi(t) [g_{ii} y_i(t) + g_{ij} y_j(t)] &= 0, \\ \ddot{y}_j(t) + 2\xi_j \omega_{0j} \dot{y}_j(t) + \omega_{0j}^2 y_j(t) + \mu_2 \psi(t) [g_{ji} y_i(t) + g_{jj} y_j(t)] &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Для першого випадку відомо [2], що умова динамічної стійкості відносно моментних функцій забезпечує подвійний запас по відношенню до межі стійкості по імовірності.

Досліджується комбінаційний резонанс сумарного типу, тобто вважається, що несуча частота  $\omega_0$  спектральної щільності  $S(\omega)$  випадкового параметричного збудження  $\mu\psi(t)$  задовольняє умові  $\omega_0 = \omega_{0i} + \omega_{0j}$ .

Розглядається система рівнянь (4). Динамічні змінні зображується у полярних координатах

$$y_i(t) = A_i(t)\cos\theta_i(t), \quad y_j(t) = A_j(t)\cos\theta_j(t), \quad (5)$$

де  $A_i(t)$ ,  $A_j(t)$  – амплітуди коливального руху;  $\theta_i(t)$ ,  $\theta_j(t)$  – фази коливального руху.

Вважається, що фази  $\theta_i(t)$  та  $\theta_j(t)$  зображуються у вигляді

$$\theta_i(t) = \omega_{0i}t + \chi_i(t), \quad \theta_j(t) = \omega_{0j}t + \chi_j(t), \quad (6)$$

де  $\chi_i(t)$ ,  $\chi_j(t)$  – початкові фази. У виразах (5) та (6) функції  $A_i(t)$ ,  $A_j(t)$ ,  $\chi_i(t)$  та  $\chi_j(t)$  вважаються повільними змінними.

Виходячи із зображення (5), заміна змінних у методі усереднення задається перетворенням фазових координат  $y_i(t)$ ,  $\dot{y}_i(t)$ ,  $y_j(t)$ ,  $\dot{y}_j(t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) системи (4):

$$\begin{aligned} y_i(t) &= A_i(t)\cos\theta_i(t), & y_j(t) &= A_j(t)\cos\theta_j(t), \\ \dot{y}_i(t) &= -\omega_{0i}A_i(t)\sin\theta_i(t), & \dot{y}_j(t) &= -\omega_{0j}A_j(t)\sin\theta_j(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Ця заміна змінних приводить систему (4) до системи рівнянь у стандартній формі відносно амплітуд та початкових фаз:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= -2\xi_i\omega_{0i}A_i\sin^2\theta_i + \mu_2\psi(t)\left[g_{ii}A_i\cos\theta_i\sin\theta_i + g_{ij}A_j\cos\theta_j\sin\theta_i\right], \\ \dot{\theta}_i &= -2\xi_i\omega_{0i}\cos\theta_i\sin\theta_i + \frac{1}{a_i}\mu_2\psi(t)\left[g_{ii}A_i\cos\theta_i\sin\theta_i + g_{ij}A_j\cos\theta_j\sin\theta_i\right], \\ \dot{A}_j &= -2\xi_j\omega_{0j}A_j\sin^2\theta_j + \mu_2\psi(t)\left[g_{jj}A_j\cos\theta_j\sin\theta_j + g_{ji}A_i\cos\theta_i\sin\theta_j\right], \\ \dot{\theta}_j &= -2\xi_j\omega_{0j}\cos\theta_j\sin\theta_j + \frac{1}{a_j}\mu_2\psi(t)\left[g_{jj}A_j\cos\theta_j\sin\theta_j + g_{ji}A_i\cos\theta_i\sin\theta_j\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Далі вводяться нові змінні  $V_i(t) = A_i^2(t)$ ,  $V_j(t) = A_j^2(t)$ . Відносно цих змінних будується система вкорочених стохастичних рівнянь у розумінні Стратоновича. При цій побудові мається на увазі, що при обчисленні флуктуаційних поправок до коефіцієнтів знесення у формулі враховуються лише складові, що відповідають похідним по  $\theta_i$ , і не враховуються похідні по  $V_i(t)$ .

У зв'язку з цим перетворенням (8) визначається двома частотами  $\omega_{0i}$  та  $\omega_{0j}$ , при визначенні операції усереднення вкорочених стохастичних рівнянь постає питання спільного періоду. Вважається, що існують цілі числа  $n_1$  і  $n_2$ , такі, що  $n_1\omega_{01} \cong n_2\omega_{02}$ . Тоді можна показати, що по коливаннях по двох різних степенях вільності система буде мати спільний період  $T = n_1T_2 + n_2T_1$ , де  $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ . Після усереднення за період  $T$  записується вкорочені рівняння в розумінні Стратоновича відносно  $V_i(t)$ .

Якщо після цього перейти, згідно [2], до вкорочених рівнянь у розумінні Іто і застосувати операцію статистичного усереднення, то можна отримати систему детерміністичних рівнянь першого порядку відносно середніх від квадратів амплітуд:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle V_1 \rangle \\ \langle V_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\xi_i\omega_i + \frac{1}{2}g_{ii}^2S(2\omega_i) + \frac{1}{4}g_{ij}g_{ji}S^- & \frac{1}{4}g_{ij}^2S^+ \\ \frac{1}{4}g_{ji}^2S^+ & -2\xi_j\omega_j + \frac{1}{2}g_{jj}^2S(2\omega_j) + \frac{1}{4}g_{ij}g_{ji}S^- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle V_1 \rangle \\ \langle V_2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де  $S^\pm = S(\omega_i + \omega_j) \pm S(\omega_i - \omega_j)$ .

Система (9) є автономною. Стійкість тривіального розв'язку цієї системи повністю визначається властивістю коренів її характеристичних рівнянь:

$$\det \begin{bmatrix} \left( -2\xi_i\omega_i + 0.5g_{ii}^2S(2\omega_i) + \right) - \lambda & 0.25g_{ij}^2S^+ \\ +0.25g_{ij}g_{ji}S^- & \left( -2\xi_j\omega_j + 0.5g_{jj}^2S(2\omega_j) + \right) - \lambda \\ 0.25g_{ji}^2S^+ & +0.25g_{ij}g_{ji}S^- \end{bmatrix} = 0. \quad (10)$$

Таким чином, задача дослідження стійкості в середньквадратичному системі (4) зводиться до задачі на власні значення (10). Обчислюються власні значення  $\lambda_i$  при збільшенні інтенсивності випадкового навантаження  $\mu g_{ij}$ . Найменше значення  $\mu g_{ij}$ , при якому серед власних значень  $\lambda_i$  з'являється хоча б одне з додатною дійсною частиною, вважається межею області стійкості. В координатах несуча частота  $\omega$  – інтенсивність випадкового параметричного навантаження  $\mu g_{ij}$  будується межа стійкості в зоні комбінаційного резонансу.

Дослідження стійкості по ймовірності тривіального рішення системи (4) базується на тому, що всі коефіцієнти рівнянь руху однорідні функції першого порядку і тому проекція процесу вектора амплітуд на коло також представляє собою марковський процес. Вводяться нові змінні

$$\rho = \frac{1}{2} \ln(a_1^2 + a_2^2), \quad \phi = \arctg\left(\frac{a_2}{a_1}\right), \quad 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi$$

і записуються наступні рівняння Іто відносно  $\rho$  і  $\phi$ :

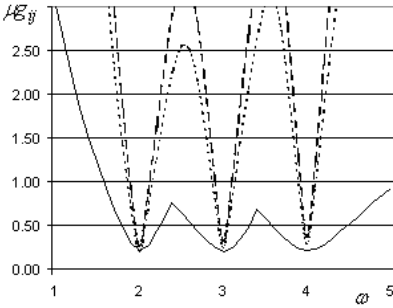
$$\begin{aligned} d\rho &= Q(\phi)dt + \Sigma(\phi)dw, \\ d\phi &= \Phi(\phi)dt + \Psi(\phi)dw, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $w(t)$  – вінерівський процес з одиничною інтенсивністю, і

$$\begin{aligned} Q(\phi) &= \lambda_1 \cos^2 \phi + \lambda_2 \sin^2 \phi \pm \frac{1}{8} k^2 S^- + \Psi^2(\phi), \\ \Phi(\phi) &= -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \sin 2\phi + \frac{1}{2} b_1 \sin 4\phi + \frac{1}{8} k^2 S^+ \cot 2\phi, \\ \Sigma^2(\phi) &= (\lambda_1 + \beta_1) \cos^4 \phi + (\lambda_2 + \beta_2) \sin^4 \phi + \frac{1}{8} k^2 S(\omega_1 \pm \omega_2) \sin^2 2\phi, \\ \Psi^2(\phi) &= \frac{1}{8} k^2 S^+ + b_1 \sin^2 2\phi, \\ \lambda_1 &= -\beta_1 + \frac{1}{8} k_{11}^2 S(2\omega_1), \quad \lambda_2 = -\beta_2 + \frac{1}{8} k_{22}^2 S(2\omega_2), \\ b_1 &= \frac{1}{8} [(\lambda_1 + \lambda_2 + \beta_1 + \beta_2) - k^2 S(\omega_1 \pm \omega_2)]. \end{aligned} \quad (12)$$

На основі першого рівняння (12) можна отримати умову асимптотичної стійкості з ймовірністю одиниця:

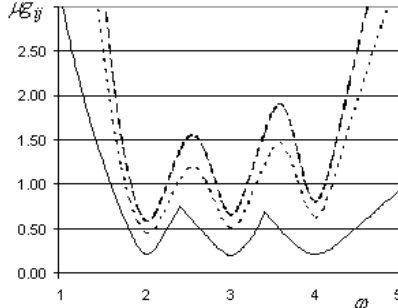
$$\lambda = E[Q(\phi)] = \int_0^{\pi/2} Q(\phi) p(\phi) d\phi < 0. \quad (13)$$



a

$$\omega_1 = 1 \text{ рад/с}; \omega_2 = 2 \text{ рад/с}; \xi = 0,05;$$

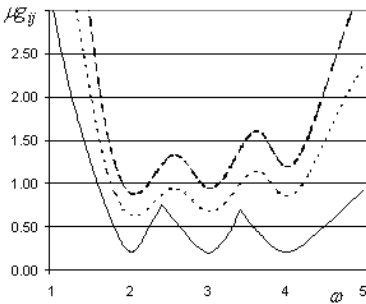
$$k = 0,01; \alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$$



б

$$\omega_1 = 1 \text{ рад/с}; \omega_2 = 2 \text{ рад/с}; \xi = 0,05;$$

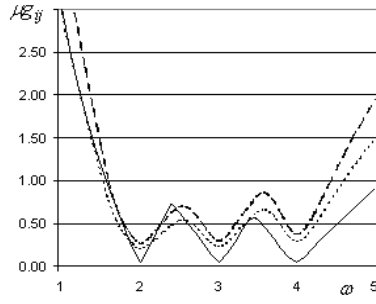
$$k = 0,05; \alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$$



в

$$\omega_1 = 1 \text{ рад/с}; \omega_2 = 2 \text{ рад/с}; \xi = 0,05;$$

$$k = 0,1; \alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$$



г

$$\omega_1 = 1 \text{ рад/с}; \omega_2 = 2 \text{ рад/с}; \xi = 0,01;$$

$$k = 0,01; \alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$$

Рис.1. Межі областей стійкості

Якщо величина  $\lambda_j$ , що визначена відповідно (13), додатня, то система нестійка [3]. Умова динамічної стійкості має наступний вигляд

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \coth \left[ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\Delta_0)^{1/2}} \alpha_1 \right] \right\} + \frac{1}{8} k_{12} k_{21} S^-, \quad (b_1 > 0),$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \coth \left[ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(-\Delta_0)^{1/2}} \alpha_2 \right] \right\} + \frac{1}{8} k_{12} k_{21} S^- \quad (b_1 < 0), \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \coth \left[ \frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{|k_{12} k_{21}| S^+} \right] \right\} + \frac{1}{8} k_{12} k_{21} S^- \quad (b_1 = 0),$$

де

$$\alpha_1 = \operatorname{arch} \left( \frac{K}{2|k_{12} k_{21}| S^+} \right), \quad \alpha_2 = \arccos \left( \frac{K}{2|k_{12} k_{21}| S^+} \right),$$

$$K = k_{11}^2 S(2\omega_1) + k_{22}^2 S(2\omega_2) \mp 2k^2 S^-, \quad \Delta_0 = \frac{1}{64} \left[ K^2 - 4k^4 (S^+)^2 \right].$$

На основі наведених формул побудовані області стійкості при різних характеристиках параметричного навантаження.

На рисунку суцільною лінією показана межа стійкості при гармонічному параметричному навантаженні, пунктирною – по імовірності, штриховою – відносно моментних функцій. Як видно, незалежно від параметрів випадкового навантаження і параметра затухання межа стійкості відносно моментних функцій знаходиться вище за межу стійкості по імовірності, отже є більш жорсткою умовою. Але щоб повністю проаналізувати таку залежність, потрібно проводити подальші дослідження.

Можна зробити попередній висновок, що задавши як критерій проектування межу стійкості в середньоквадратичному, проектувальник забезпечує деякий запас відносно межі стійкості по імовірності.

1. Ворчак М.В. Параметричний резонанс в задачах про коливання труб при випадкових пульсаціях тиску внутрішнього потоку // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 71. — К.: КНУБА, 2002. — С. 107-114.
2. Диментберг М.Ф. Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. — М.: Наука, 1989. — 175с.
3. Ariaratnam S.T., Wei-Chau Lyapunov Exponents and Stochastic Stability of Two-Dimensional Parametrically Excited Random Systems // ASME Journal of Applied Mechanics. — 1993. — №60(3). — Pp.667-682.

Надійшло до редакції 13.12.2006 р.

УДК 539.3

Соловей М.О., канд. техн. наук

## **МОДИФІКОВАНИЙ ПРОСТОРОВИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТОНКИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК**

Розглянута методика підвищення універсальності просторового скінченного елемента в задачах нелінійного деформування та стійкості тонких неоднорідних оболонок.

При розрахунках оболонкових конструкцій звичайно застосовують теорії, що розроблені для окремого типу оболонок, наприклад, для оболонок з канонічними формами серединної поверхні, змінної товщини, ребристих, з отворами, з виїмками, з багатошаровою структурою матеріалу. З кожним видом конструктивних особливостей пов'язані свої відмінності у напружено-деформованому стані (НДС) оболонок. Це потребує корегування розв'язувальних рівнянь для відповідного варіанта теорії оболонок. Одночасне врахування різноманітних геометричних особливостей та неоднорідностей матеріалу призводить до значних ускладнень і необхідності розробки нових розрахункових методик, що призначені для оболонок більш загального типу.

Сучасним підходом до розробки нових методів розрахунків є застосування співвідношень тривимірної теорії пружності, що дозволяє ефективно досліджувати тонкі оболонки з різноманітними конструктивними особливостями. Найбільш успішно ця проблема розв'язується методом скінчених елементів (МСЕ) на основі використання для неоднорідних оболонок універсальних просторових скінчених елементів (СЕ) [1-4]. В роботах [5-13] запропоноване та реалізоване розширення універсальності просторового СЕ на статичні задачі нелінійного деформування, стійкості та позакритичної поведінки тонких неоднорідних оболонок при навантаженні зовнішніми силами та нерівномірним об'ємним нагрівом. Під неоднорідністю оболонки розуміються: 1) геометричні особливості у вигляді неперервно-змінної та ступінчато-змінної товщини, зломи серединної поверхні та отвори; 2) неоднорідність матеріалу оболонки за товщиною та в плані у вигляді комбінації різних багатошарових пакетів. При розробці скінченноелементної моделі (СЕМО) неоднорідної оболонки застосований ефективний підхід апроксимації тонкої оболонки за товщиною одним просторовим скінченим елементом.



Геометрично оболонка представляється як тривимірне тіло, що обмежене двома граничними і контурною поверхнями (рис. 1). Розглядаються тонкі змінної товщини багат шарові оболонки складної геометричної форми, які можуть бути підкріплені ребрами та накладками або послаблені виїмками й отворами, мати зломи серединної поверхні. Ділянки оболонки, на яких розміщені обшивка, ребра, накладки та виїмки, розглядаються як ділянки неперервно-змінної або ступінчасто-змінної товщини. Обшивка оболонки, ребра та накладки можуть складатися з довільного числа шарів змінної товщини, що поєднані між собою в єдиний пакет без проковзування та відриву по поверхнях контактів. У загальному випадку в кожному шарі матеріал може бути анізотропним та різним.

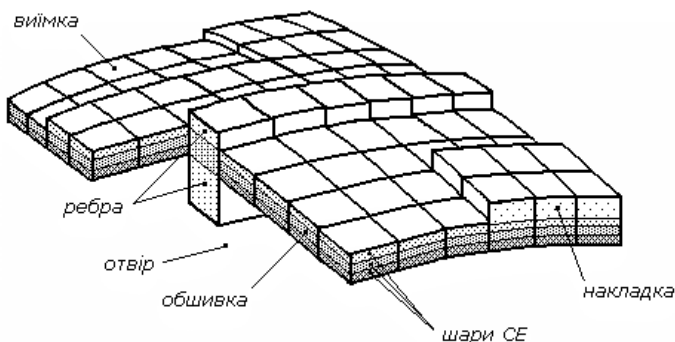


Рис. 1. Фрагмент скінченноелементної моделі неоднорідної оболонки

Дослідження процесів нелінійного деформування неоднорідних оболонок у даній роботі виконується на основі загальної лагранжевої постановки варіаційної задачі у приростах [14], коли траєкторія деформацій та вектора напружень будується за компонентами прирощень скінченних деформацій та прирощень напружень у базисі лагранжевої (супутньої) системи координат. НДС тонкої оболонки на всіх кроках її навантаження розглядається з точки зору геометрично нелінійних співвідношень тривимірної теорії термопружності з урахуванням усіх нелінійних членів і компонент тензорів деформацій та напружень. Використана модель пружного нелінійно деформівного суцільного середовища при великих переміщеннях і малих деформаціях, компоненти яких є лінійними функціями напружень. Матеріали шарів оболонки розглядаються як лінійно-пружні, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля-Неймана [15].

Використовуючи класифікацію матеріалів, що прийнята в [16], розглядаються як однорідні, так і неоднорідні матеріали. У запропонованій просторовій скінченноелементній моделі оболонки (СЕМО) ці неоднорідності зведені до "дискретних", що структуруються як за товщиною, так і у плані [11]. Прийнято, що в загальному випадку пружні властивості анізотропних матеріалів шарів скінченних елементів оболонки за трьома напрямками (вздовж товщини та у плані від елемента до елемента) змінюються ступінчато. Звідси випливає припущення про незмінність в об'ємі скінченного елемента пружних властивостей матеріалів шарів. Для моделювання властивостей неоднорідного матеріалу оболонки використовуються ізотропні, трансверсально-ізотропні та ортотропні матеріали, які є найбільш розповсюдженими типами моделей конструктивних матеріалів. У кожному окремому СЕ головні осі трансверсально-ізотропних та ортотропних матеріалів шарів можуть розмішуватись на серединній поверхні кожного шару під довільним кутом до місцевих осей [11]. Таким чином, при структуруванні неоднорідностей матеріалу є можливість виконувати апроксимацію криволінійної анізотропії матеріалу в шарах оболонки.

Застосована неklasична гіпотеза деформівної прямої, яку визначаємо таким чином: пряма у напрямку товщини оболонки до деформування залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Ця пряма не обов'язково є нормаллю до серединної поверхні оболонки. Розподіл переміщень в напрямку товщини прийнятий лінійним, що є загально прийнятим припущенням у теорії тонких оболонок. Прийнята кінематична гіпотеза при певних обмеженнях на властивості матеріалів шарів дає достатньо достовірні результати в задачах стійкості та коливань тонких багатошарових оболонок [3].

Розглядається усталений температурний процес, при якому температурне поле за об'ємом оболонки вважається відомою та незалежною від НДС функцією координат. Таким чином, вихідна задача термопружності розглядається у квазістатичній постановці [15]. Розподіл температури за товщиною кожного шару оболонки прийнятий лінійним. Тому, як наслідок, ця залежність за товщиною багатошарового пакета має вигляд ламаної, що дає можливість моделювати нелінійні закони розподілу температури в об'ємі оболонки.

Дія на оболонку різних статичних силових і температурних полів розглядається як єдиний процес навантаження. При розв'язанні окремих задач задаються відповідні залежності між загальним параметром навантаження та параметрами силових і температурних полів.

При отриманні розв'язувальних рівнянь для неоднорідних оболонок існують труднощі врахування спільної роботи елементів конструкції різної мірності. Наприклад, для ребристих оболонок застосовується декілька способів врахування спільної роботи системи обшивка-ребра. Заміна ребристої оболонки гладкою конструктивно-ортотропною призводить до використання рівнянь анізотропних або ортотропних оболонок [17]. Такий підхід застосовується в тих випадках, коли напівхвиля в отримуваних формах втрати стійкості припадає на декілька ребер при їх відносно малій жорсткості. Більш узагальненим є спосіб, у якому враховується дискретне розташування ребер. У цьому випадку ребриста оболонка може розглядатись на основі наступних підходів: як стержнева система, що приєднана до обшивки; як обшивка, що підкріплена дискретно розміщеними ребрами; як оболонка ступінчато-змінної товщини.

При розрахунках тонких ребристих оболонок, у яких використовуються просторові СЕ, застосовуються такі два підходи:

1) обшивка та підкріплюючі її конструктивні елементи (ребра та накладки) моделюються за товщиною декількома СЕ, що звичайно визнається неекономічним [1];

2) гладкі ділянки обшивки та ділянки ступінчато-змінної товщини оболонки моделюються за товщиною одним просторовим СЕ, який може збільшувати свою товщину та розташовуватися ексцентрично відносно серединної поверхні обшивки [5].

Другий спосіб використовується в роботі для підвищення універсальності просторового СЕ і за рахунок цього – для розширення кола досліджуваних оболонок. У розробленому методі запропоноване врахування не тільки ступінчатого збільшення товщини СЕ, а й ступінчатого її зменшення. Це дозволяє за єдиною розрахунковою схемою враховувати наявність в оболонці не тільки одно- та двосторонніх ребер і накладок, а й одно- та двосторонніх виїмок і каналів. Чисельне вивчення й обґрунтування такого способу врахування ступінчато-змінної товщини оболонок у задачах міцності та стійкості при дії силових навантажень представлено в роботах [5, 6, 10, 13], при дії термосилових навантажень – в [7-9, 12, 13].

Побудова скінченноелементної моделі неоднорідної оболонки виконується з застосуванням “модифікованого” СЕ (СЕМ) (рис. 2, а), який розроблений на основі відомого (“стандартного”) ізопараметричного просторового СЕ з полілінійними функціями форми [18]. Полілінійний закон зміни координат в об'ємі СЕ визначається як

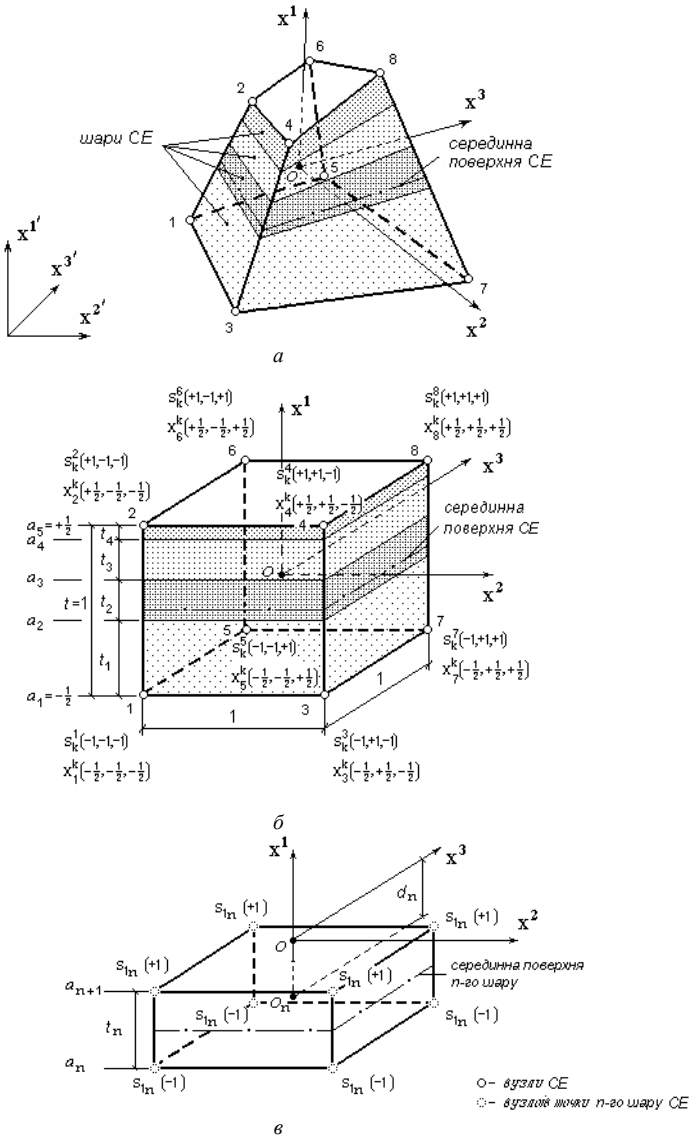


Рис. 2. Багатшаровий просторовий SE оболонки: а) геометрична форма; б) топологічна модель; в) параметри  $n$ -го шару

$$x^{i'}(x^k) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left( s^{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right) x_{s_1 s_2 s_3}^{i'}, \quad (1)$$

де  $x^{i'}(x^k)$  – глобальні декартові координати точки СЕ;  $x_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$  – задані глобальні декартові координати вузлів СЕ;  $x^k$  – місцеві нормалізовані координати точки СЕ;  $x_{s_1 s_2 s_3}^k = \pm \frac{1}{2}$  – місцеві нормалізовані координати вузлів СЕ (рис. 2, б);  $s_k = \text{sign}(x_{s_1 s_2 s_3}^k)$  – умовні (сіткові) лагранжеві координати вузлів СЕ.

Перетворення скінченного елемента обшивки (СЕО) (шестигранник  $ABCDEF GH$ ) у СЕМ зі зміненими розмірами (шестигранник  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{G}\tilde{H}$ ) виконується вздовж осі  $x^1$  за товщиною обшивки (рис. 3, а).

Прийmemo наступні позначення (рис. 3):  $t_{s_2 s_3}$  та  $\tilde{t}_{s_2 s_3}$  – довжини ребер  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$ ;  $t_{s_2 s_3}^{i'}$  та  $\tilde{t}_{s_2 s_3}^{i'}$  – проєкції довжин ребер  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$  на декартові осі  $x^{i'}$ ;  $r_{s_2 s_3}$  – відстань між серединами ребер  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$  (точками  $S$  та  $\tilde{S}$ ).

Задача перетворення СЕО в СЕМ зводиться до заміни ребер СЕО ( $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ ,  $GH$ ) на ребра СЕМ ( $\tilde{A}\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}\tilde{D}$ ,  $\tilde{E}\tilde{F}$ ,  $\tilde{G}\tilde{H}$ ). Ребра розглядаемо як вектори, оскільки точки  $A, C, E, G$ ,  $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{G}$  та  $B, D, F, H$ ,  $\tilde{B}, \tilde{D}, \tilde{F}, \tilde{H}$  зафіксовані як "нижні" та "верхні" відносно серединних поверхонь елементів. Етапи перетворення ребер СЕО пояснюються на рис. 3 на прикладі ребер  $AB$  та  $\tilde{A}\tilde{B}$ .

Перший етап перетворень полягає у зміні довжини ребер СЕО  $t_{s_2 s_3} = \left| \overrightarrow{AB} \right|$  на довжину ребер СЕМ  $\tilde{t}_{s_2 s_3} = \left| \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{B}} \right|$ . Розглядаючи ребра як вектори, перетворення будемо виконувати для їхніх проєкцій на декартові осі  $t_{s_2 s_3}^{i'}$  та  $\tilde{t}_{s_2 s_3}^{i'}$ . На другому етапі визначаються декартові координати  $\tilde{x}_{s_2 s_3}^{i'}$  середин ребер СЕМ (точка  $\tilde{S}$ ) через координати  $x_{s_2 s_3}^{i'}$  середин ребер СЕО (точка  $S$ ) з урахуванням вектора зсуву  $\vec{r}_s$ .

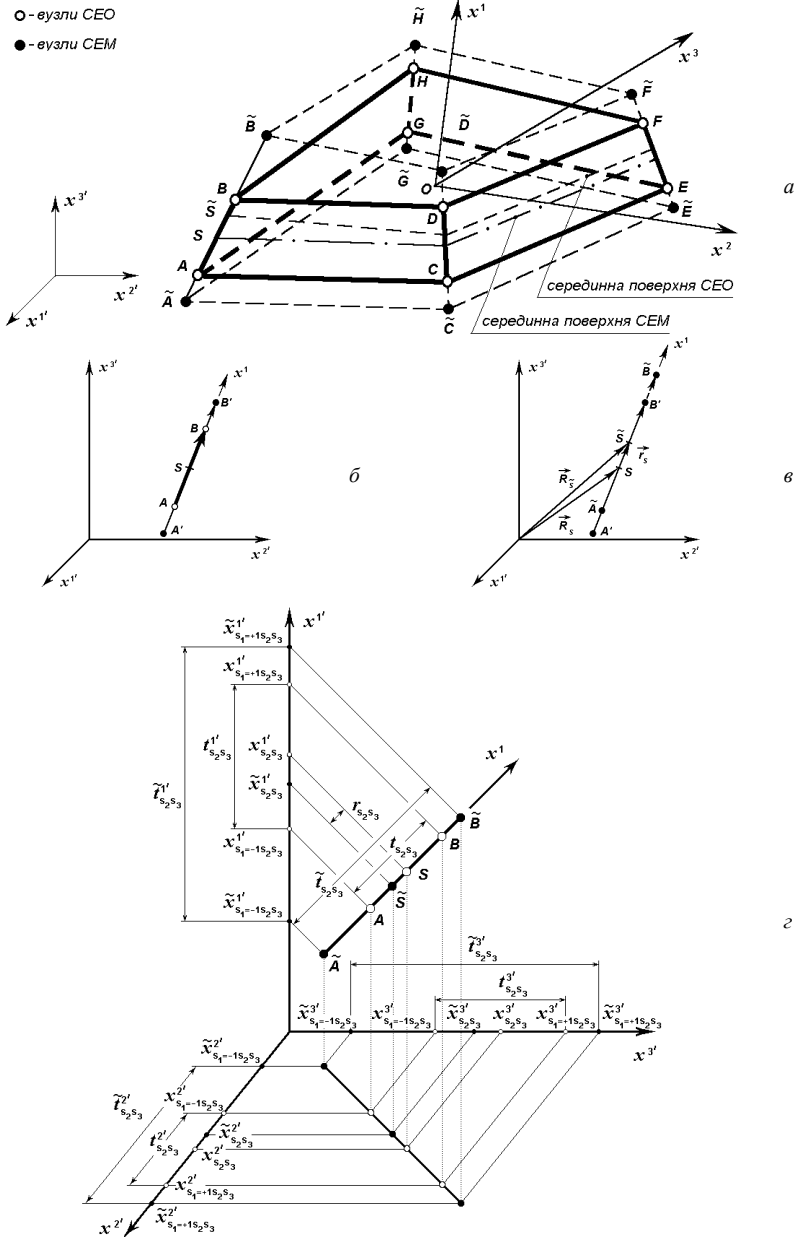


Рис. 3. Перетворення координат ребер просторового скінченного елемента

Обчислення величин  $x_{s_2s_3}^{i'}$  та  $t_{s_2s_3}^{i'}$  для СЕО виконується за формулами

$$x_{s_2s_3}^{i'} = \frac{x_{s_1=+1s_2s_3}^{i'} + x_{s_1=-1s_2s_3}^{i'}}{2}, \quad t_{s_2s_3}^{i'} = x_{s_1=+1s_2s_3}^{i'} - x_{s_1=-1s_2s_3}^{i'}. \quad (2)$$

Необхідну трансформацію ребер СЕ зручно задавати вузловими коефіцієнтами перетворень:  $b_{s_2s_3} = \tilde{t}_{s_2s_3} / t_{s_2s_3}$  – коефіцієнт зміни довжини ребра;  $a_{s_2s_3} = \pm |\tilde{r}_{s_2s_3}| / t_{s_2s_3}$  – коефіцієнт зміщення ребра ( $a_{s_2s_3} > 0$ , якщо напрямок  $\tilde{r}_{s_2s_3}$  співпадає з напрямком осі  $x^1$ ). Звідси маємо, що СЕО, як частинний випадок, є СЕМ, для якого коефіцієнти  $b_{s_2s_3} = 1$ ,  $a_{s_2s_3} = 0$ .

Вузлові координати на серединній поверхні СЕМ та відповідні вузлові проекції товщин СЕМ у декартовій системі координат обчислюються за формулами

$$\tilde{x}_{s_2s_3}^{i'} = x_{s_2s_3}^{i'} + a_{s_2s_3} t_{s_2s_3}^{i'}, \quad \tilde{t}_{s_2s_3}^{i'} = b_{s_2s_3} t_{s_2s_3}^{i'}. \quad (3)$$

У нашій задачі координати вузлів просторового СЕО  $x_{s_1s_2s_3}^{i'}$  задаються як вихідна інформація, а координати вузлів просторового СЕМ  $\tilde{x}_{s_1s_2s_3}^{i'}$  знаходяться через обчислені у (3) величини

$$\tilde{x}_{s_1s_2s_3}^{i'} = \tilde{x}_{s_2s_3}^{i'} + \frac{s_1}{2} \tilde{t}_{s_2s_3}^{i'}. \quad (4)$$

Послідовність моделювання геометрії СЕМО є наступною.

1. Задаються геометричні характеристики СЕМО у вигляді вузлових декартових координат на граничних поверхнях обшивки оболонки, яка природним шляхом проходить через ділянки ступінчато-змінної товщини.

2. У побудованій СЕМО спеціальними ознаками позначаються ті СЕО, в яких необхідно виконати перерахунок вузлових координат для моделювання ділянок ступінчато-змінної товщини модифікованими скінченними елементами.

3. При наявності в СЕО спеціальних ознак згідно до заданих коефіцієнтів  $b_{s_2s_3}$  та  $a_{s_2s_3}$  по співвідношенням (2)-(4) виконується перетворення вузлових координат СЕО у вузлові координати СЕМ. Метою цих перетворень є необхідне збільшення (або зменшення) розмірів

ребер CEO та їх зміщення вздовж координатних ліній  $x^1$  місцевої системи координат (у напрямку товщини оболонки – вздовж ребер CEO).

Розроблений спосіб утворення геометрії СЕМО ступінчато-змінної товщини можна віднести до класу так званих топологічних перетворень [19]. Таке перетворення форми CEO у форму СЕМ у нашому випадку виконується за співвідношеннями (2)-(4) як взаємно неперервне та однозначне. Незмінність топологічних властивостей форми CEO та СЕМ необхідно забезпечувати при задаванні напрямків координатних ліній  $x^1$ , які повинні окреслювати поверхні, лінії та точки характерних ділянок оболонки ступінчато-змінної товщини (включень, виїмок, ребер, зломів та отворів).

Обчислення за співвідношеннями (2)-(4), які переводять кожен пряму лінію знову в пряму, відносяться до класу афінних перетворень. Коефіцієнт  $a_{s_2s_3}$  можна назвати коефіцієнтом розтягу або стиснення ребер СЕ відносно його серединної поверхні (зі зміною відстаней між їхніми точками), а коефіцієнт  $b_{s_2s_3}$  – коефіцієнтом перенесення ребер СЕ вздовж координатних ліній  $x^1$  (без зміни відстаней між їхніми точками).

Запропонована та реалізована в роботі ідея трансформації (модифікації) форми CEO у форму СЕМ може бути прикладом створення нових типів універсальних СЕ на основі відомих елементів за допомогою топологічних перетворень, але вже по інших ніж (2)-(4) співвідношенням. При цьому можна запропонувати ввести класифікацію модифікованих скінченних елементів за різними типами топологічних перетворень. Наприклад, СЕ з паралельним перенесенням об'єму форми; СЕ, що отримані рухом форми (при збереженні відстаней між точками об'єму); СЕ з розтягом або стисненням об'єму відносно серединної поверхні форми (зі зміною відстаней між точками об'єму) та інші.

Параметри модифікованого СЕ, які поділяються на **топологічні**, **геометричні** та **фізико-механічні**, можуть бути **сталими** та **змінними** (табл. 1). Сталі топологічні та геометричні параметри характеризують елемент як просторовий (вимірність 3), що має 8 вузлів, 6 граней та 12 ребер (рис. 2, а) з заданими сітковими та місцевими координатами вузлів (рис. 2, б). **Основні** змінні геометричні параметри призначені для задавання через декартові координати вузлів на обшивці оболонки необхідної геометричної форми СЕ. В отриманих співвідношеннях МСЕ застосовуються метричні характеристики СЕ, які осереднені в центрах його об'єму, граней та ребер. Це дозволило, у випадках коли сусідні вузли знаходяться в одній точці (тобто їхні координати співпадають),



застосовувати СЕ, які геометрично перетворюються з криволінійного шестигранника в інші більш прості форми. Така властивість елемента збільшує можливості його застосування при побудові СЕМО з особливими точками та складної геометричної форми. Прикладами можуть бути СЕМО круглих пластинок і оболонок обертання, в центрах яких СЕ звичайно перетворюються в трикутні призми.

Розширення властивостей “стандартного” просторового СЕ отримане за рахунок перевизначення його основних параметрів та введення нових змінних **додаткових** топологічних, геометричних і фізико-механічних параметрів. Призначення цих параметрів полягає в наступному (табл. 1).

Перший параметр задає ознаку необхідності перетворення скінченного елемента обшивки (СЕО) у СЕ зі зміненими геометричними параметрами (СЕМ) (рис. 3, а). Якщо необхідно виконати цю модифікацію, то елемент позначається як СЕМ, якщо ні – як СЕО.

Другий параметр задає кількість шарів  $m$ , яка необхідна для моделювання неоднорідностей матеріалу та розподілу температури вздовж товщини елемента.

Третій параметр задає товщини ребер СЕМ в шарах  $t_{n, s_2 s_3}$  ( $n=1, \dots, m$ ) (рис. 2).

Четвертий параметр задає відстані між серединами ребер СЕО і СЕМ  $r_{s_2 s_3}$  (рис. 3, г).

П'ятий параметр задає типи матеріалів шарів скінченного елемента  $M_n$ , які можуть бути ізотропними, ортотропними або трансверсально-ізотропними.

Шостий параметр задає технічні термодпружні сталі матеріалів шарів СЕ  $E_n''$ ,  $\nu_n''$ ,  $G_n''$ ;  $\alpha_n''$ ;  $\rho_n$  (умовні позначення наведені для випадку ортотропного матеріалу).

Сьомий параметр задає кути орієнтації базису ортотропії для ортотропних матеріалів шарів  $\alpha_n$ .

Додаткові топологічні та фізико-механічні параметри СЕМ дозволяють описувати властивості елементів з різною кількістю шарів, кожен з яких може бути виконаний з різного типу матеріалів. З визначення змінних додаткових параметрів СЕМ випливає, що основні змінні параметри “стандартного” СЕ є частинним випадком, коли елемент є одношаровим і має ознаку СЕО.

Таблиця 1

## Параметри універсального просторового скінченного елемента

Види параметрів		
сталі	змінні	
	основні	додаткові
топологічні		
1. вимірність – 3 2. кількість вузлів – 8 3. кількість граней – 6 4. кількість ребер – 12		1. ознака СЕ: CEO або СЕМ 2. кількість шарів – $m$
геометричні		
5. сіткові координати вузлів – $s_k = \pm 1$ 6. місцеві координати вузлів – $x_{s_1 s_2 s_3}^i = (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$	1. декартові координат и вузлів CEO – $x_{s_1 s_2 s_3}^{k'}$	3. товщини ребер в шарах СЕМ – $t_{s_2 s_3}^n$ 4. відстані між серединами ребер CEO і СЕМ – $r_{s_2 s_3}$
фізико-механічні		
		5. типи матеріалів шарів – $M_n$ 6. технічні термпружні сталі матеріалів шарів – $E_n'', \nu_n'', G_n''; \alpha_n''; \rho_n$ 7. кути орієнтації базису ортотропії матеріалів шарів – $\alpha_n$

Основні та додаткові геометричні параметри дозволяють розглядати оболонки зі складною формою серединної поверхні та з різними особливостями за товщиною (злами серединної поверхні, гладко- та ступінчато-змінна товщина).

Описані параметри універсального просторового СЕ певним чином увійшли в отримані скінченноелементні співвідношення побудованої методики розрахунку широкого класу неоднорідних оболонок. Запропонований у роботі підхід до моделювання геометричних особливостей за товщиною та неоднорідностей матеріалу в

конструктивних елементах тонкої оболонки відповідає принципу застосування єдиної розрахункової схеми – універсального просторового скінченного елемента. На рис. 4 показані дев'ять можливих варіантів геометрії СЕМ, які використовуються при моделюванні обшивки оболонки з одно- або двосторонніми ребрами та виїмками.

Застосування універсального просторового скінченного елемента дозволило удосконалити розрахункові схеми неоднорідних оболонок, враховуючи при цьому:

– особливості спільного геометрично нелінійного деформування різновимірних конструктивних елементів оболонкових конструкцій, що складаються з стержнів, пластин, оболонок та гнучких і жорстких масивних ребер;

– особливості поведінки в різноманітних процесах силового та температурного навантажень оболонкових конструкцій зі складною геометричною формою та багатошаровою структурою матеріалу при наявності ребер, накладок, виїмок, каналів, отворів, точкових, неперервних, жорстких, шарнірних та інших опор і з'єднань, змінності фізико-механічних характеристик матеріалів шарів.

Реалізований у роботі підхід дозволяє в рамках єдиної методології досліджувати НДС широкого класу оболонок. На рис. 5 подана схема типів неоднорідних оболонок, що підпадають під розроблену дискретну розрахункову модель. Оболонки поділені за наступними характерними ознаками.

1. За товщиною оболонки можуть бути одношаровими або багатошаровими (дво-, три- або  $m$ -шаровими).

2. Матеріал шару оболонки може бути одним з трьох типів: ізотропним, ортотропним або трансверсально-ізотропним.

3. Оболонка може мати геометричні особливості за товщиною та складну форму серединної поверхні.

4. Оболонки з геометричними особливостями за товщиною поділяються на гладкі (сталі та гладко-змінної товщини) та негладкі (ступінчато-змінної товщини). Оболонки зі складною формою серединної поверхні можуть бути як гладкими, так і мати зломи.

5. Негладкі оболонки ступінчато-змінної товщини за розмірами в плані геометричних особливостей поділяються на оболонки з одно-направленими (“вузькими”) особливостями (ребра, канали) та оболонки з двох-направленими (“широкими”) особливостями (накладки, виїмки, отвори).

6. Геометричні особливості, такі як ребра, накладки, канали та виїмки, можуть розміщуватись відносно серединної поверхні оболонки симетрично або несиметрично з ексцентриситетами різного знаку.

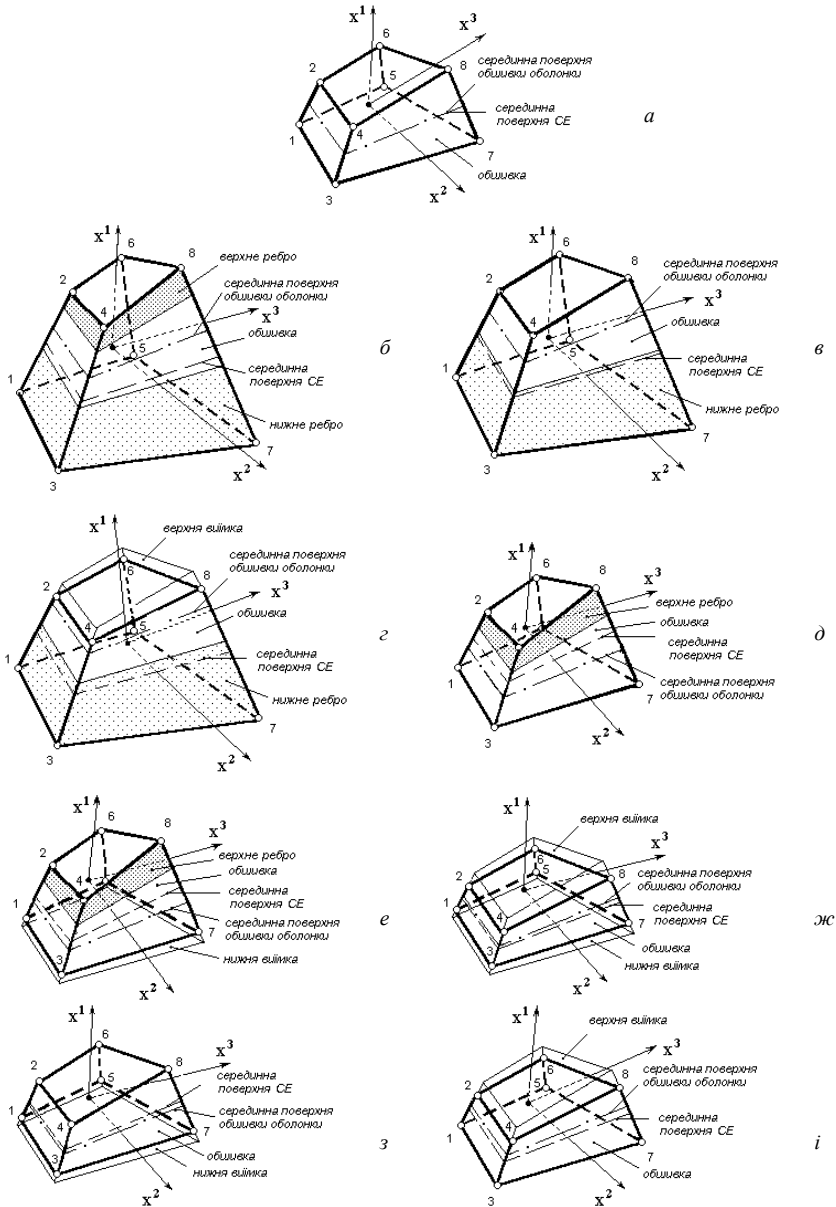


Рис. 4. Варіанти геометрії просторового SE для моделювання ділянок ступінчато-змінної товщини

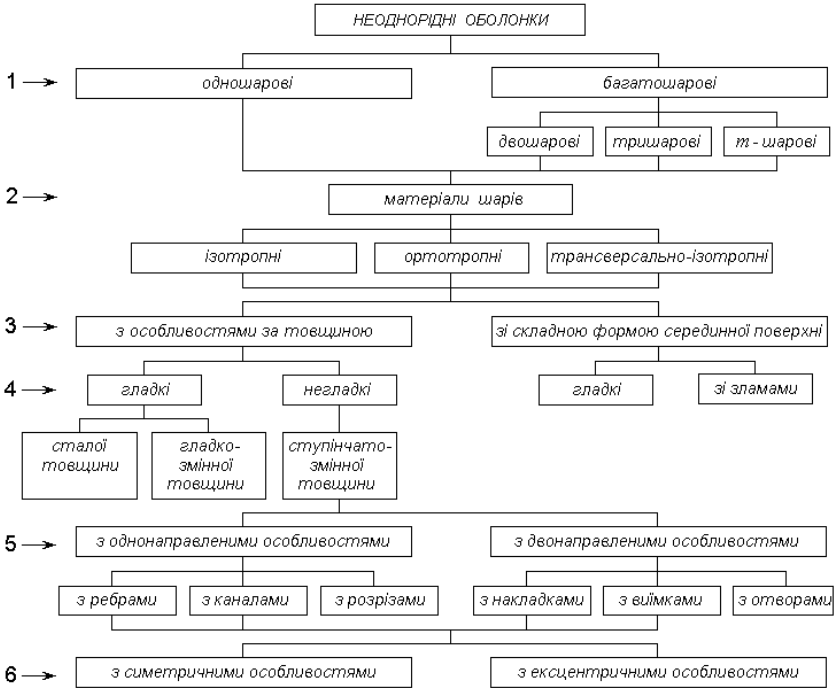


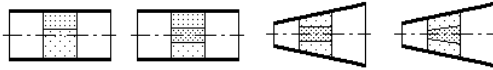
Рис. 5. Типи оболонок, що підпадають під розрахункову модель

Внаслідок застосування гіпотези деформівної прямої маємо певні обмеження на висоту ребра та жорсткість матеріалів шарів. При збільшенні висоти ребер (починаючи з деяких розмірів) і при значній (на 1-2 порядки) різниці у жорсткостях матеріалів шарів розрахункова модель не може враховувати всі особливості НДС та втрати стійкості.

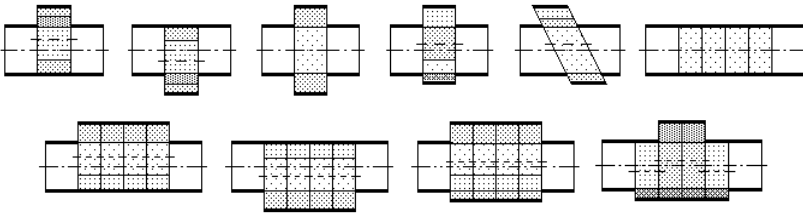
На рис. 6 представлені приклади характерних конструктивних елементів оболонки, що моделюються за допомогою універсального СЕ. Різними відтінками в шарах обшивки, ребер і накладок зображені різні матеріали. Для загального випадку реалізована можливість врахування в кожному шарі кожного елемента свого типу матеріалу. Ребра, накладки, канали та виїмки можуть бути односторонніми та двохсторонніми, розміщуючись при цьому симетрично або ексцентрично відносно серединної поверхні обшивки. Моделювання вузьких ребер і каналів за їхньою шириною звичайно виконується одним СЕ. Моделювання отворів, широких ребер, накладок і виїмок потребує в залежності від НДС конструкції такої кількості елементів, яка визначається чисельними експериментами. При

побудові СЕМО є можливість враховувати нахил стінок ребер, накладок, каналів, виїмок та отворів. В обшивці оболонки можлива поява вставок – ділянок, що виконані з інших ніж в основній частині обшивки матеріалів. Зломи в оболонці, яка розглядається як тривимірне тіло, моделюються просторовими СЕ природним шляхом.

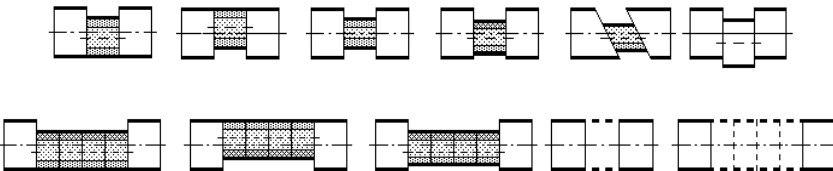
*Стала та гладко змінна товщина*



*Редра, вставки, накладки*



*Канали, видавки, виїмки, отвори*



*Складна форма серединної поверхні*

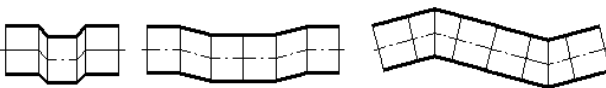


Рис. 6. Характерні типи конструктивних елементів неоднорідної оболонки

Можливе моделювання окремих комбінацій описаних вище конструктивних особливостей оболонки за товщиною. Наприклад, моделювання відштампованої видавки можна розглядати як комбінацію одностороннього ребра та одностороннього каналу або як ділянку оболонки складної форми за рахунок вигину її серединної поверхні.

При отриманні співвідношень для універсального скінченного елемента (матриць реакцій, жорсткості, геометричної жорсткості та еквівалентних температурних навантажень), регулюючи значення його додаткових змінних параметрів, ми подаємо в ці матриці вихідні дані для СЕО або для СЕМ. При цьому необхідно враховувати, що при отримуванні матриць для СЕО та СЕМ у якості поверхонь відліку прийняті їх серединні поверхні, які можуть між собою не співпадати. Тому, при чисельній побудові для СЕМО системи розв'язувальних рівнянь завжди виконується корегування матриць СЕМ відносно прийнятої єдиної поверхні відліку – серединної поверхні обшивки оболонки.

Враховуючи, що функції форми для координат та переміщень ізопараметричного просторового СЕ однакові, маємо подібні до (2)-(4) співвідношення, які пов'язують між собою вузлові переміщення СЕО та СЕМ

$$\begin{aligned} v_{s_2s_3}^{i'} &= \frac{u_{s_1=+1s_2s_3}^{i'} + u_{s_1=-1s_2s_3}^{i'}}{2}, & v_{s_2s_3}^{i'} &= u_{s_1=+1s_2s_3}^{i'} - u_{s_1=-1s_2s_3}^{i'}, \\ \tilde{v}_{s_2s_3}^{i'} &= v_{s_2s_3}^{i'} + a_{s_2s_3} v_{s_2s_3}^{i'}, & \tilde{v}_{s_2s_3}^{i'} &= b_{s_2s_3} v_{s_2s_3}^{i'}, \\ u_{s_1s_2s_3}^{i'} &= v_{s_2s_3}^{i'} + \frac{s_1}{2} v_{s_2s_3}^{i'}, & \tilde{u}_{s_1s_2s_3}^{i'} &= \tilde{v}_{s_2s_3}^{i'} + \frac{s_1}{2} \tilde{v}_{s_2s_3}^{i'}, \end{aligned}$$

де  $v_{s_2s_3}^{i'}$ ,  $v_{s_2s_3}^{i'}$  та  $\tilde{v}_{s_2s_3}^{i'}$ ,  $\tilde{v}_{s_2s_3}^{i'}$  – вузлові переміщення, що віднесені відповідно до серединних поверхонь СЕО та СЕМ;  $u_{s_1s_2s_3}^{i'}$ ,  $\tilde{u}_{s_1s_2s_3}^{i'}$  – вузлові переміщення, що віднесені відповідно до обмежуючих поверхонь СЕО та СЕМ.

Отримані для модифікованого СЕ співвідношення мають універсальний характер: в розв'язувальних рівняннях враховані всі нелінійні складові та всі компоненти тензорів деформацій і напружень як для обшивки, так і для ребер та накладок будь-якої жорсткості. Така постановка задачі в дослідженнях нелінійної стійкості тонких неоднорідних оболонок, має наступні переваги:

- 1) суттєво уточнюється розрахункова модель;

2) можливе застосування єдиної розрахункової моделі як до жорстких, так і до гнучких ребер і накладок, а також до ділянок з виїмками та каналами;

3) розширюються межі використання скінченного елемента;

4) збільшується коло класів оболонок, які можна досліджувати.

Таким чином, виконана модифікація просторового скінченного елемента підвищила його універсальність та дозволила суттєво розширити межі застосування розробленого методу дослідження нелінійного деформування та втрати стійкості тонких неоднорідних оболонок.

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюцкий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. - 480 с.
2. *Николаев А.П., Киселев А.П.* Расчет оболочек с использованием трехмерных конечных элементов в виде треугольной призмы и восьмиугольника // *Архитектура оболочек и прочностной расчет тонкостенных строительных и машиностроительных конструкций сложной формы: Труды Международной научной конференции.* - М.: Изд-во РУДН, 2001. С. 319-323.
3. *Белостоцкий А.М.* Конечнэлементные модели пространственных пластин, оболочек и массивов: построение, программная реализация и исследования. Сб. науч. трудов Гидропроекта. 1985, вып. 100, с. 24-35.
4. *Лианг К.Л., Редди Дж. Н.* Анализ геометрических нелинейных задач с помощью конечного элемента подкрепленной композитной оболочки, подчиняющегося законам механики сплошной среды. Аэрокосмическая техника, 1989, N 8, с. 117-124.
5. *Соловей Н.А.* Исследование напряженно-деформированного состояния и устойчивости пластин и оболочек ступенчато-переменной жесткости с применением модифицированного конечного элемента // *Сопротивление материалов и теория сооружений.* - 1983. - Вып. 43. - С. 30-35.
6. *Соловей Н.А.* Решение геометрически нелинейных задач устойчивости многослойных ребристых оболочек на основе моментной схемы конечных элементов // *Сопротивление материалов и теория сооружений.* - 1992. - Вып. 60. - С. 110-117.
7. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатощарових поребрих оболонок при термосилових навантаженнях // *Опір матеріалів і теорія споруд.* - К.: КДТУБА, 1998. - Вып. 64. - С. 116-127.
8. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // *Опір матеріалів і теорія споруд.* - К.: КНУБА, 1999. - Вып. 66. - С. 22-25.
9. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // *Проблемы прочности,* 1999. - N 5. - С. 96-102.
10. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гладких ребристих та послаблених вирізаних гнучких пологих панелей // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 2000 р. - Вып.67. - С. 92-103.
11. *Соловей М.О.* Моделювання термопружних властивостей багатощарових матеріалів у задачах стійкості неоднорідних оболонок // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 2003 р. - Вып. 73. - С. 17-30.



12. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість гранованих пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2004 р. - Вип. 75. - С. 91-97.
13. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Вплив режимів термосилового навантаження на стійкість і позакритичну поведінку оболонок сталюї та ступінчато-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук. -тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - С. 30-42.
14. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976. - 464 с.
15. *Новацкий В.* Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
16. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. - 416 с.
17. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек.- М.: Наука, 1974. - 446 с.
18. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир. - 1975. 287 - 541 с.
19. *Математика, ее содержание, методы и значение.* Т. 3. - М.:Изд. АН СССР,1956. - 336 с.

*Надійшла до редколегії 15.12.2006 р.*

УДК 539.3

Легостаєв А.Д.  
Гречух Н.А.

## СТВОРЕННЯ ЗАСОБІВ ПРОЕКТУВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

**Інструментальна база досліджень.** Один з найбільш загальних методів проектування конструкцій ґрунтується на досвіді та інтуїції проектувальника. У той же час він повинен мати надійні засоби оцінки варіантів проектів, що надають можливість швидко виконувати багатоваріантні розрахунки на комп'ютерах, оснащених діалоговими засобами візуалізації отриманих результатів. На сьогодні створені потужні обчислювальні комплекси, які забезпечують розв'язок складних інженерних задач. До їх числа слід віднести обчислювальну систему ДІСТОС (Динаміка і статика оболонкових систем), створену в НДІ будівельної механіки, яка має незамкнену структуру і постійно розвивається. Обчислювальний блок системи базуються на співвідношеннях тривимірного скінченного елемента. Це пов'язано з тим, що на початку створення обчислювальна система була зорієнтована на розрахунки різнорідних пластин і оболонок змінної товщини. Побудова універсального скінченного елемента стала можливою тому, що при інтегруванні рівнянь теорії оболонок на основі метода скінчених елементів практично відсутня межа між двома підходами у дослідженні оболонок: з позицій спеціальних теорій (типа С.П. Тимошенко) або тривимірної теорії пружності. Ще більш обґрунтованим є використання універсальних тривимірних СЕ у задачах динаміки оболонок, які дають можливість природно враховувати сили інерції зсуву і повороту. Визначення частот і форм власних коливань континуальних об'єктів є важливою складовою частиною створеної обчислювальної системи. Дані розв'язку задачі про власні коливання дають інформацію щодо уникнення резонансу при розрахунку на змушені коливання. До цього слід додати, що загальні прийоми розрахунку пластин і оболонок на дію вібраційних і ударних навантажень ґрунтуються на розкладанні розв'язків у ряди по формам власних коливань (розв'язок у "стоячих хвилях"). У той же час, у разі усталеного руху, що відповідає дії гармонічного, чи періодичного навантаження більш сприйнятливими є дещо інші підходи. Розв'язок задачі на дію гармонічного навантаження при відсутності резонансу виконується у квазістатичній постановці для амплітудних значень переміщень. У випадку дії періодичного навантаження виконується його

гармонічний аналіз, що надає можливість проводити визначення періодичного руху суперпозицією гармонік. Обчислювальні алгоритми розв'язку динамічних задач забезпечують визначення найбільш несприятливого стану конструкції у процесі її руху (поява найбільших переміщень і напружень), шляхом проведення аналізу значень названих величин для багатьох моментів часу.

Для деталізації розподілу напружень в оболонках та для більш точної апроксимації геометричних і фізично-механічних характеристик в мажах скінченного елемента доводиться використовувати густі сітки в скінченноелементних моделях (СЕМ) пластин і оболонок. Число ступенів вільності таких моделей досягає сотень тисяч. В той же час практичний інтерес має тільки нижня частина спектру власних частот і відповідних їм форм власних коливань. В ДІСТОС алгоритми розв'язку задачі про власні коливання оболонок ґрунтуються на перетворенні рівнянь руху дискретної моделі з великим числом ступенів динамічної вільності до системи нових узагальнених координат значно меншої розмірності.

Перехід до нової системи узагальнених координат виконується без спрощення просторової апроксимації області оболонки. Виконання цієї умови досягається у алгоритмі одночасних ітерацій з необхідним числом власних векторів узагальненої проблеми про власні значення матриць. Потрібне число власних векторів призначається заздалегідь. Досвід використання алгоритму одночасних ітерацій показує, що число початкового набору векторів приймається дещо збільшеним (приблизно на 20%) у порівнянні з очікуваним набором точних значень. Суть цього алгоритму повно викладена в монографії [1]. Важливою особливістю ітераційного процесу є те, що він реалізується в автоматичному режимі і забезпечує щільність нижчої ділянки спектру частот власних коливань. Цей алгоритм зарекомендував себе як один з найбільш ефективних прийомів при розв'язанні задач про власні коливання системи з великим числом ступенів вільності для яких необхідно визначати до сорока власних частот і форм. Однією з переваг цього методу є можливість визначення модальних координат з бажаною точністю.

Вхідна інформація для конкретної задачі готується у формі, сприятливій для інженера і групується по категоріям, які характеризують геометрію поверхні оболонки, граничні умови, фізико-механічні властивості матеріалу, топологію дискретної моделі конструкції. Інформація про геометрію поверхні подається точковим каркасом – координатами вузлів скінченних елементів у декартовій системі координат. У випадку неканонічної поверхні оболонки, наприклад, лопатки парової турбіни або газового компресора побудова точкового каркаса є досить складною самостійною проблемою. Успішний розв'язок

цієї проблеми став можливим завдяки використанню математичного апарата сплайнових апроксимацій, який дав змогу по мінімальному числу теоретичних перерізів пера лопатки будувати з великою точністю необхідну кількість проміжних перерізів. Блок геометричних розрахунків включає набір програмних модулів, які забезпечують побудову сітки скінченних елементів для різних поверхонь у автоматичному режимі. Отримані результати – точкові каркаси поверхонь зберігаються у файлах і використовуються як вхідна інформація для розв'язання задач механіки.

Сітка скінченних елементів дискретної моделі оболонки має регулярну структуру, що суттєво спрощує підготовку вхідної інформації, для забезпечення автоматизації процесу побудови глобальних матриць жорсткості і мас цієї моделі. Нерегулярності типа вирізів, включень фрагментів тіла оболонки, виконаних із матеріалу з іншими характеристиками, ступінчата зміна товщини оболонки усуваються за допомогою введення особливих скінченних елементів “пустий елемент” – для вирізу, “включення” – для області з особливими характеристиками матеріалу, “ребро” – для ділянки із ступінчатою зміною товщини оболонки.

Інформація про зовнішні в'язі, характеристики матеріалу, зовнішні навантаження, топологію розрахункової моделі формується в діалоговому режимі і зберігається в файлах даних на магнітних носіях. Обчислювальна програма реалізується в автоматичному режимі. При багатоваріантних розрахунках конструкції у процесі проектування доводиться вносити зміни в файл даних задачі. Для цього використовується редактор файлів системного блоку комп'ютера.

До складу обчислювальної системи включено блок – після процесор, який оснащений засобами візуалізації результатів, отриманих для конкретного варіанту даних. Візуальна інформація також записується у спеціальні файли і зберігається на магнітних носіях.

Розрахунок конструкцій нерегулярної структури виконується методом підконструкцій. При цьому об'єкт розділяється на фрагменти простої форми, в межах яких будується регулярна сітка скінченних елементів. Побудова глобальних матриць жорсткості і мас моделі складної конструкції виконується для узагальнених координат віднесених до області стиковки фрагментів. У якості узагальнених координат приймаються можливі конфігурації границь фрагментів. Шляхом накладення додаткових в'язей на стиковочних границях фрагментів будується основна система метода переміщень. Далі виконується розрахунок кожного фрагмента на змушені переміщення границь, що відповідають їх конфігурації, тобто новим узагальненим координатам. Апроксимацію конфігурацій стиковочних границь можливо виконувати, наприклад, набором синусоїд, амплітудні значення яких розглядаються як узагальнені координати. До

однієї границі може бути віднесено декілька узагальнених координат. Повне ж їх число для усієї моделі метода підконструкцій визначає число ступенів вільності редукованої моделі. Узагальненим координатам присвоюються номери. Далі формується матриця базисних векторів як результат розрахунку кожного фрагмента основної системи на змушені зміщення границь від кожної узагальненої координати.

Складовими базисного вектора є переміщення вузлів СЕМ фрагмента від змушеного зміщення стиковочної границі для відповідної узагальненої координати. Тобто розмірність базисного вектора співпадає з числом ступенів вільності фрагмента.

Задача обчислення базисних векторів зведена до розв'язку системи рівнянь МСЕ для кожного фрагмента

$$[K][U] = [P]. \quad (1)$$

Тут  $[K]$  – матриця жорсткості фрагмента побудована з урахуванням накладених в'язей на границях стиковки з іншими фрагментами;  $[P]$  – матриця, складена із стовпчиків матриці жорсткості фрагмента, які відповідають переміщенням вузлів на стиковочній границі фрагмента. Число таких стовпчиків відповідає кількості узагальнених координат моделі фрагмента, що розглядається. Результатом розв'язку задачі (1) є матриця  $[U]$  складена із базисних векторів, що визначають конфігурацію фрагмента від зміщення границі по кожній із узагальнених координат. Базисний вектор – це по суті свій структурний спінінг. Таким чином можна сказати, що матриця  $[U]$  утворена із базисних векторів які характеризують реакцію фрагмента на зміщення стиковочних границь.

Система базисних векторів являє собою систему фундаментальних векторів, лінійна комбінація яких дає змогу реалізувати варіанти стану фрагмента. Матриця  $[U]$  формується для кожного фрагмента моделі метода підконструкцій. Базисні вектори повинні відповідати умовам лінійної незалежності. Забезпечення цієї вимоги досягається шляхом введення узагальнених координат для фрагмента таким чином, щоб вони обмежували рух основної системи фрагмента як жорсткого цілого.

Для побудови рівняння руху редукованої моделі фрагмента скористаємось варіаційним рівнянням руху його скінченнелементної моделі

$$\sum_e \delta\{v\}_e^T [K]_e \{v\}_e + \sum_e \delta\{v\}_e^T [M]_e \{\ddot{v}\}_e = \sum_e \delta\{v\}_e^T [Q(t)]_e. \quad (2)$$

де  $\{v\}_e, \{\ddot{v}\}_e$  – вектори переміщень і прискорень вузлів скінченних елементів (СЕ);  $[K]_e, [M]_e \{Q(t)\}_e$  – відповідно матриці жорсткості, мас і вектор зведених до вузлів сил СЕ; символ  $\sum_e$  – означає суму по всіх елементах моделі фрагмента; індексом “ $T$ ” відмічені транспоновані вектори.

Якщо компонентами вектора  $\{v\}$  є переміщення вузлів СЕМ фрагмента, а переміщення вузлів одного СЕ визначаємо рівністю

$$\{v\}_e = [I]_e \{V\}, \quad (3)$$

де  $[I]_e$  – матриця інциденцій, яка забезпечує вибірку переміщень стосовно одного СЕ з повного набору переміщень, то співвідношення (2) з урахуванням (3) набуває вигляду

$$\sum_e \delta\{v\}^T [I]_e^T [K]_e [I]_e \{v\} + \sum_e \delta\{v\}_e [I]^T [I]_e^T [M]_e [I]_e \{\ddot{v}\}_e - \sum_e \delta\{v\}^T [I]_e^T [Q(t)]_e = 0, \quad (4)$$

$$\delta\{v\}^T [K]_e^* \{v\} + \delta\{v\}^T [M]_e^* \{\ddot{v}\}_e - \delta\{v\} \{Q\}^* = 0, \quad (5)$$

де  $[K]_e^* = \sum_e [I]_e^T [K]_e [I]_e$  – матриця жорсткості СЕМ фрагмента;

$[M]_e^* = \sum_e [I]_e^T [M]_e [I]_e$  – матриця мас фрагмента;  $\{Q(t)\}_e^* = \sum_e [I]_e^T \{Q(t)\}_e$  –

вектор зведених до вузлів сил фрагмента;  $\{v\}, \{\ddot{v}\}$  –  $N$ -вимірні вектори переміщень і прискорень вузлів дискретної моделі фрагмента.

Для перетворення рівнянь руху фрагменту до нових узагальнених координат, запишемо співвідношення між узагальненими координатами СЕМ фрагмента і його розрахункової моделі

$$\{v\} = [U] \{q\}. \quad (6)$$

Підставимо (6) в (4) і виконаємо аналогічні перетворення. Остаточно отримаємо:

$$\delta\{q\}^T ([A] \{q\} + [B] \{\ddot{q}\} - \{q(t)\}) = 0, \quad (7)$$

де

$$[A] = [U]^T [K]_e^* [U], \quad (8)$$

$$[B] = [U]^T [M^*] [U], \quad (9)$$

$$\{q(t)\} = [U]^T \{Q^*(t)\}, \quad (10)$$

відповідно матриці жорсткості, мас і вектор узагальнених сил, які характеризують рух редукованої моделі фрагмента.

Побудова рівняння руху моделі складеної оболонки метода під конструкцій виконується за схемою (3) – (5).

Якщо ввести співвідношення

$$\{q\} = [I]_F \{p\}, \quad (11)$$

де  $\{P\}$  – вектор узагальнених координат повної редукованої моделі оболонки метода підконструкцій;  $\{q\}$  – вектор узагальнених переміщень редукованої моделі фрагмента;  $[I]_F$  – матриця інцидентії фрагмента, яка забезпечує вибірку з  $\{P\}$  узагальнених переміщень, що стосуються конкретного фрагмента в складі повної редукованої моделі конструкції.

Остаточно рівняння руху редукованої моделі, по аналогії з (7), і з урахуванням того, що вектор варіації можливих переміщень  $\delta\{q\} \neq 0$  набуває вигляду

$$[\dot{A}^*] \{p\} + [\dot{B}^*] \{\ddot{p}\} = \{\dot{q}^*(t)\}. \quad (12)$$

Задача про власні коливання допускає розв'язок матричного рівняння (12) у вигляді

$$\{p\} = \{r\} \sin(\omega t + \alpha)$$

зводиться до розв'язку узагальненої проблеми про власні значення

$$([\dot{A}^*] - \lambda [\dot{B}^*]) \{r\} = 0, \quad (13)$$

Матричне рівняння (13) має нетривіальний розв'язок за умови

$$\det \left| [\dot{A}^*] - \lambda [\dot{B}^*] \right| = 0, \quad (14)$$

яке зображає характеристичне рівняння системи.

Корні  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) і відповідні їм вектори розв'язку системи (14)  $\{r\}^{(i)}$  називаються власними значеннями і власними векторами матриці  $[\dot{B}^*]^{-1} [\dot{A}^*]$ . Підстановка їх у (13) приводить до рівності

$$[\dot{A}][R] = [\Lambda][B][R], \quad (15)$$

де  $[R]$  – модальна матриця, стовпцями якої є вектори  $\{r\}^{(i)}$ ;  $[\Lambda]$  – діагональна матриця складена із власних значень  $\lambda_i$ .

Окрім самостійного використання при оцінюванні частот і форм власних коливань конструкції, що важливо при прогнозуванні резонансних явищ в конструкціях і спорудах, розв'язок проблеми (13) грає фундаментальну роль в теорії малих коливань, а також в методах розв'язку нелінійних задач, таких як метод малого параметра, методи теорії стійкості руху, задачі біфуркації і т.п.

Розв'язок узагальненої проблеми про власні значення (13) надає можливість реалізувати перетворення системи рівнянь руху до головного (нормального) базису простору. Для нормованих власних векторів, які взаємно ортогональні отримаємо важливі співвідношення

$$[R]^T [B][R] = [E], \quad [R]^T [A][R] = [\Lambda]. \quad (16)$$

Якщо в (2) зробити заміну  $\{v\} = [R]\{p\}$ , то отримаємо

$$\delta\{p\}^T ([R]^T [K][R]\{p\} + [R]^T [M][R]\{\ddot{p}\}) - [R]^T \{Q(t)\} = 0.$$

З урахуванням (16), за умов довільної варіації вектора  $\{p\}$ , маємо

$$\{\ddot{p}\} + [\Lambda]\{p\} = \{f\}, \quad (17)$$

де  $\{f\} = [R]^T \{Q(t)\}$ .

Якщо матриця  $[\Lambda]$  – діагональна, то розв'язок (17) зводиться до розв'язку  $N$  незалежних рівнянь що мають вигляд

$$\ddot{p}_i + \lambda_{(i)} p_i = f_i(t), \quad (18)$$

розв'язок якого визначається інтегралом Дюамеля [1].

**Проектування оболонкової конструкції.** Розглядається циліндрична оболонка з двома фланцями на торцях підсилена кільцевими ребрами жорсткості (шпангоутами). Конструкція закріплена на частині направляючої циліндра у двох перерізах вздовж лінії контакту оболонки і шпангоутів (рис. 1).

Проектом передбачено обмеження щодо перших двох частот власних коливань: перша власна частота не повинна перевищувати 63 Гц.



Скінченноелементна модель оболонки має розмірність  $35 \times 28$  скінченних елементів, відповідно по напрямку направляючої і утворюючої поверхні. Задача про власні коливання конструкції реалізована у обчислювальному середовищі ДІСТОС по алгоритму одночасних ітерацій у підпросторі, розмір якого – 25 ступенів вільності. Частоти і форми власних коливань щодо перших двох форм приведені на рисунках 2 і 3. Коригування частот власних коливань виконувалось шляхом додавання приєднаних мас до одного із фланців.

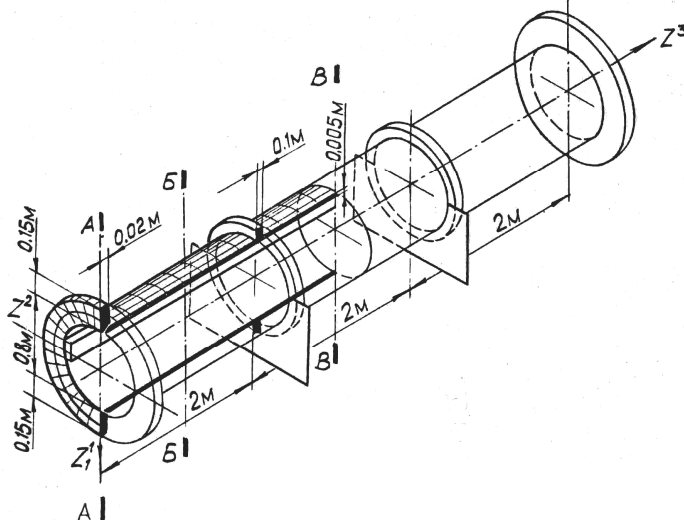


Рис. 1. Загальний вигляд оболонки

На рисунках 4 і 5 приведені частоти і форми власних коливань отримані для приєднаної маси, що відповідає збільшенню щільності одного фланця у два рази. По формі коливань видно, що відхилення цього фланця значно перевищує відхилення фланця, маса якого не коригувалась. Виконано розрахунок оболонки шляхом коригування щільності приєднаних мас у межах обох фланців (рис. 6, 7).

Значення частот для обох власних форм задовольняють умовам проекту оболонки.

Для отримання сприйнятливого результату довелося провести декілька пробних розрахунків.

В процесі розв'язання задач використані дані, приведені нижче.

ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ 15  
 Тип matr.масс(диаг.-1101111, соглас.-1110111) 1110111  
 УЧЕТ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ F  
 МАСШТАБ ВЕКТОРОВ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ - M:1; M= 5.000000000000000

## ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ МАТЕРИАЛА

МОДУЛЬ УПРУГОСТИ  $e= 2100000.0000000000000000$ КОЭФФИЦИЕНТ ПУАССОНА  $\nu= 3.0000000000000000E-001$ ОБЪЕМНЫЙ ВЕС  $\text{rom}= 7.849999999999999E-003$ УСКОРЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ  $g= 981.0000000000000000$ 

ОПРЕДЕЛИТЕ НАЛОЖЕННЫЕ СВЯЗИ(по плоскости)

УКАЖИТЕ КОЛИЧЕСТВО УЧАСТКОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Введите типы связи на участках	3	3	1	1
Введите начало участков закрепления по X2	1	1	10	19
Введите начало участков закрепления по X3	1	17	17	17
Введите конец участков закрепления по X2	29	29	11	20
Введите конец участков закрепления по X3	1	17	17	17
Введите признаки связей по Z1	0	0	1	1
Введите признаки связей по Z2	1	1	0	0
Введите признаки связей по Z3	0	0	1	1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОСТЕЙ: число полостей = 0

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕБЕР: число ребер = 0

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВКЛЮЧЕНИЙ: число включений = 0

Выдать на печать начальные перемещения: t-да; f-нет - F

Выдать на печать начальные напряжения: t-да; f-нет - F

Режим работы (onludn): T-Контроль данных; F-Счет - F

Укажите какие данные Вы будете просматривать:

Поле признаков: t - да; f - нет. - F

Поле координат: t - да; f - нет. - F

Поле масс: t-диагональная; f-согласованная - F

Управляющий параметр NRPC= 10110

Управляющий параметр NRPL= 0

Число распечатываемых собствен. векторов NPFK=0

Управляющий параметр prk=10000000

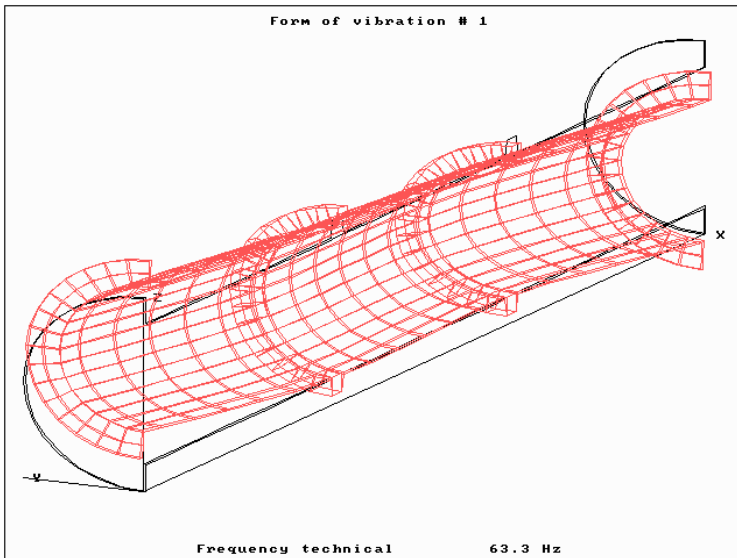


Рис. 2

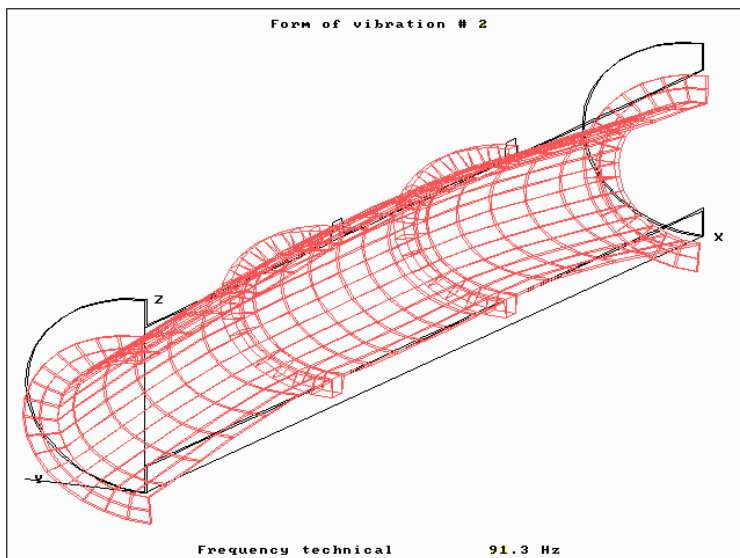


Рис. 3

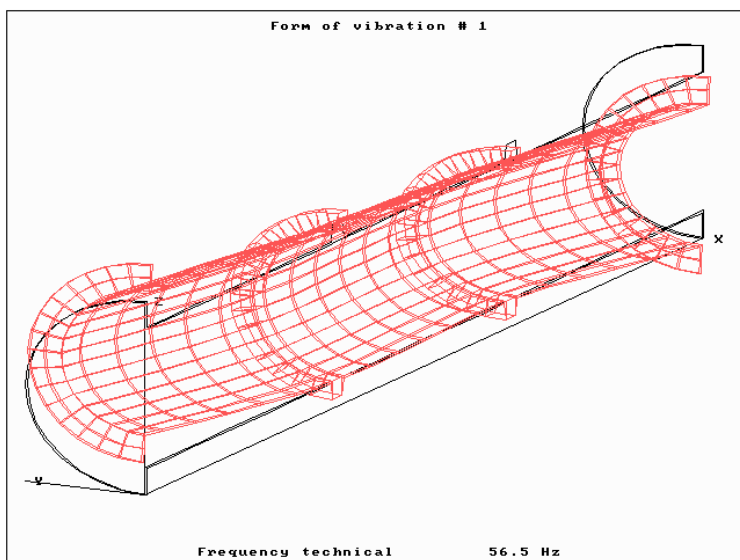


Рис. 4

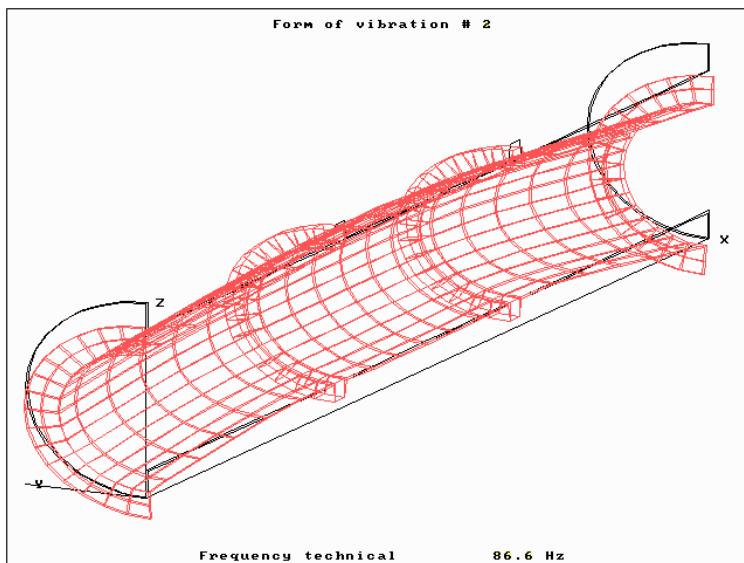


Рис. 5

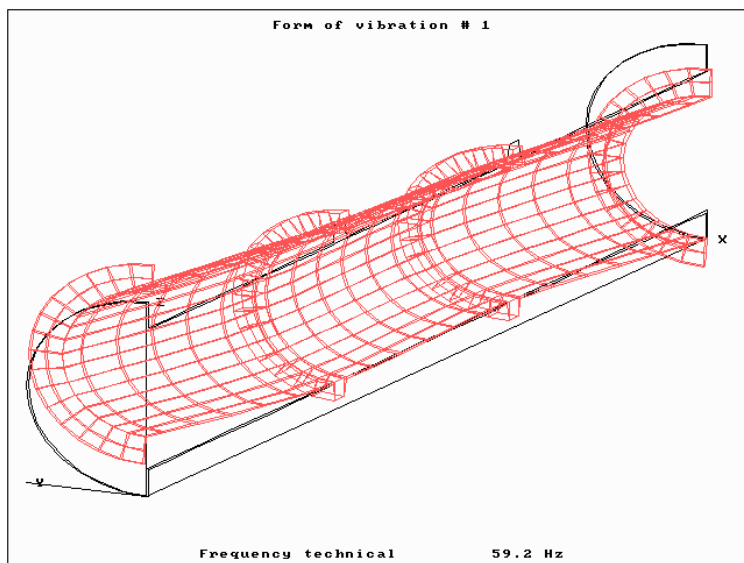


Рис. 6

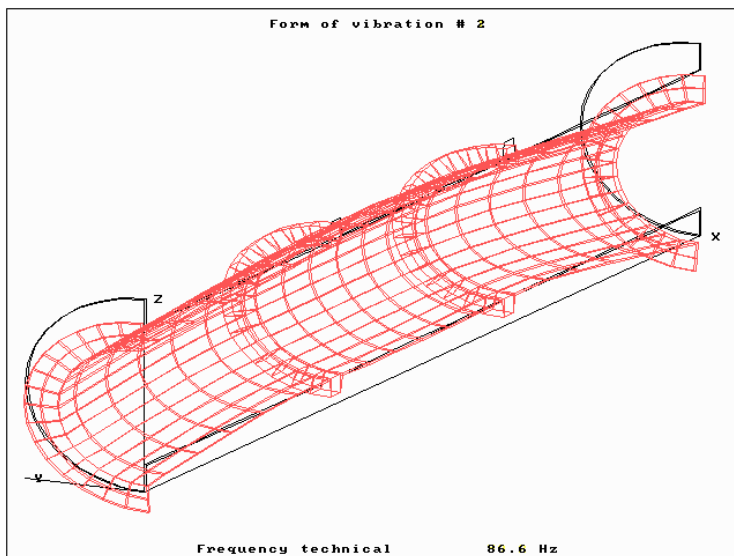


Рис. 7

1. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320с.
2. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
3. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
4. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
5. Гуляев В.И., Гром А.А., Снежко Н.А. Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Изв. РАН. МТТ. – 1999. № 2. – С. 156-163.
6. Gulyayev V.I, Solovjov I.L., Lugovyy P.Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation. // J. Sound and Vibrat. – 2001. V. 246., № 3, – pp. 491-504.
7. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Critical states of thin ellipsoidal shells in simple and compound rotations. // J. Sound and Vibrat. – 2004. – Vol. 270. – P. 323-339.
8. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 3565-3583.
9. Sivadas K.R. Vibration analysis of prestressed rotating thick circular conical shell // J. Sound and Vibrat. – 1995. – V. 186. №1. – P. 99-109.
10. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

Надійшло до редакції 04.12.2006 р.

## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Шишов О.В.</i> Електронний підручник з будівельної механіки . . . . .	3
<i>Пискунов С.О., Шкриль О.О., Мицюк С.А.</i> Визначення параметрів лінійної механіки руйнування для неоднорідних кругових тіл . . . . .	9
<i>Солодей І.І.</i> Методика аналізу пружно-пластичних коливань тіл обертання та призматичних тіл з довільними граничними умовами . . . . .	23
<i>Гречух Н.А., Пискунов С.О., Остапенко Р.М.</i> Обчислення кін в просторових тілах обертання при температурному навантаженні . . . . .	38
<i>Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.</i> Збіжність і точність розв'язків для просторового скінченного елемента в задачах нерівномірного нагріву стержнів і балок . . . . .	54
<i>Баженов В.А., Ворона Ю.В., Щербатюк О.М.</i> Чисельне дослідження нестационарних коливань пружних комбінованих систем . . . . .	66
<i>Гайдайчук В.В., Соловійов І.Л.</i> Стійкість подовжених циліндричних оболонок під дією неконсервативних осьових навантажень . . . . .	74
<i>Медведєв К.В., Шульга В.М., Корнієнко В.Ф., Ластівка І.О.</i> Поширення акустичних хвиль кілогерцевого діапазону в фібрильних нитках . . . . .	82
<i>Гончаренко М.В.</i> Дослідження умов динамічної стійкості в зонах комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні . . . . .	89
<i>Соловей М.О.</i> Модифікований просторовий скінченний елемент для моделювання тонких неоднорідних оболонок . . . . .	96

*Легостаєв А.Д., Гречух Н.А.*

Створення засобів проектування оболонкових конструкцій . . . . . 114

Наукове видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

Випуск 80

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 18.12.06. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.

Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.

Тираж 100. Зам. № 7-

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

---

Віддруковано на ЗАТ “ВІПОЛ”

03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру

Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.