

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 81

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2007

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 28 грудня 2007 року, протокол № 30.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 81 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2007. – 168 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,
м. Київ, 03037,
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2007

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Андрієвський В.П.

ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ОСНОВНИЙ ТА ДОДАТКОВИЙ РЕСУРС ЛОПАТКИ ГАЗОТУРБІННОЇ УСТАНОВКИ

Досліджено вплив температурного навантаження на основний та додатковий ресурс лопатки газотурбінної установки, а також проілюстровано ефективність алгоритму з екстраполяцією переміщень при розв'язанні нелінійних задач на основі напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ).

Вступ. Забезпечення тривалої безаварійної експлуатації газотурбінних установок (ГТУ) потребує необхідності отримання інформації про зміну несучої здатності їх відповідальних вузлів та деталей. Одними з найбільш відповідальних елементів ГТУ є лопатки. При силовому навантаженні під дією високої температури ресурс лопаток ГТУ визначається накопиченням деформацій повзучості, що приводить до необхідності проведення розрахунку на довготривалу міцність.

Згідно з роботами [6, 7] під ресурсом розуміють час від введення об'єкта в експлуатацію до виникнення граничного стану, який визначається як момент тимчасового або остаточного припинення експлуатації, зокрема, внаслідок зниження показників безпеки. В загальному випадку в процесі експлуатації елементів конструкцій можуть бути виділені такі етапи деформування:

час прихованого руйнування – період зародження, зростання і об'єднання мікроскопічних дефектів, зокрема обумовлених наявністю повзучості, до утворення макроскопічного дефекту (початкової зони континуального руйнування) – основний ресурс, тобто час до початку руйнування;

час зростання макроскопічного дефекту (зони континуального руйнування) до утворення тріщиноподібного дефекту – додатковий ресурс.

Як зазначено в роботах [5, 18] для особливо відповідальних елементів конструкцій в якості ресурсу розглядається перша складова часу до руйнування. При цьому в [8] відзначено, що моделювання процесів деформування деталей стаціонарних ГТУ, розрахунковий ресурс яких складає 50–100 тис. год., потребує використання фізичних рівнянь, що

враховують супутнє повзучості накопичення пошкодженості матеріалу. Необхідність прогнозування виникнення дефектів матеріалу на початковій стадії їх розвитку відмічається також в [15]. Співвідношення континуальної механіки руйнування, що містять параметр пошкодженості дозволяють проводити моделювання цих етапів деформування. Подальше визначення несучої здатності за наявності тріщин потребує залучення співвідношень дискретної механіки руйнування.

Лопатки являють собою просторові тіла складної форми. Тому розв'язання задач із визначення ресурсу лопатки необхідно проводити в просторовій постановці.

Питання визначення напружено-деформованого стану лопаток ГТУ з врахуванням деформацій повзучості в просторовій постановці розглянути, зокрема, в роботах [1, 3], де з використанням розробленої на основі напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) методики чисельного моделювання напружено-деформованого стану, повзучості і континуального руйнування просторових призматичних тіл змінної площі поперечного перерізу, проведено визначення основного ресурсу, розташування початкового макроскопічного дефекту (початкової зони руйнування), та часу її розвитку (додаткового ресурсу) для лопатки ГТУ. Показано, що розв'язання цієї задачі необхідно проводити з врахуванням перерозподілення напружень в процесі повзучості і залежності фізико-механічних властивостей матеріалу від температури. При цьому розглянуто питання можливості фрагментації лопатки і застосування НМСЕ для визначення напружено-деформованого стану неоднорідних просторових призматичних тіл змінної геометрії. Необхідно зазначити, що згадані дослідження виконані без врахування температурних деформацій. В той же час, лопатка знаходиться під дією високих температур з складним характером розподілення, як в поперечному перерізі, так і по висоті, тому виникає необхідність дослідження її напружено-деформованого стану з врахуванням температури. Особливо важливість таких досліджень обумовлена наведеними в [3] даними про суттєвий вплив незначних відхилень значень параметрів напружено-деформованого стану на величину ресурсу в умовах повзучості. В зв'язку з цим становить інтерес визначення впливу урахування температурного навантаження на параметри напружено-деформованого стану лопатки, встановлення закономірностей деформування лопатки при урахуванні температурного навантаження в умовах повзучості та залежності величин ресурсу від величини температурного навантаження.

Таким чином, метою даної роботи є розробка на основі напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) методики моделювання напружено-деформованого стану просторових

призматичних тіл при термосиловому навантаженні в умовах повзучості і та визначення основного та додаткового ресурсу і дослідження на її основі впливу температурного навантаження на основний та додатковий ресурс лопатки газотурбінної установки.

Визначення напружено-деформованого стану просторових тіл в умовах повзучості за наявності континуального руйнування та з урахуванням температурних деформацій являє собою складну задачу механіки деформівного твердого тіла. Її розв'язання потребує, насамперед, інформації про розподілення температури в розглядуваній області, що в свою чергу потребує розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності. Отримані значення температури використовуються для подальшого визначення напружено-деформованого стану і розрахункового ресурсу лопатки. Зважаючи на змінний з часом просторовий напружено-деформований стан досліджуваного об'єкта, розв'язання задачі повзучості потребує застосування покрокових алгоритмів і багаторазового розв'язання систем рівнянь великої розмірності. В зв'язку з цим для забезпечення прийнятних обсягів обчислювальних витрат необхідним є застосування ефективних засобів скінченоелементної дискретизації і ефективних алгоритмів розв'язання систем рівнянь.

Фізичні співвідношення континуальної механіки руйнування в умовах повзучості. Опис процесу деформування матеріалу лопатки в умовах повзучості здійснюється з використанням теорії накопичення пошкоджень Ю.М.Работнова [9, 16]:

$$\begin{cases} \xi_i^c = D \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^m \\ \frac{d\omega}{dt} = C \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega^r} \right]^m \frac{1}{(1-\omega)^q} \omega^\beta \end{cases}; \quad (1)$$

де $\xi_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt}$ – інтенсивність швидкості деформацій повзучості; ε_i^c – інтенсивність деформацій повзучості; t – час; ω – параметр пошкодженості Качанова-Работнова, $0 \leq \omega \leq 1$ [16]; $\sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s^{ij}}/2$ – інтенсивність нормальних напружень; D, m, C, r, q, β – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість, σ_e – еквівалентне напруження, обчислене із використанням критеріїв міцності.

Неоднорідний косокутний призматичний скінчений елемент для задач термов'язкопружності. Розв'язання задач термов'язкопружності передбачає необхідність визначення температурних деформацій, які обчислюються із використанням компонент метричного тензора. В той же час, опис геометрії просторових тіл потребує використання дискретних моделей великої розмірності, що призводить до значних обчислювальних витрат, які обумовлені необхідністю багатократного розв'язання систем рівнянь великої розмірності при використанні кроково-ітераційних алгоритмів розв'язання нелінійних задач. Зменшення обчислювальних витрат може бути досягнуто використанням нерегулярних скінченоелементних сіток і косокутних скінчених елементів, що враховують змінність компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу СЕ. З цією метою розроблений неоднорідний косокутний призматичний СЕ [4]. Виведення розв'язувальних співвідношень для неоднорідного косокутного призматичного СЕ з довільними граничними умовами на торцях проведено на основі моментної схеми скінчених елементів [17] в термінах фізичних величин деформацій і напружень:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{ii}g_{jj}}. \quad (2)$$

Ефективність використання такого підходу показана на тестових прикладах в [4].

Розв'язання стаціонарних задач теплопровідності на основі НМСЕ. Стаціонарна теплопровідність описується рівнянням Лапласа [13]:

$$\nabla^2 T = 0. \quad (3)$$

В криволінійній системі координат покомпонентна форма рівняння (3) набуває вигляду:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\lambda_T(T) g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial x^j} \right) = 0, \quad (4)$$

де λ_T – коефіцієнт теплопровідності; T – температура в точці тіла, що розглядається.

Граничні умови обумовлені розподіленням температур, заданим вздовж поверхні досліджуваного об'єкта S (граничні умови першого роду):

$$T(z^{i'}) = f(z^{i'}), \quad z^{i'} \in S. \quad (5)$$

Диференційне рівняння (4) з граничними умовами (5) еквівалентно варіаційному рівнянню просторової задачі стаціонарної теплопровідності [11]:

$$\delta\chi = \int_V \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial \delta T}{\partial x^j} g^{ij} dV = 0. \quad (6)$$

Для призматичних тіл в місцевій декартовій системі координат x^i варіаційне рівняння (6) має вигляд:

$$\delta\chi = \int_V (\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} + \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^3} \frac{\partial \delta T}{\partial x^3} g^{33}) dV = 0. \quad (7)$$

Для чисельного розв'язання задач теплопровідності розроблений неоднорідний призматичний скінчений елемент (рис.1), що являє собою призму, утворену рухом чотирикутника довільної форми вздовж прямої лінії (твірної). Вздовж вісі елемента розташована певна кількість точок інтегрування, передбачається можливість зміни теплофізичних характеристик матеріалу за напрямом твірної. При цьому передбачається, що коефіцієнт теплопровідності λ_T незначно змінюється в поперечному перерізі елемента і приймається рівним відповідному значенню в центрі перерізу:

$$\lambda_T = \overset{\circ}{\lambda}_T = \lambda_T \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (8)$$

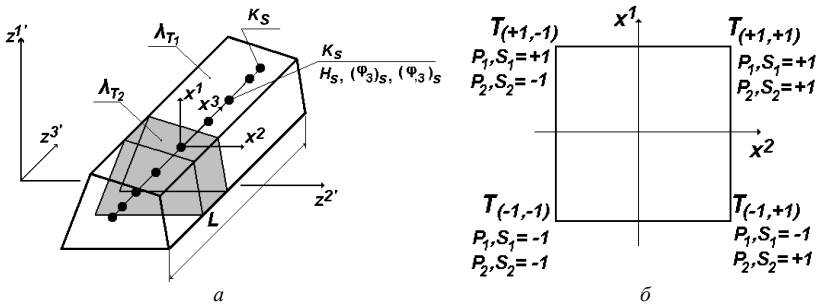


Рис. 1. Неоднорідний косокутний призматичний скінчений елемент для розв'язання задач теплопровідності в базисній системі координат (а) та його поперечний переріз в місцевій системі координат (б)

В якості невідомих при розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності приймається значення температури в вузлах елемента

$T_{(S_1, S_2)}$. В межах поперечного перерізу СЕ температура змінюється за білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (9)$$

В центрі поперечного перерізу температура та її похідні виражаються формулами:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)}; \\ \overset{\circ}{T}_{,\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} S_{\alpha}; \\ \overset{\circ}{T}_{,12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} S_1 S_2. \end{aligned} \quad (10)$$

В напрямку утворюючої (x^3) температура та її похідні апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій, утвореної на основі поліномів Лагранжа ($l = 0, 1$) і Міхліна ($l = 2, \dots, L$) [3]:

$$T_{(S_1, S_2)} = \sum_{l=0}^L T_{(S_1, S_2)}^l \varphi^{(l)}. \quad (11)$$

Кількість членів ряду L визначається з умов збіжності отриманого розв'язку задачі. Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє формулювати різні види граничних умов на торцях тіла шляхом виключення відповідних рівнянь [3].

Розв'язання варіаційного рівняння (7), яке описує розподілення температури в неоднорідному призматичному тілі, здійснюється за допомогою метода Канторовича (або процедури часткової дискретизації) [12] в вигляді лінійної комбінації незалежних базисних функцій за часовою та просторовою координатами. Підстановка апроксимацій (9) і (11) в вихідне варіаційне рівняння (7) приводить до співвідношення відносно невідомих функцій:

$$\delta \chi = \sum_{i=1}^M \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^L \sum_{S_1} \sum_{S_2} \sum_{P_1} \sum_{P_2} \int_V [\lambda_T (T_{(S_1, S_2)}^l \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right)) S_{\alpha}^*]$$

$$\begin{aligned}
 & * \delta T_{(P_1, P_2)}^l \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_\beta g^{\alpha\beta} \Phi^{(l)} \Phi^{(m)} + \\
 & + T_{(S_1, S_2), 3}^l \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) * \\
 & * \delta T_{(S_1, S_2), 3}^m \left(\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) g^{33} \Phi_{,3}^{(l)} \Phi_{,3}^{(m)}] dV \Big|_i = 0. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Грунтуючись на введених гіпотезах про постійність теплофізичних і геометричних характеристик в межах поперечного перерізу СЕ, а також з врахуванням значень інтегралів

$$\begin{aligned}
 & \int_{x^1=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1; & \int_{x^1=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0; \\
 & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1; & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0; \\
 & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta; \end{cases} \\
 & \int_{x^1=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0; & \int_{x^1=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^1)^2 (x^2)^2 dx^1 dx^2 = \frac{1}{144}, \quad (13) \\
 & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0; & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^1)^2 (x^2)^2 dx^1 dx^2 = \frac{1}{144},
 \end{aligned}$$

інтегрування по площі поперечного перерізу вдається виконати в замкнутій формі. В результаті маємо:

$$\begin{aligned}
 \delta \chi &= \sum_{i=1}^M \left[\sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^L \sum_{S_1} \sum_{S_2} \sum_{P_1} \sum_{P_2} \sum_{x^3} \int \lambda_T T_{(S_1, S_2)}^l \delta T_{(P_1, P_2)}^l (S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} * \right. \\
 & * \left. \left(1 + \frac{1}{12} S_1 P_1 + \frac{1}{12} S_2 P_2 \right) \Phi^{(l)} \Phi^{(m)} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) g^{33} \Phi_{,3}^{(l)} \Phi_{,3}^{(m)} \right] \sqrt{g} dx^3 \Big|_i = 0. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Введемо наступні співвідношення:

$$a_1^{lm} = \int_{x^3} \lambda_T \Phi^{(l)} \Phi^{(m)} dx^3; \quad a_2^{lm} = \int_{x^3} \lambda_T \Phi_{,3}^{(l)} \Phi_{,3}^{(m)} dx^3. \quad (15)$$

В силу довільності варіацій $\delta T_{(P_1, P_2)}^l$ рівняння (14) еквівалентне системі звичайних диференційних рівнянь з змінними коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^M \left[\sum_{l=0}^L \sum_{S_1} \sum_{S_2} \sum_{P_1} \sum_{P_2} A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}^{lm} T_{(S_1, S_2)}^l \right]_i = 0, \quad (16)$$

де

$$A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}^{lm} = \left[a_1^{lm} S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} \left(1 + \frac{1}{12} S_1 P_1 + \frac{1}{12} S_2 P_2 \right) + a_2^{lm} g^{33} \left(\frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) \right] \sqrt{g} -$$

коефіцієнти матриці теплопровідності.

До складу коефіцієнтів розкладу температур $T_{(S_1, S_2)}^l$ в рівнянні (16) входять як відомі величини, обчислені на основі заданих граничних умов (5) для вузлів на поверхні тіла, так і невідомі – для внутрішніх вузлів розглядуваної області, температура в яких підлягає визначенню. В процесі розв'язання системи рівнянь (16) її права частина формується як сума добутків відомих коефіцієнтів розкладу температур у вузлах на відповідні коефіцієнти матриці теплопровідності.

З метою доведення вірогідності результатів розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності із використанням отриманих співвідношень розглянуто тестову задачу про теплопровідність циліндричної стінки. Вихідні дані: $r_1 = 10$ мм, $r_2 = 40$ мм, температура на внутрішній поверхні стінки $T_1 = 100^\circ \text{C}$, температура на зовнішній поверхні стінки $T_2 = 400^\circ \text{C}$.

Дискретна модель МСЕ наведена на рис. 2. Поверхні вздовж осей z^1 та z^2 абсолютно теплоізолювані.

В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок отриманий в роботі [10]. Як видно, отримані результати майже повністю збігаються із еталонним розв'язком.

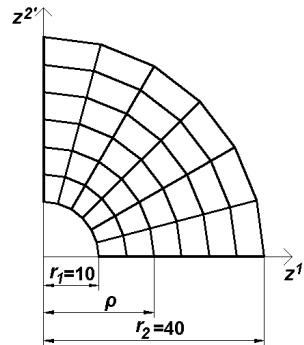


Рис. 2. Дискретна модель МСЕ

Таблиця 1

ρ , мм	Температура T , °C		Похибка, %
	аналітично	МСЕ	
10	100	100	0
15	187,74	186,62	0,60
20	250	247,87	0,85
25	298,27	296,12	0,72
30	337,74	336,62	0,33
35	371,10	370,33	0,21
40	400	400	0

На наступному етапі, з метою доведення вірогідності отримуваних на основі НМСЕ результатів, було розглянуто тестову задачу про теплопровідність призматичного стрижня. Вихідні дані: температура на торцях стрижня $T(z^2 = 0) = 100^\circ C$, $T(z^2 = 30) = 400^\circ C$. Поверхні вздовж інших граней абсолютно теплоізовані.

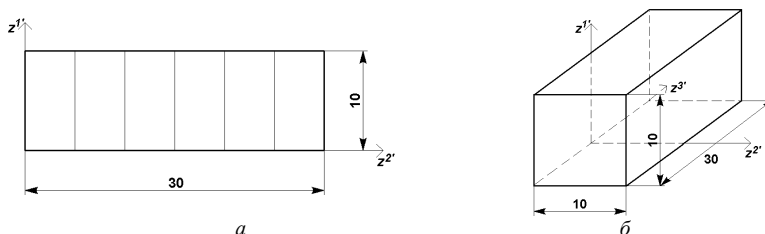
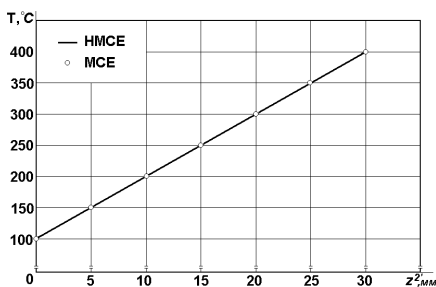


Рис. 3. Розрахункові дискретні моделі МСЕ (а) та НМСЕ (б)

Рис. 4. Графік розподілення температури по напрямку z^2 (z^3)

В якості еталонного прийнятий розв'язок отриманий на основі МСЕ. Як видно з наведеного графіка розподілення температури вздовж вісі стрижня (рис.4), результати отримані із використанням НМСЕ (рис.3,б) повністю збігаються із еталонним розв'язком.

Алгоритм розв'язання просторових задач термов'язкопружності. Розв'язання просторових задач термов'язкопружності потребує застосування ефективних алгоритмів, які орієнтовані на моделювання тривалих за часом процесів деформування матеріалу, що є інваріантними щодо використовуваних форм рівнянь повзучості та надають можливість урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від параметрів напружено-деформованого стану і температури.

Процес нелінійного деформування може бути поданий у вигляді сукупності дискретних кроків за параметрами зовнішнього навантаження – часом. Таким чином, для розв'язання задачі необхідним є використання покрокового алгоритму. В свою чергу, на кожному кроці для розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ використовуються ітераційні алгоритми.

Вибір величини кроку за параметром навантаження (Δt за часом) здійснюється виходячи з необхідності дотримання умов збіжності, як ітераційного процесу розв'язання систем нелінійних рівнянь, так і отримуваних результатів. При цьому значення Δt суттєво залежать від механічних характеристик матеріалу (параметрів кривих повзучості). Правильний вибір кроку за часом суттєво впливає на точність отримуваних результатів, тому проведення відповідних досліджень збіжності є важливим етапом розв'язання задачі.

Для урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від температури і зовнішнього навантаження на початку кожного кроку розв'язання задачі передбачено можливість їх коригування. В межах кроку фізико-механічні характеристики передбачаються незмінними.

Алгоритм розв'язання нелінійних задач має вигляд:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} (\{Q_l\}_n^m - \{R_l\}_n^m), \quad (17)$$

де β – параметр релаксації, $1 < \beta < 2$; $[K_{ll}]$ – матриця жорсткості, $\{Q_l\}_n^m$ – вектор вузлових навантажень на кроці m ; $\{R_l\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n .

При обчисленні вектора вузлових реакцій $[R_l]$, крім пружних деформацій, враховуються температурні деформації та деформації повзучості.

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L \left(\{ \Delta u \}_l^n \right)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L \left(\{ u \}_l^n \right)^2 . \quad (18)$$

Формула (17) описує метод блочних ітерацій із послідовною верхньою релаксацією для розв'язання систем нелінійних рівнянь, використання якого обмежено простим навантаженням в межах кроку m .

При реалізації даного алгоритму в роботах [1, 3] в якості першого наближення розв'язку задач на першій ітерації кроку m використаний розв'язок, що відповідає не звантаженому стану тіла ($\{u_l\}_1^m = 0$, $\{R_l\}_1^m = 0$). Але, при покроковому розв'язанні задач, зважаючи на необхідність виконання умов збіжності за кроками по параметру навантаження, відмінності розподілення параметрів напружено-деформованого стану при відносно невеликому співвідношенні прирощення параметра навантаження до його абсолютних значень є несуттєвими. Тому, для підвищення ефективності запропонованого алгоритму при розв'язанні задач в'язкопружності та, відповідно, зменшення обсягу обчислювальних витрат, було реалізовано підхід, що базується на застосуванні екстраполяції переміщень $\{\widehat{u}_l\}_1^m$ за їх величинами, отриманими на попередньому кроці $\{u_l\}^{m-1}$ та відношенням величин параметра навантаження даного $\{Q_l\}^m$ та попереднього $\{Q_l\}^{m-1}$ кроків:

$$\{\widehat{u}_l\}_1^m = \{u_l\}^{m-1} \frac{\{Q_l\}^m}{\{Q_l\}^{m-1}} . \quad (19)$$

За величиною отриманих переміщень обчислюються вузлові реакції $\{R_l\}_1^m$, які в подальшому використовуються в ітераційному процесі.

Визначення напружень при температурному навантаженні. В загальному випадку на кожному кроці розв'язання задач на першому етапі проводиться визначення напружено-деформованого стану при термопружному деформуванні.

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій [2] визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij} , \quad (20)$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^{k'}, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу,

$\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при $T = T_0$.

Фізичні компоненти тензора температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^T = \frac{\varepsilon_{ij}^T}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}. \quad (21)$$

У відповідності до моментної схеми скінчених елементів (MCSE) [17] компоненти тензора температурних деформацій в поперечному перетині, що відповідає точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\varepsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^T &= 0; & \tilde{\varepsilon}_{33}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T x^\beta. \end{aligned} \quad (22)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент температурних деформацій в місцевій системі координат з врахуванням (21) та з підстановкою (20). Після відповідних перетворень та підстановок [2, 4] отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу температурних деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових температур:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\alpha T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} g_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\alpha T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\alpha T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} g_{12}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{\alpha T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} g_{33}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\alpha T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} g_{33} 2S_\beta. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{B}^T \right] \{ T \}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] \{ T \}, \quad (24)$$

$$\text{де } \{ T \}^T = \{ T_{(-1;-1)} \quad T_{(1;-1)} \quad T_{(-1;1)} \quad T_{(1;1)} \};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^T \right\}.$$

$$\left[\overset{\circ}{B}^T \right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;1)} \right]; \quad (25)$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;1)} \right].$$

Значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)}$ у виразі (25)

для неоднорідних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (23) з урахуванням обчислених за значеннями компонент метричного тензора для призматичних тіл [2]:

$$\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T g_{11} \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T g_{12} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T g_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T g_{33} \end{bmatrix}; \quad \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{\alpha} g_{33} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Коефіцієнти розкладання прирощень напружень визначаються за величинами повних і температурних деформацій:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left(\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} - \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} \right), \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] \left(\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} - \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} \right), \quad (27)$$

де $\left[\overset{\circ}{D} \right] = \left[\overset{\circ}{C}^{ijkl} \right]$, $\left[\overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] = \left[\left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij33} \right] \right]$, C^{ijkl} –

компоненти тензора пружних сталей для ізотропного тіла;

$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}$, $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}$ – компоненти величин повних деформацій в векторній формі.

Обчислення напружень при наявності деформацій повзучості. На кожній ітерації $n+1$ кроку m розв'язання системи нелінійних рівнянь здійснюється із використанням алгоритму (17) [3]. На початку кожної ітерації $n+1$ кроку m компоненти тензора напружень σ_{ij} обчислюються за формулою:

$$\left(\sigma_{ij} \right)_{n+1} = \left(\sigma_{ij} \right)_n + \left(\Delta \sigma_{ij} \right)_{n+1}, \quad (28)$$

де $\left(\Delta \sigma_{ij} \right)_{n+1}$ – прирощення напружень, які визначаються згідно з законом Гука за величиною прирощення деформацій, обчислених згідно (27).

Дійсні значення напружень, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_{n+1}^m$, обчислюються за формулою:

$$\left(\overline{\sigma}_{ij} \right)_{n+1}^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\sigma_{ij} \right)_{n+1}^m + \left(\overline{s}^{ij} \right)_{n+1}^m = \left(\sigma_o \right)_{n+1}^m + \left(\overline{s}^{ij} \right)_{n+1}^m, \quad (29)$$

де $\left(\overline{s}^{ij} \right)_{n+1}^m$ – компоненти девіатора напружень, що враховують прирощення нелінійних деформацій.

Визначення компонент девіатора тензора дійсних напружень при наявності деформацій повзучості здійснюється за формулою:

$$\left(\overline{s}^{ij} \right)_{n+1}^m = \left(s^{ij} \right)_{n+1}^m - G_1 \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c \right)_{n+1}^m, \quad \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c \right)_{n+1}^m = \left(\xi_{ij}^c \right)_{n+1}^m \Delta t_m, \quad (30)$$

де $(\xi_{ij}^c)_{n+1}^m = \frac{3}{2} [\xi_i^c]_m^{n+1} \frac{(s_{ij})_{n+1}^m}{(\sigma_i)_{n+1}^m}$, Δt_m – величина кроку за часом.

Напруження, отримані за формулами (28) – (30), використовуються для подальшого обчислення вектора вузлових реакцій і перевіряються за умовою (18), після виконання якої проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій повзучості $(\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m$ і пошкодженості $(\Delta \omega)_m$:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ij}^c)_m &= (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t_m, \\ \omega_m &= \omega_{m-1} + (\Delta \omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_m \Delta t_m. \end{aligned} \quad (31)$$

Формули (28)–(31) є інваріантними щодо конкретизованого вигляду виразів ξ_i^c і $\frac{d\omega}{dt}$ (1).

У кінці кожного кроку для всіх точок тіла здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу:

$$\omega > \omega^*, \quad (32)$$

де ω^* – критичне значення параметра пошкодженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу.

Теоретично $\omega^* = 1$ [16], але при чисельному розв'язанні задач для ξ_i^c і $\frac{d\omega}{dt}$ приймається $\omega^* < 1$ ($\omega^* = 0,9 - 0,99$ [3]).

Момент часу t^* , коли хоч в одному із СЕ задовольняється умова (32), фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і несучильностей у матеріалі, що враховуються інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів. Моделювання їхнього розвитку до утворення початкових тріщин може бути продовжено на основі співвідношень континуальної механіки руйнування [3].

Ефективність розв'язання задач термов'язкопружності з використанням алгоритму з екстраполяцією переміщень. Для дослідження вірогідності отримуваних результатів на основі викладеного алгоритму при розв'язанні задач повзучості було розглянуто тестовий приклад про деформування в умовах повзучості тонкостінної труби,

дискретна модель якої побудована із використанням призматичних неоднорідних СЕ (рис.5).

Деформування в умовах повзучості описується системою рівнянь:

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A \frac{Sh(\sigma/c)}{(1-\omega)^{k_1}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (33)$$

де $A = 3,12 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}$, $k_1 = 2,36$, $c = 20,5 \text{ МПа}$, $B = 0,58 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3,17} \text{ год}^{-1}$, $k_2 = 3,17$ – константи матеріалу при $T = 850^\circ \text{C}$ [14].

Розв'язання задачі проведено при незмінному кроці за часом Δt_0 . Крива повзучості (рис. 6), що отримана з використанням викладеного алгоритму розв'язання задач повзучості, при $\sigma = 60 \text{ МПа}$, добре узгоджується з експериментальним результатом, наведеним в роботі [14] (похибка менше 2%).

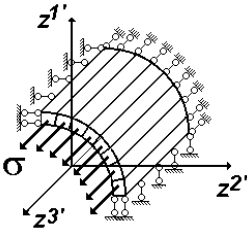


Рис. 5. Дискретна модель

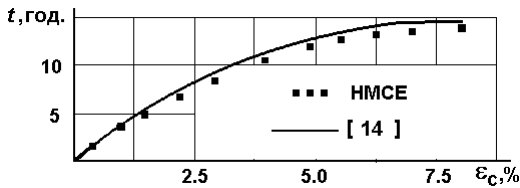


Рис. 6. Крива повзучості тонкостінної труби

Розтягування призматичного стрижня. Для доведення вірогідності отримуваних результатів та ефективності алгоритму з екстраполяцією переміщень для задач повзучості було розглянуто тестовий приклад про деформування призматичного стрижня під впливом постійного розтягуючого навантаження (рис. 7) [3]. Деформування в умовах повзучості описується системою рівнянь (33) і відповідними до них константами.

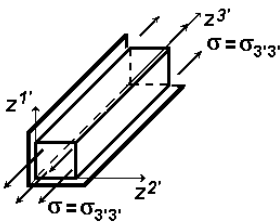


Рис. 7. Розрахункова схема призматичного стрижня

Еталонний розв'язок отриманий на основі МСЕ. Отримані результати розрахунку засвідчують високу ефективність розробленого алгоритму з екстраполяцією переміщень (19) порівняно з алгоритмом, що не враховує екстраполяції переміщень: зменшення

обсягу обчислювальних витрат більш ніж в два рази (рис. 8). При цьому забезпечується однакова точність визначення значень параметру пошкодженості на основі обох алгоритмів (рис. 9).

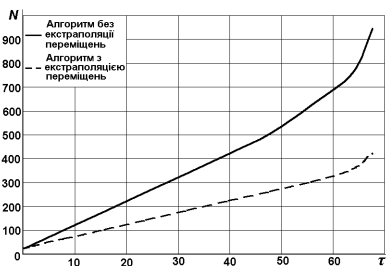


Рис. 8. Залежність зміни кількості ітерацій розв'язання задачі з часом

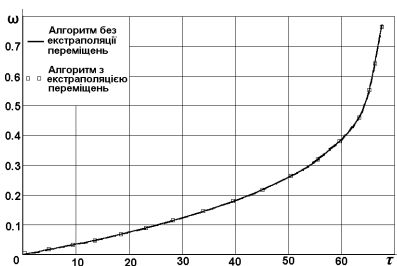


Рис. 9. Залежність зміни параметра пошкодженості з часом

В'язкопружне деформування прямокутної пластини під впливом постійного розтягуючого навантаження. Прямокутна пластинка розмірами 120x70x10 мм знаходиться під дією розтягуючого зусилля

$$q = 3400 \text{ кг/см}^2 \quad (\text{рис. 10}),$$

механічні характеристики матеріалу є наступними:

$$E = 1.64 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0.26.$$

Деформування в умовах повзучості описується системою рівнянь:

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q},$$

де $B=B(T)$, $D=D(T)$, $m=m(T)$,

$n=n(T)$, $r=r(T)$, $q=q(\sigma, T)$ – константи рівняння; T – температура.

Результати розв'язання тестового прикладу засвідчують, що застосування розробленого алгоритму з екстраполяцією переміщень (19) дозволяє отримувати більш точні результати порівняно з алгоритмом, що не враховує екстраполяції переміщень при значно меншій точності розв'язання системи рівнянь ζ (рис. 12) та, відповідно, менших обчислювальних витратах (рис. 11).

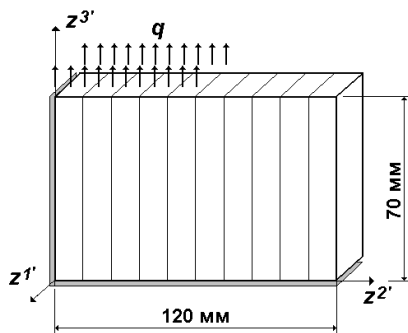


Рис. 10. Дискретна модель прямокутної пластини

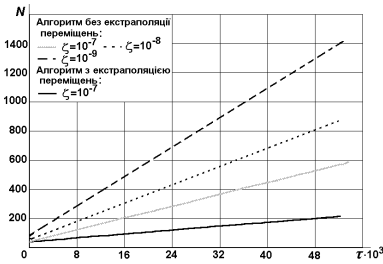


Рис. 11. Зміна кількості ітерацій для розв'язання задачі

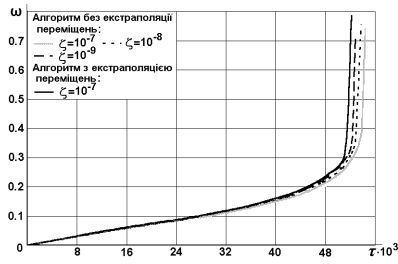


Рис. 12. Залежність зміни параметра пошкодженості з часом

Алгоритм моделювання розвитку зон континуального руйнування. Зона континуального руйнування являє собою об'єм матеріалу в межах якого несуча здатність матеріалу вичерпана. Момент виникнення зони континуального руйнування t^* визначається згідно з рівнянням (32) досягненням параметра пошкодженості критичного значення. При скінченоелементному розв'язанні задачі континуального руйнування об'єм зони континуального руйнування визначається параметрами дискретної моделі – розмірами СЕ при використанні МСЕ (рис. 13,а) і розмірами поперечного перерізу СЕ та кількістю поліномів в розкладі переміщень при використанні НМСЕ (рис. 13,б).

Для моделювання зони континуального руйнування в околі точки інтегрування K з координатами $z_K^3 = z^{3*}$ в СЕ, координати центра ваги якого (z^{1*}, z^{2*}) , в момент часу $t = t^* + \Delta t$ вводиться порожнина об'ємом V_0 , в межах якої напруження дорівнюють нулю, а модуль пружності матеріалу близький до нуля:

$$\sigma_{ij} = 0, \quad E \approx 0. \quad (34)$$

Подальше визначення напружено-деформованого стану і параметра пошкодженості для нової розрахункової схеми, що містить порожнину, і часу до досягнення умов $\omega = \omega^*$ в прилеглих до порожнини точках виконується за алгоритмом (17), (28) – (31).

Проміжок часу до кожної наступної зміни конфігурації зони континуального руйнування за рахунок приєднання до неї нових об'ємів матеріалу V_i позначимо Δt_i^* . Розв'язання задачі проводиться до досягнення порожниною заданого об'єму $V = V_0 + \sum_i V_i$. При цьому

визначається час $t_v = t^* + \sum_i t_i$, впродовж якого відбувається зростання зони континуального руйнування.

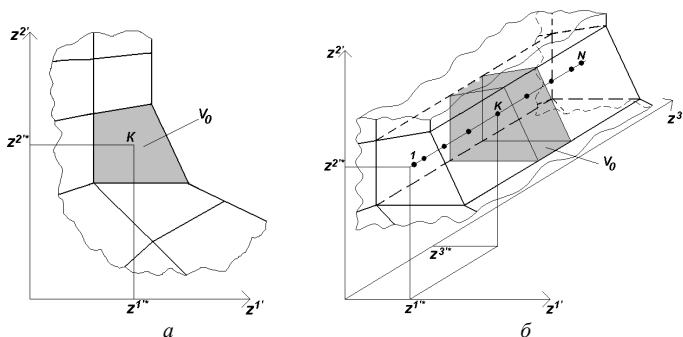


Рис. 13. Початкова зона континуального руйнування при розв'язанні задачі з використанням МСЕ (а) та НМСЕ (б)

Таким чином, повний ресурс t_v складається з основного ресурсу t^* , що пов'язаний зародженням, зростанням і об'єднанням мікроскопічних дефектів, та з додаткового ресурсу $\sum_i t_i$ – часу зростання зони континуального руйнування.

Для доведення вірогідності запропонованого алгоритму, розв'язання вищенаведеного тестового прикладу було продовжено після досягнення параметром пошкодженості критичного значення (рис. 14).

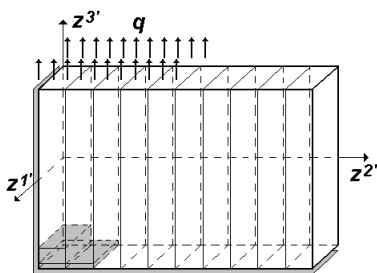


Рис. 14. Розвиток зони континуального руйнування в пластині

Результати розрахунку із використанням МСЕ і НМСЕ засвідчили, що якісний характер розвитку зони континуального руйнування є однаковим. Кількісне порівняння величин накопичення пошкодженості ω в різні моменти часу при розрахунку за допомогою МСЕ та НМСЕ, засвідчило, що процеси деформування майже повністю співпадають.

Дослідження впливу температурного навантаження на основний та додатковий ресурс лопатки газотурбінної установки. Лопатка є просторовим тілом складної форми, характерні розміри якого по висоті значно перевищують розміри поперечного перерізу. Перо лопатки закручене відносно вертикальної осі, має змінну по висоті площу поперечного перерізу і знаходиться під впливом відцентрового навантаження в неоднорідному, як по висоті, так і в поперечних перерізах полі температур.

Розв'язання задачі повзучості лопатки в цілому пов'язане із значними обчислювальними витратами. Результати дослідження просторового напружено-деформованого стану лопатки виконані в припущенні пружного деформування на основі тривимірного МСЕ засвідчили, що напружено-деформований стан лопатки є суттєво неоднорідним як по висоті, так і в межах поперечних перерізів. В роботі [3] розглянуто питання можливості фрагментації лопатки і застосування НМСЕ для визначення напружено-деформованого стану неоднорідних просторових призматичних тіл змінної геометрії. На основі цих результатів було обрано небезпечний поперечний переріз лопатки R_0 , комбінація усередненого напруження σ_0 і усередненої температури T_0 в якому призводить до найбільш інтенсивного накопичення деформацій повзучості. Для проведення чисельного моделювання деформування в умовах повзучості було розглянуто фрагмент пера лопатки в околі небезпечного перерізу R^* , $0,94 R_0 < R < 1,06 R_0$ (рис. 15,а) в межах якого спостерігається найбільш нерівномірне розподілення напружень і, відповідно, очікується найбільш суттєве їх перерозподілення в умовах повзучості. Моделювання впливу верхньої частини лопатки здійснюється шляхом прикладення до перерізу $R = 1,06 R_0$ нерівномірно розподіленого навантаження q , що відповідає діючим в цьому перерізі напруженням. Крім того, фрагмент завантажений розподіленням за об'ємом відцентровим навантаженням p . Фрагмент лопатки, що розглядається, може бути віднесений до неоднорідних призматичних тіл. Відповідна дискретна модель НМСЕ, утворена із використанням неоднорідних призматичних СЕ, наведена на рис.15,б. Зовнішнє неоднорідне температурне поле в межах розглядуваного фрагмента наведене на рис.16.

В роботах [1,3] проведений розгляд питання про визначення напружено-деформованого стану та основного t (викладені в роботах [1, 3] результати розв'язання задачі із визначення ресурсу лопатки отримані за участю В.П.Андрієвського) і додаткового ресурсу лопатки під дією силового навантаження. Зазначені результати були отримані без урахування температурних деформацій. Крім того, розв'язання задачі

виконане із використанням не ортогональних скінчених елементів, що не враховують змінність компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу. Зважаючи на наведені в роботі [3] результати, що свідчать про суттєвий вплив навіть незначних відхилень в значеннях параметрів напружено-деформованого стану на величину розрахункового ресурсу, а також наведені вище і в статті [4] висновки про ефективність застосування косокутних скінчених елементів при розв'язанні задач термов'язкопружнопластичності, становить інтерес дослідження впливу урахування температурних деформацій та змінності компонент метричного тензора в площині поперечних перерізів СЕ на величину розрахункового ресурсу лопатки.

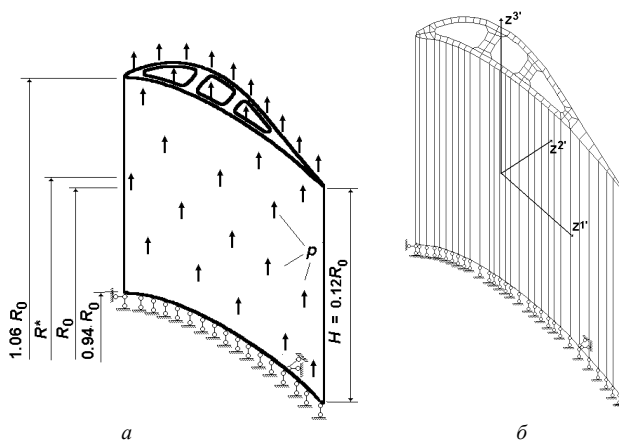


Рис. 15. Лопатка газотурбінної установки:

а – розрахункова модель; б – дискретна модель НМСЕ

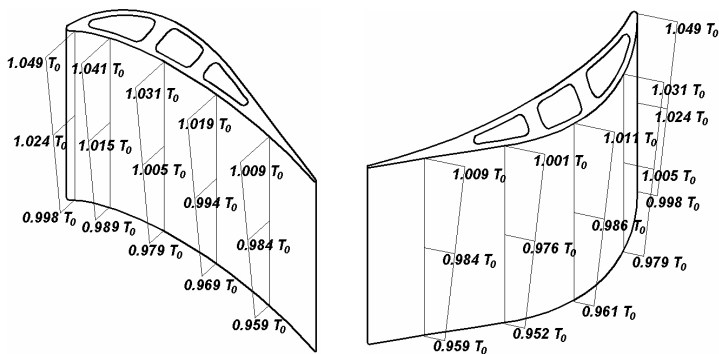


Рис. 16 Зовнішнє температурне поле

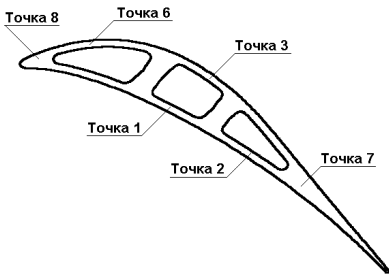


Рис. 17. Характерні точки в поперечному перерізі лопатки при $R=R^*$

На першому етапі розв'язання задачі було проведено порівняння величин напружень, отриманих при пружному деформуванні лопатки в роботі [3] та із застосуванням неоднорідних косокутних СЕ [4] (табл. 2, розташування характерних точок поперечного перерізу лопатки при $R=R^*$ наведено на рис. 17).

Таблиця 2

Величини безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0 в характерних точках лопатки при дії на силового навантаження

Спосіб обчислення g_{ij}	точка 1	точка 2	точка 3	точка 6	точка 7	точка 8
$g_{ij} = const$ [3]	1,4177	1,3476	1,2705	0,8570	1,1535	0,7630
$g_{ij} = f(z^i)$	1,4196	1,3519	1,2713	0,8571	1,1543	0,7771

Максимальна відмінність величин напружень, отриманих при пружному деформуванні лопатки з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу від отриманих в [3] становить близько 2% і спостерігається в точці т.8, де в подальшому при накопиченні деформацій повзучості величина параметру пошкодженості є незначною. В точці 1, де в подальшому розпочинається утворення початкової зони континуального руйнування, час виникнення якої визначає основний ресурс лопатки, ця розбіжність є набагато меншою і становить біля 0,2%. Подальше розв'язання задачі повзучості і визначення розрахункового ресурсу засвідчило, що навіть таке незначне збільшення величин інтенсивності напружень призводить зміни величини основного розрахункового ресурсу. Значення величини основного розрахункового ресурсу лопатки зменшилось на 7%. Це уточнене значення ресурсу позначається t^* .

Дослідження збіжності результатів визначення основного ресурсу за кількістю гармонік у розкладанні переміщень показало, що характер збіжності результатів є таким самим як в роботі [3], (рис. 19, а).

Дослідження збіжності величин ресурсу лопатки з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу

СЕ до початку руйнування проводилось при згущенні скінченоеlementної сітки в площині поперечного перерізу при сталому числі гармонік $L=30$. Були розглянуті скінченоеlementні моделі (рис. 18) отримані шляхом двократного (позначена «2X»), чотирикратного («4X») і восьмикратного («8X») згущення сітки, наведеної на рис. 15,б.

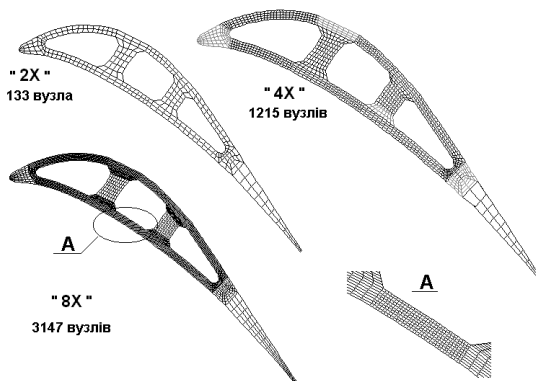


Рис. 18. Скінченоеlementні моделі в поперечному перерізі лопатки

Як видно з наведеного графіка (рис. 19, б), похибка величин ресурсу на однакових скінченоеlementних моделях при порівнянні результатів розрахунків отриманих при застосуванні розв'язувальних співвідношень, що не враховують змінності компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу для СЕ [3] та результатів отриманих при застосуванні розв'язувальних співвідношень, що враховують змінності компонент метричного тензора поступово зменшується з згущенням сітки: так для сітки «1X» вона становить біля 7%, а вже для сітки «8X» – менше 1%.

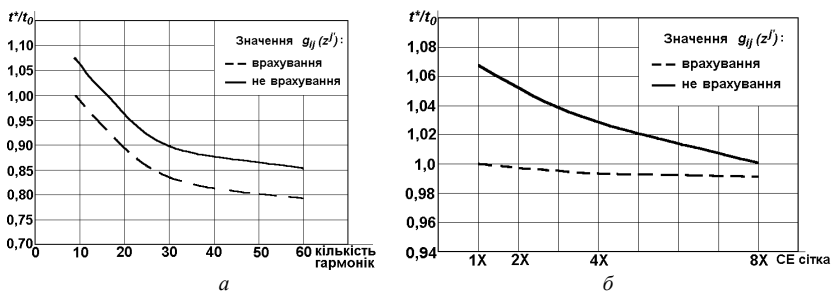


Рис. 19. Збіжність часу до початку руйнування залежно від кількості гармонік в апроксимації переміщень (а) та від використовуваної скінченоеlementної моделі (б).

З отриманих результатів можна зробити висновок, що застосування розв'язувальних співвідношень, що враховують змінності компонент метричного тензора дозволяє отримувати більш точні результати на сітці з меншою кількістю невідомих. Тому в подальших розрахунках будемо використовувати скінченоелементну модель, наведену на рис. 15,б.

Порівняння величин накопиченої пошкодженості ω в т.1 поперечного перерізу $R^* = 1.01R_0$, де відбувається утворення початкової зони руйнування, та в т.1 по висоті лопатки в різні моменти часу отриманих, в [3] і в даній роботі на основі співвідношень, що враховують змінність компонент метричного тензора, проілюстровано відповідними графіками (рис. 20, 21).

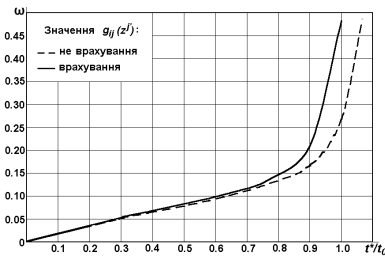


Рис. 20. Залежність зміни параметра пошкодженості з часом в т.1 радіусу $R^* = 1.01R_0$

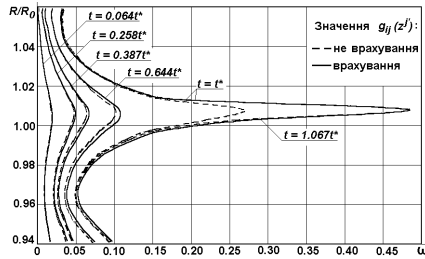


Рис. 21. Зміна розподілення пошкодженості в т.1 по висоті фрагмента лопатки

На рис. 22 та рис. 23 наведено порівняння розподілення величин безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0 в т.1 поперечного перерізу $R^* = 1.01R_0$ та в т.1 по висоті лопатки в різні моменти часу, отриманих в [3] та в даній роботі.

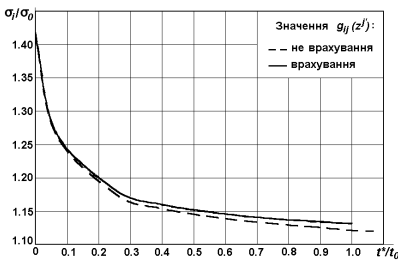


Рис. 22. Залежність зміни величин безрозмірної інтенсивності напружень з часом в т.1 радіусу $R^* = 1.01R_0$

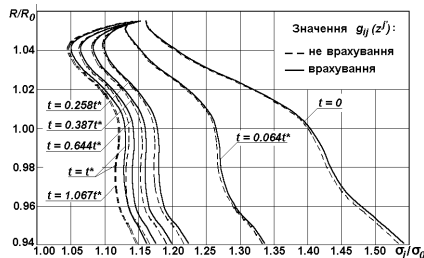


Рис. 23. Зміна розподілення безрозмірної інтенсивності напружень в т.1 по висоті фрагмента лопатки

Як видно з графіків в початкові моменти часу розподілення пошкодженості (рис. 21) та величини безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 23) отриманих в [3] та в даній роботі, майже повністю збігаються. З часом, по мірі накопичення деформацій повзучості і пошкодженості, похибка визначення напружень зростає до 2%, що призводить до похибки визначення параметра пошкодженості біля 7%, що відповідно відображається на величині розрахункового ресурсу. Зростання відмінності у величинах накопиченої пошкодженості та інтенсивності напружень проілюстровано також графіками їх залежності від часу. (рис. 20, 22).

При розв'язанні задачі був проведений аналіз ефективності застосування розробленого алгоритму розв'язання нелінійних задач з екстраполяцією переміщень (19). Застосування цього алгоритму дозволяє скоротити обчислювальні витрати при визначенні розрахункового ресурсу лопатки газової турбіни порівняно з алгоритмом, що не враховує екстраполяцію переміщень більш ніж в 3 рази (рис. 24), при цьому забезпечується достатньо висока точність обчислень, що підтверджено ідентичністю перебігу процесу накопичення пошкодженості в т.1 радіусу $R^* = 1.01R_0$ на протязі всього процесу деформування (рис. 25). Розрахунок виконувався при однакових вихідних умовах та кроком за часом.

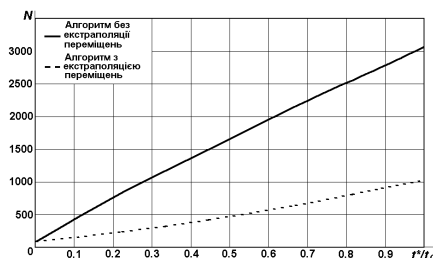


Рис. 24. Залежність зміни кількості ітерацій розв'язання задачі з часом

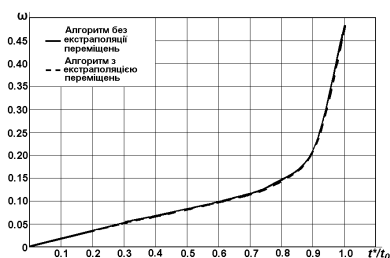


Рис. 25. Зміна параметра пошкодженості з часом в т.1 по висоті фрагмента лопатки

На другому етапі розв'язання даної задачі проведено дослідження впливу неоднорідного температурного поля на еволюцію параметрів напружено-деформованого стану і розрахунковий ресурс лопатки. При цьому була врахована змінність компонент метричного тензора в площині поперечного перерізу та застосовувався алгоритм розв'язання системи рівнянь з екстраполяцією переміщень.

Розподілення температури в лопатці було визначено на основі розв'язання просторової задачі стаціонарної теплопровідності (16). Ці

результати відображені на рис. 26 у вигляді ізоліній температури в характерних перерізах лопатки. Значення температур подані через середню температуру $T(R^*)=T_0$ в перерізі при $R=R^*$. Зміна температури по висоті лопатки описується лінійним законом, максимальні і мінімальні значення лежать в межах $\pm 2,5\%$ від $T(R^*)$.

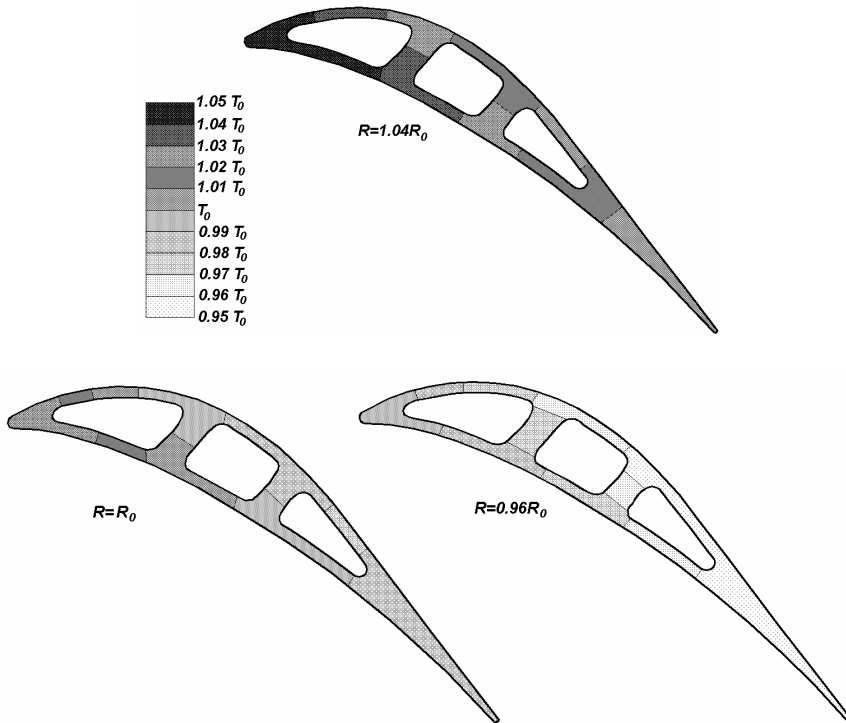


Рис. 26. Розподілення температури в поперечних перерізах лопатки

Порівняння результатів розрахунку в припущенні пружного деформування при дії силового та термосилового (з урахуванням температурних деформацій) навантажень проведено для декількох характерних точок поперечного перерізу лопатки перерізу $R=R^*$. Максимальна відмінність величин безрозмірної інтенсивності напружень становить близько 10% і спостерігається в точці, де під час деформування в умовах повзучості величина пошкодженості є незначною. В точці 1, де розпочинається утворення початкової зони континуального руйнування, ця відмінність становить лише біля 2,5%.

Таблиця 3

Порівняння величин безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0 в характерних точках лопатки при дії силового і термосилового навантаження

Навантаження	точка 1	точка 2	точка 3	точка 6	точка 7	точка 8
Силове	1,4196	1,3519	1,2713	0,8571	1,1543	0,7771
Термосиллове	1,3835	1,3087	1,2071	0,8264	1,1350	0,7047

Результати розв'язання задачі повзучості і визначення розрахункового ресурсу засвідчили, що навіть таке незначне зменшення величин інтенсивності напружень призводить до збільшення величини розрахункового ресурсу лопатки приблизно на 9%. Таким чином, уточнена величина розрахункового ресурсу, отримана при врахуванні температурного навантаження становить $t_t^* = 1,089t^*$.

Порівняння накопичення пошкодженості ω в т.1 перерізу $R^* = 1.01R_0$ та в т.1 по висоті лопатки в різні моменти часу, отриманих при силовому та термосиловому навантаженнях, проілюстровано відповідними графіками (рис. 27, 28).

Абсолютні величини розбіжностей величини параметра пошкодженості в початкові моменти часу є незначними. З часом на стадії встановленої повзучості різниця величин параметра пошкодженості досягає 9% і далі збільшується, що відповідно відображається на величині розрахункового ресурсу.

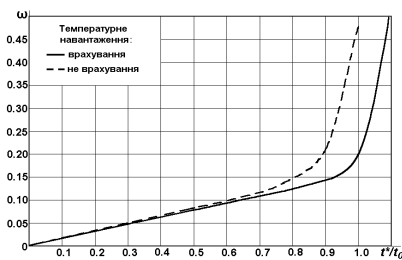


Рис. 27. Залежність зміни параметра пошкодженості з часом в т.1 радіусу $R^* = 1.01R_0$

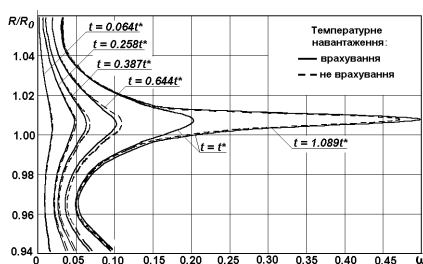


Рис. 28. Зміна розподілення пошкодженості в т.1 поперечного перерізу

На графіках (рис. 29, 30) наведено порівняння розподілення величин безрозмірної інтенсивності напружень σ_i/σ_0 в т.1 радіусу $R^* = 1.01R_0$ та

в т.1 по висоті лопатки в різні моменти часу, отриманих при силовому та термосиловому навантаженнях. Необхідно відзначити, що з плином часу абсолютна відмінність величин напружень майже не змінюється: менші величини напружень при наявності температурних навантажень призводять до збільшення основного розрахункового ресурсу.

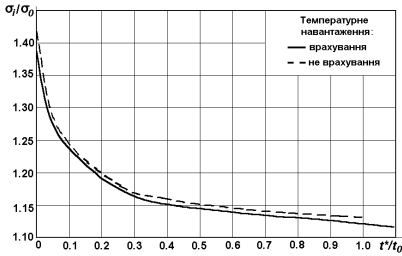


Рис. 29. Залежність зміни величин безрозмірної інтенсивності напружень з часом в т.1 радіуса $R^* = 1.01R_0$

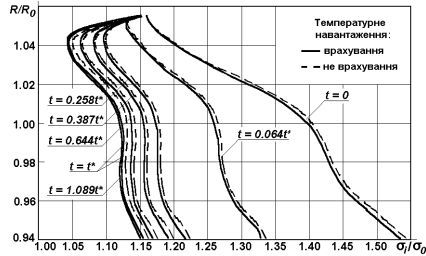


Рис. 30. Зміна розподілення безрозмірної інтенсивності напружень в т.1 по висоті фрагмента лопатки

На наступному етапі було виконано моделювання розповсюдження зони континуального руйнування – визначення додаткового ресурсу лопатки. Конфігурації зони континуального руйнування в межах всього поперечного перерізу лопатки на різних стадіях її розвитку, отримані із використанням скінченоелеметної моделі «1X» при урахуванні змінності компонент метричного тензора g_{ij} , і найбільш густої сітки «8X» при $g_{ij} = const$ є однаковими (рис. 31).

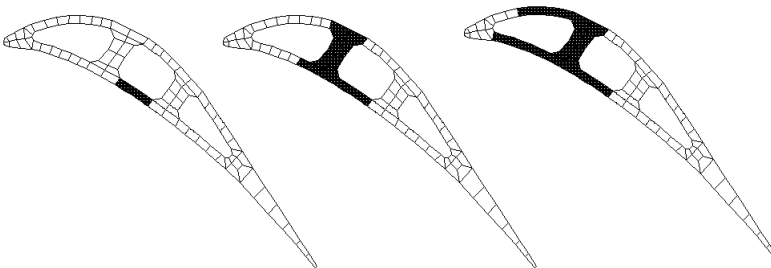


Рис. 31. Розвиток зони континуального руйнування в поперечному перерізі лопатки.

Величини додаткового ресурсу, пов'язані із прирощенням розмірів зони континуального руйнування з $\frac{1}{4}$ (рис. 32,а) до $\frac{1}{2}$ (рис. 32,б) довжини

стілки лопатки та з $\frac{1}{2}$ на всю довжину стінки лопатки (рис. 32,в) також не змінились і становили відповідно $t_I^* = 1.01t_I^*$ і $t_{II}^* = 1.008t_I^*$.

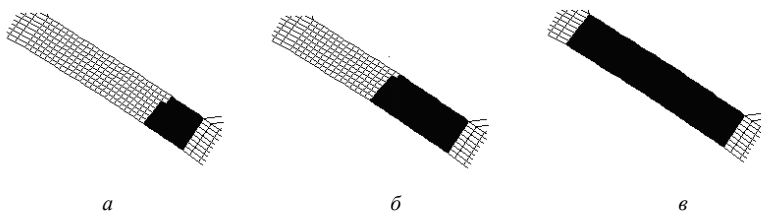


Рис. 32. Розвиток зони континуального руйнування в стінці лопатки

Величина додаткового ресурсу, отримана при врахуванні температурного навантаження порівняно з результатами отриманими в роботі [3] майже не змінюється.

Таким чином в даній роботі проведено визначення напружено-деформованого стану і величин основного та додаткового ресурсу лопатки газотурбінної установки в умовах тривалого силового навантаження за наявності неоднорідного температурного поля.

Розв'язання цієї задачі потребувало розробки і дослідження вірогідності алгоритмів розв'язання задач стаціонарної теплопровідності та моделювання зон континуального руйнування.

В ході розв'язання поставленої задачі також проведено дослідження використання неоднорідних призматичних скінчених елементів з урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу, що дозволило суттєво зменшити обчислювальні витрати за рахунок використання дискретних моделей із меншою кількістю невідомих.

Проведене дослідження ефективності алгоритму розв'язання задачі повзучості з екстраполяцією переміщень засвідчило, що його застосування дозволяє зменшити обчислювальні витрати мінімум вдвічі при однаковій точності розв'язку системи нелінійних рівнянь. При цьому досягнення однакових результатів, зокрема за величинами пошкоженості та часу до початку руйнування, при використанні алгоритму без екстраполяції переміщень потребує збільшення точності розв'язку системи нелінійних рівнянь, що приводить до відповідного збільшення кількості ітерацій.

Проведене визначення ресурсу до початку руйнування лопатки газотурбінної установки в умовах термосилового навантаження на основі напіваналітичного метода скінчених елементів (НМСЕ). показало, що врахування нерівномірного розподілення температур в площині

поперечного перерізу не спричиняє суттєвого впливу на величину основного ресурсу. В той же час урахування нерівномірного розподілу температур по висоті дозволяє уточнити величину розрахункового основного ресурсу лопатки більш ніж на 8,9%. При цьому залежність його зміни від температури має майже лінійний характер, а величина додаткового ресурсу і характер розповсюдження зони континуального руйнування при урахуванні температурного навантаження фактично не змінюється.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Шкрюль А.А.* Определение ресурса лопатки газовой турбины в условиях ползучести на основе континуальной механики разрушения // Проблемы прочности. – 2006. – №4. – С. 87-93.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Андрієвський В.П.* Алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружнопластичності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості//Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006 р.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
4. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченого елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 76. – С.3–26.
5. *Балина В.С., Ланин А.А.* Прочность и долговечность конструкций при ползучести. – СПб.: Политехника, 1995. – 182 с.
6. *Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин. Справочник. – М.: Машиностроение, 1979. – 702с.
7. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990.– 448с.
8. *Гецов Л.Б.* Материалы и прочность деталей газовых турбин. – М.: Недра, 1996. – 591 с.
9. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикладная механика. – 2000. – № 3. – С. 31-66.
10. *Димніч А.Х., Троянський О.А.* Теплопровідність. Навчальний посібник – Донецьк, 2003. – 370 с.
11. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. –М.: Мир, 1975. – 539 с.
12. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимации. –М.: Мир, 1986. – 318 с.
13. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. К.: Наукова думка, 1965. – 205 с.
14. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения // Прикл. механика и техн. физика. – 1982. – № 1. – С. 160–163.
15. *Муравченко Ф.М.* Актуальные проблемы динамики, прочности и надежности авиадвигателей // Вибрації в техніці і технологіях. – 2004. –№6 (38). – С. 2–4.
16. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
17. *Сахаров А.С., Кислюк В.Н., Киричевский В.В.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. –479 с.
18. *Шульженко Н.Г., Гонтаровский П.П.* Анализ термонапряженного и вибрационного состояния роторов турбомашин. // Пробл. машиностроения. – 1998. – № 1. –С. 79–89.

УДК 539.3

Гоцуляк Є.О., д-р техн.наук,
 Дехтярюк Є.С., д-р техн.наук,
 Лук'янченко О.О., канд. техн. наук,
 Пошивач Д.В., асп.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ЗГИНУ ПРУЖНИХ СИСТЕМ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ РЕЗОНАНСІ

На основі чисельної методики побудовані редуковані дискретні моделі. Досліджена стійкість динамічних станів пружних систем при параметричному навантаженні. Визначенні області нестійкості плоскої форми згину двотаврової балки та плоскої ферми при комбінованому резонансі.

Досліджена динамічна стійкість плоскої форми згину пружних систем: двотаврової балки та плоскої ферми. Побудова редукованих моделей для чисельного визначення границь областей нестійкості виконана за допомогою методики, що наведена в статтях [1,2].

Дискретна математична модель динамічної стійкості пружної системи з кінцевим числом степенів вільності при дії параметричного навантаження записується у вигляді звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + C\dot{\bar{u}}(t) + K\bar{u}(t) + \varphi(t)K_G\bar{u}(t) = 0, \quad (1)$$

де $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ - вектор вузлових переміщень, M, C, K, K_G - матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, $\varphi(t)$ - параметричне навантаження.

Пряме застосування дискретних моделей пов'язане з великими обчислювальними труднощами, тому для адекватного описання динамічної поведінки пружних систем виконується її редукція. В роботі побудова редукованої дискретної моделі виконується за допомогою методу скінченних елементів та методу узагальнених координат. Нетривіальний розв'язок системи (1) апроксимується виразом

$$\bar{u}(t) = V\bar{y}(t), \quad (2)$$

де $V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)^T$ - матриця розмірністю $n \times m$, що визначається системою базисних векторів $\{\bar{v}_k\}_{k=1}^m$; $\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ - вектор узагальнених координат.

Редукована дискретна модель динамічної стійкості пружної системи з урахуванням формул (1) та (2) набуває вигляду системи m звичайних диференціальних рівнянь

$$V^T M V \ddot{\bar{y}}(t) + V^T C V \dot{\bar{y}}(t) + V^T K V \bar{y}(t) + \varphi(t) V^T K_G V \bar{y}(t) = 0. \quad (3)$$

Якщо представити редуковані матриці мас M^* , демпфірування C^* , жорсткості K^* та геометричної жорсткості K_G^* розмірністю $m \times m$ відповідно виразами

$$M^* = V^T M V, \quad C^* = V^T C V, \quad K^* = V^T K V, \quad K_G^* = V^T K_G V, \quad (4)$$

система (3) запишеться у вигляді

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \varphi(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0. \quad (5)$$

Формування дискретних моделей двотаврової балки та плоскої ферми виконуються чисельно за допомогою процедур сучасного обчислювального комплексу скінченноелементного аналізу NASTRAN [3].

Двотаврова балка, яка навантажена періодичними в часі зосередженими силами $P(t)$ в площині найбільшої жорсткості, представлена на рис. 1.

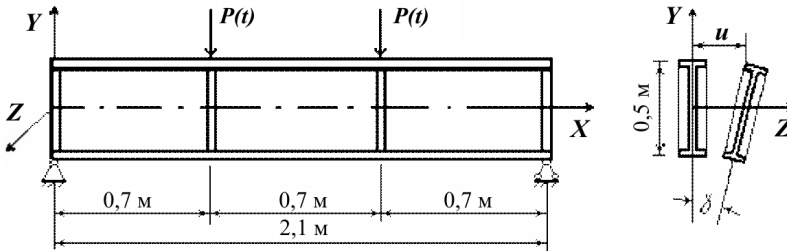


Рис. 1. Конструкція двотаврової балки

Геометричні та механічні характеристики балки приймалися такими: $h = 0.5$ м, $\delta_{cm} = 6$ мм, $\delta_{nl} = \delta_{pe\bar{o}} = 9$ мм, $b_{nl} = 0.21$ м, $E = 206$ ГПа, $G = 79.2$ ГПа, $\eta = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³.

Балка шарнірно спирається на кінцях. Навантаження приймається у вигляді $P(t) = P_0 \cos \omega t$ ($P_0 = 10^2$ кН). Таке періодичне навантаження є параметричним навантаженням по відношенню до згинально-крутильних деформацій із площини її дії.

Скінченноелементна модель двотаврової балки формується таким чином: полки і ребра моделюються балочними елементами; стінка - плоскими прямокутними елементами. По висоті стінка розбивається на 8 частин, по довжині на 42.

Задача динамічної стійкості плоскої форми згину балки (5) без врахування дисипативних сил набуває вигляду

$$\ddot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \varphi(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0, \quad (6)$$

тут $\bar{y}(t) = [u_1(t), \gamma_1(t)]^T$ - вектор узагальнених координат, $K^* = \begin{bmatrix} \omega_{1u}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{2\gamma}^2 \end{bmatrix}$

- редукована матриця жорсткості, $K_G^* = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ - редукована матриця геометричної жорсткості.

Базисні вектори $\{\bar{v}_k\}_{k=1}^m$ приймаються у вигляді векторів матриці власних форм коливань $\Phi = \{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^m = \{\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}\}$, тут $\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}$ - вектори першої згинальної та крутильної форм коливань, що визначаються при розв'язанні задачі на вільні коливання

$$(K - \omega^2 M)\varphi = 0, \quad (7)$$

де ω_k ($k = 1, 2, \dots, m$) - частоти власних коливань дискретної моделі. Система векторів $\{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^m$ ортогональна. Матриця власних форм нормована по матриці мас, тобто $\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i = E$, де $E = \text{diag}(1, 1)$.

Перші крутильна та згинальна форми коливань представлені на рис. 2, 3.

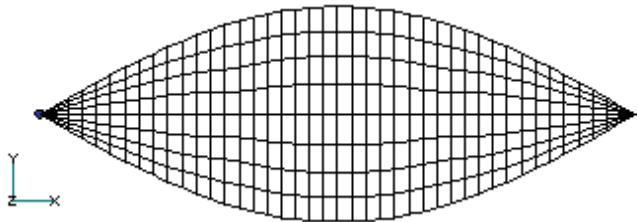


Рис. 2. Перша крутильна форма коливань двотаврової балки ($\omega_{1\gamma} = 580.748$ рад/с)



Рис. 3. Перша згинальна форма коливань двотаврової балки ($\omega_{1u}=451.798$ рад/с)

Редукована матриця жорсткості набуває вигляду діагональної матриці і обчислюється за формулою

$$K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1\gamma}^2) = \text{diag}(451.798^2, 580.748^2). \quad (8)$$

Для вірності результатів процедури редукування матриця K^* визначена за формулою (4), яка в нашому випадку набуває вигляду

$$K^* = \text{diag}(\overline{\Phi}_{1u}^T K \overline{\Phi}_{1u}, \overline{\Phi}_{1\gamma}^T K \overline{\Phi}_{1\gamma}). \quad (9)$$

За допомогою розв'язання лінійної задачі статки визначена реакція системи R_L на задане поле переміщень $\{\overline{\Phi}_k\}_{k=1}^m = (\overline{\Phi}_{1u}, \overline{\Phi}_{1\gamma})$ у вигляді

$$R_L = \text{diag}(K \overline{\Phi}_{1u}, K \overline{\Phi}_{1\gamma}), \quad (10)$$

Члени редукованої матриці жорсткості, що отримана за формулою (9), мають значення майже однакові з членами матриці (8)

$$K^* = \begin{bmatrix} 204121.336 & 0 \\ 0 & 337268.628 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Редукована матриця геометричної жорсткості, згідно чисельної методики [2], обчислюється за формулою

$$(K^* + K_G^*) - (K^*) = K_G^*. \quad (12)$$

Якщо позначити компоненти вектора переміщень через $x = u + \Delta v$, де u - переміщення, що відповідають вихідній конфігурації стану рівноваги; Δv - приріст переміщення при дії малого віртуального збудження, нелінійна задача статки запишеться у вигляді

$$K \cdot (u + \Delta v) + (S \cdot (u + \Delta v)) \cdot (u + \Delta v) + ((D \cdot (u + \Delta v)) \cdot (u + \Delta v)) \cdot (u + \Delta v) = P + R_N. \quad (13)$$

Тут S, D - квадратичний та кубічний нелінійні оператори відповідно; P - матриця вузлових навантажень, R - матриця реакцій пружної системи на задане поле переміщень; знак \bullet означає процедуру згортання операторів.

При розв'язанні плоскої задачі теорії пружності в докритичному стані квадратичні та кубічні нелінійні оператори відсутні. До того ж, якщо значно зменшити поле переміщень Δv , вираз (13) набуває вигляду

$$K \cdot u + K \cdot \Delta v + 2(S \cdot u) \cdot \Delta v = P + R_N, \quad (14)$$

де

$$K \cdot u = P, \quad 2(S \cdot u) = K_G. \quad (15)$$

З урахуванням (15) формула (14) запишеться у вигляді

$$(K + K_G) \cdot \Delta v = R_N. \quad (16)$$

При розв'язанні нелінійної задачі статичної (16) поле переміщень Δv приймається у вигляді векторів матриці власних форм коливань. Визначені реакції пружної системи у вигляді $(K + K_G)\bar{\varphi}_{1u}$, $(K + K_G)\bar{\varphi}_{1\gamma}$. Редукована сума матриць жорсткості та геометричної жорсткості обчислена з урахуванням амплітуди навантаження $P_0 = 10^5$ Н за формулою

$$\begin{aligned} (K^* + K_G^* \times 10^5) &= \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{1u}^T (K + K_G) \bar{\varphi}_{1u} & \bar{\varphi}_{1u}^T (K + K_G) \bar{\varphi}_{1\gamma} \\ \bar{\varphi}_{1\gamma}^T (K + K_G) \bar{\varphi}_{1u} & \bar{\varphi}_{1\gamma}^T (K + K_G) \bar{\varphi}_{1\gamma} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 204121.336 & -7016.278 \\ -7030.580 & 337268.628 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Згідно формули (10) визначена редукована матриця геометричної жорсткості

$$K_G^* \times 10^5 = \begin{bmatrix} 0 & -7016.278 \\ -7030.580 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Редукована модель, що описує динамічну стійкість плоскої форми згину двотаврової балки при амплітуді зовнішнього навантаження $P_0 = 1$ Н, набуває вигляду системи зв'язаних звичайних диференціальних рівнянь другого ступеня

$$\begin{cases} \dot{u}_k + 451.798^2 [u_k - 0.034373 \times 10^{-5} \varphi(t) \gamma_k] = 0, \\ \dot{\gamma}_k + 580.748^2 [\gamma_k - 0.0208456 \times 10^{-5} \varphi(t) u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

Для побудови областей нестійкості двотаврової балки при комбінованому резонансі застосована методика, що наведена в статті [3]. Рівняння динамічної стійкості двотаврової балки в матричному вигляді описується формулою

$$C_2 \frac{d^2 f}{dt^2} + [I - \varphi_0(t)A]f = 0, \quad (20)$$

де

$$C_2 = \begin{bmatrix} \omega_1^{-2} & 0 \\ 0 & \omega_2^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 451.798^{-2} & 0 \\ 0 & 580.748^{-2} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.034373 \times 10^{-5} \\ 0.0208456 \times 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметричне навантаження має вигляд $\varphi_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 \cos \omega t$, де α_0 та β_0 - відповідно статична та динамічна складові навантаження, ω - частота параметричного навантаження.

Необхідно, щоб виконувалися такі умови:

$$\omega_2 > \omega_1 > 0, \quad a_{12} \omega_1^2 = a_{21} \omega_2^2 = \delta > 0. \quad (21)$$

У нашому випадку: $580.748 \text{ рад/с} > 451.798 \text{ рад/с} > 0$ та $0.034373 \times 10^{-5} \times 451.798^2 = 0.0208456 \times 10^{-5} \times 580.748^2 = 0,07 > 0$.

Помножимо (20) на C_2^{-1} :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + [B_0 - \varphi(t)N]f = 0. \quad (22)$$

Тут матриці

$$B_0 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 451.798^2 & 0 \\ 0 & 580.748^2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметричне навантаження набуває вигляду

$$\varphi(t) = \alpha + \beta(t) \cos \omega t, \quad \alpha = \alpha_0 \delta, \quad \beta(t) = \beta_0 \delta, \quad (23)$$

тут коефіцієнт $\delta = 0,07$.

Побудова областей динамічної стійкості виконується для двотаврової балки при значеннях статичної складової параметричного навантаження $\alpha_0 = [0 \div 0,404 P_{кр}]$ і діапазону динамічної складової $\beta_0 = [1 \div 0,5 P_{кр}]$.

Значення критичного навантаження $P_{кр} = 807,8$ кН визначено за допомогою процедури розв'язання задачі стійкості.

Границі областей нестійкості при комбінованому резонансі обчислюється за формулою:

$$\omega_1 + \omega_2 - \frac{\beta}{2\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}} - \frac{(\alpha^2 + \frac{1}{8}\beta^2)}{2(\omega_1 + \omega_2)\omega_1 \cdot \omega_2} < \omega < \omega_1 + \omega_2 + \frac{\beta}{2\sqrt{\omega_{1u} \cdot \omega_{1\gamma}}} - \frac{(\alpha^2 + \frac{1}{8}\beta^2)}{2(\omega_1 + \omega_2)\omega_1 \cdot \omega_2} \quad (24)$$

На рис. 4 представлена діаграма областей нестійкості для двотаврової балки при комбінованому резонансі.

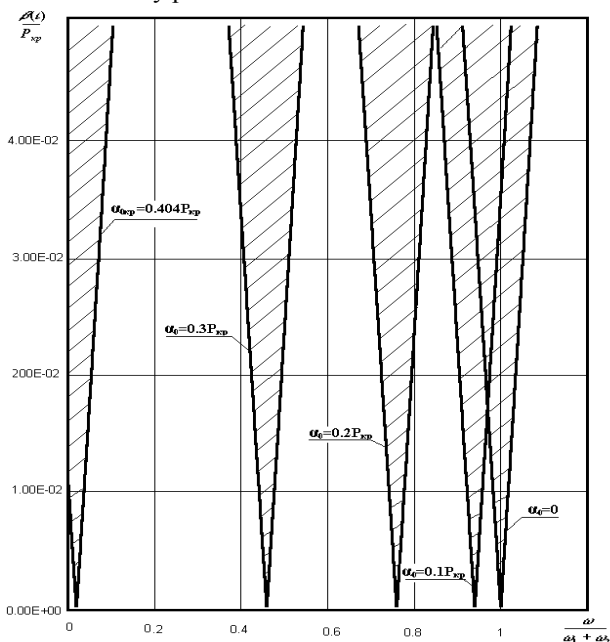


Рис. 4. Діаграма областей нестійкості плоскої форми згину двотаврової балки при комбінованому резонансі

По осі абсцис відкладене відносна частоти збудження, по осі ординат – відношення динамічної складової параметричного навантаження β_0 до

критичного значення цього навантаження $P_{кр}$. Області нестійкості обмежені похилими лініями і відповідають різним значенням статичної складової параметричного навантаження α_0 . Видно, що при збільшенні статичної складової α_0 області нестійкості зміщуються вліво і комбінаційний резонанс для однакових значень β_0 настає при меншому значенні ω . При збільшенні динамічної складової параметричного навантаження β_0 при різних значеннях статичної складової α_0 спектр критичних значень частот збудження збільшується.

Досліджується динамічна стійкість плоскої форми згину ферми. Конструкція ферми наведена на рис. 5.

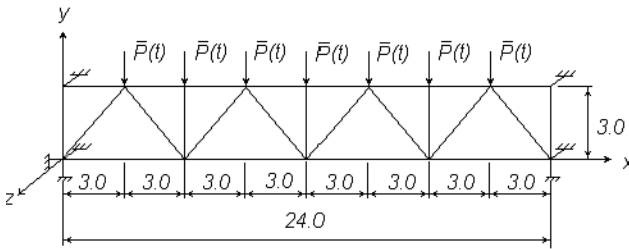


Рис. 5. Конструкція ферми

Геометричні та механічні характеристики ферми і побудова редукованих рівнянь наведена авторами у статті [2]. За допомогою обчислювального комплексу розв'язана задача на вільні коливання і визначенні перші форми згинальних та крутильних коливань плоскої ферми (рис. 6).

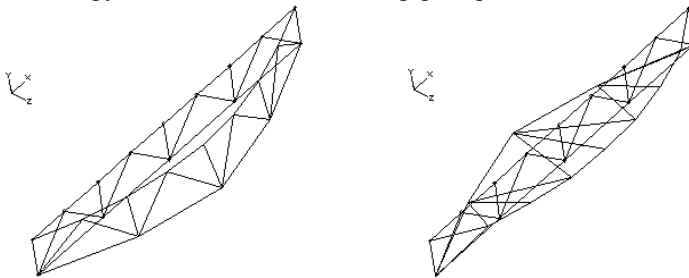


Рис. 6. Перші згинальна та крутильна форми коливань ферми
($\omega_{1a}=4.174$ рад/с, $\omega_{1r}=9.013$ рад/с)

Періодичне навантаження, що діє у площині найбільшої жорсткості ферми, є параметричним навантаженням по відношенню до згинально-крутильних деформацій із площини її дії. Навантаження приймалося у

вигляді $P(t) = P_0 \cos \omega t$, де $P_0 = 1$ Н. Редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості в результаті розрахунків набули вигляду

$$K^* = \begin{bmatrix} 17.42405 & 0 \\ 0 & 81.26646 \end{bmatrix}, K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -1.854436 \times 10^{-3} \\ -1.854916 \times 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Рівняння динамічної стійкості плоского згину ферми мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 4.174^2 [u_k - 1.061 \times 10^{-4} \varphi(t) \gamma_k] = 0, \\ \dot{\gamma}_k + 9.013^2 [\gamma_k - 0.221 \times 10^{-4} \varphi(t) u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

Для дослідження динамічної стійкості плоскої форми згину ферми визначені матриці рівняння (20):

$$C_2 = \begin{bmatrix} \omega_1^{-2} & 0 \\ 0 & \omega_2^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.147^{-2} & 0 \\ 0 & 9.013^{-2} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.061 \times 10^{-4} \\ 0.221 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Перевірені необхідні умови (21): $9.013 \text{ рад/с} > 4.147 \text{ рад/с} > 0$; $1.061 \times 10^{-4} \times 4.147^2 = 0.221 \times 10^{-4} \times 9.013^2 = 0.00178 > 0$.

Матриця B_0 рівняння (22) має вигляд

$$B_0 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.147^2 & 0 \\ 0 & 9.013^2 \end{bmatrix}.$$

Параметричне навантаження приймається у вигляді (23), тут $\delta = 0.00178$. Побудова областей динамічної нестійкості виконується для ферми при значеннях статичної складової параметричного навантаження $\alpha_0 = [0 \div 0.66 P_{\text{кр}}]$ і діапазону динамічної складової $\beta_0 = [1 \div P_{\text{кр}}]$, де $P_{\text{кр}} = 96$ кН значення критичного навантаження, яке отримане при розв'язанні задачі стійкості. Области нестійкості плоскої форми згину ферми при комбінованому резонансі визначені за формулою (24) і представлені на рис. 7.

З діаграми видно, що при збільшенні статичної складової α_0 області нестійкості плоскої форми згину ферми зміщуються вліво, тобто комбінаційний резонанс настає при меншому значенні ω . При

збільшені динамічної складової параметричного навантаження β_0 спектр частот збудження збільшуються.

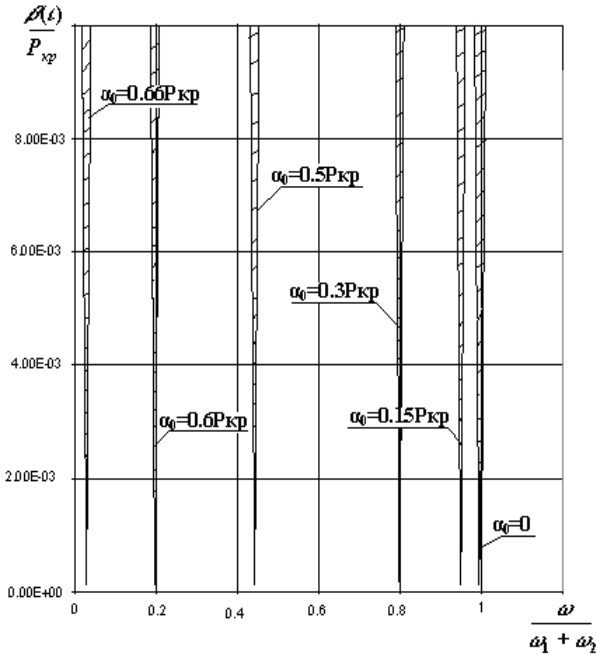


Рис. 7. Діаграма областей нестійкості плоскої форми згину ферми при комбінованому резонансі

Таким чином, визначені області нестійкості, що відповідають комбінаційному резонансу, дають змогу оцінити динамічну стійкість пружних систем та визначити спектр частот збудження, що є критичним, при різних значеннях статичної та динамічної складових параметричного навантаження.

1. Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г. Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій. //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. -№74.
2. Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г. Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем. //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2005. -№77.
3. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.
4. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.

УДК 539.3

Чибіряков В.К., доктор. техн. наук,
Жупаненко І.В.

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКУ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ

Для розрахунку тонкої круглої пластини на динамічні впливи пропонується алгоритм, в основу якого покладено методику динамічного розрахунку стержневих систем. Алгоритм базується на розрахунковій моделі, що є континуальною за жорсткісними властивостями та дискретною за інерційними.

Вісесиметрична задача динаміки тонкої круглої пластини одновимірна по просторовій координаті, але відповідне рівняння згину містить змінні коефіцієнти, тож динамічний розрахунок базується на застосуванні спеціальних функцій.

В будівельній механіці для одновимірної за просторовими координатами задачі динаміки використовується зручний та ефективний алгоритм. Так, для дослідження коливань балки з розподіленою масою використовують розрахункову модель, що є континуальною за жорсткісними властивостями та дискретною за інерційними. Тобто балка розділяється на окремі ділянки, маси яких зосереджуються в певних точках континуальної безінерційної одновимірної моделі. Для континуальної системи з зосередженими масами складаються рівняння руху, що утворюють систему звичайних диференціальних рівнянь за часом, яка при застосуванні методу сил в матричній формі має вигляд:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = \mathbf{B} \cdot \vec{P}, \quad (1)$$

де $\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$ - матриця-стовпчик степенів вільності зосереджених мас (n

- кількість динамічних степенів вільності); $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$ -

матриця інерції; $\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$ - матриця впливу сил інерції;

$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \dots \\ P_m(t) \end{bmatrix}$ - матриця-стовпчик зосереджених зовнішніх сил, що діють в

певних точках осі балки; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta'_{11} & \delta'_{12} & \dots & \delta'_{1m} \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & \dots & \delta'_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \delta'_{m1} & \delta'_{m2} & \dots & \delta'_{mm} \end{bmatrix}$ - матриця впливу

зосереджених зовнішніх сил.

Рівняння (1) дозволяє розглянути всі основні динамічні задачі для балки: розрахунок на власні, вимушені та нестационарні коливання. При цьому забезпечується достатня для практики точність. Але для інших одновимірних задач складання рівнянь типу (1) має деякі особливості.

Згадані особливості розглянемо на прикладі задачі про дослідження вісесиметричних коливань тонкої кільцевої пластини (рис. 1).

Розбиваючи кільцеву пластину на n однакових по координаті r ділянок, тобто

$$r_{j+1} = r_j + \Delta r, \quad (j = \overline{1, n});$$

$$\Delta r = \frac{r_1 - r_0}{n},$$

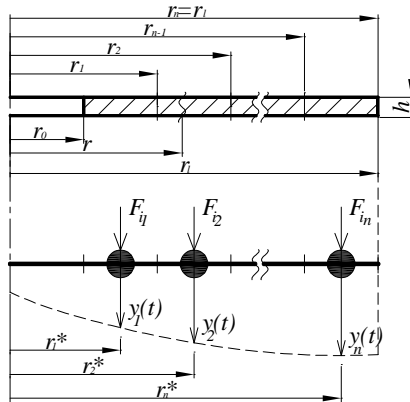


Рис. 1. Кільцева пластина

та прикладаючи до континуальної безмасової пластини відповідну зосереджену (по $r!$) масу в центрі ваги кожної ділянки, отримуємо

дискретну за інерційними та континуальну за жорсткісними властивостями розрахункову модель, рівняння руху якої мають вигляд:

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = \mathbf{Bp} \cdot \vec{P}(t) \quad (2)$$

де

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} - \delta_{jk} - \text{переміщення від одиничної (по } r) \text{ сили } F_{ik} \text{ в напрямку сили інерції } F_{ij};$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^* \end{bmatrix}, \text{ де } m_j^* = \frac{\pi \cdot (r_j^2 - r_{j-1}^2)}{2 \cdot \pi \cdot r_j^*},$$

$$r_j^* = \frac{2 r_j^2 + r_j \cdot r_{j-1} + r_{j-1}^2}{3 r_j + r_{j-1}};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta'_{11} & \delta'_{12} & \dots & \delta'_{1m} \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & \dots & \delta'_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \delta'_{m1} & \delta'_{m2} & \dots & \delta'_{mm} \end{bmatrix} - \delta'_{jl} \begin{pmatrix} j = \overline{1, n} \\ l = \overline{1, m} \end{pmatrix} - \text{переміщення в напрямку}$$

j -ї степені вільності від одиничної зосередженої по r сили $P_l(t) = 1$.

На відміну від матриці $\mathbf{\Pi}$ для балки, матриця $\mathbf{\Pi}$ для кільцевої пластини не є симетричною. Однак симетричною матрицею є добуток матриць $\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R}$, що впливає з відповідної теореми взаємності переміщень, яку отримаємо, виходячи з диференціального рівняння згину балки, записаного у вигляді:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{r \cdot q(r)}{D}. \quad (3)$$

Запишемо роботу зовнішніх сил одного стану на переміщеннях іншого стану (характеристики якого позначаються зірочкою):

$$A_{I,II} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{r \cdot q(r) \cdot w^*(r)}{D} dr.$$

Підставляючи замість $r \cdot q(r) / D$ вираз, що розташований в лівій частині рівняння (3) та інтегруючи чотири рази по частинах, отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} \frac{r \cdot q \cdot w^*}{D} dr &= w^* \cdot r \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right]_{r_0}^{r_1} - \frac{dw^*}{dr} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \Big|_{r_0}^{r_1} + \\ &+ \frac{dw}{dr} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw^*}{dr} \right) \Big|_{r_0}^{r_1} - w \cdot r \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw^*}{dr} \right) \right]_{r_0}^{r_1} + \int_{r_0}^{r_1} \frac{r \cdot q^* \cdot w}{D} dr. \end{aligned}$$

Якщо обидва стани кільцевої пластини задовольняють однаковим однорідним граничним умовам, то всі позаінтегральні члени зникають. Оскільки розглядається пластина сталої жорсткості, то ліву і праву частину отриманої рівності можна скоротити на D , і остаточно маємо:

$$\int_{r_0}^{r_1} r \cdot q(r) \cdot w^*(r) dr = \int_{r_0}^{r_1} r \cdot q^*(r) \cdot w(r) dr. \quad (4)$$

Розглядаючи навантаження $q(r)$ як зосереджене по координаті r в точці $r = r_j$, тобто $q(r) = \delta(r - r_j)$ і відповідно $q^*(r) = \delta(r - r_k)$, та користуючись властивостями дельта-функції Дірака, при інтегруванні з (4) отримуємо теорему взаємності переміщень для кільцевої пластини у вигляді:

$$r_j \cdot w^*(r_j) = r_k \cdot w(r_k)$$

або, користуючись позначеннями будівельної механіки для степеней вільності $w^*(r_j) = \delta_{kj}$ та $w(r_k) = \delta_{jk}$, маємо:

$$r_j \cdot \delta_{kj} = r_k \cdot \delta_{jk}. \quad (5)$$

Із співвідношення (5) випливає симетрія матриці $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$. Це головна особливість алгоритму динамічного розрахунку кільцевої пластини, яка дозволяє поширити на кільцеву пластину всю послідовність розв'язання різних динамічних задач для балки.

В будівельній механіці стержневих систем елементи матриць впливу \mathbf{P} та \mathbf{V} знаходяться за формулою Мора, що враховує континуальний

характер розрахункової моделі. Але в більш складних випадках одновимірних задач, зокрема при розрахунку кільцевої пластини, формулу Мора застосувати неможливо. Натомість елементи цих матриць можуть бути знайдені з будь-якою точністю розв'язанням відповідних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, що описують одиничні стани, за методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [1].

Для цього розрахункове рівняння (3) запишемо у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\vec{Y}}{dx} = \mathbf{A} \cdot \vec{Y} + \vec{F}, \quad (6)$$

де $\vec{Y} = \begin{bmatrix} w \\ \varphi \\ Q \\ M \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -v/r & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/r & 0 \\ 0 & -(1-v^2)/r^2 & 1 & -(1-v)/r \end{bmatrix}$, $\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ 0 \end{bmatrix}$.

Невідомі функції повинні задовільняти певним однорідним граничним умовам. За навантаження q розглядається зосереджене по r навантаження

$$q(r) = \delta(r - r_k), \quad \left(k = \overline{1, n} \right).$$

Алгоритм методу дискретної ортогоналізації відомий [1]. В даному випадку слід відзначити особливість побудови часткового розв'язку неоднорідної системи. До $r = r_k$ цей частковий розв'язок нульовий по всіх

компонентах, тобто $\vec{Y}_q(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ для $r < r_k$. Оскільки розглядається зосереджене

навантаження, то перерізуючи сила при переході через точку $r = r_k$ змінюється скачком на (-1), інші компоненти розв'язку неперервні. Далі продовжується інтегрування неоднорідної системи (6). Зосереджений характер навантаження таким чином враховується точно, а оскільки задачі Коші розв'язуються методом Рунге-Кутта-Фельберга з контролем точності на кроці [2], то побудова одиничних станів виконується з будь-якою точністю.

Подальший розв'язок різних динамічних задач наступний.

Задача 1. Знаходження частот і форм власних коливань.

Розв'язок системи однорідних рівнянь (2)

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = 0 \quad (7)$$

шукаємо у вигляді $\vec{Y}(t) = \vec{Y}_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, в результаті його підстановки у рівняння (7) та нескладних перетворень, отримаємо:

$$-\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \omega^2 \cdot \vec{Y}_0 + \vec{Y}_0 = 0,$$

$$\text{або} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{Y}_0 = \lambda \cdot \vec{Y}_0, \quad (8)$$

де $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$. Це задача на власні значення для матриці $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$. Оскільки ця матриця несиметрична, а матриця інерції \mathbf{T} – позитивно визначена та діагональна, то вводимо заміну:

$$\vec{Y}_0^* = \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{Y}_0. \quad (9)$$

Відносно \vec{Y}_0^* рівняння (8) можна привести до вигляду:

$$\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{Y}_0^* = \lambda \cdot \vec{Y}_0^*. \quad (10)$$

В цьому випадку матриця $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$ є симетричною, оскільки симетрична матриця $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$. Власні числа та власні вектори симетричної матриці знаходяться за допомогою відомих алгоритмів.

Наведена методика реалізована у вигляді програми, написаної мовою FORTRAN для РС комп'ютерів. В якості тестової задачі розглядалися вільні коливання круглої пластини, защемленої в центральній точці. Геометричні та фізичні характеристики пластини наступні:

Таблиця 1

Частоти власних коливань круглої пластини

Частоти коливань	Точні значення	Наближено отримані по запропонованій методиці ($n=20$)
ω_1	111,21	111,4
ω_2	620,1	622,1
ω_3	1799,5	1806
ω_4	3549,8	3569

$r_i = 1\text{ м}$, $h_i = 0,2\text{ м}$, $\nu = 0,3$, $E = 2,4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$. Порівняння отриманих частот (для розбиття пластини на 20 мас) з частотами, знайденими за методикою, описаною в роботі С.П.Тимошенко [3], наведені в табл. 1.

Задача 2. Розрахунок нестационарних коливань.

Нестационарні коливання описуються системою рівнянь (2) з початковими умовами:

$$\text{при } t=0 \quad \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0, \quad \left. \frac{d\vec{Y}}{dt} \right|_{t=0} = \vec{V}_0, \quad (11)$$

де \vec{Y}_0 – вектор початкових переміщень, а \vec{V}_0 – вектор початкових швидкостей. Введемо заміну (9) і отримаємо задачу Коші:

$$\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}^*(t)}{dt^2} + \vec{Y}^*(t) = \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{B}_p \cdot \vec{P}(t). \quad (12)$$

$$\vec{Y}^*(0) = \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{Y}_0, \quad \left. \frac{d\vec{Y}^*}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{V}_0 \quad (13)$$

Знайшовши власні числа та власні вектори матриці $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$, пронормуємо власні вектори та утворимо матрицю \mathbf{S} , стовпчиками якої є нормовані власні вектори матриці $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$. Введемо заміну:

$$\vec{Y}^{**}(t) = \mathbf{S}^T \cdot \vec{Y}^*(t). \quad (14)$$

Оскільки матриця \mathbf{S} є ортогональною матрицею, то \mathbf{S}^{-1} дорівнює транспонованій до \mathbf{S} матриці \mathbf{S}^T . Система рівнянь (12) перетворюється до вигляду:

$$\mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{S} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}^{**}(t)}{dt^2} + \vec{Y}^{**}(t) = \mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{B}_p \cdot \vec{P}(t). \quad (15)$$

Тут матриця $\mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$, де $\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ –

діагональна матриця, елементами якої є власні числа матриці $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$. Таким чином, система (15) розпадається на окремі

диференціальні рівняння другого порядку. Початкові умови для цих рівнянь мають вигляд:

$$\vec{Y}^{**}(0) = \mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{Y}_0, \quad \left. \frac{d\vec{Y}^{**}}{dt} \right|_{t=0} = \mathbf{S}^T \cdot \sqrt{\mathbf{T}} \cdot \vec{V}_0. \quad (16)$$

Окремі задачі Коші розв'язуються чисельно, а потім знаходяться шукані значення переміщень мас в будь-який момент часу за формулами:

$$\vec{Y}^*(t) = \mathbf{S} \cdot \vec{Y}^{**}(t), \quad \vec{Y}(t) = (\sqrt{\mathbf{T}})^{-1} \vec{Y}^*(t),$$

$$\text{де } (\sqrt{\mathbf{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1^*}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2^*}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{m_n^*}} \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, використовуючи знайдені власні числа та власні вектори матриці $\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{T}}$, можна побудувати простий алгоритм розрахунку на вимушені коливання.

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи математических наук. – 1961. – Т.16. – Вып.3. – с. 171 – 174.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

УДК 539.3

Гайдайчук В.В., д.т.н., проф.

Киричук О.А., д.т.н., проф

Палій О.М., асистент

ДИНАМІКА ПОВЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Сучасні тонкостінні оболонки відрізняються високою міцністю і легкістю, що обумовлює їх раціональне використання в різних галузях сучасної техніки. Вони є елементами багатьох будівельних конструкцій, використовуються в хімічному та енергетичному машинобудуванні, в судобудівництві, в сучасній ракетній техніці та авіабудівництві, в нафтовій та газовій промисловостях.

В процесі експлуатації оболонкові конструкції сприймають інтенсивні технологічні навантаження, в тому числі і динамічні, які змінюються періодично за часом. Прикладом можуть бути вібраційні кінематичні збурення оболонки корпусу літака або ракетного носія від працюючого двигуна, дії сейсмічних хвиль на резервуари з паливом, періодичні коливання будівельної конструкції, що розташована біля залізничної колії, від потягу, що рухається на великій швидкості. В деяких випадках періодичні навантаження приводять до виникнення в оболонкових конструкціях параметричних коливань, перпендикулярних до напрямку дії періодичного навантаження. Це приводить до появи в оболонках фізичних явищ і ефектів [1,2], які властиві нелінійним механічним системам. До них можна віднести складні резонансні режими коливань, існування кількох форм коливань при одних і тих же параметрах періодичного навантаження, ефект стабілізації нестійких станів рівноваги високочастотними параметричними коливаннями.

Амплітуди параметричних коливань оболонок можуть перевищувати допустимі значення експлуатації і порушувати стійкість їх форм. З теорії параметричних коливань відомо [3], що найбільш небезпечними випадками коливань є зони параметричних резонансів, коли співвідношення між частотою прикладеної сили(θ) та частотою власних коливань(ω) визначається залежністю

$$\frac{\omega}{\theta} = \frac{\kappa}{2}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots$$

Формула дає співвідношення між частотою зовнішніх сил і частотою власних коливань, поблизу яких виникають необмежено зростаючі

коливання оболонки резонансного характеру, що може призвести до втрати стійкості її форми. Тому дослідження динаміки тонкостінних конструкцій, зокрема визначення поведінки тонких оболонок при дії реальних динамічних навантажень вимагає, перш за все, знання їх динамічних характеристик, а саме спектра власних частот і відповідні їм форми коливань. Наявність зазначених характеристик дозволяє визначати такі експлуатаційні параметри оболонок, які виключають можливість резонансу.

Для визначення динамічних характеристик тонких симетричних оболонок використовуємо метод [3], основні припущення якого коротко полягають в наступному. Симетричними оболонками будемо вважати тонкостінні оболонки, серединна поверхня яких утворена обертанням твірної довільної форми навколо осі. Будемо розглядати лише рівномірно розподілене, нормальне до поверхні оболонки або повздовжнє навантаження, що характеризується симетрією щодо осі обертання оболонки. Коливання можуть бути ініційовані силовим періодичним за часом навантаженням. У такому випадку при відсутності початкових недосконалостей форми поверхні усталені коливання оболонок при малих значеннях параметра інтенсивності збурювання реалізуються по симетричним відносно осі формам, які ми будемо називати симетричними, з частотою, рівною частоті збурювання. Зі зростанням інтенсивності силового збурювання при фіксованій частоті змушених коливань їхні симетричні моди можуть трансформуватися в циклічно симетричні. Крім того, за певних умов усталені коливання оболонок, залишаючись симетричними, можуть різко збільшити амплітуду і змінити форму коливань. Перераховані фактори характеризують втрату стійкості усталеного руху і їм відповідають особливі точки на кривих стаціонарних станів. Тому дослідження стійкості усталеного руху на основі пропонованого підходу пов'язано з побудовою кривих стаціонарних станів, що цілком описують еволюцію коливань, і відшукуванням на кривих особливих (граничних і біфуркаційних) точок. Такий підхід традиційно називається дослідженням стійкості коливань в амплітудній області при фіксованій частоті коливання оболонки. У випадку, коли дослідження стійкості коливань розглядається при варіюванні частоти, його можна віднести до частотної області дослідження.

Нелінійні диференційні рівняння коливань оболонки

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \sqrt{a} \vec{q}(t) - \sqrt{a} \gamma h \vec{w} = 0;$$

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{M}^\alpha}{\partial x^\alpha} + \left[\vec{e}_\alpha \times \vec{T}^\alpha \right] \sqrt{a} = 0,$$

де a – фундаментальний детермінант метричного тензора поверхні оболонки, h – товщина, γ – щільність матеріалу, \vec{T}^α , \vec{M}^α – вектори внутрішніх зусиль та моментів, \vec{w} – вектор прискорення, $\vec{q}(t)$ – вектор зовнішніх навантажень, дискретизуються в напрямку твірної за допомогою модифікованого кінцево-різницевого метода криволінійних сіток [4]. В круговому напрямку компоненти вектора переміщень елемента серединної поверхні оболонки апроксимуються тригонометричними рядами. Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона – Канторовича. Критерієм втрати стійкості коливань оболонки є рівність нулю визначника матриці лінеаризованих рівнянь. Граничне (критичне) значення амплітуди періодичного збудження, яке відповідає цьому стану системи, характеризує втрату стійкості параметричних коливань, при якому відбувається інтенсивний збільшення амплітуди коливань. Втрата стійкості коливань, яка супроводжується різкою перебудовою форм усталених коливань, визначає біфуркаційне значення параметра інтенсивності збудження. Зазначений підхід дозволяє будувати залежності між амплітудою навантаження і амплітудою коливань оболонки при фіксованій частоті коливань і знаходити на цих кривих особливі точки, які відповідають втраті стійкості коливань оболонок [5].

З метою оцінки працездатності та достовірності розробленого методу була сформульована задача визначення з його допомогою нижчих власних частот та форм повздовжніх коливань кругової циліндричної оболонки. Геометричні розміри оболонки становлять: товщина $h=0,002\text{м}$, радіус $R=0,2\text{м}$, висота $L=0,48\text{м}$; фізичні параметри: коефіцієнт Пуассона $\mu=0,3$, модуль пружності $E=2,06 \cdot 10^{11}\text{Н/м}^2$; граничні умови – на одному кінці оболонка жорстко закріплена, а на іншому – ковзаюче кріплення вздовж твірної.

Пошук нижчої частоти власних коливань оболонки здійснюється на основі приведеного нижче алгоритму. Початкове значення параметра частоти ω_0 малих коливань в межах недеформованого стану оболонки, як правило, вибирається нульовим. Послідовно збільшуючи параметр ω на деяку фіксовану величину $\Delta\omega$ і розв'язуючи для кожного значення частоти лінійну задачу, отримаємо неперервну послідовність стаціонарних станів системи, яка визначає амплітудно-частотну характеристику її малих коливань. На кожному кроці розв'язку лінійної задачі по варійованій частоті ω аналізується поведінка визначника системи рівнянь. Граничне значення параметра ω_k^* , при якому

відбувається зміна знака визначника в порівнянні з параметром ω_{k-1} , характеризує одну з власних частот. Мінімальне значення ω_k^* відповідає першій нижчій частоті власних коливань оболонки.

Описаний алгоритм застосовується також і для визначення власних частот циклічно симетричних форм коливань оболонки. В цьому випадку аналізується визначник матриці лінійної системи, що відповідає несиметричній формі руху при $n > 0$ та шукається таке значення ω_k^* , при якому відбувається зміна знаку визначника.

Користуючись програмним комплексом, який реалізує зазначений вище метод, в діапазоні зміни частоти коливань $0 \leq \omega \leq 1000$ Гц були отримані результати перших п'яти власних частот повздожніх коливань циліндричної оболонки:

$$\begin{aligned}\omega_{15}^* &\approx 490,05 \text{ Гц}; & \omega_{26}^* &\approx 533,01 \text{ Гц}; & \omega_{34}^* &\approx 561,78 \text{ Гц}; \\ \omega_{47}^* &\approx 651,84 \text{ Гц}; & \omega_{53}^* &\approx 781,7807 \text{ Гц}.\end{aligned}$$

Для визначення достовірності і точності отриманих результатів було виконано їх порівняння з результатами, отриманими за допомогою програмного комплексу NASTRAN:

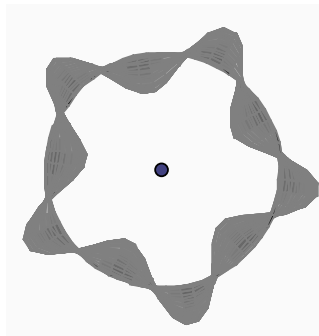
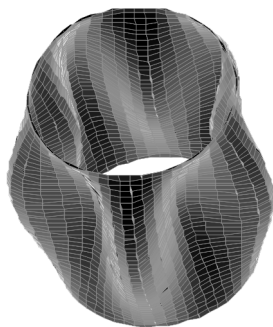
$$\begin{aligned}\omega_{15}^* &\approx 485,8075 \text{ Гц}; & \omega_{26}^* &\approx 527,9954 \text{ Гц}; & \omega_{34}^* &\approx 557,9566 \text{ Гц}; \\ \omega_{47}^* &\approx 645,653 \text{ Гц}; & \omega_{53}^* &\approx 779,4727 \text{ Гц}.\end{aligned}$$

Форми власних коливань циліндричної оболонки, що відповідають спектру нижчих частот, приведені на рис. 1 - 5.

На рис. 1 зображена форма коливань оболонки при найнижчій власній частоті $\omega_{15}^* \approx 485,8075$ Гц. Кількість гармонік в коловому напрямку $n=5$, що характеризує циклічно симетричну форму руху.

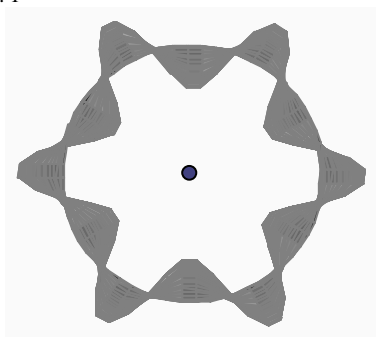
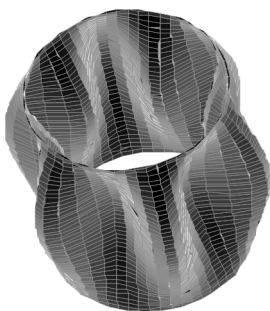
На рис. 2 зображена циклічно симетрична форма коливань з частотою $\omega_{26}^* \approx 527,9954$ Гц. Кількість гармонік в коловому напрямку $n=6$.

На рис. 3, 4 і 5 зображені циклічно симетричні форми коливань з частотами 557,9566 Гц, 645,653 Гц, 779,4727 Гц, що відповідають коливанням з 4,7,3 хвилями в коловому напрямку відповідно.



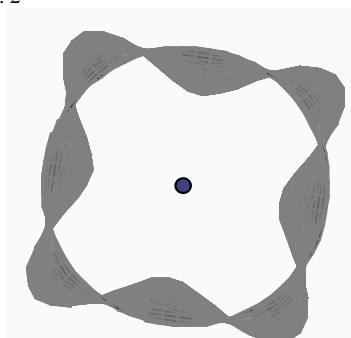
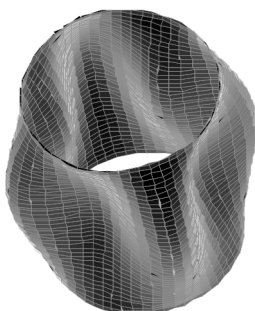
$$\omega_{15}^* \approx 485,8075 \text{ Гц}$$

Рис. 1



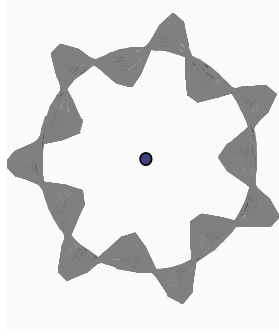
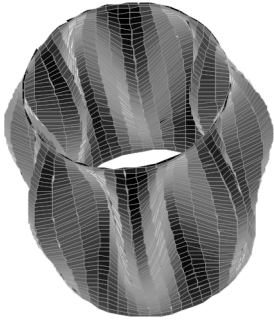
$$\omega_{26}^* \approx 527,9954 \text{ Гц}$$

Рис. 2



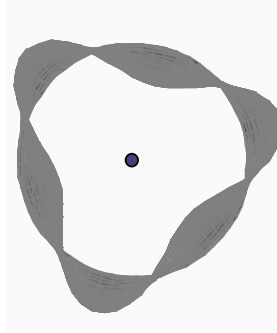
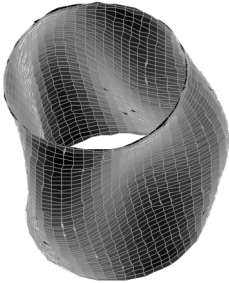
$$\omega_{34}^* \approx 557,9566 \text{ Гц}$$

Рис. 3



$$\omega^*_{47} \approx 645,653 \text{ Гц}$$

Рис. 4



$$\omega^*_{53} \approx 779,4727 \text{ Гц}$$

Рис. 5

При порівнянні результатів, одержаних за допомогою описаної методики та програмного комплексу NASTRAN можна зробити висновок, що найбільше відхилення в розрахунках не перевищує 2%.

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. –М.: Наука, 1971.,- 808 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. –М.: Наука, 1967, - 984 с.
3. Гайдайчук В.В., Киричук А.А., Паллий О.Н. Численно-аналитический метод исследования установившихся колебаний оболочечных конструкций. – Математические модели в образовании, науке и промышленности: Сборник научных трудов. – Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2003, -55-58с.
4. Гоцуляк Е.А., Ермишев В.И., Жадрасинов Н.Т. Применение метода криволинейных сеток к расчету оболочек. – Киев, КИСИ (деп. в УкрНИИНТИ - N 2557) -23 с.
5. A.Kirichuk, T. Most, C. Bucher. Numerical nonlinear stability analysis of kinematically excited shells. –International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 1(5) 61-74 (2003).

УДК 539.375

Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Шкриль О.О., канд. техн. наук,
Мицок С.В.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ ТРІЩИНИ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ГРАНИЧНОГО РЕСУРСУ

Вступ. Обчислення несучої здатності і визначення розрахункового ресурсу відповідальних елементів конструкцій з початковими тріщинами передбачає проведення моделювання росту тріщини. При дії на тіло циклічного навантаження зростання тріщини відбувається при значеннях параметрів механіки руйнування, які є суттєво меншими за критичні. Величина ресурсу елемента конструкції з тріщиною визначається кількістю циклів навантаження до досягнення тріщиною певного, наперед обумовленого критичного розміру який може бути визначений з технічних умов експлуатації конструкції (розрахунковий ресурс безвідмовної роботи), або моментом повного втрачання несучої здатності, коли швидкість зростання тріщини прямує до нескінченності і набуває лавиноподібного характеру. В останньому випадку характерні розміри тріщини можуть бути співвідносні із розмірами тіла, а величина часу до досягнення зазначеного стану є граничним ресурсом тіла з тріщиною.

Питання моделювання розвитку тріщини на теперішній час висвітлено в низці робіт, де наведені описи і приклади розв'язання задач про визначення ресурсу тіл з тріщинами для двовимірних тіл [4, 6, 11, 12]. Більшість відомих результатів дослідження деформування просторових тіл з тріщинами обмежуються визначенням параметрів механіки руйнування [1, 5] і створенням методик прогнозування розвитку тріщини до певних наперед заданих розмірів [2, 10].

Складність форми досліджуваних об'єктів, просторовий характер розподілення зовнішнього навантаження, та довільність розташування і конфігурації тріщин ставить питання про визначення ресурсу в просторовій постановці. Розв'язання таких задач потребує багаторазового визначення напружено-деформованого стану просторового тіла із тріщиною, що відповідають різним стадіям її розвитку, визначення для них параметрів механіки руйнування та нової конфігурації фронту тріщини. Розв'язання задач такого рівня складності і практична реалізація відповідних обсягів обчислень є можливим лише із використанням

чисельних методів, найбільш поширеним з яких є метод скінчених елементів (МСЕ).

Розв'язання задачі про моделювання росту тріщини при циклічному навантаженні на основі МСЕ передбачає дискретизацію процесу навантаження тіла у вигляді сукупності кроків, кожний з яких є еквівалентним певній кількості циклів навантаження. Для визначення характерних розмірів тріщини використовуються диференційні залежності, що пов'язують значення параметрів механіки руйнування із прирощенням довжини тріщини та кількістю циклів навантаження. Зважаючи на суттєво неоднорідний характер напружено-деформованого стану, для його апроксимації необхідним є використання дискретної моделі із значною кількістю невідомих, проведення перебудови дискретної моделі відповідно до конфігурації тріщини, подальше обчислення матриці жорсткості, розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану і визначення параметрів механіки руйнування.

Таким чином, ефективність розв'язання задачі про визначення ресурсу тіла із тріщиною, що зростає, обумовлена ефективністю використовуваних засобів скінченоелементної дискретизації досліджуваних об'єктів, ефективністю алгоритмів розв'язання крайової задачі про напружено-деформований стан тіла з тріщиною та обчислення параметрів механіки руйнування, вірогідністю алгоритму перебудови скінчено-елементної сітки, та точністю інтегрування диференційних залежностей, що описують зростання тріщини.

Питання ефективності засобів скінченоелементної дискретизації може бути вирішено, наприклад, застосуванням ефективних модифікацій МСЕ, що орієнтовані на досить широке коло об'єктів канонічної форми та розробкою в їх межах відповідних скінченоелементних баз. Однією з таких модифікацій є напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ), досвід застосування якого, зокрема, поширений на задачі лінійного і нелінійного деформування призматичних тіл та тіл обертання [1], а також задачі механіки руйнування [1–3, 5]. Зокрема питання обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень для призматичних тіл висвітлені в статті [1, 3], для тіл обертання – в [5]. Розробка і дослідження вірогідності методики моделювання розвитку тріщин, розмір яких є набагато меншим характерних розмірів тіла та результати розв'язання відповідних задач викладені в [2].

Застосування НМСЕ передбачає проведення ітераційного розв'язання отриманої системи рівнянь. У випадку розв'язання задачі до моменту початку лавиноподібного зростання тріщини кількість ітерацій при наближенні до максимальних розмірів тріщини може бути дуже значною, що обумовлено суттєвою неоднорідністю напружено-деформованого стану тіла при наявності в ньому тріщини, розміри якої є співвідносні із розмірами об'єкта.

Одним із способів підвищення ефективності алгоритму розв'язання систем рівнянь є застосування екстраполяції розв'язку на наступних кроках.

В роботі [2] розглянуті деякі підходи до скорочення обчислювальних витрат шляхом зменшення кількості обчислень матриці жорсткості та удосконалення ітераційного алгоритму розв'язання задачі. Але дослідження вірогідності і ефективності методики проведено на прикладі задачі про розвиток тріщини в нескінченному тілі.

Метою даної роботи є розробка ефективних алгоритмів розв'язання задач про моделювання росту тріщини, які б із найменшими обчислювальними витратами і високою точністю дозволяли б проводити розв'язання задачі до моменту повного вичерпання несучої здатності тіла із тріщиною та його реалізація в межах НМСЕ.

1. Вихідні співвідношення механіки руйнування при циклічному навантаженні. При впливі циклічного навантаження процес розвитку тріщини найчастіше описується диференційними залежностями, що встановлюють зв'язок між приростом довжини тріщини dl , кількістю циклів навантаження dN і значенням коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) $K_I(l)$, що відповідає поточній довжині (характерним розмірам) тріщини l в кожній точці її фронту [8]:

$$\frac{dl}{dN} = f(K_I(l), C_i), \quad (1.1)$$

де C_i – коефіцієнти, що характеризують фізичні властивості матеріалу.

Найпростішим частковим випадком залежності (1.1) є формула Періса [8]:

$$\frac{dl}{dN} = C(K_I(l))^b. \quad (1.2)$$

Обчислення величини КІН, що входить до виразу (1.2) здійснюється, зокрема, прямим методом, що передбачає визначення КІН на основі результатів розв'язання задачі про напружено-деформований стан тіла з тріщиною.

У випадку лінійного деформування під впливом силового навантаження напружено-деформований стан в околі вершини тріщини може бути описаний асимптотичними формулами, які встановлюють взаємозв'язок між переміщеннями або напруженнями поданими в місцевій системі координат y'' , пов'язаній із вершиною тріщини (вісь y'' перпендикулярна до фронту тріщини), та КІН $K_I(l)$ [6, 7]. На основі зазначених співвідношень, для визначення КІН отримаємо [1]:

$$K_I(U) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{U_1'' G}{\sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2G - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)},$$

$$K_I(\sigma) = \frac{\sigma_1'' \sqrt{2\pi r}}{\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)}, \quad (1.3)$$

де $K_I(U)$ і $K_I(\sigma)$ – КІН, обчислені відповідно за величиною напружень і переміщень в окремих точках привершинної області тріщини; r , θ – полярні координати точки, для якої визначений КІН (координати r , θ відраховуються від вершини і фронту тріщини); G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; U_1'' – повні переміщення точок тіла з тріщиною.

2.Методика визначення КІН по фронту тріщини. Обчислення КІН виконуються в характерних точках фронту тріщини A_m^i , що відповідають конфігурації фронту на кроці m (рис.1,а). Як показано в роботі [3], необхідна точність обчислення КІН при застосуванні прямого методу передбачає використання в межах зони згущення СЕ, характерний розмір яких l_e становить не більше 1/10 характерного розміру тріщини $l_{тр}$. Обчислення КІН за переміщеннями здійснюється у вузлах СЕ моделі в площині, що проходить через точку A_m^i , і є перпендикулярною до фронту тріщини (рис.1,б, точки обчислення КІН позначені хрестиками). Обчислення КІН за напруженнями здійснюється в центрах СЕ в площинах В-В і С-С, що також перпендикулярні до фронту тріщини і проходять через центри СЕ, суміжних із точкою A_m^i (рис. 1,в, точки обчислення КІН позначені кружечками). При цьому, враховуючи вимоги методики, пов'язані з явищем сингулярності [3], в точках, розташованих на відстанях менших $0.1l_{тр}$ вздовж осей y^1 і y^2 від вершини тріщини КІН за переміщеннями не визначається (рис.1,б). Також не визначається КІН за напруженнями в точках, що розташовані ближче $0.05 l_{тр}$ від вісі y^2 (рис. 1,в).

Визначені в окремих точках величини КІН за напруженнями і переміщеннями усереднюються до отримання відповідних величин $\bar{K}(U)$ і $\bar{K}(\sigma)$, які в свою чергу усереднюються для отримання кінцевого значення КІН в точці A_m^i [3]:

$$K_I = K_I(l_m^i) = \frac{\bar{K}(U)_I + \bar{K}(\sigma)_I}{2}. \quad (2.1)$$

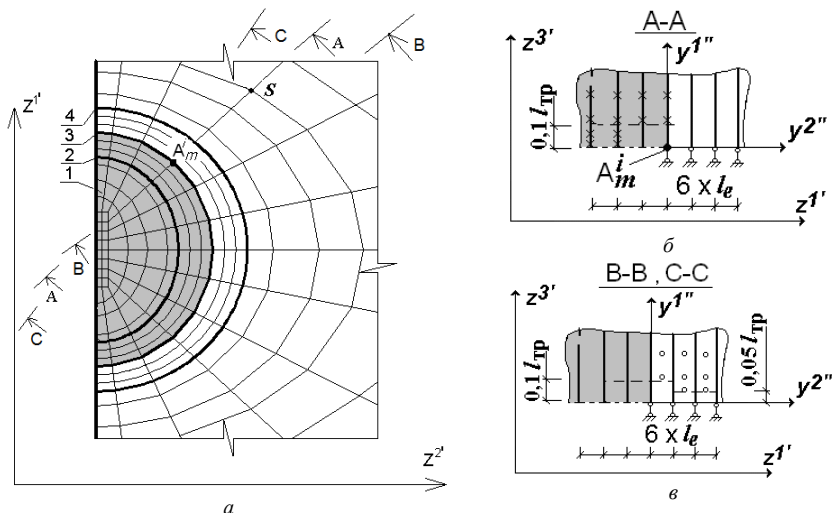


Рис. 1. Конфігурація фронту тріщини:

1 - поверхня тріщини, 2, 4 - межі зони згущення, 3 - фронт тріщини на кроці m .

3. Вірогідність визначення КІН. Для перевірки достовірності результатів, отримуваних на основі викладеної методики, було розв'язано задачі про визначення КІН в прямокутній пластині з центральною тріщиною ($B = 10$ мм, $H = 10$ мм, $q = 1$ кг/см², рис. 2), нескінченному призматичному тілі (рис. 3, a) і циліндрі з еліптичною тріщиною (рис. 4, a).

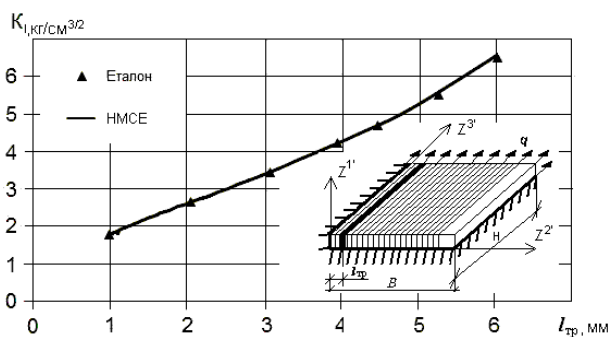


Рис. 2

Порівняння значень КІН, отриманих в пластині із використанням прямого методу, та результатів еталонного розв'язку [7] наведено на

рис.2 у вигляді К - тарівки. Як видно, значення КІН при різних довжинах тріщин є майже тотожними.

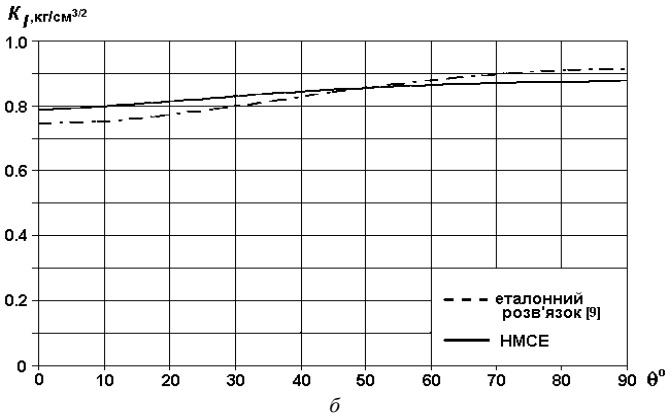
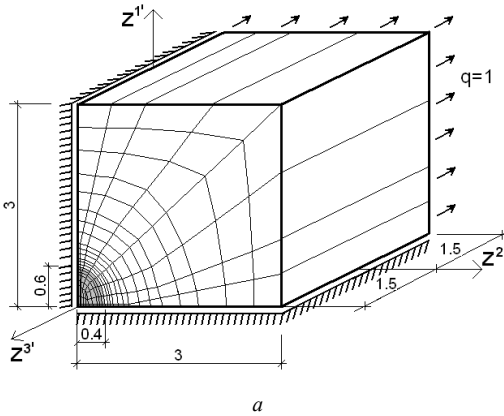


Рис. 3. Призматичне тіло із еліптичною тріщиною

Перевірка вірогідності методики для призматичних тіл при змінному розподіленні КІН вздовж фронту тріщини проведена порівнянням результатів, отриманих для призматичного тіла з еліптичною тріщиною в умовах одновісного розтягу (рис. 3). Розподілення КІН вздовж фронту тріщини добре угоджується із еталонним розв'язком [9].

Перевірка вірогідності методики для тіл обертання проведена шляхом розв'язання задачі про визначення КІН в циліндрі з еліптичною тріщиною під впливом внутрішнього тиску (загальний вигляд і дискретні моделі НМСЕ

показані на рис. 4,а). Розподілення КІН вздовж фронту тріщини, отримане із урахуванням збіжності за кількістю членів ряду поліноміального подання переміщень і скінченоелементною сіткою в поперечному перерізі, наведене на рис. 4,б. Як і в попередніх випадках, спостерігається добре узгодження результатів із еталонним розв'язком [7].

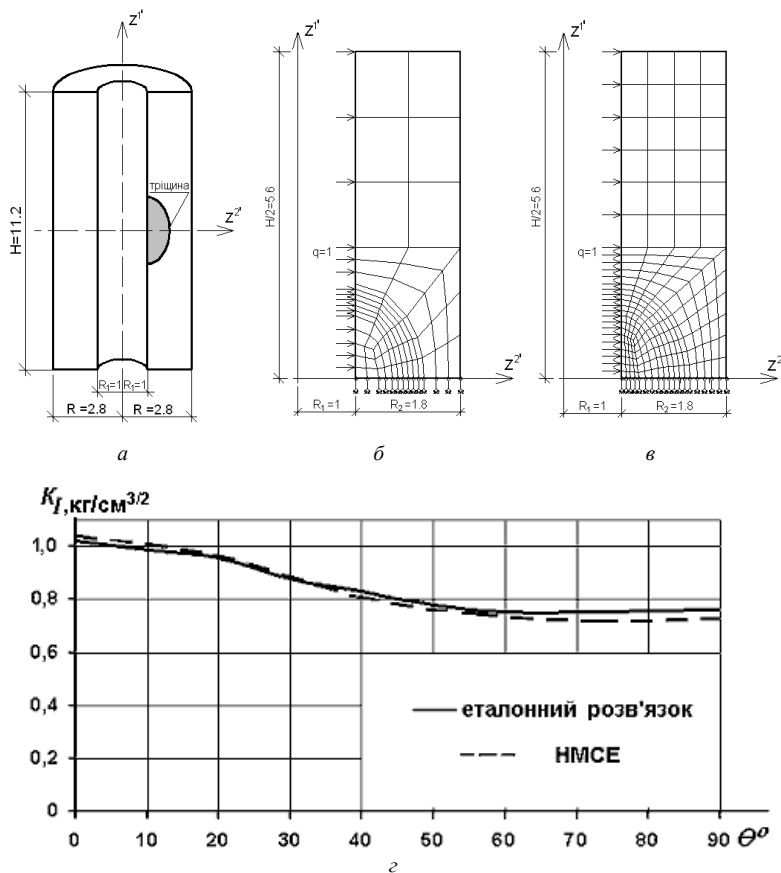


Рис. 4. Циліндр з еліптичною тріщиною

На відміну від випадку пластини з центральною тріщиною, розподілення КІН вздовж фронту еліптичної тріщини є змінним і залежить від конфігурації тріщини, яка буде змінюватись при її зростанні. Таким чином, отримання K - тарировки при інших конфігураціях еліптичної тріщини вимагає попереднього моделювання її росту.

4. Дискретне моделювання росту тріщин. При виконанні чисельного інтегрування рівняння (1.1) в кожній точці фронту i ($i=1..k$) характерні розміри тріщини l_m^i на кожному наступному кроці визначаються за довжиною тріщини на попередньому кроці l_{m-1}^i з врахуванням її приросту Δl_m^i :

$$l_{m+1}^i = l_m^i + \Delta l_m^i. \quad (4.1)$$

Визначення приросту довжини тріщини в точках фронту за ΔN циклів навантаження виконується за величиною КІН i , згідно з (1.2), становить:

$$\Delta l_m^i = C \left(K_I(l_m^i) \right)^b \Delta N_m. \quad (4.2)$$

За величинами Δl_m^i обчислюються нові координати вузлів фронту тріщини, а також інших вузлів СЕ моделі і проводиться зміна конфігурації сіткової області.

При реалізації цієї процедури з урахуванням збереження топологічної структури дискретної моделі можна відокремити два характерні випадки: перебудова сітки в межах привершинної області, де здійснюється обчислення КІН та в іншій частині тіла.

При здійсненні перебудови сітки в межах привершинної області необхідно дотримуватись зазначеного обмеження на розміри СЕ.. З урахуванням цього, при перебудові сіткової області змінення координат точок, що лежать в межах зони згущення, здійснюється так, щоб вихідний розмір СЕ не змінювався. При зростанні довжини тріщини це забезпечує дотримання умови $l_e \leq \frac{1}{10} l_{тр}$.

Перебудова сітки в частині дискретної моделі поза межами привершинної зони (рис.5,а) може здійснюватись двома способами: перший спосіб полягає у зсуві всіх її вузлів (за винятком тих, що обмежують контур дискретної моделі) на визначену величину Δl за напрямком розвитку тріщини (рис.5,б). Як показано в [2], застосування першого способу, навіть при прирощеннях довжини тріщини сувимірних з її початковими розмірами,



Рис. 5

призводить до отримання вироджених СЕ і неможливості подальшого розв'язання задачі.

В розглядуваному випадку, при визначенні граничного ресурсу, і відповідно, сумарних прирощень довжини тріщини, набагато більших від її початкового розміру та характерного розміру b скінченоеlementної сітки, починаючи з певного моменту розв'язання задачі застосування цього алгоритму є неможливим. Тому в даній роботі застосовується запропонований в [2] підхід, що полягає в зміщенні вузлів поза привершинною зоною на відстань, зворотно-пропорційну відстані від даного вузла до вершини тріщини (рис. 5,в).

Згідно до цього підходу при проведенні перебудови дискретної моделі вважається, що на кожному кроці розвиток тріщини відбувається в напрямку, ортогональному до поточної конфігурації її фронту. При реалізації цього припущення на дискретній моделі в точках фронту i_m передбачалось, що розвиток тріщини відбувається вздовж лінії, ортогональної відрізка, що з'єднує $(i-1)_m$ та $(i+1)_m$ точки фронту.

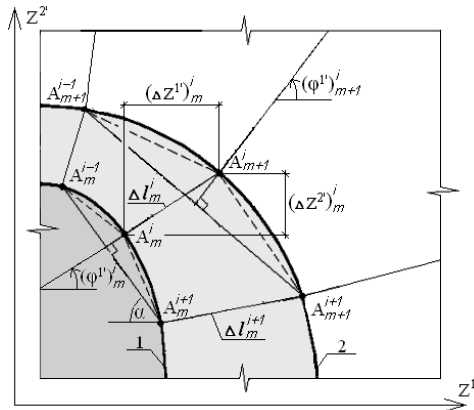


Рис. 6. Фронт тріщини: 1 – на кроці m , 2 – на кроці $m+1$

Обчислення координат $(z^{k'})_m^i$ вузла i фронту тріщини на кроці m здійснюється за формулами (рис.6):

$$(z^{k'})_{m+1}^i = (z^{k'})_m^i + (\Delta z^{k'})_m^i, \quad (4.3)$$

$$(\Delta z^{k'})_m^i = \Delta l_m^i \cos(\varphi^{k'})_m^i, \quad (4.4)$$

$$\cos(\varphi^{k'})_m^i = \frac{(z^{k'})_m^i}{\sqrt{((z^1)_m^i)^2 + ((z^2)_m^i)^2}}, \quad (4.5)$$

де $\varphi^{k'}$ – кут між напрямком вісі $z^{k'}$ і напрямком пересування точок фронту тріщини:

$$\varphi^1 = \pi/2 - \alpha = \pi/2 - \arctg\left(\frac{(z^2)_m^{i-1} - (z^2)_m^{i+1}}{(z^1)_m^{i+1} - (z^1)_m^{i-1}}\right), \quad \varphi^2 = \varphi^1 - \pi/2. \quad (4.6)$$

Для підтвердження припущення про розвиток тріщини в ортогональному до її фронту напрямку, проведено моделювання розвитку еліптичної тріщини в призматичному тілі. Порівнювались два варіанти: за першим варіантом на кожному кроці розв'язання задачі при реалізації формули (4.2) вважалося, що розвиток тріщини відбувається в напрямку нормалі до фронту початкової тріщини (рис.7), за другим варіантом – за нормаллю до поточної конфігурації фронту тріщини (рис.8). При розгляданому співвідношенні розмірів тіла і тріщини вона може розглядатись як еліптична тріщина в тілі нескінчених розмірів. Як видно, збіг результатів із еталоном, згідно до якого еліптична тріщина в ході розвитку прямує до колової конфігурації [2,9], є кращим при застосуванні другого варіанту (рис.8).

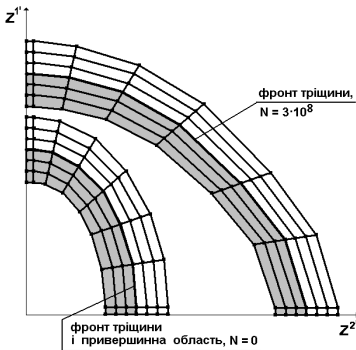


Рис. 7

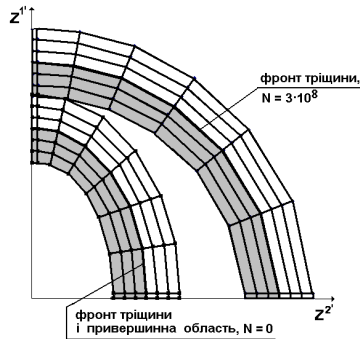


Рис. 8

Таким чином, в подальшому при моделюванні росту тріщини передбачається, що тріщина зростає за нормаллю до поточної конфігурації її фронту.

5. Визначення прирощень довжини тріщини. Обчислення КІН $K_I(l^i)$ в формулі (4.2) здійснюється із використанням співвідношення:

$$K(l_m^i) = K_m^i(1 - \alpha) + K_{m+1}^i \alpha, \quad (5.1)$$

де K_m^i – значення КІН в точці i , обчислене за величиною l^i на початку кроку m (в кінці попереднього кроку); K_{m+1}^i – значення КІН, обчислене з урахуванням екстраполяції прирощення довжини тріщини на даному кроці; $0 \leq \alpha \leq 1$ – параметр, що визначає схему обчислення КІН.

При $\alpha = 0$ значення КІН обчислюється за формулою:

$$K(l_m^i) = K_m^i. \quad (5.2)$$

При $\alpha = 0.5$ обчислення $K(l^i)$ потребує наявності екстраполяції значення КІН K_{m+1}^i , яке можна обчислити двома способами: із використанням величин КІН на попередніх кроках, або за даними відомої K - тарировки.

При застосуванні екстраполяції за величинами КІН на попередніх кроках значення КІН в кожній точці фронту тріщини на наступному кроці дорівнює (рис. 9):

$$K_{m+1} = K_m + \Delta K_{m+1} = K_m + \operatorname{tg}(\varphi) \times \Delta l_m(K_m), \quad (5.3)$$

де $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{K_m - K_{m-1}}{\Delta l_{m-1}}$.

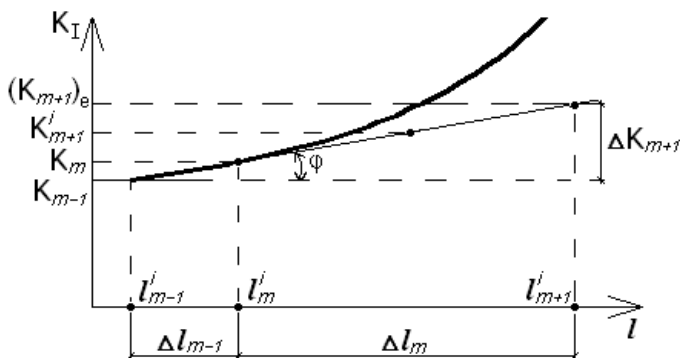


Рис. 9

Дійсне значення КІН обчислюється шляхом усереднення КІН, отриманих для довжин тріщин даного і наступного кроків (рис.9):

$$K_{m+1}^i = \frac{K_m + (K_{m+1})_e}{2}. \quad (5.4)$$

Результати моделювання росту центральної тріщини в пластині з центральною тріщиною (рис. 2) наведено на рис.10. Еталонний розв'язок (крива1) отриманий безпосереднім інтегруванням рівняння (1.2) при $b = 4$, $C = 1.63 \times 10^{-10}$. Обчислення КІН здійснювалось при $\alpha=0$ в формулі (5.1). Відмінність результатів, отриманих з екстраполяцією КІН (крива 2) становить 5%.

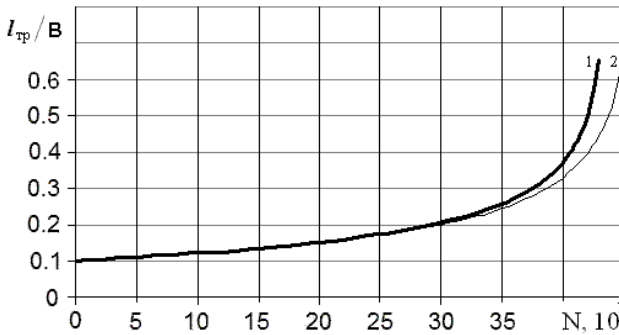


Рис. 10

1 – алгоритм з екстраполяцією, 2 - еталон при різних циклах навантаження

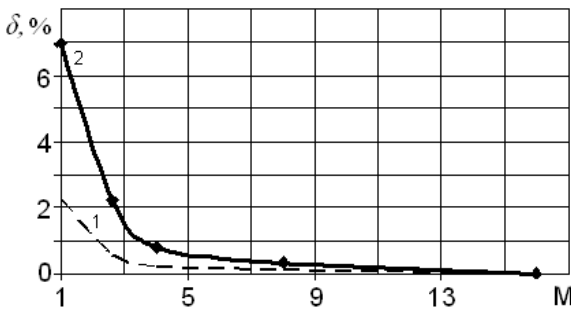


Рис. 11

1 – алгоритм з екстраполяцією, 2 - еталон при $\alpha = 0$

Як видно, збіжність розв'язку без екстраполяції КІН відбувається повільніше, проте при кроці $\Delta N_1 = 0,0625 \times 10^7$ похибка визначення довжини тріщини є однаковою. На рис. 11 подані результати збіжності цих розв'язків в залежності від кількості циклів навантаження ΔN на кроці

($M = \frac{\Delta N}{\Delta N_1}$ – коефіцієнт, який визначає змінення величини кроку за навантаженням при $\Delta N_1 = 1 \times 10^7, 0,5 \times 10^7, 0,25 \times 10^7, 0,125 \times 10^7, 0,5 \times 10^7, 0,0625 \times 10^7, \Delta N = 1 \times 10^7$)

Таким чином модифікація процедури обчислення КІН покращує збіжність результатів.

6. Алгоритм розв'язання систем рівнянь НМСЕ. На кожному кроці розв'язання задачі про визначення ресурсу тіл з тріщинами проводиться розв'язання задачі про напружено-деформований стан тіла з тріщиною, що, в свою чергу, потребує розв'язання систем рівнянь НМСЕ із використанням блочно-ітераційних алгоритмів.

На кожній ітерації n кроку m при характерних розмірах тріщини l_m^i вектор невідомих амплітудних переміщень системи рівнянь НМСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]_m^{-1} (\{P\}^m - \{R\}_n^m), \quad (6.1)$$

де $\{P\}^m$ – вектор вузлових навантажень на кроці m ; $\{R\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n , обчислений за величинами напружень σ_{ij} , що відповідають напружено-деформованому стану тіла з тріщиною з характерними розмірами l_m^i ; $[K]_m$ – матриця жорсткості тіла з тріщиною, що обчислюється на кожному кроці m [1]:

$$\{R\} = \left\{ \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}^T \{\sigma\} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}^T \{\sigma\}_3 + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T \{\sigma\}_\alpha + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T \{\sigma\}_{\alpha 3} \right) \right\} \sqrt{g^\circ}, \quad (6.2)$$

де $\{\sigma\}, \{\sigma\}_3, \{\sigma\}_\alpha, \{\sigma\}_{\alpha 3}$ – компоненти вектора амплітудних напружень та їх похідні; $\begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}$ – матриці, які пов'язують величини деформацій і переміщень в скінченному елементі, обчислені по

координатам z^i вузлів дискретної моделі, що відповідають розмірам тріщини l_m^i ;

$$\begin{aligned}
 [K]_m = & \left\{ \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}^T [D]_{00}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}^T [D]_{30}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_1 \end{bmatrix}^T [D]_{03}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix} + \right. \\
 & + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}^T [D]_{33}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{00\alpha}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{30\alpha}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. \left. + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{1,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{03\alpha}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix}^T [D]_{33\alpha}^n \begin{bmatrix} \circ \\ B_{2,\alpha} \end{bmatrix} \right) \left. \right\} \sqrt{g}, \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

де $[D]_{00}^n, [D]_{30}^n, [D]_{03}^n, [D]_{33}^n, [D]_{00\alpha}^n, [D]_{30\alpha}^n, [D]_{03\alpha}^n, [D]_{33\alpha}^n$ – матриці пружних сталей матеріалу та їх похідних.

Формула (6.1) описує ітераційний алгоритм для розв'язання систем рівнянь НМСЕ. При цьому матриці і вектори, що входять до цього виразу мають блочну структуру, яка обумовлена поданням в НМСЕ невідомих переміщень у вигляді розкладання за системою базисних функцій [1].

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \left(\{ \Delta u \}_\lambda^n \right)^2 \leq \zeta \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \left(\{ u \}_\lambda^n \right)^2, \quad (6.4)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ - параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отриманого розв'язку, n - номер ітерації i , $n = 1, 2, \dots, N$ (N - остання ітерація на кроці), λ - номер члену ряду розкладу переміщень в ряд за поліномами при застосуванні НМСЕ [1].

При використанні цього алгоритму для визначення напружено-деформованого стану тіла з тріщиною на першому кроці m ($m=1$) приймається:

$$\{ u \}_0^1 = 0, \{ \sigma \}_1^1 = 0, \{ R \}_1^1 = 0. \quad (6.5)$$

Компоненти вектора амплітудних напружень виразу (6.2) обчислюють за формулою:

$$\{ \sigma \}_n^1 = \{ \Delta \sigma \}_n^1, \quad (6.6)$$

де вектор прирощення напружень $\{\Delta\sigma\}_n^1$ обчислюють за переміщеннями $\{u\}_{n-1}^1$ на попередній ітерації кроку:

$$\{\Delta\sigma\}_n^1 = f(\{u\}_{n-1}^1). \quad (6.7)$$

Переміщення і напруження на останній ітерації кроку 1 дорівнюють:

$$\{U\}_N^1 = \{u\}_N^1, \quad \{\sigma\}_N^1 = \{\Delta\sigma\}_N^1, \quad (6.8)$$

де $\{U\}_N^1$ – вектор повних переміщень точок тіла з початковою тріщиною розмірами l_m^i .

На наступних кроках m ($m=2,3\dots M$) при відповідних розмірах тріщини l_m^i приймається:

$$\{u\}_0^m = 0, \quad \{\sigma\}_1^m = 0, \quad \{R\}_1^m = 0, \quad \{\sigma\}^{m-1} = 0. \quad (6.9)$$

Обчислення напружень на проміжних ітераціях наступних кроків ($m=2,3\dots M$) та переміщень і напружень на останній ітерації кроку здійснюється аналогічно кроку 1:

$$\{\sigma\}_n^m = \{\Delta\sigma\}_n^m = f(\{u\}_{n-1}^m), \quad (6.10)$$

$$\{U\}^m = \{U\}_N^m = \{u\}_N^m, \quad \{\sigma\}^m = \{\sigma\}_N^m = \{\Delta\sigma\}_N^m. \quad (6.11)$$

Отримані вектори повних напружень $\{\sigma\}^m$ та переміщень $\{U\}^m$ використовуються в подальшому для обчислення КІН в (1.3)

Таким чином, результати розв'язання задачі, отримані за цим алгоритмом, фактично являють собою низку незалежних розв'язків, отриманих для різних розмірів тріщин l_m^i . В подальшому такий підхід до розв'язання задачі будемо називати **алгоритм без екстраполяції**. При цьому кількість ітерацій на кожному кроці при сталому ΔN є майже однаковою, а сумарна кількість ітерацій приблизно дорівнює кількості ітерацій на одному кроці помноженій на кількість кроків.

7. Екстраполяція напружень при моделюванні росту тріщини. При покроковому розв'язанні задачі прирощення довжини тріщини за один крок i , відповідно, змінення напружено-деформованого стану є

незначним. Деформований стан тіла з тріщиною розмірами l_m^i може бути характеризований вектором повних переміщень $\{U\}^m$:

$$\{U\}^m = \{U\}^{m-1} + \{\Delta U\}^m = \{U\}^{m-1} + \{u\}_N^m, \quad (7.1)$$

де $\{\Delta U\}^m = \{u\}_N^m$ – величина переміщень, отримана із (6.1) на останній ітерації N кроку m і обумовлена зміненням деформованого стану тіла при набутті характерними розмірами тріщини прирощень Δl_m^i (рис.12).

На першому кроці ($m=1$) обчислення компонент виразу (7.1) здійснюється аналогічно алгоритму без екстраполяції за формулою (6.5).

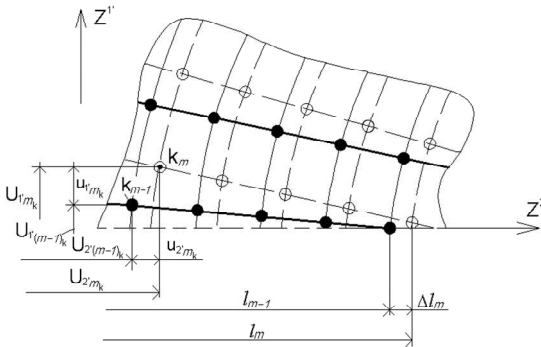


Рис. 12

Для зменшення обсягу обчислювальних витрат на подальших кроках при розв'язанні задач може бути застосована екстраполяція напружень на поточному кроці за величинами переміщень. Зважаючи на незначні змінення напружено-деформованого стану від кроку до кроку на першій ітерації кроку m в (6.1) приймається:

$$\{u\}_0^m = 0, \quad \{\sigma\}_1^m = \{\sigma\}^{m-1} = \{\sigma\}_N^{m-1}, \quad \{R\}_1^m = f(\{\sigma\}^{m-1}) \neq 0.$$

На відміну від (6.10) подальше обчислення компонент векторів амплітудних напружень та їх похідних, що входять до вектора вузлових реакцій (6.2), здійснюється за формулою:

$$\{\sigma\}_n^m = \{\sigma\}^{m-1} + \{\Delta\sigma\}_n^m, \quad (7.2)$$

де прирощення напружень $\{\Delta\sigma\}_n^m$ обчислюють за величинами $\{u\}_n^m$:

$$\{\Delta\sigma\}_n^m = f(\{u\}_{n-1}^m).$$

Напруження і переміщення на останній ітерації кроку m ($m=2,3,\dots,M$) дорівнюють:

$$\{\sigma\}_N^m = \{\sigma\}^{m-1} + \{\Delta\sigma\}_N^m,$$

$$\{U\}^m = \{U\}^{m-1} + \{u\}_N^m. \quad (7.3)$$

Викладений алгоритм в подальшому називатимемо **алгоритмом з екстраполяцією напружень**.

Для апробації запропонованого алгоритму і дослідження його ефективності здійснено на задачі про розвиток центральної тріщини під впливом циклічного навантаження в нескінченій пластині (рис.13).

Характеристики матеріалу пластини: $b = 4$, $C = 1.63 \times 10^{-10}$.

Як і у випадку розв'язання тестової задачі про розвиток тріщини в скінченій пластині, еталонний розв'язок було отримано шляхом безпосереднього інтегрування рівняння (1.2) за формулою (4.2) при $\alpha = 0$. Значення КІН обчислювались за формулою $K_I = z\sqrt{\pi l}$, де $z = z(l)$ - уточнюючі коефіцієнти, які визначаються на кожному кроці інтегрування для відповідної довжини тріщини [7]. Залежність довжини тріщини від кількості циклів навантаження при різній кількості кроків розв'язання задачі, що отримана НМСЕ в порівнянні з еталонним розв'язком, наведена на рис. 13. Величини похибок довжини тріщини δ , що отримані після 3×10^8 циклів навантаження при різній кількості кроків M розв'язання задачі, при безпосередньому інтегруванні та чисельному розв'язанні задачі НМСЕ, наведені на рис. 14.

Як можна побачити з графіків [2], використання в межах НМСЕ виразу для обчислення КІН (4.2) при $\alpha = 0$ має характер збіжності аналогічний розв'язку, отриманому на основі безпосереднього інтегрування. Забезпечення точності визначення довжини тріщини в межах 2% потребує 60 кроків.

Враховуючи, що для досягнення потрібної точності визначення довжини тріщини необхідним є застосування значної кількості кроків розв'язання задачі, важливого значення набуває питання про можливість зменшення обчислювальних витрат на кожному кроці.

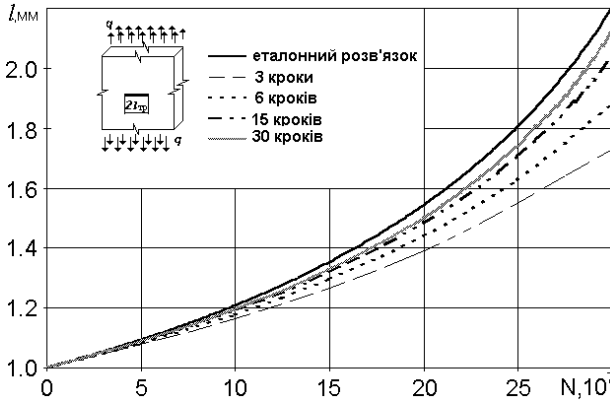


Рис. 13

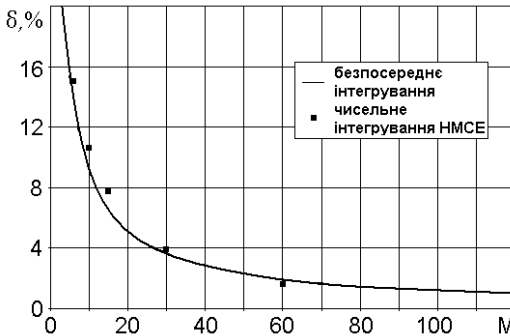


Рис. 14

Для оцінки зменшення обчислювальних витрат за рахунок застосування алгоритму екстраполяції напружень (7.1) - (7.3) було проведено порівняння кількості ітерацій $Iter$, необхідних для розв'язання задачі з різною похибкою (рис.15) порівняно із кількістю ітерацій, необхідною для розв'язання задачі за алгоритмом без екстраполяції $\sum Iter$. Як видно, із збільшенням точності інтегрування формули Періса різниця в ітераційних витратах збільшується [2]. Застосування алгоритму із екстраполяцією напружень при точності визначення довжини тріщини в межах 2% дозволяє зменшити обчислювальні витрати приблизно на порядок. Це обумовлено тим, що при застосуванні цього алгоритму із зменшенням величини кроків розв'язання задачі зменшується кількість ітерацій на кожному кроці.

При збільшенні кількості кроків M , що характеризують кількість циклів навантаження на кроці, величина прирощення амплітудних переміщень

$$\Delta u_{\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \{\Delta u\}_{\lambda}^j \quad \text{на першій}$$

ітерації кроку зменшується, що підтверджується результатами наведеними на рис.16, де показано зміння цієї величини на першій ітерації другого кроку при різній кількості кроків розв'язання задачі. Зменшення Δu_{λ} відбувається внаслідок зменшення значень прирощень довжини тріщини, обчислених після одного кроку розв'язання задачі, що в свою чергу зменшує відмінність конфігурації сіткової області і параметрів напружено-деформованого стану на двох послідовних кроках.

Як було вже зазначено, при збільшенні кількості кроків розв'язання задачі відмінність конфігурації тріщини на послідовних кроках зменшується. У зв'язку з цим додаткове зменшення обчислювальних витрат може бути отримано за рахунок обчислення матриці жорсткості (МЖ) не на кожному кроці розв'язання задачі, а після певної кількості кроків, коли зміна конфігурації тріщини і, відповідно, дискретної моделі буде більш суттєвою. Кількість обчислень МЖ, необхідних для розв'язання задачі при інтегруванні рівняння Періса при $\alpha = 0$ з різною похибкою, подана на рис. 17.

Результати свідчать, що при обчисленні МЖ на кожному кроці інтегрування і через інтервал кроків ітераційні витрати при однаковій точності розв'язання задачі не змінюються. При цьому, для досягнення точності визначення довжини тріщини в межах 2% обчислення МЖ достатньо виконувати після збільшення довжини тріщини на 20%.

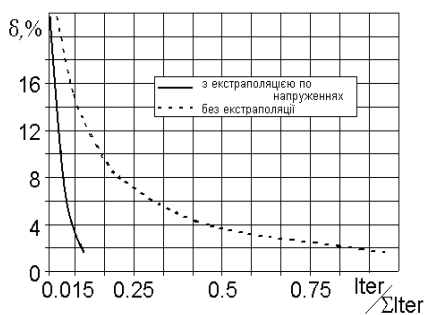


Рис. 15

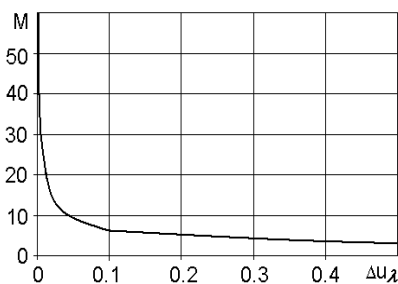


Рис. 16

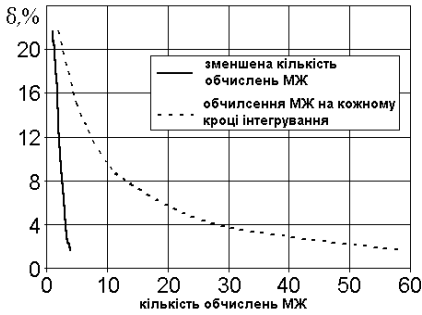


Рис. 17

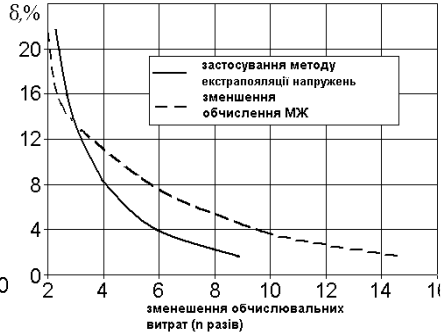


Рис. 18

Відношення кількості ітерацій, необхідних для розв'язання задачі без застосування та при застосуванні екстраполяції, та відношення кількості обчислень МЖ для розв'язання задачі з обчисленням МЖ на кожному кроці і через максимально допустиму кількість кроків для визначення довжини тріщини з різною точністю показані на рис.18. Необхідно зазначити, що при визначенні довжини тріщини з більш високою точністю ефективність зазначених методів зростає [2].

8. Екстраполяція напружень і прирощень переміщень. Інше припущення, яке може бути застосоване при реалізації алгоритму без екстраполяції полягає в тому, що відмінності повних переміщень, що виникають за рахунок різниці конфігурації фронту тріщини на двох послідовних кроках несуттєво відрізняються. Таким чином несуттєво відрізняються і отримані на цих кроках прирощення переміщень, набуті внаслідок збільшення характерних розмірів тріщини на Δl_m^i тобто: $\{\Delta U\}^m = \{u\}_0^m = \{u\}_N^{m-1}$. Як і у випадку екстраполяції напружень, на кожній ітерації кроку m напруження обчислюється за формулою:

$$\{\sigma\}_n^m = \{\sigma\}^{m-1} + \{\Delta\sigma\}_n^m, \quad (8.1)$$

проте прирощення амплітудних напружень на першій ітерації кроку m дорівнюють:

$$\{\Delta\sigma\}_1^m = f(\{\Delta U\}^{m-1}) = f(\{u\}_N^{m-1}),$$

а на наступних ітераціях:

$$\{\Delta\sigma\}_n^m = f(\{u\}_{n-1}^m).$$

В кінці кроку напруження і переміщення на останній ітерації ($m=2,3\dots M$) обчислюють аналогічно (8.1) і (7.3):

$$\begin{aligned}\{\sigma\}_N^m &= \{\sigma\}^{m-1} + \{\Delta\sigma\}_N^m, \\ \{U\}^m &= \{U\}^{m-1} + \{u\}_N^m.\end{aligned}\quad (8.2)$$

При $m=1$, та $m=2$ обчислення складових виразу (6.1) аналогічно алгоритму з екстраполяцією по напруженнях. В подальшому даний алгоритм називатимемо **алгоритмом екстраполяції напружень і прирощень переміщень**.

9. Алгоритм екстраполяції повних переміщень. З іншого боку, враховуючи, що змінення напружено-деформованого стану, пов'язане із зміненням конфігурації тріщини від кроку до кроку є незначним, можна за перше наближення розв'язку прийняти повне переміщення попереднього кроку:

$$\{u\}_0^m = \{U\}^{m-1}. \quad (9.1)$$

На першій ітерації прирощення напруження обчислюється за повним переміщенням попереднього кроку:

$$\{\Delta\sigma\}_1^m = f(\{U\}^{m-1}), \quad (9.2)$$

а на наступних ітераціях:

$$\{\Delta\sigma\}_n^m = f(\{U\}_{n-1}^m). \quad (9.3)$$

Отримані на останній ітерації кроку m ($m=2,3\dots M$) напруження і переміщення є повними напруженнями і переміщеннями для тіла з тріщиною розмірами l_m^i :

$$\{\sigma\}_N^m = \{\Delta\sigma\}_N^m, \quad (9.4)$$

$$\{U\}^m = \{u\}_N^m. \quad (9.5)$$

Таким чином виключається похибка, що утворюється внаслідок накопичення переміщень від кроку до кроку за формулою вигляду (7.3). Цей варіант алгоритма будемо називати алгоритмом з **екстраполяцією повних переміщень**.

10.Ефективність алгоритмів при визначенні граничного ресурсу.

Для дослідження ефективності запропонованих модифікацій алгоритму визначення параметрів напружено-деформованого стану при моделюванні росту тріщини при визначенні граничного ресурсу було розглянуто задачу про розвиток тріщини в пластині скінчених розмірів до повного вичерпання ресурсу.

Аналіз результатів, отриманих в межах розмірів тріщини, при яких розглядувана задача може розглядатись, як задача про зростання тріщини в нескінченній пластині засвідчив, що всі запропоновані варіанти алгоритмів дозволяють отримати практично однакові результати (рис. 19). Така збіжність результатів спостерігається до досягнення тріщиною співвідношення із стороною пластини $1/5$ ($N=3 \times 10^8$ рис.19). Подальше розв'язання задачі для пластини скінчених розмірів свідчить, що при застосуванні алгоритму з екстраполяцією по напруженнях та з екстраполяцією по напруженнях і прирощеннях переміщень відбувається накопичення похибки, в результаті чого обчислення граничного ресурсу з достатньою точністю неможливе.

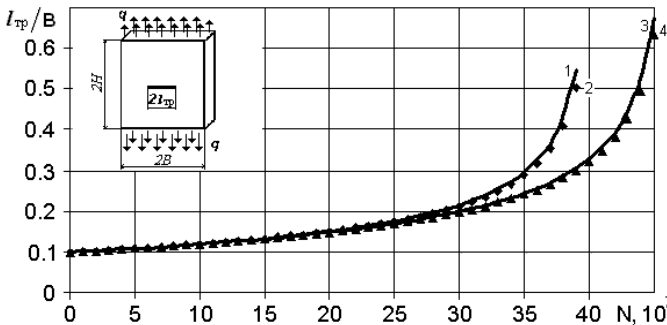


Рис. 19. Моделювання росту тріщини за алгоритмами з екстраполяцією: 1 – по напруженнях (п.7), 2 – по напруженнях і прирощеннях переміщень (п.8), 3 – по повних переміщеннях (п.9). 4 – без екстраполяції (п.6)

Для оцінки зменшення обчислювальних витрат алгоритму з екстраполяцією по повних переміщеннях із застосуванням екстраполяції повних переміщень було проведено порівняння кількості ітерацій *iter* необхідних для розв'язку задачі з однаковою похибкою визначення довжини тріщини і без екстраполяції, а також з екстраполяцією переміщень в залежності від кроку величини ΔN (рис. 20).

Як видно, алгоритм з екстраполяцією повних переміщень дозволяє зменшити обчислювальні витрати приблизно в 5 разів при досить точному обчисленні КІН.

11. Визначення граничного ресурсу призматичного тіла скінчених розмірів з еліптичною тріщиною. Розроблений алгоритм був застосований до розв'язання задачі про розвиток еліптичної тріщини в призматичному тілі до повного вичерпання несучої здатності. Оскільки об'єкт має три площини симетрії, розраховувалась одна восьма частина тіла, скінчено-елементна розбивка якої показана на рис. 3. Переріз тіла z^1-z^2 , в якому розташована поверхня тріщини, закріпленій вздовж напрямку z^3 (крім площини тріщини, позначеної сірим кольором). Характеристики матеріалу: $b = 4$, $C = 1.63 \times 10^{-10}$. В роботі [9] розвиток тріщини розглядався до моменту, коли конфігурація фронту прийме вигляд кола ($N = 3 \times 10^9$). Аналогічний розв'язок був отриманий в роботі [2] на основі НМСЕ.

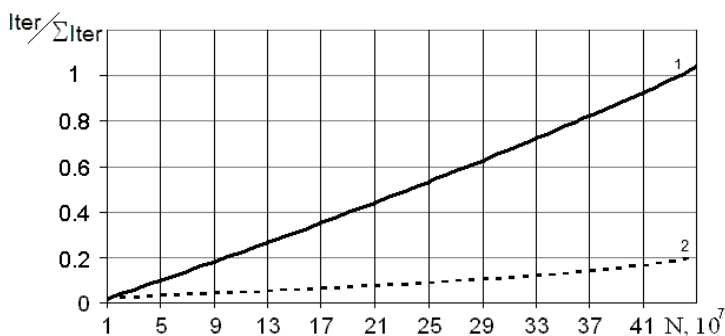


Рис. 20.

1- без екстраполяції, 2 - з екстраполяцією повних переміщень

На відміну від [2], розв'язок задачі було продовжено після набуття тріщиною форми кола. Зміна конфігурації фронту тріщини при розрахунку за алгоритмом з екстраполяцією по повних переміщеннях наведена на рис. 21. Як видно, досягнена тріщиною форма кола зберігається при подальшому розвитку тріщини.

Залежність довжини тріщини в напрямку вісей z^1 та z^2 від кількості циклів навантаження наведено на рис.

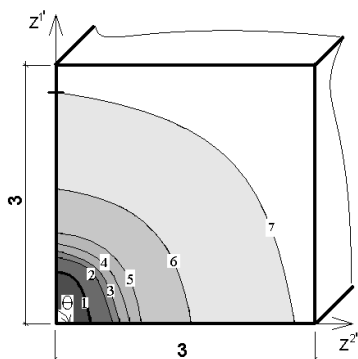


Рис. 21. Конфігурація фронту тріщини після N циклів навантаження: 1- початкова тріщина ($N=0$); 2 - $N=16 \cdot 10^8$; 3 - $N=20 \cdot 10^8$; 4 - $N=24 \cdot 10^8$; 5 - $N=32 \cdot 10^8$; 6 - $N=48 \cdot 10^8$; 7 - $N=56 \cdot 10^8$.

22. На даному графіку результати розрахунку без екстраполяції та при екстраполяції повних переміщень співпадають. Для оцінки зменшення обчислювальних витрат було проведено порівняння кількості ітерацій в залежності від кількості циклів прикладеного навантаження при різних алгоритмах (рис. 23). Як бачимо кількість ітерацій при застосуванні екстраполяції повних переміщень значно зменшується порівняно із випадком застосування алгоритму без екстраполяції при тій же точності результатів.

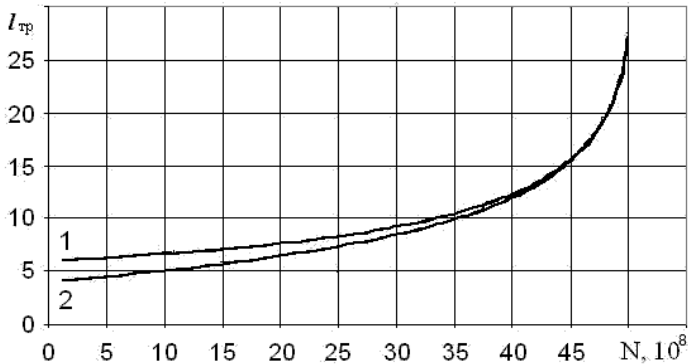


Рис. 22. Змінення характерних розмірів тріщини вздовж напівосей:

1 – в напрямку осі z^2 , 2 – в напрямку осі z^1

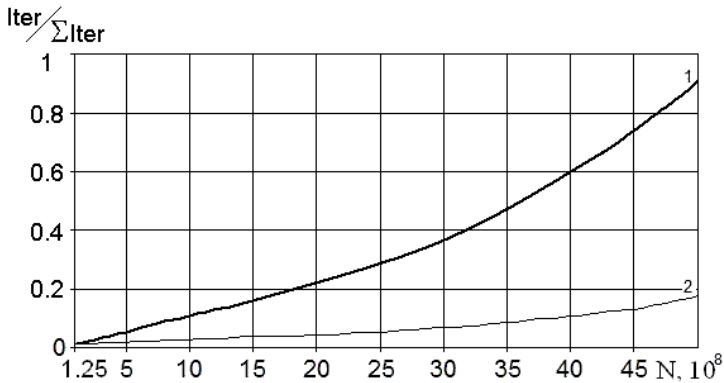


Рис. 23. Кількість ітерацій при розв'язанні задачі:

1 – без екстраполяції; 2 – з екстраполяцією повних переміщень.

12. Визначення граничного ресурсу циліндра з внутрішньою радіальною тріщиною. Для дослідження можливості застосування запропонованого алгоритму моделювання росту тріщини при визначенні граничного ресурсу в тілах обертання було розглянуто задачу про розвиток внутрішньої радіальної тріщини в циліндрі до повного вичерпання ресурсу. Вихідні дані: $R_0 = 100$ мм, $t = 25$ мм, $q = 1$ кг/см². Розрахункова схема і дискретні моделі МСЕ і НМСЕ наведені на рис. 24.

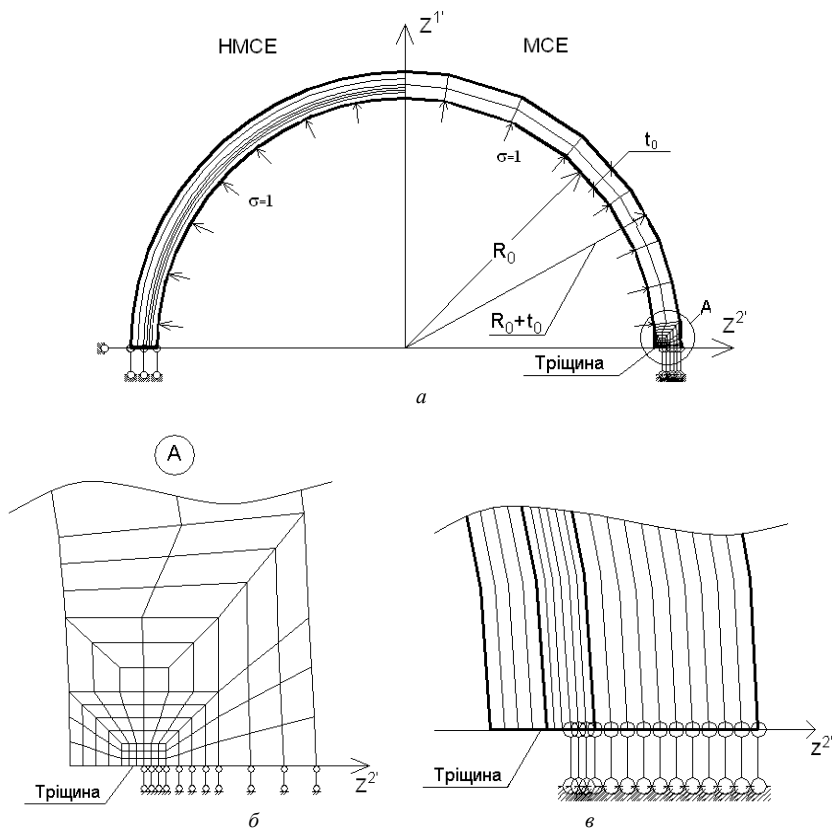


Рис. 24.

а) розрахункові схеми МСЕ та НМСЕ.

б, в) дискретні моделі в привершинній області МСЕ та НМСЕ

Отримані із використанням МСЕ і НМСЕ К-гаріровки добре узгоджуються (рис. 25).

Зміна довжини тріщини при розрахунку за алгоритмом з екстраполяцією по повних переміщеннях наведена на рис. 26.

Як бачимо, результати розрахунку без екстраполяції та при екстраполяції по повних переміщеннях співпадають. При довжині тріщини $l_{mp} = 0,8$ см, що відповідає співвідношенню довжини тріщини до товщини циліндра $l_{mp}/t = 0,3$, ресурс тіла є практично вичерпаним. Кількість обчислювальних витрат при застосуванні алгоритму з апроксимацією по повних переміщеннях значно зменшується.

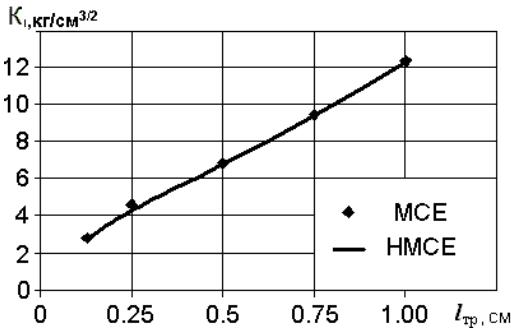


Рис. 25. К-тарировка для радіальної тріщини в циліндрі

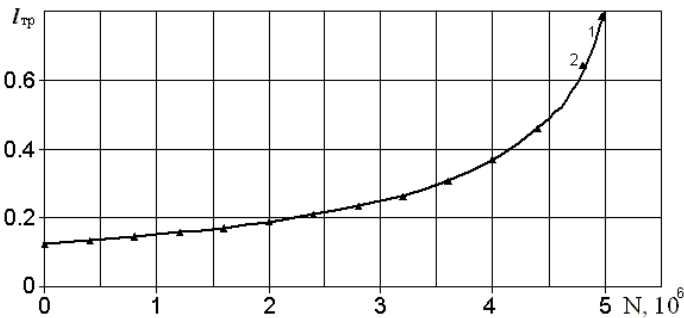


Рис. 26. Моделювання росту тріщини за алгоритмами:

1 – без екстраполяції; 2 – з екстраполяцією повних переміщень.

Висновок. В даній роботі розглянуто питання про створення методики скінченоелементного визначення граничного ресурсу тіл з тріщинами, що визначається моментом досягнення тріщиною розмірів, суворимірих із характерними розмірами тіла та початком лавиноподібного зростання тріщини. Проведено розробку і дослідження ефективності алгоритмів, що ґрунтуються на екстраполяції розв'язку задачі, отриманого на попередніх

кроках на наступні кроки за різними параметрами напружено-деформованого стану. На основі розв'язання низки задач про розвиток тріщин в прямокутній пластині, тілі з еліптичною тріщиною та радіальної тріщини в циліндрі показано, що на етапі моделювання розвитку тріщини, розміри якої є набагато меншими, ніж розмір тіла, всі алгоритми мають майже однакову ефективність і вірогідність. При наближенні розмірів тріщини до граничних, алгоритми, що ґрунтуються на накопиченні отриманих від кроку до кроку величин напружень або переміщень, не дозволяють отримати вірогідні результати. Запропонований в статті алгоритм екстраполяції повних переміщень є вільним від зазначеного недоліку і надає змогу отримувати вірогідні результати із мінімальними обчислювальними витратами.

1. *Баженев В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкрить О.О.* Алгоритм моделювання розвитку тріщини в просторових тілах із застосуванням напіваналітичного метода скінченних елементів// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 75. – С. 13-26.
3. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкрить О.О.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в призматичних тілах з тріщинами. //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2003.- Випуск .74. с.73-82.
4. *Кушниренко Т.А., Шайдерман А.Е.* Определение долговечности конструкции при численном моделировании роста усталостной трещины. //Сопrotивление материалов и теория сооружений. – К., 1994.- Выпуск 61.- с.92-97.
5. *Пискунов С.О., Шкрить О.О., Мицюк С.В.* Визначення параметрів лінійної механіки руйнування для неоднорідних кругових тіл// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 80. – С. 9-22.
6. *Плацинская А.В.* К задаче моделирования усталостного разрушения пластин с центральной трещиной при одноосном нагружении: Тр. НГАСУ. 2002.5, №1, с.22-31.
7. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие, т.2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.:Наук. думка, 1988.-620с.
8. *Троценко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В.* Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении. – К.:Наук. думка, 1987.-257с.
9. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. –640с.
10. *Cisilino A.P., Aliabadi M.H.* Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems: Eng. Fract. Mech. 1999. 63, №6, с.713-733.
11. *Sharan Shailendra K.* Elasto-plastic finite element analysis of a crack in an infinite plate: Int. J. Fract. 2000. 103, №2, с.163-176.
12. *Yonglin Xu* Self-similar crack expansion method for twodimensional cracks under mixed mode loading conditions: Eng. Fract. Mech.- 1998. – 59, №2. – с.165-182.

УДК 539.3

Кривенко О.П. канд. техн. наук

ВПЛИВ КОМБІНОВАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА СТІЙКІСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Вивчається вплив на втрату стійкості осесиметричної сферичної панелі умов комбінованого закріплення контуру. Розглядається часткова заміна по контуру панелі жорсткого затиснення на шарнірне опирання.

Несуча спроможність і форми деформування пологих панелей залежать від багатьох факторів таких, як геометричні параметри оболонки, граничні умови, види навантажень тощо. Тип граничних умов суттєво впливає на величину критичного навантаження пологих панелей [1]. При цьому недостатньо дослідженою є проблема впливу комбінованих граничних умов на стійкість оболонок.

У роботі розглянуті питання стійкості пологих панелей з комбінованим закріпленням вздовж контуру. Одна частина контуру оболонки жорстко затиснута, інша, яка визначається кутом φ_0 , – має шарнірне опирання (рис. 1). Досліджений вплив на стійкість панелі послідовної заміни першого типу закріплення на другий при зміні кута φ_0 у межах $0^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$.

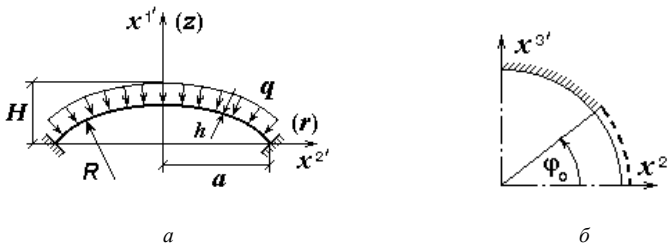


Рис. 1. Сферична панель з комбінованим опиранням

Аналіз розв'язків виконується за розробленою скінченноелементною методикою дослідження напружено-деформованого стану, стійкості та позакритичної поведінки тонких неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях [2-4]. Скінченноелементне дослідження оболонок базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та положеннях моментної схеми скінченних елементів. Завдяки такому підходу методика дозволяє на основі єдиної методологічної бази досліджувати

тонкі оболонки з різноманітними геометричними особливостями за товщиною та неоднорідностями матеріалу при термосилових навантаженнях. Нелінійний розв'язок отримується комбінованим алгоритмом, який поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром із ітераційною процедурою Ньютона-Канторовича на кожному кроці навантаження. Розроблено автоматизоване управління нелінійним розрахунком у процесі проходження діаграми "навантаження-прогин" незалежно від її складності, що досягається за рахунок самокоригування параметрів алгоритму.

Достовірність методики обґрунтована чисельними дослідженнями збіжності та точності скінченноелементних розв'язків для різних класів задач [5-10].

Розглянута полога осесиметрична сферична панель сталої товщини, що навантажувалася зовнішнім рівномірним тиском інтенсивністю q (рис. 1, а). Матеріал оболонки – ізотропний. Прийняті наступні вихідні данні: модуль пружності $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, радіус опорного контуру $a = 1$ м, радіус серединної поверхні $R = 12.52$ м, товщина $h = 0.01$ м, стріла підйому $H = 0.04$ м. Результати досліджень подані з використанням наступних безрозмірних параметрів:

$$\bar{q} = a^4 q / (Eh^4), \quad \bar{u}^I = u^I / h, \quad k = H/h,$$

де u^I – прогин панелі вздовж осі x^I ; k – параметр, що характеризує пологість панелі.

На прикладі пологої сферичної панелі (рис. 1, а), що жорстко затиснута за контуром, досліджена збіжність розв'язків за МСЕ (табл. 1) та виконане їх порівняння з відомими результатами (рис. 2). Згідно досліджень [1, 11] розглянута панель деформується та втрачає стійкість по осесиметричній формі. Тому за розрахункову модель для МСЕ прийнята чверть сферичної панелі з рівномірним розподілом СЕ вздовж радіуса та за колом. Дослідження збіжності показало, що збіг верхньої та нижньої критичних точок з похибкою до 3% настає вже при сітці 10×10 СЕ. По всій довжині діаграми "навантаження-прогин у центрі панелі" спостерігається практично повний збіг з результатами робіт [1, 11] з незначним розходженням у верхній критичній точці. Приведені діаграми "енергія-прогин у центрі панелі", демонструють процентний внесок мембранної \tilde{W}_m та згинної \tilde{W}_z складових у сумарну потенціальну енергію деформування, де $\tilde{W}_m = W_m / (W_m + W_z) \cdot 100\%$, $\tilde{W}_z = W_z / (W_m + W_z) \cdot 100\%$. Отримано повний збіг з відповідною діаграмою роботи [1].

Таблиця 1

Збіжність розв'язків MCE у верхній та нижній критичних точках

Розмір сітки CE	5×5	10×10	15×15	20×20
$\bar{q}_{кр}^e$	55.96	51.64	50.74	50.12
$\Delta(\bar{q}_{кр}^e), \%$	11.7	3.0	1.2	0
$\bar{u}_{кр}^{1'e}$	-1.027	-0.855	-0.895	-0.882
$\Delta(\bar{u}_{кр}^{1'e}), \%$	16.4	-3.1	1.5	0
$\bar{q}_{кр}^H$	26.19	21.69	21.31	21.20
$\Delta(\bar{q}_{кр}^H), \%$	23.5	2.3	0.5	0
$\bar{u}_{кр}^{1'H}$	-5.462	-5.497	-5.537	-5.498
$\Delta(\bar{u}_{кр}^{1'H}), \%$	-0.7	0	0.7	0

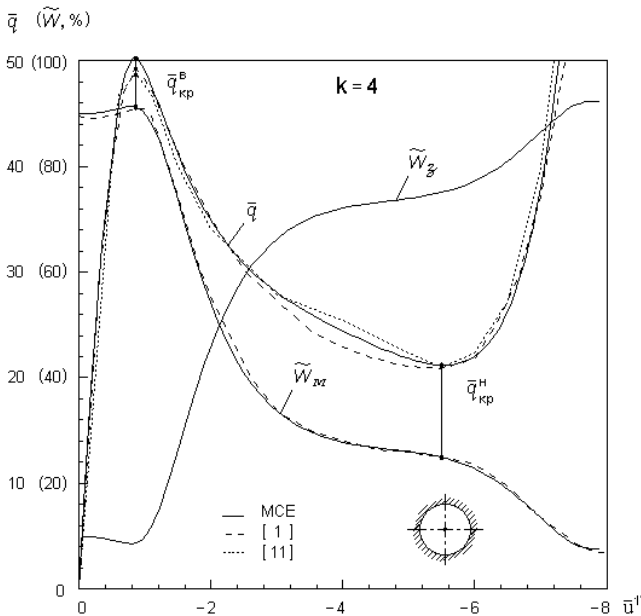


Рис. 2. Діаграми "навантаження-прогин у центрі" та "енергія-прогин" сферичної панелі

Для розглянутої оболонки досліджений вплив зміни умов комбінованого закріплення опорного контуру ($0^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$) на її стійкість. Зміна області шарнірного опирання φ_0 відбувалася з кроком 5° і 10° . Тому, виходячи з цього, для проведення досліджень за розрахункову була прийнята сітка 18×18 СЕ. Вибрані розміри сітки задовольняють умові збіжності розв'язків, що було показано вище на прикладі жорстко затиснутої по контуру панелі. Це стосується і комбінованого закріплення, оскільки при згущенні сітки у два рази (36×36 СЕ) критичні сили у порівнянні з сіткою 18×18 СЕ, наприклад при $\varphi_0 = 20^\circ$, різняться лише на 1.8%.

На рис. 3 досліджена еволюція діаграм “навантаження-прогин” в центрі панелі від зміни граничних умов. При жорсткому затисненні усього контуру ($\varphi_0 = 0^\circ$) і частковій заміні його на шарнірне опирання ($\varphi_0 < 20^\circ$) діаграми мають простий вигляд, а форми втрати стійкості (рис. 4) характеризуються проклацуванням центральної частини панелі, яка приймає наближену до еліптичної форму, розтягуючись в сторону шарнірного опирання. Подальше збільшення зони шарнірного опирання, починаючи з $\varphi_0 = 20^\circ$, приводить до ускладнення діаграм – з'являються петлі. При цьому форма деформування панелі має дві вм'ятини, що розміщені в області шарнірного опирання. Це наочно спостерігається на відповідній картині муарових смуг. При шарнірному опиранні вздовж усього опорного контуру ($\varphi_0 = 90^\circ$) панель має кільцеву осесиметричну вм'ятину, що розташована по середині меридіану.

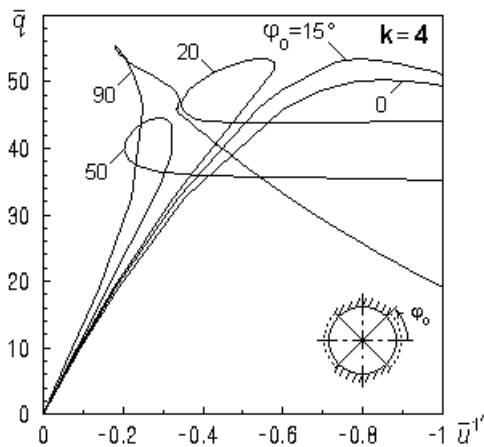


Рис. 3. Еволюція діаграм “навантаження-прогин” в центрі панелі

Згідно до розрахунків для всіх варіантів граничних умов у розв'язках до $\bar{q}_{кр}^e$ відсутні точки розгалуження. Ці висновки співпадають з результатами досліджень [1, 12] для панелі з $k=4$ при однорідних граничних умовах. Точки розгалуження та сходження гілок розв'язків розміщуються лише на нестійких ділянках діаграм “навантаження-прогин” – між верхньою та нижньою критичними точками.

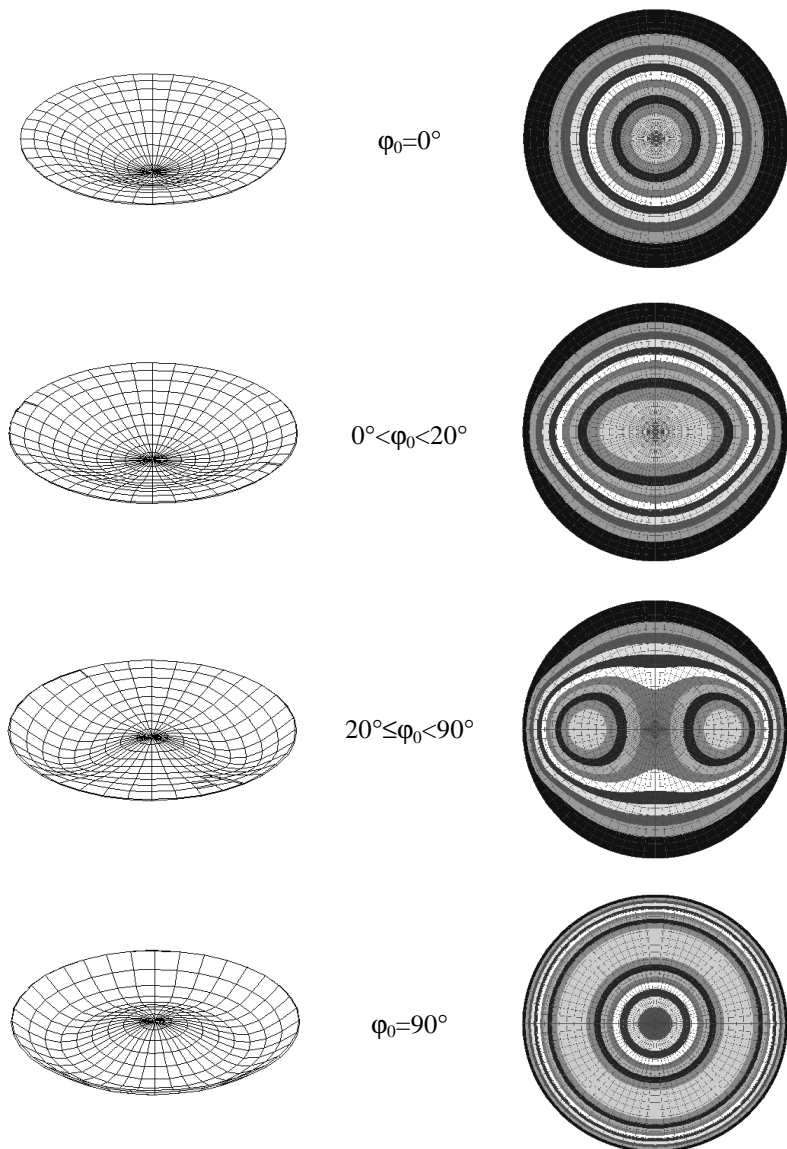


Рис. 4. Форми втрати стійкості панелей при зміні граничних умов

Аналіз результатів виявив, нелінійну залежність величини верхнього критичного навантаження $\bar{q}_{кр}^e$ від зміни кута φ_0 (рис. 5, табл. 2). При зростанні області шарнірного опирання до $\varphi_0=20^\circ$ (що припадає на 22% контуру, залишаючи 78% його жорстко затиснутим) значення $\bar{q}_{кр}^e$ збільшується на 6.15% у порівнянні з жорстко затиснутою панеллю. Далі спостерігається падіння цієї величини на -11.63% (при $\varphi_0=50^\circ$), після чого $\bar{q}_{кр}^e$ знов зростає. При повній заміні жорсткого затиснення ($\varphi_0=0^\circ$) на шарнірне опирання ($\varphi_0=90^\circ$) величина верхнього критичного навантаження збільшується на 10.08%. Для цих двох варіантів граничних умов у роботі [12] також відмічається подібна відмінність між критичними навантаженнями, яка складає 14%. Виявлена нелінійна залежність $\bar{q}_{кр}^e$ від способу закріплення контуру пояснюється характером зміни форм втрати стійкості (рис. 4).

Проведені дослідження дозволили виявити існуючі нелінійні закономірності втрати стійкості пологих сферичних осесиметричних панелей при послідовній зміні областей комбінованого

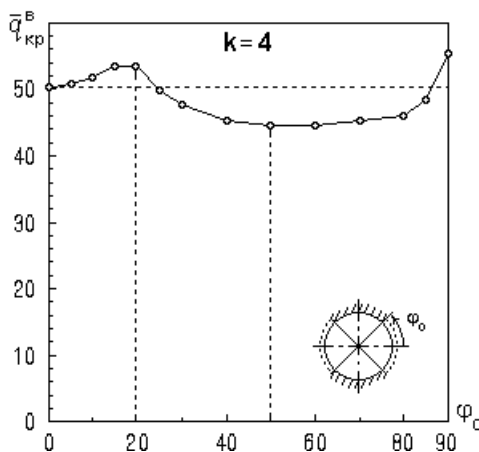


Рис. 5. Залежності $\bar{q}_{кр}^e$ від зростання області шарнірного опирання

Таблиця 2

Вплив зміни кінематичних умов на несучу спроможність панелі

φ_0 , град	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e)$, %
0	50.40	0
5	50.88	0.95
10	51.75	2.68
15	53.44	6.03
20	53.50	6.15
25	49.91	-0.97
30	47.62	-5.51
40	45.23	-10.26
50	44.54	-11.63
60	44.65	-11.41
70	45.18	-10.36
80	46.09	-8.55
85	46.78	-7.18
90	55.48	10.08

закріплення контуру. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні різноманітних несучих оболонкових конструкцій та їхніх елементів.

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.
2. *Баженев В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатопшарових поребричних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
3. *Баженев В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
4. *Баженев В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
5. *Баженев В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности. - 1999. - N 5. - С. 96-102.
6. *Баженев В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гладких ребристих та послаблених вирізами гнучких пологих панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2000 р. - Вип.67. - С. 92-103.
7. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості оболонок при різних законах нерівномірного нагріву // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 2002 р.- Вип. 70. - С. 104-109.
8. *Баженев В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
9. *Баженев В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Стійкість конічних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук. -тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006 р. - Вип. 78.
10. *Баженев В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Оцінка розв'язків при врахуванні залежності властивостей матеріалу від температури в задачах стійкості оболонок// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук. -тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006 р. - Вип. 79.
11. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. - К.: Наукова думка, 1974. - 136 с.
12. *Валишвили Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976. - 278 с.

УДК 539.3

Погорелова О.С., канд. фіз.-мат. наук

Постнікова Т.Г., канд. техн. наук

Лук'янченко О.О., канд. техн. наук

ЧИСЕЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ УДАРУ СИЛОЮ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

Виконана чисельна оптимізація параметрів віброударної системи з використанням методу проєкції градієнта з корекцією нев'язки в обмеженнях. Приділено увагу питанню впливу параметрів, які характеризують зону контакту тіл, що співударяються, на характеристики коливального руху системи.

1. Постановка проблеми

При проектуванні віброударних систем велике значення має правильний вибір параметрів, оскільки від цього залежить ефективність їхньої роботи.

У будівельній механіці методи пошуку оптимальних параметрів (оптимізація) складають окрему область оптимального проектування. Основані вони найчастіше на ітераційних процесах, проміжним етапом яких є знаходження тих або інших характеристик конструкцій. Розроблені ефективні чисельні підходи до розв'язання проблем оптимізації в задачах будівельної механіки, що базуються на методах нелінійного програмування [1-4]. Вони засновані на покроковій мінімізації цільової функції на множині значень параметрів, які задовольняють лінійним та нелінійним обмеженням у вигляді рівностей та нерівностей. Цільова функція є критерієм якості конструкції. Одним з типових підходів є метод швидкісного спуску [2-4]. Напрямок кожного кроку оптимізації визначається градієнтом цільової функції з врахуванням існуючих обмежень. Градієнт є вектор, що направлений в бік збільшення цільової функції. Процес оптимізації відбувається за допомогою нормованого вектора, який направлений протилежно до градієнта в бік швидкісного спуску. Для прискорення спуску найбільш ефективним вважається метод золотого перерізу [4], що забезпечує локалізацію мінімуму в інтервалі заданої довжини за найменшу кількість кроків процесу оптимізації. Проте при наявності обмежень у вигляді рівностей та нерівностей метод швидкісного спуску із застосуванням методу золотого перерізу в немодифікованому вигляді застосовуватись не може.

В статті пропонується підхід до оптимізації параметрів віброударної системи з використанням методики оптимального проектування - методу проєкції градієнта з корекцією нев'язки в обмеженнях, що представлений у

роботах [1,5]. Метод проекції градієнта є модифікованим методом швидкісного спуску. Модифікація полягає у формуванні матриці, яка проектує вектор визначення напрямку пошуку оптимальної точки на підпростір сукупності існуючих активних обмежень і дозволяє визначити новий напрямок траєкторії мінімізації цільової функції. Ця матриця має назву «проектуюча» матриця. На її основі формується вектор, що дозволяє в процесі пошуку локального мінімуму по даному напрямку отримати додаткові оптимізаційні поправки для цільової функції та корегувати базис обмежень параметрів проектування. На кожному кроці мінімізації цільової функції виконується перевірка необхідних умов оптимальності Куна-Таккера [2,3] та критерію зупинки оптимізаційного процесу.

Запропонований підхід демонструється на прикладі дослідження коливального руху віброударної системи з двома степенями вільності, що зображена на рис. 1. Система складається із основного та приєднаного тіл.

Основне тіло – це лінійний осцилятор з масою m_1 , що характеризується жорсткістю k_1 і коефіцієнтом опору c_1 . Приєднане тіло з масою m_2 пов'язане з ним пружиною жорсткості k_2 з коефіцієнтом опору c_2 . За початок відліку прийняте положення, при якому відстань між тілами дорівнює D і обидві пружини є недеформованими. Переміщення першого тіла визначається координатою $x_1(t)$,

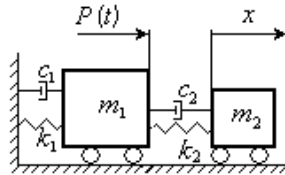


Рис. 1

другого – $x_2(t)$. Основне тіло знаходиться під дією зовнішнього навантаження $P(t)$. Припускається, що під час руху структура системи може змінюватися. Це відбувається внаслідок еволюції динамічних станів вібросистеми і виникнення між її елементами ударних контактів.

Рівняння руху системи мають наступний вигляд:

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 + 2\xi_2\omega_2\chi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) = \frac{1}{m_1}(P(t) - F(t)) \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) = \frac{1}{m_2}F(t),$$

де $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi = \frac{m_2}{m_1}$, $F(t)$ –

моделююча сила контактної взаємодії і діє лише під час удару (див. п.2). Параметри вібросистеми наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Параметри двомасової віброударної системи

Назва характеристики	Основне тіло	Приєднане тіло
Маса m_i , кг	1000.0	70.0
Парціальна частота коливань ω_i , рад/с	6.283185	5.646
Коефіцієнт демпфірування ξ_i	0.03629	0.2
Константи Герца, які залежать від геометрії контактуючих поверхонь A, B , 1/м	$A=1.0, B=1.0$	
$q (A/B)$	0.3180	
Коефіцієнт Пуассона μ_i	0.3	0.3
Модуль Юнга E_i , Н/м ²	$2.09934 \cdot 10^{11}$	$2.09934 \cdot 10^{11}$
Початкова відстань між тілами D , м	0.05	

Основними етапами розв'язання задачі оптимізації є побудова моделі віброударної системи та зовнішнього навантаження, реалізація процедури знаходження реакції системи на навантаження при фіксованому значенні параметрів конструкції, формування цільової функції та визначення накладених обмежень.

Критерієм оптимізації є цільова функція. Для розглянутої віброударної системи за цільову функцію прийнята амплітуда коливань основної маси $A_{\max}(\vec{b})$, де \vec{b} - вектор параметрів оптимального проектування. Така постановка задачі відповідає розгляданню приєднаної маси як ударного гасителя коливань основного тіла одnobічної дії. Задача оптимізації зводиться до визначення таких значень параметрів вектора $\vec{b}(m_2, \omega_2, \xi_2)$, де m_2, ω_2, ξ_2 - маса, парціальна частота та коефіцієнт демпфірування приєднаної маси, при яких амплітуда коливань основної маси $A_{\max}(\vec{b}) = A_{\max}(m_2, \omega_2, \xi_2)$ буде мінімальною. На кожному кроці процедури оптимізації обчислюється амплітуда коливань основної маси, що відповідає даним параметрам приєднаної маси, шляхом розв'язання задачі про усталені змушені коливання. Напрямок чергового оптимізаційного кроку визначається через обчислення градієнта цільової функції з урахуванням накладених обмежень. Параметри приєднаної маси вважаються оптимальними тоді, коли знайдений мінімум цільової функції.

Задача оптимізації розв'язується при обмеженнях, які накладаються на вектор параметрів приєднаної маси $\vec{b}(m_2, \omega_2, \xi_2)$, що оптимізуються, та

на цільову функцію, а саме на амплітуду коливань основної маси $A_{\max}(\bar{b})$. Ці обмеження записуються у вигляді системи нерівностей:

$$50 \text{ кг} \leq m_2 \leq 200 \text{ кг}$$

$$0.022 \leq \xi_2 \leq 0.25$$

$$4.47 \text{ рад/с} \leq \omega_2 \leq 5.0 \text{ рад/с}$$

$$0.0 \text{ м} \leq A_{\max}(\bar{b}) \leq 10 \text{ м}$$

При розв'язанні задачі оптимізації обчислення значень цільової функції при конкретних значеннях параметрів приєднаної маси виконуються за допомогою чисельного моделювання коливань віброударної системи. Режим усталених коливань моделюється при заданих значеннях зовнішнього навантаження та параметрів основної і приєднаної мас віброударної системи.

Таким чином, локальний мінімум амплітуди основної маси віброударної системи $A_{\max}(\bar{b})$ при відповідних оптимальних значеннях параметрів приєднаної маси $\bar{b}(m_2, \omega_2, \xi_2)$ визначається з масиву реалізації усталених коливань основної маси за допомогою чисельного методу проекції градієнта з корекцією нев'язки в обмеженнях.

2. Моделювання сили контактної взаємодії

Віброударні системи – це такі системи, в яких зіткнення та співударі елементів між собою відбуваються регулярно і є частиною технологічного процесу. Центральним питанням при розв'язанні задач руху віброударних систем є спосіб врахування удару. Для цього існує два варіанти. Перший варіант – в проміжках між ударами складаються рівняння руху системи, для яких в момент удару існують граничні умови для переміщень та швидкостей, в останні входить коефіцієнт відновлення. Цей спосіб розв'язання задачі віброударного руху достатньо розповсюджений, автори також його використовували і отримали низку результатів, наприклад [6,7]. Існує другий варіант – удар моделюється силою контактної взаємодії, яка виникає і діє лише в період удару. Цей підхід є більш загальним. Він суттєво спрощує ряд побудов розв'язків, наприклад, задачі про зовнішній удар о перешкоду і внутрішній удар між тілами системи в такій постановці не відрізняються. І, що дуже важливо, він дозволяє отримати єдину форму запису рівнянь руху на всій часовій осі разом з періодом удару та одержати закон зміни і величину контактної сили.

Сила контактної взаємодії між тілами, що співударяються, моделюється фундаментальним законом Герца, який описує удар між пружними тілами. Цей закон, не дивлячись на те, що він базується на певних ідеальних умовах, широко застосовувався в різних ситуаціях, пов'язаних з ударом. І на сьогодні закон Герца залишається найбільш поширеним принципом, який використовується для моделювання ударної поведінки.

Закон Герца встановлює, що для пружного удару тіл сила контактної взаємодії $F(t)$ має вигляд [8,9]:

$$F(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (2)$$

де $\alpha(t)$ - відносне зближення тіл, K - константа Герца:

$$K = \frac{4}{3} \cdot \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}. \quad (3)$$

Тут q , A і B – табличні константи, які залежать від місцевої геометрії зони контакту, а

$$\delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi}, \quad \delta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2 \pi}, \quad (4)$$

де μ_i і E_i - коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл (див.табл. 1).

3. Оптимізація параметрів віброударної системи

Оптимізуємо параметри приєднаного тіла віброударної системи, що зображена на рис. 1: масу m_2 , парціальну частоту коливань ω_2 і коефіцієнт демпфірування ξ_2 . Оптимізацію проводимо при гармонійному навантаженні $P(t) = P_c \cos \omega t$ з інтенсивністю $P_c = 2000$ Н та частотою $\omega = 6.0$ рад/с, що близька до парціальної частоти основної маси, тобто в області резонансу. Значення параметрів, що оптимізуються, приведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Параметри приєднаного тіла до і після оптимізації

Назва характеристики	До оптимізації	Після оптимізації
Маса m_2 , кг	70.0	89.3
Парціальна частота коливань ω_2 , рад/с	5.646	5.976
Коефіцієнт демпфірування ξ_2	0.2000	0.2226

На рис.2 представлені амплітудно-частотні характеристики основного тіла віброударної системи в трьох випадках – основна маса рухається без приєднаного (тонка лінія), приєднана маса має параметри до оптимізації (середня лінія) і після оптимізації (товста лінія). Завдяки ударному гасителю з оптимальними параметрами амплітуда основного тіла на резонансній частоті зменшилася майже на 30%. Можна зробити висновок, що метод проєкції градієнта і розроблене

програмне забезпечення дозволяють визначити оптимальні параметри віброударної системи.

На рис. 3, а, б зображені закони руху тіл віброударної системи та залежність ударної сили (рис. 3, в, г) від часу до та після оптимізації. Товстою лінією зображені переміщення основного тіла, тонкою – приєднаного. Бачимо, що характер руху системи змінюється – рух стає двоударним, але

максимальна величина ударної сили не змінюється. Оскільки період удару є дуже малий, на рис. 3, д, е, ж зображені залежності контактної сили від часу лише за період удару у великому масштабі за часом.

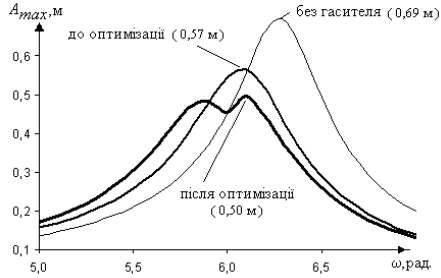


Рис. 2

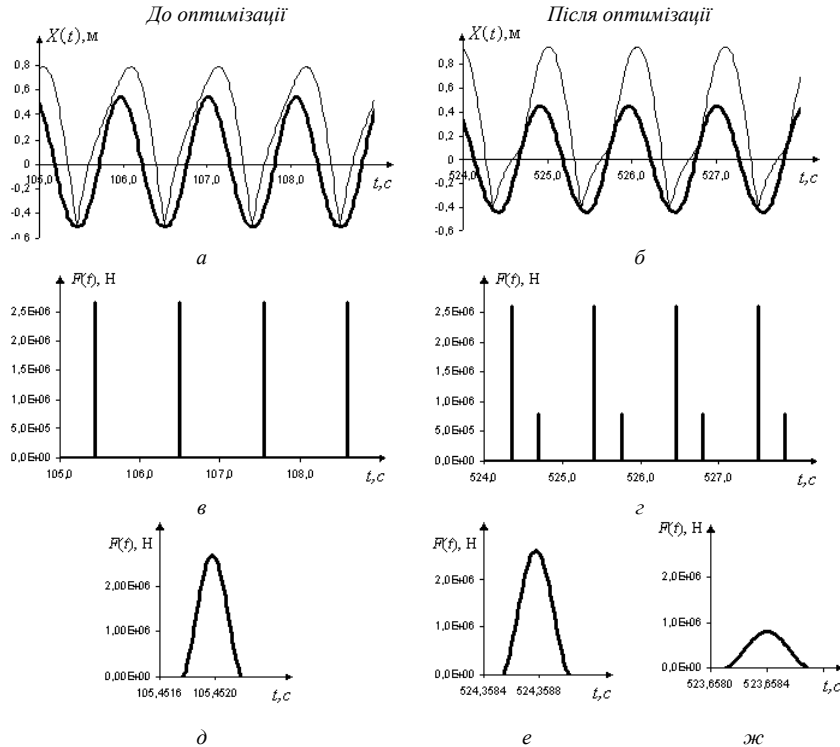


Рис. 3

4. Аналіз впливу інших параметрів віброударної системи на характеристики коливань основного тіла

Простежимо тепер вплив інших параметрів, що характеризують удар, на коливання основної маси. Як показали дослідження, значення величин, що входять у константу Герца – модулі пружності E_i і табличні константи A і B , які характеризують місцеву геометрію зони контакту, впливають на величину контактної сили і практично не змінюють амплітуду коливань основної маси. На рис. 4 показані графіки контактної сили за період удару для трьох різних матеріалів – для сталі, міді й алюмінію (передбачається, що в зоні контакту у основної і приєднаної мас однаковий матеріал і, відповідно, однакові модулі пружності E_i).

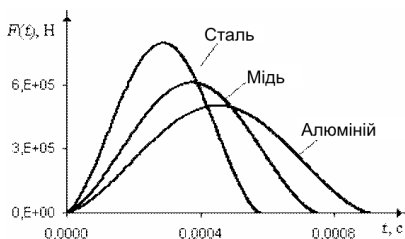


Рис. 4

У таблиці 3 приведені значення амплітуди основного тіла для цих матеріалів. Також приведені дані для каучуку, максимальна величина контактної сили для нього складає $4.69 \cdot 10^4$ Н. Модуль пружності для каучуку в 26000 разів менше, ніж сталі, контактна сила менше в 60 разів, а амплітуда основного тіла збільшилась лише в 1.14 разів! Усі результати отримані для оптимальних параметрів приєднаного тіла і при гармонійному зовнішньому навантаженні, яке описане вище.

Таблиця 3

Амплітуда коливань основного тіла для різних матеріалів

Назва матеріалу	Модуль Юнга E , Н/м ²	Амплітуда, м
Сталь	$2.09934 \cdot 10^{11}$	0,453678
Мідь	$1.11000 \cdot 10^{11}$	0,453605
Алюміній	$0.69000 \cdot 10^{11}$	0,453529
Каучук	$0.00008 \cdot 10^{11}$	0,518791

Аналогічні результати отримані при зміні констант A і B , що характеризують місцеву геометрію зони контакту. На рис. 5 приведені графіки контактної сили при різних значеннях A і B , у таблиці 4 наведені величини амплітуд основного тіла при різних A і B .

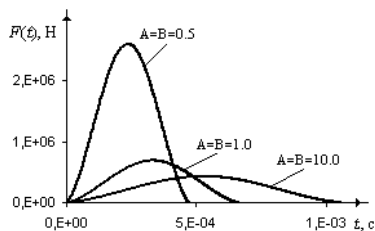


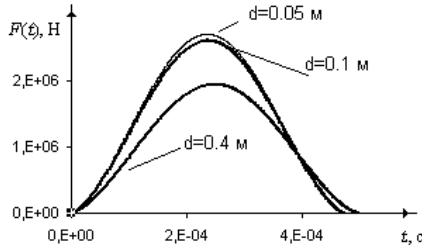
Рис. 5

Таблиця 4

Амплітуда коливань основного тіла в залежності від геометрії контактуючих поверхонь

A, 1/м	У, 1/м	Амплітуда, м
0.5	0.5	0,453678
1.0	1.0	0,453643
10.0	10.0	0,453444

Простежимо тепер, як впливає первісний зазор між тілами D на рух віброударної системи. Дослідження показують, що зі збільшенням D удар між тілами слабшає і контактна сила зменшується (рис.6).



З подальшим збільшенням D тіла перестають ударятися, амплітуда основного тіла

спочатку зменшується, а потім залишається незмінною – приєднане тіло стає динамічним безударним гасителем. Результати приведені в таблиці 5.

5. Висновки

Результати досліджень доводять, що:

1) метод проекції градієнта з корекцією нев'язки в обмеженнях і розроблене програмне забезпечення дозволяють визначити оптимальні параметри віброударної системи;

2) значення величин, які характеризують зону контакту, а саме модулі пружності і табличні константи, що описують місцеву геометрію зони контакту, впливають на величину контактної сили і практично не змінюють амплітуду коливань основної маси.

Таблиця 5

Амплітуда коливань основного тіла в залежності від початкової відстані між тілами

Початкова відстань між тілами D , м	Амплітуда, м
0.05	0,453678
0.1	0,509651
0.4	0,409748
0.5	0,200138
0.7	0,200138

1. Гуляев В.И., Баженов В.А., Кошкин В.Л. Методы оптимизации в строительной механике.-К.:УМК ВО, 1988.-192с.
2. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование.-М.:Мир,1983.-480с.
3. Рейтман М.И. Методы оптимального проектирования деформируемых тел.-М.:Наука, 1976.-267с.
4. Хог Э., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. Пер. с англ. Под ред. Н.В. Баничука.-М.:Мир, 1988.-428с.
5. Лук'яненко О.О., Постнікова Т.Г. Оптимізація параметрів ударного гасителя коливань// Збірник наукових праць Міністерства Надзвичайних ситуацій, 2003 р. – сс. 23-28.
6. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2002.-Вип.70.- С.69-80.
7. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.
8. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
9. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.

УДК 624.034

Цимбал С.Й., канд. тех. наук,
Богославець Н.М. аспірант,
Шейхназарі Х.Р. аспірант

ВРАХУВАННЯ СТАНУ ҐРУНТІВ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ НАПРУЖЕНЬ В ОСНОВІ ФУНДАМЕНТІВ

Наведено аналітичне вирішення щодо визначення характеру розподілу напружень в основі фундаментів з урахуванням стану ґрунтів. Отримані результати розподілу напружень в основі стовпчастих фундаментів порівнюються з напруженнями визначеними для ізотропного середовища.

В першій половині 20-го століття професори П.А.Міняєв, Н.М.Герсеванов, В.А. Флорін та ін. довели про можливість використання співвідношень теорії пружності для розрахунку напружень в ґрунтах. Це було обґрунтовано такими припущеннями: на ґрунт передається одноразове навантаження (процес будівництва) без розвантаження, а тому не потрібно окремо враховувати пружні деформації; ґрунт приймається як лінійно деформоване середовище, тобто залежність між напруженнями і деформаціями – лінійна, що дає можливість використовувати закон Гука; розміри областей (зон) пластичних деформацій обмежені або відсутні. Враховуючи вище зазначене, необхідно говорити про область використання співвідношень теорії пружності до ґрунтів, а не про те, чи можливо використовувати, не обмежуючи умов, стосовно до яких розглядається питання про можливість їх використання.

Ґрунти, як відомо, являють собою сукупність більш менш пов'язаних між собою мінеральних часток, кожна із яких є опорою для сусідніх з нею часток, передача зусиль в ґрунті проходить в окремих точках через зв'язки або через безпосередні контакти сусідніх частинок. А тому зусилля фактично повинно бути віднесено не до всієї площі перерізу, а тільки до частини, яку складають зв'язки і контакти між частинками ґрунту. Однак врахувати таку схему передачі зусилля практично неможливо, оскільки неможливо врахувати роботу кожної мінеральної частки в ґрунтовому масиві. Крім того, необхідно було б відокремлювати напруження зв'язків від напружень часток, що практично зробити неможливо. Враховуючи вище зазначену складність формування напруженого стану в ґрунтах, приймається припущення про неперервний розподіл напружень в будь – якому перетині, проведеному в масиві ґрунту.

Одночасно необхідно відзначити, що ґрунти являють собою багатокомпонентне середовище, мають різну структуру і текстуру, дисперсні, неоднорідні та анізотропні. В залежності від співвідношення компонентів, що їх складають, ґрунти можуть знаходитись у різних станах, а характер формування напружень в них відрізняється від – напружень в суцільних ізотропних середовищах.

Під дією напружень складові ґрунтів визначають загальні деформації ґрунту. В процесі деформування може відбуватися взаємне переміщення окремих компонентів і зміна їх співвідношень в окремих об'ємах. Стисливість скелета ґрунту, що представляє собою дисперсне середовище, проходить практично повністю за рахунок зменшення об'єму пор в ґрунті внаслідок перекомпановки часток, їх взаємного переміщення, проникання одних часток в проміжки між іншими, що призводить до більшої щільності укладки. При цьому порушуються зв'язки між частками ґрунту руйнуються, але одночасно відновлюються в нових точках контактами між частками. При стисненні ґрунту ґрунтова вода із одних пор виходить і переходить в пори, що знаходяться поруч, одночасно стискаючись в об'ємі і виштовхує воду із сусідніх пор. Взагалі процес формування напружено–деформованого стану в ґрунтах дуже складний і потребує самостійного аналізу.

Метою даної роботи є отримання співвідношень теорії пружності в основі стовпчастих фундаментів з врахуванням фізичних характеристик ґрунтів шляхом чисельного інтегрування по площі підшви фундаменту від рівномірно розподіленого навантаження та порівняння отриманого розподілу напружень в ґрунтовій основі з напруженнями, визначеними без врахування стану ґрунтів.

Трьохкомпонентне середовище ґрунту, яке знаходиться в постійній взаємодії, в залежності від кількісного складу характеризує його стан ґрунту. В залежності від співвідношення об'єму мінеральних часток, пор і води в ґрунті характер розподілу напружень змінюється. Стан піщаних ґрунтів характеризується коефіцієнтами пористості, а пілувато–глинистих – коефіцієнтом пористості та показником текучості.

$$K = \frac{e + I_L}{1 + I_L}, \quad (1)$$

де e – коефіцієнт пористості ґрунту; I_L – показник текучості.

Для виявлення впливу стану ґрунтів на характер розподілу напружень в основі стовпчастих фундаментів використовується розв'язання просторової задачі з урахуванням стану ґрунтів для визначення вертикальних і дотичних напружень в ґрунтовій основі від зосередженої

сили P , що діє на підшві фундаменту [1]. Змінні інтегрування по площі підшви фундаменту наведено на рис. 1. Замінюючи P на $q d\xi d\eta$, вирази σ_z , τ_{xy} , τ_{zx} мають вигляд:

$$\sigma_z = \frac{qz^3}{2\pi(1-\frac{\pi^2 k}{16})} \int_{-a}^{+a+b} \int_{-a}^{+a+b} \frac{\left(3 - \frac{4k\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} \arctg \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{z} \right)}{(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2})^5} d\xi d\eta; \quad (2)$$

$$\tau_{zx} = \frac{qz^2}{2\pi(1-\frac{\pi^2 k}{16})} \int_{-a}^{+a+b} \int_{-a}^{+a+b} \frac{(x-\xi) \left(3 - \frac{4k\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} \arctg \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{z} \right)}{(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2})^5} d\xi d\eta; \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{qz^2}{2\pi(1-\frac{\pi^2 k}{16})} \int_{-a}^{+a+b} \int_{-a}^{+a+b} \frac{(y-\eta) \left(3 - \frac{4k\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} \arctg \frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{z} \right)}{(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2})^5} d\xi d\eta. \quad (4)$$

Наведені формули (2) – (4) дають можливість отримати аналогічні вирази для компонент вектора переміщень і тензора напружень у вигляді подвійних інтегралів по області, яку займає підшва фундаменту.

Безпосереднє визначення цих компонент пов'язано з великими труднощами, оскільки вид підінтегральних функцій не дозволяє отримати значення подвійних інтегралів в аналітичній формі. У зв'язку з цим в даній роботі для визначення подвійних інтегралів використовується чисельний підхід, який ґрунтується на адаптивній програмі QUANC 8 [2].

Для ілюстрації напруженого стану в основі стовпчастого фундаменту, заглибленого в м'який пісок на 1,6 м ($\gamma = 18,0 \text{ кн/м}^3$, $e = 0,70$, $\varphi = 30^\circ$, $E = 23 \text{ мПа}$), при дії рівномірно розподіленого одиничного навантаження на підшві стовпчастого фундаменту $2 \times 2 \text{ м}$ побудовані епюри розподілу вертикальних напружень σ_z для різних глибин (рис. 2).

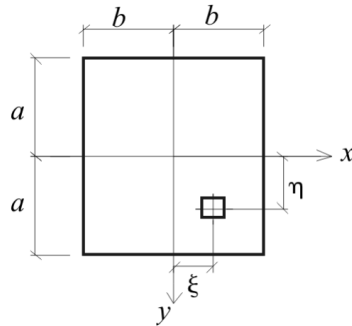


Рис. 1. Схема до визначення напружень в основі фундаменту

Максимальні вертикальні напруження, як в пористому, так і в ізотропному середовищах спостерігаються по осі симетрії фундаменту. Перші на всьому інтервалі порівняння перевищують напруження, що виникають на відповідних глибинах в ізотропному середовищі на 17...40%. Зі збільшенням глибини і відстані від осі фундаменту в обох випадках їхні величини зменшуються. У пористому середовищі відповідні вертикальні напруження з віддаленням від осі фундаменту затухають значно швидше ніж в ізотропному середовищі, що можна пояснити відсутністю міцних зв'язків, між частинками ґрунту.

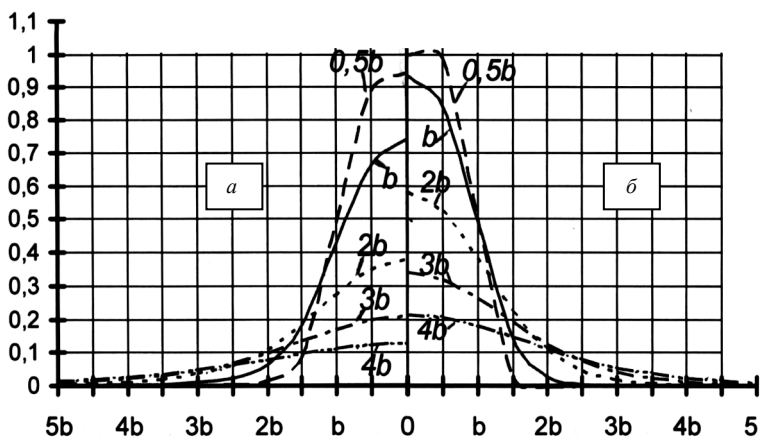


Рис. 2. Епюри розподілу вертикальних навантажень на різних відстанях від підшви фундаменту: а – для ізотропного середовища; б – з урахуванням стану ґрунту

Експериментальні дані, наведені в літературних джерелах, про розподіл напружень в основі фундаментів та порівняння їх з теоретичними даними підтверджують, що останні в 1,5 – 2 рази менші експериментальних. Наведені результати розподілу напружень в основі стовпчастих фундаментів з урахуванням стану ґрунтів дають змогу отримувати більш достовірні дані про характер розподілу напружень в ґрунтовій основі, що буде сприяти удосконаленню розрахунків фундаментів за першим і другим граничними станами.

1. Цимбал С.Й., Куценко Г.В. Визначення напружень у ґрунтах від зосередженої сили, що діє на поверхні // Основи і фундаменти: Міжвідомчий науково – технічний збірник. – К.: КНУБА, 2002. – Вип.27. – с. 146 – 151.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980 – 279с.

УДК 534-21

Шульга Н.Д., канд. техн. наук

ЧАСТОТИ ПРОПУСКАННЯ І ГРАНИЧНІ ПРОСТОРОВІ ФОРМИ ОБ'ЄМНИХ ХВИЛЬ ЗСУВУ В ДВОКОМПОНЕНТНИХ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТАХ З МІЖФАЗНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

Механічні властивості композитних матеріалів визначаються механічними властивостями компонент, геометричною структурою матеріалу та якістю міжфазних поверхонь [3]. Врахування останнього фактору в теоретичних дослідженнях пов'язане з суттєвими складнощами. Для моделювання тонкого шару з міжфазними недосконаlostями та дефектами, який розділяє дві фази (компоненти) шаруватого композиту з різними фізико-механічними властивостями, вводиться [1, 2, 4 та ін.] гіпотетична міжфазна поверхня з певними властивостями. Кількісним виразником цих властивостей виступають міжфазні сталі, що входять в механічні умови спряження. Дана стаття є продовженням дослідження [2, 5, 6, 7] про зони пропускання і просторові форми коливань на їх границях для хвиль зсуву в ортотропних двокомпонентних шаруватих композитах з міжфазними недосконаlostями.

Розглянемо двокомпонентний регулярно-шаруватий композит з міжфазними недосконаlostями та дефектами, механічні властивості ортотропних компонент якого позначимо через $c_{ij,1}$, ρ_1 для шарів товщиною h_1 і $c_{ij,2}$, ρ_2 для шарів товщиною h_2 . Координатні вісі x_1 , x_2 , x_3 направимо вздовж головних напрямів ортотропії шарів. Для хвиль зсуву $u_1(0, x_2, x_3, t) \neq 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ або $u_1 = 0$, $u_2(x_1, 0, x_3, t) \neq 0$, $u_3 = 0$ необхідно знайти розв'язок системи рівнянь

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_{6-m}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{6-m, m-3}}{\partial x_{m-3}} + \frac{\partial \sigma_{3, 6-m}}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{3, 6-m} = c_{mm}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{12} = c_{66}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_{m-3}}, \quad m = 4, 5. \quad (1)$$

Рівняння (1) справедливі поза площинами $x_3 = x_{3, 2n-2+q}$ ($q = 1, 2$, n – ціле число) розриву властивостей матеріалу, а на самих цих площинах з

міжфазними недосконалотями, зумовленими адгезійними неоднорідностями і дефектністю, повинні виконуватися [1, 2, 4 та ін.] контактні умови

$$\begin{aligned} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0) &= \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0), \\ u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0) &= u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0) + \eta_{3,6-m} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0). \end{aligned} \quad (2)$$

Запишемо розв'язок рівняння (1) для кожного із шарів у вигляді біжучих хвиль

$$\begin{aligned} u_{6-m} &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}} + A_{2n-1}^{(2)} \cos \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h) \right] e^{i(kx_{m-3} - \omega t)}, \\ &\quad (n-1)h < x_3 < (n-1)h + h_1; \\ u_{6-m} &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + h_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}} + A_{2n}^{(2)} \cos \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + h_2) \right] e^{i(kx_{m-3} - \omega t)}, \\ &\quad (n-1)h + h_1 < x_3 < nh. \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (3) і далі використовуються позначення $\bar{\rho}_q \rho_{00} = \rho_q$, $\bar{c}_{mm,q} c_{00} = c_{mm,q}$, $\alpha_{mm,q}^2 = (\rho_q \omega^2 - k^2 c_{66,q}) / c_{mm,q}$, $\bar{\alpha}_{mm,q} = h \alpha_{mm,q}$, $\bar{k} = kh$, причому величини $\bar{\rho}_q$, $\bar{c}_{mm,q}$, $\bar{\alpha}_{mm,q}$, \bar{k} як і невідомі сталі інтегрування $A_n^{(i)}$ безрозмірні.

Розв'язок (3) записаний при $\alpha_{mm,q}^2 \geq 0$. Якщо $\alpha_{mm,q}^2 = -\beta_{mm,q}^2 < 0$, то в формулах (3) і наступних треба прийняти $\alpha_{mm,q} = i\beta_{mm,q}$, $\sin i\beta_{mm,q}(\dots) = ish\beta_{mm,q}(\dots)$, $\cos i\beta_{mm,q}(\dots) = ch\beta_{mm,q}(\dots)$.

Контактні умови (2) на межах $x_3 = x_{3,2n-1} \equiv (n-1)h + h_1$ між $(2n-1)$ -им і $2n$ -им шарами і на межах $x_3 = x_{3,2n} \equiv nh$ між $2n$ -им і $(2n+1)$ -им шарами приводять до однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}_{2n+1} = \mathbf{M}_{mm}(h_2) \mathbf{A}_{2n}, \quad \mathbf{A}_{2n} = \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{A}_{2n-1}, \quad (4)$$

в яких введені вектор-стовпці $\mathbf{A}_n = \operatorname{col}[A_n^{(1)}, A_n^{(2)}]$ і матриці $\mathbf{M}_{mm}(h_q)$ з елементами

$$M_{mm}^{(11)}(h_q) = \cos \alpha_{mm,q} h_q, \quad M_{mm}^{(12)}(h_q) = -\bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q} \sin \alpha_{mm,q} h_q,$$

$$M_{mm}^{(21)}(h_q) = \frac{\sin \alpha_{mm,q} h_q}{\bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q}} + \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \alpha_{mm,q} h_q,$$

$$M_{mm}^{(22)}(h_q) = \cos \alpha_{mm,q} h_q - \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q} \sin \alpha_{mm,q} h_q,$$

причому $\bar{\eta}_{3,6-m} = \eta_{3,6-m} c_{00} / h$.

Якщо розв'язок нескінченної системи однорідних алгебраїчних рівнянь (4) представити [2, 4-6] у вигляді

$$\mathbf{A}_{2n} = \chi_{mm}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm}, \quad \mathbf{A}_{2n-1} = \chi_{mm}^n \mathbf{X}_{mm}, \quad (5)$$

то для визначення скаляру χ_{mm} і вектора \mathbf{X}_{mm} одержимо систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\left(\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) - \chi_{mm}^{-1} \mathbf{I}_2 \right) \mathbf{X}_{mm} = 0. \quad (6)$$

Тут \mathbf{I}_2 – одинична матриця другого порядку, $\mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) = \mathbf{M}_{mm}(h_2) \mathbf{M}_{mm}(h_1)$ – передаточна матриця для двох шарів товщини h_1 і h_2 .

З умови існування нетривіального розв'язку однорідної системи (6) одержимо характеристичне рівняння

$$\chi_{mm}^2 - 2b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) \chi_{mm} + 1 = 0, \quad (7)$$

оскільки безпосередніми перетвореннями знаходимо, що $\det \mathbf{M}_{mm}(h_2, h_1) = 1$, а коефіцієнт

$$b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = \cos \alpha_{mm,1} h_1 \cos \alpha_{mm,2} h_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}} + \frac{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}} - \right. \\ \left. - \bar{\eta}_{3,6-m}^2 \bar{c}_{mm,1} \bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,2} \right) \sin \alpha_{mm,1} h_1 \sin \alpha_{mm,2} h_2 - \\ - \bar{\eta}_{3,6-m} \left(\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1} \sin \alpha_{mm,1} h_1 \cos \alpha_{mm,2} h_2 + \right. \\ \left. + \bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2} \sin \alpha_{mm,2} h_2 \cos \alpha_{mm,1} h_1 \right). \quad (8)$$

Кожному з нерівних між собою характеристичних чисел $\chi_{mm,1}$, $\chi_{mm,2}$ відповідають лінійно незалежні між собою власні вектори $\mathbf{X}_{mm,1}$, $\mathbf{X}_{mm,2}$ і невідомі \mathbf{A}_n в розв'язку (5) будуть суперпозицією

$$\mathbf{A}_{2n} = Q_1 \chi_{mm,1}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm,1} + Q_2 \chi_{mm,2}^n \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{X}_{mm,2},$$

$$A_{2n-1} = Q_1 \chi_{mm,1}^n \mathbf{X}_{mm,1} + Q_2 \chi_{mm,2}^n \mathbf{X}_{mm,2}. \quad (9)$$

Невідомі сталі Q_1, Q_2 повинні бути визначені з граничних умов.

Для аналізу поширення об'ємних хвиль в характеристичному рівнянні (7) зробимо заміну $\chi_{mm} = \exp(\pm ihs_{mm})$ і запишемо його в тригонометричному вигляді

$$\cosh s_{mm} = b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}). \quad (10)$$

З представлення (9) випливає, що розв'язок (3) буде обмеженим при $n \rightarrow \pm\infty$ ($-\infty < x_3 < +\infty$), якщо дисперсійне рівняння (10) матиме дійсні корені. Це матиме місце при умові

$$-1 < b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) < +1, \quad (11)$$

яка і визначає зони пропускання хвиль поперек структури матеріалу.

Фізично обґрунтований однозначний розв'язок рівняння (10) при умові (11) визначається за правилом відбору мод [4, 5]

$$hs_{mm} = (-1)^{N_{mm}-1} \arccos b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) + 2\pi [N_{mm}/2]. \quad (12)$$

Тут $\arccos b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1})$ – головне значення оберненої тригонометричної функції, $N_{mm} = 1, 2, \dots$ – порядковий номер зони пропускання об'ємних хвиль (11), $[N_{mm}/2]$ – ціла частина числа.

На межах зон пропускання об'ємних хвиль (11) частота задовольняє одному з рівнянь

$$b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = +1, \quad b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = -1. \quad (13)$$

В першому випадку $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = +1$ мультиплікатор $\chi_{mm} = +1$, а в другому випадку $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = -1$ мультиплікатор $\chi_{mm} = -1$. Тоді з формул (5) випливає, що в першому випадку між сталими інтегрування мають місце залежності

$$A_{2n-1}^{(i)} = A_1^{(i)}, \quad A_{2n}^{(i)} = A_2^{(i)}, \quad (14)$$

тобто період розв'язку дорівнює періоду структури h , а в другому випадку між сталими інтегрування мають місце залежності

$$A_{2n-1}^{(i)} = (-1)^n A_1^{(i)}, \quad A_{2n}^{(i)} = (-1)^n A_2^{(i)}, \quad (15)$$

тобто період розв'язку дорівнює двом періодам структури $2h$.

Повніший аналіз частотних рівнянь на межах зон пропускання хвиль (13) одержимо, виходячи з наступних симетричних і антисиметричних розв'язків відносно серединних площин шарів товщиною $h_1 = 2H_1$ і $h_2 = 2H_2$

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h - H_1)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}} + \tilde{A}_{2n-1}^{(2)} \cos \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + h - H_1),$$

$$nh - h < x_3 < nh - h + h_1;$$

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_{2n}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + H_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}} + \tilde{A}_{2n}^{(2)} \cos \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + H_2),$$

$$nh - h + h_1 < x_3 < nh. \quad (16)$$

Користуючись умовами спряження (2) і залежностями (14), (15) між сталими інтегрування прийдемо до наступного.

На межах зон пропускання $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = +1$ відбуваються симетричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (SS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_1^{(2)} \cos \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h - H_1), \quad nh - h < x_3 < nh - h + h_1;$$

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_2^{(2)} \cos \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + H_2), \quad nh - h + h_1 < x_3 < nh \quad (17)$$

і антисиметричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (AA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_1^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h - H_1)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}}, \quad nh - h < x_3 < nh - h + h_1;$$

$$u_{6-m}(x_3) = \tilde{A}_2^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + H_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}}, \quad nh - h + h_1 < x_3 < nh. \quad (18)$$

З умов спряження (2) між шарами товщиною $h_1 = 2H_1$ та $h_2 = 2H_2$ одержуємо алгебраїчні рівняння

$$\tilde{A}_1^{(2)} \bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1} \sin \alpha_{mm,1} H_1 + \tilde{A}_2^{(2)} \bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2} \sin \alpha_{mm,2} H_2 = 0,$$

$$\tilde{A}_1^{(2)} \left(\cos \alpha_{mm,1} H_1 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1} \sin \alpha_{mm,1} H_1 \right) -$$

$$-\tilde{A}_2^{(2)} \left(\cos \alpha_{mm,2} H_2 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2} \sin \alpha_{mm,2} H_2 \right) = 0 \quad (19)$$

для SS-коливань (17) і алгебраїчні рівняння

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_1^{(1)} \cos \alpha_{mm,1} H_1 - \tilde{A}_2^{(1)} \cos \alpha_{mm,2} H_2 = 0 \\ & \tilde{A}_1^{(1)} \left(\frac{\sin \alpha_{mm,1} H_1}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \alpha_{mm,1} H_1 \right) + \\ & + \tilde{A}_2^{(1)} \left(\frac{\sin \alpha_{mm,2} H_2}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \alpha_{mm,2} H_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

для AA-коливань (18).

З умов існування ненульових розв'язків однорідних систем (19) і (20) випливають частотні рівняння і відношення між сталими інтегрування.

На межах зон пропускання $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = -1$ відбуваються симетричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (SA-коливання)

$$\begin{aligned} u_{6-m}(x_3) &= \tilde{A}_1^{(2)} (-1)^n \cos \alpha_{mm,1} (x_3 - nh + h - H_1), \quad nh - h < x_3 < nh - h + h_1; \\ u_{6-m}(x_3) &= \tilde{A}_2^{(1)} (-1)^n \frac{\sin \alpha_{mm,2} (x_3 - nh + H_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}}, \quad nh - h + h_1 < x_3 < nh \end{aligned} \quad (21)$$

і антисиметричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (AS-коливання)

$$\begin{aligned} u_{6-m}(x_3) &= \tilde{A}_1^{(1)} (-1)^n \frac{\sin \alpha_{mm,1} (x_3 - nh + h - H_1)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}}, \quad nh - h < x_3 < nh - h + h_1; \\ u_{6-m}(x_3) &= \tilde{A}_2^{(2)} (-1)^n \cos \alpha_{mm,2} (x_3 - nh + H_2), \quad nh - h + h_1 < x_3 < nh. \end{aligned} \quad (22)$$

З умов спряження (2) між шарами товщиною $h_1 = 2H_1$ та $h_2 = 2H_2$ одержуємо алгебраїчні рівняння

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_1^{(2)} \bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1} \sin \alpha_{mm,1} H_1 + \tilde{A}_2^{(1)} \cos \alpha_{mm,2} H_2 = 0, \\ & \tilde{A}_1^{(2)} \left(\cos \alpha_{mm,1} H_1 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1} \sin \alpha_{mm,1} H_1 \right) + \end{aligned}$$

$$+ \tilde{A}_2^{(1)} \left(\frac{\sin \alpha_{mm,2} H_2}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \alpha_{mm,2} H_2 \right) = 0 \quad (23)$$

для SA-коливань і алгебраїчні рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} \cos \alpha_{mm,1} H_1 - \tilde{A}_2^{(2)} \bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2} \sin \alpha_{mm,2} H_2 = 0 \\ \tilde{A}_1^{(1)} \left(\frac{\sin \alpha_{mm,1} H_1}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}} + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \alpha_{mm,1} H_1 \right) - \\ - \tilde{A}_2^{(2)} \left(\cos \alpha_{mm,2} H_2 - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2} \sin \alpha_{mm,2} H_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

для AS-коливань.

З умов існування ненульових розв'язків однорідних систем (23) і (24) одержимо частотні рівняння і відношення між сталими інтегрування.

Одержані результати дозволяють не тільки розщепити рівняння границь зон пропускання (13), а і показати, які форми коливань мають місце на кожній з цих границь.

Дисперсійне співвідношення (10) аналізувалося чисельно для композиту з механічними властивостями шарів $\bar{\rho}_1 = 1$, $\bar{c}_{44,1} = \bar{c}_{55,1} = \bar{c}_{66,1} = 1$, $\bar{\rho}_2 = 2$, $\bar{c}_{44,2} = \bar{c}_{55,2} = \bar{c}_{66,2} = 20$ при нормуючих параметрах $\rho_{00} = \rho_1$, $c_{00} = c_{66,1}$. Товщини шарів приймалися рівними $h_1 = 0,3h$ та $h_1 = 0,7h$. Міжфазний параметр $\bar{\eta}_{31} = \bar{\eta}_{32} = 0,0$ (міжфазні недосконалості відсутні); 0,1; 0,5; 1,0; 5,0. Типові зони пропускання показані на рис.1 при $h_1 = 0,3h$, $\bar{\eta}_{31} = \bar{\eta}_{32} = 0,5$. Написи SS, AA, SA, AS біля дисперсійних кривих вказують на типи коливань, які цим кривим відповідають.

Проведений аналіз показав, що в матеріалах з міжфазними недосконалостями на відміну від матеріалів з досконалим сполученням компонент [4] не існує напрямку, в якому проходять хвилі всіх частот. Найбільш характерною особливістю впливу міжфазного параметру на структуру зон пропускання хвиль є їх сильне звуження при збільшенні $\eta_{3,6-m}$. Виявити ці вузькі зони, особливо при високих частотах, можливо тільки по аналізу типів коливань на межах зон пропускання об'ємних хвиль. Цей аналіз виконаний по системах (19), (20), (23), (24) відповідно для SS-, AA-, SA-, AS-коливань.

При збільшенні міжфазних параметрів границі зон пропускання асимптотично наближаються до дисперсійних кривих для нормальних

хвиль зсуву в шарах товщиною h_1 і h_2 . Для композиту з прийнятими значеннями механічних параметрів це буде два сімейства гіпербол

$$\bar{\omega}^2 - \bar{k}^2 = \left(\frac{m_1 \pi}{h_1} \right)^2, \quad m_1 = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\bar{\omega}^2 - 10\bar{k}^2 = 10 \left(\frac{m_2 \pi}{h_2} \right)^2, \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

На рис. 1 вони показані буквами $H_1(0)$, $H_1(1)$, $H_2(0)$. По числу асимптотик в межах заданого частотного діапазону можна визначити число зони пропускання в цьому діапазоні.

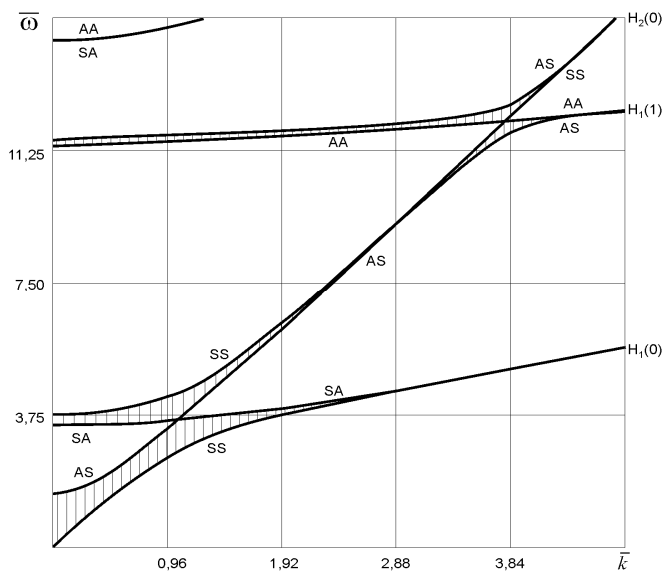


Рис. 1

При збільшенні міжфазних параметрів зменшуються частоти, при яких відбувається пропускання хвиль (друга і т.д. зони пропускання спускаються вниз по частоті).

На рис. 2 наведені результати розрахунку форм хвиль для того ж матеріалу при $\bar{k} = 0,96$ (рис.2,а) та $\bar{k} = 1,92$ (рис.2,б) на граничних частотах зон пропускання для трьох періодів структури. На рис.2,а крива 1 відповідає нижній границі першої зони пропускання

($\bar{\omega}_1 = 2,601746$, SS-коливання), крива 2 – верхній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_2 = 3,369278$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_3 = 3,556016$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_4 = 4,230742$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_5 = 11,572015$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_6 = 11,658619$, AS-коливання). На рис.2,б крива 1 відповідає нижній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_1 = 3,799316$, SS-коливання), крива 2 – верхній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_2 = 3,929859$, SA-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_3 = 6,234196$, AS-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_4 = 6,374857$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_5 = 11,706880$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_6 = 11,782537$, AS-коливання).

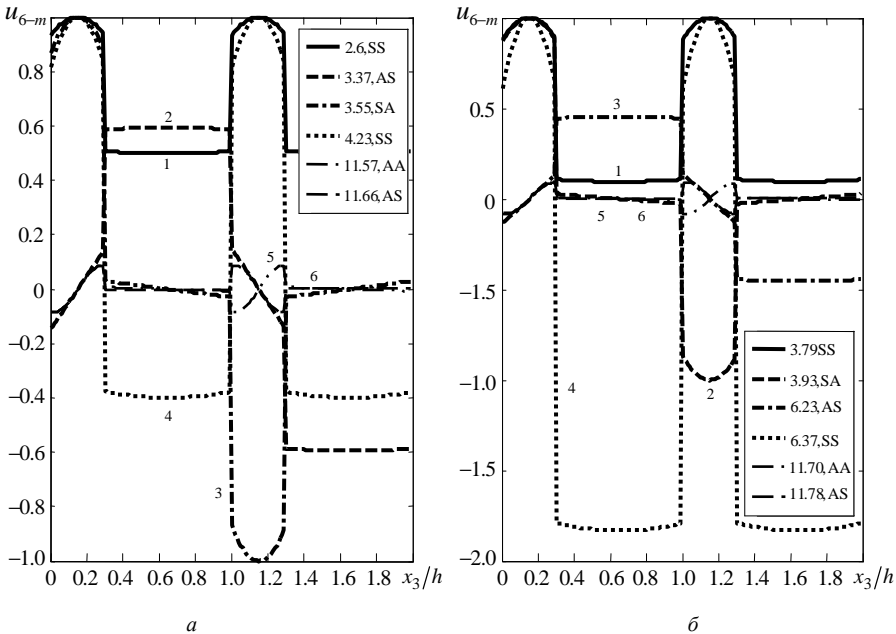


Рис. 2

Варто відзначити також, що форми коливань на верхній границі першої зони пропускання і на нижній границі другої зони пропускання міняються місцями: при $\bar{k} = 0,96$ це будуть відповідно AS- та SA-коливання, а при $\bar{k} = 1,92$ стають відповідно SA- та AS-коливаннями.

1. *Баженов В.А., Шульга Н.Д.* Скорости распространения длинных волн в слоистых композитах с тонкими прослойками // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 55. – С. 6-10.
2. *Баженов В.А., Шульга Н.Д.* Распространение объемных волн сдвига в слоистых композитах с межфазными дефектами // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1994. – Вып. 61. – С. 33-38.
3. *Композиционные материалы.* В 8-и т. Т.1. Поверхности раздела в металлических композитах. – Москва: Мир, 1978. – 438 с. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – Москва: Мир, 1978. – 294 с.
4. *Механика композитов.* В 12 т. Т.2. Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 431 с. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: ПТОО «А.С.К.», 1997. – 394 с.
5. *Шульга М.О., Шульга Н.Д.* Вплив міжфазних недосконалостей на структуру зон пропускання хвиль зсуву в шаруватих композитах // Деп. в ДНТБ України 13.02.1995 р. № 310 – Ук. 95 (Донецкий ун-т. – Донецьк, 1994). – 39 с.
6. *Шульга Н.Д.* Частоти пропускання і граничні форми об'ємних хвиль поперек структури двокомпонентних шаруватих композитів з міжфазними недосконалостями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – Вип. 79. – С. 109-117.
7. *Шульга Н.Д.* Форми коливань на границях зон пропускання одномірних хвиль в двокомпонентних шаруватих композитах з міжфазними недосконалостями // Системні технології. – 2007. – Вип. 4(51). – С. 44-49.

УДК 624.042.8

Расповов О. С. , канд. техн. наук

СКІНЧЕНО-АВТОМАТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ НЕДИСИПАТИВНИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Запропоновано універсальний аналітичний підхід, який дозволяє за допомогою скінчених автоматів моделювати вимушені просторові коливання континуальних недисипативних стержневих систем під дією періодичних зовнішніх сил

Постановка проблеми. Отримання точного рішення для просторових коливань стержневих систем з дійсним відображенням геометричних, жорсткісних та масових характеристик реальної конструкції суттєво ускладнюється та, як правило, приводиться тільки для простіших випадків [1, 2]. Тому, розробка та реалізація ефективних аналітичних алгоритмів описання та розрахунків вимушених просторових коливань стержневих систем є актуальними.

Аналіз останніх досліджень. Крім традиційних методів, які дозволяють досліджувати вільні та вимушені коливання таких систем, широко застосовуються топологічні методи [3], що встановлюють прямий взаємозв'язок структури розв'язуючих рівнянь зі структурою конструкції, яка розраховується.

До теперішнього часу існує багато публікацій, які присвячені застосуванню теорії скінчених автоматів до різних областей досліджень [4, 5]. З'явилась можливість використовувати лише логічні операції для рішення задач динаміки стержневих конструкцій. В роботі [6] викладена методика скінчено-автоматного моделювання вільних просторових коливань континуальних балок і рам.

Постановка задачі. Ціллю даної статті є застосування такого ж підходу до розрахунку вимушених коливань недисипативних стержневих систем з розподіленими параметрами під дією періодичних зовнішніх сил.

Основна частина. Представимо окремий стержень у вигляді скінченого автомату $A = (S, X, Z, f_z, f_s)$, де S, X, Z – скінчені множини станів, входів та виходів відповідно, а f_z та f_s – характеристичні функції [5]. Враховуючи, що під час вимушених коливань стержня необхідно вирішувати систему n неоднорідних лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими початковими параметрами $x_k, k = 1, 2, \dots, n$, то значення x_k можна визначати за правилом Крамера [7], яке виражається формулою

$$x_k = \frac{D_{zk}}{D_z}, \quad (1)$$

де D_z – визначник системи рівнянь $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, складений з

коефіцієнтів лівої частини, тобто $D_z = |a_{ik}|_1^n$; D_{zk} – визначник, який отримується з D_z шляхом заміни елементів $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ k -го стовпця, який відповідає визначуваному невідомому, вільними членами b_1, b_2, \dots, b_n .

Вираз для D_{zk} можна також представити у вигляді суми добутоків алгебраїчного доповнення A_{ik} елемента a_{ik} у визначнику D_z на відповідні вільні члени:

$$D_{zk} = \sum_{i=1}^n A_{ik} b_i, \quad (2)$$

де $A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$; D_{ik} – мінор $(n-1)$ -го порядку до елемента a_{ik} , який отримується з визначника D_z , якщо з нього викреслити i -у строку і k -й стовпець.

За допомогою скінчених автоматів побудова D_z зводиться до вибору елементів асоційованих матриць для окремих видів вільних коливань стержня та знаходженню функцій виходу f_z автомата A при визначених вхідних параметрах [6].

Аналогічний алгоритм, який дозволяє значно скоротити численні алгебраїчні операції, застосовується також для формування виразу D_{zk} під час періодичного зовнішнього впливу.

Якщо припустити, що початкові параметри стержня дорівнюють нулю та є зовнішні сила P_0 або момент M_0 , які збуджують коливання та змінюються за законом синуса або косинуса з частотою ω , то очевидно, що ці зовнішні сили можуть бути прийняті за початкові силові параметри $N_r = P_0$, $M_r = M_0$ ($r = x, y, z$). В системі скінчених автоматів ця дія означає присвоєння збуреним параметрам N_r , M_r довільного значення (1), а невідомим граничним параметрам, що визначаються – фіксованого значення (0). Таким чином, змінюючи відповідні коди вхідних параметрів автомату A , можна формальним шляхом за допомогою асоційованих матриць будувати вирази D_{zk} у формі (2). По суті, виконанню операцій над функціями f_z будуть відповідати операції над двоїчними величинами, тобто булевими функціями.

Обмеження на вході для автомату A , який описує вимушені просторові коливання, будуть дещо іншими в порівнянні з обмеженнями, які прийняті для того же автомату, який моделює вільні коливання стержня. Основна відмінність

полягає в тому, що можливі комбінації граничних умов на кожному з кінців стержня можуть містити різну кількість фіксованих та довільних параметрів, хоча загальна їх кількість для всього автомату A буде залишатися однаковою. В цьому випадку, вхідні послідовності всіх значень булевих функцій початкових (НП) та кінцевих (КП) граничних параметрів можуть бути також реалізовані на множинах $\{0,0,0,1\}$ та $\{1,1,1,0\}$ для згинальних коливань стержня у площинах xy та xz , і $\{0,1\}$ – для поздовжніх та крутильних коливань.

Виходячи з цього, всі вихідні послідовності також будуть складатися з визначників мінорів більш високого порядку k , які породжуються матрицею впливу початкових параметрів M_B порядку n [6].

Визначимо елементи матриці можливих станів виходу автомату A для просторових коливань стержня шляхом розкриття частотних визначників з мінорів 8-го порядку та представимо їх вирази f_z у складі асоційованої блочної матриці R_{xyz} . Під час формування структури цієї матриці зручно використовувати каскадний алгоритм її розподілу на блоки та відповідну ідею каскадного кодування станів [4].

$$R_{xyz} = \left\| \begin{array}{c|c} R_{11} & R_{12} \\ \hline R_{21} & R_{22} \end{array} \right\|. \quad (3)$$

Виразимо підматриці R_{ij} ($i, j = 1, 2$) у вигляді добутку елементів a_{ij} асоційованої матриці M_{xu} для поздовжніх коливань та блочної матриці R_{nk} ($n, k = 1, 2$)

$$R_{ij} = \left\| a_{ij} R_{nk} \right\|_1^2. \quad (4)$$

В свою чергу, R_{nk} також можна представити добутком елементів b_{nk} асоційованої матриці $M_{x\phi}$ для крутильних коливань та блочної матриці R_{mp}

$$R_{nk} = \left\| b_{nk} R_{mp} \right\|_1^2. \quad (5)$$

Елементи a_{ij} та b_{nk} матриць M_{xu} та $M_{x\phi}$ розташуємо у відповідності до вхідних параметрів $\{u_x, N_x\}$ та $\{\phi_x, M_x\}$ кодів НП та КП стержня і представимо в табл. 1.

Тут, з урахуванням прийнятих позначень [6], $r = x$, $\varepsilon = \alpha$ для M_{xu} та $r = k$, $\varepsilon = \beta$ для $M_{x\phi}$.

Для R_{mp} можна записати:

$$R_{mp} = \|c_{mp} M'_{xz}\|_1^4, \quad (6)$$

де c_{mp} ($m, p = 1, \dots, 4$) – елементи асоційованої матриці M'_{xy} для згинальних коливань стержня у площині xy ; M'_{xz} – аналогічна матриця для коливань у площині xz з елементами d_{gh} ($g, h = 1, \dots, 4$).

Таблиця 1

КП \ НП	01	10
10	$\cos \lambda_r$	$-\varepsilon \lambda_r \sin \lambda_r$
01	$\frac{1}{\varepsilon \lambda_r} \sin \lambda_r$	$\cos \lambda_r$

Матриці M'_{xy} та M'_{xz} з вхідними параметрами

$\{u_y, \phi_z, M_z, N_y\}$ та

$\{u_z, \phi_y, M_y, N_z\}$ у вигляді кодів НП

та КП та відповідні їм елементи c_{mp}

та d_{gh} з функціями Крилова представлені в табл. 2.

Таблиця 2

КП \ НП	0111 0001	1011 0010	1101 0100	1110 1000
1000 1110	S_e	$\frac{\lambda_r}{l} V_e$	$\frac{EJ_s \lambda_r^2}{l^2} U_e$	$\frac{EJ_s \lambda_r^3}{l^3} T_e$
0100 1101	$\frac{l}{\lambda_r} T_e$	S_e	$\frac{EJ_s \lambda_r}{l} V_e$	$\frac{EJ_s \lambda_r^2}{l^2} U_e$
0010 1011	$\frac{l^2}{EJ_s \lambda_r^2} U_e$	$\frac{l}{EJ_s \lambda_r} T_e$	S_e	$\frac{\lambda_r}{l} V_e$
0001 0111	$\frac{l^3}{EJ_s \lambda_r^3} V_e$	$\frac{l^2}{EJ_s \lambda_r^2} U_e$	$\frac{l}{\lambda_r} T_e$	S_e

В табл. 2 $e = 1, r = y, s = z$ для асоційованої матриці M'_{xy} та $e = 2, r = z, s = y$ – для M'_{xz} .

Аналіз станів автомату A показує, що деякі з них будуть еквівалентними (сумісними), тобто при різних вхідних послідовностях на множинах $\{0,1,1,1\}$ та $\{1,0,0,0\}$ виводяться однакові вихідні послідовності. Згідно [5], для автоматів, які

мають еквівалентні стани, можуть бути отримані мінімальні (скорочені) форми \tilde{A} шляхом об'єднання однаково позначених станів до одного стану. Така процедура дозволяє спростити розрахунок та суттєво знизити порядок матриці R_{xyz} . Так, у загальному випадку просторових коливань, порядок R_{xyz} зменшується в чотири рази від 256 до 64 та, відповідно, кількість станів – в 16 разів. Тому матрицю R_{xyz} можна також представити у вигляді кодової асоційованої матриці 64-го порядку з множиною станів $S_k = 4056$ та повним набором функцій виходу f_z .

Множини всіх можливих станів вібруючого стержня S_k та S_0 , які характеризуються елементами D_{zk} та D_z , будуть залежати від кількості сполучень кодів граничних параметрів для кожного з видів просторових коливань. Так, величина S_k включає 16×16 станів для згинальних коливань в площинах xu і xz та 4×4 – для поздовжніх та крутильних коливань, тобто всього 4096 станів, тоді як кількість станів S_0 буде дорівнювати 20736 [6]. Внаслідок цього таблиці переходів та вирази для D_{zk} отримуються, як правило, більш простими, ніж для D_z . В цілому, загальна кількість станів S автомату A визначається добутком S_k та S_0 .

Висновки та перспективи подальших досліджень. З проведеного аналізу виходить, що застосування скінчених автоматів суттєво спрощує та систематизує динамічні розрахунки. Очевидно, що представляє інтерес дослідження можливих станів стержня як частини складної системи, а також вивчення особливостей моделювання вимушених коливань нерозрізних конструкцій в системі скінчених автоматів.

1. Вибрации в технике: Справочник: в 6 т. Т. I: Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. –М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. –М.: Наука, 1968. 560 с.
3. Филли А. П. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. - Л.: Стройиздат, 1983. – 232 с.
4. Булева алгебра и конечные автоматы / Под ред. Ж. Кундмана и П. Наслена. Перевод с французского. –М.: Мир, 1969. 296 с.
5. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов: Пер. с нем. –М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
6. Распопов А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций. Вестник Днепро. нац. ун-та жел. дор. тр-та. Выпуск 19. –Дн-вск, 2007. с. 86–94.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, 4-е изд. –М.: Наука, 1988. 552 с.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., канд. техн. наук,
 Геращенко О.В., канд. техн. наук

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ МАСИВІВ З ТРІЩИНАМИ

Пропонується методика дослідження коливань пружних масивних елементів конструкцій, послаблених тріщинами. Отримане граничне інтегральне представлення для напружень, до складу якого входять сингулярний і гіперсингулярний інтегралі. За допомогою інтегрування частинами проведена регуляризація другого з інтегралів, після чого вказане представлення може використовуватись в якості граничного сингулярного інтегрального рівняння. Розв'язана тестова задача про статичне навантаження масиву з круговою тріщиною.

Розглядається задача про усталені гармонічні коливання пружного масиву, послабленого плоскою тріщиною. Комплексні амплітуди переміщень задовольняють систему еліптичних рівнянь

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2 u_{k,jj} + \omega^2 u_k = -\Phi_k, \quad j,k=1,2,3, \quad (1)$$

де $u_{j,jk}(\bar{x}, t) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k}$; $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ - точка всередині масиву; C_1 та

C_2 - швидкості розповсюдження хвиль розширення та викривлення

відповідно; $C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$; $C_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$; ρ - густина

пружного середовища. Тут і в подальшому, якщо не стверджується протилежне, вважається, що за індексом, який повторюється у виразі, здійснюється сумування.

Для описання деформованого стану тіла використовується тензор деформацій $\varepsilon_{jk}(\bar{x})$, пов'язаний із переміщеннями за допомогою співвідношень

$$\varepsilon_{jk}(\bar{x}) = 0.5 \left[\frac{\partial u_j(\bar{x})}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\bar{x})}{\partial x_j} \right], \quad j,k=1,2,3. \quad (2)$$

Напруження в тілі виражаються через деформації формулою

$$\sigma_{jk}(\bar{x}) = \lambda \delta_{jk} \varepsilon_{mm}(\bar{x}) + 2\mu \varepsilon_{jk}(\bar{x}), \quad j,k,m=1,2,3. \quad (3)$$

Модуль пружності E та коефіцієнт Пуасона ν пов'язані з коефіцієнтами Ляме наступним чином:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\lambda + \mu}; \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (4)$$

В точках поверхні Γ тіла компоненти вектора напружень $\tau_k(x)$ пов'язані з компонентами тензора напружень за допомогою співвідношень

$$\tau_j(\bar{x}) = \sigma_{jk}(\bar{x})n_k, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де n_k - компонента вектора зовнішньої нормалі в точці $x \in \Gamma$.

Отже, задача про усталені коливання масивів полягає в відшукуванні вектора $u_j(\bar{x})$, що задовольняє в області Ω систему (1), а також граничні умови:

$$u_j(\bar{y}) = g_j(\bar{y}), \bar{y} \in \Gamma_u; \tau_j(\bar{y}) = h_j(\bar{y}), \bar{y} \in \Gamma_\tau \quad (6)$$

де Γ_u - частина поверхні, на якій задан вектор переміщень; Γ_τ - частина поверхні, на якій задан вектор напружень.

Будемо розв'язувати крайову задачу (1-6) за допомогою методу потенціалу. В довільній точці \bar{x} всередині розрахункової області переміщення мають бути підпорядковані тотожності Соміліани

$$u_k(\bar{x}) = \int_{\Gamma} \tau_j(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_j(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (7)$$

де функція $U_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$ є фундаментальним розв'язком В.Д.Купрадзе рівняння (1). Згідно [1] цей розв'язок має наступний вигляд:

$$U_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} (\delta_{ij} U_0 - r_{,i} r_{,j} U_2), \quad (8)$$

$$\text{де } U_0(r) = \exp(z_2) r^{-1} [1 - z_2^{-1} + z_2^{-2}] + \beta \exp(z_1) r^{-1} [z_1^{-1} - z_1^{-2}];$$

$$U_2(r) = \exp(z_2) r^{-1} [1 - 3z_2^{-1} + 3z_2^{-2}] + \beta \exp(z_1) r^{-1} [1 - 3z_1^{-1} + 3z_1^{-2}];$$

$$z_k = \frac{i\omega r}{C_k}, \quad k = 1, 2; \quad \beta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}; \quad r = \sqrt{(x_k - y_k)(x_k - y_k)}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j - y_j}{r}.$$

Зазначимо, що при нульовому значенні частоти коливань компонента U_0 перетворюється на $\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)r}$, а U_2 - на $\frac{-1}{4(1-\nu)r}$, в результаті чого фундаментальний розв'язок В.Д.Купрадзе перетворюється на розв'язок Кельвіна статичної задачі:

$$U_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}]. \quad (9)$$

В свою чергу, функція $T_{ij}(\bar{x}, \bar{y})$ є узагальненою похідною фундаментального розв'язку В.Д.Купрадзе:

$$\begin{aligned} T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) &= n_p C_{pkml} U_{jm,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[n_k r_{,j} T_1 + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_j r_{,k}) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right], \quad (10) \end{aligned}$$

де n_p - компонента вектора зовнішньої нормалі в точці $y \in \Gamma$, тензор квазіпружних констант $C_{pkml} = \lambda \delta_{pk} \delta_{ml} + \mu (\delta_{pl} \delta_{mk} + \delta_{pm} \delta_{kl})$;

$$\begin{aligned} T_1 &= -2 \exp(z_2) r^{-2} [1 - 3z_2^{-1} + 3z_2^{-2}] + \exp(z_1) r^{-2} [z_1 - 1 - 2\beta(1 - 3z_1^{-1} + 3z_1^{-2})]; \\ T_2 &= \exp(z_2) r^{-2} [z_2 - 3 + 6z_2^{-1} - 6z_2^{-2}] - 2\beta \exp(z_1) r^{-2} [1 - 3z_1^{-1} + 3z_1^{-2}]; \quad (11) \\ T_3 &= -2 \exp(z_2) r^{-2} [z_2 - 6 + 15z_2^{-1} - 15z_2^{-2}] + \\ &\quad + 2\beta \exp(z_1) r^{-2} [z_1 - 6 + 15z_1^{-1} - 15z_1^{-2}]. \end{aligned}$$

При нульовому значенні частоти коливань компонента T_1 перетворюється на $\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2}$, T_2 - на $-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2}$, а T_3 - на $\frac{-3}{2(1-\nu)r^2}$, в результаті чого узагальнена похідна розв'язку В.Д.Купрадзе набуває вигляду:

$$T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{kj} + 3r_{,k}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(n_k r_{,j} - n_j r_{,k}) \right\}. \quad (12)$$

Напруження усередині розрахункової області також підпорядковані інтегральній тотожності:

$$\sigma_{jk}(\vec{x}) = \int_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y, \quad (13)$$

де

$$D_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) = -C_{jkm} U_{ml,t}(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi} [\delta_{jk} r_{,l} T_1 + (\delta_{jl} r_{,j} + \delta_{kl} r_{,j}) T_2 + r_{,k} r_{,j} r_{,l} T_3], \quad (14)$$

$$S_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) = -C_{jkm} T_{ml,t}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ (2S_1 (\delta_{jk} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} r_{,j} n_l) + S_2 \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j}) + r_{,l} (n_j r_{,k} + n_k r_{,j}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{2T_2}{r} (n_j \delta_{lk} + n_k \delta_{jl}) + 2S_3 r_{,j} r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} + S_4 \delta_{jk} n_l \right\}, \quad (15)$$

$$S_1 = -\exp(z_2) r^{-3} \left[-2z_2 + 12 - 30z_2^{-1} + 30z_2^{-2} \right] - \exp(z_1) r^{-3} \left[z_1^2 - 3z_1 + 3 \right] + \\ + \beta \exp(z_1) r^{-3} \left[2z_1^2 - 8z_1 + 18 - 30z_1^{-1} + 30z_1^{-2} \right],$$

$$S_2 = \exp(z_2) r^{-3} \left[z_2^2 - 7z_2 + 27 - 60z_2^{-1} + 60z_2^{-2} \right] - \\ - \beta \exp(z_1) r^{-3} \left[-4z_1 + 24 - 60z_1^{-1} + 60z_1^{-2} \right],$$

$$S_3 = \exp(z_2) r^{-3} \left[2z_2^2 - 20z_2 + 90 - 210z_2^{-1} + 210z_2^{-2} \right] - \\ - \beta \exp(z_1) r^{-3} \left[2z_1^2 - 20z_1 + 90 - 210z_1^{-1} + 210z_1^{-2} \right],$$

$$S_4 = \exp(z_2) r^{-3} \left[4 - 12z_2^{-1} + 12z_2^{-2} \right] + \exp(z_1) r^{-3} \left[4z_1^2 + z_2^2 - 4z_1 + 4 \right] - \\ - \beta \exp(z_1) r^{-3} \left[4z_1^2 - 8z_1 + 12 - 12z_1^{-1} + 12z_1^{-2} \right].$$

При нульовому значенні частоти коливань ядра D_{jkl} , S_{jkl} перетворюються на відповідні ядра статичної задачі:

$$D_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j} - \delta_{jk} r_{,l}) + 3r_{,k} r_{,j} r_{,l} \right\}. \quad (16)$$

$$S_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\mu(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3 \frac{\partial}{\partial n} r \left[\delta_{jk} r_{,l} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{5\nu}{1-2\nu} r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right] + 3 \left[\frac{\nu}{1-2\nu} r_{,l} (n_j r_{,k} + n_k r_{,j}) + r_{,j} r_{,k} n_l \right] + \right. \\ \left. + n_j \delta_{lk} + n_k \delta_{jl} - n_l \delta_{jk} \frac{1-4\nu}{1-2\nu} \right\}. \quad (17)$$

Подання (7), (13) дозволяють знайти параметри напружено-деформованого стану (НДС), якщо відомі значення переміщень та навантажень на границі масиву. Нажаль, з умов задачі відома лише їх частина. Для знаходження невідомих значень зазвичай в рівності (7) здійснюють перехід до граничної точки $x_0 \in \Gamma$. Якщо в околі точки \bar{x}_0 границя є гладкою, а переміщення $u_j(\bar{y})$ можна представити у вигляді

$$u_j(\bar{y}) = u_j(\bar{x}_0) + O(r^\alpha), \quad (18)$$

де α деяке додатне число, менше за одиницю, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - 0.5 u_j(\bar{x}_0). \quad (19)$$

Через \oint позначений інтеграл, що розуміється за Коші. Крім того, якщо в околі точки \bar{x}_0 граничні напруження $\tau_j(\bar{y})$ мають обмежені значення, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (20)$$

За допомогою (19) і (20) отримуємо з (7) граничний аналог тотожності Соміліані:

$$0.5 u_k(\bar{x}_0) = \oint_{\Gamma} \tau_j(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} u_j(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (21)$$

який можна розглядати як сингулярне інтегральне рівняння відносно незаданих граничними умовами переміщень та напружень. Після розв'язку системи граничних інтегральних рівнянь (ГІР) за допомогою

формул Соміліани (7), (13) можуть бути знайдені компоненти НДС в заданих точках всередині та на границі об'єкта розрахунку.

Слід зазначити, що система сингулярних ГІР (21) в задачах про деформування тіл, послаблених тріщинами, має обмежене використання, оскільки в даному випадку система може стати виродженою. Красномовний приклад такої виродженості наведений в роботі [2], де показано, як задача про симетрично навантажену тріщину в нескінченному просторі зводиться до граничного інтегрального рівняння

$$0.5u_k(\bar{x}_0) = - \int_{\Gamma} \Delta u_j(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y,$$

яке внаслідок відсутності в його складі доданка, що містить навантаження, не може бути ідентифіковане з якимось певним напруженим станом. З іншого боку, інтеграл з ядром S_{jkl} в представленні для напружень (13) є гіперсингулярним, оскільки містить в знаменнику величину r^3 , тоді як елемент гладкої поверхні поблизу т. \bar{x}_0 може бути поданий в місцевій циліндричній системі координат у вигляді $d\Gamma = r dr d\theta$. Такі інтеграли в розумінні Коші не існують.

В математичних побудовах і обчисленнях використовують скінченну частину таких інтегралів за Адамаром [3]. В задачах механіки як прикладної науки має бути встановлений фізичний зміст перетворень, які приводять до інтегральних рівнянь, що містять інтеграли в розумінні Адамара, а також створений підхід до їх обчислення. Існує декілька варіантів виділення скінченної частини гіперсингулярних інтегралів [4-6]. Найбільш загальний підхід реалізований в роботі [6] для розв'язання гармонічної задачі та задачі статички. В даній статті запропонований в [6] алгоритм застосовується для дослідження коливань масивних тіл з тріщинами. Для отримання обґрунтованого результату згідно [6] необхідно виконати два кроки. Перший крок полягає у створенні допоміжної розрахункової підобласті Ω_0 , яку отримуємо із заданої за допомогою виключення з останньої малого околу полюсу \bar{x}_0 (рис.1).

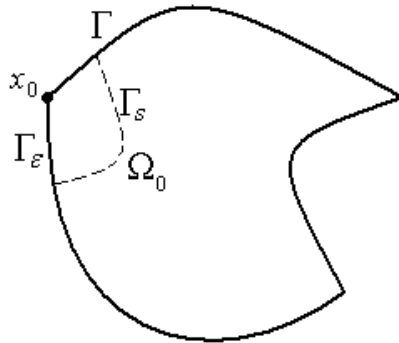


Рис.1. Утворення допоміжної області Ω_0

По відношенню до області Ω_0

точка \bar{x}_0 є зовнішньою, тому формули Соміліани для напружень набуває вигляду

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0. \quad (22)$$

Зауважимо, що якою б малою не була підобласть Ω/Ω_0 , полюс \bar{x}_0 лежить поза межами Ω_0 і тому тотожність (22) лишається справедливою. Тому другий крок полягає у граничному переході в рівності (22) при одночасному зменшенні розмірів Γ_ε і Γ_s . Для того, щоб результат граничного переходу був визначеним, необхідно, щоб визначеною була форма підобласті Ω/Ω_0 . Найбільш зручно для подальших перетворень прийняти, що ця підобласть є частиною кулі малого радіусу ε . Тоді можемо записати

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (23)$$

Для існування границі необхідно зробити припущення, щодо поведінки шуканих функцій в околі точки \bar{x}_0 . Частина поверхні Γ_ε вважається настільки гладкою, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ частину поверхні Γ_s можна вважати границею півсфери.

Припустимо, що переміщення $u_j(\bar{y})$ поблизу точки \bar{x}_0 можна представити у вигляді

$$u_j(\bar{y}) = u_j(\bar{x}_0) + \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} (y_m - x_{0m}) + O(r^{1+\alpha}). \quad (24)$$

В свою чергу

$$\frac{\partial u_j(\bar{y})}{\partial y_m} = \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} + O(r^\alpha).$$

Оскільки напруження є лінійними функціями деформацій, то для них справедливо

$$\sigma_{ij}(\bar{y}) = \sigma_{ij}(\bar{x}_0) + O(r^\alpha). \quad (25)$$

Розглянемо границю першого з інтегралів, що входять до (23):

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\
&+ \left. \int_{\Gamma_s} [\sigma_{lm}(\bar{x}_0) n_m(\bar{y}) + O(r^\alpha)] D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\
&= \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_k(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \sigma_{lm}(\bar{x}_0) d_{jklm}(\bar{x}_0).
\end{aligned} \quad (26)$$

Елемент сферичної поверхні Γ_s може бути поданий в місцевій системі координат у вигляді $d\Gamma = \varepsilon^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta$. Крім того на поверхні сферичної порожнини з центром в точці \bar{x}_0 справедливо

$$r_{,j}(0, \bar{y}) = -n_j(\bar{y}); \quad \frac{\partial r}{\partial n} = -1.$$

З урахуванням наведених залежностей пряме інтегрування по границі півкулі дає як для задач статики, так і для задач про усталені коливання масивів один і той самий результат:

$$\begin{aligned}
d_{jklm}(\bar{x}_0) &= \int_{\Gamma_s} n_m(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\
&= \frac{1}{30(1-\nu)} [(1-5\nu)\delta_{jk}\delta_{lm} - (4-5\nu)(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{kl}\delta_{jm})];
\end{aligned} \quad (27)$$

$$\sigma_{lm}(x_0) d_{jklm}(\bar{x}_0) = \frac{1}{30(1-\nu)} [(1-5\nu)\delta_{jk}\sigma_{mm} - 2(4-5\nu)\sigma_{jk}]. \quad (28)$$

Звернемось тепер до визначення границі. другого з інтегралів, що входять до складу (23). Враховуючи (24), запишемо

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\
&+ \left. u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}.
\end{aligned} \quad (29)$$

Розглянемо третій доданок з правої частини рівності (29). Знову і для задачі про усталені коливання, і для задачі статики, коли $\omega = 0$, безпосереднє інтегрування по Γ_s дає один і той самий результат:

$$\int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = s_{jklm}(\bar{x}_0), \quad (30)$$

де

$$s_{jklm}(\bar{x}_0) = \frac{\mu}{30(1-\nu)} \left[2(5\nu + 1) \delta_{jk} \delta_{lm} + (7 - 5\nu)(\delta_{kl} \delta_{jm} + \delta_{jl} \delta_{km}) \right]. \quad (31)$$

Беручи до уваги той факт, що

$$\sigma_{lk}(\bar{x}_0) = \mu \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{lk} \frac{\partial u_m(\bar{x}_0)}{\partial x_m} + \left(\frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\bar{x}_0)}{\partial x_l} \right) \right],$$

і крім того

$$\sigma_{mm}(\bar{x}_0) = 2\mu \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial u_m(\bar{x}_0)}{\partial x_m},$$

можна записати

$$\frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_m} s_{jklm}(\bar{x}_0) = \frac{\mu}{30(1-\nu)} \left[(1-5\nu) \delta_{jk} \sigma_{mm} + (7-5\nu) \sigma_{kj} \right]. \quad (32)$$

За допомогою (28) і (32) неважко отримати наступну важливу рівність:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \tau_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ = \sigma_{lm}(\bar{x}_0) d_{jklm}(\bar{x}_0) - \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_m} s_{jklm}(\bar{x}_0) = -0.5 \sigma_{jk}(\bar{x}_0). \end{aligned} \quad (33)$$

Для визначення другого інтегралу в правій частині виразу (29) скористаємось тим, що $C_{skrq} U_{mr,qs} + \rho \omega^2 U_{mk} = 0$, і крім того

$(n_s \Phi_{,l} - n_l \Phi_{,s}) = e_{tsl} \frac{\partial \Phi}{\partial s_t}$, де e_{ijk} – символ Леві-Чивіта, \bar{s}_t – деякий

одиничний вектор, перпендикулярний до нормалі \bar{n} в точці у поверхні Γ

[7]. По суті $\frac{\partial \Phi}{\partial s_t}$ – це похідна за напрямом дотичної до поверхні в точці у.

З урахуванням вказаних співвідношень, а також рівностей (10), (15) подамо ядро S_{jkl} наступним чином:

$$\begin{aligned}
 S_{ijk}(\bar{x}, \bar{y}) &= -C_{ijml} T_{mk,l}(\bar{x}, \bar{y}) = -C_{ijml} n_s C_{skrq} U_{mr,ql} = \\
 &= -C_{ijml} \left[C_{skrq} (n_s U_{mr,ql} - n_l U_{mr,qs}) - \rho \omega^2 n_l U_{mk} \right] = \\
 &= -C_{ijml} e_{tsl} \frac{\partial}{\partial s_t} (D_{skm}) + \rho \omega^2 F_{ijk},
 \end{aligned} \quad (34)$$

де

$$F_{ijk}(\bar{x}, \bar{y}) = C_{ijml} n_l U_{mk}(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \delta_{ij} n_l U_{lk} + \mu (n_j U_{ik} + n_i U_{jk}).$$

За теоремою Стокса [7]

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial s_t} d\Gamma = \int_{\Gamma} \Phi dx_t,$$

завдяки чому маємо

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_s} S_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \int_{\Gamma_s} \left\{ C_{ijml} e_{tsl} \frac{\partial}{\partial s_t} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] + \rho \omega^2 F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) \right\} d\Gamma_y = \\
 &= \int_{L_s} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t + \rho \omega^2 \int_{\Gamma_s} F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y,
 \end{aligned} \quad (35)$$

де L_s – контур півсфери Γ_s , тобто коло радіуса ε з центром в полюсі x_0 .

Оскільки функція $F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y})$, має поблизу \bar{x}_0 таку саму особливість, як і $U_{ij}(\bar{x}_0, \bar{y})$, то інтеграл за Γ_s в правій частині (35) при зменшенні ε зникає. Для обчислення інтеграл за колом L помітимо, що

$$\int_{L_s} r_{,m} dx_t = \int_{L_s} (y_m - x_{0m}) r dx_t = \varepsilon \int_0^{-2\pi} (y_m - x_{0m}) d\theta = \varepsilon \pi e_{tmq} n_q;$$

$$\int_{L_s} r_{,s} r_{,k} r_{,m} dx_t = \frac{\varepsilon \pi}{4} \left[(\delta_{sk} - n_s n_k) e_{tmq} n_q + (\delta_{sm} - n_s n_m) e_{tkq} n_q + (\delta_{mk} - n_m n_k) e_{tsq} n_q \right].$$

Тоді

$$\delta_{sk} e_{tsl} \int_{L_s} r_{,m} dx_t = \varepsilon \pi (\delta_{km} n_l - \delta_{lm} n_k); \quad \delta_{sm} e_{tsl} \int_{L_s} r_{,k} dx_t = \varepsilon \pi (\delta_{km} n_l - \delta_{lk} n_m);$$

$$\delta_{mk} e_{tsl} \int_L r_{,s} dx_t = \varepsilon \pi \delta_{km} n_l; \quad e_{tsl} \int_L r_{,s} r_{,k} r_{,m} dx_t = \varepsilon \pi (\delta_{km} - n_k n_m).$$

В результаті маємо

$$\int_{L_s} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t = -\frac{\epsilon}{4} \{ \delta_{km} n_l [3T_2(\epsilon) + T_1(\epsilon) + T_3(\epsilon)] - \\ - \delta_{lm} n_k T_1(\epsilon) - \delta_{lk} n_m T_2(\epsilon) - n_l n_k n_m T_3(\epsilon) \},$$

після чого отримуємо вираз

$$\int_{\Gamma_s} S_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_{L_s} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t = \\ = -\frac{\mu\epsilon}{4} \{ 2n_k \delta_{ij} [(\gamma - 2)T_2(\epsilon) - (\gamma - 1)T_1(\epsilon)] + \\ + (n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{kj}) [2T_2(\epsilon) + T(\epsilon)_1 + T_3(\epsilon)] - 2n_i n_j n_k T_3(\epsilon) \} + O(\epsilon), \quad (36)$$

де $\gamma = \beta^{-1}$.

Оскільки згідно з (11) величини $T_1(\epsilon)$, $T_2(\epsilon)$ і $T_3(\epsilon)$ містять множник ϵ^{-2} , то границя $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$ не існує. З іншого боку, вираз (23) є

цілком визначеним, тому природно припустити, що перший інтеграл в (29) після інтегрування дасть серед іншого величину, обернену по відношенню до (36).

Дійсно, згідно із (34) можемо записати

$$\int_{\Gamma - \Gamma_e} u_k(y) S_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) \Gamma_y = \\ = \int_{\Gamma - \Gamma_e} u_k(y) \left\{ C_{ijml} e_{tsl} \frac{\partial}{\partial s_t} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] + \rho \omega^2 F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) \right\} d\Gamma_y = \\ = \int_{L_s} u_k(y) C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t - \\ - \int_{\Gamma - \Gamma_e} \frac{\partial u_k(y)}{\partial s_t} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y + \rho \omega^2 \int_{\Gamma - \Gamma_e} u_k(y) F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (37)$$

Оскільки на контурі L_s переміщення можуть бути представлені у вигляді (24), то з точністю до малих більш високого порядку

$$\int_{L_s} u_k(y) C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t = u_k(x_0) \int_{L_s} C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t + \\ + \frac{\partial u_k(x_0)}{\partial s_p} \int_{L_s} (y_p - x_{0p}) C_{ijml} e_{tsl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t. \quad (38)$$

В силу того, що

$$\int_{L_s} r_{,l} r_{,k} dx_t = 0; \quad \int_{L_s} r_{,l} r_{,k} r_{,i} r_{,j} dx_t = 0,$$

другий інтеграл в правій частині (38) дорівнює нулю. Перший інтеграл з точністю до множника $u_k(x_0)$ збігається з (36). Якщо звернути увагу на те, що контур L_s тепер обходиться в напрямку, протилежному по відношенню до напрямку обходу в (36), то стає зрозумілим, що ці величини мають різні знаки і в сумі дають нуль. Отже

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + u_l(x_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u_k(\bar{y})}{\partial s_t} C_{ijml} e_{isl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y, \quad (39)$$

де інтеграл в правій частині існує за Коші.

Це доводить існування границі в лівій частині (39), яку тепер можна трактувати як скінченну за Адамаром частину інтегралу $\int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$.

В решті решт, беручи до уваги (33) можемо записати граничне інтегральне рівняння для напружень

$$0.5\sigma(\bar{x}_0) = \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (40)$$

де перший інтеграл в правій частині слід розуміти за Коші, а другий – за Адамаром.

Окрім доведення справедливості співвідношення (40) сказане вище має ще й практичне значення, оскільки містить вказівку щодо обчислення скінченної частини інтегралу $\int_{\Delta\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$ в межах фрагменту

поверхні $\Delta\Gamma$, на якому розташований полюс x_0 (іншими словами, в межах сингулярного граничного елемента). Згідно (35) такий інтеграл можна подати наступним чином:

$$\int_{\Delta\Gamma} u_k(\bar{y}) S_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_{L_\Delta} u_k(\bar{y}) C_{ijml} e_{isl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] dx_t -$$

$$- \int_{\Delta\Gamma} \frac{\partial u_k(\bar{y})}{\partial s_l} C_{ijml} e_{isl} [D_{skm}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y + \rho\omega^2 \int_{\Delta\Gamma} u_k(\bar{y}) F_{ijk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (41)$$

де L_{Δ} – контур фрагмента $\Delta\Gamma$.

Зазначимо, що перший з інтегралів в (40) є регулярним, третій має слабку сингулярність, яка зникає при параметризації області інтегрування, а другий – сильну сингулярність, яка однак, не є нездоланною перешкодою [8].

Розглянемо тепер для ілюстрації приклад розв'язання задачі про кругову тріщину в статично навантаженому нескінченному просторі. Верхній берег тріщини позначимо Γ^+ , а нижній Γ^- (рис. 2).

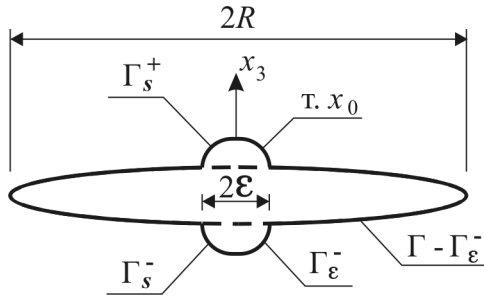


Рис.2. Геометрія кругової тріщини

Завдяки тому, що границя Γ_{ε} тепер є повною сферою, рівняння (40) набуває вигляду:

$$\sigma_{jk}(\bar{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}^+ - \Gamma_{\varepsilon}^-} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}^+ - \Gamma_{\varepsilon}^-} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s^+ + \Gamma_s^-} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \quad (42)$$

Якщо до обох берегів тріщини прикладене в протилежні боки однакове рівномірне розподілене нормальне навантаження q , то маємо так зване ГР в стрічках :

$$\sigma_{jk}(\bar{x}_0) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon^+} \Delta u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \Delta u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}, \quad (43)$$

яке в силу симетрії в місцевій системі координат може бути записане у вигляді:

$$\sigma_{33}(\bar{x}_0) = -2\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon^+} u_3(\bar{y}) S_{333}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + u_3(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{333}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \quad (44)$$

Оскільки розв'язується задача статика, то прирівнюючи значення частоти нулю, за допомогою (39) отримуємо

$$\sigma_{33}(\bar{x}_0) = 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial s_t} C_{33ml} e_{tsl} [D_{s3m}(\bar{x}_0, \bar{y})] d\Gamma_y. \quad (45)$$

В місцевій системі координат індекс може приймати значення 1 чи 2, тому

$$\sigma_{33}(\bar{x}_0) = 4(\lambda + \mu) \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_1} D_{133}(\bar{x}_0, \bar{y}) + \frac{\partial u_3(\bar{y})}{\partial x_2} D_{233}(\bar{x}_0, \bar{y}) \right] d\Gamma_y. \quad (46)$$

Застосовуючи циліндричні координати (рис. 3), в яких $x_1 = \rho \cos \theta$, $x_2 = \rho \sin \theta$, а також беручи до уваги осьову симетрію задачі, в силу чого

$$\frac{\partial u_3(y)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} \cos \theta, \quad \frac{\partial u_3(y)}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} \sin \theta,$$

за допомогою (16) в довільній точці $x_0(b,0)$ отримуємо

$$-q = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} \left[\frac{\rho - b \cos \theta}{r^3} \right] d\Gamma_y. \quad (47)$$

Точний розв'язок задачі має вигляд [9]

$$\frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} = -\frac{2(1-\nu)q}{\pi\mu} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

Для чисельного розв'язання сингулярного ГІР (47) була застосована колокаційна процедура. Розрахункова область була поділена на чотири кільцеві граничні елементи. Нормовані значення похідної

$\frac{\mu}{2\pi q(1-\nu)} \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho}$ в точках колокації наведені в таблиці 1. Як показали розрахунки, якщо не враховувати характер поведінки шуканої функції

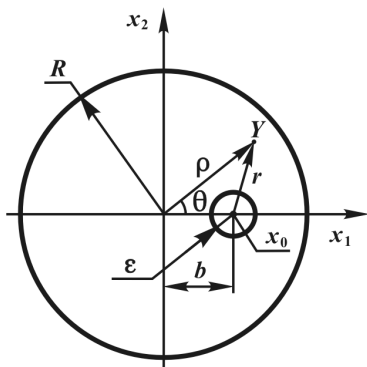


Рис. 3

поблизу краю тріщини, то навіть квадратична апроксимація невідомих дає незадовільні результати. В той же час використання на елементі, розташованому біля краю, функцій форми у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 + \frac{b_1}{\sqrt{R-\rho}}; \\ \varphi_2 &= a_2 + \frac{b_2}{\sqrt{R-\rho}}. \end{aligned} \quad (48)$$

дозволяє отримати досить задовільні результати при кусочно-лінійній апроксимації.

Таблиця 1

$\frac{b}{R}$	Точне значення	Квадратична апроксимація	Лінійна апроксимація
0.0625	-0.006	0.82	-0.005
0.1875	-0.019	0.121	-0.022
0.3125	-0.033	-0.264	-0.30
0.4375	-0.049	-0.264	-0.051
0.5625	-0.069	0.175	-0.066
0.6875	-0.096	0.146	-0.092
0.8125	-0.141	-0.377	-0.146
0.9375	-0.273	-0.428	-0.271

Насамкінець зазначимо, що після того, як в результаті розв'язання задачі стають відомими значення $\frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho}$ в точках колокації, за допомогою (48) неважко отримати коефіцієнт інтенсивності напружень:

$$K_I = - \lim_{\rho \rightarrow R} \left[\frac{\mu\sqrt{2\pi}}{1-\nu} \frac{\partial u_3(\rho)}{\partial \rho} \sqrt{R-\rho} \right] =$$

$$= \frac{\mu\sqrt{2\pi}}{1-\nu} \left[\frac{\partial u_3^{(N-1)}(\rho)}{\partial \rho} b_1 - \frac{\partial u_3^{(N)}(\rho)}{\partial \rho} b_2 \right]. \quad (49)$$

Якщо точки колокації розташовані на відстані у чверть довжини елемента від його границь, то

$$b_2 = -b_1 = \frac{\sqrt{3\Delta}}{2(\sqrt{3}-1)}.$$

В розглядуваній задачі при $\Delta = 0.25R$ було отримано $K_I = 2.07q\sqrt{R\pi^{-1}}$, тоді як точне значення $K_I = 2q\sqrt{R\pi^{-1}}$. Збільшення кількості кільцевих граничних елементів до 8 дає $K_I = 2.02q\sqrt{R\pi^{-1}}$, що свідчить про збіжність результатів до точних значень.

1. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 280 с.
2. *Cruse T.A.* Recent advances in boundary element analysis methods // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62 (1987), pp. 227-244
3. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
4. *Sladek V., Sladek J.* Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 17 (1996), pp. 5-18
5. *Кантор Б.Я., Науменко В.В., Стрельникова Е.А.* О возможности выбора контрольных точек на границах элементов при численном решении сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Адамара // Докл. НАН Украины. – 1996. – № 1. – С.20-27
6. *Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolph T.J., Rizzo F.J.* A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *ASME J.of Applied Mechanics*, 59 (1992), pp. 604-614
7. *Купрадзе В.Д. и др.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
8. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. – 524 с.
9. Расчет конструктивных элементов с трещинами / *Н.М.Бородачев, А.Н.Бородачев, В.А.Кольцов и др.; Под общ. ред. Н.М.Бородачева.* – М.: Машиностроение, 1992. – 192 с.

УДК 539.3

Іванченко Г. М., канд. техн. наук.,
Вашіліна О. В., канд. фіз-мат. наук,
Засць Ю. О.

ПЕРЕБУДОВА ФРОНТІВ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В НЕОДНОРІДНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розглядаються випадки перебудови плоскої розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному пружному середовищі. Досліджується залежність форми променів і фронтів від параметрів неоднорідності.

При дослідженні задач сейсмології, сейсморозвідки й аналізі динамічної поведінки тектонічних структур під впливом вибухових збурень актуальними виявляються задачі математичного моделювання процесів взаємодії ударних хвиль з поверхнями розділу порід з різними механічними властивостями.

Специфіка динамічних явищ, що виникають у цих випадках, пов'язана з короткочасністю високоінтенсивного початкового поля тиску, зазвичай, сконцентрованого на початковому етапі часу в малій області, пов'язаного з вільною граничною поверхнею середовища, і перебудовою поверхні фронту ударної хвилі в міру її поширення. Оскільки при цьому границя виділеної для розрахунку області еволюціонує з просуванням хвильового фронту, для аналізу таких процесів виявляються малоефективними традиційні методи розв'язування крайових задач математичної фізики.

Зазвичай при дослідженні ударних хвиль найбільша увага приділяється питанням геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій і обчисленням значень цих розривів, що дають найбільш повну інформацію про фронт ударної хвилі й інтенсивності імпульсу, що переноситься нею, в кожній точці фронту. Тому для постановки і розв'язування таких задач важливу роль відіграють методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, яке забезпечує хороший кількісний опис широкого кола хвильових явищ різної фізичної природи.

Застосування променевого методу полягає у виділенні функції оптичного шляху хвилі, чи ейконала, і побудові за допомогою рівняння ейконала системи променів і фронтів ударної хвилі. Ця задача досить просто розв'язується для ізотропних середовищ, однак і там виникають деякі ускладнення, коли доводиться досліджувати взаємодію хвилі з поверхнею розділу середовищ з різними механічними властивостями

(пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища й ін.), в результаті чого утворюються каустики, пов'язані з фокусуванням енергії і необмеженим зростанням інтенсивності поля.

Фізична картина динамічних явищ різко ускладнюється при вивченні поширення хвиль сильних розривів у неоднорідних пружних анізотропних середовищах, оскільки в цих випадках польова функція виявляється векторною; для кожного напрямку існує три види хвиль, що відрізняються поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать як від поляризації хвилі, так і від напрямку її поширення; промені, в загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових і між їх напрямками не завжди існує однозначна відповідність. Крім того промені викривляються, а на поверхні фронтів можуть утворюватися геометричні особливості.

Постановка задачі. Динамічна рівновага пружного середовища в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (1)$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$; $c_{ik,pq}$ – параметри пружності; ρ – густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних переміщень, t – час.

У зв'язку з тим, що в анізотропних середовищах промені, у загальному випадку, не ортогональні поверхням хвильових фронтів, будемо розрізняти вектори фазової v і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронт є поверхнею постійної фази $n \cdot r - vt = \text{const}$, кожна елементарна площадка якого рухається вздовж місцевої одиничної нормалі n зі швидкістю v . Тут r – радіус-вектор точки фронту.

Вектори поляризації A хвилі і її фазової швидкості v для обраного напрямку n можна побудувати з однорідної системи алгебраїчних рівнянь [2, 4]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (2)$$

як власні числа і вектори матриці її коефіцієнтів.

З умови існування нетривіальних розв'язків цієї системи впливає рівняння третього ступеня щодо квадрата фазової швидкості v^2

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (3)$$

за допомогою якого для кожного напрямку нормалі n можна визначити і розташувати в порядку спадання три швидкості по-різному поляризованих хвиль.

Надаючи величині v^2 в системі (2) по черзі одне із знайдених значень $v_r^2(n)$ ($r = 1,2,3$), можна визначити компоненти векторів поляризації $A^{(r)}$ трьох хвиль, що рухаються в розглянутому напрямку зі своїми фазовими швидкостями $v_r(n)$.

Поверхня фронту ударної хвилі визначається співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (4)$$

у якому функція τ повинна задовольняти диференціальному рівнянню в частинних похідних першого порядку [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

що узагальнює рівняння ейконала в геометричній оптиці для пружних анізотропних хвиль.

Величини, що входять у (5) p_k ($k = 1,2,3$) являють собою компоненти вектора рефракції $p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v_r(n)$ ($k = 1,2,3$).

Хвильовий фронт (4) ударної хвилі в однорідному анізотропному середовищі будується після знаходження розв'язку рівняння (5), яке за допомогою методу характеристик зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k / d\tau &= 0 \quad (k=1,2,3). \end{aligned} \quad (6)$$

Перша група цих рівнянь описує поширення хвилі вздовж променя з променевою швидкістю $\xi = \xi^{(r)}(n, x_k)$. Друга група рівнянь вказує на

прямолінійність променів в однорідному середовищі
 $\lambda_{im, pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}$.

Однак, якщо пружне середовище є неоднорідним, рівняння (6) замінюються більш складнішими співвідношеннями [2, 6-8]

$$\frac{dx_m}{d\tau} = \xi_m \equiv \sum_{i, p, q=1}^3 \lambda_{im, pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (m = 1, 2, 3),$$

$$\frac{dp_m}{d\tau} = \eta_m \equiv \frac{-1}{2} \sum_{i, k, p, q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik, pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \quad (7)$$

Наведені залежності дають можливість описати фронти складної геометрії, які перебудовуються під час свого поширення. В такому випадку промені стають криволінійними.

Методика розв'язування. Розглянемо два трансверсально-ізотропних середовища, осі симетрії пружних параметрів яких збігається з віссю Ox_2 декартової системи координат. Завдяки властивостям симетрії, компоненти $C_{ik, pq}$ тензора пружних сталей кожного середовища можна представити у формі шестирядної квадратної матриці..

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де λ і μ – параметри Ламе, l , m , p – константи, що відрізняють середовище від ізотропного. Для неоднорідного середовища ці параметри є функціями координат x_1 , x_2 , x_3 .

Нехай у середовищі \bar{I} збуджена плоска поздовжня ударна хвиля, вектор поляризації якої напрямлений вздовж осі Ox_2 . Дослідимо дифракцію такої хвилі при її взаємодії з криволінійними осесиметричними границями G_1 і G_2 розділу середовищ, вісь симетрії яких також збігається з Ox_2 . Сформульована задача є осесиметричною, тому достатньо розглянути явища перебудови і формування ударних хвиль на одній із площин, наприклад, на площині $x_3 = 0$, що містить вісь

симетрії. Прийmemo “локально-плоске наближення” [2], відповідно до якого в місці падіння хвилі на елементарну площадку, що розділяє поверхні G_1 в площині падіння $x_3 = 0$, усі відбиті і заломлені хвилі також будуть належати цій площині, тобто треті компоненти усіх векторів поляризації дорівнюють нулю. Це дозволяє застосовувати узагальнений закон Снелліуса, що виражається рівностями [2, 4, 5]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma)}{v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})} = \frac{\sin(\Theta_\mu^{\bar{II}} + \gamma)}{v_\mu^{\bar{II}}(\Theta_\mu^{\bar{II}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (9)$$

де γ - кут нахилу дотичної до поверхні G_1 в точці M падіння променя, $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{I}}$ - кути між віссю Ox_2 і напрямками векторів фазових швидкостей квазіпоздовжньої qP і квазіпоперечної qS хвиль, відбитих у середовище \bar{I} ; $\Theta_v^{\bar{II}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ - аналогічні кути для хвиль, заломлених у середовище \bar{II} (у середній шар); $v, v_v^{\bar{I}}, v_\mu^{\bar{II}}$ - величини фазових швидкостей падаючої поздовжньої хвилі, відбитих і заломлених хвиль (індекс 1 відповідає квазіпоздовжній, 2 – квазіпоперечній хвилі).

У випадку анізотропних середовищ співвідношення (9) закону Снелліуса характеризуються тим, що знаменники $v_v^{\bar{I}}, v_\mu^{\bar{II}}$, як і чисельники, є функціями відповідних кутів $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ і неявно кута γ . Значення кутів $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$ ($v, \mu = 1, 2$) відбиття та заломлення променів в деякій точці M границі G_1 , визначаються розв’язком системи нелінійних рівнянь (9) методом Ньютона разом з алгоритмом продовження розв’язку за параметром [3]. В якості ведучого параметра зручно обрати кут нахилу дотичної γ . Тоді, наприклад, для першого рівняння системи (9) при деяких відомих величинах параметра $\gamma = \gamma^n$ і векторів $v_v = v_v^n$ малому збільшенню ведучого параметра $\Delta\gamma$ будуть відповідати прирости направляючих кутів фазових швидкостей пружних хвиль, відбитих у середовище \bar{I}

$$\Delta\Theta_{\bar{V}}^{\bar{I}} = \frac{\cos\gamma \cdot v_{\bar{V}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{V}}^{\bar{I}}) + \cos(\Theta_{\bar{V}}^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v}{\cos(\Theta_{\bar{V}}^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot dv_{\bar{V}}(\Theta_{\bar{V}}^{\bar{I}}) / d\Theta_{\bar{V}}^{\bar{I}}} \cdot \Delta\gamma + r_{\bar{V}}, \quad (10)$$

де $r_{\bar{V}} = \sin(\Theta_{\bar{V}}^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin\gamma \cdot v_{\bar{V}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{V}}^{\bar{I}})$ – нев'язки на розглянутому кроці побудови розв'язку.

Крок обчислення $\Delta\gamma$ у формулі (10) загалом вибирають з умови збіжності числового процесу, при цьому точність обчислень оцінюється по величині нев'язки $r_{\bar{V}}$.

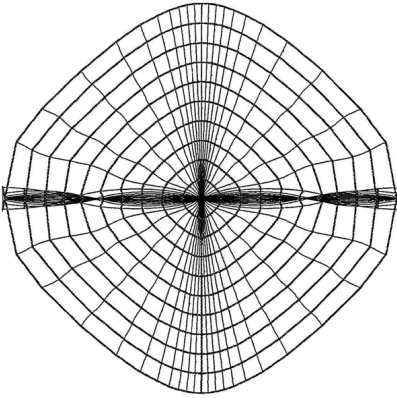


Рис. 1. Фронти і промені квазіповздовжньої qP -хвилі в середовищі зі змінною густиною

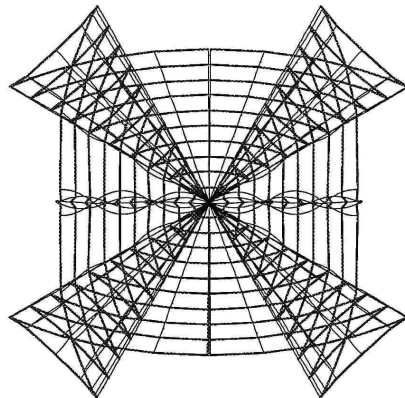


Рис. 2. Фронти і промені квазіпоперечної qS -хвилі в середовищі зі змінною густиною

На основі запропонованої методики розв'язані задачі про поширення хвиль, що породжуються ударним полем тиску в сферичній порожнині трансверсально-ізотропного пружного середовища, густина якого ρ змінюється по вертикальній змінній за законом $\rho = \rho_0 [1 + 0.1 \cos(ax_3)]$. Рис. 1 ілюструє систему променів і фронтів розривної хвилі зі зміною часу для випадку $\rho_0 = 6650 \text{ кг/м}^3$, $E = 1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.28$, параметри анізотропії $-0.5 \ 0.3 \ -0.1$. Рис. 2 відповідає випадку $\rho_0 = 2760 \text{ кг/м}^3$, $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu = 0.1$, параметри анізотропії $0.1 \ 0.3 \ 0.5$. Аналіз отриманих результатів свідчить про те, що неоднорідність механічних властивостей пружного середовища призводить до суттєвої перебудови системи променів і фронтів і виникнення у ній каустик. При цьому промені набувають суттєвої кривизни, а на поверхнях фронтів утворюються геометричні особливості.

1. *Кравцов Ю. А. Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М., Наука, 1980. 304с.
2. *Петрашень Г. И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград, Наука, 1980. 280с.
3. *Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К., Наукова думка, 1988. 220с.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т.64, №3. – С. 394–402.
5. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Крицкий В.Б., Иванченко Г.М.* Отражение и преломление плоских разрывных волн параболоидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофизический журнал. – 2005. – Т.27, №3. – С. 418–426.
6. *Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.
7. *Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media // International Journal of Solids and Structures – 2006. – 43. – P. 74-90.
8. *Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M.* Focusing and dispersion of a plane wave by transversally isotropic elastic lenses // Acoustical Physics – 2004. – Vol. 50. – 2. – P. 140-145.

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Солодей І.І., канд. техн. наук,
Приходько А.Ю., асп.

НАПІВНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ

Проектування будівель та споруд на сучасному етапі неможливо без урахування динамічних навантажень. Це пояснюється багатьма причинами. Найбільш очевидна – збільшення динамічних навантажень, які є наслідком роботи машин, кранів та іншого обладнання, широке застосування вібрацій, ударів та промислових вибухів як елементів технологічного процесу. Намагання задовольнитися статичним розрахунком та враховувати динамічне навантаження деякими, по суті, апріорними динамічними коефіцієнтами уже давно визнані неідеальними. Класифікація динамічних процесів, що виникають при деформуванні твердих тіл, базується на величині швидкості деформацій. Швидкості деформацій в діапазоні від 10^{-2} до 10^0 с $^{-1}$ з характерним часом протікання 10^2 – 10^2 с визначаються як проміжні, або середні, між статичними та швидкістними процесами [4]. Саме в цьому діапазоні стають помітними ефекти швидкості деформації, хоча в деяких випадках їх впливом ще можна знехтувати.

Найбільш розповсюдженим динамічним навантаженням від машин і обладнання є періодичні коливання. Ці коливання можуть збуджуватися як при нормальному робочому режимі обладнання, так і при його запуску, остановці або аварії. При дії гармонічного навантаження задача зводиться до квазістатичної для амплітудних значень переміщень. У випадку періодичної дії виконується гармонічний аналіз навантаження, що дає можливість проводити вивчення періодичного руху суперпозицією гармонік. Якщо збуджуване періодичне навантаження має складний закон зміни у часі, тоді при розрахунку конструкції навантаження розкладають в ряд Фур'є та обмежуються декількома першими гармоніками.

Серед різноманіття просторових динамічних задач важливим частковим випадком, що має самостійне прикладне значення в області дорожнього будівництва, є проблема дослідження пружного деформування протяжних тіл призматичної форми під дією рухомих навантажень. Переміщення вантажу утворює нестационарний процес в

направляючій конструкції, який залежить від швидкості руху вантажів та співвідношення їх мас і несучої конструкції. У випадку, коли один з вимірів тіла значно перевершує два інших і швидкість руху навантаження постійна, процес деформування можна розглядати як сталий. Клас конструкцій, що зазнають дію інерційних рухомих навантажень, вельми широкий, причому розвиток промисловості диктує необхідність збільшення швидкостей руху при максимальному використанні резервів міцності.

Постановка задачі. Розглянемо системи неоднорідних ізотропних тіл обертання та призматичних тіл (рис. 1), що знаходяться під дією стаціонарних періодичних або рухомих навантажень, на інтервалі часу $[t_0, t_1]$.

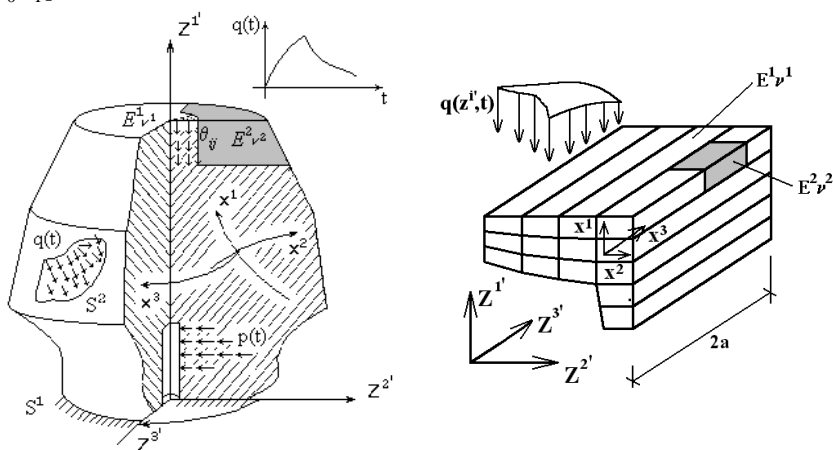


Рис. 1. Системи неоднорідних ізотропних тіл

Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системі координат Z^i , що в подальшому називається базисною.

Для подання напружено-деформованого стану тіла із складною формою поперечного перетину запроваджується місцева криволінійна система координат x^i , яка пов'язана з геометрією тіла.

Переміщення будь-якої точки тіла визначається компонентами в базисній системі координат u_i .

Компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [2] та мають вигляд:

- в ортогональній циліндричній системі координат:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,\beta} + z_{,\beta}^{\gamma} u_{\gamma,\alpha} \right), \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3} - \frac{2z_{,\alpha}^{\gamma} u_{3'}}{Z^2} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3',3} + Z^2 u_{2'}, \quad (1)$$

- в декартовій:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,\beta} + z_{,\beta}^{\gamma} u_{\gamma,\alpha} \right), \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(a u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = a u_{3',3}, \quad (2)$$

де $z_{,\alpha}^{\gamma} = \partial z^{\gamma} / \partial x^{\alpha}$ - прямий тензор перетворення координат;
 $u_{\gamma',j} = \partial u^{\gamma'} / \partial x^j$; $\alpha, \beta = 1, 2$.

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (3)$$

В загальному випадку компоненти тензора пружних постійних є функціями часової координати $d^{ijkl} = d^{ijkl}(t)$.

Класичне рівняння руху неоднорідного ізотропного тіла об'ємом V обмеженого поверхнею S записується у вигляді [3, 4]:

$$\delta K + \delta W - \delta A = 0, \quad (4)$$

де $\delta W = \int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$ - варіація потенційної енергії деформації записана в

термінах фізичних компонент тензорів напружень та деформацій [2]

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} / \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}, \quad \tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}$$

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{d}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl}, \quad \delta A = \int_V f^i \delta u_{i'} dV + \int_S p^i \delta u_{i'} dS$$

- варіація роботи внутрішніх та зовнішніх сил; δK - варіація кінетичної енергії, яка в залежності від параметрів процесу руху, може бути записана як:

$$\delta K = \int_V \rho u^i \delta u_{i'} dV, \quad (5)$$

$$\delta K = \int_V \rho \dot{u}^i \delta u_i^i dV. \quad (6)$$

Однозначність розв'язання (4) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов. За початкові умови приймається відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0 :

$$u(Z^i, t_0) = u_0(Z^i), \quad \dot{u}(Z^i, t_0) = \dot{u}_0(Z^i), \quad Z^i \in V. \quad (7)$$

На частині поверхні S_u задані кінематичні граничні умови:

$$u(Z^i, t) = \bar{u}(Z^i, t), \quad Z^i \in S_u, \quad (8)$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\bar{n} = n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_i^{k'} \sigma^{ij} n_j = \bar{p}(Z^{k'}, t), \quad Z^{k'} \in S_p. \quad (9)$$

Періодичні коливання просторових тіл. Відповідно до процесу стаціонарних коливань неоднорідного ізотропного просторового (осесиметричного, циклічносиметричного чи призматичного) тіла під дією системи довільно розподілених у просторі періодичних зовнішніх навантажень:

$$f^j = \sum_{r=1}^R f_r^j \sin \omega_r t, \quad p^j = \sum_{r=1}^R p_r^j \sin \omega_r t, \quad \omega_r = \frac{r\pi}{T}, \quad (10)$$

де T - період дії навантаження; R - число гармонік, необхідне для опису розподілу навантаження в інтервалі $[t_0, t_1]$. Можна очікувати, що реакція системи також повинна задовольняти періодичному закону, аналогічному (10):

$$u_i^s = \sum_{s=1}^S u_i^s \sin \omega_s t \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \sum_{s=1}^S \varepsilon_{ij}^s \sin \omega_s t. \quad (11)$$

Представивши переміщення, зовнішні навантаження і деформації відомими періодичними функціями часової координати (10) і (11), та виконавши інтегрування (4) з урахуванням ортогональності тригонометричних функцій на інтервалі $[t_0, t_1]$, у випадку коливань пружних тіл, коли залежність між напруженнями і деформаціями

описується лінійним законом, і як наслідок $\sigma_{ij} = \sum_{s=1}^S \sigma_{ij}^s \sin \omega_s t$,

розв'язання просторової динамічної задачі зводиться до пошуку ряду квазістатичних періодичних рішень для кожної гармоніки в розкладі заданих і невідомих функцій по часовій координаті з урахуванням інерційних сил:

$$\sum_s \int_V \sigma_{ij}^s \delta \varepsilon_{ij}^s dV - \sum_s \omega_s^2 \int_V \rho u_i^s \delta u_i^s dV = \sum_s \left[\int_V f_s^{i'} \delta u_i^s dV + \int_S p_s^{i'} \delta u_i^s dS \right]. \quad (12)$$

Деформування тіл під дією рухомого навантаження. Розглядаються сталі процеси при постійній швидкості руху навантаження, з фронтом якого пов'язують рухому базисну систему координат $y^{i'}$ (рис. 2). Зв'язок між рухомою і нерухомою системами координат подається через співвідношення:

$$\begin{aligned} y^{3'} &= z^{3'} - V_p t, \\ y^{\alpha'} &= z^{\alpha'}, \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned} \quad (13)$$

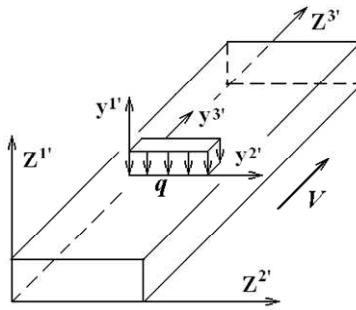


Рис. 2

Тоді на основі (13) запишемо:

$$\frac{\partial z^{i'}}{\partial y^{j'}} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \frac{\partial z^{i'}}{\partial t_y} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ V_p, & i = 3 \end{cases}, \quad \frac{\partial y^{i'}}{\partial t} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ -V_p, & i = 3 \end{cases}, \quad \frac{\partial t}{\partial t_y} = 1. \quad (14)$$

Виходячи з (14) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial z^{i'}} = \frac{\partial}{\partial y^{i'}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_y} - V_p \frac{\partial}{\partial y^{3'}}. \quad (15)$$

На основі положення про стаціонарність процесу в рухомій системі координат та використовуючи співвідношення (6), як вихідне для варіації кінетичної енергії, отримаємо:

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + V_p^2 \int_V \rho \frac{\partial u_i^{i'}}{\partial y^{3'}} \frac{\partial \delta u_i^{i'}}{\partial y^{3'}} dV = \int_V f^{i'} \delta u_i^{i'} dV + \int_S p^{i'} \delta u_i^{i'} dS = 0. \quad (16)$$

Скінченноелементна модель. Для дискретизації неоднорідних пружнопластичних тіл при динамічному навантаженні застосовуються кільцевий та призматичний скінченні елементи (СЕ) (рис. 3).

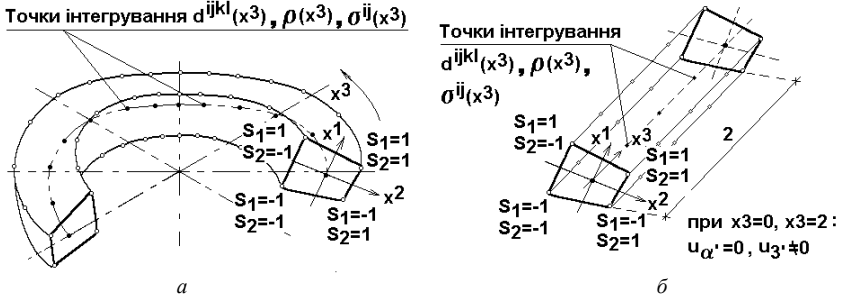


Рис. 3. Неоднорідні скінченні елементи:
а - замкнутий кільцевий, б – прямолінійний призматичний

Початок місцевої системи координат x^i знаходиться у геометричному центрі елемента, вісі x^1 і x^2 направлені паралельно сторонам поперечного перерізу, а x^3 суміщена із Z^3 .

Припускається, що щільність матеріалу ρ , компоненти тензора пружних постійних d^{ijkl} і визначник метричного тензора g незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі.

Невідомими задачі вважаються переміщення вузлів СЕ u_i , при аналізі деформування тіл під дією рухомого навантаження та амплітуди коливань переміщень вузлів СЕ u_i^s по s гармоніці при дослідженні періодичних коливань просторових тіл. Надалі індекс s буде опущений з метою узагальнення співвідношень НМСЕ для задач стаціонарних коливань просторових неоднорідних тіл.

Якщо обмежитися білінійним розподілом невідомих в площині перетину елемента і описати їх через вузлові значення поліномами Лагранжа першого ступеня, тоді можна записати:

$$u_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)} u_{k'}(S_1, S_2), \quad P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left(S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right), \quad (17)$$

Індекси S_1 та S_2 визначають положення вузла відносно центру поперечного перерізу елемента і набувають значень ± 1 (рис. 3).

Для подання деформацій використовується моментна схема скінченних елементів (МСЕ) [7]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g(\alpha\alpha)} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\varepsilon}'_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \mathfrak{E}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \quad (18) \\ \mathfrak{E}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g(\alpha\alpha)g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\varepsilon}'_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \mathfrak{E}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}'_{33,\alpha} x^\alpha \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}'_{ij,\beta} = \left(\partial \varepsilon_{ij} / \partial x^\beta \right) \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}'_{ij,\beta} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}}{2} (h_{(ii),\beta} + h_{(jj),\beta}), \\ h_{(ii),\beta} &= g_{(ii),\beta} / g_{(ii)}. \end{aligned}$$

При заданому законі апроксимації невідомих (17), коефіцієнти ряду Маклорена обчислюються по формулам:

- для кільцевого СЕ:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma(S_1,S_2)} S_\beta + z_{,\beta}^{\gamma} u_{\gamma(S_1,S_2)} S_\alpha \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3'(S_1,S_2)} S_\alpha + \frac{1}{2} z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3(S_1,S_2)} - \frac{z_{,\alpha}^{\gamma}}{Z^2} u_{3'(S_1,S_2)} \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3',3(S_1,S_2)} + Z^2 u_{2'(S_1,S_2)} \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma} u_{\gamma(S_1,S_2)} S_\alpha + 2 z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma(S_1,S_2)} S_\alpha S_{(3-\alpha)} \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{3'(S_1,S_2)} S_\alpha + \frac{z_{,\alpha}^{\gamma}}{2} u_{2'(S_1,S_2)} + Z^2 u_{2'(S_1,S_2)} S_\alpha \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[2 u_{3'(S_1,S_2)} S_\alpha S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma} u_{\gamma,3(S_1,S_2)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3}(s_1, s_2) S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,\alpha(3-\alpha)}^{2'}}{Z^{2'}} u_{3'}(s_1, s_2) + \left. + \frac{z_{,\alpha}^{2'} z_{,(3-\alpha)}^{2'}}{(Z^{2'})^2} u_{3'}(s_1, s_2) - \frac{z_{,\alpha}^{2'}}{Z^{2'}} u_{3'}(s_1, s_2) S_{(3-\alpha)} \right];$$

- для призматичного СЕ: (19)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \left[z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma}(s_1, s_2) S_{\beta} + z_{,\beta}^{\gamma} u_{\gamma}(s_1, s_2) S_{\alpha} \right], \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \left[u_{3'}(s_1, s_2) S_{\alpha} a + \frac{1}{2} z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3}(s_1, s_2) \right], \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} u_{3',3}(s_1, s_2) a, \\ \varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \left[z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma} u_{\gamma}(s_1, s_2) S_{\alpha} + 2 z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma}(s_1, s_2) S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} \right], \\ \varepsilon_{33,\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} u_{3',3}(s_1, s_2) S_{\alpha} a, \\ \varepsilon_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \left[a u_{3'}(s_1, s_2) S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,\alpha(3-\alpha)}^{\gamma} u_{\gamma,3}(s_1, s_2) + \right. \\ &\quad \left. + z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3}(s_1, s_2) S_{(3-\alpha)} \right]. \end{aligned}$$

По аналогії з компонентами тензора деформацій, напруження записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha(\alpha)} &= g_{(\alpha\alpha)} \left\{ \sigma^{\alpha(\alpha)} + \sigma_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \sigma^{12} = \sqrt{g_{11} g_{22}} \sigma^{12}, \\ \sigma^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{33}} \left\{ \sigma^{\alpha 3} + \sigma_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \sigma^{33} = g_{33} \left\{ \sigma^{33} + \sigma_{,\alpha}^{33} x^{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Зв'язок між коефіцієнтами розкладів (18) і (20) в центрі меридіонального перетину СЕ на основі узагальненого закону Гука:

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} = d^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{kl}, \quad \overset{\circ}{\sigma}'{}_{,\alpha}{}^{ij} = d_{\alpha}{}^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}'{}_{kl,\alpha}, \quad d_{\alpha}{}^{ijkl} = d^{ijkl} - \frac{d^{ij(\alpha)(\alpha)} d^{(\alpha)(\alpha)kl}}{d^{(\alpha)(\alpha)(\alpha)(\alpha)}}. \quad (21)$$

В силу замкнутості кільцевого СЕ, сталості його геометричних параметрів вздовж окружної координати та для забезпечення виконання граничних умов для шарнірно опертих призматичних тіл розподіл невідомих в напрямку x^3 проводиться 2π - періодичними функціями x^3 і їх значення представляються відрізками тригонометричних рядів Фур'є:

$$u_{k'(s_1, s_2)} = \sum_{l=l_0}^L u_{k'(s_1, s_2)}^l \psi_{(k')}^l, \quad (22)$$

$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \cos lx^3$, $\psi_{3'}^l = \sin lx^3$, $l_0 = 0$, $0 \leq x^3 \leq 2\pi$ для кільцевого СЕ;

$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3$, $\psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3$, $l_0 = 1$, $0 \leq x^3 \leq 2$ для

призматичного.

Визначивши невідомі $u_{k'(s_1, s_2)}$ через амплітудні значення і підставивши їх в (18), після диференціювання по x^3 і перегрупування коефіцієнтів при \cos і \sin отримаємо:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij}^l \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij}^l \psi_{3'}^l, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}'{}_{,\alpha}{}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}'{}_{ij,\alpha}^l \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\varepsilon}'{}_{ij,\alpha}^l \psi_{3'}^l, \quad (23)$$

Напруження і їх похідні незалежно подаються відрізками ряду Фур'є вздовж x^3 :

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_l \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_l \psi_{3'}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}'{}_{,\alpha}{}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}'{}^{ij}_{,\alpha l} \psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\sigma}'{}^{ij}_{,\alpha l} \psi_{3'}^l. \quad (24)$$

Для однорідних вздовж x^3 тіл амплітудні значення напружень та їх похідних в центрі поперечних перерізів СЕ можуть бути отримані безпосередньо через амплітудні значення деформацій і їх похідних:

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_l = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}{}^l_{km}, \quad \overset{\circ}{\sigma}'{}_{,\alpha}{}^{ij} = d_{\alpha}{}^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}'{}^l_{km,\alpha}, \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}_l = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}{}^l_{km}, \quad \overset{\circ}{\sigma}'{}_{,\alpha}{}^{ij} = d_{\alpha}{}^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}'{}^l_{km,\alpha}. \quad (25)$$

В загальному випадку, компоненти тензора пружних постійних залежать від координати x^3 і значення напружень неможливо отримати через амплітудні значення деформацій. Тому, амплітудні значення напружень визначаються чисельним інтегруванням:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_1^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_1^l(n), \\ \overset{\circ}{\bar{\sigma}}_l^{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_2^l(n), \quad \overset{\circ}{\bar{\sigma}}_{,\alpha l}^{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_2^l(n), \end{aligned} \quad (26)$$

де $\overset{\circ}{\sigma}_n^{ij}$ і $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij}$ - координатні значення напружень і їх похідні в центрі поперечних перерізів, що відповідають точкам інтегрування n ; $2N$ - загальне число точок інтегрування, розміщених вздовж координати x^3 , необхідне для обчислення амплітудних значень аж до $l = L$ включно.

Для кільцевого СЕ: $\phi_1^l(n) = \cos l \frac{\pi n}{N}$, $\phi_2^l(n) = \sin l \frac{\pi n}{N}$, $\theta = \begin{cases} 2, & l = 0 \\ 1, & l > 0 \end{cases}$, для

призматичного: $\phi_1^l(n) = \sin l \frac{\pi n}{2N}$, $\phi_2^l(n) = \cos l \frac{\pi n}{2N}$, $\theta = 1$.

Запропоновані елементи призначені для розрахунку неоднорідних масивних, тонкостінних та комбінованих конструкцій. Оскільки в даному СЕ не накладається будь-яких обмежень на діапазони зміни модуля пружності і щільності матеріалу, при d^{ijkl} , $\rho \rightarrow 0$ з'являється можливість моделювання тіл з вирізами, що порушують суцільність матеріалу [6].

Розрахункові співвідношення НМСЕ. Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\begin{aligned} \delta K &= -\omega_s^2 \int_V \rho u_s^{i'} \delta u_i^s dV - \text{періодичні коливання}, \\ \delta K &= V_p^2 \int_V \rho \frac{\partial u^{i'}}{\partial y^{3'}} \frac{\partial \delta u_i'}{\partial y^{3'}} dV - \text{рухоме навантаження}. \end{aligned} \quad (27)$$

Виразивши переміщення вузлів елемента вздовж окружної координати у вигляді відрізків ряду Фур'є (22), отримаємо:

$$\delta K = \hbar A \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \left\{ \left\{ u_{k'} \right\}_{(S_1, S_2)}^l \right\}^T [m]_{lm} \left\{ \left\{ u_{k'} \right\}_{(S_1, S_2)}^m \right\}, \quad (28)$$

де $[m]_{lm}$ - амплітудна матриця мас неоднорідного вздовж x^3 елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \left[[m^{k'}]_{(S_1, S_2)}^m \right] = \sqrt{g} \rho_{lm}^{k'} \left[[g^{k'(k')}]_{(S_1, S_2)} \right] \mathbf{H}_M^l \mathbf{H}_I \quad (29)$$

$$\mathbf{H}_M^l = 1, \quad A = -\omega_s^2, \quad \hbar = \pi \quad \text{для періодичних коливань}; \quad \mathbf{H}_M^l = \left(\frac{\partial x^3}{\partial y^{3'}} \frac{l\pi}{2} \right)^2,$$

$A = V_p^2, \quad \hbar = 1$ - у випадку рухомого навантаження.

В загальному випадку при обчисленні інтеграла по площині поперечного перерізу СЕ:

$$\mathbf{H}_I = \prod_{n=1}^2 [(S_n P_n + 3)/144]. \quad (30)$$

Так як при формуванні коефіцієнтів матриці жорсткості беруть участь поліноми більш низького ступеня (перші похідні), ніж при формуванні коефіцієнтів матриці мас і, отже, збіжність чисельного рішення визначається збіжністю потенційної енергії деформації, тоді доцільно зменшити ступінь поліномів, які використовуються при обчисленні коефіцієнтів матриці мас. В цьому випадку, отримаємо вираз для коефіцієнтів "неузгодженої" матриці мас. Використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, та враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині маси елементів, які примикають до даного вузла, множник \mathbf{H}_I можна записати як:

$$\mathbf{H}_I = 1/4. \quad (31)$$

Тут введені наступні позначення:

$$\rho_{lm}^{\alpha'} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \rho_n \phi_1^l(n) \phi_1^m(n), \quad \rho_{lm}^{\beta'} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \rho_n \phi_2^l(n) \phi_2^m(n), \quad (32)$$

ρ_n - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу, що відповідає n -ій точці інтегрування.

Для однорідних тіл інтегрування в (32) можна виконати в замкнутій формі:

$$\rho_{lm}^{k'} = \rho \times \begin{cases} 1, & l=m \\ 0, & l \neq m \end{cases} \quad (33)$$

У випадку розв'язання задачі про деформування тіл під дією рухомого навантаження при переміщенні навантаження з постійною швидкістю формування і триангуляризація ефективної глобальної матриці задачі здійснюються один раз на першому кроці. Для розв'язання задачі із змінною швидкістю руху навантаження процедури формування і триангуляризації ефективних амплітудних підматриць необхідно виконувати на кожному кроці за часом.

Розв'язання систем лінійних рівнянь. При аналізі об'єктів із змінними вздовж координати x^3 фізико-механічними параметрами не вдається досягти розділу змінних та подати матрицю задачі $[K]\{U\} = \{Q\}$ у вигляді діагональних блоків [1]. Для таких систем рівнянь характерна блокова структура:

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} [\hat{K}]_{l_0 m_0} & \cdots & [\hat{K}]_{l_0 m} & \cdots & [\hat{K}]_{l_0 L} \\ [\hat{K}]_{l m_0} & \cdots & [\hat{K}]_{l l} & \cdots & [\hat{K}]_{l L} \\ [\hat{K}]_{L m_0} & \cdots & [\hat{K}]_{L m} & \cdots & [\hat{K}]_{L L} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Кожний блок матриці (34) представляє собою стрічкову підматрицю, що зформована для двовимірної сіткової області, яка апроксимує поперечний переріз тіла:

$$[\hat{K}]_{lm} = [K]_{lm} + A[M]_{lm} \quad (35)$$

Розв'язання системи рівнянь (4) виконується за допомогою алгоритму, що заснований на методі блокової (групової) послідовної верхньої релаксації [8]:

$$\{U\}_{l,i+1} = \{U\}_{l,i} + \tilde{\omega} [\hat{K}]_{ll}^{-1} (\{\hat{Q}\}_l - \{R\}_{l,i}), \quad (36)$$

де $\{R\}_{l,i}$ - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації i , який визначається співвідношенням:

$$\{R\}_{l,i} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{U\}_{i+1}^m + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{U\}_i^m, \quad (37)$$

де $\{U\}_{i+1}^m, \{U\}_i^m$ - амплітудні значення вузлових переміщень на ітераціях $i+1$ та i відповідно, $\bar{\omega}$ - параметр релаксації ($1 \leq \bar{\omega} < 2$).

На кожному кроці за часом ітераційний процес закінчується на ітерації $I=i$, якщо виконується умова:

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}_{l,i} \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta U\}_l \right\|, \quad (38)$$

де $\{\Delta U\}_{l,i}$ - прирощення амплітудних переміщень на ітерації i ;

$\{\Delta U\}_l = \sum_{i=1}^l \{\Delta U\}_{l,i}$ - вектор прирощень амплітудних переміщень;

$\|\{\Delta U\}\| = \|\{\Delta U\}\|^2$; ε - наперед задане мале додатне число, що визначає точність розв'язання системи рівнянь.

Результати чисельних досліджень. Перевірку вірогідності розробленого підходу здійснено шляхом розв'язання тестових прикладів.

На першому етапі розглянуто задачу періодичних коливань круглої пластини (рис. 4), защемленої по краях, що має аналітичний відомий розв'язок.

Геометричні, фізико-механічні характеристики пластини та параметри навантаження, що приймалися до розрахунку: $R = 1$ м, $h = 0.2$ м, $E = 2 \cdot 10^4$ МПа,

$\rho = 2400$ кг/м³, $\nu = 0.17$, $P = 10^3 \sin 50t$.

На рис. 5 приведено розподіл амплітудних значень вертикальних переміщень вздовж радіуса пластини. Кружками представлено еталонний розв'язок, суцільною лінією – розв'язок отриманий на основі запропонованої методики. Деяка несуттєва відмінність результатів в області $R \rightarrow 0$ пояснюється впливом особливої точки $R = Z^{2'} = 0$, в якій параметри напружено-деформованого стану прямують до нескінченності.

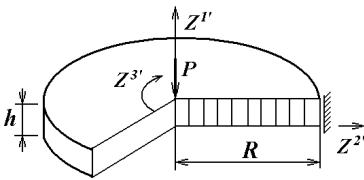


Рис. 4

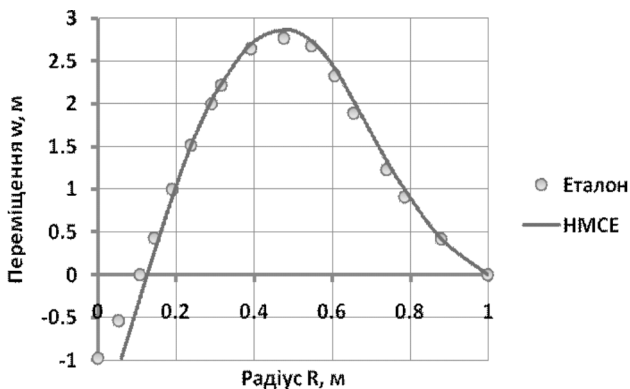


Рис. 5

Проведено дослідження збіжності чисельних результатів при використанні погодженої (30) і неузгодженої (31) матриць мас. Похибка щодо еталонних даних чисельного розв'язку, яке отримане при використанні погодженої матриці мас, показана суцільною лінією, неузгодженої – штрихпунктирною (рис. 6). Встановлено, що в обох випадках збіжність має однаковий ступінь. Тому є доцільним використання неузгодженої матриці мас з меншими чисельними витратами.

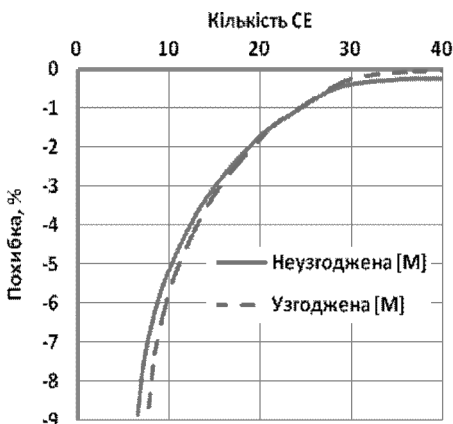


Рис. 6

Розглянуто динамічне деформування полоси прямокутного перерізу під дією сили $P = \sin 40t$, прикладеної в її геометричному центрі (рис. 7). $a = 10\text{м}$, $b = 0.1\text{м}$, $c = 0.03\text{м}$, $d = a/2$, $E = 2 \cdot 10^{10}\text{Па}$, $\rho = 2.4\text{т/м}^3$, $\nu = 0.17$.

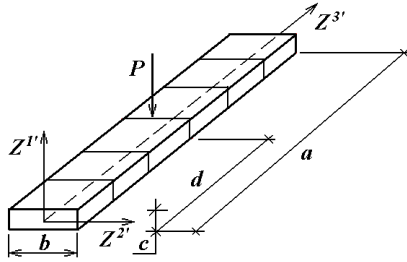


Рис. 7

Криві збіжності (рис. 8) при зміні кількості базисних функцій вздовж направляючої (скінченні елементи для метода скінченних елементів та відрізки ряду Фур'є для напіваналітичного його варіанта), свідчать про більш високу ефективність НМСЕ у порівнянні з МСЕ для даного класу конструкцій.

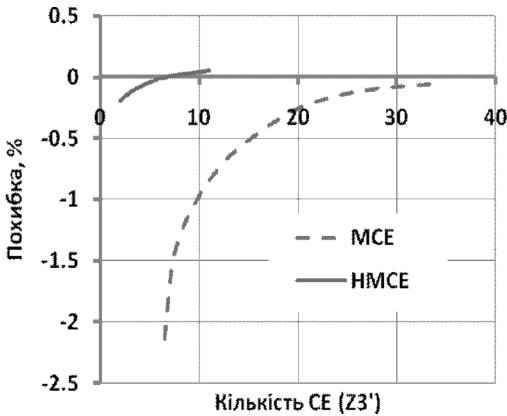


Рис. 8

Розв'язки, які отримані на основі сіткових параметрів, що забезпечують похибку менше 1% (НМСЕ - 1 гармоніка, МСЕ - 10 СЕ) повністю співпадають між собою (рис. 9).

Для демонстрації можливостей підходу при аналізі деформування призматичних тіл під дією рухомого навантаження розглянута аналогічна конструкція (рис. 7), під дією сили P , що рухається з поступовою швидкістю. $a = 10\text{дм}$, $b = 0.1\text{дм}$, $c = 0.03\text{дм}$, $d = a/2$, $P = 1\text{Н}$, $E = 2 \cdot 10^9\text{Н/дм}^2$, $\rho = 7.8\text{кг/дм}^3$, $\nu = 0.3$.

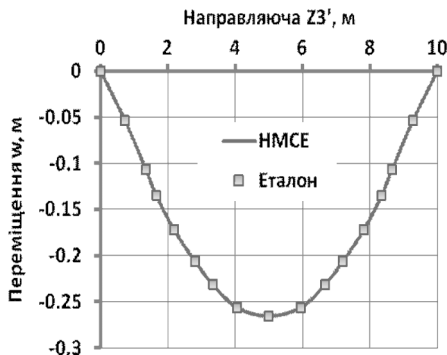


Рис. 9

Отримані епюри прогину балки в момент часу, коли сила досягає середини свого шляху для різних швидкостей пересування фронту навантаження. В усіх випадках зберігається добра узгодженість результатів з аналітичними рішеннями в межах $1\div 2\%$ (рис. 10).



Рис. 10

Висновки. Таким чином, на основі напіваналітичного методу скінченних елементів розроблена та апробована ефективна методика аналізу лінійних стаціонарних коливань неоднорідних просторових тіл, що знаходяться під дією періодичних або рухомих навантажень. Проведено дослідження збіжності та вірогідності розв'язків у порівнянні з відомими аналітичними підходами.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376с.
2. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. -483с.
3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
4. *Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф., Грещук Л.Б., Курран Д.Р.* Динамика удара: Пер. с англ. / Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. и др. - М.: Мир, 1985. - 296 с., ил.
5. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов.- М.: Наука, 1966.- 432с.
6. *Сахаров А.С., Гуляр А.И., Топор А.Г.* Анализ напряженно-деформированного состояния тел вращения с вырезами, нарушающими осевую симметрию. Проблемы прочности,1986, №6 – с.69-73.
7. *Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. -Киев: Вища школа, 1982. -479с.
8. *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы. - М.: Мир, 1986. - 446 с.

УДК 534-21:537.226.86

Шульга М. О., д-р фіз.-мат. наук,
Григор'єв С.А.**РАДІАЛЬНІ ПРУЖНОЕЛЕКТРИЧНІ НЕСТАЦІОНАРНІ
КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ**

Вступ. Забезпечення надійності і вибір раціональних умов функціонування електромеханічних перетворювачів висуває необхідність сумісного вивчення електричного поля і механічних напружень і деформацій в п'єзоелектричних елементах. Актуальним питанням нестационарної теорії електропружності є реакція порожнистої п'єзокерамічної кулі на динамічне навантаження, в зв'язку з чим важливо дослідити особливості електромеханічного стану кулі при електричних та механічних збуреннях.

Дана робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання та аналізу радіальних нестационарних коливань порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при електричних та механічних динамічних збуреннях.

1. Постановка задачі. Розглядається порожниста поляризована по товщині п'єзокерамічна куля з радіусом серединної поверхні R та товщиною стінки $2h$. Коливання кулі описуються рівнянням руху і квазістатичним рівнянням для електричної індукції [3]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + 2 \frac{D_r}{r} = 0 \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{11}^E + c_{21}^E) \frac{u}{r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ D_r &= e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + 2e_{13} \frac{u}{r} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2)$$

Початкові умови накладаються тільки на переміщення та їх швидкості

$$u(r, 0) = u^0(r); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, t = 0) = u^1(r). \quad (3)$$

Для загальності розв'язку вважаємо, що до зовнішніх електродованих поверхонь сфери прикладається різниця електричного потенціалу та механічна сила. Маємо граничні умови в вигляді:

$$\sigma_{rr}(R \pm h, t) = Q(t); \quad \varphi(R \pm h, t) = \pm V(t). \quad (4)$$

Початково-крайову задачу (1)-(4) зводимо до безрозмірного вигляду за допомогою позначень

$$r = R + x, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}, \quad \bar{u} = \frac{u}{h}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}, \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\epsilon_{00}}{c_{00}h^2}}, \quad (5)$$

$$\bar{D}_i = \frac{D_i}{\sqrt{c_{00}\epsilon_{00}}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\epsilon_{00}}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{\epsilon}_{ii} = \frac{\epsilon_{ii}^S}{\epsilon_{00}}, \quad \epsilon = \frac{h}{R},$$

де $\rho_{00} = \rho$, $c_{00} = c_{33}^E$, $\epsilon_{00} = \epsilon_{33}^S$, $t_h = h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ – нормуючі величини. Надалі знаки без розмірності опускаються.

Введення параметра кривизни ϵ дозволяє в частинному випадку при $\epsilon = 0$ розглядати коливання плоского п'езокерамічного шару. Раніше коливання плоского п'езокерамічного шару досліджувались в [1, 2].

Маємо систему рівнянь електропружності (1), (2) в безрозмірному вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} (\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial x} + \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} D_r = 0; \quad (6)$$

$$D_r = e_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{13} \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} u - \epsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \sigma_{rr} = c_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{2\epsilon}{1+\epsilon x} u + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + (c_{11} + c_{21}) \frac{\epsilon}{1+\epsilon x} u + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7)$$

2. Чисельний метод розв'язання. Для розв'язання початково-крайової задачі (6)(7)(3)(4) будується чисельна схема на основі сіткових апроксимацій і різницевих схем. В інтервалі інтегрування $x \in [-1, 1]$ вводиться розбиття Ω таким чином, що крайні точки розбиття знаходяться на відстані $\Delta_x/2$ від кінців інтервалу:

$$\Omega = \{x_i = (i - n - 0.5)\Delta x; \quad i = 0, 1, \dots, 2n + 1; \quad \Delta x = 1/n\}.$$

Механічні переміщення та електричний потенціал будемо шукати в вузлах розбиття, а механічні напруження і електрична індукція – в

центрах комірок розбиття. Різницева форма рівнянь електропружності (6) записується для внутрішніх точок розбиття і приймає вигляд:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_i} (\sigma_{i+0.5}^{rr} + \sigma_{i-0.5}^{rr} - \sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} - \sigma_{i-0.5}^{\alpha\alpha}) + \frac{1}{\Delta x} (\sigma_{i+0.5}^{rr} - \sigma_{i-0.5}^{rr}),$$

$$\frac{1}{\Delta x} (D_{i+0.5}^r - D_{i-0.5}^r) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_i} (D_{i+0.5}^r + D_{i-0.5}^r) = 0. \quad (8)$$

Матеріальні співвідношення (7) записуємо в центрах ділянок розбиття:

$$\sigma_{i+0.5}^{rr} = \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} \right) u_{i+1} + \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_i + \frac{e_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i);$$

$$\sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} = \left(\frac{c_{13}}{\Delta x} + \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1 + \varepsilon x_{i+0.5})} \right) u_{i+1} + \left(c_{11} \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1 + \varepsilon x_{i+0.5})} - \frac{c_{13}}{\Delta x} \right) u_i + \frac{e_{13}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i);$$

$$D_{i+0.5}^r = \left(\frac{e_{33}}{\Delta x} + e_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} \right) u_{i+1} + \left(e_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{e_{33}}{\Delta x} \right) u_i - \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i). \quad (9)$$

Значення переміщень та електричного потенціалу в позаконтурних точках розбиття виключаються з рівнянь за допомогою різницевої форми граничних умов. Отримуємо наступні вирази:

$$\varphi_0 = -\varphi_1 - 2V_0(t); \quad \varphi_{2n+1} = -\varphi_{2n} + 2V_0(t);$$

$$u_0 = - \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_1 + 2e_{33} \frac{\varphi_1 + V_0(t)}{\Delta x} - Q(t) \right);$$

$$u_{2n+1} = - \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x} \right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_{2n} + 2e_{33} \frac{V_0(t) - \varphi_{2n}}{\Delta x} - Q(t) \right). \quad (10)$$

Розв'язуючи систему рівнянь отримуємо шляхом підстановки в (8) співвідношень (9), (10). Для інтегрування по часу вводимо розбиття ω_t інтервалу часу $t \in [0, T]$ з кроком Δt . Розв'язок шукається за допомогою явної різницевої схеми

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\Delta t^2}, \quad (11)$$

або методом Ньюмарка

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \ddot{u}^k; \quad \dot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \dot{u}^k, \quad (12)$$

де ξ – параметр схеми.

При застосуванні схеми Ньюмарка (12) на кожному кроці по часу всі шукані величини знаходяться одночасно з системи алгебраїчних рівнянь $M \cdot U^{k+1} = F^{k+1}$. При застосуванні явної схеми (11) на $k+1$ -му часовому шарі механічні переміщення u_i^{k+1} знаходяться через значення параметрів електромеханічного стану на попередніх часових шарах, тоді як електричний потенціал знаходиться з системи алгебраїчних рівнянь, що отримується з різницевої форми квазістатичного рівняння для електричної індукції.

Проаналізувавши результати обчислень, можна зробити висновок, що для метода Ньюмарка оптимальним є значення параметра $\xi = 0.5$. Метод Ньюмарка внаслідок абсолютної стійкості дає розв'язок з достатньою точністю при значно більших кроках по часу, ніж явна схема. Розв'язки обома методами співпали з точністю 99% на сітках $n = 31$, $\Delta t = 0.0125$ для явної схеми та $n = 31$, $\Delta t = 0.025$ для методу Ньюмарка.

3. Числовий приклад. Розглянемо задачу про вимушені нестационарні коливання кулі з кераміки PZT-4 [3]

$$c_{11}^E = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{12}^E = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{13}^E = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{33}^E = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad e_{31} = -5,2 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{33} = 15,1 \text{ Кл/м}^2, \\ \epsilon_{33}^S = 562 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м.}$$

з параметром кривизни $\epsilon = 0.1$ при нульових початкових умовах.

Спочатку розглянемо реакцію кулі на навантаження електричним потенціалом, що описується функцією $V(t) = V_0 H(t)$, де $H(t)$ – функція Хевісайда. Представлені результати отримані при $V_0 = 1$. При переході до розмірної задачі отримані результати множаться на фізичне значення V_0 , а потім використовуються вирази (5).

На рис. 1 представлена динаміка зміни радіальних переміщень u різних точок стінки кулі. Бачимо, що коливання серединної поверхні $x = 0$ описуються гладкими кривими з періодом $T_u \approx 43$, а зовнішні поверхні, крім коливань з періодом T_u , здійснюють коливання відносно серединної поверхні з періодом, що залежить від пробігу електропружної хвилі товщини стінки кулі. Період коливань серединної поверхні залежить від параметра кривизни ϵ .

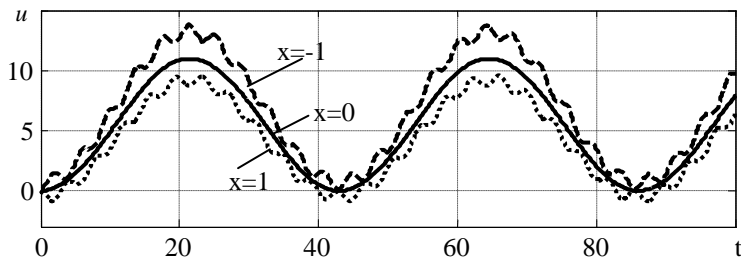


Рис.1. Зміна механічних переміщень в різних точках перерізу при електричному збуренні

Радіальні напруження максимальні на серединній поверхні. Рис. 2 ілюструє зміну радіальних напружень при $x=0$. Механічні напруження виникають в перерізі миттєво відповідно до розподілу електричного потенціалу в момент прикладання навантаження, і досягають значення $\sigma_{\max} = 1.3$. З приходом зв'язаної електропружної хвилі в точку напруження стрибкоподібно змінюються.

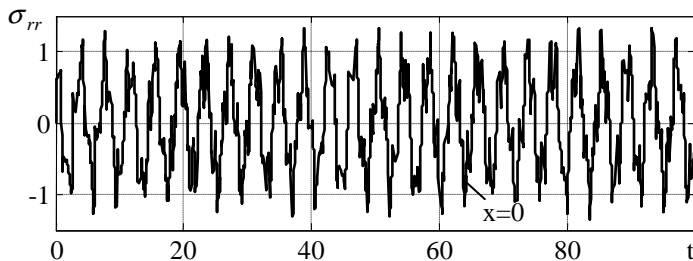


Рис. 2. Зміна механічних напружень σ_{rr} в точці $x=0$ при електричному збуренні

Зміна в часі електричного потенціалу в різних точках перетину кулі ілюструється рис. 3. Електричний потенціал виникає в перерізі миттєво і надалі коливається в околі початкового значення. Найменша амплітуда коливань спостерігається в точці $x=0$.

Проведемо аналіз коливань п'єзокерамічної кулі, що виникають при прикладанні сили $Q(t) = qH(t)$, де $q = 1$. З рис. 4 бачимо, що коливання серединної поверхні кулі при електричному та механічному навантаженні співпадають з точністю до множника. Максимальні відхилення серединної поверхні сягають значення $u_{\max} = 6.6$, що менше за відповідне значення при електричному навантаженні на 66%. Потрібно

відмітити, що на відміну від коливань серединної поверхні амплітуда малих коливань точок зовнішніх поверхонь відносно серединної поверхні при даному навантаженні значно більша, ніж при відповідному електричному навантаженні (рис.1).

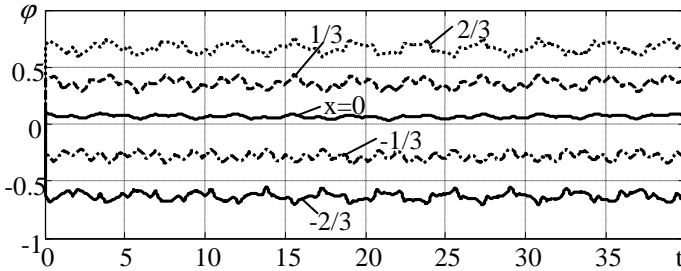


Рис. 3. Електричний потенціал φ в різних точках перетину при електричному збуренні

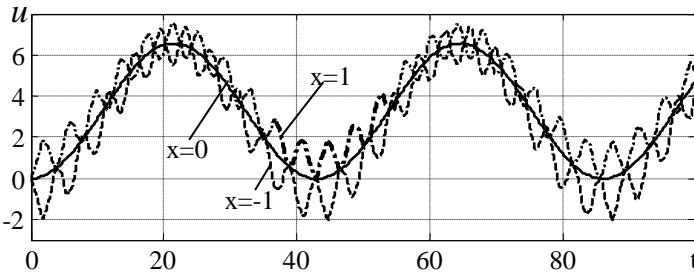


Рис.4. Динамічні криві механічних переміщень в різних точках перерізу при механічному навантаженні

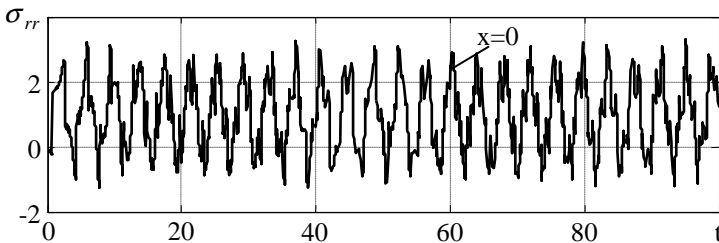


Рис. 5. Залежність від часу механічних напружень σ_{rr} в точці $x = 0$ при механічному навантаженні

При аналізі еволюції в часі радіальних напружень бачимо, що область значень цієї величини змінилася порівняно з електричним навантаженням і досягає значення $\sigma_{\max} = 3.3$. Потрібно відмітити, що при механічному навантаженні механічні напруження в точках стінки в момент прикладання навантаження дорівнюють нулеві і дещо зростають з наростанням розподілу електричного потенціалу в перерізі.

Прослідкувати динаміку зміни електричного потенціалу в різних точках перерізу при механічному навантаженні можна за допомогою рис. 6. Амплітуда коливань значень потенціалу відносно початкового значення помітно перевищує відповідне значення при електричному навантаженні. Максимум електричного потенціалу виникає при $x = 0.5$ і досягає значення $\varphi_{\max} = 0.15$.

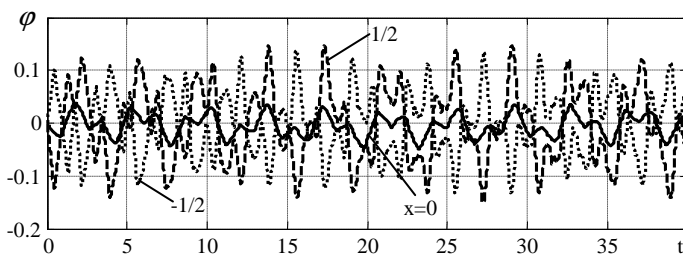


Рис. 6. Зміна в часі електричного потенціалу при різних значеннях x при механічному навантаженні

Таким чином, побудована в роботі чисельна схема дає змогу ефективно розв'язувати динамічні задачі електропружності для п'єзокерамічної кулі. Проведений аналіз закономірностей поширення електропружних нестационарних коливань при електричному та механічному навантаженні дозволяє зробити висновок, що переміщення набувають більших значень при електричному навантаженні, а напруження — при механічному. Подібність кривих переміщень серединної поверхні при різних типах навантаження дає змогу підібрати навантаження таким чином, щоб переміщення серединної поверхні кулі були близькими до нуля.

Викладені результати свідчать про те, що закономірності поширення коливань в електропружних тілах суттєво відрізняються від вивчених в динамічній теорії пружності і не мають аналогів в незв'язаних задачах. Причиною цього є взаємодія полів різної фізичної природи, що проявляється і в математичному описі електропружних задач, і в наведених результатах.

1. *Баженов В. М., Улитко А. Ф.* Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении // Прикл. механика. –1975. – **11**, №1– С. 22–27.
2. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К.: Выща школа, 1989. – 184 с.
3. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990.– 228 с.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П.</i> Вплив температурного навантаження на основний та додатковий ресурс лопатки стаціонарної енергетичної установки	3
<i>Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Пошивач Д.В.</i> Дослідження динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем при комбінованому резонансі	33
<i>Чибіряков В.К., Жупаненко І.В.</i> Про один алгоритм розрахунку віссиметричних коливань круглої пластини	43
<i>Гайдайчук В.В., Киричук О.А., Палій О.М.</i> Динаміка повздовжніх коливань тонкої циліндричної оболонки	51
<i>Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкрить О.О., Мицюк С.В.</i> Алгоритм розв'язання задач про моделювання росту тріщини при визначенні граничного ресурсу	57
<i>Кривенко О.П.</i> Вплив комбінованих граничних умов на стійкість пологих оболонок обертання	84
<i>Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Лук'янченко О.О.</i> Чисельна оптимізація параметрів віброударної системи при моделюванні удару силою контактної взаємодії	91
<i>Цимбал С.Й., Богославець Н.М., Шейхназарі Х.Р.</i> Врахування стану ґрунтів при визначенні напружень в основі фундаментів	100
<i>Шульга Н.Д.</i> Частоти пропускання і граничні просторові форми об'ємних хвиль зсуву в двокомпонентних шаруватих композитах з міжфазними недосконаlostями	104
<i>Распопов О. С.</i> Скінчено-автоматне моделювання вимушених коливань недисипативних стержневих систем	114

Ворона Ю.В., Геращенко О.В.

Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами 119

Іванченко Г.М., Ваціліна О.В., Заєць Ю.О.

Перебудова фронтів розривних хвиль в неоднорідних трансверсально-ізотропних пружних середовищах 135

Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.

Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах лінійних стаціонарних коливань просторових тіл 142

Шульга М. О., Григор'єв С.А.

Радіальні пружноелектричні нестационарні коливання п'єзокерамічної порожнистої кулі 159

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 81

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку __.__.08. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.

Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.

Тираж 100. Зам. № 7-

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

Віддруковано на ЗАТ “ВПОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.