

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

---

Випуск 82

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2008

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*Ю.В. Верюжський*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*Є.О. Гоцуляк*, д-р техн. наук  
*О.І. Гуляр*, д-р техн. наук

*Є.С. Дехтярюк*, д-р техн. наук  
*Г.В. Ісаханов*, д-р техн. наук  
*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*М.О. Шульга*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 17 жовтня 2008 року, протокол № 37.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 82 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2008. – 165 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,  
м. Київ, 03037,  
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

© КНУБА, 2008

УДК 539.3

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук,  
**Пискунов С.О.**, канд. техн. наук,  
**Остапенко Р.М.**  
**Сизевич Б.І.**

## **РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НМСЕ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ**

Отримані розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) для кругового косокутного неоднорідного скінченного елемента з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині його поперечного перерізу та проведена оцінка вірогідності отримуваних із його використанням результатів.

**Вступ.** Умови експлуатації значної кількості відповідальних елементів конструкцій сучасного енергетичного машинобудування – просторових тіл обертання, до яких належать вали, диски і ротори енергетичних установок, фрагменти корпусних деталей, захисні оболонки ядерних реакторів тощо – передбачають наявність тривалого силового і температурного навантаження. Визначення несучої здатності і ресурсу зазначених об'єктів потребує розв'язання просторових задач із визначення параметрів напружено-деформованого стану з урахуванням наявності деформацій пластичності, повзучості та температурних складових деформацій, що викликані великими градієнтами температур, спричиненими довільним їх розподіленням в об'ємі досліджуваного об'єкта. При розв'язанні поставленої задач на основі методу скінчених елементів (МСЕ) та його модифікацій, зважаючи на складність форми досліджуваних об'єктів, виникає необхідність використання дискретних моделей з великою кількістю невідомих. У цьому випадку при покроковому розв'язанні задач пластичності і повзучості загальні обчислювальні витрати можуть бути неприйнятними. Одним зі шляхів скорочення кількості невідомих при побудові дискретних моделей є застосування косокутних скінчених елементів. Розгляд цієї проблеми для призматичних тіл був проведений у роботі [2]. Для тіл обертання це питання є невирішеним.

Метою даної роботи є отримання розв'язувальних співвідношень напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) для тіл обертання з довільними граничними умовами на торцях із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу

скінченного елемента та оцінка вірогідності отримуваних при розв'язанні задач результатів.

**Постановка задачі.** Розглянемо неоднорідне просторове тіло обертання (рис.1). Зовнішні впливи складаються з розподіленого у просторі навантаження  $q = q(z^{i'})$  і температурного поля  $T = T(z^{i'})$ . Фізико-механічні характеристики матеріалу передбачаються залежними від температури  $T$  і просторових координат  $z^{i'}$ :  $E = E(z^{i'}, T)$ ,  $\nu = \nu(z^{i'}, T)$ .

Для опису геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, а також зовнішніх навантажень використовується базисна ортогональна кругова Циліндрична система координат  $z^{i'}$ . Подання напружено-деформованого стану тіла із складною формою поперечного перерізу здійснюється у місцевій криволінійній системі координат  $x^i$ , що безпосередньо пов'язана з геометрією тіла.

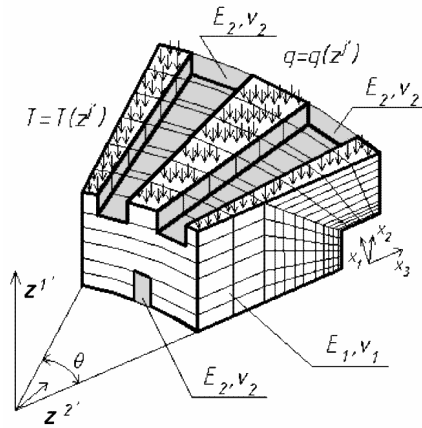


Рис. 1. Неоднорідне кругове тіло

Зв'язок між базисною та місцевою системами координат в будь-якій точці тіла вважається відомим та визначається згідно прямого і зворотного тензорів перетворення координат:

$$z^{i',j'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad x^{i,j'} = \frac{\partial x^i}{\partial z^{j'}}. \quad (1)$$

Враховуючи те, що координатні осі  $x^3$  і  $z^{3'}$  перпендикулярні до площини поперечного перерізу та співпадають, для циліндричної системи координат маємо:

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0. \quad (2)$$

Тут і надалі позначені латинськими літерами індекси приймають значення 1, 2, 3; а грецькими – 1, 2; кома перед індексом засвідчує операцію диференціювання.

В ортогональній циліндричній системі координат відмінні від нуля компоненти метричного тензора, що визначають масштаби базисних векторів, мають вигляд [3]:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = (z^{2'})^2. \quad (3)$$

Коваріантні компоненти метричного тензора в місцевій системі координат визначаються через відповідні компоненти в базисній:

$$g_{ij} = z_{,i}^{\alpha'} z_{,j}^{\alpha'} + z_{,i}^{3'} z_{,j}^{3'} g_{3'3'}. \quad (4)$$

Враховуючи (2) формула (4) набуває вигляду:

$$g_{\beta\gamma} = z_{,\beta}^{\alpha'} z_{,\gamma}^{\alpha'}, \quad g_{33} = z_{,3}^{3'} z_{,3}^{3'} g_{3'3'}. \quad (5)$$

Переміщення будь-якої точки тіла визначається компонентами в базисній системі координат  $u_{i'}$ . Компоненти тензору деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [1]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} - 2u_{k'} z_{,i}^{l'} z_{,j}^{m'} \Gamma_{l'm'}^{k'} \right), \quad (6)$$

де

$$u_{k',i} = \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^i}; \quad (7)$$

$\Gamma_{l'm'}^{k'}$  – символи Крістофеля другого роду, що в ортогональній циліндричній системі координат відмінні від нуля і мають наступний вигляд [3]:

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{z^{2'}}. \quad (8)$$

Враховуючи (8) співвідношення (7) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma,\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma,\alpha} \right), \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left( z_{,3}^{3'} u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma,3} - \frac{2z_{,\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} u_{3'}}{z^{2'}} \right), \\ \varepsilon_{33} &= z_{,3}^{3'} u_{3',3} + \left( z_{,3}^{3'} \right)^2 z^{2'} u_{2'}. \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [3]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (10)$$

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних сталей  $d^{ijkl}$  пов'язані з коефіцієнтами Ляме  $\lambda$  і  $\mu$  співвідношеннями [3]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (11)$$

де коефіцієнти Ляме  $\lambda$  та  $\mu$  визначаються через коефіцієнт Пуассона  $\nu = \nu(z^i, T)$  і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E = E(z^i, T)$  [6]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (12)$$

Фізичні компоненти тензорів деформацій  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ , напружень  $\tilde{\sigma}^{ij}$  та пружних констант  $\tilde{d}^{ijkl}$  визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{kl} &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g^{(ii)}g^{(jj)}}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g^{(ii)}g^{(jj)}}, \\ \tilde{d}^{ijkl} &= d^{ijkl} \sqrt{g^{(ii)}g^{(jj)}g^{(kk)}g^{(ll)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

При термов'язкопружнопластичному деформуванні просторових тіл компоненти прирощення повної деформації  $d\varepsilon_{ij}$  можуть бути подані сумою прирощень пружних деформацій  $d\varepsilon_{ij}^e$ , температурних деформацій  $d\varepsilon_{ij}^T$ , деформацій пластичності  $d\varepsilon_{ij}^p$  та деформацій повзучості  $d\varepsilon_{ij}^c$ , тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c. \quad (14)$$

Передбачається, що пружні деформації є малими.

Прирощення пластичних деформацій визначається згідно з асоційованим законом:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}, \quad (15)$$

де  $f_p$  – функція текучості ;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} / 3$  – компоненти девіатора напружень;  $\sigma_0 = \sigma_{ii}$  :

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\vartheta_p, T)]^2 = 0, \quad (16)$$

де  $\tau_s(\vartheta_p, T)$  – межа текучості при чистому зсуві;  $\vartheta_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p$  – параметр зміцнення Одквіста.

Прирошення деформацій повзучості визначаються на основі теорії зміцнення:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij}, \quad (17)$$

де  $f_c$  – функція, що визначає поверхню повзучості:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i)]^2 = 0, \quad (18)$$

де  $\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i)$  – межа текучості при чистому зсуві;  $\vartheta_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c$  – параметр зміцнення Одквіста;  $\xi_c^i = \frac{\partial \varepsilon_c^i}{\partial t} = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\xi_{ij}^c d\xi_c^i$  – інтенсивність швидкостей деформацій повзучості.

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (19)$$

де  $\alpha_T = \alpha_T(z^{k'}, T)$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу,  $\Delta T = T - T_0$  – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при  $T = T_0$ .

Для опису впливу розсіяних пошкоджень на міцність матеріалу конструкції застосовується функція пошкоженості  $\omega(t)$ , яка змінюється в процесі експлуатації від  $\omega_0 = 0$  (або, в загальному випадку,  $0 < \omega_0 < 1$ , що враховує наявність вихідних технологічних та інших дефектів у матеріалі) до  $\omega = 1$ , що відповідає руйнуванню матеріалу.

При наявності континуального руйнування вираз функції поверхні повзучості (18) набуває вигляду:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i, \omega)]^2 = 0. \quad (20)$$

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості вираз (20) потребує доповнення рівнянням, яке описує зміни з часом параметра пошкоженості. В загальному випадку припускається, що прирощення функції  $\omega(t)$  за малий проміжок часу  $t$  залежить від поточного стану матеріалу (значення параметра пошкоженості) та навантажень (силових, деформаційних і температурних впливів) [4; 5]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \Phi(\omega, p_j), \quad (21)$$

де  $\Phi(\omega, p_j)$  – деяка функція;  $p_j$  – вектор навантажень, що характеризує сили, деформаційні, температурні та інші зовнішні впливи.

**Неоднорідний косокутний круговий скінченний елемент з довільними граничними умовами на торцях.** Для апроксимації просторових тіл обертання використовуються просторові неоднорідні кругові скінченні елементи (рис.2), які повинні забезпечувати не лише точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення. Як показано в роботах [1,8], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [8] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ.

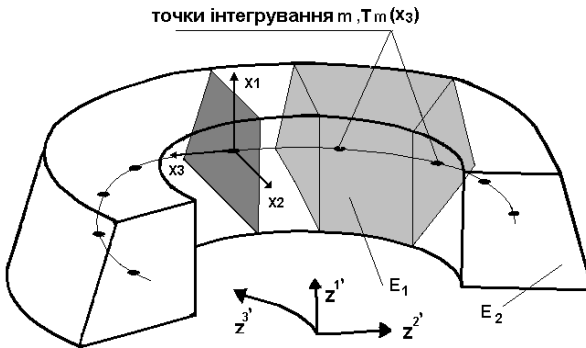


Рис.2. Просторовий неоднорідний круговий скінченний елемент



У місцевій системі координат їх переріз є квадратом з одиничними сторонами. Початок місцевої системи координат  $x^i$  знаходиться у геометричному центрі елемента, вісі  $x^1$  і  $x^2$  спрямовані паралельно сторонам поперечного перерізу, а  $x^3$  суміщена із  $z^3$ .

У відповідність до кожного скінченного елемента (СЕ) поставлена місцева система координат  $x^i$  з початком у геометричному центрі елемента, яка природньо пов'язана з геометрією об'єкта. Осі  $x^1$  і  $x^2$  спрямовані вздовж сторін поперечного перерізу скінченного елемента, а  $x^3$  спрямована вздовж твірної й співпадає за напрямком із  $z^3$ .

Розподілення переміщень і температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (22)$$

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (23)$$

де  $u_{m'(S_1 S_2)}$ ,  $T_{(S_1 S_2)}$  – вузлові значення переміщень і температури, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат  $x^i$ .

Значення переміщень і їх похідних у центрі поперечного перерізу СЕ визначаються згідно з прийнятим законом їх розподілення (22):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_1 S_2; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3} S_\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Виходячи з (23), аналогічним чином визначаються похідні від температури у центрі поперечного перерізу СЕ:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)}; \quad \overset{\circ}{T}\alpha = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_\alpha. \quad (25)$$

У напрямку твірної температура та переміщення, а також їх похідні за напрямком  $x^3$  апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій  $\varphi^{(l)}$  – поліномами Лагранжа ( $l = 0, 1$ ) і Міхліна ( $l = 2, \dots, L$ ):

$$u_{i'} = \sum_{l=0}^L u_{i'}^l \varphi^{(l)}; \quad u_{i',3} = \sum_{l=0}^L u_{i',3}^l \varphi_{,3}^{(l)}; \quad (26)$$

$$T = \sum_{l=0}^L T^l \varphi^{(l)}; \quad T_{,3} = \sum_{l=0}^L T^l \varphi_{,3}^{(l)}; \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1 - x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[ (1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right]. \end{aligned}$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє досить просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, а саме шляхом виключення відповідних рівнянь [2].

Фізичні компоненти тензору температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^T = \frac{\varepsilon_{ij}^T}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (28)$$

Згідно до МССЕ [8] температурні складові компонент тензору фізичних деформацій у поперечному перерізі для кожної точки інтегрування подано у вигляді відрізків ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}^T + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}^T; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^T &= 0; \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}^T + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}^T x^\beta, \end{aligned} \quad (29)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій у ряд Маклорена з урахуванням їх подання у місцевій системі координат на основі (28) та з підстановкою (19):

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \varepsilon_{\alpha(\alpha)}^T = \alpha_T \Delta T; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial (\alpha_T \Delta T)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \alpha_T \Delta T_{,(3-\alpha)}; \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \varepsilon_{12}^T = \alpha_T \Delta T \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}; \\ \tilde{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{1}{g_{33}} \varepsilon_{33}^T = \alpha_T \Delta T; \quad \tilde{\varepsilon}_{33,\alpha}^T = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial (\alpha_T \Delta T)}{\partial x^\alpha} = \alpha_T \Delta T_{,\alpha},\end{aligned}\tag{30}$$

де  $\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}$ ,  $\varepsilon_{ij,\alpha}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0}$ .

Коефіцієнтом розкладання  $\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^T}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$  нехтуємо, як величиною

більш високого порядку малості.

Згідно формули (28), враховуючи (30), знаходимо:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha(\alpha)}^T &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T g_{\alpha(\alpha)} = \alpha_T \Delta T g_{\alpha(\alpha)}; \\ \varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T g_{\alpha(\alpha)} = \alpha_T \Delta T_{,(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)}; \\ \varepsilon_{12}^T &= \tilde{\varepsilon}_{12}^T \sqrt{g_{11} g_{22}} = \alpha_T \Delta T g_{12}; \\ \varepsilon_{33}^T &= \tilde{\varepsilon}_{33}^T g_{33} = \alpha_T \Delta T g_{33}; \\ \varepsilon_{33,\beta}^T &= \tilde{\varepsilon}_{33,\beta}^T g_{33} = \alpha_T \Delta T_{,\beta} g_{33}.\end{aligned}\tag{31}$$

Подамо коефіцієнти розкладання компонент деформацій через вузлові

температури (25):

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_\beta.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладання деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left[ \overset{\circ}{B}^T \right] \{ T \}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] \{ T \}, \tag{33}$$

де  $\{ T \}^T = \{ T_{(-1,-1)} \ T_{(1,-1)} \ T_{(-1,1)} \ T_{(1,1)} \}$ ;

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^T \right\}.$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}^T \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;1)} \right]; \tag{34}$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;1)} \right].$$

Значення компонент підматриць  $\begin{bmatrix} \circ B^T \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)}$  і  $\begin{bmatrix} \circ B^T, \alpha \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)}$  у виразі

(34) для неоднорідних тіл обертання визначаються відповідно до формул (32) з урахуванням обчислених за (3) значеннями компонент метричного тензору для тіл обертання:

$$\begin{bmatrix} \circ B^T \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \circ \alpha_T \circ g_{11} \\ \frac{1}{2} \circ \alpha_T \circ g_{12} \\ \frac{1}{4} \circ \alpha_T \circ g_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \circ \alpha_T \circ g_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \circ B^T, \alpha \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \circ \alpha_T S_{(3-\alpha)} \circ g_{\alpha(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \circ \alpha_T S_{\alpha} \circ g_{33} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Фізичні компоненти тензора напружень подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}. \end{aligned} \quad (36)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання фізичних компонент тензора напружень у ряд Маклорена з урахуванням (13):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \sqrt{g_{11}^{\circ} g_{22}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \quad \tilde{\sigma}^{\alpha 3} = \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; \\ \tilde{\sigma}^{33} &= g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \quad \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} = g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha 3} = \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha 3}; \\ \tilde{\sigma}_{,3-\alpha}^{33} &= g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{33}. \end{aligned} \quad (37)$$

У відповідності до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [8] компоненти тензору повних фізичних деформацій в поперечному перерізі для кожної точки інтегрування подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \tilde{\epsilon}^{\alpha(\alpha)} + \tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\epsilon}_{12} = \tilde{\epsilon}^{12}; \\ \tilde{\epsilon}_{\alpha 3} &= \tilde{\epsilon}^{\alpha 3} + \tilde{\epsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\epsilon}_{33} = \tilde{\epsilon}^{33} + \tilde{\epsilon}_{33, \beta}^{\alpha 3} x^{\beta}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

Представимо коефіцієнти розкладання компонент повних фізичних деформацій у ряд Маклорена, отримані з урахуванням (13) :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \left( \varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \quad (39) \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha 3} / \sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left[ \varepsilon_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha 3} \left( \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}} + \frac{g_{33,(3-\alpha)}}{g_{33}} \right) \right] \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \left( \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right]; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{33} / g_{33})}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{g_{33}} \left( \varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33,\alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \end{aligned}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{h}_{ij,\delta} = \frac{\overset{\circ}{g}_{ij,\delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}, \quad \overset{\circ}{g}_{ij,\delta} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\delta} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

Вирази коефіцієнтів деформацій через переміщення з урахуванням незалежності  $z'_{,3}$  від  $x^\alpha$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= z'_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,\alpha}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} \left( z'_{,1} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,2} + z'_{,2} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,1} \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left( z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',\alpha} + z'_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,3} - \frac{2 z'_{,\alpha} z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3'}}{z'_{,2'}} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',3} + z'^2_{,3} \left( \frac{\overset{\circ}{z}'_{,3}}{z'_{,3}} \right)^2 \overset{\circ}{u}'_{2'},$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = z'_{,\alpha(3-\alpha)} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,\alpha} + z'_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,\alpha(3-\alpha)},$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{2} \left( z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',\alpha(3-\alpha)} + z'_{,\alpha(3-\alpha)} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,3} + z'_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,3(3-\alpha)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2 z'_{,\alpha(3-\alpha)} z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3'}}{z'_{,2'}} - \frac{2 z'_{,\alpha} z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',3(3-\alpha)}}{z'_{,2'}} + \frac{2 z'_{,\alpha} z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3'} z'_{,3(3-\alpha)}}{\left( z'_{,2'} \right)^2} \right),$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',3\alpha} + z'_{,\alpha} \cdot \left( \frac{\overset{\circ}{z}'_{,3}}{z'_{,3}} \right)^2 \overset{\circ}{u}'_{2'} + z'_{,\alpha} \cdot \left( \frac{\overset{\circ}{z}'_{,3}}{z'_{,3}} \right)^2 \overset{\circ}{u}'_{2',\alpha}.$$

$$\text{де } z'^2_{,2'} = z'^2 \Big|_{x^\alpha=0}, \quad z'^i_{,j} = z^i_{,j} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad z'_{,12} = z'_{,12} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad u'^i = u^i \Big|_{x^\alpha=0},$$

$$u'^i_{,\alpha} = u^i_{,\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad u'^i_{,3} = u^i_{,3} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad u'^i_{,\alpha(3-\alpha)} = u^i_{,\alpha(3-\alpha)} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

При заданому законі апроксимації переміщень, коефіцієнти ряду Маклорена обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\beta} + \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma, 3(S_1, S_2)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma}}{\overset{\circ}{z}_{,\beta}} u_{\gamma(S_1, S_2)} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma, 3(S_1, S_2)} + \overset{\circ}{z}_{,\beta} \left( \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} \right)^2 u_{\gamma(S_1, S_2)} \right], \quad (41) \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} \left( \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{(3-\alpha)} + 2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ 2 \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} + \frac{u_{\gamma, 3(S_1, S_2)}}{2} \left( \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{(3-\alpha)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} \right) - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)}}{\overset{\circ}{z}_{,\beta}} \left( \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{(3-\alpha)} + 2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma}}{\overset{\circ}{z}_{,\beta}} S_{(3-\alpha)} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \left[ u_{\gamma, 3(S_1, S_2)} S_{\alpha} + \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma}}{2} u_{\gamma(S_1, S_2)} + \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} \right].
\end{aligned}$$

Враховуючи розклад переміщень у напрямку твірної (26), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень для кругового скінченного елемента:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_{1\pm 1}} \sum_{S_{2\pm 1}} \sum_{l=0}^L \left( \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)}^l S_{\beta} + \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)}^l S_{\alpha} \right) \Phi^l; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_{1\pm 1}} \sum_{S_{2\pm 1}} \sum_{l=0}^L \left[ \left( u_{\gamma(S_1, S_2)}^l S_{\alpha} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}}{\overset{\circ}{z}_{,\beta}} u_{\gamma(S_1, S_2)}^l \right) \cdot \overset{\circ}{z}_{,\beta} \Phi^l + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi_{,\beta}^l \right];
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{l=0}^L z^{\overset{\circ}{3'}} \cdot \overset{\circ}{3'} \left( u_{3'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi_{,3}^l + u_{2'(S_1, S_2)}^l \cdot z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot z^{\overset{\circ}{3'}} \cdot \Phi^l \right); \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} \sum_{l=0}^L \left( 2 z^{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot S_{1, S_2} + z^{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot S_{\alpha} \right) \cdot u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi^l; \quad (42) \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} \sum_{l=0}^L \left[ \left( z^{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z^{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot S_{,12} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi_{,3}^l + \right. \\
&\quad \left. + z^{\overset{\circ}{3'}} \cdot \left( 2 S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{1}{z^{\overset{\circ}{2'}}} \cdot \left( z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot S_{,12} + 2 z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot S_{(3-\alpha)} - \frac{z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot S_{(3-\alpha)}}{z^{\overset{\circ}{2'}}} \right) \right) u_{3'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi^l \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} \sum_{l=0}^L z^{\overset{\circ}{3'}} \cdot \overset{\circ}{3'} \left( z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot S_{\alpha} + z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot S_{,12} \right) u_{2'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi^l + 2 S_{\alpha} u_{3'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi_{,3}^l.
\end{aligned}$$

**Побудова матриці жорсткості для неоднорідного кругового скінченного елемента.** Варіація потенційної енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3 = -1}^1 \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (43)$$

Фізичні компоненти тензорів напружень  $\tilde{\sigma}^{ij}$  і деформацій  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  представимо відрізками ряду Маклорена згідно основних положень МССЕ:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3 = -1}^1 \left[ \left( \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left( \tilde{\varepsilon}^{\alpha(\alpha)} + \tilde{\varepsilon}^{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \tilde{\sigma}^{12} \delta \tilde{\varepsilon}_{12} + \left( \tilde{\sigma}^{\alpha 3} + \tilde{\sigma}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left( \tilde{\varepsilon}^{\alpha 3} + \tilde{\varepsilon}^{\alpha 3, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \tilde{\sigma}^{33} + \tilde{\sigma}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right) \delta \left( \tilde{\varepsilon}^{33} + \tilde{\varepsilon}^{33, \alpha} x^{\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (44)
\end{aligned}$$

Після відповідних перетворень для варіації потенційної енергії  $\delta W$ , отримаємо наступний вираз:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left( \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}^{\alpha 3} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3, (3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}^{33} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33, \alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (45)$$

Представляючи в (45) фізичні компоненти коефіцієнтів розкладу деформацій та напружень згідно (37) і (39) запишемо:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left[ \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} \delta \cdot \left( \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}{}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}^{\alpha 3} \delta \cdot \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3} \left( \overset{\circ}{h}{}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}{}_{33, (3-\alpha)} \right) \right] + \overset{\circ}{\sigma}{}_{,\alpha}^{33} \delta \cdot \left( \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33, \alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33, \alpha} \right) \right] \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (46)$$

Сформуємо наступні вектори коефіцієнтів розкладу деформацій та напружень в ряд Маклорена:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \ 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \ 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \ 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\}; \quad (47)$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \left( \overset{\circ}{h}_{22,1} + \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{12} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{22} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{23} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{13} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{33} \right\}; \quad (48)$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{22}_{,1} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{23}_{,1} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,1} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11}_{,2} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{13}_{,2} \ \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,2} \right\}.$$

Тоді вираз варіації потенційної енергії скінченного елемента може бути поданий у векторній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[ \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (49)$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = \sum_{l=0}^L \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right] \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l;$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} = \sum_{l=0}^L \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right] \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l, \quad (50)$$

де

$$\{ u \}_l^T = \left\{ u_{i(-1,-1)}^l \quad u_{i(1,-1)}^l \quad u_{i(-1,1)}^l \quad u_{i(1,1)}^l \right\};$$

$$\left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(-1,-1)} \quad \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(1,-1)} \quad \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(-1,1)} \quad \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(1,1)} \right];$$

$$\left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1,-1)} \quad \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(1,-1)} \quad \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1,1)} \quad \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(1,1)} \right]. \quad (51)$$

Значення компонент підматриць  $\left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(S_1, S_2)}$ ,  $\left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(S_1, S_2)}$  у виразі

(51) для неоднорідних косокутних кругових елементів визначаються відповідно до формул (35):

$$\left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} & \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}^{2'} \cdot \left( \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} \right) & \frac{1}{2} \left( S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left( S_1 - \frac{\overset{\circ}{z}_{,1}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left( S_2 - \frac{\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}} \right) \end{bmatrix};$$

$$\left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11} & \left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12} & 0 \\ 0 & \left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{33} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\text{де } \left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{1'} - \frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} - \frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22} = \frac{1}{4} \left( \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \left( 2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} S_{\alpha} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} - \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} \cdot \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right);$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{33} = & \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3'} \left( 2S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{1}{z_{,2'}^{\circ 2'}} \left( z_{,12}^{\circ 2'} + 2z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'} \cdot S_{\alpha} - \frac{z_{,1'}^{\circ 2'} \cdot z_{,2}^{\circ 2'}}{z_{,2'}^{\circ 2'}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'}}{z_{,2'}^{\circ 2'}} \right) \cdot \left( \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{23} \\ \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{31} & \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{де } \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{23} = \frac{1}{4} z_{,3}^{\circ 3'} \left( 2S_1 - \overset{\circ}{h}_{33,1} \right);$$

$$\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{31} = \frac{1}{2} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 1'} \cdot S_{\alpha} + \frac{1}{4} z_{,12}^{\circ 1'} - \frac{1}{8} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 1'} \cdot \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right);$$

$$\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{32} = \frac{1}{2} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'} \cdot S_{\alpha} + \frac{1}{4} z_{,12}^{\circ 2'} - \frac{1}{8} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'} \cdot \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right).$$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \left( \delta\{u_l\}^T \left( \left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta\{u_l\}^T \left( \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^T \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \right) \sqrt{g} dx^3 = \\ & = \sum_{l=0}^L \delta\{u_l\}^T \left\{ \overset{\circ}{R} \right\}_l. \end{aligned} \tag{53}$$

де  $\left\{ \overset{\circ}{\bar{R}} \right\}_l$  – вектор вузлових реакцій СЕ:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\bar{R}} \right\}_l &= \left[ \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right] \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} dx^3 + \\ &+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} dx^3 \Bigg] \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \\ &= \left[ \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \end{aligned} \quad (54)$$

Виконавши чисельне інтегрування за напрямком  $x^3$ , отримаємо вираз для обчислення компонент вектору вузлових реакцій СЕ:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\bar{R}} \right\}_l &= \left[ \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_l + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l3} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l\alpha} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l\alpha 3} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \end{aligned} \quad (55)$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (56)$$

де

$$\left[ \overset{\circ}{D} \right] = \left[ \overset{\circ}{d} \begin{matrix} ijkl \end{matrix} \right], \quad \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] = \left[ \left[ \overset{\circ}{d} \begin{matrix} ij(3-\alpha)(3-\alpha) \end{matrix} \right] \left[ \overset{\circ}{d} \begin{matrix} ij33 \end{matrix} \right] \left[ \overset{\circ}{d} \begin{matrix} ij(3-\alpha) \end{matrix} \right] \right]. \quad (57)$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергії деформування СЕ (53) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}, \alpha \right\} \right)^T \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}, \alpha \right\} \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (58)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подано отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left( \delta \{ u \}_l^T \right) [K]_{ln} \{ u \}_n, \quad (59)$$

де  $[K]_{ln}$  – матриця жорсткості неоднорідного косокутного кругового СЕ:

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[ \overset{\circ}{D} \right] \times \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right] \varphi^{(n)} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) + \frac{1}{12} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T \varphi^{(l)} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right] \varphi^{(n)} + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (60) \end{aligned}$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком  $x^3$  з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$[D]_{00}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} H_m;$$

$$[D]_{30}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} H_m;$$

$$[D]_{03}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \varphi_m H_m;$$

$$\begin{aligned}
[D]_{33}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m; \\
[D]_{00\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} H_m; \\
[D]_{30\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} H_m; \\
[D]_{03\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m; \\
[D]_{33\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m.
\end{aligned} \tag{61}$$

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

$$\begin{aligned}
[K]_{ln} &= \left\{ \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T [D]_{00}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right] + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T [D]_{30}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right] + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T [D]_{03}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right] + \right. \\
&+ \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T [D]_{33}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{00\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right] + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \times \right. \\
&\left. \left. \times [D]_{30\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right] + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right] + \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right] \right) \left. \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \tag{62}
\end{aligned}$$

При розв'язанні задач термов'язкопружності для кожної з  $M$  точок інтегрування обчислюються не тільки значення координат  $x^3$ , значення базисних функцій  $(\varphi^l)_m$ , їх похідних  $(\varphi^l_{,3})_m$ , та вагових функцій  $H_m$ , але й величини температур, а також деформації пластичності і повзучості та величини параметра пошкодження матеріалу.

Отримані вирази матриці жорсткості (62) неоднорідного кругового скінченного елемента дозволяють будувати дискретні моделі для неоднорідних тіл обертання складної форми з урахуванням змінності компонент метричного тензора в межах поперечного перерізу СЕ. .



**Розв'язання тестових прикладів.** З метою доведення ефективності використання розроблених розв'язувальних співвідношень НМСЕ для тіл обертання з довільними граничними умовами на торцях із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ, розглянуто тестовий приклад про деформування товстостінного циліндра (рис.3) з внутрішнім радіусом  $a = 2$  мм та зовнішнім  $b = 20$  мм, навантаженого внутрішнім тиском  $680$  кг/см<sup>2</sup>.

При розв'язанні задачі були розглянуті дискретні моделі з 4 (рис.3,а), а також з 12 (рис.3,б) і 36 СЕ вздовж радіуса. У якості еталонного розв'язку використано результат отриманий аналітично [9].

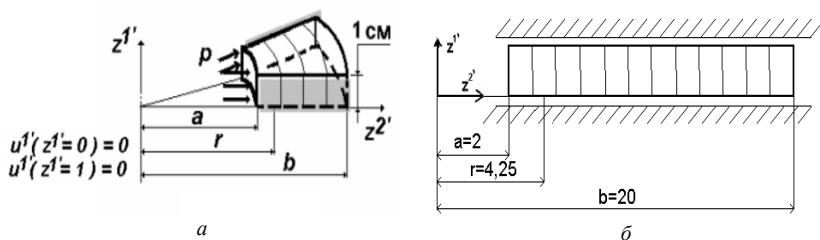


Рис. 3. Дискретна модель НМСЕ з 4 СЕ (а) та поперечний переріз дискретної моделі з 12 СЕ (б).

Результати представлені на рис. 4 у вигляді графіків залежності похибок обчислення радіальних  $\sigma_r$  і колових  $\sigma_\phi$  напружень для точки циліндра при  $r = 4,25$  мм від кількості  $n$  СЕ вздовж радіуса циліндра. Як видно, при обчисленні напружень для дискретної моделі з 4 СЕ на основі фізичних величин компонент тензору деформацій  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  (на графіку – пунктирна лінія) похибка є значно меншою ніж при використанні місцевої ненормованої системи координат для визначення відповідних значень компонент тензору деформацій  $\epsilon_{ij}$  (на графіку – суцільна лінія).

Аналогічне дослідження було проведене для призматичних тіл в [2]. Наведені в цій роботі результати засвідчили, що для призматичних тіл вплив способу обчислення величин деформацій на отримувані результати проявляється лише при використанні косокутної СЕ сітки. На відміну від призматичних тіл, для тіл обертання одержання точних результатів навіть із використанням ортогональної сітки (як в розглянутому вище прикладі) можливе лише при обчисленні фізичних величин компонент деформацій.

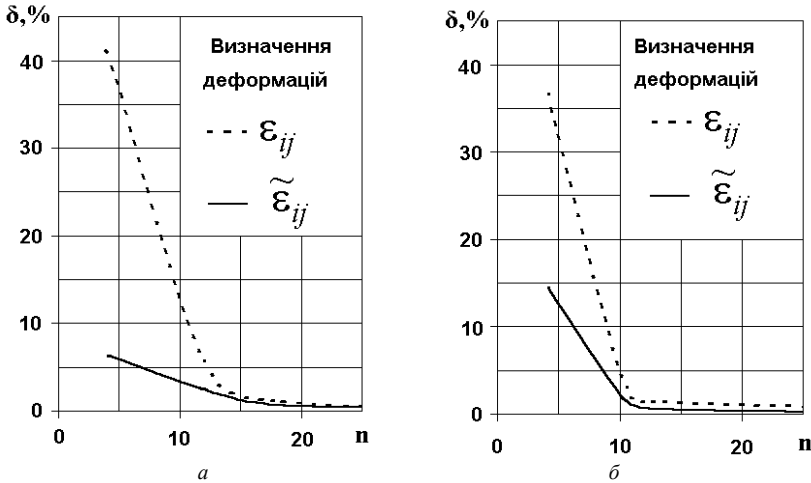


Рис. 4. Порівняння збіжності результатів обчислення радіальних (а) і колових (б) напружень.

Для дослідження ефективності використання розроблених розв'язувальних співвідношень НМСЕ при використанні косокутної скінченноелементної сітки розглянуто тестовий приклад про деформування циліндра висотою 10 мм та діаметром 20 мм під впливом силового навантаження – всебічного стиску.

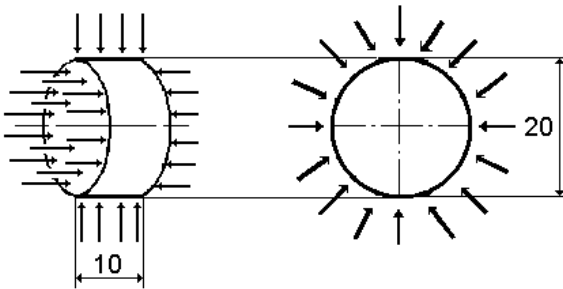


Рис.5. Циліндр під впливом всебічного стиску

Вихідні дані: зовнішнє силове навантаження  $q = 1 \text{ кг/см}^2$ , модуль пружності  $E = 1 \text{ кг/см}^2$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ .

При розв'язанні задачі були розглянуті дискретні моделі з 4 (рис. 6,а), а також з 36 та 484 (рис. 6, б, в) скінчених елементів. У якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий для ортогональної сітки (рис. 6,г).

Результати представлені на у вигляді графіків залежності похибок обчислення радіальних і колових напружень  $\delta_i$  (рис. 7) та осьових і радіальних переміщень (рис. 8) від щільності скінченноелементної сітки ( $n$  – кількість СЕ в площині поперечного перерізу циліндра).

З отриманих результатів видно, що при силовому навантаженні застосування косокутних неоднорідних СЕ у тілах обертання на основі величин фізичних компонент тензору деформацій  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  при визначенні радіальних напружень дає результати в межах 2%). При застосуванні для розв'язання задачі величин  $\epsilon_{ij}$  потребує дискретної моделі, що містить більш ніж на порядок більше невідомих ніж при застосуванні  $\tilde{\epsilon}_{ij}$ .

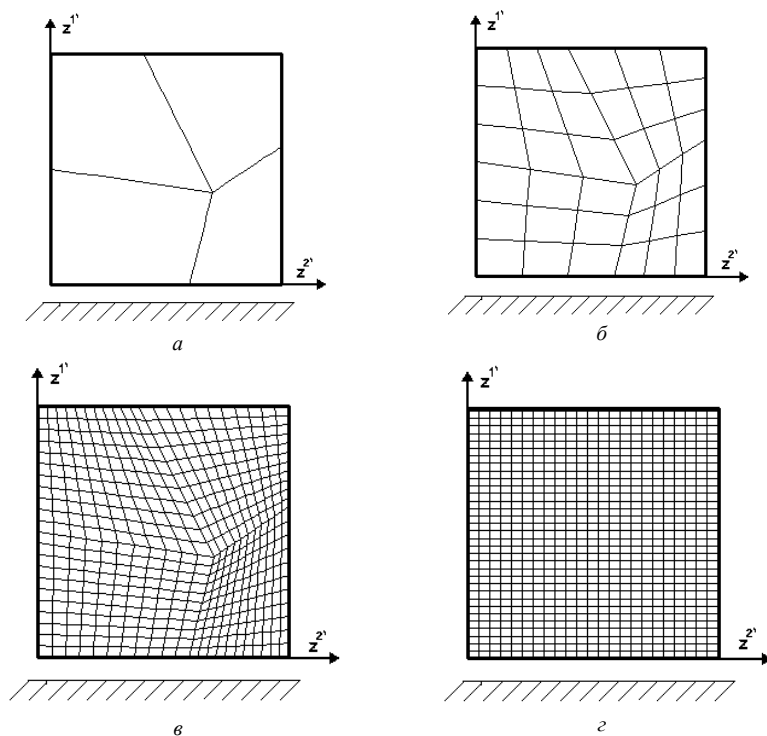


Рис. 6. Поперечні перерізи дискретних моделей з 4 (а) і 36(б) та 484 косокутними (в) та ортогональними СЕ (г)

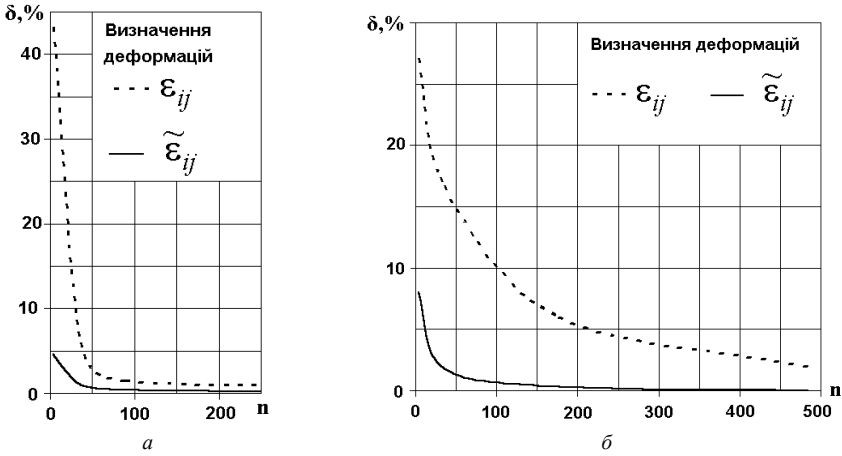


Рис.7 Порівняння збіжності результатів обчислення радіальних (а) і колових (б) напружень

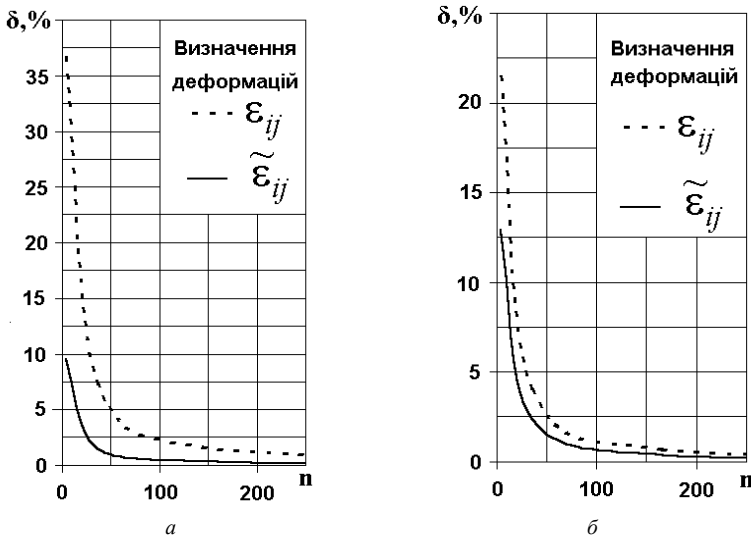


Рис. 8. Порівняння збіжності обчислення радіальних (а) і осьових (б) переміщень

На наступному етапі задачі було розглянуто деформування суцільного циліндра (рис.5) під впливом температурного навантаження: розподіл

температури в напрямку осі обертання від 0 до 100 градусів прийнятий за лінійним законом. При порівнянні результатів використані напруження, взяті в центрі найближчого до початку системи координат СЕ (рис. 6,а). У якості еталонних були прийняті значення, отримані для дискретної моделі з ортогональними СЕ. Результати більш високої точності було отримано на основі величин фізичних компонент тензору деформацій  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  (табл. 1), що засвідчило ефективність використання розроблених розв'язувальних співвідношень НМСЕ при використанні косокутної скінченноелементної сітки також при температурному навантаженні.

Таблиця 1

Порівняння достовірності обчислення радіальних та колових напружень

Спосіб визначення компонент тензора деформацій	Напруження та похибка їх обчислення		Еталонне значення $\sigma$ , кг/см <sup>2</sup>
	$\sigma$ , кг/см <sup>2</sup>	$\delta$ , %	
Радіальні напруження, $\sigma_{22}$			
$\tilde{\epsilon}_{ij}$	0,6272	0,064	0,6268
$\epsilon_{ij}$	0,6391	1,96	
Колові напруження, $\sigma_{33}$			
$\tilde{\epsilon}_{ij}$	0,7576	0,26	0,7556
$\epsilon_{ij}$	0,7436	1,59	

**Висновки.** У роботі одержані вирази матриці жорсткості та вектора вузлових реакцій неоднорідного кругового СЕ з довільними граничними умовами з урахуванням змінності компонент метричного тензора в поперечному перерізі СЕ. Ефективність застосування такого СЕ для тіл обертання доведена на тестових прикладах. Урахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі СЕ дозволяє отримувати вірогідні результати при значно меншій кількості невідомих дискретної скінченноелементної моделі, що в свою чергу дозволяє зменшити обчислювальні витрати на порядок і більше. На відміну від призматичних тіл, у яких регулярна ортогональна сітка навіть без урахування змінності компонент метричного тензору в площині попереченого перерізу СЕ дозволяє отримати вірогідні значення напружень, для тіл обертання для одержання точних результатів таке врахування є просто необхідним. Використання косокутних скінченних елементів для тіл обертання дозволяє отримувати результати з більш високою точністю, а при температурному навантаженні дозволяє одержувати значення радіальних напружень з похибкою вдвічі меншою, ніж для випадку силового навантаження.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
2. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей Л.Л., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матрица жесткости и вектор узловых реакций скінченного элемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 76. – С.3–26.
3. *Блах В.И.* Теория упругости Харьков: Изд-во Харьк. ун-та. – 1964. –483с.
4. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
5. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. *Пискунов С.О.* Ефективність ітераційних алгоритмів розв'язання задач в'язкопружно-пластичності в межах напіваналітичного методу скінченних елементів. // Науковий вісник Національного технічного університету України „КПІ”. № 46, 2005 г.
7. *Рассказов А.О.* Расчёт многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов // Прикл. механика. –1978. – 14, №8. –с. 51-56.
8. *Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
9. Соппротивление материалов / Под ред. акад. АН УССР *Писаренко Г. С.* – 5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. –

УДК 539.3

Гайдайчук В.В., д-р техн. наук,  
Носенко В.П.

## ДИНАМІКА ВІТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК ПІД ДІСЮ ВІТРОВИХ ТА ІНЕРЦІЙНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

**Вступ.** Згідно сценарію розвитку вітроенергетики в світі до 2020 року, який представлений в документі “Wind Force 12”, розробленому спільно Грінпісом, INFORSE та Європейською асоціацією вітроенергетики, частка вітроенергетики в світовому виробництві електроенергії повинна досягнути 12%. Проведені дослідження показали, що в світі не існує ніяких технічних, економічних і ресурсних обмежень для досягнення цієї мети. До 2020 року є реальна можливість досягнути світового показника встановленої потужності ВЕУ в 1 260 000 МВт. Документ “Wind Force 12” відмічає, що до 2010 року світова вітроенергетична промисловість може вийти на рівень 320 000 МВт встановленої потужності, а європейська – 100 000 МВт. До 2010 року вартість світового вітроенергетичного ринку буде складати 133 млрд. євро, а сума інвестицій досягне 20 млрд. євро.

За останні два роки потужність вітроенергетики зросла в середньому на 30% в рік. Для порівняння, ріст атомної енергетики був менше 1%, в той час як збільшення кількості електроенергії, отриманої за рахунок спалювання вугілля, не було взагалі. Європа стала центром цієї молоді і високотехнологічної промисловості. 90% світового виробництва середніх і великих ВЕУ зосереджено в Європі. Середня встановлена потужність однієї ВЕУ зросла на 150 кВт і досягнула показника в 900 кВт.

Україна характеризується досить високими енергетичними потенціалами вітрового потоку в Карпатах, Криму, Причорномор'ї та Приазов'ї, де середньорічні швидкості вітру на висоті 10 м становлять 5 і більше метрів за секунду, що ставить вітрову енергію на перше місце серед відновлюваних джерел для виробництва електричної енергії.

Україна належить до енергодефіцитних країн, так як покриває потреби в енергоспоживанні за рахунок власних енергоресурсів приблизно на 40%, імпортуєчи 75% необхідного обсягу природного газу та 85% сирої нафти і нафтопродуктів. Така структура енергоспоживання породжує монополну залежність економіки України від країн-експортерів нафти й газу і є несприятливою для її енергетичної і національної безпеки.

Вітроенергетика України має достатній досвід виробництва, проектування, будівництва, експлуатації та обслуговування як

вітроенергетичних установок, так і вітроенергетичних станцій; в країні є достатньо високий науково-технічний потенціал і розвинена виробнича база. Останнім часом розвитку вітроенергетичного сектора сприяє державна підтримка, що забезпечує реалізацію ініціатив по вдосконаленню законодавства, структури керування, створенню зручних умов для внутрішніх і зовнішніх інвесторів.

Реалізація державних національних програм в області вітроенергетики на 2010 рік передбачає загальне річне виробництво електроенергії на вітроелектростанціях і автономних вітроустановках близько 5,71 млн. Мвт/год; що дозволить забезпечити близько 2,5 відсотків від загального річного електроспоживання в Україні. Тому проблема створення ефективних і надійних вітроенергетичних установок (ВЕУ) є актуальною.

В той же час слід зазначити, що в процесі експлуатації конструкції ВЕУ піддаються впливу різного роду динамічних навантажень, основними з яких є вітрові навантаження і сили інерції обертального руху лопатей. Їх вплив на колювання конструкції аналізується в [1-4]. Однак, як показано в [5-7], особливі динамічні ефекти в лопатях (і башти ВЕУ) виникають при складному обертанні ротора, коли його вісь під дією вітрового потоку розвертається. Вплив цих ефектів на загальну міцність і динамічну поведінку ВЕУ залишається мало вивченими до цього часу. Враховуючи порівняно високу частоту виникнення непередбачених поломок ВЕУ, можна зробити висновок, що проблема теоретичного моделювання їх динаміки є актуальною.

**Конструкції ВЕУ.** Вітроелектростанції існують в усьому світі. Вони ідеально підходять для потреб країн, що розвиваються, з їх необхідністю в терміновому введенні в експлуатацію нових потужностей. Вони можуть бути введені в лад і підключені до енергомережі за більш короткий строк і з меншими витратами в порівнянні із введенням більших електростанцій, яким необхідна складна інфраструктура по виробництву й передачі електроенергії. Відомо, що кількість енергії, виробленої за рахунок вітру, залежить від густини повітря, від площі, охопленої лопатіма вітротурбіни, і швидкості вітру. Через те, зимою повітря більш щільніше, вітряна установка виробляє зимою більше енергії, ніж влітку, при однаковій швидкості вітру. На території, розташованій високо над рівнем моря, наприклад, у горах, атмосферний тиск менший і, відповідно, менша густина повітря, але це цілком компенсується підвищеною швидкістю вітру. Висота щогли також може значно вплинути на продуктивність вітроенергетичної установки.

Вітроенергетичні установки представляють собою досить складний виріб. Багато з раніше розроблених зразків виявилися ненадійними, тому на даний час велика увага приділяється питанням теоретичного



моделювання їх міцності. Вітрогенератор складається з великої кількості механізмів, надійність кожного з яких залежить від професіоналізму його розробників та виробників.

Вітроустановки потужністю від 5 до 50000 кіловат і вище включають наступні основні підсистеми й вузли:

ротор або лопаті, які перетворюють енергію вітру в енергію обертання валу;

кабіну або гондолу, у якій зазвичай розташований редуктор (деякі турбіни працюють без редуктора), генератор та інші системи;

башта, яка підтримує ротор і кабінку; електричне та електронне обладнання: так само як і панелі керування, електричні кабелі, обладнання заземлення і обладнання для підключення до мережі, система захисту від блискавки та ін.

Діаметр ротора ВЕУ в міру зростання потужності вітроустановки від 1 до 3000 кВт збільшується від 2 до 100 м, а висота башти – від 8 до 100 м. Для вітроустановки потужністю вище 150 кВт діаметр ротора і висота вежі приблизно рівні.

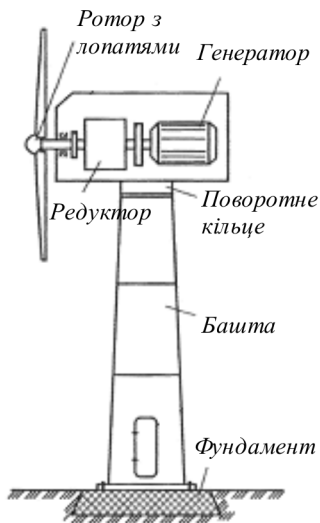


Рис. 1. ВЕУ з горизонтальною віссю обертання

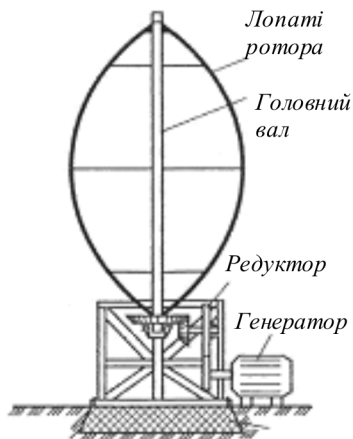


Рис. 2. ВЕУ з вертикальною віссю обертання

Вітротурбіна перетворює кінетичну енергію вітру в електричну за допомогою генератора в процесі обертання ротора. Ротор – це з'єднані разом лопаті. Вони використовуються подібно пропелеру літака для

обертання валу, приєднаного до електричного генератора. За своєю конструкцією генератор вітроенергетичної установки (ВЕУ) нагадує генератори, які використовуються в теплових електростанціях. Винайдено величезну кількість машин для виробництва енергії за рахунок вітру, і багато із них являють собою досить незвичайні конструкції. Зараз існує два основних типи ВЕУ: з горизонтальною віссю обертання (рис. 1) та з вертикальною (рис. 2).

Агрегати з горизонтальною віссю обертання, які мають дві або три лопаті, встановлені на вершині башти, - найпоширеніший тип вітрогенераторів. Розташування провідного валу ротора - частини турбіни, що з'єднує лопать з генератором, - вважається віссю машини. У турбін з горизонтальною віссю обертання провідний вал ротора розташований горизонтально.

У робочому стані відносно напрямку повітряного потоку ротор турбіни може перебувати перед опорою - так званий навітряний ротор або за опорою - підвітряний ротор. Найчастіше турбіни з горизонтальною віссю обертання мають дві або три лопаті, хоча є і моделі з більшим числом лопатей.

Останні являють собою диск з великою кількістю лопатей. Такі установки використовуються в першу чергу як водяні насоси. В турбінах з малою кількістю лопатей площа ротора не є суцільною. Для найбільш ефективної роботи вітрогенератора лопаті повинні максимально взаємодіяти з вітровим потоком, що проходить через площу обертання ротора. ВЕУ з великою кількістю лопатей звичайно працюють при низьких швидкостях обертання, в той час як установки з двома або трьома лопатями повинні обертатися з дуже високою швидкістю, щоб максимально охопити вітрові потоки, що проходять через площу ротора. Теоретично, чим більше лопатей у ротора, тим ефективнішою повинна бути його робота. Вітроенергетичні установки з великою кількістю лопатей менш ефективні за турбіни з двома або трьома лопатями, тому що лопаті створюють перешкоди одна одній.

У турбін з вертикальною віссю обертання (Н-подібні) ведучий вал ротора розташований вертикально (рис. 2). Лопаті такої турбіни - довгі, зазвичай дугоподібні. Вони прикріплені до верхньої і нижньої частин башти. Завдяки вертикальному розташуванню провідного валу ротора Н-подібні турбіни, на відміну від турбін з горизонтальною віссю обертання, "захоплюють" вітер, який дме в будь-якому напрямку, і для цього їм не потрібно змінювати положення ротора при зміні напрямку вітрових потоків. Автором ідей створення турбіни з вертикальною віссю обертання (рис. 2) є французький інженер Дарріус (Darrieus).

Незважаючи на своє зовнішнє розходження, турбіни з вертикальною і горизонтальною осями обертання представляють собою схожі системи. Кінетична енергія вітру, що отримується при взаємодії повітряних потоків з лопатями турбіни, через систему трансмісії передається на електричний генератор. Завдяки трансмісії генератор може працювати ефективно при різних швидкостях вітру. Вироблена електроенергія може використатися напяму, надходячи в електромережу або накопичуватися для більш пізнього використання.

Під час роботи ВЕУ піддаються впливу комбінації навантажень складної природи. Як засвідчує досвід, основними факторами, що впливають на їх працездатність, є динамічні навантаження, які викликані аеродинамічною взаємодією вітрових потоків і рухомих елементів конструкції. Суттєву роль відіграють також відцентрові сили простого обертання ротора та коріолісові сили інерції взаємодії обертального і поворотного руху його елементів. Вони також повинні бути враховані при моделюванні динамічної поведінки системи.

**Моделювання вітрових навантажень.** Основним фактором силового впливу на елементи конструкції ВЕУ є аеродинамічна взаємодія повітряного потоку і лопаті, що представляє собою джерело генерування електричної енергії. Сили цієї взаємодії розраховуються методом теорії крила [2]. На елемент лопаті довжиною  $dr$  і шириною  $b$  елементарна сила  $dP$  визначається за формулою

$$dP = C_y b dr \rho \frac{W^2}{2}, \quad (1)$$

де:  $C_y$  - коефіцієнт підйомної сили крила (лопаті);  $\rho$  - масова густина повітря;  $W$  - відносна швидкість повітряного потоку, який діє на елемент лопаті;  $r$  - відстань елемента лопаті від осі обертання вітроколеса.

Відносна швидкість повітряного потоку

$$W = \sqrt{\omega^2 r^2 + V^2},$$

де:  $\omega r$  - колова швидкість елемента лопаті;  $V$  - швидкість вітру.

Відповідно

$$dP = C_y b dr \frac{\rho}{2} (\omega^2 r^2 + V^2). \quad (2)$$

Вважаючи  $C_y b$  сталими по довжині крила та інтегруючи, отримаємо повне навантаження на крило:

$$P = C_y b \frac{\rho}{2} \int_{r_0}^R (\omega^2 r^2 + V^2) dr = C_y b \frac{\rho}{2} \left[ \frac{\omega^2}{3} (R^3 - r_0^3) + V^2 (R - r_0) \right]. \quad (3)$$

Виносимо за дужку  $(R - r_0)$ , отримаємо

$$P = C_y b \frac{\rho}{2} (R - r_0) \left[ \omega^2 \frac{R^2 + R r_0 + r_0^2}{3} + V^2 \right]. \quad (4)$$

Вводимо позначення:

$$\begin{aligned} b(R - r_0) &= S \text{ - площа лопаті (крила);} \\ \frac{R^2 + R r_0 + r_0^2}{3} &= r_m^2 \text{ - умовний радіус крила.} \end{aligned} \quad (5)$$

Підставляючи  $S$  і  $r_m$  у рівняння (4), отримаємо повне навантаження на крило

$$P = C_y S \frac{\rho}{2} (\omega^2 r_m^2 + V^2). \quad (6)$$

В моменти поривів вітру з великими швидкостями, до яких вітроколесо не відразу може пристосуватися, крила можуть бути перевантажені. Відношення можливого максимального навантаження крила  $P_{\max}$ , що виникає при поривах вітру, до робочого навантаження при розрахунковій швидкості вітру  $P_p$  називається коефіцієнтом перевантаження.

$$n = P_{\max} / P_p. \quad (7)$$

Позначимо швидкість вітру при пориві через  $V_n$  і запишемо рівняння навантаження на крило при  $V$  і  $V_n$

$$P = C_y S \frac{\rho}{2} (\omega^2 r_m^2 + V^2), \quad (8)$$

$$P = C_{yn} S \frac{\rho}{2} (\omega^2 r_m^2 + V_n^2), \quad (9)$$

де  $C_{yn}$  - коефіцієнт підйомної сили при пориві вітру.

Під час повороту гондоли навколо осі башти  $z' - z'$  на крилах вітрового колеса, що обертається, виникають, крім аеродинамічних сил,

відцентрові сили і гіроскопічні сили. Взявши точку  $A$  з масою  $m$  на лопаті, запишемо вирази цих сил:

$Q = m\omega^2 r$  - відцентрова сила, що виникає внаслідок обертання вітроколеса навколо своєї осі;

$Q_1 = m\omega_1^2 l$  - відцентрова сила, що виникає при повороті гондоли навколо осі  $z' - z'$ . Сила від поворотного прискорення Кориоліса

$$P = 2m\omega_1 U \sin \beta_1,$$

де  $l$  - відстань точки  $A$  від осі  $z' - z'$ . Сила  $Q_1$  напрямлена від осі  $z' - z'$  паралельно  $l$ ;  $U = \omega r$  - відносна швидкість, в даному випадку рівна коловій швидкості обертання точки  $A$  навколо осі  $X - X$ . Напрямок сили  $P$  перпендикулярний відносній швидкості  $U$  і осі обертання всієї системи  $z' - z'$ . Кут  $\beta_1$  - кут між швидкістю  $U$  і віссю  $z' - z'$ . Ці сили діють вздовж осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  і викликають моменти  $M_x$ ,  $M_y$  і  $M_z$ .

Повний момент у тупилки, дорівнює [2]

$$M_z = 2I\omega\omega_1 \sin \omega t,$$

де  $I$  - момент інерції крила відносно осі  $OX$ .

Розрахунковий момент (максимальний), якщо лопать розташована вертикально

$$M_z = 2I\omega\omega_1.$$

Вал згинається гіроскопічним моментом всього вітроколеса. Він знаходиться додаванням моментів від всіх лопатей

$$M_y = I_0\omega\omega_1,$$

де  $I_0$  - момент інерції всього вітрового колеса відносно осі  $OX$ .

Для двохлопатевого вітряка

$$M_y = 2I_0\omega\omega_1.$$

Кутову швидкість  $\omega$  знаходимо за допомогою рівності

$$\omega = \pi n / 30,$$

де  $n$  - число обертів вітряного колеса за хвилину.

Зазначимо, що розрахунок динамічної поведінки ВЕУ під дією розглянутих навантажень повинен проводитися з урахуванням

попереднього напруження їх конструкцій відцентровими силами інерції, які впливають на їх жорсткість.

**Коріолісові сили інерції складного обертання ротора.** Як показано в [5-7], одним з найнебезпечніших видів навантажень, що діють на лопать, є гіроскопічна сила інерції, викликана її складним обертанням. Такий вид навантаження реалізується, коли під дією вітрового потоку, що змінює свій напрямок, вісь ротора повертається, і лопать починає обертатися відносно двох осей одночасно. Тоді на елемент лопаті довжиною  $dr$  діє періодична сила

$$dF = 2r\omega\omega_0 \sin \omega t \gamma dr . \quad (14)$$

Тут  $\gamma$  - погонна густина лопаті,  $r$  - відстань від осі обертання ротора до елемента, що розглядається.

При наближенні частоти  $\omega$  дії періодичної сили (14) до частоти власних коливань лопаті виникають резонансні ефекти. Збуджені ними коливання через втулку лопаті передаються і на башту, тому вони можуть приводити до руйнування не тільки лопатей, але й всієї конструкції.

В підсумку відмітимо, що в роботі проведений аналіз основних факторів, які впливають на динамічну поведінку і міцність вітроенергетичних установок. Тому при розрахунках конструкцій ВЕУ необхідно враховувати їх попереднє напруження силами інерції і гіроскопічну взаємодію обертальних та лінійних видів руху. Можна вважати, що найбільш ефективним для розв'язання цієї задачі є метод скінченних елементів.

1. *Андреанов В.Н.* Быстрицкий Д.Н., Вашкевич К. П., Секторов В. Р. Ветроэлектрические станции. – Москва, ГЭИ, 1960. – 323 с.
2. *Фатеев Е.М.* Ветродвиатели и ветроустановки. – Москва, ОГИЗ, 1948. – 542 с.
3. *Шефтер Я.И.* Рождественский И. В. Ветронасосные и ветроэлектрические агрегаты. – Москва, «КОЛОС», 1967. – 376 с.
4. *Харитонов В. П.* Автономные ветроэлектрические установки. – Москва, ГНУ ВИЭСХ. 2006. – 273 с.
5. *Гуляев В. И., Соловьев И.Л., Худолій С.Н.* Прецессионные колебания двухлопастного ротора с упругим невесомым валом при сложном вращении.//Проблемы прочности. – 2002. – №2. – С. 73 – 81.
6. *Гуляев В. И., Худолій С.Н.* Колебания криволинейных закрученных лопастей при сложном вращении.// Прикладная механика. – 2005. – 41, №4. – С. 126 – 132.
7. *Гайдайчук В. В., Худолій С.Н.* Резонансные колебания упругих лопастей при сложном вращении. // Вібрації в техніці та технологіях. – 2004. – №6(38). – С. 54 – 57.

УДК 539.3

**Баженов В.А.**, д-р техн. наук,**Вабішевич М.О.**,**Гуляр О.І.**, д-р техн. наук,**Солодей І.І.**, канд. техн. наук

## **ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ПРИ ДИНАМІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

**Вступ.** Ефективність розв'язання задач механіки руйнування значною мірою залежить від методик обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). На сьогоднішній день широко застосовуються як прямі, так і енергетичні методи. У відповідності до відомих методик визначення КІН прямим методом, їх значення обчислюються в окремих точках; вздовж деякої лінії, що проходить через вершину тріщини; або усередненням значень в привершинній області. Основний недолік перших двох підходів – необхідність використання біля вершини тріщини достатньо малих скінченних елементів (СЕ) з характерним розміром  $1/200 \dots 1/250$  від довжини тріщини [5, 8, 9]. Останній, третій підхід виявився вельми ефективним в задачах механіки руйнування при статичному навантаженні [1]. Так, привершинна область у вигляді квадрата регулярної структури  $6 \times 6$  СЕ з розмірами елементів рівними  $1/10$  від довжини тріщини дає розв'язок, похибка якого лежить в межах  $2 \pm 3\%$  по відношенню до аналітичних розв'язків [4].

Важливими чинниками при розгляді задач динаміки безумовно виступають інерційні складові внутрішніх зусиль та швидкість деформування твердих тіл. Наявність першого з них потребує додаткового вивчення збіжності отримуваних розв'язків, інший – ставить самостійну задачу вивчення поведінки КІН при різних швидкостях навантаження досліджуваних об'єктів. Динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень (ДКІН) є одним із найбільш важливих параметрів лінійнопружної механіки руйнування не тільки для оцінки розвитку наявних тріщин, але і для визначення часу та області появи нових пошкоджень. За останні роки у науковій літературі все частіше з'являються статті присвячені даній тематиці. Методи, які використовуються для пошуку рішення, можна умовно розділити на чотири групи за способом дискретизації досліджуваних об'єктів у просторі: метод скінченних різностей, метод скінченних елементів, метод граничних елементів та несіткові методи. З точки зору моделювання динамічних процесів у часі слід виділити два основні підходи: прямі

методи інтегрування рівнянь руху за часом та розклад розшукуваного розв'язку на основі скінченного спектру власних форм та частот.

Представлена робота базується на основі метода скінченних елементів, моментної схеми скінченного елемента, схеми Н'юмарка, блокового метода послідовної верхньої релаксації та спеціальної процедури визначення ДКІН, що використовує усереднення значень у привершинній області тріщини. Постановка задачі, розрахункові співвідношення та опис алгоритмів розв'язання ситем рівнянь обговорювались в роботах [2, 3].

**1. Методика визначення ДКІН.** Для опису напружено-деформованого стану (НДС) в околі вершини тріщини застосовується система координат  $y^i$  (рис. 1), пов'язана з фронтом тріщини, таким чином, щоб вісь  $y^1$  співпадала з нормаллю до поверхні тріщини,  $y^2$  орієнтована по нормалі до фронту тріщини, а  $y^3$  була спрямована вздовж дотичної до фронту. Сингулярне поле напружень поблизу вершини тріщини в системі координат  $y^i$  в усіх точках її фронту буде характеризуватися динамічним коефіцієнтом інтенсивності напружень. Конкретизація виразів, що описують взаємозв'язок напружень і переміщень з величиною ДКІН залежить від типу розкриття тріщини [3].

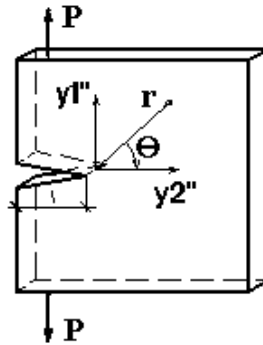


Рис. 1

Для тріщин нормального відриву:

$$\sigma^{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right); \quad K_{I(\sigma)} = \frac{\sigma^{11} \sqrt{2\pi r}}{\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)}, \quad (1)$$

$$u_1 = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}); \quad K_{I(u)} = \frac{u_1 \mu \sqrt{2\pi r}}{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2})}. \quad (2)$$

Привершинна область для обчислення динамічного КІН у тілі з тріщиною апроксимується масивом  $6 \times 6$  скінченних елементів регулярної, по можливості, структури (рис. 2). Вважається, що оптимальні розміри СЕ залежать від швидкості та природи навантаження. Так для задачі статичної, як відмічалось вище, цей показник  $k \sim 1/10$  від довжини тріщини при силовому навантаженні, для задачі з термосиловим навантаженням в роботі [6] оптимальним співвідношенням є  $k \sim 1/20$ .



Враховуючи вимоги методики, що пов'язані з наявністю сингулярності при обчисленні КІН з розгляду виключаються вузли та елементи, найближчі до вершини тріщини (рис. 2).

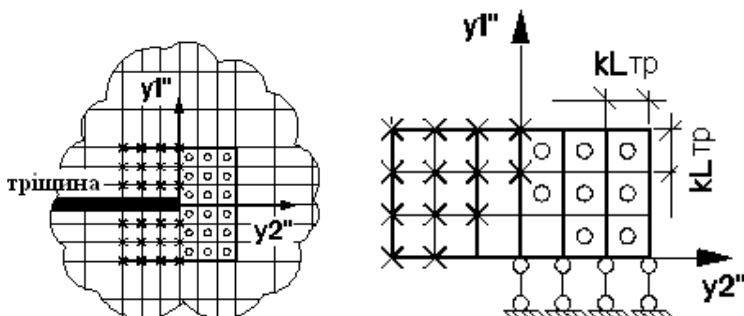


Рис. 2

$$K_I = 0.5(K_{I(\sigma)} + K_{I(u)}). \quad (3)$$

Точки, в яких ДКІН обчислюються за напруженнями позначені колами, за переміщеннями – хрестиками.

**2. Дослідження методики.** Оскільки у привершинній зоні розміри скінченних елементів, як правило, значно менші, ніж в іншій частині сіткової області, загальне число невідомих суттєво залежить від їх кількості на ділянці згущення. В даній роботі проведено дослідження збіжності розв'язків для металеві пластина з центральною тріщиною при варіюванні розмірів СЕ привершинної області в умовах миттєво прикладеного імпульсного навантаження.

Рис. 3, а відображає схему проведення чисельних дослідів при варіюванні параметра  $k$  у частині зони, що межує з поверхнею тріщини та відповідає раніше наведеній методиці обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень. На основі отриманих розв'язків побудовано графік зміни похибки обчислення КІН прямим методом для задачі динаміки (рис.3, б), який уточнює оптимальний показник розміру сторони СЕ  $k = 1/15 \dots 1/20$  порівняно із варіантом статичного навантаження.

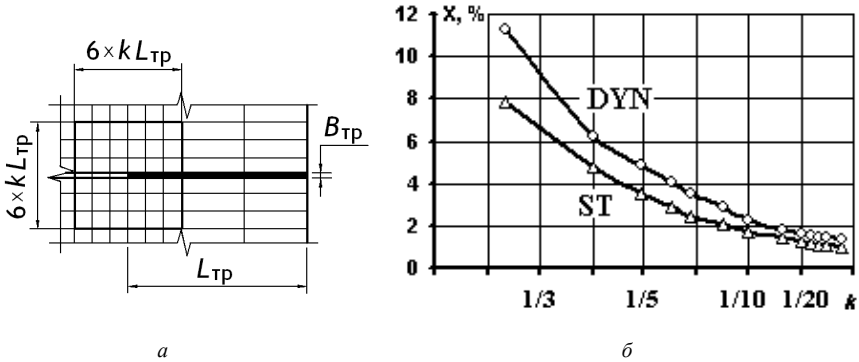


Рис. 3

Одним з ключових питань при розгляді дії силових імпульсів є вплив зміни швидкості навантаження на НДС конструкції, а отже, і на параметри механіки руйнування. Для металевої пластини з центральною тріщиною, що перебуває під дією імпульсного навантаження, проведено дослідження зміни значень динамічного КІН в залежності від швидкості приросту граничного розтягуючого тиску (рис. 4). Отримано значення коефіцієнта інтенсивності напружень для різних показників  $t_0$ . Для побудови графіка використано величину  $\lg(P_0/t_0)$ , що характеризує ступінь куту нахилу прямої АВ.

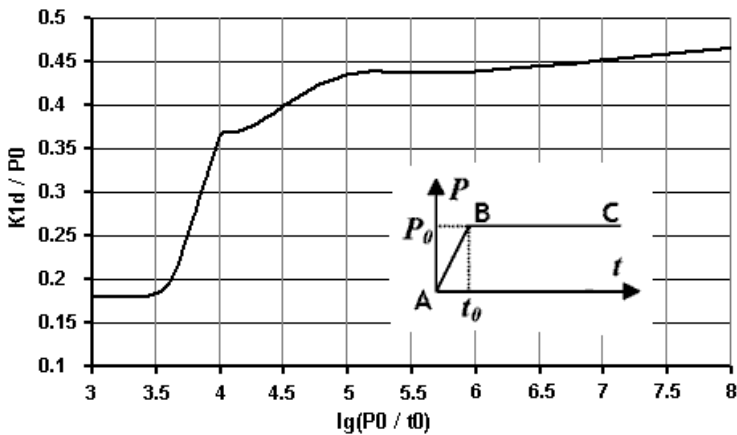


Рис. 4

Встановлено, що при характерному часі приросту навантаження  $t_0 \sim 10^{-2} \div 10^{-3.5}$  сек значення КІН практично співпадають із статичними (рис.4), починаючи з  $t_0 \sim 10^{-3.5}$  сек динамічний КІН різко зростає і стабілізується при  $t_0 \sim 10^{-5}$  сек. Подальше збільшення швидкості приросту імпульсу включаючи випадок миттєвого удару  $t_0 = 0$  сек не призводить до суттєвого збільшення значень КІН. При цьому величина динамічного КІН приблизно в 2.5-2.6 разів вища за статичний.

**3. Контрольні приклади.** Для дослідження вірогідності та ефективності застосування наведеної методики при обчисленні параметрів механіки руйнування в задачах динаміки проведено розрахунок пластини з центральною тріщиною, що знаходиться під дією змінного у часі рівнорозподіленого розтягуючого тиску.

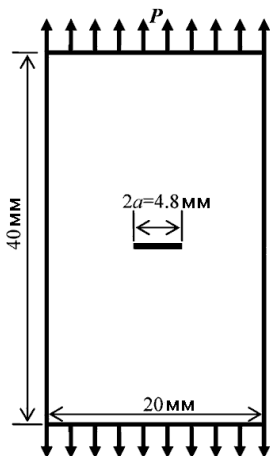


Рис. 5

Геометричні, граничні параметри та умови навантаження представлені на рис. 5. Фізико-механічні властивості ізотропного матеріалу приймалися: модуль Юнга  $E = 2 \times 10^{11}$  Па, коефіцієнт Пуасона  $\nu = 0.3$ , щільність  $\rho = 5 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Розглянуто два характерні випадки силового динамічного навантаження: миттєво прикладений імпульс тиску, який зберігається на всьому часовому інтервалі дослідження (рис.7), та у вигляді функції, що має профіль трикутника (рис. 9). Всі отримані нижче динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень представлені у вигляді нормалізованих значень по відношенню до параметра  $P_0(\pi a)^{1/2}$ , де  $P_0$  – максимальне значення тиску,  $a$  – половина довжини тріщини. Оскільки представлена модель має дві площини симетрії, розглядалась одна чверть пластини з відповідними закріпленнями на всіх симетрії. Вузли скінченноелементної моделі, що належать поверхні тріщини – відкріплені в її площині.

На попередньому етапі розрахунку отримано КІН для статичного варіанта навантаження, нормалізоване значення якого  $K_{1s} = 1.0376$ , що підтверджується даними роботи [4], а саме  $K_{1s} = 1.0382$ .

Результати аналізу еволюції нормованого динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень під дією миттєво прикладеного навантаження представлено на рис.6 в межах часового інтервалу 50 мксек, який охоплює приблизно чотири періоди коливань пластини по основній власній частоті. Можна помітити, що глобальний максимум реалізується вже на першому періоді. Для порівняння, рівень статичного КІН означено пунктирною лінією.

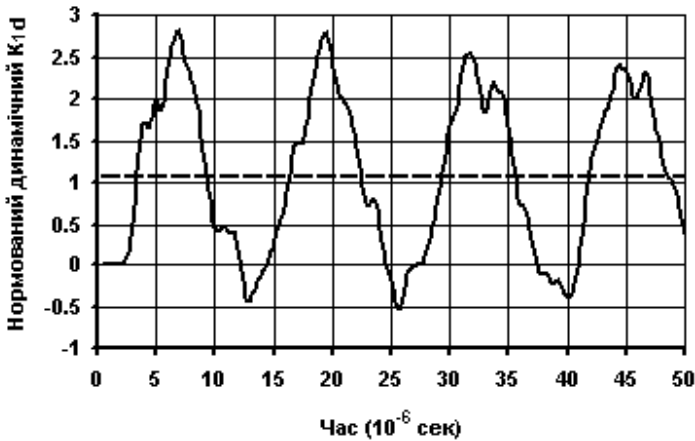


Рис. 6

На рис. 7 подано графік зміни нормованого ДКІН у часовому масштабі 14 мксек.

Кружками представлено розв'язок, що отриманий в роботі [12] на основі методу граничних елементів. Помітна добра збіжність представлених кривих не тільки за амплітудою  $K_{1d}$  (менше ніж  $2\% \div 3\%$  за максимальним значенням) але і за періодом коливань.

Інші дослідники даної моделі [10, 11] також відмічають появу локального максимуму, який відповідає часовій координаті  $t = 4$  мксек, на відміну від [12]. Як відомо, прямі методи інтегрування рівнянь руху за часом автоматично включають весь спектр власних форм і частот моделі до розв'язку задачі. Результати, що базуються на обмеженому спектрі частот або враховують ефект демфірування будуть призводити до більш гладких розв'язків. Слід відзначити, що відмінність статичного та динамічного коефіцієнтів інтенсивності напружень складає приблизно 2.6 рази.

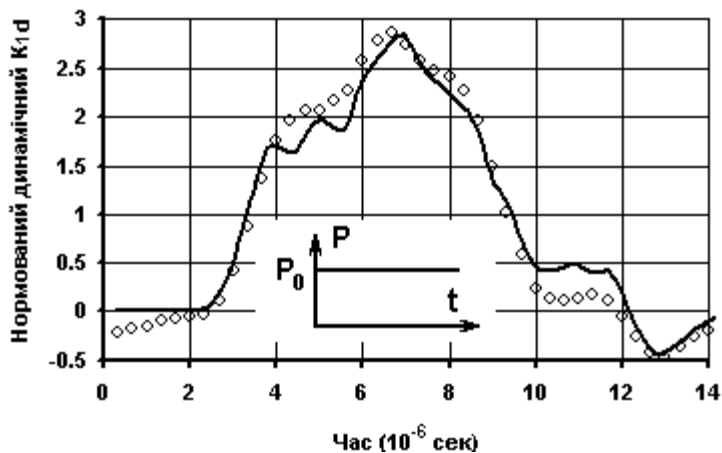


Рис. 7

Аналогічні дослідження проведено для варіанту навантаження у вигляді функції імпульсу тиску, що має профіль трикутника (рис. 9) з параметрами:  $t_a = 2$  мксек,  $t_b = 8$  мксек. Характерною відмінністю двох типів навантаження є реалізація коливань навколо статичного КІН, у першому випадку (рис. 6), та коливання навколо нуля після зняття навантаження у другому (рис. 8).

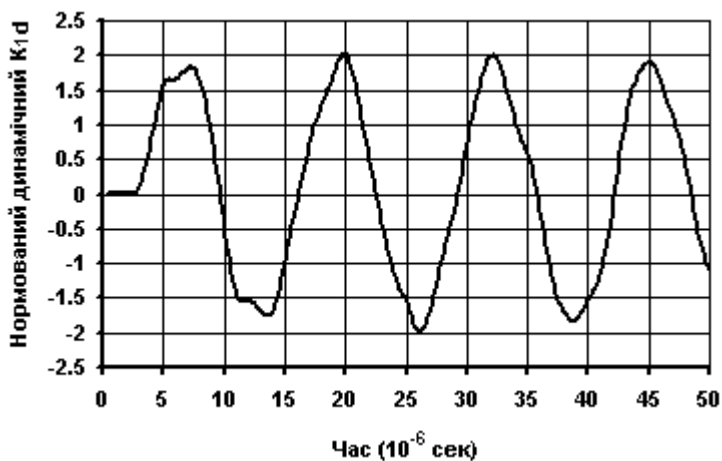


Рис. 8

Помітне зменшення максимальних значень амплітуди коливань нормованого динамічного КІН від  $K_{1d} = 2.8$  до  $K_{1d} = 2.0$ , що становить приблизно 30%. Треба зауважити, що імпульс у вигляді миттєво прикладеного тиску (рис. 7) з точки зору забезпечення коефіцієнта надійності представляє собою найбільш консервативну модель реальних процесів навантаження. Тому при розв'язанні практичних задач природньо проводити дослідження та давати оцінку зовнішнім впливам для отримання більш точних розв'язків, як це, наприклад, зроблено в роботі [7].

Проведено порівняння рішення, що отримане в роботі [12] (кружки) та на основі представленої методики (суцільна лінія) на перших 15 мксек коливань. Відмінність результатів не перевищує 1% в області максимальних значень  $K_{1d}$  та 3% в областях розвантаження.

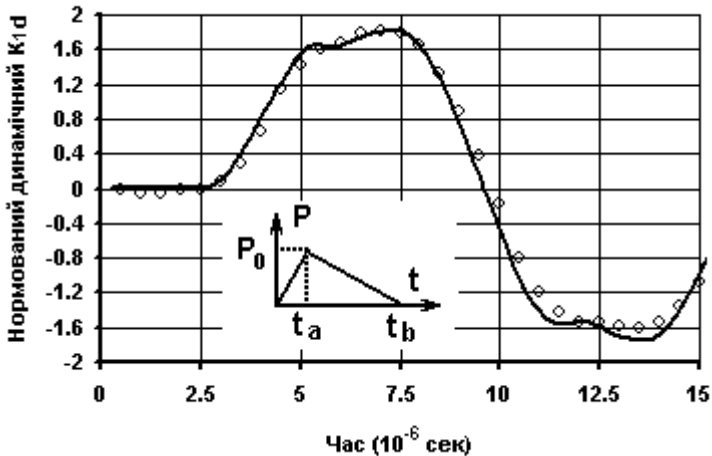


Рис. 9

**Висновки.** Таким чином, на основі проведених досліджень дана оцінка вірогідності та ефективності запропонованої методики визначення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (ДКІН) прямим методом при дії силових імпульсів, з різними швидкостями приросту навантаження.

Визначено оптимальні показники сіткової привершинної області тріщини для обчислення КІН в задачах динаміки. Побудовані графіки залежності КІН від швидкості приросту навантаження.

Отримані графіки еволюції нормованого динамічного КІН при дії імпульсів тиску (від поступового до миттєвого) показали високу збіжність ( $2\div 3\%$ ) з тестовими прикладами при однакових параметрах сіткових областей.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Вабіщевич М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Дослідження вимушених коливань просторових неоднорідних призматичних тіл з тріщинами // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць / Ін-т геотехнічної механіки ім. М.С.Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип.71.-с.170-177.
3. *Вабіщевич М.О., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень призматичних тіл з тріщинами при дії динамічного навантаження // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.78, 2006.-с.61-76.
4. *Ито Ю., Мураками Ю., Хасебэ Н. та ін.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: С74 В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ./Под ред. Ю. Мураками. — М.: Мир, 1990. — 448 с, ил.
5. *Морозов Е.М., Никитиков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 256с.
6. *Гречух Н.А., Пискунов С.О., Остапенко Р.М.* Обчислення КІН в просторових тілах обертання при температурному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.80, 2006.-с.38-53.
7. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості реалізації НМСЕ в задачах динамічної взаємодії неоднорідних пружнопластичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.69, 2001. – с.134-146
8. *Asch M., Bercovier M.* A mixed 3D finite element for modeling thick plates // *Comput. Mech.* 1994. -13. - N5. –P.332-342.
9. *Guydish I.I., Fleming I.F.* Optimisation of the finite element mesh for the solution of fracture problems // *Eng. Fract. Mech.* – 1978. –Vol.10. –N1. –P.31-42.
10. *Fedelinski P, Aliabadi MH, Rooke DP.* A single-region time-domain BEM for dynamic crack problems. *Int J Solids Struct* 1995;32:3555–71.
11. *Lin X, Ballmann J.* Re-consideration of Chen’s problem by finite difference method. *Engng Fract Mech* 1993;44(5):735–9.
12. *Z. J. Yang, A. J. Deeks, H. Hao* Transient Dynamic Fracture Analysis Using Scaled Boundary Finite Element Method: a Frequency-Domein Approach // *Engineering Fracture Mechanics* 74, 2007.-pp.669-687.

УДК 539.3

Гоцуляк Є.О., д-р техн.наук,  
Барвінко А.Ю., канд. техн. наук,  
Лук'янченко О.О., канд. техн. наук,  
Костіна О.В., канд. техн. наук,  
Шах В.В.

## ОЦІНКА ВПЛИВУ ПОЧАТКОВИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК РЕЗЕРВУАРІВ НА ЇХ СТІЙКІСТЬ ПРИ ДІЇ БОКОВОГО ТИСКУ

Досліджується нелінійна стійкість резервуарів змінної товщини з початковими недосконаlostями, які моделюються у вигляді першої форми втрати стійкості при дії бокового тиску, та оцінюється вплив величини амплітуди форми недосконаlostей на стійкість оболонок.

Основи розрахунку стійкості оболонок з урахуванням їх початкових недосконаlostей закладені у роботах [1,2,3]. Задачі дослідження впливу недосконаlostей на стійкість оболонок з використанням чисельних і аналітичних підходів розглянуті в статтях [4, 5, 6]. В роботі застосовується чисельна методика, яка представлена у статті [7].

В роботі досліджується поведінка чотирьох резервуарів, які представляють собою циліндричні оболонки зі змінною по висоті товщиною стінок, геометричні характеристики яких наведені в табл. 1. Товщина стінок оболонок змінюється по висоті через кожні 1,49 м, починаючи знизу.

Таблиця 1

Назва резервуара				
	СПП№1	СПП№2	СПП№6А	СПП№6С



ра				
Середній радіус $R_{cp}$ , м	19,966	19,978	19,978	19,963
Висота $H$ , м	17,88	17,88	17,88	17,88
Товщина стінки резервуара $t$ , мм	15,94	15,98	15,14	15,24
	14,54	14,75	13,66	14,22
	14,03	13,83	14,96	13,40
	11,63	11,66	11,93	11,56
	10,36	10,53	10,40	10,43
	9,30	9,33	9,33	9,46
	8,63	9,06	9,80	8,60
	7,36	7,86	9,63	7,70
	7,40	7,7	9,46	7,53
	7,53	7,83	9,66	7,40
	7,90	7,63	9,60	7,46
7,80	7,83	9,60	7,16	

Скінченноелементні моделі оболонок резервуарів формуються за допомогою обчислювального комплексу у циліндричних координатах. Поверхня кожної оболонки моделюється трикутними плоскими елементами із матеріалу – сталь Ст3 з відповідними механічними характеристиками:  $E=2,06 \cdot 10^{11}$  Па,  $\mu=0,3$ ,  $\rho=7800$  кг/м<sup>3</sup>. Бокова поверхня оболонки розбивається на 164 частини по колу і на 24 - по твірній.

Недосконалості задаються у вигляді форми втрати стійкості, яка отримана при розв'язанні лінійної задачі стійкості і характеризує збудження форми серединної поверхні оболонки. На рис. 1. представлена форма втрати стійкості досконалої оболонки СПП №1 в двох проекціях.

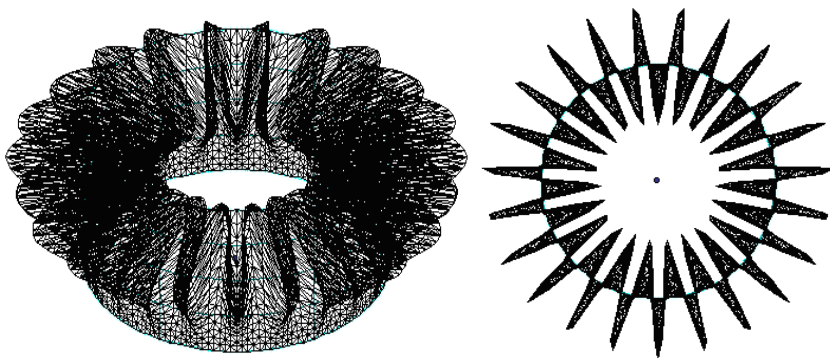


Рис. 1. Форма втрати стійкості досконалої оболонки СПП №1 при дії бокового тиску

Для всіх чотирьох резервуарів без урахування недосконалостей форма втрати стійкості однакова. Критичні значення бокового тиску  $q_{кр}^0$  наведені в табл. 2. Розрахункові моделі недосконалих оболонок резервуарів будуються за допомогою обчислювального комплексу скінченноелементного аналізу та розробленої програми, в якій для формування нових координат вузлів моделей оболонок компоненти вектора форми втрати стійкості додаються до відповідних координат середньої поверхні оболонки. Недосконалості приймаються пропорційними мінімальній товщині стінок оболонок  $t$ :  $\delta/t=0,1$ ;  $\delta/t=0,2$ ;  $\delta/t=0,4$ ;  $\delta/t=1,0$ ;  $\delta/t=1,5$ ;  $\delta/t=2,0$ .

Використовуючи процедуру обчислювального комплексу розв'язання нелінійної задачі статичної, для чотирьох оболонок резервуарів з різними амплітудами початкових недосконалостей визначаються критичні значення поверхневого тиску. Навантаження на оболонку задається у вигляді залежності  $q_{кр}^0 \cdot \beta$ , де  $\beta$  - безрозмірний параметр, що змінюється в інтервалі від 0 до 1. На кожному ступені навантаження за допомогою методу Ньютона-Рафсона знаходяться розв'язки рівняння рівноваги недосконалої оболонки до забезпечення умови збіжності по зміні нев'язки навантаження та по роботі внутрішніх сил на приростах вузлових переміщень. На рис. 2 представлені криві навантаження чотирьох оболонок резервуарів при різних амплітудах їх початкових недосконалостей  $\delta/t$ . По осі абсцис відкладені переміщення  $\Delta$  вузла скінченноелементної моделі оболонки, в якому спостерігаються максимальні значення, по осі ординат - відношення тиску  $q$  до критичного  $q_{кр}^0$ .

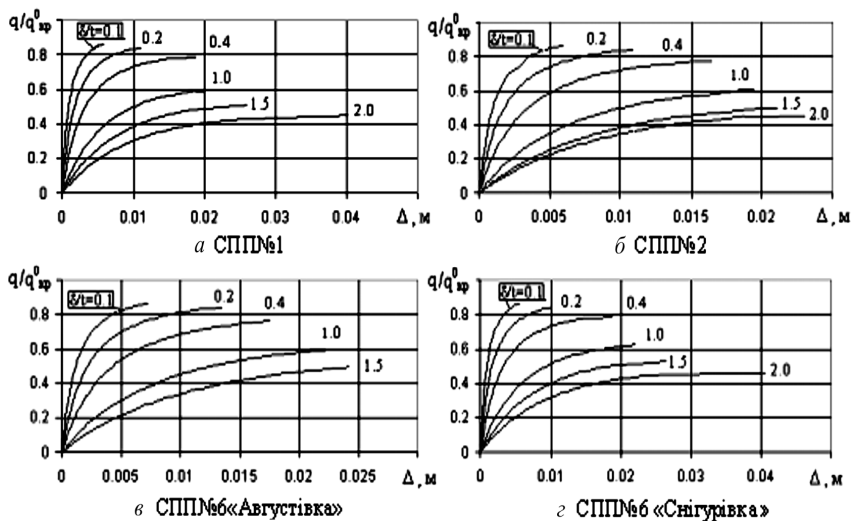


Рис. 2. Вплив початкових недосконалостей на докритичну поведінку циліндричних оболонок

Видно, що із зростанням амплітуд недосконалостей збільшується їх вплив на докритичну поведінку оболонок: збільшуються радіальні переміщення стінок оболонок та зменшується значення бокового тиску при втраті їх стійкості.

На рис. 3 представлені форми деформування циліндричної оболонки СПП №2 від дії критичного бокового тиску при різних значеннях початкових недосконалостей.

Форми деформування інших оболонок мають аналогічний вигляд.

На всіх ступенях навантаження оболонок перевірялось виконання умов забезпечення міцності стінок оболонок: максимальні напруження не перевищували розрахунковий опір сталі  $R_y = 240$  МПа; максимальні радіальні переміщення отримують допустимі значення.

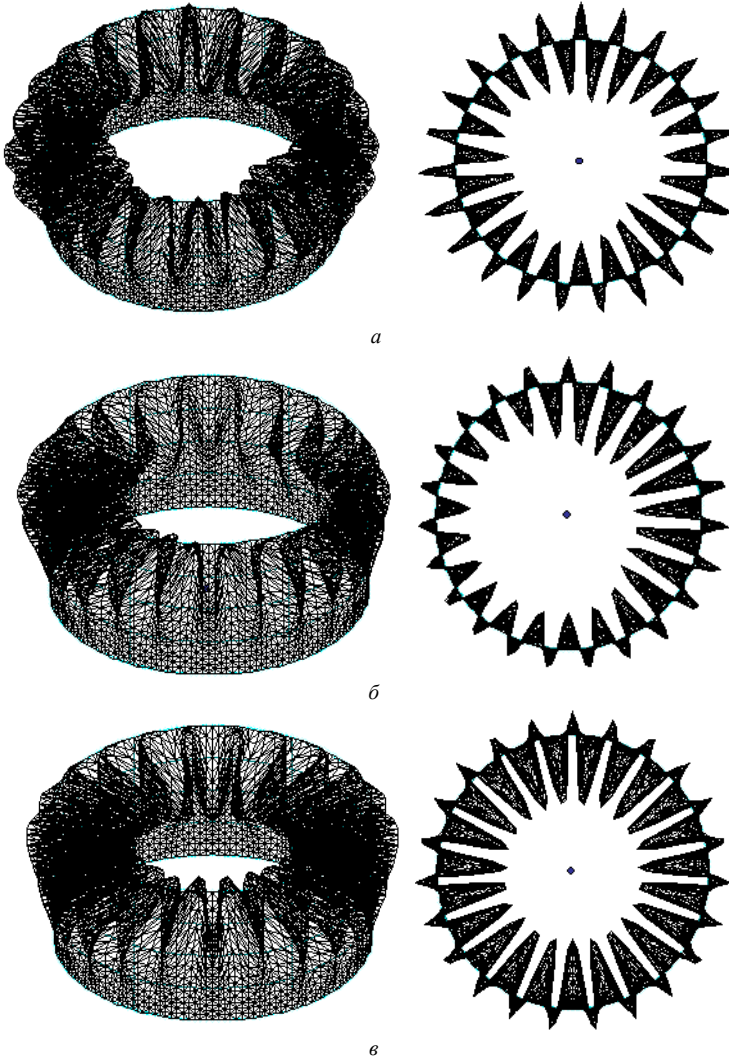


Рис. 3. Форми деформування недосконалої оболонки СПП№2 при дії критичного бокового тиску з амплітудою недосконалості: а)  $\delta/t=0,4$ ; б)  $\delta/t=1,0$ ; в)  $\delta/t=2,0$

В табл. 2 наведені відносні значення критичного бокового тиску  $q_{кр}/q_{кр}^0$ , що отримані в результаті розрахунку, для всіх оболонок з початковими недосконалостями:  $\delta/t=0,1$ ;  $\delta/t=0,2$ ;  $\delta/t=0,4$ ;  $\delta/t=1,0$ ;  $\delta/t=1,5$ ;  $\delta/t=2,0$ .

Таблиця 2

Назва резервуара	Критичний боковий тиск досконалої оболонки $q_{кр}^0$ , кН/м <sup>2</sup>	Відносне значення критичного бокового тиску $q_{кр}/q_{кр}^0$ при різних амплітудах недосконалостей $\delta/t$					
		0.1	0.2	0.4	1.0	1.5	2.0
СПП№1	1218,9	0,872	0,847	0,777	0,601	0,510	0,450
СПП№2	1257,4	0,869	0,844	0,776	0,600	0,497	0,468
СПП№6 «Августівка»	1686,9	0,869	0,844	0,765	0,599	0,494	0,463
СПП№6 «Снігурівка»	1179,6	0,870	0,845	0,788	0,624	0,531	0,461

Видно, що при збільшенні амплітуди недосконалості оболонок  $\delta/t$  відносне значення критичного бокового тиску  $q_{кр}/q_{кр}^0$  зменшується.

На рис. 4 представлені криві навантаження боковим тиском оболонок з однаковими амплітудами недосконалості їх стінок. Поведінка оболонок при однакових амплітудах недосконалостей на різних стадіях навантаження дуже схожа, лише відрізняються значення максимальних радіальних переміщень вузлів моделей оболонок з амплітудою недосконалості  $\delta/t=2,0$  при втраті їх стійкості.

Для визначення областей стійкості недосконалих оболонок при дії бокового тиску побудовані діаграми стійкості, які представлені на рис. 5. Область стійкості лежить між осями координат та кривою залежності відносного критичного бокового тиску  $q_{кр}/q_{кр}^0$  від амплітуди початкової недосконалості оболонки  $\delta/t$ .

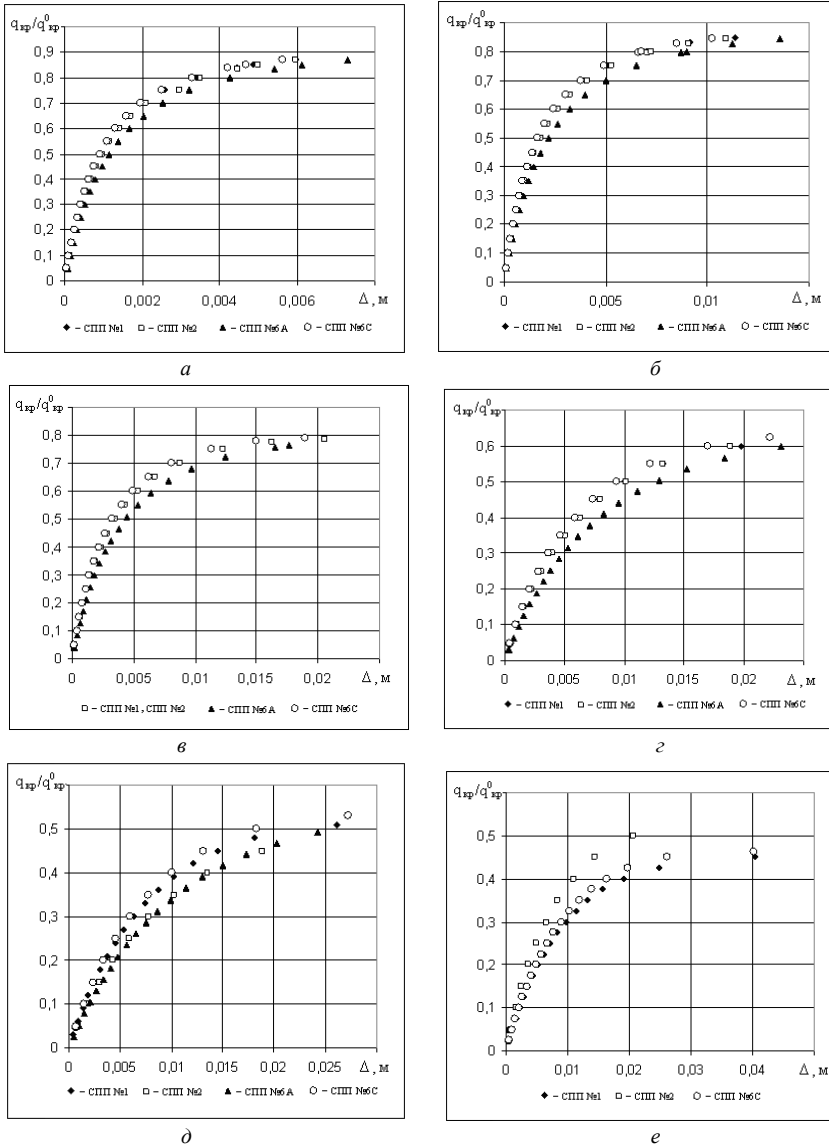


Рис. 4. Порівняння кривих навантаження боковим тиском оболонки резервуарів при однакових амплітудах їх початкових недосконалостей:

а)  $\delta/t = 0.1$ ; б)  $\delta/t = 0.2$ ; в)  $\delta/t = 0.1$ ; г)  $\delta/t = 0.1$ ; д)  $\delta/t = 0.1$ ; е)  $\delta/t = 0.1$

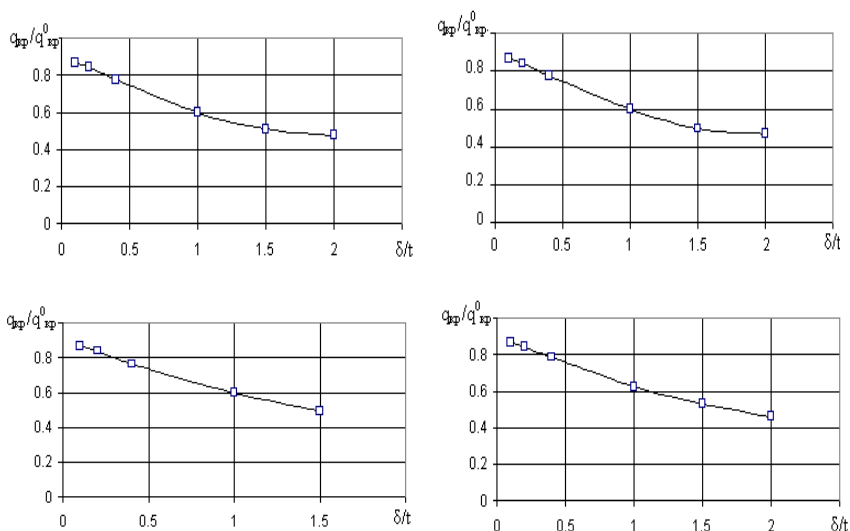


Рис. 5. Діаграми стійкості недосконалих оболонок резервуарів при дії бокового тиску

1. *Арбош И.* Влияние начальных прогибов на устойчивость оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение, 1980. – С.222-259.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
3. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807с.
4. *Є.О.Гоцуляк, А.Ю.Барвінко, В.В.Шах* Стійкість стінок вертикальних сталевих резервуарів, підкріплених ребрами жорсткості // Металлические конструкции. Взгляд в прошлое и будущее. Сборник докладов. Ч.1. Изд-во “Сталь”, 2004 – С. 444-450.
5. *Гавриленко Г.Д.* Численный и аналитический подходы к исследованию несущей способности несовершенных оболочек // Прик. механика. – 2003. – 39, №9. – С.44-62.
6. *Гоцуляк Е.А. Заблоцкий С.В.* К исследованию устойчивости оболочек с несовершенствами // Прик. механика. – 1990. – 26, №4. – С.49-55.
7. *Є.О.Гоцуляк, А.Ю.Барвінко, В.В.Шах, Костіна О.В.* Дослідження стійкості циліндричної оболонки резервуара з урахуванням недосконалостей форми // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2005. – Вип.. 77. – С. 91-96.

УДК 534-21:537.226.86

Шульга М. О., д-р фіз.-мат. наук,  
Григор'єв С.А.**ПРУЖНОЕЛЕКТРИЧНІ КОЛИВАННЯ РАДІАЛЬНО  
ПОЛЯРИЗОВАНОЇ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ КУЛІ З РОЗРІЗНИМИ  
ЕЛЕКТРОДАМИ**

**Вступ.** Порожністі п'єзокерамічні кулі застосовуються як конструктивні елементи пристроїв, що діють на основі ефекту зв'язаності електричного поля та механічних деформацій [2, 3]. В процесі експлуатації п'єзоелектричні перетворювачі зазнають динамічних електричних збурень, що вимагає кількісного дослідження електромеханічного стану тіла при нестационарних режимах роботи.

Дана робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання та аналізу осесиметричних нестационарних коливань порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при електричних динамічних збуреннях. При конкретних розрахунках аналізується випадок розрізного електродного покриття на зовнішніх поверхнях кулі.

**1. Постановка задачі.** Розглядаються осесиметричні коливання порожнистої кулі, меридіанний переріз якої в сферичній системі координат  $r, \alpha, \beta$  займає область  $D = \{R - h \leq r \leq R + h, 0 \leq \alpha \leq \pi\}$ . Оскільки основні електромеханічні характеристики не залежать від координати  $\beta$ , то розв'язок шукається в вигляді функцій  $u_r(r, \alpha, t)$ ,  $u_\alpha(r, \alpha, t)$ ,  $\varphi(r, \alpha, t)$ .

Осесиметричні коливання п'єзокерамічної кулі описуються рівняннями руху [4, 6]

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta} + \sigma_{r\alpha} \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial \alpha}; \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\alpha} + (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta}) \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha},$$

та квазістатичним наближенням рівнянь Максвела

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{r} D_\alpha = 0, \quad (2)$$



які доповнюються матеріальними співвідношеннями при радіальній поляризації

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{13}}{r} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + 2u_r + u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha \right) + e_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\
 \sigma_{\alpha\alpha} &= c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{33}}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + (c_{33} + c_{23}) \frac{u_r}{r} + \frac{c_{23}}{r} u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\
 \sigma_{\beta\beta} &= c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{c_{23}}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + (c_{33} + c_{23}) \frac{u_r}{r} + \frac{c_{33}}{r} u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad (3) \\
 \sigma_{r\alpha} &= 2c_{55} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} \right) + e_{53} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \\
 D_r &= e_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{e_{31}}{r} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + 2u_r + u_\alpha \operatorname{ctg} \alpha \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\
 D_\alpha &= 2e_{53} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r} \right) - \varepsilon_{33} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.
 \end{aligned}$$

Тут  $u_r$ ,  $u_\alpha$  і  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$ ,  $\sigma_{r\alpha}$  – механічні переміщення і напруження,  $D_r$ ,  $D_\alpha$  – компоненти вектора електричної індукції,  $\varphi$  – електричний потенціал,  $c_{11}^E$ ,  $c_{23}^E$ ,  $c_{13}^E$ ,  $c_{33}^E$ ,  $c_{55}^E$  – пружні модулі матеріалу при постійному електричному полі,  $e_{31}$ ,  $e_{11}$ ,  $e_{53}$  – п'єзоелектричні модулі,  $\varepsilon_{11}^S$ ,  $\varepsilon_{33}^S$  – діелектричні проникності при постійній деформації,  $\rho$  – густина матеріалу.

Задача (1)–(3) замикається початковими умовами, що накладаються на переміщення та їх швидкості [7]

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \alpha, t=0) &= f(r, \alpha), \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, \alpha, t=0) = f^1(r, \alpha); \quad (4) \\
 u_\alpha(r, \alpha, t=0) &= g(r, \alpha), \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(r, \alpha, t=0) = g^1(r, \alpha),
 \end{aligned}$$

та граничними умовами, що описують поведінку електричних та механічних величин на границі тіла. Нехай на зовнішніх електродованих поверхнях сфери задано різницю потенціалів ( $\alpha \in [0, \pi]$ )

$$\varphi(r_i, \alpha, t) = \pm V(\alpha, t), \quad (5)$$

де  $i=1,2$ ,  $r_1 = R-h$ ,  $r_2 = R+h$ .

Механічні граничні умови на зовнішніх поверхнях накладаються на переміщення або напруження

$$\begin{aligned} u_r(r_i, \alpha, t) &= y_{r,i}(\alpha, t) \vee \sigma_{rr}(r_i, \alpha, t) = q_{r,i}(\alpha, t); \\ u_\alpha(r_i, \alpha, t) &= y_{\alpha,i}(\alpha, t) \vee \sigma_{r\alpha}(r_i, \alpha, t) = q_{\alpha,i}(\alpha, t). \end{aligned} \quad (6)$$

В силу симетрії в полюсах  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$  виконуються умови

$$\frac{\partial u_r}{\partial \alpha}(r, \alpha_i, t) = 0, \quad u_\alpha(r, \alpha_i, t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(r, \alpha_i, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Перейдемо до безрозмірних величин

$$\begin{aligned} r &= R + x, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{h}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{h} \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00}}}, \quad \varepsilon = \frac{h}{R}, \\ \bar{D}_i &= \frac{D_i}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{00}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\varepsilon_{00}}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}}{\varepsilon_{00}}, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\rho_{00}$ ,  $c_{00}$ ,  $\varepsilon_{00}$ ,  $t_h = h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$  – нормуючі величини,  $\varepsilon$  – параметр кривизни. Надалі знаки безрозмірності опускаються.

Після підстановки (3) в (1), (2) та обезрозмірювання (8) маємо рівняння електропружності відносно переміщень та електричного потенціалу в безрозмірній формі

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= c_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + 2c_{11}\xi \frac{\partial u_r}{\partial x} + 2(c_{13} - c_{33} - c_{23})\xi^2 u_r + 2c_{55}\xi^2 ctg\alpha \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \\ &+ (c_{13} - c_{33} - c_{23} - 2c_{55})\xi^2 \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_\alpha ctg\alpha \right) + (2c_{55} + c_{13})\xi \left( ctg\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x \partial \alpha} \right) + \\ &+ 2c_{55}\xi^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial \alpha^2} + 2(e_{11} - e_{31})\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + e_{53}\xi^2 \left( ctg\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right); \\ \rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= (2c_{55} + c_{13})\xi \frac{\partial^2 u_r}{\partial \alpha \partial x} + (c_{33} + c_{23} + 4c_{55})\xi^2 \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + 2c_{55} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \\ &+ \xi^2 (-4c_{55} + (c_{23} - c_{33})ctg^2\alpha - \frac{c_{23}}{\sin^2\alpha})u_\alpha + 4c_{55}\xi \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \\ &+ c_{33}\xi^2 \left( \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + ctg\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right) + (e_{53} + e_{31})\xi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial x} + 2e_{53}\xi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
& e_{11} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + 2e_{31} \xi^2 u_r + 2(e_{31} + e_{11}) \xi \frac{\partial u_r}{\partial x} + 2e_{53} \xi^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + 2e_{53} \xi^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial \alpha^2} + \\
& + (e_{31} + 2e_{53}) \xi \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + (e_{31} - 2e_{53}) \xi^2 (\operatorname{ctg} \alpha u_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}) + \\
& + (e_{31} + 2e_{53}) \xi \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial r} - 2\varepsilon_{11} \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon_{33} \xi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varepsilon_{33} \xi^2 \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0.
\end{aligned}$$

В співвідношеннях (9)  $\xi = \varepsilon / (1 + \varepsilon x)$ .

**2. Побудова чисельної схеми.** Для знаходження розв'язку поставленої початково-крайової задачі розвинуто чисельний метод розв'язання, що базується на різницевих апроксимаціях та різних методах інтегрування по часу.

Для реалізації методу в області перетину кулі  $D = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$  вводиться розбиття

$$\Omega = \left\{ x_i = (i - 0.5)\Delta x - 1, \alpha_j = (j - 0.5)\Delta \alpha \mid \Delta x = 2/n, \Delta \alpha = 2\pi/m \right\},$$

де  $i = 0, 1, \dots, n+1, j = 0, 1, \dots, m+1$ . Крайні точки розбиття знаходяться на відстані в половину кроку розбиття  $\Delta x$  або  $\Delta \alpha$  відносно відповідної границі області, що дає змогу записати граничні умови з другим порядком точності по просторових координатах. Розв'язок шукається в вигляді набору значень  $u_{i,j}^r = u_r(x_i, \alpha_j, t)$ ,  $u_{i,j}^\alpha = u_\alpha(x_i, \alpha_j, t)$ ,  $\varphi_{i,j} = \varphi(x_i, \alpha_j, t)$ .

Перетворимо диференціальні рівняння в частинних похідних (9) до звичайних диференціальних рівнянь шляхом переходу від похідних по просторових координатах до скінченно-різницевого виразів другого порядку точності [5]. Запишемо рівняння (9) в цілих точках розбиття  $\Omega = \{x_i, \alpha_j\}$  (тут  $\zeta_i = \varepsilon / (1 + \varepsilon x_i)$ ):

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_{i,j}^r}{\partial t^2} &= \frac{c_{11}}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^r - 2u_{i,j}^r + u_{i-1,j}^r) + \frac{c_{11} \zeta_i}{\Delta x} (u_{i+1,j}^r - u_{i-1,j}^r) + \frac{2c_{55} \zeta_i^2}{2\Delta \alpha} \times \\
&\times \operatorname{ctg} \alpha_j (u_{i,j+1}^r - u_{i,j-1}^r) + 2(c_{13} - c_{33} - c_{23}) \zeta_i^2 u_{i,j}^r + \frac{2c_{55} \zeta_i^2}{\Delta \alpha^2} (u_{i,j+1}^r - 2u_{i,j}^r + \\
&+ u_{i,j-1}^r) + \zeta_i^2 (c_{13} - c_{33} - c_{23} - 2c_{55}) \left( \frac{u_{i,j+1}^\alpha - u_{i,j-1}^\alpha}{2\Delta \alpha} + u_{i,j}^\alpha \operatorname{ctg} \alpha_j \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2c_{55} + c_{13}) \zeta_i \left( \operatorname{ctg} \alpha_j \frac{u_{i+1,j}^\alpha - u_{i-1,j}^\alpha}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1,j+1}^\alpha - u_{i+1,j-1}^\alpha - u_{i-1,j+1}^\alpha - u_{i-1,j-1}^\alpha}{4\Delta x \Delta \alpha} \right) + \\
& + \frac{2(e_{11} - e_{31})}{2\Delta x} \zeta_i (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) + \frac{e_{11}}{\Delta x^2} (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) + \\
& + e_{53} \zeta_i^2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha_j}{2\Delta \alpha} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}) + \frac{e_{53} \zeta_i^2}{\Delta \alpha^2} (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}); \\
\rho \frac{\partial^2 u_{i,j}^\alpha}{\partial t^2} = & (2c_{55} + c_{13}) \frac{\zeta_i}{4\Delta x \Delta \alpha} (u_{i+1,j+1}^r - u_{i-1,j+1}^r - u_{i+1,j-1}^r + u_{i-1,j-1}^r) + \\
& + (c_{33} + c_{23} + 4c_{55}) \frac{\zeta_i^2}{2\Delta \alpha} (u_{i,j+1}^r - u_{i,j-1}^r) + \frac{2c_{55}}{\Delta \alpha^2} (u_{i+1,j}^\alpha - 2u_{i,j}^\alpha + u_{i+1,j}^\alpha) + \\
& + \zeta_i^2 (-4c_{55} + (c_{23} - c_{33}) \operatorname{ctg}^2 \alpha_j - \frac{c_{23}}{\sin^2 \alpha_j}) u_{i,j}^\alpha + \frac{4c_{55} \zeta_i}{2\Delta x} (u_{i+1,j}^\alpha - u_{i-1,j}^\alpha) + \\
& + \frac{c_{33} \zeta_i^2}{\Delta \alpha^2} (u_{i,j+1}^\alpha - 2u_{i,j}^\alpha + u_{i,j+1}^\alpha) + \frac{c_{33} \zeta_i^2}{2\Delta \alpha} \operatorname{ctg} \alpha_j (u_{i,j+1}^\alpha - u_{i,j-1}^\alpha) + \quad (10) \\
& + \frac{\zeta_i (e_{53} + e_{31})}{4\Delta x \Delta \alpha} (\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i-1,j-1}) + \frac{e_{53} \zeta_i^2}{\Delta \alpha} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}); \\
& \frac{e_{11}}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^r - 2u_{i,j}^r + u_{i-1,j}^r) + 2e_{31} \zeta_i^2 u_{i,j}^r + (e_{31} + e_{11}) \frac{\zeta_i}{\Delta x} (u_{i+1,j}^r - u_{i-1,j}^r) + \\
& + \frac{e_{53} \zeta_i^2}{\Delta \alpha} \operatorname{ctg} \alpha_j (u_{i,j+1}^r - u_{i,j-1}^r) + \frac{2e_{53} \zeta_i^2}{\Delta \alpha^2} (u_{i,j+1}^r - 2u_{i,j}^r + u_{i,j-1}^r) + (e_{31} + 2e_{53}) \times \\
& \times \frac{\zeta_i \operatorname{ctg} \alpha_j}{2\Delta x} (u_{i+1,j}^\alpha - u_{i-1,j}^\alpha) + (e_{31} - 2e_{53}) \zeta_i^2 (\operatorname{ctg} \alpha_j u_{i,j}^\alpha + \frac{1}{2\Delta \alpha} (u_{i,j+1}^\alpha - u_{i,j-1}^\alpha)) + \\
& + \frac{(e_{31} + 2e_{53}) \zeta_i}{4\Delta x \Delta \alpha} (u_{i+1,j+1}^\alpha - u_{i-1,j+1}^\alpha - u_{i+1,j-1}^\alpha - u_{i-1,j-1}^\alpha) - \frac{\varepsilon_{11} \zeta_i}{\Delta x} (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) - \\
& - \frac{\varepsilon_{33} \zeta_i^2}{\Delta \alpha^2} (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}) - \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta x^2} (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}) - \\
& - \varepsilon_{33} \zeta_i^2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha_j}{2\Delta \alpha} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Значення невідомих в законтурних точках необхідно виключити з системи (10), що робимо за допомогою умов (5)–(7). З (7) випливає, що при  $i = 0, 1, \dots, n + 1$

$$\begin{aligned} u_{i,0}^r &= u_{i,1}^r; & u_{i,0}^\alpha &= -u_{i,1}^\alpha; & \varphi_{i,0} &= \varphi_{i,1}; \\ u_{i,m+1}^r &= u_{i,m}^r; & u_{i,m+1}^\alpha &= -u_{i,m}^\alpha; & \varphi_{i,m+1} &= \varphi_{i,m}. \end{aligned} \quad (11)$$

Значення електричного потенціалу в законтурних точках відносно сферичних поверхонь  $x = \pm 1$  легко визначаються з (5):

$$\varphi_{0,j} = -\varphi_{1,j} - 2V(t); \quad \varphi_{m+1,j} = -\varphi_{m,j} + 2V(t), \quad j = 0, 1, \dots, m + 1. \quad (12)$$

Значення переміщень  $u_{i,j}^r$ ,  $u_{i,j}^\alpha$  в законтурних точках відносно сферичних поверхонь визначаються з (6) в залежності від умов закріплення. При заданих на границях  $x = \pm 1$  переміщеннях невідомі  $u_{0,j}^r$ ,  $u_{0,j}^\alpha$ ,  $u_{m+1,j}^r$ ,  $u_{m+1,j}^\alpha$  визначаються аналогічно до електричного потенціалу (12). При заданих механічних напруженнях переміщення в законтурних точках визначаються з різницевої форми запису матеріальних співвідношень (3) в точках  $(x_{0,5}, \alpha_j)$ , що лежать на границі області.

Для інтегрування по часу системи диференціальних та алгебраїчних рівнянь (10) вводимо розбиття інтервалу часу  $t \in [0, T]$  з кроком  $\Delta t$ . Розв'язок шукається за допомогою явної різницевої схеми або методом Ньюмарка [8]. Явна різницева схема зручна в реалізації, але є умовно стійкою, внаслідок чого крок по часу береться значно меншим за крок по просторових координатах ( $\Delta t \approx 0.05\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$ ), що призводить до громіздких обчислень. До того ж на кожному часовому шарі для знаходження електричного потенціалу  $\varphi$  потрібно розв'язувати систему  $nm$  алгебраїчних рівнянь, що впливає з третього рівняння (10). Метод Ньюмарка складніше реалізується, оскільки на кожному кроці по часу розв'язується система з  $3nm$  рівнянь, але абсолютна стійкість цього методу дозволяє інтегрувати систему рівнянь (10) з значно більшим кроком по часу  $\Delta t \approx 0.5\sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$ . Тестування правильності роботи схеми проводилося на основі розв'язків задач про одновимірні нестационарні коливання п'єзокерамічних тіл [1, 3, 8].

**3. Аналіз отриманих результатів.** Розглянемо задачу про осесиметричні нестационарні коливання кулі з кераміки PZT-4 [6]

$$\begin{aligned}c_{11}^E &= 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{33}^E = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{32}^E = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\c_{13}^E &= 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{55}^E = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\e_{11} &= 15,1 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{31} = -5,2 \text{ Кл/м}^2, \quad e_{53} = 12,7 \text{ Кл/м}^2, \\ \varepsilon_{11}^S &= 562 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}, \quad \varepsilon_{33}^S = 646 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м},\end{aligned}$$

з параметром кривизни  $\varepsilon = 0.1$  при нульових початкових умовах. За нормуючі параметри вибрано  $\rho_{00} = \rho$ ,  $c_{00} = c_{11}^E$ ,  $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11}^S$ ,  $t_h = h\sqrt{\rho/c_{33}^E}$ .

Зовнішні поверхні вільні від механічних навантажень, тобто

$$\sigma_{rr}(\pm 1, \alpha, t) = 0; \quad \sigma_{r\alpha}(\pm 1, \alpha, t) = 0. \quad (13)$$

Електроди на сферичних поверхнях кулі мають при  $\alpha = \alpha_0$  ізоляційну лінію розрізу, що дає змогу задавати різну різницю потенціалів на різних областях електродованості. Розглянемо коливання кулі, що виникають при навантаженні різницею електричного потенціалу  $2V(t)$ , де

$$V(\alpha, t) = \begin{cases} V_0 \sin \omega t, & 0 \leq \alpha < \alpha_0, \\ -V_0 \sin \omega t, & \alpha_0 \leq \alpha \leq \pi. \end{cases} \quad (14)$$

Двовимірність задачі та велика кількість механічних та електричних невідомих робить розв'язок досить складним для аналізу. Для оцінки впливу наявності розрізу розглянемо спочатку результати, отримані без розрізу, тобто при  $V(t) = V_0 \sin \omega t$ . Оскільки таке навантаження не залежить від кута  $\alpha$ , то розв'язок задачі буде одновимірним. На рис. 1 представлені криві радіальних переміщень на зовнішніх та серединній поверхні при безрозмірних коефіцієнтах навантаження  $V_0 = 1$ ,  $\omega = 2$ . Всі наведені результати представлені в безрозмірному вигляді.

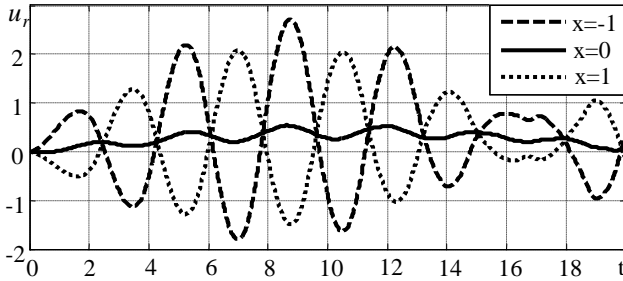


Рис.1. Динаміка зміни радіальних переміщень в різних точках перерізу при відсутності розрізу

Бачимо, що максимальні переміщення виникають на поверхні  $x = -1$  і досягають значення  $u_{r \max} = 2.8$ . Тому подальший аналіз будемо проводити на внутрішній поверхні кулі.

На рис. 2, 3, 4 представлено динамічні криві для радіальних переміщень, що виникають на поверхні  $x = -1$  при розрізах на електродах в площинах  $\alpha_0 = \pi/2$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/6$  відповідно. З рис. 2 бачимо, що при  $\alpha_0 = \pi/2$  переміщення на полюсах співпадають з представленими на рис.1 до моменту часу  $T = 14$ , що відповідає приходу в точки  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi$  хвилі меридіанних переміщень. Крива переміщень, що відповідає перерізу  $\alpha = \pi/2$ , має меншу амплітуду коливальних процесів, ніж переміщення на полюсах. Після моменту часу  $T = 14$  чіткість коливального процесу порушується внаслідок накладання хвиль в полюсі.

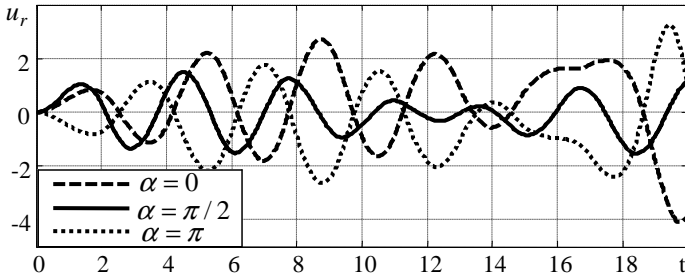


Рис. 2. Динаміка зміни радіальних переміщень на внутрішній поверхні кулі  $x = -1$  при положенні розрізу  $\alpha_0 = \pi/2$

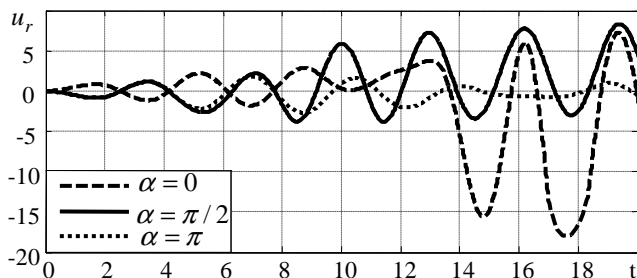


Рис. 3. Зміна радіальних переміщень на внутрішній поверхні кулі  $x = -1$  при положенні розрізу  $\alpha_0 = \pi/3$

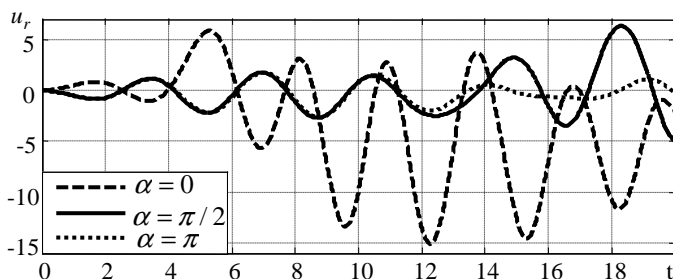


Рис. 4. Зміна радіальних переміщень на внутрішній поверхні кулі  $x = -1$  при положенні розрізу  $\alpha_0 = \pi/6$

Для рис. 3, 4 характерно те, що переміщення в перерізах  $\alpha = \pi/2$  та  $\alpha = \pi$  співпадають на деяких інтервалах часу, оскільки зона двовимірних збурень поширюється від точок  $\alpha_0 = \pi/3$  та  $\alpha_0 = \pi/6$ . Накладання хвиль меридіанних переміщень в полюсі  $\alpha = 0$  призводить до різкого зростання радіальних переміщень, які значно перевищують значення переміщень в одновимірній задачі (рис. 1).

Отже, можна зробити висновок, що наявність розрізу на електродах значно підвищує амплітуду коливань точок поверхні кулі внаслідок накладання хвиль меридіанних переміщень. Електромеханічний стан п'єзоелемента значним чином залежить від положення розрізу, від якого починається поширення двовимірних збурень.



1. *Бабаев А. Э.* Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – К.: Наук. думка, 1990. – 176с.
2. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
3. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К.: Выща школа, 1989. – 184 с.
4. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти томах / *Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Электроупругость/ Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.*– К: Наук. думка, 1989.– 280 с.
5. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
6. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990.– 228 с.
7. *Шульга М. О.* Про варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності // Доп. НАН України.–2008.– № 6.–С. 36-45.
8. *Шульга М. О., Григор'єв С.А.* Радіальні пружноелектричні нестационарні коливання п'єзокерамічної порожнистої кулі // Опір матеріалів. – 2007. – С.

УДК 539.3

Кривенко О.П. канд. техн. наук

## ВПЛИВ КОМБІНОВАНОГО ЗАКРІПЛЕННЯ КОНТУРУ НА СТІЙКІСТЬ ПОЛОГИХ КВАДРАТНИХ У ПЛАНІ ПАНЕЛЕЙ

Вивчається вплив на втрату стійкості квадратної в плані сферичної панелі умов комбінованого закріплення контуру. Порівнюються два способи часткової заміни жорсткого затиснення контуру панелі на шарнірне опирання.

Несуча спроможність пологих панелей суттєво залежить від впливу комбінованих граничних умов на стійкість оболонок. У роботі [1] при дослідженні за скінченноелементною методикою [2-4] стійкості пологої осесиметричної сферичної панелі виявлена нелінійна залежність величини верхнього критичного навантаження від поступової заміни одного типу граничних умов (жорстке затиснення) на другий (шарнірне опирання). Важливим представляється проведення аналогічних досліджень для сферичних оболонок з іншою конфігурацією в плані – квадратною.

Квадратна в плані сферична панель сталі товщини навантажувалася зовнішнім рівномірним тиском інтенсивністю  $q$  (рис. 1, а). Матеріал оболонки – ізотропний. Для порівняння з пологою оболонкою обертання [1] розглянута квадратна в плані сферична панель, що має однакову з нею масу та стрілу підйому. Для розглядуваної панелі прийняті наступні вихідні данні: модуль пружності  $E = 19.6 \cdot 10^4$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ , товщина  $h = 0.01$  м, стріла підйому  $H = 4h$ , розмір опорного контуру  $a = 177.2h$ , радіус серединної поверхні  $R = 1968.49h$ , параметр кривизни  $K = 32$  ( $K = 2a^2 / (Rh)$ ). Результати досліджень подані з використанням безрозмірних параметрів навантаження  $\bar{q} = a^4 q / (Eh^4)$  і прогину  $\bar{u}' = u' / h$ , де  $u'$  – прогин панелі вздовж осі  $x'$ .

Збіжність розв'язків для шарнірно опертої сферичної панелі при  $K = 32$ ,  $R = 225h$ ,  $a = 60h$  досліджена в роботі [5], де отриманий гарний збіг з розв'язком роботи [6]. Форми деформування панелі мають дві площини симетрії [5, 6], тому в дослідженні в якості розрахункового фрагмента прийнята чверть панелі з сіткою  $18 \times 18$  СЕ, яка забезпечує збіжність розв'язків.

Досліджувався вплив на стійкість оболонки двох варіантів поступової заміни жорсткого затиснення на шарнірне опирання. У першому варіанті заміщення виконувалося, починаючи з центра бічної грані панелі

(рис. 1, б), у другому – з кута панелі (рис. 1, в). В обох випадках область шарнірного опирання скінченноелементної моделі оболонки  $b$  характеризується безрозмірним параметром  $\bar{b} = 2b/a$  ( $0 \leq \bar{b} \leq 1$ ). Значення  $\bar{b} = 0$  відповідає умові жорсткого затиснення всієї панелі, а  $\bar{b} = 1$  – умові її шарнірного опирання.

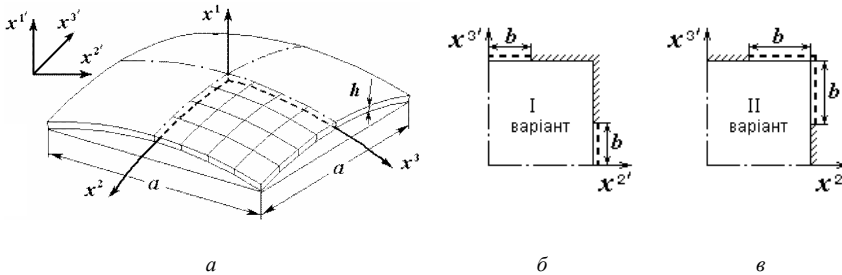


Рис. 1. Сферична панель з двома варіантами комбінованого закріплення

На рис. 2 показана еволюція діаграм “навантаження-прогин” в центрі панелі при зміні граничних умов за першим та другим варіантами. У всіх випадках діаграми мають вигляд, що характерний для втрати стійкості пологих панелей. Менший вплив на еволюцію діаграм справляє заміщення жорсткого затиснення контуру на шарнірне опирання за другим способом. Це пояснюється тим, що перехід на більш слабкі граничні умови відбувається з кутів, область яких відповідає більшій жорсткості панелі. У докритичній області діаграми практично збігаються.

У першому варіанті (рис. 2, а, табл. 1) збільшення зони шарнірного опирання позначається на зміні діаграми ( $\bar{b} = 0$ ) починаючи вже з  $\bar{b} \geq 2/9$ . При  $\bar{b} \geq 6/9$  діаграми співпадають з випадком повного шарнірного опирання ( $\bar{b} = 1$ ).

У другому варіанті (рис. 2, б) при  $0 \leq \bar{b} \leq 6/9$  діаграми співпадають з випадком повного жорсткого затиснення ( $\bar{b} = 0$ ). Зменшення нижнього критичного навантаження при невеликому зростанні верхнього критичного навантаження спостерігається лише при  $\bar{b} = 7/9$  і  $\bar{b} = 8/9$ . При цьому на відміну від першого варіанта зміни граничних умов збіг діаграм з випадком повного шарнірного опирання ( $\bar{b} = 1$ ) не спостерігається.

Згідно до розрахунків у докритичній області для всіх варіантів граничних умов у розв'язках на діаграмах “навантаження-прогин” відсутні точки розгалуження. Точки розгалуження та сходження гілок розв'язків розміщуються лише на нестійких ділянках діаграм

“навантаження-прогин” – між верхньою  $\bar{q}_{кр}^e$  та нижньою  $\bar{q}_{кр}^н$  критичними точками для випадків: повного шарнірного опирання ( $\bar{b}=1$ ) і для першого варіанта зміни граничних умов при  $\bar{b} \geq 4/9$ . В інших випадках точки розгалуження не спостерігаються.

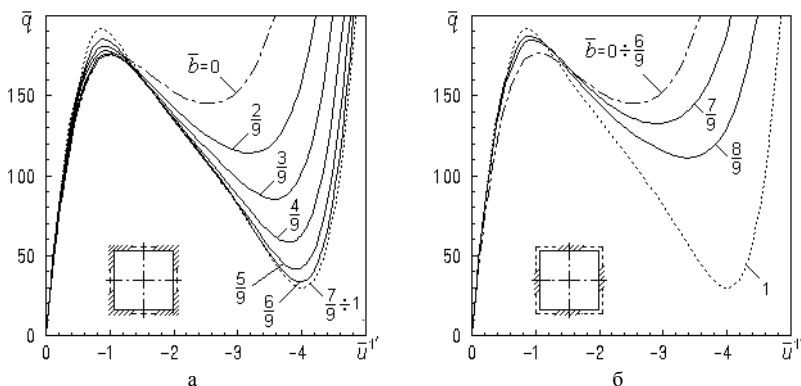


Рис. 2. Еволюція діаграм “навантаження-прогин” для першого (а) та другого (б) варіантів зміни граничних умов

Аналіз результатів виявив нелінійну залежність величин критичних навантажень від параметра  $\bar{b}$  (рис. 3, табл. 1, табл. 2). При повній заміні жорсткого затиснення ( $\bar{b}=0$ ) на шарнірне опирання ( $\bar{b}=1$ ) величина верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^e$  збільшилася на 8.56%, а величина нижнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^н$  зменшилася на 79.28%. Для відповідної пологої осесиметричної сферичної панелі з  $k=4$  при однорідних граничних умовах також існує подібна відмінність між величинами критичних навантажень, яка складає 10% [1] і 14% [7].

Збільшення зони шарнірного опирання за першим варіантом (рис. 3, табл. 1) призводить до поступового зниження нижнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^н$ . В той же час верхнє критичне навантаження  $\bar{q}_{кр}^e$  спочатку ( $0 < \bar{b} \leq 2/9$ ) дещо падає (0.51%), а надалі ( $\bar{b} > 2/9$ ) – зростає.

Для другого варіанта (рис. 3, табл. 2) характерним є сталість верхнього і нижнього критичних навантажень при зміні параметра  $\bar{b}$  в діапазоні  $0 \leq \bar{b} \leq 5/9$ . В закритичній області при однаковій величині зони шарнірного опирання (при  $\bar{b} > 5/9$ ) в другому варіанті у порівнянні з першим

відмічається поступове прискорення зменшення величини нижнього критичного навантаження (рис. 3).

Характер зміни форм втрати стійкості панелей при зміні граничних умов наведений на рис. 4. На рис. 4

подані перерізи оболонки в площині  $x^3 = 0$ . Вихідній формі панелі відповідає штрих-пунктирна лінія з позначкою  $\bar{q} = 0$ . У всіх випадках форма втрати стійкості панелей відповідає загальній втраті стійкості оболонки з прокладуванням її центральної частини і має вид (рис. 5). У першому і другому варіантах способу зміни граничних умов спостерігається незмінна точка деформованих форм (вузол кривих точка А). У першому варіанті вона зміщена в напрямку центра панелі (рис. 4, а), у другому – вбік контуру (рис. 4, б). У другому варіанті при всіх значеннях  $\bar{b} < 1$  форма панелі

не змінюється від контуру до точки вузла А.

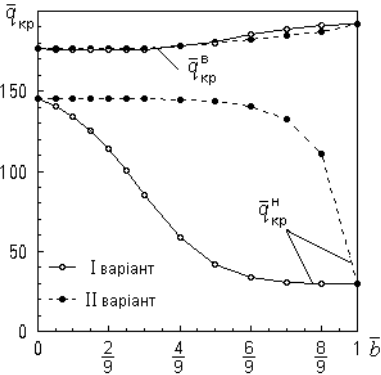


Рис. 3. Залежність верхнього та нижнього критичних навантажень від величини області шарнірного опирання

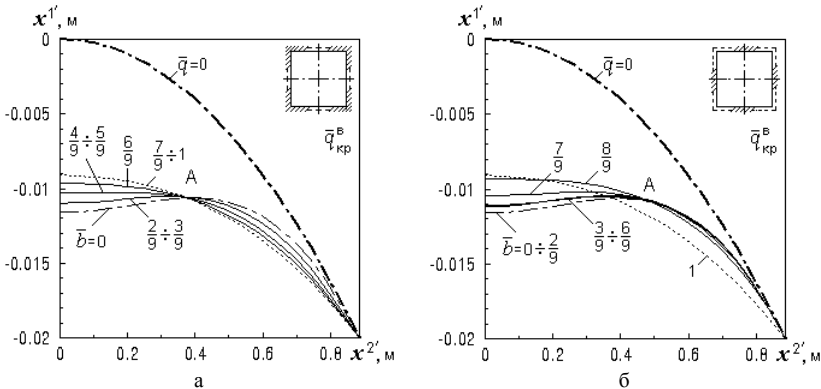


Рис. 4. Еволюція форм втрати стійкості при зміні комбінованих граничних умов

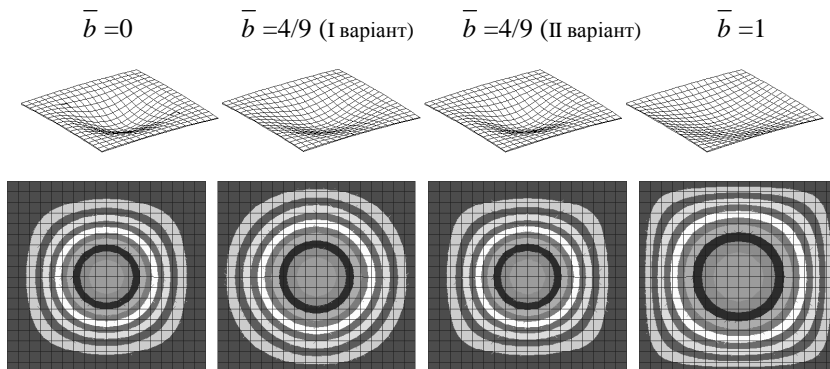


Рис. 5. Форми і муарові смуги прогинів панелі при втраті стійкості при зміні граничних умов

Проведені дослідження дозволили виявити існуючі нелінійні закономірності втрати стійкості пологих сферичних панелей при послідовній зміні областей комбінованого закріплення контуру. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні різноманітних несучих оболонкових конструкцій та їхніх елементів.

Таблиця 1

Вплив на несучу спроможність панелі зміни граничних умов за I варіантом

$\bar{b}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e), \%$	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H), \%$
0	176.4	0	145.1	0
1/18	176.1	-0.17	140.7	-3.03
1/9	175.1	-0.40	134.5	-7.30
1/6	175.6	-0.45	125.6	-13.44
2/9	175.5	-0.51	114.0	-21.43
5/18	175.6	-0.45	100.2	-30.94
3/9	176.2	-0.11	85.3	-41.18
4/9	178.2	1.02	58.6	-59.59
5/9	180.9	2.55	41.7	-71.26
6/9	185.2	4.99	33.7	-76.79
7/9	188.3	6.75	30.8	-78.74
8/9	191.0	8.28	30.1	-79.22
1	191.5	8.56	30.1	-79.28

Таблиця 2

Вплив на несучу спроможність панелі зміни граничних умов за II варіантом

$\bar{b}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e), \%$	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H), \%$
0	176.4	0	145.1	0
1/18	176.4	0	145.1	0
1/9	176.4	0	145.1	0
1/6	176.4	0	145.1	0
2/9	176.5	0.06	145.1	0
5/18	176.6	0.11	145.1	0
3/9	176.9	0.28	145.1	0
4/9	177.9	0.85	144.9	-0.14
5/9	179.8	1.93	144.1	-0.69
6/9	182.1	3.23	140.9	-2.89
7/9	184.7	4.71	132.6	-8.61
8/9	187.1	6.07	111.2	-23.23
1	191.5	8.56	30.1	-79.28

1. *Кривенко О.П.* Вплив комбінованих граничних умов на стійкість пологих оболонок обертаня // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2007 р. - №81. - С. 84-90.
2. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатошарових поребричних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
3. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
4. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінчених елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
5. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гладких, ребристих та послаблених вирізами гнучких пологих панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2000 р. - Вип.67. - С. 92-103.
6. *Ильин В.П., Картов В.В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. - Л.: Стройиздат, 1986. - 168 с.
7. *Валивиши Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976. - 278 с.

УДК 539.3

**Погорелова О.С.**, канд. фіз.-мат. наук**Постнікова Т.Г.**, канд. техн. наук**Гончаренко С.М.**, інж.

## **АНАЛІЗ ДИНАМІКИ УДАРНО-ВІБРАЦІЙНОГО МАЙДАНЧИКА ПРИ ЗМІНІ ЙОГО ПАРАМЕТРІВ**

Виконано числове дослідження динаміки двомасової віброударної системи з двома ступенями свободи на прикладі ударно-вібраційного майданчика, який широко застосовується у будівельному виробництві. Установлена залежність напіврозмахів тіл майданчика та величини контактної сили від її механічної характеристики. Досліджена втрата стійкості гармонічного одноударного режиму коливань майданчика та виникнення субгармонічного двоударного режиму при деяких значеннях цієї характеристики. Удар моделюється силою контактної взаємодії, що описана законом Герца.

### **1. Постановка проблеми**

Динаміка віброударних процесів у механічних системах становить чималий інтерес для фахівців, що займаються питаннями створення обладнання для сучасного високоєфективного будівельного виробництва. Тому цілий ряд дослідників [1,2] займаються питанням вивчення та моделювання руху й сил взаємодії між тілами у віброударних системах.

У статті досліджується динаміка руху двомасової віброударної системи з двома степенями свободи на прикладі ударно-вібраційного майданчика, який призначений для формування залізобетонних виробів та ущільнення будівельних сумішей.

У будівництві використовуються вібраційні та ударно-вібраційні майданчики різних конструкцій [3,4,5]. У статті досліджується динаміка руху низькочастотного ударно-вібраційного майданчика блочного типу СМЖ-538А с частотою коливань 25 Гц без закріплення форми (рис.1). Майданчик випускається серійно, він широко застосовується на підприємствах будівельної індустрії для виробництва продукції з рухомих та малорухомих бетонних сумішей.

Рис. 1

Майданчик складається з чотирьох окремих блоків, оснащених двома вібраторами, що самосинхронізуються. У такому віброударному майданчику імпульси генеруються різними збуджувачами: гармонійні коливання - серійними віброзбуджувачами (вібраторами), ударні - при падінні рухомих частин майданчика на опори, на яких закріплені обмежувачі коливань. При роботі віброударного майданчика існує



можливість задавати необхідні параметри вібрацій і удару, регулювати тривалість і послідовність впливу кожного виду коливань. На столі вібромайданчика на пружну гумову прокладку-обмежувач установлюється форма з бетонною сумішшю. Під час роботи майданчика з певною частотою та прискоренням, яке перевищує прискорення вільного падіння, форма відривається від столу майданчика, і при зустрічному русі відбувається зіткнення форми з блоками, що і створює віброударний режим руху. Приводом є вібробуджувачі загального призначення, які встановлюються по двох на кожен блок. Величина імпульсів при зіткненні залежить від режимів роботи майданчика, співвідношення мас форми з бетонною сумішшю й стола майданчика та жорсткості пружних елементів.

## 2. Розрахункова схема майданчика та рівняння руху

Для вивчення динаміки коливань майданчика і явища удару між формою й столом майданчика розглянемо найпростіший варіант побудови математичної моделі двомасового ударно-вібраційного майданчика з двома ступенями вільності без закріплення форми (рис. 2).

Стіл майданчика масою  $m_1$  кріпиться до фундаменту двома лінійними віброізолюючими пружинами із сумарною жорсткістю  $k_1$ . Двигуни, що встановлені під столом, генерують збуджуючу силу  $F(t)$ . До столу кріпиться пружна прокладка (обмежувач коливань) товщиною  $h$  із лінійною жорсткістю  $k_0$ , на якій лежить форма масою  $m_0$ . Форма до прокладки не кріпиться й може від неї відриватися.

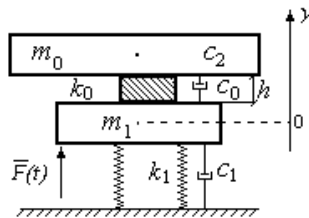


Рис. 2

Зі стану рівноваги форма й майданчик починають прямолінійний вертикальний спільний рух вздовж осі  $y$ , який продовжується доти, поки форма не відірветься від майданчика. У стані відриву форма й майданчик рухаються окремо, поки форма не впаде на майданчик. Відбувається удар, під час якого тіла знову рухаються спільно до моменту відриву від майданчика і т.д.

Таким чином існує три стани майданчика – спільний рух форми й стола майданчика на початку руху до моменту відриву; окремий рух тіл під час відриву форми від столу; спільний рух тіл у стані удару в результаті падіння форми на стіл.

При спільному русі до першого відриву форми на тіла діють такі сили: на форму – вага форми з бетоном  $P_0$  і сили опору в бетоні  $F_{\text{демм2}}$ , пружна

сила в прокладці  $F_{k0}$  і сила опору в прокладці  $F_{демп0}$ ; на майданчик – вага столу майданчика  $P_1$ , сила пружності й сила опору у віброізолюючих пружинах  $F_{k1}$  і  $F_{демп1}$ , сила пружності в прокладці  $F_{k0}$  і сила опору в прокладці  $F_{демп0}$ , збурююча сила від вібраторів  $P(t)$  (рис.3).

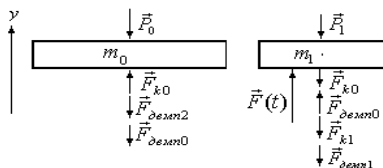


Рис. 3

Складний процес вібраційного ущільнення характеризується необхідністю подолання сил тертя, зчеплення та в'язкого опору. У цьому випадку кінцевий стан бетонної суміші залежить, поперше, від зближення великих і дрібних часток заповнювачів, для якого характерне подолання взаємних сил тертя й зчеплення між частками. По-друге, ущільнення - це перерозподіл бетонного тесту, пов'язаний з його розрідженням. Безумовно, ці сторони одного і того процесу варто розглядати в комплексі. Сили пластичного та в'язкого опору спільно перешкоджають процесу ущільнення, але їхня фізична суть різна. Сили в'язкого опору зменшують вплив сил сухого тертя – цементне тісто виконує роль змащення в процесах ущільнення. Ця обставина і визначила вивчення цілим рядом дослідників сил в'язкого опору і зниження їх значення при вібраційному збудженні [6]. З огляду на великий вплив сил опору на динаміку віброударного майданчика, необхідно ввести три сили опору: у бетонній суміші  $F_{демп2}$ , у прокладці  $F_{демп0}$  і у віброізолюючих пружинах  $F_{демп1}$ . Сили опору приймаємо пропорційними швидкості з певними коефіцієнтами демпфірування  $c_2, c_0, c_1$ :

$$F_{демп2} = c_2 \dot{y}_0, \quad F_{демп0} = c_0 \dot{y}_0, \quad F_{демп1} = c_2 \dot{y}_1.$$

Початок координат вибираємо у центрі стола майданчика в положенні статичної рівноваги майданчика з формою, що лежить на ньому.

Тоді сили пружності записуємо у вигляді:

$$F_{k0} = k_0 \Delta l_0 = k_0 [h - (y_0 - y_1)];$$

$$F_{k1} = k_1 \Delta l_1 = k_1 (y_1 - \lambda_{cm}),$$

де  $\lambda_{cm} = \frac{P_0 + P_1}{k_1}$ .

Рівняння руху майданчика з формою мають вигляд:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{y}_0 &= -P_0 - F_{\text{демм}2} + F_{k0} - F_{\text{демм}0}; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -P_1 - F_{k1} - F_{\text{демм}1} - F_{k0} + F_{\text{демм}0} + F(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Зовнішнє навантаження від вібраторів вважається гармонічним  $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

Вводячи стандартні позначення:

$$\frac{k_0}{m_0} = \omega_0^2, \frac{k_1}{m_1} = \omega_1^2, \frac{c_0}{m_0} = 2\xi_0\omega_0, \frac{c_1}{m_1} = 2\xi_1\omega_1, \frac{c_2}{m_0} = 2\xi_2\omega_0, \frac{m_0}{m_1} = \chi, \quad (2)$$

одержимо рівняння руху майданчика з формою у вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \omega_0^2[h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2\chi[h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_0 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1}(\cos(\omega t) + \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Вихідні умови при  $t = 0$  мають вигляд:

$$\varphi = 0, \quad y_1 = 0; \quad \dot{y}_1 = 0; \quad y_0 = h - \lambda_{\text{см}}; \quad \dot{y}_0 = 0. \quad (4)$$

При окремому русі, тобто в стані відриву, на тіла системи діють такі сили: на форму – вага форми з бетоном  $P_0$  і сили опору в бетоні  $F_{\text{демм}2}$ , на майданчик – вага столу майданчика  $P_1$ , сила пружності й сила опору у віброізолюючих пружинах  $F_{k1}$  і  $F_{\text{демм}1}$  та збурююча сила від вібраторів  $P(t)$ . Рівняння руху в цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g - 2\xi_2\omega_0\dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Коли форма падає на майданчик, відбувається удар. Під час удару форма й майданчика рухаються спільно, і рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{y}_0 &= -P_0 - F_{\text{демм}2} - F_{\text{демм}0} + F_{y\text{д}}; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -P_1 - F_{k1} - F_{\text{демм}1} + F_{\text{демм}0} - F_{y\text{д}} + F(t). \end{aligned} \quad (6)$$

де  $F_{y\text{д}}$  – сила удару.

У [6] було показано, що в прийнятій моделі віброударної системи удар краще моделювати силою, що описується законом Герца [7,8,9].

Тоді  $F_{y_0} = K\alpha(t)^{3/2}$ , де  $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$  – відносне зближення,

$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}$  – константа Герца, тут  $q$ ,  $A$  та  $B$  – табличні

константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту, а

$$\delta_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0\pi}, \quad \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1\pi},$$

де  $\mu_i$  и  $E_i$  – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл.

Рівняння спільного руху в цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \frac{K}{m_0} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0 \dot{y}_0; \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \frac{K}{m_1} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2\xi_1\omega_1 \dot{y}_1 + 2\xi_0\omega_0\chi \dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

### 3. Числові дослідження динаміки віброударного майданчика

Характеристики майданчика були взяті відповідно до “Рекомендацій по вибрационному формованію железобетонных изделий” [ 3,5] (табл. 1).

Таблиця 1

Характеристики віброударного майданчика

Характеристика	Показник
Маса форми з бетоном $m_0$ , кг	15000,0
Маса стола майданчика $m_1$ , кг	7400,0
Сумарна жорсткість прокладок $k_0$ , Н/м	$3,0 \cdot 10^8$
Сумарна жорсткість віброізолюючих пружин $k_1$ , Н/м	$1,278 \cdot 10^6$
Товщина прокладки $h$ , м	0,0275
Прискорення сили тяжіння $g$ , м/с <sup>2</sup>	9,81
Амплітуда зовнішнього навантаження $F_0$ , Н	$2,44 \cdot 10^5$
Частота зовнішнього навантаження $\omega$ , Гц	25
Фаза зовнішнього навантаження $\varphi$ , рад	0,0
Коефіцієнти демпфірування	
в бетонній суміші $\xi_2$	0,03
в прокладці $\xi_0$	0,02
у віброізолюючих пружинах $\xi_1$	0,02

При моделюванні удару силою Герца механічні характеристики тіл, що співударяються, враховуються достатньо докладно – в розрахунок

входять модулі пружності і коефіцієнти Пуассона обох тіл, а також коефіцієнти, що характеризують геометрію контактуючих поверхонь. Форму вважаємо сталевую з модулем пружності  $E_0=2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup> та коефіцієнтом Пуассона  $\mu=0,3$ . Табличні константи мають значення:

$A=0,1 \frac{1}{\text{м}^2}$ ,  $B=0,1 \frac{1}{\text{м}^2}$ ,  $q=0,318$ . Як показали дослідження, характер руху

вібромайданчика і форми залежить від величини модуля пружності гумової прокладки сильно залежить. Як відомо, модуль пружності для різних гум на чотири порядки менше модуля пружності сталі. Однак, при таких значеннях модуля пружності величини сили удару, що діє відповідно до закону Герца, не вистачає для того, щоб відірвати форму від майданчика [6]. Зі збільшенням значення модуля пружності  $E_1$  картина змінюється – в системі достатньо швидко встановлюється гармонічний одноударний режим коливань майданчика і форми. На рис.4 зображені переміщення (рис. 4,а), фазові траєкторії (рис. 4,б,в) та ударна сила контактної взаємодії (рис. 4,г) в такому режимі при значеннях модуля пружності та коефіцієнта Пуассона  $E_1=4,3 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu=0,4$ . На фазових траєкторіях блідосірі лінії відповідають перехідному режиму коливань, а чорні – усталеному.

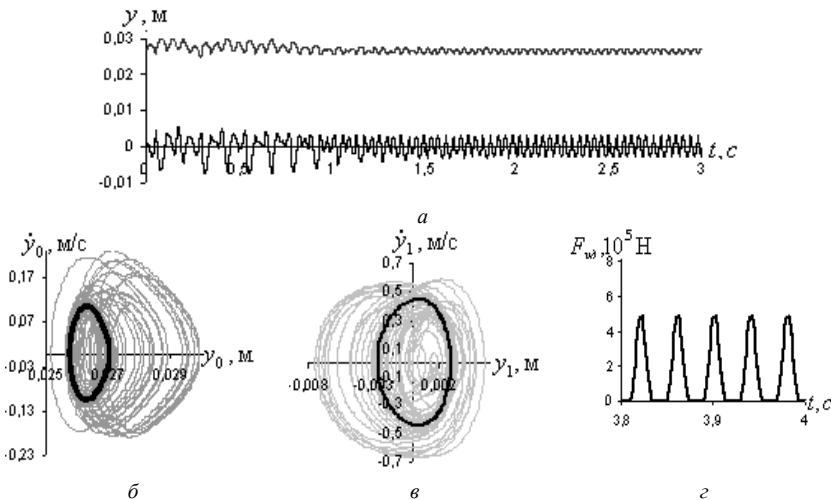


Рис. 4

Але при певних значеннях модуля пружності прокладки  $E_1$  рух віброударного майданчика втрачає стійкість, і режим його коливань

змінюється – в системі реалізується двоударний субгармонічний режим. На рис. 5 зображені переміщення (рис. 5,а), фазові траєкторії (рис. 5,б,в) та контактна сила (рис. 5,г) в такому режимі при  $E_1=5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu=0,4$ .

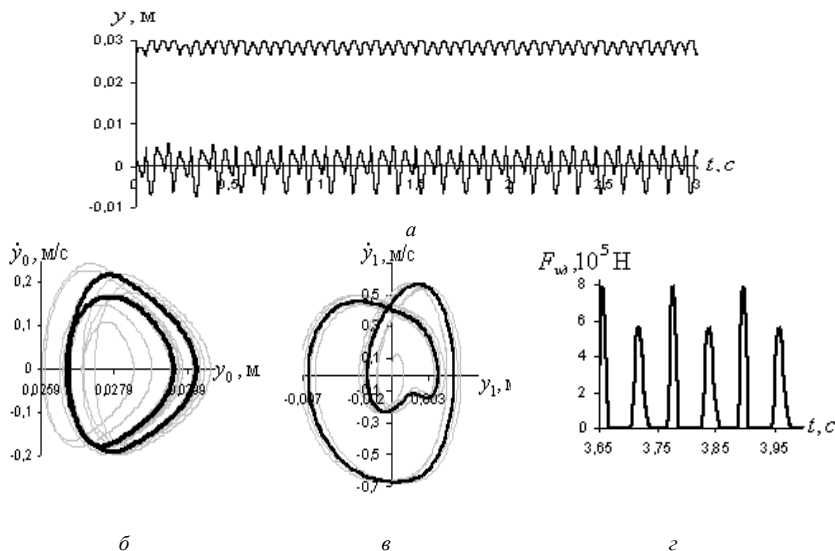


Рис. 5

В цьому випадку період сумарних коливань майданчика  $T_{\text{майд}}$  втричі більше за період збудуючої сили  $T_{\text{майд}} = 3 \cdot T$ . На рис. 6,а тонкою лінією зображений графік зміни в часі сили збудження  $P(t)$ , а товстою – сили контактної взаємодії  $F_{\text{yo}}(t)$ . Для порівняння на рис. 6,б наведені графіки зміни контактної сили та зовнішнього навантаження при гармонічному одноударному режимі коливань при значеннях модуля пружності та коефіцієнта Пуассона прокладки  $E_1=4,3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu=0,4$ .

В ході числових досліджень було встановлено, що основний гармонічний одноударний режим коливань вібромайданчика втрачає стійкість при значеннях модуля пружності прокладки  $E_1=4,35 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  та  $E_1=5,70 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ .

На рис. 7 приведені графіки залежності напіврозмахів коливань стола майданчика  $A_1$  (рис. 7,а) та форми  $A_0$  (рис. 7,б) від значень модуля пружності прокладки  $E_1$  у тому випадку, коли рух майданчика починається зі стану рівноваги, тобто виконуються вихідні умови (4). Напіврозмахи обчислюються за звичайними формулами:

$$A_1 = \frac{|y_{1,\max}| + |y_{1,\min}|}{2}, \quad A_0 = \frac{|y_{0,\max}| + |y_{0,\min}|}{2}.$$

де  $y_{0,\max}$ ,  $y_{0,\min}$ ,  $y_{1,\max}$ ,  $y_{1,\min}$  отримані відносно своїх математичних сподівань.

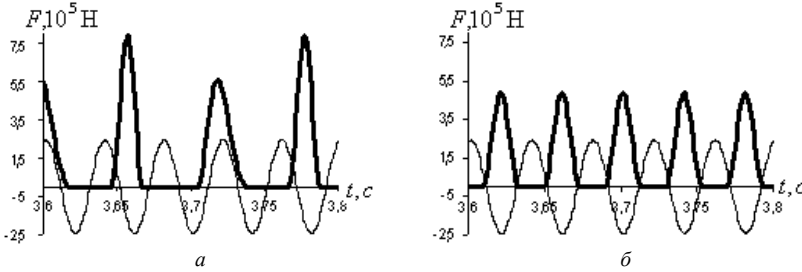


Рис. 6

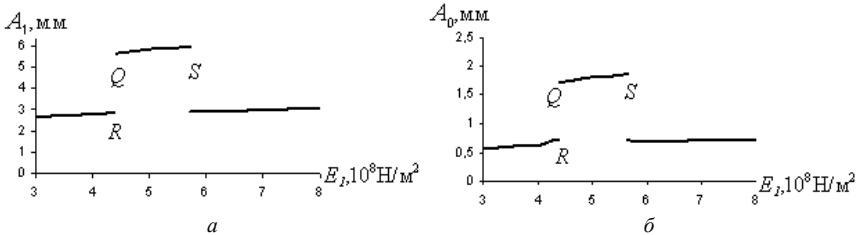


Рис.7

Нижні криві відповідають гармонічному одноударному режиму коливань, верхні – субгармонічному двоударному. Напіврозмахи коливань стола майданчика та форми при вихідних умовах (4) представлені в таблиці 2.

Якщо вихідні умови руху змінити, тобто за початок руху взяти стан системи, якому на графіках рис.7 відповідає точка  $S$  на верхніх кривих:  $y_0(0) = 0.0271\text{ м}$ ,  $\dot{y}_0(0) = 0.0906\text{ м/с}$ ,  $y_1(0) = 0.00374\text{ м}$ ,  $\dot{y}_1(0) = -0.119\text{ м/с}$  чи точка  $Q$ :  $y_0(0) = 0.0264\text{ м}$ ,  $\dot{y}_0(0) = 0.112\text{ м/с}$ ,  $y_1(0) = 0.00473\text{ м}$ ,  $\dot{y}_1(0) = -0.203\text{ м/с}$ , то побудуємо продовження цих кривих праворуч та ліворуч. Візьмемо нові вихідні умови, які відповідають тому стану, що був одержаний на попередньому кроці та отримуюмо продовження верхніх кривих, і далі рухаємось кроками таким самим чином. Для того, щоб побудувати продовження нижніх кривих, за вихідні умови спочатку візьмемо стан системи, який відповідає точці  $R$ . Рухаючись кроками по

цій кривій, отримаємо картину руху, що зображена на рис.8, на якому приведені графіки зміни напіврозмахів коливань стола майданчика  $A_1$  (рис.8,а) та форми  $A_0$  (рис.8,б).

Таблиця 2

Модуль пружності прокладки $E_1$ , $10^8 \text{H/m}^2$	Максимум контактної сили Герца, $10^5 \text{H}$		Напіврозмах стола майданчика, мм	Напіврозмах форми, мм
<b>Гармонічний одноударний режим коливань (нижня крива)</b>				
3,0	4,15		2,67	0,563
4,0	4,72		2,78	0,616
4,2	4,81		2,80	0,680
4,3	4,86		2,81	0,693
4,35	4,89		2,82	0,702
<b>Субгармонічний двоударний режим коливань (верхня крива)</b>				
4,4	7,46	5,11	5,68	1,76
4,5	7,53	5,18	5,70	1,74
5,0	7,90	5,60	5,82	1,79
5,1	7,97	5,70	5,83	1,8
5,2	8,03	5,78	5,84	1,81
5,5	8,24	6,00	5,92	1,84
5,6	8,31	6,05	5,95	1,87
5,65	8,34	6,13	5,95	1,89
5,66	8,33	6,12	5,93	1,85
5,68	8,35	6,14	5,94	1,85
<b>Гармонічний одноударний режим коливань (нижня крива)</b>				
5,7	5,47		2,90	0,707
6,0	5,59		2,91	0,686
7,0	5,95		2,95	0,693
8,0	6,28		2,98	0,709

Верхні криві, що відповідають субгармонічному двоударному режимові коливань, продовжені для тих значень модуля пружності прокладки  $E_1$ , для яких при вихідних умовах (4) існує стійкий гармонічний одноударний режим. Нижні криві також продовжені для тих значень модуля пружності прокладки  $E_1$ , для яких при вихідних умовах (4) існує субгармонічний двоударний режим. Навряд чи побудовані таким чином режими коливань при таких значеннях  $E_1$  можуть бути реалізовані, але з теоретичної точки зору на поведінку нелінійної системи вони заслуговують на увагу.



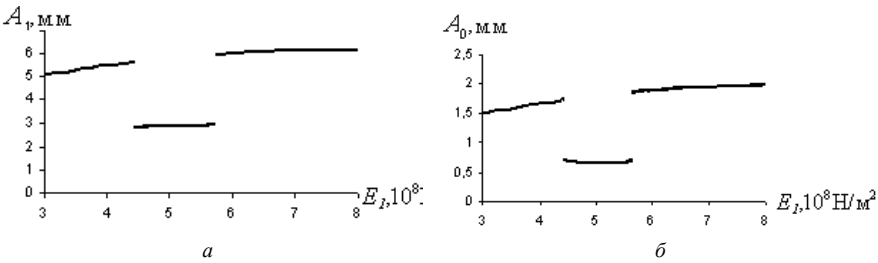


Рис. 8

В таблиці 3 наведені значення сили контактної взаємодії за Герцем та напіврозмахів коливань стола майданчика та форми при продовженні кривих, які відповідають субгармонічному двохударному режимові, ліворуч та праворуч при покроковій зміні вихідних умов. Також наведені результати, що відповідають гармонічному одноударному режиму, який отриманий при покроковій зміні вихідних умов.

Представлені результати досліджень дозволяють визначити, при яких значеннях модуля пружності гумової прокладки  $E_1$  в системі реалізується гармонічний одноударний режим коливань, а при яких – субгармонічний двохударний. Коли значення модуля пружності знаходиться в діапазоні  $E_1 \in [3.0; 4.35]$  і при вихідних умовах (4) (стан покою) в системі реалізується гармонічний одноударний режим коливань. При значеннях в діапазоні  $E_1 \in [4.35; 5.7]$  при гармонічному зовнішньому навантаженні і таких самих вихідних умовах в системі збуджується двохударний субгармонічний режим. При більших значеннях модуля пружності прокладки, а саме коли  $E_1 \in [5.7; 8.0]$ , під час роботи майданчика знову реалізується гармонічний одноударний режим коливань.

Треба підкреслити, що при однакових фізичних характеристиках віброударної системи та збуджуючої сили, але при різних вихідних умовах при коливаннях ударно-вібраційного майданчиках теоретично можуть існувати різні динамічні режими: як гармонічний одноударний так і субгармонічний двохударний. Це добре видно на рис. 9, який отриманий з'єднанням рис. 7 та рис. 8.

Пояснюється таке явище тим, що віброударна динамічна система являється суттєво нелінійною. А це тягне за собою теоретичну можливість існування різних динамічних станів при різних вихідних умовах.

Для більшої наочності цього на рис. 10 приведені фазові траєкторії руху стола майданчика при всіх однакових значеннях характеристик системи ( $E_1 = 3,7 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu = 0,4$ ) і різних значеннях вихідних умов

(4) (рис.10,а) та умови  $y_0(0) = 0.0259$  м,  $\dot{y}_0(0) = 0.0596$  м/с,  $y_1(0) = 0.00288$  м,  $\dot{y}_1(0) = -0.0722$  м/с (рис.10,б).

Таблиця 3

Модуль пружності прокладки $E_1$ , $10^8 \text{Н/м}^2$	Максимум контактної сили Герца, $10^5 \text{Н}$		Напіврозмах стола майданчика, мм	Напіврозмах форми, мм
Субгармонічний двохударний режим коливань (верхня крива)				
3,0	6,15	3,72	5,05	1,49
3,7	6,92	4,34	5,36	1,62
3,9	7,11	4,57	5,40	1,64
4,1	7,22	4,81	5,56	1,67
4,3	7,38	5,00	5,63	1,70
Гармонічний одноударний режим коливань (нижня крива)				
4,35	4,95	2,82	0,702	
5,0	5,12	2,85	0,650	
5,5	5,32	2,88	0,663	
5,7	5,47	2,90	0,707	
Субгармонічний двохударний режим коливань (верхня крива)				
5,7	8,37	6,15	5,94	1,85
5,8	8,43	6,24	6,03	1,90
5,9	8,49	6,29	5,98	1,87
6,0	8,55	6,38	6,00	1,89
6,5	8,83	6,77	6,01	1,91
7,0	9,15	6,99	6,18	1,97
7,8	9,57	7,51	6,12	1,97
7,9	9,63	7,56	6,11	1,98
8,0	9,68	7,58	6,17	2,00

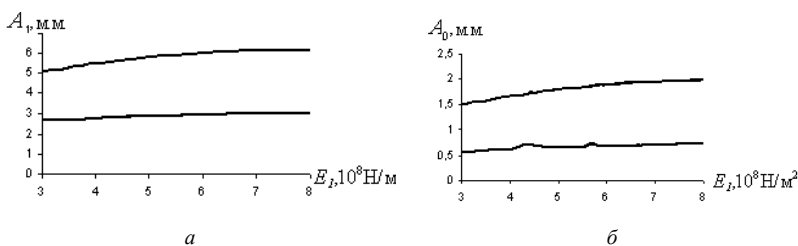


Рис.9

Таким чином, за допомогою запропонованого підходу до моделювання руху і сил взаємодії між тілами у віброударних системах можна знаходити межі значень параметрів системи, які б могли забезпечити стійкий ударно-вібраційний режим коливань.

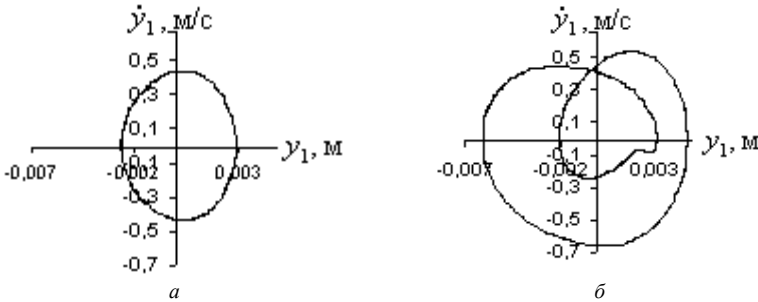


Рис. 10

## 5. Висновки

Моделювання удару силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца, дозволяє детальніше врахувати механічні властивості тіл, що співударяються. Це в свою чергу дає можливість виявити таке цікаве явище, як втрата стійкості гармонічного одноударного режиму коливань ударно-вібраційного майданчика та перехід системи до субгармонічного двоударного режиму при певних значеннях його механічної характеристики. Покрокова зміна вихідних умов дозволяє отримати два різних режиму коливань при тих самих характеристиках майданчиків. Проведені дослідження дозволяють визначити, при яких значеннях однієї з механічних характеристик системи який режим коливань реалізується в системі.

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.:Наука, 1978. – 352 с.
2. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997 – 336 с.
3. *Гусев Б.В., Зазимко В.Г.* Вибрационная технология бетона. – К.: Будівельник, 1991. – 160 с.
4. *Назаренко І.І.* Машини для виробництва будівельних матеріалів: Підручник.-К.: КНУБА, 1999.- 488 с.
5. Рекомендации по вибрационному формованию железобетонных изделий//НИИЖБ. – М., 1986. – 78 С.
6. *В.А.Баженов, О.С.Погорелова, Т.Г.Постникова, С.Н.Гончаренко* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах// Проблемы прочности. – (У друку).
7. *В.А.Баженов, О.С.Погорелова, Т.Г.Постникова, О.А.Лукьянченко* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Проблемы прочности. - 2008. - №5. – С. 25-37.
8. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
9. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.

УДК 539.3

Дзира Б.І.,  
Чорнописький Д. Г., канд. техн. наук

### **ПРО ЗБІЖНІСТЬ ПЕРШОГО ВАРІАНТУ МЕТОДУ ЗБУРЕННЯ ФОРМИ ГРАНИЦІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ВИПАДКУ ТІЛ ОБЕРТАННЯ, БЛИЗЬКИХ ДО КАНОНІЧНИХ**

У статті отримано розклад точного розв'язку задачі кручення суцільного вала з еліпсоїдальною порожниною в ряд по ступенях параметра  $\epsilon$ , який характеризує її ексцентриситет. Для точок порожнини з максимальним (мінімальним) значенням концентрації напружень показано співпадіння коефіцієнтів розкладу при ступенях  $\epsilon$  точного і наближеного розв'язку, отриманого на основі першого варіанту збурення форми границі, що застосовується для розв'язку просторових задач теорії пружності у випадку тіл обертання, близьких до канонічних. Встановлено збіжність послідовних наближень як ітераційного процесу до точних розв'язків.

Метод збурення відомий своїм застосуванням при розв'язку ряду задач механіки суцільних середовищ, що докладно викладений у монографії [7]. В механіці твердого деформованого тіла методом збурення пружних властивостей у [11] отримано розв'язок задач про концентрацію напружень у зоні отворів пластин з урахуванням фізичної нелінійності матеріалу [4]. У статті [10] метод збурення пружних властивостей розповсюджений для розв'язку задач у випадку ортотропії матеріалу, де за основу нульового наближення використовуються пружні властивості трансверсально ізотропного матеріалу. Завдяки роботам О.М. Гузя і Ю.М. Немиша [2,3,6] метод збурення форми границі одержав широке використання для дослідження концентрації напружень у пружних пластинах і оболонках із криволінійними отворами. Стосовно до розв'язку просторових задач теорії пружності метод збурення форми границі в монографіях [2,3] використовувався в двох варіантах для тіл неканонічної форми, що знаходяться в полі статичних зусиль. Перший варіант методу збурення форми границі використовувався для розв'язку задач у випадку тіл (включень) і середовищ з порожнинами, близьких до канонічних, обмеженими ортогональними поверхнями. Другий варіант методу збурення форми границі використовувався для рішення задач пружної рівноваги тіл, обмежених неортогональними поверхнями [8, 9]. На основі першого варіанта методу збурення форми границі [3] показана практична збіжність наближених розв'язків задач для дослідження

концентрації напружень у пружних тілах, що містять еліпсоїдальні порожнини при крученні вала і всебічному розтягу-стиску середовища, що допускають точні розв'язки [5, 12].

У даній статті виконаний розклад точних аналітичних розв'язків задачі концентрації напружень при крученні вала з еліпсоїдальною порожниною по степеням параметра  $\varepsilon$ , що характеризує її ексцентриситет. Дано порівняння коефіцієнтів при степенях малого параметра  $\varepsilon$  розкладання точного [5] і наближеного розв'язків, що приведено в монографії [3]. Коефіцієнти розкладу точного розв'язку збігаються з коефіцієнтами наближеного розв'язку, що свідчить про точну збіжність наближеного розв'язку в рамках першого варіанту методу збурення форми границі.

1. Точний розв'язок задачі про кручення вала з еліпсоїдальною порожниною представимо згідно [5]

$$K_{\gamma\varphi}^T = \frac{\sigma_{\gamma\varphi}}{\rho'b} \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{2(\xi-1)^2}{3\xi_1^2 c - 5\xi_1 + 2}, \quad (1.1)$$

де

$$\rho' = \frac{2M}{\pi R_1^4}, c = \frac{\arctg \sqrt{\xi_1 - 1}}{\sqrt{\xi_1 - 1}}, \xi_1 = \frac{b}{\rho^*} > 1 \quad (1.2)$$

або

$$c = \frac{1}{\sqrt{1-\xi_1}} \left[ \ln(1 + \sqrt{1-\xi_1}) - \frac{1}{2} \ln \xi_1 \right], \xi_1 = \frac{b}{\rho^*} < 1. \quad (1.3)$$

При цьому  $\rho^*$  — радіус кривизни поверхні еліпсоїда  $\rho = 1$ , який при  $\gamma = \pi/2$  дорівнює  $\rho^* \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon}$ . Ексцентриситет еліпсоїдальної

порожнини визначається формулою  $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$ . Тут  $M$  — момент кручення вала,  $R_1$  — його радіус,  $a, b$  — півосі порожнини.

Наближений розв'язок про концентрацію напружень на поверхні еліпсоїдальної порожнини вала при його крученні моментом  $M$ , що отримано на основі першого варіанта методу збурення форми границі, має вид [3]

$$\frac{\sigma_{\gamma\varphi}}{\rho'b} \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = 1,25 - 0,7143\varepsilon + 0,8842\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (1.4)$$

Розв'язок отриманий на основі перших трьох наближень (нульове, перше, друге).

В залежності від  $\varepsilon$  визначимо значення параметра  $\xi_1$  в точці  $(0, b)$  для стиснутого (рис. 1) і витягнутого еліпсоїдів обертання (рис. 2).

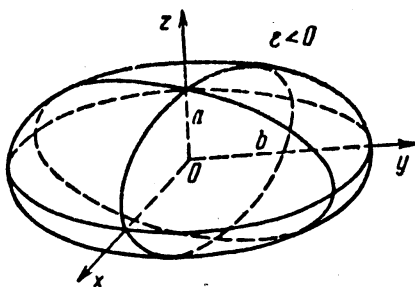


Рис. 1

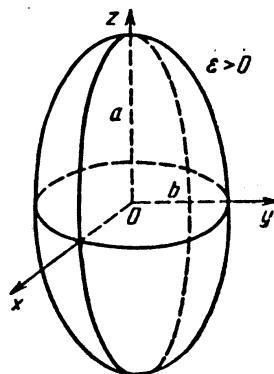


Рис. 2

Помітимо, що формула (1.2) справедлива для випадку  $\varepsilon < 0$  стиснутого в полюсах еліпсоїда обертання, а (1.3) —  $\varepsilon > 0$  витягнутого еліпсоїда обертання.

Перейдемо у виразі (1.1) при  $\varepsilon < 0$  ( $\xi_1 > 1$ ) до визначення коефіцієнта концентрації напружень на поверхні порожнини при  $\rho = 1$ ,  $\gamma = \pi/2$  у залежності від параметра  $\varepsilon$ . Тоді для стиснутого еліпсоїда в цій точці величина  $\xi_1$  дорівнює

$$\xi_1 = b/\rho^* = (b/a)^2 > 1, \quad (1.5)$$

а для витягнутого еліпсоїда обертання  $\varepsilon > 0$  маємо

$$\xi_1 = b/\rho^* = a/y < 1. \quad (1.6)$$

У цій точці для стиснутого ( $\varepsilon < 0$ ) еліпсоїда одержимо

$$\xi_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2. \quad (1.7)$$

Перейдемо в (1.7) від значення  $\varepsilon = -\varepsilon$ , тобто замінивши  $\varepsilon$  на  $(-\varepsilon)$ , де  $\varepsilon > 0$ . Для  $\xi_1$  одержимо вираз

$$\xi_1 = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 > 1. \quad (1.8)$$

Тоді формула (1.1) за умови (1.2) прийме вид

$$K_{\gamma\varphi}^T \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \left[ \left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - 1 \right]^2}{3 \left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^4 \frac{\arctg \sqrt{\left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - 1}}{\sqrt{\left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - 1}} - 5 \left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 + 2}. \quad (1.9)$$

Безпосередній розклад (1.9) в ряд по степеням  $\varepsilon$  є ускладненим, оскільки при значенні  $\varepsilon = 0$  (нульове наближення) маємо невизначеність типу  $\frac{0}{0}$ , а одержати коефіцієнти у вищих наближень практично неможливо. Введемо заміну

$$u(\varepsilon) = \left( \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - 1. \quad (1.10)$$

Тоді (1.9) запишемо у вигляді

$$K_{\gamma\varphi}^T \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{2u^2}{3(u+1)^2 \frac{\arctg \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - 5(u+1) + 2}. \quad (1.11)$$

Відмітимо, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u(\varepsilon) \rightarrow 0$ . У цьому випадку  $K_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))$  є складною функцією і її розклад в ряд по степеням  $\varepsilon$  в околі значення  $\varepsilon = 0$  має вигляд

$$K_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon)) = K_{\gamma\varphi}^T(0) + \frac{dK_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du} \cdot \frac{du}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2 K_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du^2} \left( \frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{dK_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du} \cdot \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \right]_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon^2 + \dots \quad (1.12)$$

Скористаємося розкладом функції  $\frac{\arctg \sqrt{u}}{\sqrt{u}}$  при  $|\sqrt{u}| < 1$  в ряд по степеням  $\sqrt{u}$  [1]

$$\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = 1 - \frac{u}{3} + \frac{u^2}{5} - \frac{u^3}{7} + \dots + (-1)^n \frac{u^n}{2n+1} + \dots \quad (1.13)$$

Використовуючи розклад (1.13) та виділивши зі знаменника множник  $u^2$ , переходимо від виразу (1.11) до наступного його вигляду

$$K_{\gamma\varphi}^T = \frac{2}{\frac{8}{5} - \frac{8}{35}u + \frac{8}{105}u^2 - \frac{8}{231}u^3 + \dots} \quad (1.14)$$

Переходячи до границі в (1.14) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $u(\varepsilon) \rightarrow 0$ ) при  $\varepsilon = 0$ , отримаємо

$$K_{\gamma\varphi}^T(0) = 1,25. \quad (1.15)$$

Згідно (1.14) для обчислення коефіцієнтів у розкладі (1.12) по степеням  $\varepsilon$  необхідно від змінної  $u(\varepsilon)$  мати наступні вирази

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{8}{5} - \frac{8}{35}u + \frac{8}{105}u^2 - \frac{8}{231}u^3 + \dots \\ \frac{dV(u)}{du} &= -\frac{8}{35} + \frac{16}{105}u - \frac{8}{77}u^2 + \dots \\ \frac{d^2V(u)}{du^2} &= \frac{16}{105} - \frac{16}{77}u + \dots \\ \frac{d^3V(u)}{du^3} &= -\frac{16}{77} + \dots \\ V^2(u) &= \left(\frac{8}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{8}{35}u + \left(\frac{8}{35}\right)^2 u^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.16)$$

Відмітимо, що коефіцієнти в розкладі (1.12) обчислюються в  $\varepsilon = 0$ ,  $u(0) = 0$ . Інші складові виразу (1.12) у цій точці мають вид згідно (1.10), (1.16)

$$\begin{aligned} \frac{du(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= 4 \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3}, \quad \frac{d^2u(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = 8 \frac{2+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}, \\ \frac{dK_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du} &= \left( \frac{2}{v(u)} \right)' = -2 \frac{v'(u)}{v^2(u)}, \\ \frac{d^2K_{\gamma\varphi}^T(u(\varepsilon))}{du^2} &= -2 \left[ \frac{v''(u)}{v^2(u)} - 2 \left( \frac{v'(u)}{v^2(u)} \right)^2 v(u) \right]. \end{aligned} \quad (1.17)$$



Визначивши коефіцієнти в (1.12) при степенях  $\varepsilon$  у точці  $\varepsilon = 0$ ,  $u(0) = 0$  з врахуванням (1.16), (1.17), отримаємо наступні значення

$$\frac{dK_{\gamma\phi}^T(u(\varepsilon))}{du} \cdot \frac{du}{d\varepsilon} \Big|_{u(0), \varepsilon=0} = \frac{\frac{8^2}{35}}{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2 K_{\gamma\phi}^T(u(\varepsilon))}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{dK_{\gamma\phi}^T(u(\varepsilon))}{du} \cdot \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \right]_{u(0), \varepsilon=0} = \frac{130}{147}. \quad (1.18)$$

В такий спосіб з (1.12) отримаємо наступні вирази розкладу по степеням  $\varepsilon$  з врахуванням повернення до заміни  $\varepsilon$  на  $(-\varepsilon)$  для стиснутого еліпсоїда в точці  $(0, b)$  отримаємо

$$K_{\gamma\phi}^T = 1,25 - \frac{5}{7}\varepsilon + \frac{130}{147}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (1.19)$$

В остаточному підсумку цей вираз з урахуванням обчислення його складових до четвертого знака в точності збігається з виразом (1.4), що отримано в монографії [3] на основі першого варіанта методу збурення форми границі.

2. Перейдемо до визначення точного розв'язку в  $(0, b)$  для витягнутого еліпсоїда обертання при  $\varepsilon > 0$ , тобто з використанням виразів (1.1), (1.3)

$$\xi_1 = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 < 1, \quad K_{\gamma\phi}^T = \frac{2z^2}{3(1-z)^2 \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - 5(1-z) + 2}, \quad (2.1)$$

$$\text{де } z(\varepsilon) = 1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Скористаємося тим випадком, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $z(\varepsilon) \rightarrow 0$  і значеннях  $|z| < 1$  справедливий розклад [1]

$$\ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} = 2 \left( \sqrt{z} + \frac{z\sqrt{z}}{3} + \frac{z^2\sqrt{z}}{7} + \dots + \frac{z^n\sqrt{z}}{2n+1} + \dots \right). \quad (2.2)$$

Тоді вираз (2.1) після ряду перетворень з врахуванням виділеного множника  $z^2$  у знаменнику отримаємо

$$K_{\gamma\varphi}^T(z(\varepsilon)) = \frac{2}{\frac{8}{5} + \frac{8}{35}z + \frac{8}{105}z^2 + \frac{8}{231}z^3 + \frac{8}{429}z^4 + \dots} = \frac{2}{V(z)}. \quad (2.3)$$

За аналогією з (1.16) отримаємо

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{8}{5} + \frac{8}{35}z + \frac{8}{105}z^2 + \frac{8}{231}z^3 + \frac{8}{429}z^4 + \dots, \\ V'(z) &= \frac{8}{35} + \frac{16}{105}z + \frac{8}{77}z^2 + \frac{32}{429}z^3 + \dots, \\ V''(z) &= \frac{16}{105} + \frac{16}{77}z + \frac{32}{143}z^2 + \dots, \quad V'''(z) = \frac{16}{77} + \frac{32}{143}z + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Відзначимо, що в при  $\varepsilon = 0$ ,  $z(0) = 0$ . Похідні від функції  $z(\varepsilon)$  мають вигляд

$$\begin{aligned} z'(\varepsilon) &= \frac{4(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^3}, \quad z'(0) = 4, \quad z''(\varepsilon) = \frac{8(\varepsilon-2)}{(1+\varepsilon)^4}, \quad z''(0) = -16, \\ [z'(\varepsilon)]^2 &= \frac{16(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^6}, \quad [z'(0)]^2 = 16, \quad z'''(\varepsilon) = \frac{8(-3\varepsilon+9)}{(1+\varepsilon)^5}, \quad z'''(0) = 72. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Скористаємося виразами (2.3)—(2.5) для обчислення коефіцієнтів розкладу по степеням  $\varepsilon$  коефіцієнта для концентрації напружень в точці  $(0, b)$  на поверхні еліпсоїдальної порожнини згідно (1.12). Для визначення  $K_{\gamma\varphi}^T(0)$  у формулі (2.3) переходимо до границі  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $z(\varepsilon) \rightarrow 0$ , тобто  $K_{\gamma\varphi}^T(0) = \frac{10}{8} = 1,25$ , а для коефіцієнтів при ступенях  $\varepsilon$  і  $\varepsilon^2$  отримаємо згідно (1.17), замінивши при цьому змінну  $u(\varepsilon)$  на перемінну  $z(\varepsilon)$ , тобто

$$\begin{aligned} \frac{dK_{\gamma\varphi}^T(z(\varepsilon))}{dz} \cdot \frac{dz}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= -2 \frac{v'(z)}{v^2(z)} \cdot 4 \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^3} \Big|_{\varepsilon=0} = 4 \cdot \frac{-2 \frac{8}{35}}{\left(\frac{8}{5}\right)^2} = -0,7142857; \quad (2.6) \\ \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2 K_{\gamma\varphi}^T(z(\varepsilon))}{dz^2} \cdot \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{dK_{\gamma\varphi}^T}{dz} \cdot \frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} \right]_{z(0), \varepsilon=0} &= \\ = \frac{1}{2} \left\{ -2 \left[ \frac{v''}{v^2} - 2 \left(\frac{v'}{v^2}\right)^2 v \right] \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right)^2 - 2 \frac{v'}{v^2} \frac{d^2 z}{d\varepsilon^2} \right\} \Big|_{\varepsilon=0, z(0)} &= \frac{130}{147} = 0,88435. \end{aligned}$$

В такий спосіб і для зазначеного випадку коефіцієнти розкладу при степенях  $\varepsilon$  мають вигляд

$$K_{\text{уп}}^T(z(\varepsilon)) = 1,25 - \frac{5}{7}\varepsilon + \frac{130}{147}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3), \quad (2.7)$$

який цілком збігається з виразом (1.19) і з точністю до четвертого знака збігається з коефіцієнтами розкладу для наближеного розв'язку [3], одержаного методом збурення форми границі. Це свідчить про те, що перший варіант методу збурення форми границі, що розвинутий в [2, 3] О.М. Гузем і Ю.М. Немишем приводить до наближеного розв'язку просторових задач теорії пружності для тіл з концентраторами напружень у вигляді включень або порожнин, близьких до канонічних, що збігається до точного розв'язку зберігаючи члени при вищих степенях  $\varepsilon$  в наближеному розв'язку.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. *Гузь А.Н., Немши Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред: Учеб. пособие. — К.: Вища шк., 1989. — 352 с.
3. *Гузь А.Н., Немши Ю.Н.* Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. — 352 с.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 777 с.
5. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. — М.: Наука, 1971. — 240 с.
6. Методы расчета оболочек. Том 1. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. — Киев: Наук. думка, 1980. — 634 с.
7. *Найфе А.Х.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 535 с.
8. *Немши Ю.Н.* Об одном методе решения трехмерных задач механики деформируемых тел, ограниченных произвольными поверхностями // Докл. АН УССР, Сер. А. — 1976. — № 1. — С. 17—26.
9. *Немши Ю.Н., Чернопиский Д.И.* Упругое равновесие гофрированных тел. — К.: Наук. думка, 1983. — 188 с.
10. *Савин Г.Н., Немши Ю.Н.* Метод возмущений упругих свойств в механике твердых деформируемых тел // Докл. АН СССР. — 1974. — **216**, № 1. — С. 53—55.
11. *Дуртал И.А.* Расчет элементов конструкций из нелинейно упругих материалов. — К.: Техніка, 1976. — 176 с.
12. *Шатице Г.С.* Осесимметричные деформации эллипсоида вращения // Докл. АН СССР. — 1947. — **58**, № 7. — С. 1309—1312.

УДК 539.375

Дохняк Б.М., канд. техн. наук

## РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ ІЗ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Вступ.** Конструкції із композиційних матеріалів знайшли широке застосування у різних галузях сучасної техніки. Це викликано прагненням отримати меншу матеріаломісткість виробів при необхідній міцності і жорсткості, а також можливістю варіювання властивостями композиційного матеріалу за рахунок зміни структури його армування.

Композиційний матеріал представляє собою шарувату структуру, в якій траєкторії армування лежать в площині шарів, зв'язок між якими здійснюється через прошарки в'язучих матеріалів [1,9].

Властивості композиційних матеріалів обумовлюються не тільки властивостями арматури, але і більшою мірою від її укладанням. Варіюючи кут укладання арматури в шарі, можна отримати заданий ступінь анізотропії властивостей, а змінюючи порядок укладання шарів і кут укладання їх по товщині, можна ефективно варіювати жорсткість композиційного матеріалу.

Питання теорії багатошарових пластин і оболонок розглядалися в працях А.Н. Гузя [1,10], С.А. Амбарцумяна [2], П.М. Огибалова і М.А. Колтунова [3], А.Г. Терегулова [4], В.Л. Бідермана [5], В.І. Корольова [6], А.К. Малмейстера, В.П. Тамужа і Г.А. Тетерса [7], Е.І. Григолюка [8] і ін.

### Вихідні співвідношення механіки композиційних матеріалів.

Опис напружено-деформованого стану композиційних елементів здійснюється за допомогою співвідношень, що враховують специфічні особливості армованих матеріалів.

Одношаровий композиційний матеріал можна розглядати як ортотропне середовище (рис. 1). Для моделі (циліндричний – волокно в коаксильній оболонці – матриці), яка враховує відмін-

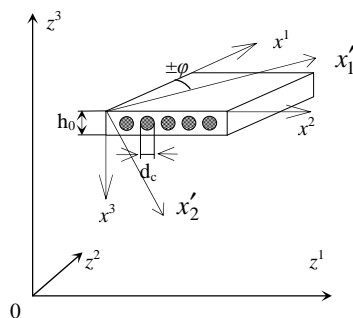


Рис.1.

ності в коефіцієнтах Пуассона матриці і волокон, модуль пружності  $E_1$  в напрямі армуючого волокна в системі армування  $Ox'_1x'_2x'_3$  визначається по формулі:

$$E_1 = E_C \Psi_C + E_R(1 - \Psi_C) + \frac{2(\nu_C - \nu_R)^2 E_C E_R \Psi_C (1 - \nu_C)}{E_R(1 - \nu_R)L_C + [L_R(1 - \Psi_C) + (1 - \nu_R)]E_C}, \quad (1)$$

де  $E_C$  - модуль пружності матеріалу волокна;  $E_R$  - модуль пружності матеріалу матриці;  $\Psi_C$  - коефіцієнт армування, що характеризує відносний об'ємний вміст волокон,  $L_R = 1 - \nu_R - 2\nu_R^2$ ;  $L_C = 1 - \nu_C - 2\nu_C^2$  [4]:

$$\Psi_C = \frac{\pi d_C^2}{4h_0} i_C, \quad (2)$$

де  $d_C$  - діаметр волокон;  $h_0$  - товщина армованого шару;  $i_C$  - частота армування.

Поперечні модулі пружності  $E_2$  і  $E_3$  визначаються співвідношенням [9]:

$$E_2 = E_3 = \frac{E_C E_R}{E_R \Psi_C + E_C(1 - \Psi_C)}. \quad (3)$$

При збігу осі 1 з напрямом укладання волокон  $G_{12}$  і  $G_{13}$  характеризують пружні матеріалу в площинах 1-2 і 1-3 паралельних волокнам. Правило адитивності для композиційного матеріалу з суцільними волокнами наступне [9]:

$$G_{12} = G_{13} = \frac{G_C G_R}{G_C(1 - \Psi_C) + G_R \Psi_C}, \quad (4)$$

де  $G_C$  і  $G_R$  - модулі зсуву, відповідно матеріалів волокон і матриці.

Модуль зсуву  $G_{23}$ , що характеризує зв'язок між дотичними напруженнями і деформацією зсуву в площині 2-3, перпендикулярній осі волокон визначається по формулі [9]:

$$G_{23} = G_R \frac{(K_R + \Psi_C)G_C + (1 - \Psi_C)G_R}{K_R \Psi_R G_C + (1 + K_R \Psi_C)G_R}, \quad (5)$$

де  $K_R = 3 - 4\nu_R$ ;  $\nu_R$  - коефіцієнт Пуассона для матеріалу матриці.

Коефіцієнт Пуассона для однонаправленого композиційного матеріалу визначається по формулі [9]:

$$v_{12} = v_C \Psi_C + v_R(1 - \Psi_C). \quad (6)$$

Тіло, що має три ортогональні площини пружної симетрії, називається ортотропним. Воно характеризується дев'ятьма пружними характеристиками, оскільки [1]:

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}. \quad (7)$$

Запишемо закон Гука для ортотропного шару [13]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + A_{13}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{22} &= A_{21}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + A_{23}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{33} &= A_{31}\varepsilon_{11} + A_{32}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= 2G_{12}\varepsilon_{12}; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2G_{13}\varepsilon_{13}; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2G_{23}\varepsilon_{23}. \end{aligned} \quad (8)$$

Параметри  $A_{ij}$  знаходяться із розв'язку системи

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{12} \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{13} \frac{\sigma_{33}}{E_3}; \quad \varepsilon_{22} = -\nu_{21} \frac{\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_{23} \frac{\sigma_{33}}{E_3}; \\ \varepsilon_{33} &= -\nu_{31} \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \nu_{32} \frac{\sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G_{ij}} \quad (i, j = \overline{1,3}, i \neq j), \end{aligned} \quad (9)$$

і дорівнюють:

$$\begin{aligned} A_{11} &= E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Delta; & A_{12} &= A_{21} = E_2(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})/\Delta; \\ A_{13} &= A_{31} = E_3(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21})/\Delta; & A_{22} &= E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})/\Delta; \\ A_{23} &= A_{32} = E_3(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})/\Delta; & A_{33} &= E_3(1 - \nu_{21}\nu_{12})/\Delta, \end{aligned}$$

де  $\Delta = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{32}\nu_{21})$ .

Одношаровий матеріал в загальному випадку не є ортотропним, так як його деформація залежить від напрямку навантаження. Деформація зсуву викликає нормальні напруження, а продольні здовження – дотичні напруження. На практиці частіше застосовується симетрична схема укладки шарів з перехресним армуванням під кутами  $\pm\varphi$ .

При повороті системи координат на кут  $\varphi$  пружні параметри перетворюються по формулах [13]:

$$B_{11} = A_{11} \cos^4 \varphi + 2(A_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{23} \sin^4 \varphi;$$

$$\begin{aligned}
B_{22} &= A_{11} \sin^4 \varphi + 2(A_{12} + 2G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{23} \cos^4 \varphi; \\
B_{12} &= (A_{11} + A_{22} - 2A_{12} - 4G_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + A_{12}; \quad B_{33} = A_{33}; \\
B_{13} &= A_{13} \cos^2 \varphi + A_{23} \sin^2 \varphi; \quad B_{23} = A_{13} \sin^2 \varphi + A_{23} \cos^2 \varphi; \\
B_{66} &= (A_{11} + A_{22} - 2(A_{12} + G_{12})) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + G_{12}; \\
B_{44} &= G_{23} \cos^2 \varphi + G_{13} \sin^2 \varphi; \quad B_{55} = G_{23} \sin^2 \varphi + G_{13} \cos^2 \varphi; \\
B_{16} &= 0.5(A_{22} \sin^2 \varphi - A_{11} \cos^2 \varphi + (A_{12} + 2G_{12}) \cos 2\varphi) \sin 2\varphi; \\
B_{26} &= 0.5(A_{22} \cos^2 \varphi - A_{11} \sin^2 \varphi + (A_{12} + 2G_{12}) \cos 2\varphi) \sin 2\varphi; \\
B_{36} &= 0.5(A_{23} - A_{13}) \sin 2\varphi; \quad B_{45} = 0.5(G_{23} - G_{13}) \sin 2\varphi.
\end{aligned} \tag{10}$$

Закон Гука тепер буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= B_{11} \varepsilon_{11} + B_{12} \varepsilon_{22} + B_{13} \varepsilon_{33} + 2B_{16} \varepsilon_{12}; \\
\sigma_{22} &= B_{21} \varepsilon_{11} + B_{22} \varepsilon_{22} + B_{23} \varepsilon_{33} + 2B_{26} \varepsilon_{12}; \\
\sigma_{33} &= B_{31} \varepsilon_{11} + B_{32} \varepsilon_{22} + B_{33} \varepsilon_{33} + 2B_{36} \varepsilon_{12}; \\
\sigma_{12} &= \sigma_{21} = B_{61} \varepsilon_{11} + B_{62} \varepsilon_{22} + B_{63} \varepsilon_{33} + 2B_{66} \varepsilon_{12}; \\
\sigma_{13} &= \sigma_{31} = 2B_{45} \varepsilon_{23} + 2G_{13} \varepsilon_{13}; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 2G_{23} \varepsilon_{23} + 2B_{55} \varepsilon_{13}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Якщо кожен з симетричних шарів є анізотропним в системі координат  $x^1, x^2$ , то спільна робота двох шарів утворює ортотропний матеріал, для якого закон Гука спрощується до виду (8). Обчисливши напруження по формулам (10) для кутів армування  $\pm\varphi$  і осереднюючи по шарам:

$$\sigma_{11} = 0.5(\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-); \quad \sigma_{22} = 0.5(\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-); \quad \sigma_{12} = 0.2(\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-);$$

знайдемо нові пружні параметри ортотропного матеріалу  $\bar{E}_i, \bar{\nu}_{ij}$  [5]:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_1 &= \frac{\Delta^*}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}; \quad \bar{E}_2 = \frac{\Delta^*}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}; \quad \bar{E}_3 = \frac{\Delta^*}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}; \\
\bar{\nu}_{12} &= \frac{B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}}{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}; \quad \bar{\nu}_{13} = \frac{B_{13}B_{22} - B_{12}B_{23}}{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}; \quad \bar{\nu}_{23} = \frac{B_{11}B_{23} - B_{12}B_{13}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2};
\end{aligned}$$

де  $\Delta^* = \det \mathbf{B}$ .

Особливість напружено-деформованого стану композиційного матеріалу можна врахувати тензором пружних постійних  $C^{ijkl}$ . Закон Гука

для анізотропного тіла в тензорній формі, який пов'язує компоненти тензора напружень  $\sigma^{ij}$  і деформацій  $\varepsilon_{ij}$  має вигляд:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (12)$$

Компоненти тензора пружних постійних обчислюються по формулах :

$$\begin{aligned} C^{1111} &= \frac{\bar{E}_1}{\Delta_*} (1 - \bar{v}_{23} \bar{v}_{32}); & C^{1122} &= \frac{\bar{E}_2}{\Delta_*} (\bar{v}_{21} + \bar{v}_{31} \bar{v}_{23}); \\ C^{1133} &= \frac{\bar{E}_3}{\Delta_*} (\bar{v}_{31} + \bar{v}_{21} \bar{v}_{32}); & C^{2211} &= \frac{\bar{E}_1}{\Delta_*} (\bar{v}_{12} + \bar{v}_{13} \bar{v}_{32}); \\ C^{2222} &= \frac{\bar{E}_2}{\Delta_*} (1 - \bar{v}_{13} \bar{v}_{31}); & C^{2233} &= \frac{\bar{E}_3}{\Delta_*} (\bar{v}_{32} + \bar{v}_{12} \bar{v}_{31}); \\ C^{3311} &= \frac{\bar{E}_1}{\Delta_*} (\bar{v}_{13} + \bar{v}_{12} \bar{v}_{23}); & C^{3322} &= \frac{\bar{E}_2}{\Delta_*} (\bar{v}_{23} + \bar{v}_{13} \bar{v}_{21}); \\ C^{3333} &= \frac{\bar{E}_3}{\Delta_*} (1 - \bar{v}_{21} \bar{v}_{12}); & C^{1212} &= \frac{G_{12}}{2}; C^{1313} = \frac{G_{13}}{2}; C^{2323} = \frac{G_{23}}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $\Delta_* = (1 - \bar{v}_{12} \bar{v}_{21} - \bar{v}_{13} \bar{v}_{31} - \bar{v}_{23} \bar{v}_{32} - \bar{v}_{12} \bar{v}_{23} \bar{v}_{31} - \bar{v}_{13} \bar{v}_{32} \bar{v}_{21})$ .

Для ортотропного матеріалу матриця пружних постійних має наступний :

$$C^{ijkl} = \begin{bmatrix} C^{1111} & 0 & 0 & 0 & C^{1122} & 0 & 0 & 0 & C^{1133} \\ 0 & C^{1212} & 0 & C^{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{1313} & 0 & 0 & 0 & C^{1331} & 0 & 0 \\ 0 & C^{2112} & 0 & C^{2121} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C^{2211} & 0 & 0 & 0 & C^{2222} & 0 & 0 & 0 & C^{2233} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{2323} & 0 & C^{2332} & 0 \\ 0 & 0 & C^{3113} & 0 & 0 & 0 & C^{3131} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{3223} & 0 & C^{3232} & 0 \\ C^{3311} & 0 & 0 & 0 & C^{3322} & 0 & 0 & 0 & C^{3333} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Компоненти тензора пружних постійних задаються в місцевій ортогональній системі координат. Для переходу в базисну декартову систему координат перетворення тензора четвертого рангу здійснюється по формулі [9]:

$$C^{ijkl} = C_*^{mnpq} a_m^i a_n^j a_p^k a_q^l, \quad (15)$$



де  $a_m^i$  - тензор повороту системи координат, який пов'язаний з тензором

перетворення координат  $b_m^i = \frac{\partial z^i}{\partial x_m}$  наступним співвідношенням

$$a_m^i = \frac{b_m^i}{\sqrt{g_{mm}}};$$

$g_{ij}$  – компоненти метричного тензора.

Матриця жорсткості композиційного скінченного елемента будується на основі стандартних процедур з використанням моментної схеми [12]. Вище викладена методика скінченно-елементного дослідження напружено-деформованого стану просторових конструкцій композиційних матеріалів реалізована у вигляді пакету прикладних програм «МРЕЛА+» для РС IBM [11].

Задача 1. Задача Ляме для порожнистого циліндра із ортотропного матеріалу під дією внутрішнього тиску [13].

Геометричні розміри оболонки: внутрішній радіус  $R_1 = 0.1m$ ; зовнішній –  $R_2 = 0.15m$ . Інтенсивність внутрішнього тиску  $q = 0.2$  МПа. Фізичні постійні для волокон і матриці композиційного матеріалу:  $E_C = 12800$  МПа;  $\nu_C = 0.3$ ;  $E_R = 2.1$  МПа;  $\nu_R = 0.49$ . Частота армування композиту  $\Psi_C = 0.5$ , кут армування шару  $\phi = \pm 15^\circ$ . Пружні параметри ортотропного матеріалу для відповідних характеристик: радіальний модуль  $E_1 = 2304$  МПа; тангенціальний –  $E_2 = 5859,5$  МПа;  $\nu_{21} = 0.28$ .

В полярній системі координат для плоскої задачі теорії пружності, рівняння рівноваги має вигляд:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\Theta}{r} = 0. \quad (16)$$

Закон Гука для вісесиметричної задачі ортотропного матеріалу запишеться у вигляді:

$$\sigma_r = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (E_1 \varepsilon_r + E_2 \nu_{12} \varepsilon_\Theta); \quad (17)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (E_1 \nu_{21} \varepsilon_r + E_2 \varepsilon_\Theta). \quad (18)$$

Використовуючи співвідношення Коші між деформаціями і радіальним переміщенням  $u$  і підставляючи напруження в рівняння рівноваги (16) отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{E_2}{E_1} \frac{u}{r^2} = 0. \quad (19)$$

Розв'язком цього рівняння є функція:

$$u = Ar\sqrt{E_2/E_1} + \frac{B}{r\sqrt{E_2/E_1}}. \quad (20)$$

По переміщеннях згідно з (17) і (18) знаходимо напруження:

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{E_2}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left( Ar\sqrt{E_2/E_1-1} \left( \sqrt{E_2}\nu_{12} + \sqrt{E_1} \right) + \frac{B}{r\sqrt{E_2/E_1+1}} \left( \sqrt{E_2}\nu_{12} - \sqrt{E_1} \right) \right); \quad (21)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{\sqrt{E_2}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \left( Ar\sqrt{E_2/E_1-1} \left( \sqrt{E_1}\nu_{21} + \sqrt{E_2} \right) + \frac{B}{r\sqrt{E_2/E_1+1}} \left( \sqrt{E_2} - \sqrt{E_1}\nu_{21} \right) \right). \quad (22)$$

Постійні  $A$  і  $B$  визначаються граничних умов: при  $r = R_1$ ,  $\sigma_r = -q$ , при  $r = R_2$ ,  $\sigma_r = 0$ .

Розв'язавши систему, знаходимо:

$$A = \frac{qR_1\sqrt{E_2/E_1+1}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{(\sqrt{E_1E_2} + E_2\nu_{12})(R_2^{2\sqrt{E_2/E_1}} - R_1^{2\sqrt{E_2/E_1}})}, \quad (23)$$

$$B = \frac{qR_1\sqrt{E_2/E_1+1}R_2^{2\sqrt{E_2/E_1}}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{(\sqrt{E_1E_2} - E_2\nu_{12})(R_2^{2\sqrt{E_2/E_1}} - R_1^{2\sqrt{E_2/E_1}})}. \quad (24)$$

Аналітичний розв'язок задачі по переміщеннях складає:  $u_1 = 0.10515 \cdot 10^{-4}$  м,  $u_2 = 0.07859 \cdot 10^{-4}$  м, чисельний розв'язок по МСЕ  $u_1 = 0.1036 \cdot 10^{-4}$  м,  $u_2 = 0.0758 \cdot 10^{-4}$  м. Похибка складає 1.42–3.56 %.

На рис. 2–3 приведені графіки розподілу радіальних  $\sigma_r$  і тангенціальних  $\sigma_\Theta$  напружень по товщині циліндра. На рис. 4 наведено залежність

деформації циліндра від кута армування  $\varphi$ . Похибка по напруженням також на перевищує 5%.

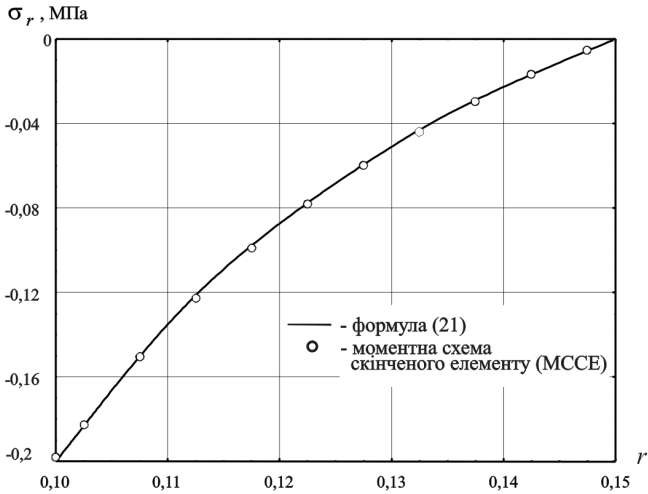


Рис. 2. Розподіл радіальних напружень  $\sigma_r$  по товщині циліндра

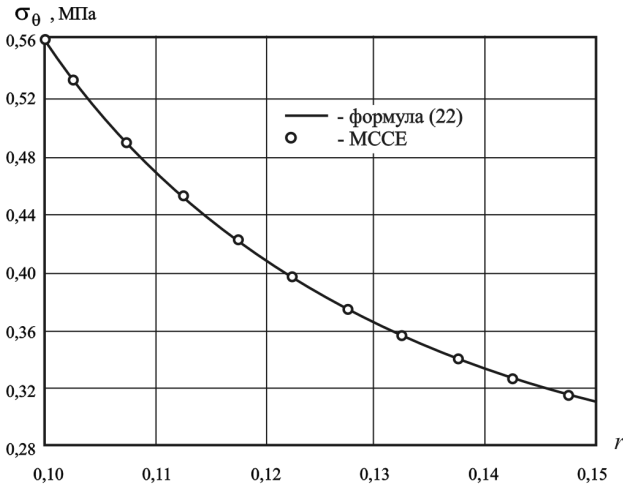


Рис. 3. Розподіл тангенціальних напружень  $\sigma_\theta$  по товщині циліндра

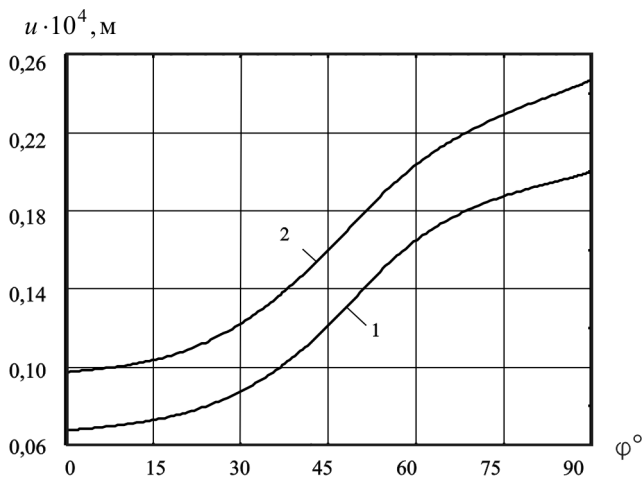


Рис.4. Залежність переміщень на внутрішній – 1, та зовнішній поверхні циліндра – 2 від кута армування

Задача 2. Напружено–деформований стан оболонки тора під дією внутрішнього тиску.

Тороїдальна оболонка виконана з восьми перехресний армованих шарів. Шари оболонки мають однотипну будову з кутами перехресного армування  $\varphi = \pm 52^\circ$ . Геометричні розміри: радіус по меридіану  $R = 40$  см, радіус по тору  $r = 10$  см, товщина –  $h = 0.96$  см, кут розвороту  $\alpha = 120^\circ$ . Каркасним матеріалом армованого шару, завтовшки 0.12 см, є текстильний корд з модулем пружності  $E_C = 1600$  МПа і коефіцієнтом Пуассона  $\nu_C = 0.4$ . Матеріал матриці – гума з  $E_R = 3.6$  МПа та  $\nu_R = 0.49$ . Діаметр нитки корду  $d_C = 0.07$  мм; частота армування  $i_C = 9.9$  ниток/см. Внутрішній тиск  $p = 0.2$  МПа.

На рис. 5 приведені графіки розподілу радіальних  $\sigma_{22}$  напружень, які по товщині оболонки змінюється лінійно. На рис. 6 наведені графіки розподілу дотичних  $\sigma_{12}$  напружень в залежності від кута розвороту  $\alpha$ .

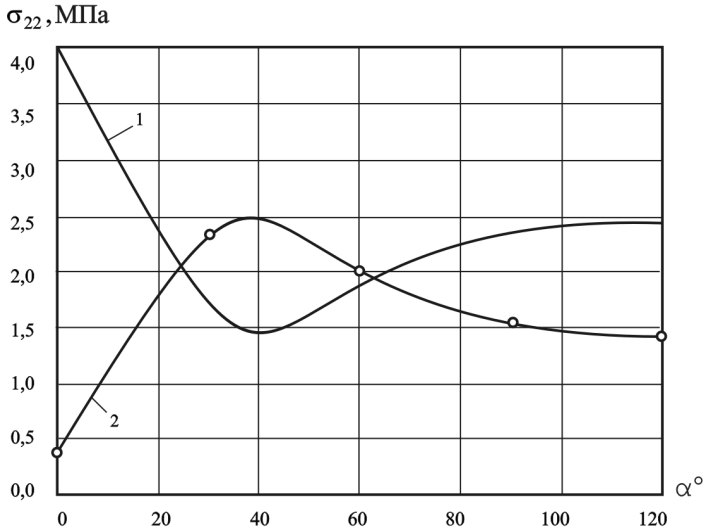


Рис. 5. Розподіл напружень  $\sigma_{22}$  на внутрішній (1) та зовнішній (2) поверхнях тора

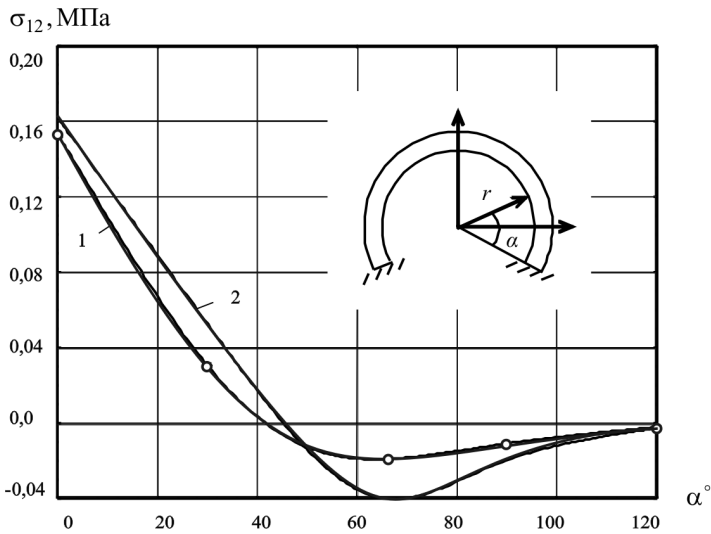


Рис. 6. Розподіл напружень  $\sigma_{12}$  на внутрішній (1) та центральній  $h/2$  (2) поверхнях тора

**Висновок.** Як показує аналіз, результати дослідження напружено-деформованого стану композиційних матеріалів методом скінченних елементів добре узгоджуються з аналітичним. Використання МСЕ дозволяє досліджувати більш геометрично складні конструкції.

1. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х т. Т.1. Механика материалов/Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. – Киев: Наук. думка, 1982. – 368 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. – 448с.
3. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ. 1969. – 695с.
4. *Терегулов А.Г.* К теории многослойных анизотропных оболочек. – В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд. КГУ. 1970., вып. 6-7. С. 762-767.
5. *Бидерман В.Л.* Пластинки и оболочки из стеклопластиков. В кн.: Прочность, устойчивость, колебания. М.: Машиностроение, 1968. Т. 2. С. 211-242.
6. *Королев В.И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М., Машиностроение, 1965. 272с.
7. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498с.
8. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
9. Композиционные материалы. Справочник//Под ред. Карпиноса, Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
10. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986.–511 с.
11. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МРЕЛА+». – / Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г. и др. – К.: Наукова думка, 2005. – 403 с.
12. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др. // Под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
13. *Дохняк Б.М., Киричевский В.В., Карпушин А.Д.* Метод конечных элементов в исследовании оболочечных конструкций из композиционных материалов. - Труды девятого симпозиума "Проблемы шин и резинокордных композитов. Надежность, стабильность-качество". Изд-во НИИ шинной промышленности. Москва.-1998. - С. 133-140.

УДК 539.3

Киричук О.А., д-р техн. наук,  
Палій О.М.

## ВПЛИВ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА СТІЙКІСТЬ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Оболонкові конструкції, які є елементами сучасних споруд, в процесі експлуатації сприймають інтенсивні технологічні навантаження, в тому числі і динамічні, що змінюються періодично за часом. Найбільшу увагу дослідників, при вивченні динамічної стійкості конструкцій, привертають випадки, коли частота змушених коливань наближається до однієї з власних частот коливань конструкції. Це призводить до різкого збільшення амплітуд коливань конструкцій, що є неприйнятним з експлуатаційної точки зору. В той же час і при фіксованій частоті коливань збільшення амплітуди періодичного навантаження може привести до різного збільшення амплітуди коливань оболонки або змінити її форми коливань.

Мета даної роботи полягає у дослідженні впливу геометричних характеристик на стійкість усталених коливань циліндричних оболонок при дії періодичних за часом рівномірно розподілених повздовжніх навантажень.

Будемо розглядати оболонки з ковзним кріпленням вздовж твірної на одному кінці, а інший край оболонки вважатимемо жорстко закріпленим. При дії періодичного навантаження невеликої інтенсивності коливання оболонок відбуваються по симетричним відносно осі формам. Збільшення інтенсивності силового збурювання при фіксованій частоті може переводити їхні симетричні моди в циклічно симетричні. За певних умов, залишаючись симетричними, коливання оболонок можуть різко збільшити амплітуду і змінити форму коливань. Перераховані явища характеризують втрату стійкості усталеного руху.

Для дослідження стійкості вимушених нелінійних коливань оболонок використовується метод криволінійних сіток, за допомогою якого здійснюється перехід від векторних звичайних диференціальних співвідношень до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь [1]. Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження по параметру в поєднанні з методом Ньютона – Канторовича. На кожному кроці реалізації обчислювального алгоритму аналізуються значення визначників матриці лінеаризованих рівнянь, що відповідають

симетричним або циклічно симетричним формам коливань. Критерій втрати стійкості коливань оболонки полягає у зміні знаку відповідного визначника, а рівень інтенсивності навантаження, що відповідає цьому стану, характеризує критичне динамічне навантаження [2,3,4].

В рамках даної статті розглянута циліндрична оболонка, матеріал якої характеризується параметрами: коефіцієнт Пуассона  $\mu=0,3$ , модуль пружності  $E=2,06 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ; щільність  $\gamma=7800 \text{ кг/м}^3$  під дією періодичного за часом рівномірно розподіленого повздовжнього навантаження з інтенсивністю  $q=q_1 \cos \omega t$ . З метою вивчення впливу зміни геометричних параметрів даної оболонки на стійкість її усталених нелінійних коливань товщина  $h$  оболонки змінювалась в межах від 0,001 м до 0,004 м. Розглядалися варіанти, коли радіус  $R$  набував значень 0,2 м, 0,4 м, 0,8 м та висота  $L$  оболонки дорівнювала 0,48 м, 0,72 м та 0,96 м.

В таблиці 1 наведені критичні значення  $q_1^*$  амплітуд навантаження при відповідних кругових частотах коливань циліндричних оболонок з геометричними параметрами:  $R=0,2 \text{ м}$ ,  $L=0,48 \text{ м}$ , а також номери гармонік  $n$ , які характеризують циклічно симетричні форми втрати стійкості коливань. Товщина оболонки  $h$  змінювалась в межах від 0,004 м до 0,001 м.

Таблиця 1

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h=0,004 \text{ м}, R=0,2 \text{ м}, L=0,48 \text{ м}$								
0	6	11000,05	2900	4	10500,05	4300	5	7000,05
100	6	11000,05	3000	4	10300,05	4400	5	6000,05
300	6	11000,05	3100	4	10000,05	4500	5	4700,05
500	6	11000,05	3300	4	9300,05	4600	5	2650,05
700	6	11000,05	3600	4	7900,05	4630	5	1550,05
1000	6	10950,05	3800	4	6600,05	4640	5	850,05
1400	6	10950,05	4000	4	4850,05	4645	5	0,05
1700	6	10900,05	4200	4	1250,05	4700	3	9050,05
2000	6	10850,05	4210	4	600,05	4800	3	8000,05
2200	6	10800,05	4211	4	500,05	4900	3	6700,05
2400	6	10750,05	4212	4	350,05	5000	3	5000,05
2600	6	10700,05	4213	4	100,05	5100	3	2100,05
2800	6	10650,05	4214	4	0,05	5120	3	0,05
2850	4	10650,05	4220	5	7650,05	5200	5	910,05



1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h=0,002$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м								
0	8	2800,05	3030	5	750,05	3340	6	350,05
100	8	2800,05	3050	5	600,05	3347	6	100,05
300	8	2800,05	3060	5	500,05	3348	6	0,05
500	8	2800,05	3070	5	350,05	3360	4	1700,05
700	8	2850,05	3080	5	100,05	3370	4	1650,05
1000	8	2850,05	3081	5	0,05	3390	4	1550,05
1400	8	2800,05	3085	6	1850,05	3400	4	1500,05
1700	8	2750,05	3090	6	1800,05	3450	4	1150,05
2000	8,9	2750,05	3100	6	1800,05	3500	4	700,05
2300	5	2600,05	3150	6	1600,05	3520	4	400,05
2500	5	2350,05	3160	6	1600,05	3528	4	0,05
3000	5	950,05	3200	6	1400,05	3550	7	2550,05
3010	5	900,05	3330	6	500,05	3600	7	2500,05
$h=0,0015$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м								
50	10	1570,01	2100	6	1480,01	2775	5	100,01
100	10	1570,01	2200	6	1400,01	2776	5	60,01
200	10	1565,01	2300	6	1290,01	2777	5	0,01
300	10	1565,01	2400	6	1170,01	2780	7	1410,01
600	10	1565,01	2500	6	1010,01	2800	7	1400,01
700	10	1565,01	2600	6	820,01	2900	7	1280,01
900	10	1560,01	2700	6	520,01	3000	7	1100,01
1000	10	1560,01	2750	6	230,01	3100	7	810,01
1200	10,11	1560,01	2760	6	100,01	3199	7	0,01
1400	10	1550,01	2762	6	0,01	3220	4	1270,01
1600	10	1550,01	2763	5	250,01	3250	4	1170,01
1800	10	1540,01	2765	5	230,01			
2000	10,11	1540,01	2770	5	180,01			
$h=0,001$ м, $R=0,2$ м, $L=0,48$ м								
50	13	690,002	1600	13	680,002	2350	7	90,002
100	13	690,002	1800	6	625,002	2356	7	35,002
200	13	690,002	2000	6	485,002	2357	7	0,002
300	13	690,002	2100	6	382,502	2400	5	445,002
600	13	687,502	2200	6	227,502	2450	5	355,002
700	13	687,502	2250	6	40,002	2500	5	232,502
900	13	687,502	2252	6	0,002	2530	5	92,5025
1000	12,13	687,502	2260	7	327,502	2536	5	0,002
1200	13	685,002	2280	7	295,002	2550	8	540,002
1400	13	682,502	2300	7	255,002			

На рис. 1 відображені залежності критичних значень  $q_1^*$  амплітуд навантаження, що періодично змінюється з часом, від кругової частоти коливань циліндричних оболонок з геометричними параметрами:  $R=0,2$  м,  $L=0,48$  м. При цьому  $h$  набуває значень  $h=0,004$  м (рис. 1а),  $h=0,002$  м (рис. 1б),  $h=0,0015$  м (рис. 1, в, г),  $h=0,001$  м (рис. 1,д)

Оскільки значення власних частот в деяких частотних зонах є дуже близькими (рис.1в), вони приведені в більшому мірілі на рис. 1, г.

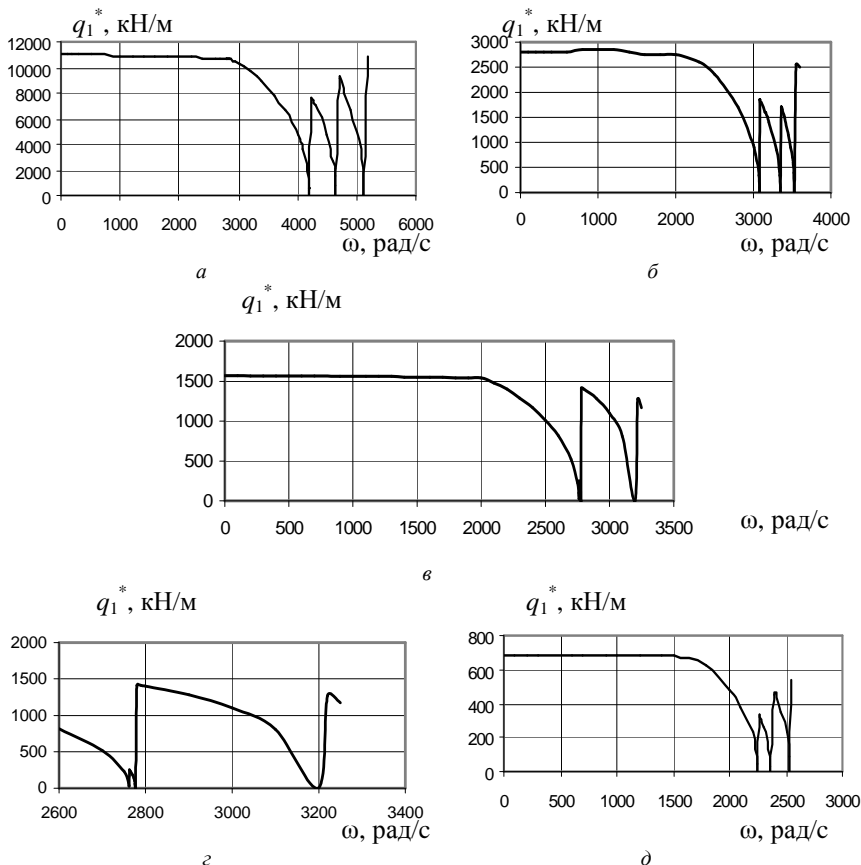


Рис.1. Залежність критичного значення  $q_1^*$  амплітуди навантаження від частоти при  $R=0,2$  м,  $L=0,48$  м а)  $h=0,004$  м, б)  $h=0,002$  м, в, г)  $h=0,0015$  м, д)  $h=0,001$  м

В табл. 2 наведені результати обчислень для оболонки з  $h=0,002\text{м}$ ,  $R=0,2\text{м}$  для випадків:  $L=0,48\text{ м}$ ,  $0,72\text{м}$ ,  $0,96\text{м}$  при відповідних значеннях кругової частоти.

Таблиця 2

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h=0,002\text{ м}, R=0,2\text{ м}, L=0,48\text{ м}$								
0	8	2800,05	3030	5	750,05	3340	6	350,05
100	8	2800,05	3050	5	600,05	3347	6	100,05
300	8	2800,05	3060	5	500,05	3348	6	0,05
500	8	2800,05	3070	5	350,05	3360	4	1700,05
700	8	2850,05	3080	5	100,05	3370	4	1650,05
1000	8	2850,05	3081	5	0,05	3390	4	1550,05
1400	8	2800,05	3085	6	1850,05	3400	4	1500,05
1700	8	2750,05	3090	6	1800,05	3450	4	1150,05
2000	8,9	2750,05	3100	6	1800,05	3500	4	700,05
2300	5	2600,05	3150	6	1600,05	3520	4	400,05
2500	5	2350,05	3160	6	1600,05	3528	4	0,05
2800	5	1700,05	3180	6	1500,05	3550	7	2550,05
3000	5	950,05	3200	6	1400,05	3600	7	2500,05
3010	5	900,05	3330	6	500,05			
$h=0,002\text{ м}, R=0,2\text{ м}, L=0,72\text{ м}$								
0	9	1820,005	2050	4	560,005	2420	9	1710,005
100	9	1820,005	2080	4	305,005	2440	6	1705,005
200	9	1820,005	2092	4	50,005	2460	6	1695,005
300	9	1820,005	2100	5	1095,005	2500	6	1680,005
400	9	1815,005	2200	5	625,005	2600	3	1575,005
600	9	1815,005	2210	5	550,005	2700	3	845,005
800	9	1810,005	2220	5	465,005	2720	3	590,005
1000	9	1800,005	2230	5	355,005	2730	3	405,005
1200	9	1795,005	2240	5	190,005	2738	3	0,005
1400	9	1785,005	2245	5	0,005	2740	6	1490,005
1600	4,9	1775,005	2250	9	1725,005	2750	6	1470,005
1800	4	1415,005	2300	9	1720,005			
2000	4	825,005	2400	9	1715,005			

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h=0,002$ м, $R=0,20$ м, $L=0,96$ м								
0	15	1080,005	1500	4	630,005	1783	3	0,005
100	15	1080,005	1550	4	365,005	1784	15	1025,005
200	15	1080,005	1560	4	280,005	1800	15	1025,005
300	15	1080,005	1570	4	150,005	1900	5	1005,005
400	15	1080,005	1575	4	0,005	2000	5	275,005
600	15	1075,005	1580	15	1040,005	2007	5	0,005
800	15	1070,005	1600	15	1040,005	2050	15	1010,005
1000	15	1065,005	1700	3	845,005	2100	15	1005,005
1200	15	1055,005	1750	3	535,005			
1400	4	935,005	1760	3	445,005			

Рисунок 2 демонструє залежності  $q_1^*$  -  $\omega$  для оболонки з  $h=0,002$ м,  $R=0,2$ м, для випадків:  $L=0,48$ м (рис. 2,а),  $L=0,72$ м (рис.2, б),  $L=0,96$ м (рис. 2,в).

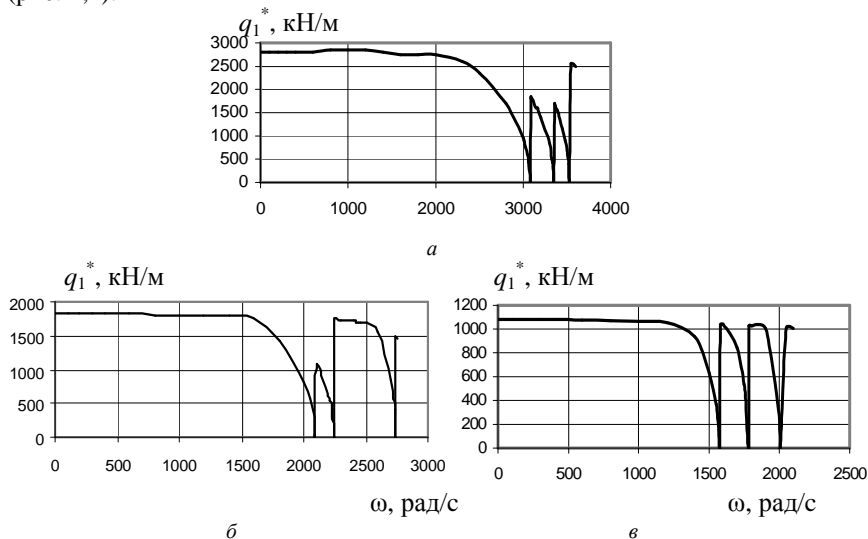


Рис. 2. Залежність  $q_1^*$  від частоти при значеннях параметрів оболонки  $h=0,002$ м,  $R=0,2$ м: а)  $L=0,48$ м; б)  $L=0,72$ м; в)  $L=0,96$ м

В таблиці 3 приведені результати обчислень для оболонки з  $h=0,002$ м,  $L=0,72$ м для випадків:  $R=0,2$ м,  $R=0,4$ м,  $R=0,8$ м.

Таблиця 3

$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$	$\omega$	$n$	$q_1^*$
$h=0,002 \text{ м}, R=0,2 \text{ м}, L=0,72 \text{ м}$								
0	9	1820,005	2000	4	825,005	2400	9	1715,005
100	9	1820,005	2050	4	560,005	2420	9	1710,005
200	9	1820,005	2080	4	305,005	2440	6	1705,005
300	9	1820,005	2092	4	50,005	2460	6	1695,005
400	9	1815,005	2200	5	625,005	2500	6	1680,005
600	9	1815,005	2210	5	550,005	2600	3	1575,005
800	9	1810,005	2220	5	465,005	2700	3	845,005
1000	9	1800,005	2230	5	355,005	2720	3	590,005
1200	9	1795,005	2240	5	190,005	2730	3	405,005
1400	9	1785,005	2245	5	0,005	2738	3	130,005
1600	4,9	1775,005	2250	9	1725,005	2740	6	1490,005
1800	4	1415,005	2300	9	1720,005	2750	6	1470,005
$h=0,002 \text{ м}, R=0,4 \text{ м}, L=0,72 \text{ м}$								
0	12,13	930,005	1300	7	660,005	1550	8	200,005
100	12,13	930,005	1400	7	455,005	1560	8	90,005
200	12,13	930,005	1450	7	299,005	1562,5	8	17,005
400	12,13	930,005	1460	7	240,005	1562,6	8	0,005
600	13	930,005	1480	7	60,005	1563	6	230,005
700	12,13	925,005	1481,5	7	0,005	1565	6	220,005
900	12,13	920,005	1482	8	490,005	1570	6	175,005
1000	12,13	920,005	1485	8	485,007	1579,5	6	0,005
1100	7	890,005	1490	8	470,005	1580	9	820,005
1200	7	795,005	1500	8	435,005	1600	9	800,005
$h=0,002 \text{ м}, R=0,8 \text{ м}, L=0,72 \text{ м}$								
0	15	465,005	1040	11	70,005	1049	10	205,005
100	15	465,005	1042	11	55,005	1050	10	200,005
200	15	465,005	1043	11	50,005	1060	10	175,005
300	15	465,005	1044	11	25,005	1070	10	140,005
400	14,15	465,005	1044,5	11	15,005	1080	10	95,005
600	15	460,005	1044,62	11	0,005	1085	10	55,005
700	12-15	460,005	1044,7	12	50,005	1086	10	35,005
800	12	425,005	1045	12	50,005	1087	10	35,005
900	11	350,005	1046	12	35,005	1087,67	10	0,005
1000	11	205,005	1047	12	15,005	1088	13	35,005
1010	11	185,005	1047,5	12	0,005	1090	13	270,005
1020	11	155,005	1048	10	205,005			

Рисунок 3 відображає залежності  $q_1^*$  від частоти коливань циліндричних оболонок з геометричними параметрами:  $h=0,002\text{м}$ ,  $L=0,72\text{м}$ . При цьому  $R$  набуває значень:  $R=0,2\text{м}$  (рис. 1,а),  $R=0,4\text{м}$  (рис. 1,б,в),  $R=0,8\text{м}$  (рис. 1, г,д). Оскільки значення власних частот в деяких частотних зонах є дуже близькими (рис. 3,б,г), вони приведені в більшому мірілі на рис. 3,в,д.

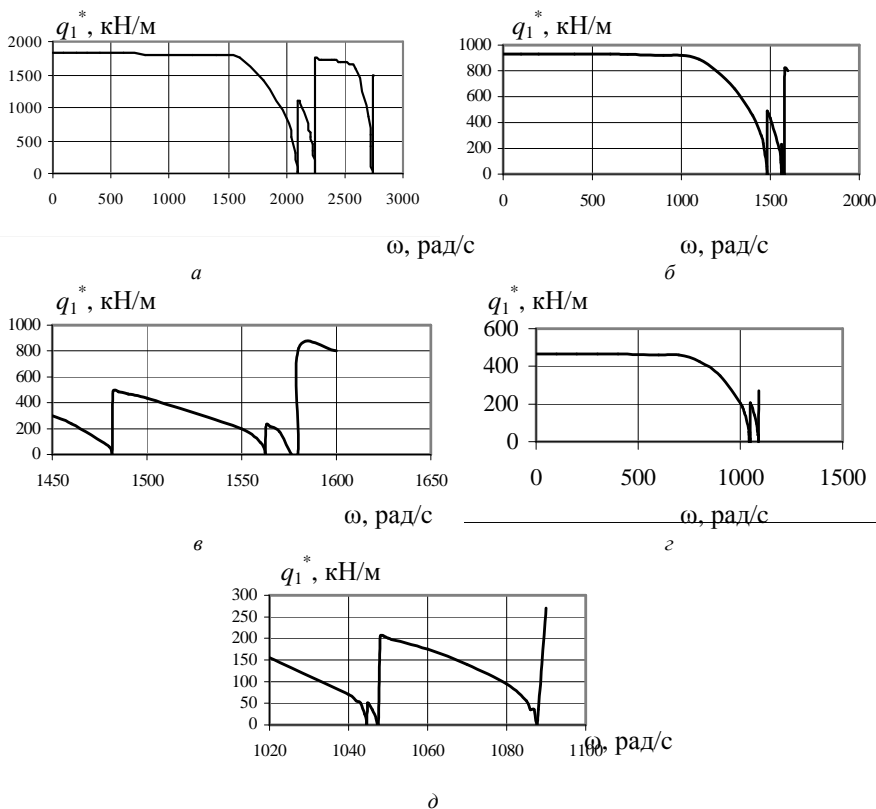


Рис.3. Залежність  $q_1^*$  від частоти при  $h=0,002\text{м}$ ,  $L=0,72\text{м}$ : а)  $R=0,2\text{м}$ ; б),в)  $R=0,4\text{м}$ ; г),д)  $R=0,8\text{м}$

В таблицях 1, 2, 3 існують області частот параметричних коливань, при яких критичні значення  $q_1^*$  амплітуд навантаження наближаються до нуля. На відповідних залежностях, що показані на рис. 1, 2, 3, існують зони, в яких зазначені криві перетинають вісь частот. Втрата стійкості в

таких станах набуває резонансного характеру, а значення частот відповідають власним частотам вільних коливань.

Аналіз отриманих результатів (табл. 1, рис. 1) дозволяє зробити висновок: при зменшенні товщини та при фіксованих значеннях радіуса та висоти циліндричної оболонки значення нижчих власних частот та критичних навантажень зменшуються; втрата стійкості реалізується по циклічно симетричним формам.

При різних значеннях висоти оболонки та при  $h/R = \text{const}$  (табл. 2, рис. 2) збільшення висоти приводить до пониження амплітуди критичного навантаження та власних частот коливань оболонки. Так, при збільшенні висоти в два рази значення першої нижчої власної частоти знижується майже вдвічі; втрата стійкості розглянутих оболонок відбувається по циклічно-симетричним формам.

У випадку, коли радіус оболонки збільшувався вдвічі та в чотири рази (табл. 3, рис. 3) при однакових значеннях товщини та висоти оболонки, результати дослідження вказують на зменшення нижчих власних частот та амплітуд критичного навантаження. Втрата стійкості відбувається по циклічно-симетричним формам, кількість гармонік в коловому напрямку при збільшенні радіуса збільшується.

Результати проведених дослідження засвідчують, що втрата стійкості коливань циліндричних оболонок в діапазоні частот, що розглядається, відбувається по циклічно симетричним формам. В межах кожного діапазону частот, обмежених резонансними точками, збільшення частоти змусених коливань приводить, як правило, до пониження критичних амплітуд навантажень.

1. Гоцуляк Е.А., Ермишев В.Н., Жадрасинов Н.Т. Применение метода криволинейных сеток к расчету оболочек. – Киев, КИСИ (Рукопись деп. в УкрНИИТИ - N 2557) - 23 стр.
2. Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С., Киричук А.А. Численное исследование устойчивости нелинейных вынужденных колебаний тонких оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности.- Горький, 1981.-№19. – с.51 – 60.
3. Гоцуляк Е.А., Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С., Киричук А.А. Устойчивость нелинейных колебаний оболочек вращения //Прикладная механика. – Киев, 1982, т.18, №6. – с.50 – 56.
4. Гайдайчук В.В Киричук А.А., Палий О.Н. Численно-аналитический метод исследования установившихся колебаний оболочечных конструкций. – Математические модели в образовании, науке и промышленности: Сборник научных трудов. – Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2003, -55-58с.

УДК 539.375

Гуляр О.І., д-р техн. наук,  
Сахаров О.С., д-р техн. наук,  
Пискунов С.О., канд. техн. наук,  
Максим'юк Ю.В.

## ВИЗНАЧЕННЯ $J$ -ІНТЕГРАЛА ПРИ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОМУ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЗМІШАНОГО РУЙНУВАННЯ

На основі енергетичних підходів розроблена і апробована методика роздільного обчислення параметрів механіки руйнування при змішаному руйнуванні.

**1. Вступ.** При довільному розподіленні зовнішніх навантажень в околі вершини тріщини виникає складний напружено-деформований стан, який призводить до одночасної реалізації декількох типів руйнування тріщини – нормального відриву (тип *I*) і поперечного (тип *II*) або повздовжнього (тип *III*) зсуву. В цьому випадку виникає потреба роздільного визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН)  $K_I$ ,  $K_{II}$  і  $K_{III}$ , що відповідають кожному з типів руйнування. Найбільш ефективними для визначення КІН є енергетичні методи, що ґрунтуються на обчисленні КІН за величинами  $J$ -інтеграла  $J_k$  ( $k = I, II, III$ ), або тотожними до них, у випадку пружного деформування, величинами вивільнення енергії  $G_k$ .

Проблема застосування енергетичних методів до визначення параметрів механіки руйнування при змішаному руйнуванні висвітлена в значній кількості наукових робіт [3–6, 8–11], в яких розглянуті метод обчислення контурного  $J$ -інтеграла [10], метод підатливості [3], метод еквівалентного об'ємного інтегрування [4], метод віртуального зростання тріщини для обчислення компонент  $J$ -інтеграла  $J_{x_i}$  (де  $x_i$  – система координат, пов'язаних із фронтом тріщини) [5] та величин  $G_k$ , пов'язаних із різними типами руйнування [11], дискретно-аналітичний метод похідної від жорсткості (DASD) [8, 9].

Як відомо, теоретично  $J$ -інтеграл є незалежним (інваріантним) від шляху інтегрування, тобто таким, величина якого не залежить від форми і розмірів контуру інтегрування та дорівнює нулю по будь-якому замкнутому контуру. Не зважаючи на це, в роботах різних авторів різних років, зокрема в [7, 9], зазначається наявність відмінностей результатів скінченоелементного обчислення контурного  $J$ -інтеграла. Про це свідчить також власний досвід авторів [1]. Пропоновані шляхи подолання цієї проблеми ґрунтуються на певних обмеженнях на форму і розміри області



інтегрування та усереднення отримуваних із використанням різних контурів величин  $J$ -інтеграла, що призводить до зайвих обчислювальних витрат і не гарантує вірогідності отримуваних результатів.

В роботі [9] зазначено, що метод еквівалентного об'ємного інтегрування і метод похідної від жорсткості, чисельна еквівалентність яких може бути доведена, звичайно забезпечують отримання результатів задовільної точності. Проте, аналіз наведених в цій роботі даних свідчить, що отримані фундаментальні властивості інваріантності  $J$ -інтеграла теж не задовольняються. Таким чином, висловлене в статті [9] твердження про найбільшу ефективність зазначених методів викликає сумнів. При цьому жоден з використовуваних методів не дозволяє отримувати інваріантні значення  $J$ -інтеграла

При дослідженні задач змішаного руйнування із використанням енергетичних методів окрему проблему становить розділення частин енергії деформування, що стосуються кожного з типів руйнування, і визначення величин відповідних параметрів механіки руйнування  $K_k$ ,  $J_k$  або  $G_k$ . В багатьох випадках обчислення цих величин здійснюється шляхом їх подання через компоненти  $J$ -інтеграла  $J_{xi}$  [4–6]. В цьому випадку для отримання єдиного розв'язку необхідно знати знак  $K_I$  і  $K_{II}$  ( $K_{III}$ ), що в свою чергу потребує додаткових обчислень. В роботах [8–10] запропоновано інший підхід, що ґрунтується на декомпозиції полів параметрів напружено-деформованого стану на складові, що відповідають симетричній (нормальний відрив) та кососиметричній (поперечний зсув) складовим. Такий підхід, хоча і дозволяє проводити роздільне визначення параметрів для різних типів руйнування, але теж призводить до додаткових обчислювальних витрат.

Таким чином, актуальною задачею є розробка на основі МСЕ ефективної методики визначення параметрів механіки руйнування, застосування якої дозволяє отримувати результати, що відповідають фундаментальним умовам інваріантності  $J$ -інтеграла, в тому числі при змішаному руйнуванні.

В роботах [1, 2] була розроблена нова ефективна методика обчислення  $J$ -інтеграла в дискретних моделях МСЕ – метод реакцій, що ґрунтується на представленні величин, які входять до виразу  $J$ -інтеграла із використанням вузлових реакцій і переміщень. В згаданих роботах показано, що отримане дискретне подання  $J$ -інтеграла тотожно дорівнює вихідному виразу, сформульованому для континуальної області. При цьому, на відміну від вище перелічених методів, отримані із використанням методу реакцій значення  $J$ -інтеграла є інваріантними відносно контура інтегрування.

Метою даної роботи є порівняння ефективності обчислення контурного  $J$ -інтеграла із методами віртуального росту тріщини і еквівалентного об'ємного інтегрування, та розробка методики роздільного обчислення величин  $J$ -інтеграла  $J_k$ , що відповідають різним типам руйнування, в умовах змішаного руйнування, на основі МСЕ.

При розробці методики розглядаються тіла з тріщинами нормального відриву і поперечного зсуву при активному статичному ізотермічному зовнішньому навантаженні без урахування розвантаження.

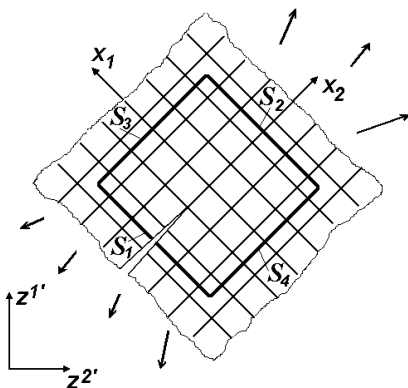


Рис. 1

## 2. Методика визначення контурного $J$ -інтеграла за напруженнями та градієнтами переміщень.

Розглянемо фрагмент дискретної моделі тіла з тріщиною. Досліджуваний об'єкт розглядається в базисній системі координат  $z^i$ , відносно якої тріщина орієнтована довільно. Для обчислення  $J$ -інтеграла оберемо прямокутний контур, що проходить через середини скінчених елементів (СЕ). Скінченоелементна модель в межах розташування

контура є регулярною і ортогональною, сторони контура паралельні вісям  $x_i$  місцевої системи координат СЕ (рис. 1).

$J$ -інтеграл за зазначеним контуром може бути поданий у вигляді:

$$J = \int_S (W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{kl} t^l) ds, \quad (1)$$

де  $W$  – величина повної енергії деформування;  $\sigma^{ij}$  – компоненти тензора

деформації;  $\zeta_{i2} = \frac{\partial u_i}{\partial x_2}$  – градієнти переміщень;  $u_i$  – переміщення;  $n_i$  –

компоненти зовнішньої нормалі до контуру інтегрування  $S$ ;  $n_t$  – проекція зовнішньої нормалі на напрямку вектора розвитку тріщини;  $t^l$  – проекції вектора напрямку розвитку тріщини на вісі місцевої системи координат.

Після розгортання добутку в останньому складнику за індексом  $l$ , зважаючи, що  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$  отримаємо:

$$J = \int_S \left( W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds. \quad (2)$$

Відповідно до напрямку зовнішньої нормалі  $\vec{n}$  до відрізків, що утворить контур, виділимо наступні його складові: лінії, відрізки яких збігаються за напрямком з осями  $x_1$  CE –  $s_1$  і  $s_2$ , а також відрізки та прямі паралельні вісі  $x_2$  –  $s_3$  і  $s_4$ . В загальному випадку кількість відрізків, що складають зазначені складові контуру, може бути довільною. Відповідно, подамо (2) у вигляді:

$$J = \int_{s_1} \left( W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_1 + \int_{s_2} \left( W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_2 + \\ + \int_{s_3} \left( W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_3 + \int_{s_4} \left( W n_t - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_4 .$$

З урахуванням значень проекції нормалі  $n_t$  на напрямки  $x_2$  ( $n_t|_{s_1} = -1$ ,  $n_t|_{s_3} = 1$ ,  $n_t|_{s_2} = n_t|_{s_4} = 0$ ) одержимо:

$$J = \int_{s_1} \left( -W - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_1 + \int_{s_2} \left( -n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_2 + \\ + \int_{s_3} \left( W - n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_3 + \int_{s_4} \left( -n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} \right) ds_4 .$$

Остаточний вираз обчислення  $J$ -інтеграла за напруженнями і градієнтами переміщень набуде вигляду:

$$J = J(\sigma, \zeta) = \int_{s_3} W ds_3 - \int_{s_1} W ds_1 - \int_{s_1} n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds_1 - \int_{s_2} n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds_2 - \\ - \int_{s_3} n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds_3 - \int_{s_4} n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds_4 .$$

Величина повної енергії деформування при пружному деформуванні дорівнює:

$$W = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} .$$

З урахуванням скінчено-елементного подання контуру,  $J$ -інтеграл набуде вигляду:

$$J = J(\sigma, \zeta) = \sum_{j=1}^{N_3} W ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} W ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} \left( n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left( n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds \right)_j - \sum_{j=1}^{N_3} \left( n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds \right)_j - \sum_{j=1}^{N_4} \left( n_i \sigma^{ik} \zeta_{k2} ds \right)_j, \quad (3)$$

де  $N_1, N_2, N_3, N_4$  – кількість скінчених елементів на ділянках контуру  $S_1, S_2, S_3, S_4$  відповідно.

Дослідження збіжності результатів обчислення  $J$ -інтеграла, проведені в роботі [1] для задач про тріщини нормального відриву, засвідчили, що збіжність результатів обчислення  $J$ -інтеграла за формулою (3) з точністю близько 2% досягається при використанні контура, що проходить через центри СЕ і розташований на відстані трьох характерних розмірів СЕ від вершини тріщини. При цьому в межах області інтегрування характерний розмір СЕ повинен становити  $1/10$  від характерного розміру тріщини, а топологічні розміри контура (при врахуванні симетрії) – 3 на 6 СЕ (рис.1). Більше віддалення контуру від вершини тріщини і, відповідно, збільшення його розмірів, призводить до зменшення похибки лише на 0,2%. У подальшому визначення  $J$ -інтеграла проводилось із використанням зазначеного контуру на різних регулярних СЕ сітках. При цьому необхідно зазначити, що, при розгляді тріщин нормального відриву, внаслідок симетрії напружено-деформованого стану відносно поверхні тріщини при розрахунку можна розглядати лише одну із симетричних частин дискретної моделі. З іншого боку, проведення розгляду контуру інтегрування на двовимірній дискретній моделі не зменшує загальності запропонованого підходу з точки зору можливості його поширення на просторові задачі.

З метою обґрунтування ефективності використання описаної методики обчислення контурного  $J$ -інтеграла (3), було розглянуто тестовий приклад про розтяг нескінченної пластини з тріщиною скінченної довжини  $2l=2$  см в умовах плоскої деформації (рис. 2). Вихідні дані: розтягуюче зусилля  $q = 100$  кг/см<sup>2</sup>, модуль пружності  $E = 10^7$  кг/см<sup>2</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.333$ . При проведенні розрахунків в роботі [9] розглядався фрагмент пластини розміром  $2b \times 2b = 8 \times 8$  см (рис.2), завантажений на краях нормальними і дотичними навантаженнями, що є еквівалентними до внутрішніх зусиль, створюваних прикладеним на нескінченності розтягуючим навантаженням. В даній роботі були розглянуті фрагменти пластини, характерний розмір яких є в 10, 20 та 40 разів більшим за розмір тріщини, завантажені розтягуючим навантаженням. При цьому показано, що збільшення розмірів фрагмента понад 20 разів від розміру

тріщини майже не впливає на напружено-деформований стан в околі верхини тріщини.

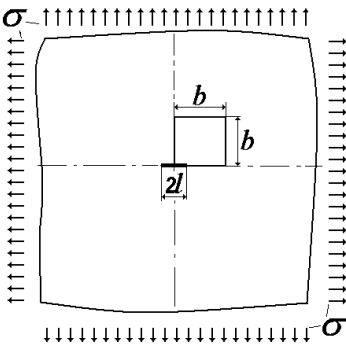


Рис. 2

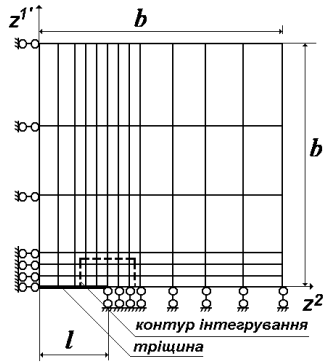


Рис. 3

На рис. 4 наведені величини  $J$ -інтеграла в залежності від кількості невідомих дискретної скінченної моделі. Лінія 1 яка прийнята за еталонне значення, отримана в роботі [8] за формулами:

$$J_I = G_I = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) = 2.793 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}, \quad (4)$$

де  $K_I = \sigma \sqrt{\pi l}$ .

Результати, отримані за формулою (3) при різній кількості невідомих  $N$  дискретної моделі показані на рис. 4 у вигляді кривої 2. Обчислення здійснено для наведеного на рис. 3 контуру, розміри якого визначені згідно із наведеними в [1] висновками про ефективність методики обчислення контурного інтеграла. Результати, отримані за методами еквівалентного об'ємного інтегрування і похідної від жорсткості [10] показані у вигляді кривої 3. Як видно, збіжність результатів, отриманих із використанням формули (3) є

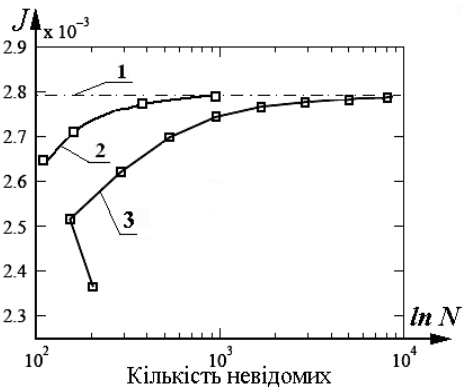


Рис. 4

набагато кращою. Зокрема, отримання величини  $J$ -інтеграла з похибкою в межах 0,5% за формулою (3) потребувало дискретної моделі із 358 невідомими, а для використаних в статті [9] методів – біля 1200, тобто майже в 3,5 рази більше. Таким чином, використання методу обчислення контурного  $J$ -інтеграла із використанням величин напружень і градієнтів переміщень при дотриманні визначених в роботі [1] вимог до розмірів контура інтегрування є досить ефективним.

**3. Методика обчислення  $J$ -інтеграла за величинами вузлових переміщень  $u$  і вузлових реакцій  $R$ .** Величин, що входять до виразу контурного  $J$ -інтеграла (енергія деформування, градієнти переміщень і напруження) можна подати через вузлові реакції і переміщення вузлів дискретної скінченоелеметної моделі.

Розглянемо контур, що проходить в напрямку вісі  $x_1$  через середини СЕ, і по границям СЕ паралельно вісі  $x_2$  (рис.5,а). При цьому відрізок контуру інтегрування в межах одного скінченного елемента має вигляд, наведений на рис. 5,б.

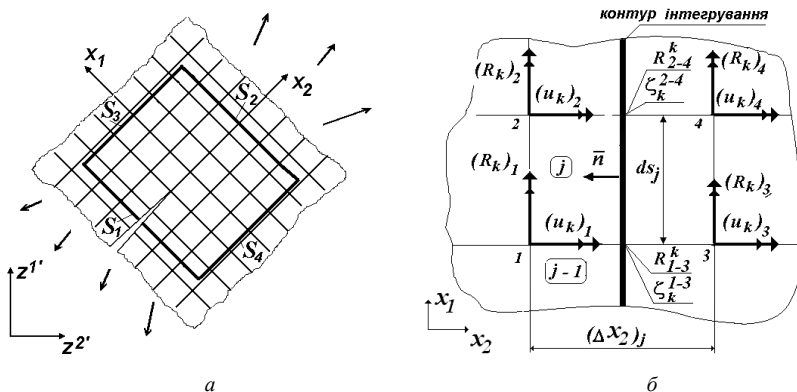


Рис.5.

Величина енергії деформування СЕ  $W$ , обчислена вздовж відрізка  $ds$  дорівнює:

$$W ds_j = \frac{1}{2(\Delta x_2)} \{u\}_j^T \{R\}_j, \quad (5)$$

де  $\{u\}_j, \{R\}_j$  – вектори переміщень і вузлових реакцій  $j$ -го СЕ, через який проходить контур інтегрування:

$$\{u\}_j^T = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{12}\}_j = \{(u_1)_1 \ (u_2)_1 \ (u_3)_1 \ (u_1)_2 \ \dots \ (u_2)_4 \ (u_3)_4\}.$$

В останньому виразі для кожної компоненти вектора  $(u_k)_i$ , індекси в дужках позначають напрямок переміщення в місцевій системі координат, а індекси поза дужками – номери вузлів в межах СЕ (1, 2, 3, 4, рис. 5,б) Аналогічну структуру має вектор  $\{R\}_j$ .

Введемо наступні позначення:

$$R_{2-4}^k = R_{1-3}^k = n_i \sigma^{ik} \frac{ds}{2}.$$

В той же час ці величини можуть бути подані із використанням вузлових реакцій елемента:

$$R_{2-4}^k = \frac{(R_k)_2 + (R_k)_4}{2}, \quad R_{1-3}^k = \frac{(R_k)_1 + (R_k)_3}{2}.$$

Аналогічно можуть бути подані величини градієнтів  $\zeta_{k2}$  переміщень за напрямком  $x_2$  на сторонах 1–2 і 3–4 СЕ:

$$\zeta_k^{2-4} = \frac{(u_k)_4 - (u_k)_2}{\Delta x_2}, \quad \zeta_k^{1-3} = \frac{(u_k)_3 - (u_k)_1}{\Delta x_2}.$$

З урахуванням цього та формули (5) вираз для контурного інтеграла (3) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} J = J(u, R) = & \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta x_2)_j} \{u\}_j \{R\}_j - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta x_2)_j} \{u\}_j \{R\}_j + \\ & + \sum_{j=1}^{N_1} \left( \frac{(R_q^k + R_{q'}^k)(u_k^{q'} - u_k^q)}{2\Delta x_2} \right)_j + \sum_{j=1}^{N_2} \left( \frac{(R_q^k + R_{q'}^k)(u_k^{q'} - u_k^q)}{2\Delta x_2} \right)_j + \\ & + \sum_{j=1}^{N_3} \left( \frac{(R_q^k + R_{q'}^k)(u_k^{q'} - u_k^q)}{2\Delta x_2} \right)_j + \sum_{j=1}^{N_4} \left( \frac{(R_q^k + R_{q'}^k)(u_k^{q'} - u_k^q)}{2\Delta x_2} \right)_j, \quad (6) \end{aligned}$$

де індекси  $q$  і  $q'$  застосовані для позначення вузлів СЕ, розташованих з двох боків від контура.

Для обґрунтування ефективності використання розробленої методики в задачах обчислення  $J$ -інтеграла для тріщин нормального відриву, було

використано поданий вище тестовий приклад (рис.2). Проведено порівняння результатів величин  $J$ -інтеграла, визначених за формулою (3) і (6). Як видно з наведених в таблиці 1 результатів, на всіх дискретних моделях похибки величин  $J$ -інтеграла, обчисленого за вузловими реакціями і переміщеннями, є майже вдвічі меншими ніж при застосуванні напружень і градієнтів переміщень. Таким чином, визначення  $J$ -інтеграла із використанням вузлових реакцій і переміщень є більш ефективним.

Таблиця 1

Кількість невідомих	$J_I(\sigma, \zeta), 10^{-3}$	$\delta, \%$	$J_I(u, R), 10^{-3}$	$\delta, \%$
108	2.620	6.190	2.688	3.760
168	2.740	1.900	2.758	1.250
358	2.780	0.470	2.786	0.250
1000	2.789	0.150	2.793	$\approx 0$

**4. Особливості обчислення  $J_I$  і  $J_{II}$  при змішаному руйнуванні.** При змішаному руйнуванні внаслідок відсутності симетрії для визначення  $J$ -інтеграла необхідним є розгляд дискретної моделі для тіла в цілому і використання для обчислення  $J$ -інтеграла суцільного контуру, що охоплює вершину тріщини і має розрив на поверхні тріщини (рис. 6).

В часному випадку пружного деформування при змішаному руйнуванні двовимірного тіла повна величина  $J$ -інтеграла є сумою величин  $J_I$  і  $J_{II}$ , що відповідають нормальному відриву і поперечному зсуву:

$$J = J_I + J_{II}.$$

Зв'язок величин  $J$ -інтеграла (величини питомої енергії, що необхідна для утворення одиниці поверхні тріщини) з відповідними значеннями КІН за умов лінійного деформування визначається за формулами:

$$K_I = \sqrt{J_I E/k}; \quad K_{II} = \sqrt{J_{II} E/k},$$

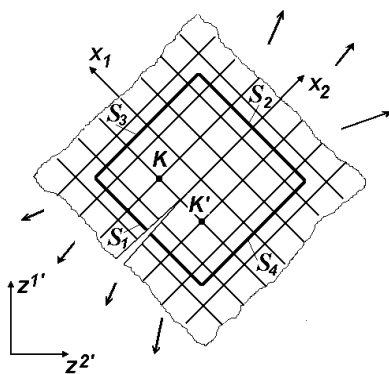


Рис. 6



де  $k=1$  за умови плоского напруженого стану;  $k=1-\nu^2$  за умови плоскої деформації.

Один з підходів, що пропонується для роздільного визначення складових  $J$ -інтеграла полягає в проведенні процедури симетризації напружено-деформованого стану згідно  $I$  і  $II$  типу руйнування.

Розглянемо дві точки  $K$  і  $K'$ , розташовані симетрично по відношенню до площини тріщини (рис.6.). Згідно із [7, 8, 10] поля переміщень для кожної з них можна подати у вигляді :

$$u = u^I + u^{II} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix},$$

Аналогічне подання може бути використано також і для полів напружень і деформацій:

$$\sigma = \sigma^I + \sigma^{II}, \quad \varepsilon = \varepsilon^I + \varepsilon^{II}.$$

З використанням наведених вище виразів для  $J$ -інтеграла отримаємо:

$$J_I = \int_{\Omega^*} \left( \sigma_{ij}^I \frac{\partial u_j^I}{\partial x_i} - W^I \delta_{li} \right) \frac{\partial q_l}{\partial x_i} dA, \quad J_{II} = \int_{\Omega^*} \left( \sigma_{ij}^{II} \frac{\partial u_j^{II}}{\partial x_i} - W^{II} \delta_{li} \right) \frac{\partial q_l}{\partial x_i} dA,$$

де  $\Omega^*$  – частина області, яка повністю оточує вершину тріщини;  $W^I, W^{II}$  – щільності енергії деформації, які відносяться до  $I$  і  $II$  типу руйнування:

$$W_I = \int_s \sigma_{ij}^I \varepsilon_{ij}^I ds, \quad W_{II} = \int_s \sigma_{ij}^{II} \varepsilon_{ij}^{II} ds,$$

$\delta_{ij}$  символ Кронекера.

Такий підхід призводить до зайвих обчислювальних процедур і ускладнює визначення  $J$ -інтеграла.

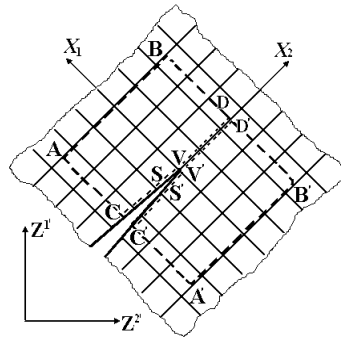


Рис. 7

Для обчислення величин  $J$ -інтеграла при змішаному руйнуванні із використанням подання  $J$ -інтеграла за величинами вузлових реакцій і переміщень розглянемо контур  $CABDD'B'A'C'$ , що охоплює вершину тріщини і має розрив на поверхні тріщини (рис. 7).

Цей контур може бути поданий як сума двох П-подібних частин замкнених контурів, що розташовані по обидві сторони від тріщини. Відповідно,

$$J_{CABDD'B'A'C'} = J_{CABD} + J_{C'A'B'D'}$$

З іншого боку величини  $J$ -інтеграла по кожному з замкнених контурів  $CABDVSC$  і  $C'A'B'D'V'S'C'$  можуть бути подані як суми  $J$ -інтеграла по їх П-подібним частинам і лініям, що проходять вздовж поверхні тріщини. При цьому, згідно із фундаментальною властивістю інваріантності  $J$ -інтеграла, його значення по замкненому контуру повинно дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} J_{O(CABDVSC)} &= J_{CABD} + J_{CSVD} = 0, \\ J_{O(C'A'B'D'V'S'C')} &= J_{C'A'B'D'} + J_{C'S'V'D'} = 0. \end{aligned}$$

Відповідно  $J$ -інтеграл по контуру  $CABDD'B'A'C'$  буде дорівнювати взятій з протилежним знаком сумі  $J$ -інтегралів по лініям  $CSVD$  і  $C'S'V'D'$ :

$$J_{CABDD'B'A'C'} = J_{CABD} + J_{C'A'B'D'} = -J_{CSVD} - J_{C'S'V'D'}$$

Використовуючи формулу (6) і враховуючи виконання умов рівноваги вузлів отримаємо, що  $J$ -інтеграл по лінії дорівнює добутку реакцій вузла  $V$  вершини тріщини на переміщення вузла  $S$  перед вершиною тріщини:

$$\begin{aligned} J_{CSVD} &= \frac{\{R\}_V \{u\}_S}{2\Delta x_2}, \\ J_{C'S'V'D'} &= \frac{\{R\}_{V'} \{u\}_{S'}}{2\Delta x_2}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \{R\}_V = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_V^T \text{ і } \{R\}_{V'} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}_{V'}^T -$$

вектори сумарних вузлових реакцій  $SE$ , що розташовані з кожного боку від вершини тріщини по напрямках місцевої системи координат  $SE$ ;

$$\{u\}_S = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_S, \quad \{u\}_{S'} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{S'} -$$

вектори вузлових переміщень (рис. 8).

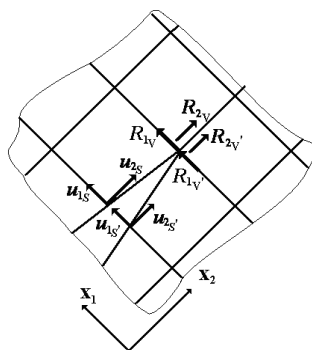


Рис. 8

При цьому, зважаючи на виконання умов рівноваги у вершині тріщини:  $\{R\}_V = -\{R\}_{V'}$ .

Підставивши ці рівняння у вираз для  $J$ -інтеграла по контуру, одержимо

$$\begin{aligned} J_{CABDD'B'A'C'} &= -\frac{\{R\}_V \{u\}_S}{2\Delta x_2} - \frac{\{R\}_{V'} \{u\}_{S'}}{2\Delta x_2} = \frac{\{R\}_{V'}}{2\Delta x_2} (\{u\}_S - \{u\}_{S'}) = \\ &= \frac{1}{2\Delta x_2} \left( \begin{Bmatrix} R_{V_1'} & R_{V_2'} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{S_1} - u_{S_1'} \\ u_{S_2} - u_{S_2'} \end{Bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, вираз  $J$ -інтеграла має два добутки реакцій і переміщень по напрямках  $x_1$  і  $x_2$ , які відповідатимуть  $J_I$  і  $J_{II}$ .

$$J = J_I + J_{II} = \frac{1}{2\Delta x_2} \left( R_{V_1'} (u_{S_1} - u_{S_1}') + R_{V_2'} (u_{S_2} - u_{S_2}') \right). \quad (7)$$

З метою обґрунтування вірогідності отриманого виразу для обчислення  $J_I$  і  $J_{II}$  розглянуто тестові задачі про деформування нескінченної пластини з тріщиною в умовах нормального відриву і поперечного зсуву. Вихідні дані: зовнішнє навантаження  $q = 1 \text{ кг/см}^2$ , модуль пружності  $E = 1 \text{ кг/см}^2$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ .

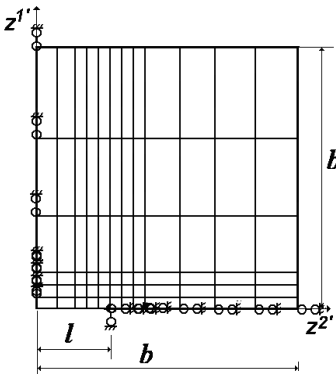


Рис.9

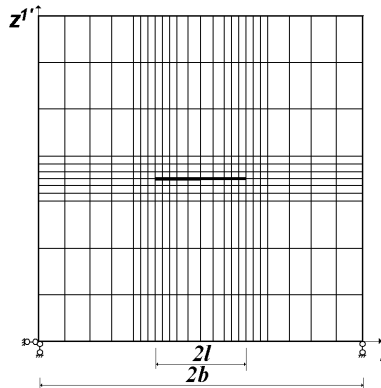


Рис.10

При розв'язанні задачі використані наступні варіанти розрахункових схем: в умовах нормального відриву –  $1/4$  частини розглядуваного

фрагмента пластини, дискретна модель наведена на рис.3 для випадку поперечного зсуву –  $\frac{1}{4}$  частини розглядуваного фрагмента пластини, дискретна модель наведена на рис.9, при розгляді окремо та сумісно прикладених навантажень, що відповідають нормальному відриву і поперечному зсуву – весь фрагмент пластини, дискретна модель наведена на рис.10.

Для  $\frac{1}{4}$  частини пластини тріщина задана із використанням граничних умов, а у випадку цілої пластини – шляхом задання різних номерів вузлів на протилежних берегах тріщини.

Значення  $J$ -інтеграла  $J_I$  і  $J_{II}$ , отримані для  $\frac{1}{4}$  частини пластини із використанням формули (7) при роздільному розгляді навантажень, що відповідають нормальному відриву і поперечному зсуву, збігаються із еталонними, визначеними згідно до роботи [8] для випадку тріщини нормального відриву – за формулою, аналогічною (4) –  $J_I = 2.859$  кг/см, а для випадку поперечного зсуву:

$$J_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} (1 - \nu^2) = 2.859 \text{ кг/см,}$$

де  $K_{II} = \tau \sqrt{\pi d}$ .

Величини  $J$ -інтеграла, обчислені для  $\frac{1}{4}$  частини пластини із використанням формули контурного інтеграла (6) відрізняються від обчислених із використанням формули (7) на величину порядку  $10^{-17}$ . Таким чином,  $J$ -інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю, що є однією із ознак виконання фундаментальної властивості його інваріантності.

Значення  $J_I$  і  $J_{II}$ , отримані із використанням формули (7) для розрахункової схеми цілої пластини, як при роздільному так і при сумісному виникненні кожного з типів руйнування, повністю збігаються із отриманими для  $\frac{1}{4}$  частини пластини. Таким чином, вираз (7) дозволяє отримувати вірогідні величини  $J_I$  і  $J_{II}$  при змішаному руйнуванні без застосування додаткової обробки результатів скінченоелементного розв'язання задачі.

Для дослідження вірогідності запропонованого підходу для змішаного руйнування при несиметричній відносно тріщини розрахунковій схемі розглянуто тестовий приклад про розтяг нескінченної пластини з похилою тріщиною, розташованою під кутом  $\beta$  до лінії дії навантаження (рис.11, а, б). При  $\beta=45^\circ$  прикладене в різний спосіб навантаження спричиняє однаковий напружено-деформований стан в околі вершини тріщини, що відповідає змішаному руйнуванню. При розрахунку

розглядалась частина пластини розміром  $b \times b$ . Фрагменти відповідних дискретних моделей в околі вершини тріщини показані на рис. 12, а, б.

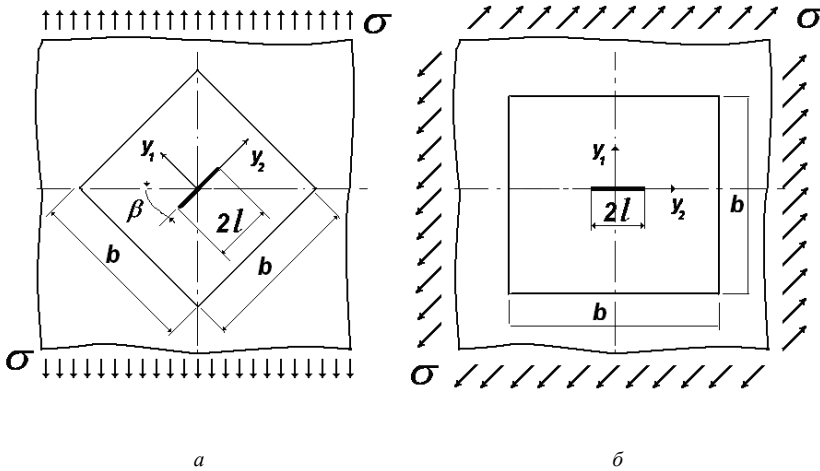


Рис. 11

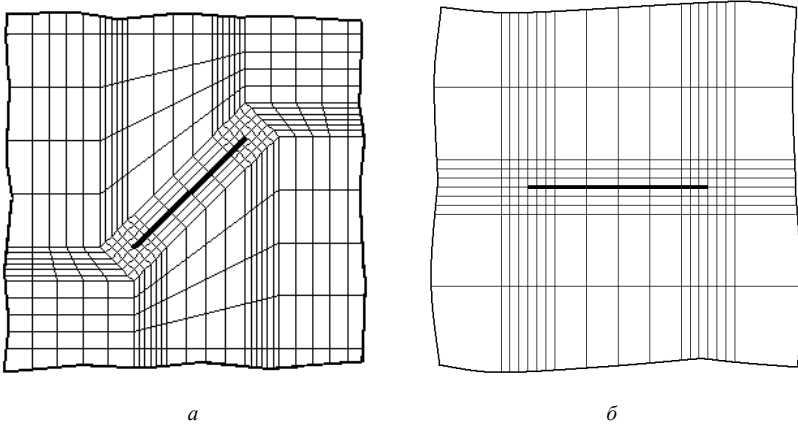


Рис. 12

Отримані для обох розрахункових схем значення  $J_I$  і  $J_{II}$  також збігаються з еталонними. При цьому, за відсутності симетрії напруженого стану визначення  $J$ -інтеграла в цілій пластині для похилої тріщини не потребувало жодних додаткових обчислювальних процедур.

Таким чином, проведене в даній роботі порівняння підходів до обчислення  $J$ -інтеграла в скінченноелементних задачах показало, що при використанні однакових дискретних моделей похибки обчислення контурного  $J$ -інтеграла за величинами напружень і градієнтів переміщень є меншими, ніж при використанні методів еквівалентного об'ємного інтегрування і методу похідної від жорсткості. Подання контурного  $J$ -інтеграла через вузлові реакції і переміщення (метод реакцій) дозволяє зменшити ці похибки ще в два рази.

Розроблений на основі методу реакцій підхід до обчислення  $J$ -інтеграла при змішаному руйнуванні дозволяє при мінімумі обчислювальних витрат отримувати вірогідні результати, що також відповідають фундаментальній властивості інваріантності  $J$ -інтеграла, для випадків як симетричних так і несиметричних відносно тріщини розрахункових схем досліджуваних об'єктів.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Особливості визначення  $J$ -інтеграла в дискретних моделях метода скінченних елементів. – Опір матеріалів і теорія споруд. – № 76, 2005. – с.86-97.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Метод реакцій для обчислення  $J$ -інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування // Опір матеріалів і теорія споруд, № 79, 2006. – С.3-17.
3. *Вычислительные методы в механике разрушения:* Пер. с англ./ Под ред. С.Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування простових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
5. *Никишков Г.П., Вайншток В.А.* Метод виртуального роста трещины для определения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$  // Проблемы прочности, 1986. – №6. – С.86-92.
6. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 1980. – 256 с.
7. *Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения: Пер. с япон. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
8. *Giner E., Fuenmayor F.J., Bessa A.J.* An implementation of the stiffness derivative method as a discrete analytical sensitivity analysis and its application to mixed mode in LFM. // Engineering Fracture Mechanics.– v.68(18). – 2002. – P.2051-2071.
9. *Giner E., Fuenmayor F.J., Baeza L., Taranson J.E.* Error estimation for the finite element evaluation of  $G_I$  and  $G_{II}$  in mixed-mode linear elastic fracture mechanics // Finite Elements in Analysis and Design. – v.41. –2005. – P.1079-1104.
10. *Rice J.R.* A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and crack // J.Appl.Mech. , 1968. – № 35. – P.379-386.
11. *Yang Z.J, Chen J.F., Holt G.D.* Efficient evaluation of stress intensity factors using virtual crack extension technique // Computers and Structures. – v.79. –2001. –P.2705-2715.

УДК 539.3

Пошивач Д. В.

## **ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЗА ІМОВІРНІСТЮ ВИПАДКОВИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ З ГОФРОВАНОЮ СТІНКОЮ**

Методом Монте-Карло досліджується стійкість за імовірністю параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою стінкою під дією випадкового динамічного згинального навантаження. Побудовано границі стійкості за статистичною частотою таких коливань.

Динамічне поздовжнє навантаження на конструкцію не тільки змушує поздовжні коливання, але також є параметричним по відношенню до поперечних коливань. Коливання під дією параметричного навантаження, тобто параметричні коливання найчастіше не стабілізуються, а розвиваються шляхом згасання або необмеженого зростання. Постає питання про їхню динамічну стійкість. Дослідження динамічної стійкості полягає у визначенні зон стійкості в просторі амплітудних і частотних параметрів навантаження. При стохастичному навантаженні параметричні коливання є випадковим процесом. Їхня стійкість розуміється як стійкість за імовірністю стохастичної системи. Таке означення дозволяє дослідження стійкості методом Монте-Карло.

Для певного набору точок у просторі амплітудних і частотних параметрів навантаження проводиться дослідження стійкості коливань. Для кожної з цих точок проводиться серія випробувань, що полягають у чисельному моделюванні випадкових коливань. За результатами серії випробувань з'ясовується статистична частота втрати стійкості. Між дослідженими точками може бути побудоване сімейство ліній, що з певною точністю відображають границі стійкості за імовірністю.

При розгляді реальних конструкцій постає питання про формування математичних моделей, придатних для дослідження методом Монте-Карло. Одним зі шляхів створення таких моделей може бути редукування скінченноелементних моделей конструкцій.

Розглядається сталеві двотаврова зварена балка зі синусоїдально гофрованою стінкою (рис. 1), завантажена навантаженням  $q(t)$ , рівномірно розподіленим уздовж серединної лінії стінки. Балка закріплена на кінцях в'язями, що перешкоджають лінійним переміщенням та повороту навколо поздовжньої осі. Динамічне змінювання навантаження змушуватиме згинальні коливання балки у площині  $xu$ . Водночас, по

відношенню до деформацій балки із цієї площини таке навантаження буде параметричним.

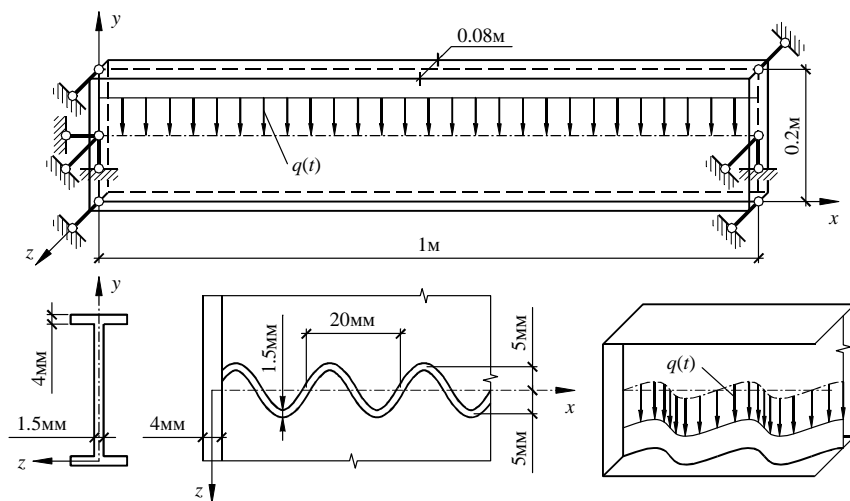


Рис. 1

Засобами програмного комплексу "NASTRAN 4" створено скінченноелементну модель балки, що складається з пластинчатих та стержньових елементів та містить 8020 елементів і 7227 вузлів. Визначені частоти та форми власних коливань конструкції. Визначено також критичне значення статичного навантаження  $q_{cr} = 3.6551 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ .

Скінченноелементна модель підлягає редукуванню шляхом розкладання вектора вузлових переміщень по формах власних коливань. Рівняння динамічної рівноваги редукованої моделі після введення в нього доданків, що враховують сили опору рухові, матиме наступний вигляд:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K} + \mathbf{G}q(t)]\mathbf{u}(t) = 0,$$

де  $\mathbf{u}(t)$  — вектор узагальнених координат,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{G}$  — матриці відповідно демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості редукованої моделі.

У подальшому досліджуватиметься редукована модель, обмежена двома ступенями вільності, що відповідають першим формам власних коливань конструкції. Ці форми представляють собою переважно згинання балки із площини  $xu$  та кручення навколо поздовжньої осі.



Відповідні власні частоти дорівнюють  $\omega_1 = 888.14 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2 = 1046.9 \text{ рад/с}$ .

За допомогою методики, описаної в роботах [1, 2], отримано матриці жорсткості та геометричної жорсткості для редукованої моделі з двома ступенями вільності:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7.888 & 0 \\ 0 & 10.96 \end{bmatrix} \frac{10^5}{\text{с}^2}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -1.6925 \\ -1.6298 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}^2}.$$

Відповідна матриця демпфірування при параметрі згасання  $\xi = 0.02$  дорівнює

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\xi\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.5256 & 0 \\ 0 & 41.876 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{с}}.$$

Динамічне навантаження виражається формулою

$$q(t) = q_0 \zeta(t), \quad (1)$$

де  $\zeta(t)$  — випадкова функція, задана своєю однобічною спектральною щільністю

$$G_{\zeta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha(\omega^2 + \theta^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}, \quad (2)$$

де  $\alpha$  — параметр кореляції,  $\theta$  — характерна частота. Досліджується вплив амплітудного параметра навантаження  $q_0$  і частотного —  $\theta$  на стійкість параметричних коливань конструкції.

Навантаження як випадковий процес являється вузькосмуговим.

Ширина його спектра характеризується величиною  $\alpha_0 = \frac{2\alpha}{\omega_1 + \omega_2} = 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ .

Стійкість за імовірністю параметричних коливань редукованої моделі досліджено чисельно методом Монте-Карло. Методику такого дослідження описано в роботах [3, 4]. На рис. 2 побудовано сімейство границь стійкості за статистичною частотою в координатах

$$\eta = \frac{\theta}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \mu = \frac{q_0}{q_{\text{cr}}}.$$

Досліджено точки у вузлах координатної сітки. Для кожної точки

проведено серію з 20 випробувань. Білими маркерами позначені точки, де спостерігалися лише стійкі реалізації переміщень, тобто статистична частота втрати стійкості дорівнює 0, чорними — жодної стійкої реалізації — частота дорівнює 1. Суцільними ламаними лініями показані границі стійкості за статистичною частотою, відповідні до значень 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. Ці границі побудовані шляхом лінійної інтерполяції між сусідніми вузлами сітки.

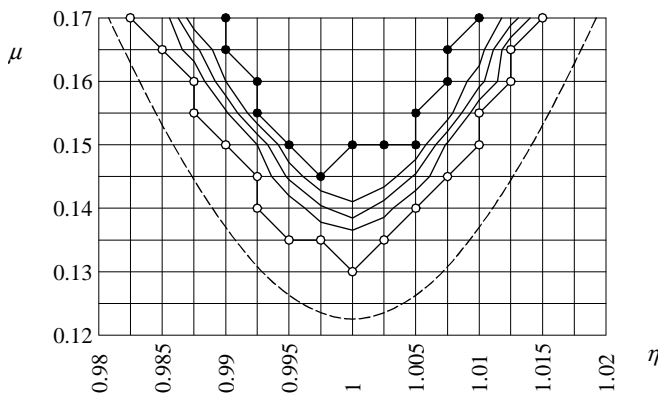


Рис. 2

Отримані результати демонструють збіжність з відомою аналітичною формулою наближеної теорії для випадку детермінованого гармонічного навантаження. Вузкосмуговий випадковий процес, визначений формулами (1), (2), має подібність до простого гармонічного процесу  $q(t) = q_0 \cos(\theta t)$ , для котрого в довіднику [5] наведено наступне рівняння границі комбінаційного головного параметричного резонансу сумарного типу:

$$\eta = 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_{12} g_{21} \left( \frac{q_{\text{ср}}}{2\omega_1 \omega_2} \right)^2 \mu^2 - 4\xi^2}, \quad (3)$$

де  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  — коефіцієнти матриці геометричної жорсткості. Крива, побудована за формулою (3), показана на рис. 2 штриховою лінією.

1. Гоцуляк Є. О., Дехтярюк Є. С., Лук'янченко О. О., Борисенко В. Г. Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 74. — К.: КНУБА, 2004.
2. Гоцуляк Є. О., Дехтярюк Є. С., Лук'янченко О. О., Борисенко В. Г. Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 77. — К.: КНУБА, 2005.
3. Пошивач Д. В. Чисельний аналіз динамічної стійкості кругової циліндричної оболонки при випадковому параметричному збудженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 71. — К.: КНУБА, 2002. — С. 115-124.
4. Гончаренко М. В., Пошивач Д. В. Дослідження умов динамічної стійкості пружних систем при стохастичному параметричному впливі // Вібрації в техніці та технологіях. — 2006, №2 (44). — С. 14-19.
5. *Вибрации* в технике: Справочник. В 6-ти т. — Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. — М.: Машиностроение, 1978. — 352 с.

УДК 539.3

**Охтеня І.О.****Гоцуляк Є.О.**, д-р техн. наук,**Лук'янченко О.О.**, канд. техн. наук

## **ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ З УРАХУВАННЯМ ПОЧАТКОВИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ**

В практиці сучасного будівництва і машинобудування у якості несучих елементів металоконструкцій широке застосування знайшли тонкостінні профілі, які поєднують у собі економічно ефективні вагові характеристики і високі технологічні якості при виготовленні і експлуатації. Такі конструкції економічні, мають технологічні переваги при монтажу і використанні. Одним з різновидів тонкостінних конструкцій є холодногнуті профілі, використання яких дозволяє створювати конструкції близькі до оптимальних по вазі. Дані профілі дозволяють виготовляти широкий спектр будівельних конструкцій: несучі і фахверкові колон, одно- і двоскатні ферми, балки покриття, стінові і покрівельні прогони. Це дозволяє створювати будівлі, де у якості несучих елементів використані холодногнуті профілі.

Оскільки вичерпання несучої здатності таких конструкцій при різних видах навантажень проходить, як правило, внаслідок втрати стійкості, проблеми визначення критичних навантажень тонкостінних профілів приділяється особлива увага. Наявність малих недосконалостей форми реальних стержнів може значно понизити її критичне навантаження, що викликає необхідність врахування цих особливостей при розрахунках конструкцій.

Основи розрахунку стійкості тонкостінних стержнів з урахуванням їх початкових недосконалостей закладені у роботах [2, 3], у [1] досліджений вплив взаємодії загальних і місцевих форм випучування на несучу здатність тонкостінних стержнів відкритого профілю.

В даній роботі досліджується стійкість реальних стержнів з урахуванням їх початкових недосконалостей. Розглядається стержень довжиною 2м, який має С-подібну форму поперечного перерізу з постійною по довжині і по перерізу товщиною (рис. 1). Паралельно відбувалася серія випробувань реальних стержнів, що дозволяє порівнювати теоретичні результати з експериментальними даними. Випробування стержнів (рис. 2) проводилися за допомогою пресу типу Р-100 у випробувальному центрі будівельних конструкцій при кафедрі

металевих та дерев'яних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури.

Скінченноелементна (математична) модель стержня формується за допомогою обчислювального комплексу NASTRAN. Полички, стінки і відгини стержня моделювалися плоскими скінченими чотирикутними елементами розмірами 10x10мм, всього у моделі 6400 елементів і 6633 вузлів. Як матеріал закладено сталь Ст3 з наступними механічними характеристиками:  $E=2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\mu=0.3$ . Прийнятий матеріал відповідає матеріалу реального стержня.

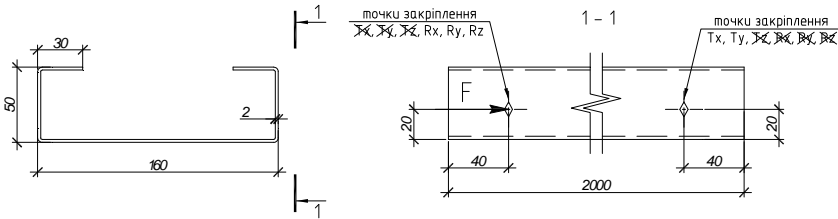


Рис. 1. Стержень, що досліджується



Рис. 2. Випробування стержнів

Розрахункову модель недосконалого стержня будуються за допомогою обчислювального комплексу скінченноелементного аналізу та розробленої програми, в якій для формування нових координат вузлів моделі стержня компоненти вектора подібного до форми втрати стійкості додаються до відповідних координат серединної поверхні стержня. Програма написана на мові ФОРТРАН99 і орієнтована на комплекс NASTRAN. Недосконалість приймаються пропорційними товщині стінки стержня  $t$ :  $\delta/t=0.125$ ;  $\delta/t=0.25$ ;  $\delta/t=0.5$ ;  $\delta/t=0.75$ ;  $\delta/t=1.0$ ;  $\delta/t=1.25$ ;  $\delta/t=1.5$ .

Використовуючи процедуру обчислювального комплексу розв'язання нелінійної задачі статки, для стержня з різними амплітудами початкових недосконалостей визначаються критичні значення стискаючої сили. Навантаження на стержень задається у вигляді  $q_{кр}^0 \cdot \beta$ , де  $\beta$  – безрозмірний параметр, що змінюється в інтервалі від 0 до 1. На кожному етапі навантаження за допомогою метода Ньютона-Рафсона знаходяться розв'язки рівняння рівноваги недосконалого стержня до забезпечення умови збіжності по зміні нев'язки навантаження та по роботі внутрішніх сил на приростах вузлових переміщень.

Було проведено аналіз впливу початкових недосконалостей на величину критичної сили. Початкові деформації моделювалися у вигляді 1-ї форми втрати стійкості, отриманої при лінійному розрахунку. Були прораховані варіанти з різними амплітудами початкових недосконалостей. На рис.3 представлений графік залежності критичної сили від величини амплітуди початкових недосконалостей  $\delta/t$ . По осі абсцис відкладені величини амплітуд віднесені до товщини елемента, а по осі ординат – значення відповідних критичних сил віднесених до  $P_k$  (критичної сили, що була отримана при лінійному розрахунку).

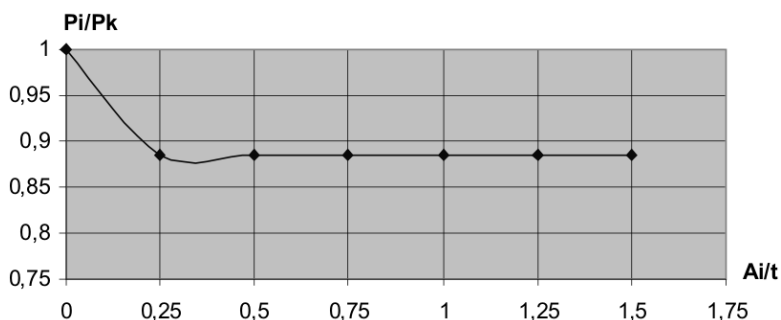


Рис. 3. Графік залежності критичної сили від величини початкових недосконалостей по 1-й формі втрати стійкості

За цим графіком можна зробити наступні висновки:

- Втрата стійкості була досягнута для всіх випадків при меншій критичній силі порівняно з лінійним розрахунком.
- Величина критичної сили для даних задач не залежить від амплітуди недосконалостей.
- Форма деформацій схожа на загальну форму втрати стійкості. Це можна пояснити тим, що навантаження прикладене не в центрі елемента, а з деяким ексцентриситетом (для більшої відповідності реальним конструкціям), що провокує згин елемента.

Результати попередніх розрахунків елемента показали, що при лінійній постановці критичні сили мають дуже густий спектр (рис. 4) і різниця між першою критичною силою (51499.04), яка відповідає місцевій формі втрати стійкості і 15-ю (66020.83), яка відповідає загальній формі, незначна (різниця між ними 22%). На рис. 4 наведена множина критичних сил для досліджуваного стержня, на графіку по осі абсцис відкладений номер форми втрати стійкості, а по осі ординат відповідні значення критичних сил.

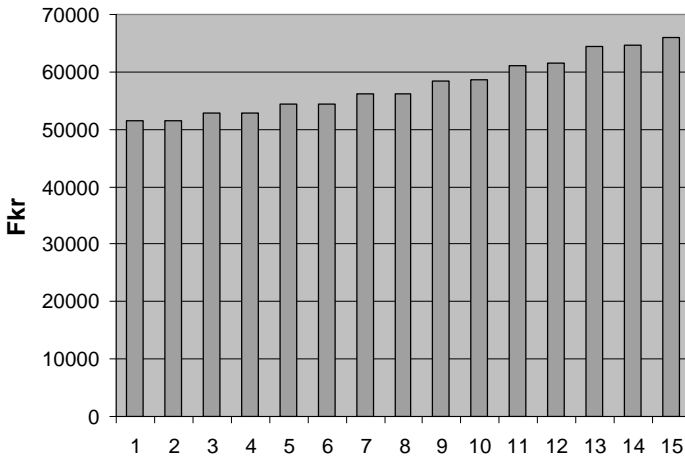


Рис. 4. Спектр критичних сил

На рис. 5 наведені форми втрати стійкості.

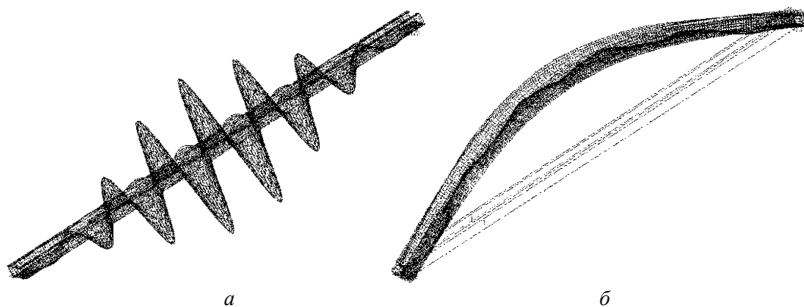


Рис. 5. Форми втрати стійкості: а) перша форма, б) п'ятнадцята форма

Другим етапом роботи був розрахунок елемента з недосконалостями у формі загальної втрати стійкості. Були прораховані варіанти з різними величинами початкових недосконалостей аналогічні попереднім розрахункам. За результатами розрахунків можна зробити наступні висновки (рис. 6):

- Критичне навантаження залежить від величина амплітуди початкових недосконалостей.
- Втрата стійкості стержнів для всіх величин початкових недосконалостей по 15-й формі досягається раніше ніж при недосконалостях по 1-й формі.
- Необхідно проводити тестові задачі з різними значеннями ексцентриситету прикладання сили.

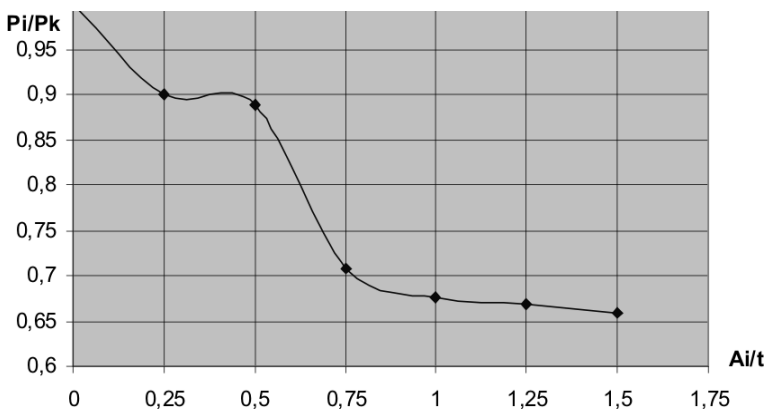


Рис. 6. Графік залежності критичної сили від величини початкових недосконалостей по 15-й формі втрати стійкості



Розроблена програма дозволяє задавати реально виміряні, а також гіпотетичні початкові недосконалості серединної поверхні стержня. Це відкриває перед нами можливість дослідження впливу на несучу здатність різних видів початкових недосконалостей, шляхом порівняння теоретичних результатів з даними лабораторних випробувань. Метою дослідження є розробка методів урахування початкових недосконалостей, вплив яких на критичну силу максимально відповідає впливу реальних недосконалостей.

1. *Ракиш С.В.* Связная потеря устойчивости и весовая оптимизация тонкостенных стержней открытого профиля. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Днепропетровск – 2003.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
3. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807с.
4. *Доннелл Л.Г., Ван К.* Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии // Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит.-ры. – 1951. – №408, С.91 – 107.
5. *Койтер В.Т.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Сб. перев. иностр. статей. – 1960. – №5, С.99 – 110.
6. Строительные нормы и правила. СНиП II-23-81\*. Стальные конструкции/Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990. –96с.

УДК 539.3

Іванченко Г.М., канд. техн. наук

## ПОВНЕ ВНУТРІШНЄ ВІДОБРАЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ НА МЕЖАХ АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩ

**Вступ.** В даний час сейсмічні процеси є одними з найбільш руйнівних явищ природи. Відомо, що неможливо прогнозувати місце і час настання землетрусу в заданому регіоні, тому важливо зрозуміти особливості перетворення сейсмічних хвиль тектонічними неоднорідностями і аномаліями в їх околі та встановити механізми посилення або ослаблення цих хвиль. Для їх вивчення зручно застосовувати модель розривних хвиль і аналізувати їх за допомогою нульового наближення променевого методу [1, 2, 6-8], який дозволяє будувати фронти хвиль і обчислювати значення розривів параметрів хвилі на цих фронтах.

Проблема аналізу взаємодії розривної хвилі з поверхнею розділу пов'язана з необхідністю вирішення двох задач – кінематичної і динамічної. Перша задача зводиться до побудови поверхонь фронтів відображених і заломлених хвиль на поверхні  $G$  розділу середовищ. Для її постановки застосовується локально-плоске наближення.

Методика вирішення цієї проблеми, заснована на використанні сформульованого припущення, пов'язана з необхідністю знаходити вирішення узагальнених рівнянь Снелля, які для трансверсально-ізотропних середовищ мають вигляд

$$\frac{\sin \Theta_{(1-)}^{(r)}}{v_{(1-)}^{(r)} \left( \Theta_{(1-)}^{(r)} \right)} = \frac{\sin \Theta_{(1+)}^{(v)}}{v_{(1+)}^{(v)} \left( \Theta_{(1+)}^{(v)} \right)} = \frac{\sin \Theta_{(2+)}^{(\mu)}}{v_{(2+)}^{(\mu)} \left( \Theta_{(2+)}^{(\mu)} \right)} \quad (r, v, \mu = 1, 2), \quad (1)$$

де введені позначення: верхній індекс в дужках позначає номер хвилі, причому  $r = 1$  відповідає квазіподовжній ( $qP$ ) хвилі,  $r=2$  – квазіпоперечній ( $qS$ ) хвилі; нижній індекс в дужках вказує на номер середовища; знаки мінус і плюс відповідають станам до і після взаємодії хвилі з межею. Згідно з цими позначеннями  $\Theta_{(1-)}^{(r)}$  є кутом падіння,  $\Theta_{(1+)}^{(v)}$  – кут відображення,  $\Theta_{(2+)}^{(\mu)}$  – кут заломлення;  $v_{(1-)}^{(r)}$ ,  $v_{(1+)}^{(v)}$ ,  $v_{(2+)}^{(\mu)}$  є швидкостями розповсюдження відповідних хвиль у відповідних напрямках.

Для вирішення приведеної нелінійної системи Снелля запропонований підхід, заснований на використанні методу Ньютона спільно з методом продовження по параметру [3-5, 9, 10].

В рамках нульового наближення променевого методу хвиля визначається (рис. 1) кутом  $\Theta$  між напрямом швидкості  $\vec{v}$  її фронту і нормаллю до площини  $G$ , кутом  $\Psi$  між напрямом променевої швидкості  $\vec{\xi}$  і нормаллю до площини  $G$ , вектором поляризації  $\vec{A}$ . Для вирішення динамічної задачі запропонована методика, в якій аналізується поведінка розривів швидкостей елементів середовищ на фронтах чотирьох хвиль і для їх підрахунку використовуються умови збереження кількостей руху елементів частинок середовищ  $I$  і  $II$ , залучених в рух в результаті взаємодії на  $G$  падаючою, відображених і заломлених хвиль

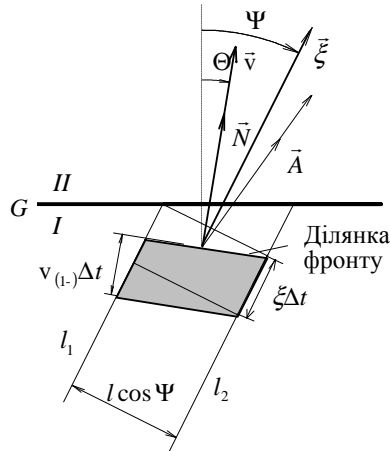


Рис. 1

$$\left( \dot{\vec{u}} + \dot{\vec{u}}_{(1)} \right) \Big|_G = \dot{\vec{u}}_{(2)} \Big|_G, \Delta \bar{Q}_{(1-)}^{(1)} = \Delta \bar{Q}_{(1+)}^{(1)} + \Delta \bar{Q}_{(1+)}^{(2)} + \Delta \bar{Q}_{(2+)}^{(1)} + \Delta \bar{Q}_{(2+)}^{(2)}. \quad (2)$$

Після проектування рівняння (2) на осі  $x^1$  і  $x^2$  будеться система чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно швидкостей руху елементів

$$A \cdot w = b_p, \quad (3)$$

де  $A$  – матриця четвертого порядку

$$A = \begin{vmatrix} \rho_1 \xi_{(1+)}^{(1)} \cos \Psi_{(1+)}^{(1)} A_{1(1+)}^{(1)} & \rho_1 \xi_{(1+)}^{(2)} \cos \Psi_{(1+)}^{(2)} A_{1(1+)}^{(2)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(1)} \cos \Psi_{(2+)}^{(1)} A_{1(2+)}^{(1)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(2)} \cos \Psi_{(2+)}^{(2)} A_{1(2+)}^{(2)} \\ \rho_1 \xi_{(1+)}^{(1)} \cos \Psi_{(1+)}^{(1)} A_{2(1+)}^{(1)} & \rho_1 \xi_{(1+)}^{(2)} \cos \Psi_{(1+)}^{(2)} A_{2(1+)}^{(2)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(1)} \cos \Psi_{(2+)}^{(1)} A_{2(2+)}^{(1)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(2)} \cos \Psi_{(2+)}^{(2)} A_{2(2+)}^{(2)} \\ -A_{1(1+)}^{(1)} & -A_{1(1+)}^{(2)} & A_{1(2+)}^{(1)} & A_{1(2+)}^{(2)} \\ -A_{2(1+)}^{(1)} & -A_{2(1+)}^{(2)} & A_{2(2+)}^{(1)} & A_{2(2+)}^{(2)} \end{vmatrix},$$

$w = \left( \dot{u}_{(1+)}^{(1)} \quad \dot{u}_{(1+)}^{(2)} \quad \dot{u}_{(2+)}^{(1)} \quad \dot{u}_{(2+)}^{(2)} \right)^T$  – вектор шуканих значень швидкостей  $\dot{u}_{(i+)}^{(r)}$  частинок відповідних хвиль на їх фронтах;

$b_P = \left( \rho_1 \xi_{(1-)}^{(1)} \cos \Psi_{(1-)}^{(1)} A_{1(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \quad \rho_1 \xi_{(1-)}^{(1)} \cos \Psi_{(1-)}^{(1)} A_{2(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \quad A_{1(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \quad A_{2(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \right)^T$  – вектор правої частини, відповідний падаючій  $qP$ -хвилі;  $\rho_1, \rho_2$  – густина відповідних середовищ.

У системі (3) перші два рівняння є умовами збереження кількостей руху, третє і четверте рівняння – умови сумісності швидкостей елементів середовищ  $I$  і  $II$ , контактуючих на поверхні  $G$ .

Якщо падаюча хвиля є квазіпоперечною ( $qS$ -хвиля), то замість (3) маємо

$$A \cdot w = b_S, \quad (4)$$

де  $A$  і  $w$  залишаються незмінними, а вектор  $b_S$  правої частини приймає вигляд

$$b_S = \left( \rho_1 \xi_{(1-)}^{(2)} \cos \Psi_{(1-)}^{(2)} A_{1(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \quad \rho_1 \xi_{(1-)}^{(2)} \cos \Psi_{(1-)}^{(2)} A_{2(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \quad A_{1(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \quad A_{2(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \right)^T.$$

### Проходження розривної хвилі через площину розриву суцільності пружних середовищ.

У механіці гірських порід широко відомі випадки порушення суцільності тектонічних структур в результаті утворення поверхонь гірських розломів. Порівняно часто тонкий прошарок на поверхні розлому між двома напівпросторами заповнюється глинистими масами, які виконують роль рідкого середовища, що змащує. У цих випадках на поверхні розлому  $G$  реалізуються умови контактної взаємодії берегів розлому, для яких можна вважати, що нормальні до поверхні  $G$  переміщення двох середовищ співпадають, тоді як уздовж поверхні  $G$  контактуючі елементи середовищ можуть вільно «прослизати» один відносно іншого. Тому векторне рівняння контактної взаємодії двох середовищ втрачає силу і залишається вірним лише умова збереження кількості руху елементів середовищ у напрямі нормалі до поверхні  $G$ .

Проте в дотичному напрямі стає справедливими два рівняння збереження імпульсу. Одне з них є умовою збереження імпульсів уздовж поверхні  $G$  в першому середовищі до і після взаємодії, а друге – рівність нулю імпульсів уздовж поверхні  $G$  в другому середовищі після взаємодії. До цих співвідношень додається умова рівності нормальних до поверхні  $G$  швидкостей контактуючих елементів середовищ. Тоді матриця  $A$  в системі (2) приймає вигляд

$$A = \begin{vmatrix} \rho_1 \xi_{(1+)}^{(1)} \cos \Psi_{(1+)}^{(1)} A_{1(1+)}^{(1)} & \rho_1 \xi_{(1+)}^{(2)} \cos \Psi_{(1+)}^{(2)} A_{1(1+)}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(1)} \cos \Psi_{(2+)}^{(1)} A_{1(2+)}^{(1)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(2)} \cos \Psi_{(2+)}^{(2)} A_{1(2+)}^{(2)} \\ \rho_1 \xi_{(1+)}^{(1)} \cos \Psi_{(1+)}^{(1)} A_{2(1+)}^{(1)} & \rho_1 \xi_{(1+)}^{(2)} \cos \Psi_{(1+)}^{(2)} A_{2(1+)}^{(2)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(1)} \cos \Psi_{(2+)}^{(1)} A_{2(2+)}^{(1)} & \rho_2 \xi_{(2+)}^{(2)} \cos \Psi_{(2+)}^{(2)} A_{2(2+)}^{(2)} \\ -A_{2(1+)}^{(1)} & -A_{2(1+)}^{(2)} & A_{2(2+)}^{(1)} & A_{2(2+)}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (5)$$

При цьому змінюється і вектор правих частин

$$b_P = \left( \rho_1 \xi_{(1-)}^{(1)} \cos \Psi_{(1-)}^{(1)} A_{1(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \quad 0 \quad \rho_1 \xi_{(1-)}^{(2)} \cos \Psi_{(1-)}^{(2)} A_{2(1-)}^{(2)} \dot{u}_{(1-)}^{(2)} \quad A_{2(1-)}^{(1)} \dot{u}_{(1-)}^{(1)} \right)^T$$

Проаналізувати зміну визначника матриці  $A$  в явному вигляді для анізотропних середовищ досить важко. Тому звернемося до випадку, коли пружні середовища ізотропні. В цьому випадку матриця  $A$  спрощується і приймає форму

$$A = \begin{vmatrix} \rho_1 \alpha_1 \sin \Theta_{(1+)}^{(1)} \cos \Theta_{(1+)}^{(1)} & -\rho_1 \beta_1 \cos^2 \Theta_{(1+)}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \alpha_2 \sin \Theta_{(2+)}^{(1)} \cos \Theta_{(2+)}^{(1)} & \rho_2 \beta_2 \cos^2 \Theta_{(2+)}^{(2)} \\ -\rho_1 \alpha_1 \cos^2 \Theta_{(1+)}^{(1)} & -\rho_1 \beta_1 \sin \Theta_{(1+)}^{(2)} \cos \Theta_{(1+)}^{(2)} & \rho_2 \alpha_2 \cos^2 \Theta_{(2+)}^{(1)} & -\rho_2 \beta_2 \sin \Theta_{(2+)}^{(2)} \cos \Theta_{(2+)}^{(2)} \\ \cos \Theta_{(1+)}^{(1)} & \sin \Theta_{(1+)}^{(2)} & \cos \Theta_{(2+)}^{(1)} & -\sin \Theta_{(2+)}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Якщо вважати, що вибрана гранична площина  $G$  ділить пружний масив на два напівпростори з однаковими параметрами пружності  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , то з урахуванням рівності  $\Theta_{(1+)}^{(1)} = \Theta_{(2+)}^{(1)} = \Theta^{(1)}$ ,  $\Theta_{(1+)}^{(2)} = \Theta_{(2+)}^{(2)} = \Theta^{(2)}$  матрицю  $A$  можна привести до вигляду

$$A = \rho^3 \cos^2 \Theta^{(1)} \begin{vmatrix} \alpha \sin \Theta^{(1)} & -\beta \cos^2 \Theta^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \sin \Theta^{(1)} & \beta \cos^2 \Theta^{(2)} \\ -\alpha \cos \Theta^{(1)} & -\beta \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} & \alpha \cos \Theta^{(1)} & -\beta \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} \\ 1 & \sin \Theta^{(2)} & 1 & -\sin \Theta^{(2)} \end{vmatrix}$$

Обчислюючи її визначника, одержимо

$$\begin{aligned}
D_4 &= \det A = \rho^3 \cos^2 \Theta^{(1)} \times \\
&\times \left\{ -1 \left[ -\beta \cos^2 \Theta^{(2)} \left( -\alpha \beta \sin \Theta^{(2)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} - \alpha \beta \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \right] + \right. \\
&+ \sin \Theta^{(2)} \left[ \alpha \sin \Theta^{(1)} \left( -\alpha \beta \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} - \alpha \beta \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \right] - \\
&- 1 \left[ -\beta \cos^2 \Theta^{(2)} \left( -\alpha \beta \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} - \alpha \beta \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \right] - \\
&- \sin \Theta^{(2)} \left[ -\alpha \sin \Theta^{(1)} \left( -\alpha \beta \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} - \alpha \beta \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \right] \left. \right\} = \\
&= -\alpha \beta \rho^3 \cos^2 \Theta^{(1)} \left\{ \left( \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \cos \Theta^{(2)} + \cos \Theta^{(1)} \cos^2 \Theta^{(2)} \right) \times \right. \\
&\times \left. \left( 2\beta \cos^2 \Theta^{(2)} + 2\alpha \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

$$\text{Але } \frac{\sin \Theta^{(1)}}{\alpha} = \frac{\sin \Theta^{(2)}}{\beta}, \quad \alpha = \beta \frac{\sin \Theta^{(1)}}{\sin \Theta^{(2)}}.$$

У результаті маємо

$$\begin{aligned}
D_4 &= -2\alpha\beta^2\rho^3 \cos^2 \Theta^{(1)} \cos \Theta^{(2)} \left( \sin \Theta^{(1)} \sin \Theta^{(2)} + \cos \Theta^{(1)} \cos \Theta^{(2)} \right) \times \\
&\times \left( \sin^2 \Theta^{(1)} + \cos^2 \Theta^{(2)} \right).
\end{aligned}$$

Щоб стан взаємодії розривної хвилі з площиною розділу  $G$  був критичним, необхідне виконання умови  $D_4 = 0$ .

Якщо падаюча хвиля є подовжньою, ця умова не виконується ніколи, оскільки  $\Theta_{(1+)}^{(2)} \leq \arcsin(\beta\alpha^{-1})$ . В цьому випадку жоден співмножників в правій частині рівності не може прийняти нульове значення. У зв'язку з цим при падінні на абсолютно гладку площину  $G$  розділу пружного середовища розривної  $P$ -хвилі критичні стани не можуть бути реалізовані.

Проте ситуація міняється, якщо падаючою є  $S$ -хвиля. Тоді  $0 \leq \Theta_{(1-)}^{(2)} < \pi/2$ ,  $\Theta_{(1+)}^{(1)} = \arcsin(\alpha\beta^{-1} \sin \Theta_{(1-)}^{(2)})$  і при  $\Theta_{(1-)}^{(2)} = \arcsin(\beta\alpha^{-1})$ ,  $\Theta_{(1+)}^{(1)} = \pi/2$ ,  $\cos \Theta_{(1+)}^{(1)} = 0$ ,  $D_4 = 0$ . Тому для  $S$ -хвилі кут падіння  $\Theta_{(1-)}^{(2)} = \arcsin(\beta\alpha^{-1})$  є критичним.

Приведемо результати вирішення системи рівнянь вигляду (2) для даного випадку взаємодії плоскої розривної  $P$ -хвилі з площиною  $G$  розділу однорідного ізотропного пружного середовища з механічними характеристиками  $\lambda = 1.731 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 1.154 \cdot 10^9$  Па,  $\rho = 2510$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 4011$  м/с,  $\beta = 2144$  м/с при різних кутах падіння  $\Theta_{(1-)}^{(1)}$ . Вважалося, що на фронті  $P$ -хвилі величина розриву швидкості елементів середовища

складає 1м/с. Спочатку за допомогою формул Снелля були підраховані кути відображення,  $\Theta_{(j+)}^{(2)}$  ( $j = 1$ ) і заломлення,  $\Theta_{(j+)}^{(2)}$  ( $j = 2$ ) для  $P$ - і  $S$ -хвиль. Результати розрахунків приведені на рис. 2. Вони свідчать про те, що кути падіння  $\Theta_{(j+)}^{(1)}$  ( $j = 1, 2$ ) для  $P$ -хвилі співпадають. Те ж саме справедливе і для кутів  $\Theta_{(j+)}^{(2)}$  ( $j = 1, 2$ )  $S$ -хвилі. Рис. 3 ілюструє залежності інтенсивностей швидкостей елементів на фронтах відображених  $(\dot{u}_{(1+)}^{(1)}, \dot{u}_{(1+)}^{(2)})$  і заломлених  $(\dot{u}_{(2+)}^{(1)}, \dot{u}_{(2+)}^{(2)})$  хвиль. З цього витікає, що критичні стани, як це відмічено вище, не наступають у всьому діапазоні зміни кута падіння  $0 \leq \Theta_{(-)}^{(1)} \leq \pi/2$ . При цьому криві відображеної і заломленої  $S$ -хвиль співпадають, а хвилі подовжніх швидкостей  $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$  і  $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$  обмінюються своїми значеннями при зміні кута падіння  $\Theta_{(-)}^{(1)}$  від 0 до  $\pi/2$ .

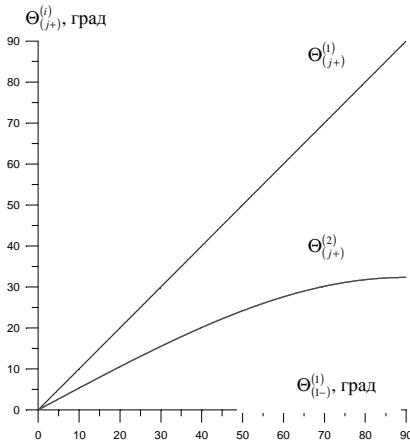


Рис. 2

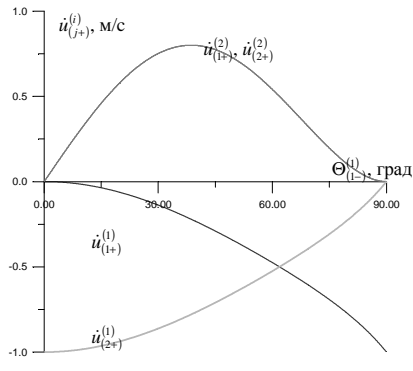


Рис. 3

Якщо на площину  $G$  падає  $S$ -хвиля, то, як впливає з рис. 4, для неї кут  $\Theta_{(1-)}^{(2)} = \arcsin(\beta\alpha^{-1}) = 32.3^\circ$  є критичним. При цьому значенні  $\Theta_{(1-)}^{(2)}$  інтенсивності швидкостей  $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$ ,  $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$  подовжніх хвиль прагнуть до нескінченності (рис. 5), в той час, як інтенсивності поперечних хвиль

прагнуть обмінятися своїми значеннями. За межами критичного значення кута  $\Theta_{(1-)}^{(2)}$  мають місце біфуркаційні явища.

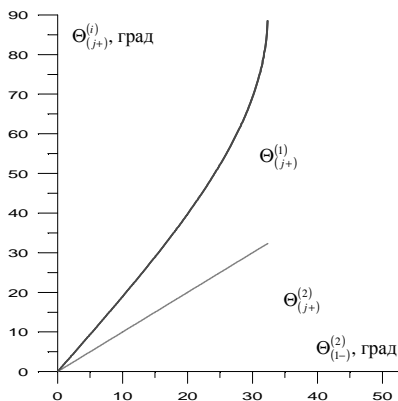


Рис. 4

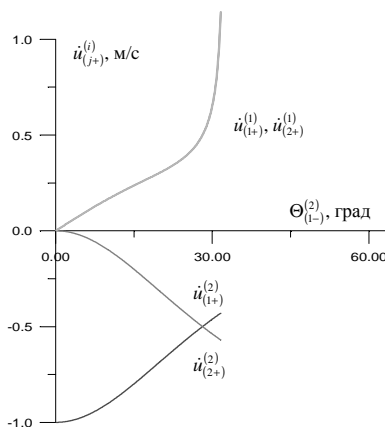


Рис. 5

**Критичні стани на межі розділу пружних середовищ.** Питання про зв'язок кінематичних і динамічних умов виникнення критичних станів розривних хвиль на межах контакту пружних середовищ з різними параметрами пружності повинні розв'язуватися на основі аналізу рівнянь Снелля і рівнянь динамічної взаємодії з відповідними матрицями  $A$ . Дослідження цього питання для трансверсально-ізотропних середовищ аналітичними засобами здійснити важко. Великі труднощі виникають і при спробі вирішення цієї задачі для ізотропних пружних середовищ, в загальному вигляді. Тому нами це дослідження було проведене для ізотропних середовищ з конкретними вибраними значеннями параметрів пружності шляхом комп'ютерного вирішення рівнянь. Розрахунки виконані для випадку, коли механічні параметри для першого і другого середовищ склали  $E_1 = 3 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_1 = 0,3$ ,  $\rho_1 = 2510$  кг/м<sup>3</sup>;  $E_2 = 2 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu_2 = 0,1$ ,  $\rho_2 = 3510$  кг/м<sup>3</sup>.

Досліджене падіння подовжньої  $P$ -хвилі із середовища  $I$  на площину  $G$  розділу середовищ. Аналіз розв'язків рівнянь Снелля – кути  $\Theta_{(1+)}^{(1)}$ ,  $\Theta_{(1+)}^{(2)}$ ,  $\Theta_{(2+)}^{(1)}$ ,  $\Theta_{(2+)}^{(2)}$  – показує, що відображені в середовище  $I$  та заломлені в середовище  $II$  розривні хвилі при зміні кута падіння в межах



$0 \leq \Theta_{(1-)}^{(1)} < \pi/2$  не набувають критичних величин. Інтенсивності хвиль, які сформувалися на площині,  $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$ ,  $\dot{v}_{(1+)}^{(1)}$ ,  $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$ ,  $\dot{v}_{(2+)}^{(1)}$ , які залежать від кута падіння  $\Theta_{(1-)}^{(1)}$ , мають кінцеві значення і динамічні критичні стани в даному випадку не виникають.

Проте ситуація міняється, якщо падаючою є поперечна  $S$ -хвиля. Для неї при  $\Theta_{(1-)}^{(2)} = 32.3^\circ$  настає ефект квазіповного внутрішнього відображення і кут  $\Theta_{(1+)}^{(1)}$  приймає значення  $90^\circ$ . Вирішення динамічної задачі показало, що при цьому значенні кута  $\Theta_{(1-)}^{(2)}$  величини інтенсивностей всіх хвиль  $\dot{u}_{(1+)}^{(1)}$ ,  $\dot{v}_{(1+)}^{(1)}$ ,  $\dot{u}_{(2+)}^{(1)}$ ,  $\dot{v}_{(2+)}^{(1)}$  необмежено зростають.

Аналогічні дослідження проведені для випадків, коли початкова  $P$ -хвиля і  $S$ -хвиля падають із середовища  $II$  в середовище  $I$ . У першому випадку критичний кут падіння складає  $\Theta_{(1-)}^{(1)} = 36.9^\circ$ . При цій величині

кута визначник матриці  $A$  приймає нульове значення і інтенсивності всіх хвиль, що сформувалися на поверхні  $G$ , спрямовуються до нескінченності.

Такий же ефект має місце і у разі, коли падаючою є  $S$ -хвиля. Для вибраних значень механічних параметрів середовищ  $I$  і  $II$  критичний кут падіння склав  $\Theta_{(1-)}^{(2)} = 23.6^\circ$ .

**Висновок.** Аналіз критичних станів явищ дифракції плоских розривних (слабких ударних)  $P$ - і  $S$ -хвиль на площинах розділу пружних середовищ з різними механічними властивостями показав, що у всіх розглянутих випадках вони виникають в результаті настання ефекту квазіповного внутрішнього відображення і супроводжуються необмеженим (в рамках ідеальної теорії пружності) зростанням інтенсивності хвиль, які сформувалися на поверхні розділу середовищ. При цьому кінематичний і динамічний критерії втрати стійкості реалізуються одночасно.

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 183с.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: В 2 т. Т.1 Общие вопросы. К.: Наукова думка, 1986.
3. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоских ударных волн на поверхности раздела анизотропных упругих сред //Прикл. механика и техн. физика. – 2002. –43, №5. – С. 21–27.

4. *Гуляев В.И., Иванченко Г.М.* Фокусировка и рассеивание плоской акустической волны трансверсально-изотропными упругими линзами //Акустический журнал. – 2004. 50, №2 – С.177–183.
5. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – 64, №3. – С. 394–402.
6. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304с.
7. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
8. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.: Наукова думка, 1988. 220 с.
9. *Gulyaev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M.* Focusing and scattering the nonstationary wave by the free surface of an anisotropic elastic medium //Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, №7. – P.86–93.
10. *Gulyaev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237–247.

УДК 624.014

Білик С.І., канд. техн. наук

## **СТІЙКІСТЬ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ЗГИНУ КОНСОЛЬНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ ЗІ ЗМІННОЮ ВИСОТОЮ СТІНКИ ЗА МЕТОДОМ РІТЦА**

**Постановка проблеми.** Використання в конструкціях будівель зварних двотаврів змінного перерізу відкрило можливість знаходити раціональні системи за рахунок економічного розподілу матеріалу вздовж конструкцій та виявляти додаткові резерви несучої спроможності. Однією з таких задач є задача з визначення стійкості плоскої форми згину двотаврових балок зі змінною висотою стінки [4,5,6,8,9].

**Аналіз основних досліджень, публікацій і невіршених задач.** Відомі наукові дослідження [2,3,4,5,6], в яких отримано критерій стійкості плоскої форми згину балок постійного перерізу. Вперше розв'язання задачі втрати стійкості плоскої форми згину двотаврів постійного перерізу наведено в дослідженнях С.П. Тимошенка [2]. Теорія стійкості тонкостінних стержнів належить В.З. Власову [3]. В книгах [3,4,5,6] закладені основні теоретичні засади розрахунку тонкостінних стержнів постійного і змінного перерізів, викладена теорія просторової роботи тонкостінних балок і колон з постійним перерізом при врахуванні стиснутого крутіння. Стійкість балок ступінчато-змінного прямокутного перерізу проаналізована в дослідженнях [6]. В статті [7] аналітично отримано вираз для визначення критичного навантаження при втраті стійкості плоскої форми згину балки постійного перерізу з настилом. В дослідженні [8] аналітичним методом отримана система диференціальних рівнянь, яка описує просторову роботу пружної балки змінного перерізу, і отримано аналітичне рішення при апроксимації змінності перерізу параболічною залежністю двотаврової балки зі змінною висотою стінки. В статті [9] отримано диференціальне рівняння, яке описує стійкість плоскої форми згину двотаврової балки зі змінною висотою перерізу. В книзі [5] застосовується енергетичний підхід для визначення стійкості плоскої форми згину консольної двотаврової балки з постійною висотою стінки.

**Викладення основного матеріалу досліджень.** Досліджується стійкість плоскої форми згину консольної тонкостінної сталеві двотаврової балки довжиною  $l$  зі змінною висотою стінки при дії зосередженої сили на вільному кінці, яка прикладена у центрі ваги

найменшого перерізу (рис. 1). Початок декартової системи координат розташовано у центрі ваги максимального кінцевого перерізу стержня [9]. Прийняті робочі гіпотези тонкостінних пружних елементів теорії В.З.Власова [3]. Прийняті позначення: переміщення центру згину -  $\eta, \xi$ , кута повороту перерізу -  $\theta$ . До основи теорії [3] покладена гіпотеза про недеформованість перерізу елемента відкритого профілю. Граничні умови обпирання консольної балки будуть.

$$\begin{aligned} z=0 \rightarrow \theta_0 &= 0; & \theta'_0 &= 0; & \xi_0 &= 0; \\ \xi'_0 &= 0; & \eta_0 &= 0; & \eta'_0 &= 0; \\ z_n = l_0 \rightarrow \theta''_n &= 0; & \xi''_n &= 0; & \eta''_n &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

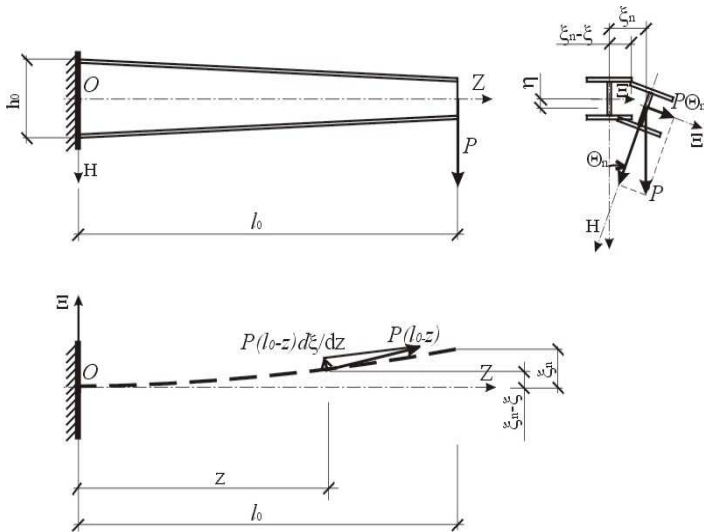


Рис. 1. Конструкція та форма втрати стійкості консольної двотаврової сталевій балки зі змінною висотою стінки

Апроксимація зміни секторіального моменту інерції перерізу балки по довжині і моменту інерції перерізу відносно осі  $OX$  прийнято за параболічною залежністю.

$$\begin{aligned} EI_{xz} &= EI_{x0} \left(1 - \gamma_y \frac{z}{l}\right)^2; & EI_{\omega} &= EI_{\omega 0} \left(1 - \gamma_{\omega} \frac{z}{l}\right)^2; \\ \gamma_y &= 1 - \sqrt{\frac{I_{xn}}{I_{x0}}}; & \gamma_{\omega} &= 1 - \sqrt{\frac{I_{\omega n}}{I_{\omega 0}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для оцінки діапазону критичного навантаження на балку зі змінною висотою стінки скористаємось енергетичним підходом та принципом можливих переміщень, на яких побудовано метод В. Ритца [1,5]. Переміщення балки характеризуються прогинами  $\eta_z$  в площині  $HOZ$  і кутами повороту –  $\theta_{iz}$ . Прогини в площині  $\Xi OZ$  (горизонтальний згин балки) завжди можна виразити через додатковий згинальний момент, який визначається за формулою [9] –  $M_{yz} = Pl(1-z/l)\theta_z = EI_y \xi''$ .

$$\eta_z = \sum_{j=1}^m f_j \eta_{jz} ; \theta_z = \sum_{i=1}^n a_i \theta_{iz}, \quad (4)$$

де  $f_j$  та  $a_i$  – коефіцієнти,  $\eta_{jz}$  та  $\theta_{iz}$  - апроксимуючі функції переміщень і кутів повороту перерізу лінійно незалежні

При дослідженні нестійкої рівноваги балки варіація повної потенціальної енергії балки має вигляд.

$$\delta\Pi = \sum_{j=1}^m \frac{\partial\Pi}{\partial f_j} \delta\eta_{jz} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Pi}{\partial a_i} \delta\theta_{iz}. \quad (5)$$

Потенціальна енергія дорівнює потенціальній енергії деформації та потенціальній енергії навантаження. Потенціальна енергія навантаження дорівнює роботі зовнішніх сил на можливих переміщеннях зі зворотним знаком.

$$\Pi = U_\eta + U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\eta} - A_{P\theta}. \quad (6)$$

Враховуючи (4) та (5).

$$\frac{\partial\Pi}{\partial f_j} = \frac{\partial(U_\eta + U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\eta} - A_{P\theta})}{\partial f_j} = \frac{\partial(U_\eta - A_{P\eta})}{\partial f_j}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = \frac{\partial(U_\eta + U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\eta} - A_{P\theta})}{\partial a_i} = \frac{\partial(U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_i}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(U_\xi + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial f_j} = 0 ; \frac{\partial(U_\eta - A_{P\eta})}{\partial a_i} = 0. \quad (9)$$

Таким чином, за умови (4) відношення (7) і (8) не будуть залежати одне від одного і стійкість балки в площині дії згинального моменту буде залежати тільки від умови (8). Варіація потенціальної енергії при втраті стійкості плоскої форми згину балки згідно (5) та (8) приймає вигляд.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} \delta \theta_{iz} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_i} \delta \theta_{iz}. \quad (10)$$

Згідно [1,5] має місце критерій втрати стійкості через мінімум частини потенціальної енергії балки, яка характеризується горизонтальним згином та кутами повороту перерізу:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial (U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_i} = 0. \quad (11)$$

Для лінійно-пружного матеріалу за можливо записати інтегральний вираз потенціальної енергії деформації внутрішніх сил при горизонтальному згині ( $U_{\xi}$ ):

$$U_{\xi} = \int_0^l \frac{M_{yz}^2}{2EI_y} dz \rightarrow U_{\xi} = \frac{P^2 l^3}{2EI_y} \int_0^1 (1 - z/l)^2 \theta_z^2 d \frac{z}{l}. \quad (12)$$

За теоремою Кастільяно маємо запис роботи зовнішніх сил на можливих вертикальних переміщеннях, які виникають при куті повороту перерізу.

$$\Delta_P = \frac{\partial}{\partial P} U_{\xi} = \frac{2P l^3}{2EI_y} \int_0^1 (1 - z/l)^2 \theta_z^2 d \frac{z}{l}. \quad (13)$$

$$A_{P\theta} = P \Delta_P = a_1 \frac{P^2 l_0^3}{EI_y} \int_0^1 (1 - \frac{z}{l})^2 \theta_z^2 d \frac{z}{l}, \quad (14)$$

де для лінійно-пружного матеріалу інтегральний вираз потенціальної енергії деформації внутрішніх сил стиснутого крутіння ( $U_{t\omega}$ ) набуває вигляду.

$$U_{t\omega} = \int_0^l \frac{(M_{t_z} + M_{t\omega z})^2}{g_{t\omega}} dz = \int_0^l \frac{l(M_{t_z} + M_{t\omega z})^2}{g_{t\omega}} d \frac{z}{l}. \quad (15)$$

В формулі (15) вказана зведена змінна жорсткість балки при стиснутому крутінні  $g_{t\omega z}$ , яка прийнята за [8,9] при переході до  $t_z = z/l$  ( $t_z$  - відносна координата перерізу).

$$g_{t\omega z} = \frac{EI_{\omega 0}}{l^2} f_{t\omega z} \rightarrow f_{t\omega z} = [(1 - \gamma_{\omega t_z})^2 \frac{\pi^2}{4} + \frac{GI_{t0} l^2}{EI_{\omega 0}} (1 - \gamma_{t_z})]. \quad (16)$$

Величини крутильного моменту вільного крутіння  $M_{t_z}$  балки та згинно-крутильного моменту стиснутого крутіння  $M_{\omega z}$  залежать від похідних кутів повороту перерізу [5,8,9].

$$M_{t_z} = GI_{t0} (1 - \gamma_{t_z}) \theta'; \quad M_{\omega z} = -(1 - \gamma_{\omega t_z})^2 EI_{\omega 0} \theta'''. \quad (17)$$

Прийняті дві апроксимуючі функції можливих кутів повороту  $\theta_{1z}$  та  $\theta_{2z}$ , тоді:

$$\theta_z = \theta_{1z} + \theta_{2z}. \quad (18)$$

Граничним умовам (1) задовольняють функції:

$$\theta_{1z} = a_1 f_1 \rightarrow f_1 = (1 - \cos \frac{\pi t_z}{2}); \quad \theta'_{1z} = a_1 f'_1 \rightarrow f'_1 = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t_z}{2}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta_{2z} &= a_2 (1 - \cos \frac{5\pi t_z}{2} + \frac{t_z^2}{2} - \frac{t_z^3}{6}) \rightarrow \\ &\rightarrow f_2 = (1 - \cos \frac{5\pi t_z}{2} + \frac{t_z^2}{2} - \frac{t_z^3}{6}) \end{aligned} \quad (20)$$

За методом В. Рітца (W. Ritz) для двох функцій критерій (11) набуває вигляду.

$$\begin{cases} \frac{\partial(U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial(U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta})}{\partial a_2} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

У скороченому вигляді за (12...16) маємо відношення.

$$U_{\xi} + U_{t\omega} - A_{P\theta} = \int_0^1 \frac{l(M_{tz} + M_{\omega z})^2}{2g_{t\omega z}} dt_z - \frac{P^2 l^3}{2EI_y} \int_0^1 (1-t_z)^2 \theta_z^2 dt_z \quad (22)$$

При врахуванні (19) та (20) критерій (21) набуває вигляду системи однорідних алгебраїчних рівнянь. Нетривіальне рішення системи буде при рівності нулю головного визначника системи. Відповідні алгебраїчні перетворення дають рівняння для визначення критичної сили.

$$(\Phi_1 - k_{My}^2 T_1)(\Phi_2 - k_{My}^2 T_2) - (\Phi_{12} - k_{My}^2 T_{12})^2 = 0; \quad (23)$$

$$k_{My}^4 - k_{My}^2 \frac{(T_1 \Phi_2 + \Phi_1 T_2 - 2\Phi_{12} T_{12})}{(T_1 T_2 - T_{12}^2)} + \frac{\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_{12}^2}{(T_1 T_2 - T_{12}^2)} = 0;$$

$$k_{My}^2 = \frac{P^2 l^6}{EI_y \omega} = \frac{(T_1 \Phi_2 + \Phi_1 T_2 - 2\Phi_{12} T_{12})}{2(T_1 T_2 - T_{12}^2)} \pm \sqrt{\frac{(T_1 \Phi_2 + \Phi_1 T_2 - 2\Phi_{12} T_{12})^2}{4(T_1 T_2 - T_{12}^2)^2} - \frac{\Phi_1 \Phi_2 - \Phi_{12}^2}{(T_1 T_2 - T_{12}^2)}} \quad (24)$$

У (23,24) використанні такі відношення:



$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \left[ \frac{(GI_{t0})^2 l^6}{(EI_{\omega 0})^2} (1 - \gamma_t t_z)^2 (f_1')^2 + (1 - \gamma_{\omega} t_z)^4 l^6 (f_1''')^2 \right] dt_z - \\ &- 2 \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \frac{GI_{t0} l^6}{EI_{\omega 0}} (1 - \gamma_t t_z) (1 - \gamma_{\omega} t_z)^2 f_1' f_1''' dt_z; \\ \Phi_2 &= \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \left[ \frac{(GI_{t0})^2 l^6}{(EI_{\omega 0})^2} (1 - \gamma_t t_z)^2 (f_2')^2 + (1 - \gamma_{\omega} t_z)^4 (f_2''')^2 l^6 \right] dt_z - \\ &- 2 \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \frac{GI_{t0} l^6}{EI_{\omega 0}} (1 - \gamma_t t_z) (1 - \gamma_{\omega} t_z)^2 f_2' f_2''' dt_z; \\ \Phi_{12} &= \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \left[ \frac{(GI_{t0})^2 l^6}{(EI_{\omega 0})^2} (1 - \gamma_t t_z)^2 (f_1')(f_2') + (1 - \gamma_{\omega} t_z)^4 (f_1''')(f_2''') l^6 \right] dt_z - \\ &- \int_0^1 \frac{1}{f_{t\omega z}} \frac{GI_{t0} l^6}{EI_{\omega 0}} [(1 - \gamma_t t_z) (1 - \gamma_{\omega} t_z)^2 f_1' f_2''' - (1 - \gamma_t t_z) (1 - \gamma_{\omega} t_z)^2 f_2' f_1'''] dt_z. \end{aligned}$$

Числові дослідження. В таблиці представлені значення приведеного критичного навантаження  $k_{M_y}^2$ , що обчислені за формулою (24). Для всіх розрахунків було прийнято  $\gamma_{\omega} = \gamma_t$ .

Таблиця 1

Значення приведеного критичного навантаження за формулою (24)

$\gamma_{\omega}$	$k_{M_y}^2$ при $k_{r_{\omega}}^2$		
	0.1	0.3	0.5
0	189.3959	196.3181	203.3643
0.1	161.4353	167.9557	174.5961
0.2	135.8012	141.9197	148.1557
0.4	112.5092	118.2266	124.0604
0.5	91.57581	96.89417	102.3282
0.6	73.01804	77.94039	82.97707
0.7	56.85097	61.3807	66.02153
0.8	43.08431	47.22366	51.46709
0.9	31.71659	35.46361	39.30161
0.99	22.72672	26.06969	29.48267

Обчислене за критерієм (24) значення приведеного критичного навантаження  $k_{M_y}^2$  для балки з постійним перерізом при дії на вільному кінці зосередженої сили дорівнює 189 при  $k_{\omega}^2 = 0.1$ , яке на 3,5% відрізняється від значення, що приведене у [2]. При прийнятті однієї апроксимуючої функції за (19) функції рівняння (21) переходе набуває вигляду:

$$\Phi_1 - k_{M_y}^2 T_1 = 0 \rightarrow k_{M_y}^2 = \frac{\Phi_1}{T_1}. \quad (25)$$

Обчислене за формулою (25) значення приведеного критичного навантаження  $k_{M_y}^2$  для балки з постійним перерізом при дії на вільному кінці зосередженої сили дорівнює 246 при  $k_{\omega}^2 = 0.1$ , що на 32% вище за аналітичне значення отримане у [2].

**Висновки та перспективи.** Отримані результати слід вважати приблизним розв'язком розглянутої задачі, але дослідження дають відповідь на питання, в якому діапазоні слід шукати точне значення критичного навантаження.

1. *Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В. А.С.*, Будівельна механіка.– К.; 1999. – 584 с.
2. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971.– 808 с.
3. *Власов В.З.* Тонкостенные упругие стержни. – М.: Госиздат, Физматгиз, 1959 – 568 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник./Под ред. И.А.Биргера и Я.Г.Пановко. Т.3. - М.: Машиностроение, 1968 - 567 с.
5. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
6. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашенников, Н.Н. Шапошников. - М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
7. *Сладков С.И.* Устойчивость плоской формы изгиба балок с настилом.//Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып.55. - К.: Будівельник, 1989 - С. 86-89.
8. *Білик С.І.* Просторова робота сталевих тонкостінних балок із змінною висотою стінки. // Современные строительные конструкции из металла и древесины. Сб. науч. Тр. Ч. I. - Одесса: МОН України, Одесская ГАСА, 2006 - С.4-11.
9. *Білик С.І.* Стійкість плоскої форми згину сталевих двотаврових балок із змінною висотою стінки. // Будівельні металеві конструкції: сьогодення та перспективи розвитку. V Міжн. наук.-техн. конф., 18-22 вересня 2006 р. – К.: Видавництво „Сталь”, 2006. – С. 90-92.

УДК 539.3

Солодей І.І., канд. техн. наук

## **ЕФЕКТИВНІСТЬ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОЇ БАЗИ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ТА ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ**

**Вступ.** Найбільш універсальним чисельним методом, що дозволяє виконувати розрахунки будівельних конструкцій є метод скінченних елементів (МСЕ). Розгляд просторових моделей, вимоги до детальної дискретизації їх окремих елементів, і в той же час до збереження достатньо регулярної структури сіткової області веде до необхідності розв'язання систем рівнянь високих порядків, тому їх розв'язання проводиться, як правило, в рамках наближених розрахункових схем.

Істотно підвищити ефективність МСЕ дозволяє його поєднання з методом розділу невідомих. Цей підхід одержав назву напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ). НМСЕ був запропонований в роботах [9, 14] як ефективний метод розв'язання просторових задач теорії пружності для невісесиметрично навантажених тіл обертання. Висока ефективність напіваналітичного варіанта в порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних. Сучасні досягнення напіваналітичного методу скінченних елементів в статичних та квазістатичних задачах теорії пружності та пластичності [4], задачах повзучості, континуального та дискретного руйнування [1], у пошуку рішень задач динаміки на основі використання алгоритмів прямого інтегрування рівнянь руху однорідних та неоднорідних тіл [3, 8, 13] створюють міцний базис подальшого розвитку НМСЕ.

Об'єктами дослідження напіваналітичного методу скінченних елементів традиційно вважаються просторові тіла або системи просторових тіл, які утворені рухом складної геометричної фігури (поперечного перерізу тіла) вздовж утворюючої довільної форми. На торцях таких об'єктів можуть бути реалізовані різні типи граничних умов. Зважаючи на те, що реальні елементи конструкцій у своїй масі здебільшого є неоднорідними круговими та призматичними тілами, в рамках НМСЕ розроблено спеціальні типи скінченних елементів (СЕ), що дозволяють з найбільшою ефективністю апроксимувати окремі типи просторових неоднорідних об'єктів дослідження. Сучасні методики, які орієнтовані на розрахунок широкого класу конструкцій, що складаються з масивних і тонкостінних елементів, повинні

поряд з високою точністю опису напружено-деформованого стану об'єктів складної форми та структури забезпечувати високу швидкість збіжності до точного рішення при мінімальних чисельних витратах. Завдяки введенню додаткових гіпотез, що не зменшують точність апроксимації, представленню деформацій і напружень в фізичних термінах та у відповідності до моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) [4, 11, 12] вдається, з однієї сторони, уникнути трудомікої процедури чисельного інтегрування по площі поперечного перетину скінченного елемента, з іншої – зберегти високу ефективність просторової дискретизації.

**1. Скінченні елементи НМСЕ для задачі динаміки.** Для дискретизації неоднорідних просторових тіл при динамічному навантаженні застосовуються кільцевий та призматичний скінченні елементи [2, 5, 8, 13] (рис.1, 2).

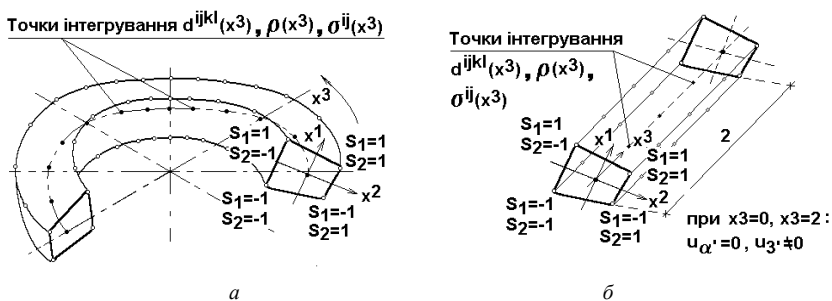


Рис. 1. Неоднорідні скінченні елементи на основі рядів Фур'є: а) замкнутий кільцевий; б) шарнірно опертий призматичний

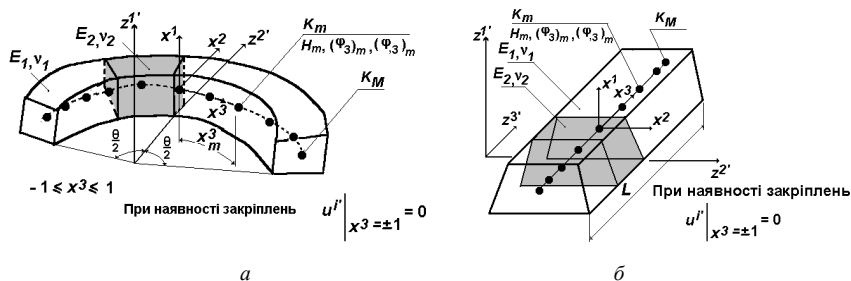


Рис. 2. Неоднорідні скінченні елементи із довільними граничними умовами на торцях: а) незамкнений кільцевий; б) призматичний

Щільність матеріала, компоненти тензора пружних постійних і метричного тензора в області поперечного перетину елемента вважаються незмінними. Напротивагу цьому постійні матеріала і напруження

довільно змінюються вздовж осі  $x^3$  і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування. В площині перетину елемента прийнято білінійне розподілення переміщень, швидкостей та прискорень:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)}(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}, \quad P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

Компоненти тензора деформацій представлені у відповідності з основними положеннями моментної схеми скінченного елемента:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{(\alpha\alpha), (3-\alpha)} \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}}{2} (h_{(\alpha\alpha), (3-\alpha)} + h_{33, (3-\alpha)}) \right] x^{(3-\alpha)} \right\},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} h_{33, \alpha} \right] x^{\alpha} \right\},$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij, \beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad h_{(ii), \beta} = \frac{g_{(ii), \beta}}{g_{(ii)}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}.$$

Як показано в роботах [4, 6, 7, 10, 11], застосування моментної схеми скінчених елементів [12] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Для апроксимації переміщень, швидкостей та прискорень в напрямку утворюючої використовується система координатних функцій  $\psi_{k'}^l$ :

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \psi_{k'}^l, \quad (3)$$

де для кільцевого замкнутого СЕ на основі рядів Фур'є:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \psi_{3'}^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi, \quad (4)$$

призматичного СЕ на основі рядів Фур'є:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2, \quad (5)$$

кільцевого незамкненого та призматичного СЕ із довільними граничними умовами на торцях ( $\psi^l$  – поліноми Лагранжа при  $l = 0, 1$  і Міхліна при  $l = 2, \dots, L$ ):

$$\begin{aligned} \psi_k^0 &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \psi_{k'}^1 = \frac{1}{2}(1+x^3), \quad -1 \leq x^3 \leq 1, \\ \psi_{k'}^l &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{s=0}^l \frac{(-1)^s (l+s)!}{(l-s)!(s!)^2 2^{s+1}} \left[ (1-x^3)^s + (-1)^l (1+x^3)^s \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ способом.

На основі представлених скінченних елементів у співробітництві з Вабішевичем М.О. в рамках задачі динаміки отримані вирази для визначення матриць градієнтів кільцевого та призматичного скінченних елементів, матриць мас та жорсткості однорідного та неоднорідного скінченних елементів, що записані в узагальненому вигляді.

**2. Дослідження ефективності скінченних елементів.** Важливим етапом в реалізації обчислювальних систем для розв'язання просторових задач динаміки є вибір оптимальних, з точки зору швидкості і складності процесів деформування, алгоритмів інтегрування рівнянь руху у часі. Відомо, що вибір того чи іншого алгоритму пов'язаний із швидкістю протікання процесу деформування та характеру навантажень. При аналізі перехідних процесів найбільше розповсюдження отримав метод узагальнених координат, який припускає розклад розшукуваного рішення в ряд по формах власних коливань. В рамках вищезазначеного методу проведено порівняння ефективності представлених скінченних елементів з відомими аналогами, що реалізовані у ліцензованих інженерних комплексах прикладних програм ЛІРА, СКАД і MSC/NASTRAN.

З метою апробації методики для призматичних тонкостінних тіл була розглянута нескінченна плита, на шарнірних опорах, розв'язок якої відповідає теорії коливань одномірних стрижнів. Розрахункова схема та похибка визначення трьох перших власних частот по відношенню до аналітичного розв'язку в залежності від співвідношення товщини і

ширини об'єкту показана на рис. 3. Для третьої власної частоти похибка не перевищує 1% при співвідношенні 1/70.

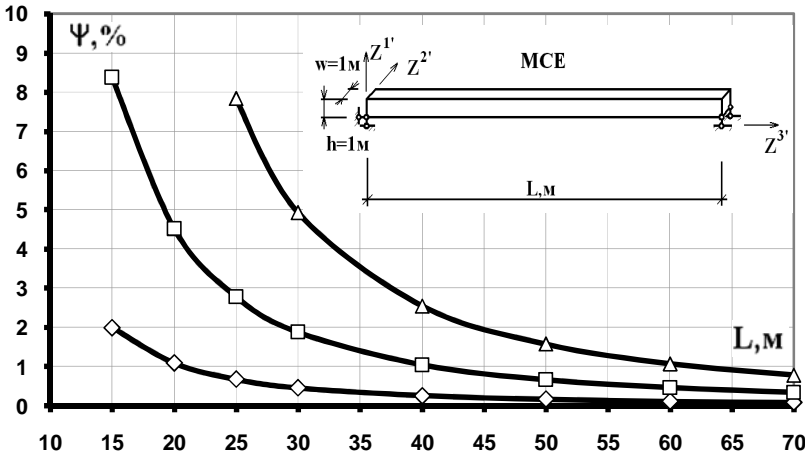


Рис. 3

При зафіксованому співвідношенні проведено дослідження збіжності першої власної частоти до аналітичного розв'язку при зміні густоти сіткової моделі вздовж довжини  $L$  (рис. 4). По висоті та ширині залишали один скінчений елемент. Отримані результати засвідчили, що при використанні 2-х та більше пластинчастих скінчених елементів комплексів СКАД, ЛІРА та 1-го призматичного скінченного елемента вздовж осі  $Z^3$  розв'язок співпадає з аналітичним на всьому інтервалі дослідження; однак, використання тривимірних об'ємних скінчених елементів комплексів СКАД та ЛІРА призводить до значних похибок. Наприклад при апроксимації 140 скінченими елементами по ширині похибка складає близько 20%. На відміну від цього використання скінчених елементів на основі моментної схеми потребує сіткової моделі із 7 скінчених елементів для досягнення точності в межах 1%.

В той же час, використання 15 об'ємних скінчених елементів MSC/NASTRAN (Brick) дає 4% похибки, яка залишається однаковою при подальшому згущенні сіткової моделі.

Для дослідження ефективності призматичного скінченного елемента при аналізі масивних тіл розглянуто товсту нескінченну плиту на шарнірних опорах, в перерізі  $1 \times 2$  м (рис. 5). Для ЛІРА, СКАД і MSC/NASTRAN сіткова область побудована при однаковій кількості скінчених елементів вздовж кожної з координат. Особливістю

напіваналітичного варіанту є сіткова модель з одним скінченним елементом вздовж утворюючої об'єкту.

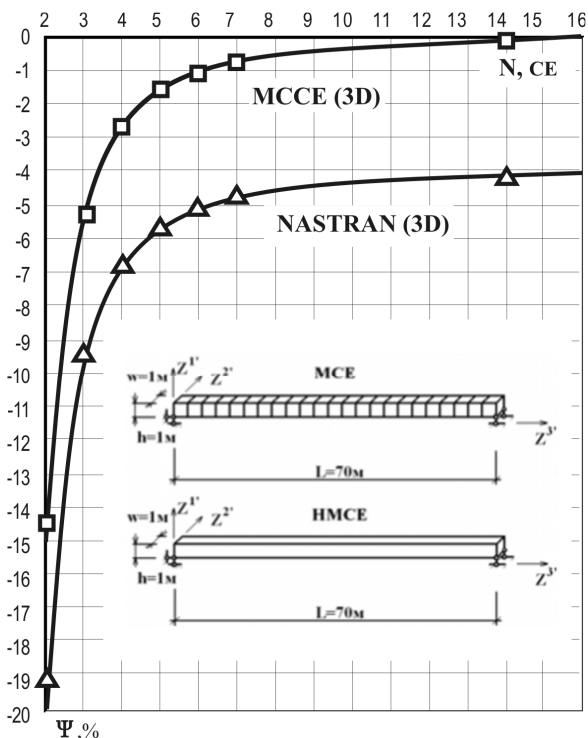


Рис. 4

Ефективність застосування скінченного елемента на основі моментної схеми та об'ємного (Brick) MSC/NASTRAN однакова. Рішення в межах 1% потребує використання сіткової області  $4 \times 4$  CE.

При використанні об'ємних скінченних елементів комплексів СКАД та ЛІРА збіжність значно повільніша і для досягнення 1%-ї похибки по першій формі коливаний потребує сітки  $30 \times 30$  CE. При використанні призматичного скінченного елемента (утворююча вздовж  $Z^3$ ) результат збігається вже при двох скінченних елементах (не приводиться на рисунку).

З метою апробації методики для тонкостінних тіл обертання були розглянуті коливання жорстко закріпленої по зовнішньому контуру кругової пластини радіусом 70м та товщиною 1м (рис. 6).



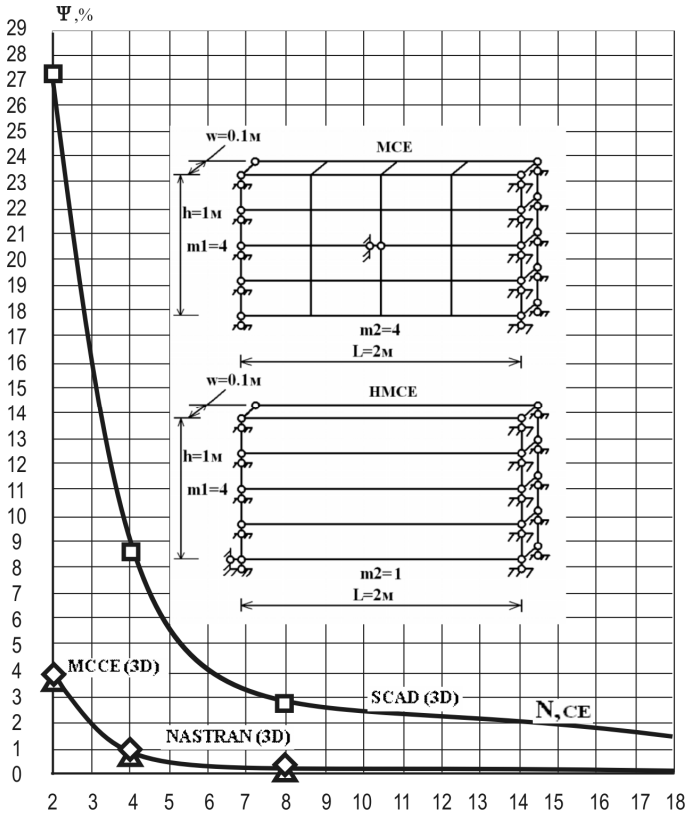


Рис. 5

Побудовані графіки збіжності першої власної частоти (рис.7) свідчать про те, що при використанні пластинчастих скінченних елементів комплексів SKAD та ЛПА вздовж радіуса плити похибка 1% досягається при 11÷12 скінченних елементах. Використання тривимірного об'ємного скінченного елемента комплексів SKAD та ЛПА призводить до значних похибок. Наприклад при апроксимації 140 скінченними елементами по ширині похибка складає близько 55%. На відміну від цього використання кільцевих скінченних елементів на основі моментної схеми потребує сіткової моделі із 14 скінченних елементів для досягнення точності в межах 1%. Збіжність розв'язків на основі об'ємного скінченного елемента MSC/NASTRAN досягається при 9÷10 CE вздовж радіуса плити. Похибка складає 5% та залишається однаковою при подальшому збільшенні сіткової моделі.

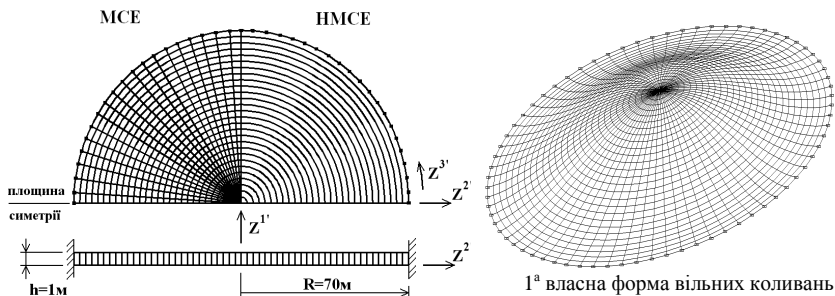


Рис. 6

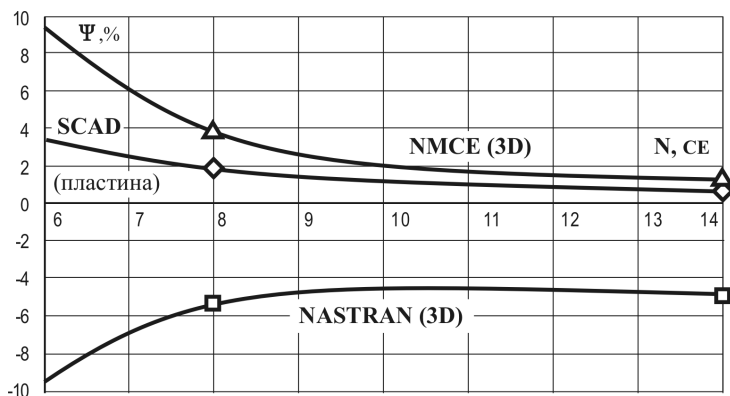


Рис. 7

Для дослідження ефективності кільцевого скінченного елемента при аналізі масивних тіл розглянуто диск радіусом 2м та товщиною 1м жорстко закріплений по зовнішньому контуру. Сіткова модель змінювалась як вздовж радіуса, так і по товщині диску. Результати показали однакову поведінку скінченноелементних баз комплексів СКАД, ЛІРА, MSC/NASTRAN та представлених кільцевих скінченних елементів.

Проведено аналіз динамічного деформування товстостінного металевого циліндру з вирізом, який апроксимувався неоднорідними кільцевими СЕ. Циліндр знаходиться під дією радіального рівномірнорозподіленого тиску, що миттєво прикладений до зовнішньої поверхні  $q = 1 \text{ Н/м}^2$  (рис. 8).

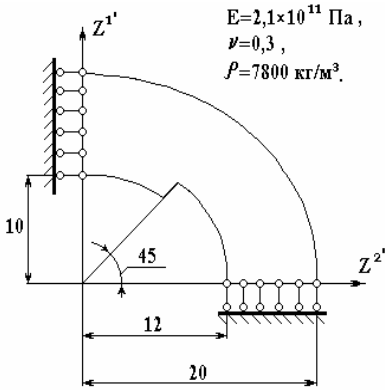


Рис. 8

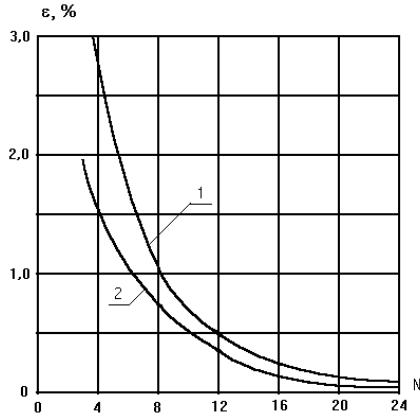


Рис. 9

Таблиця 1

## Порівняння результатів МСЕ і НМСЕ

№ форми	1	2	3	4	5
МСЕ	136.50	356.10	516.90	698.50	950.10
НМСЕ	136.60	357.60	517.60	698.70	954.20
$\epsilon, \%$	0.06	0.25	0.14	0.06	0.41

На першому етапі був проведений аналіз власних форм та частот МСЕ та НМСЕ. Відмінність результатів не перевищила 1% (табл.1). Другий етап - аналіз вимушених коливань циліндру за допомогою НМСЕ та МСЕ під дією рівномірнорозподіленого тиску по зовнішній поверхні. На рис.9 представлені графіки збіжності максимальних значень переміщень в залежності від числа функцій форми  $N$  (скінченні елементи для МСЕ (1) та кількість членів ряду Фур'є (2) для НМСЕ), які апроксимують циліндр вздовж окружної координати. За еталонні прийняті відповідні значення переміщень при утриманні 5 власних форм (подальше їх збільшення несуттєво впливало на кінцевий результат).

**Висновки.** Продуктивність методу скінченних елементів визначається багатьма факторами, серед яких одним з найважливіших є ефективність скінченноелементної бази. Для дискретизації означеного класу об'єктів в рамках задачі динаміки на основі моментної схеми скінченного елемента розроблені універсальні вісесиметричний, просторові кільцеві та неоднорідні прямолінійні призматичні скінченні елементи. Порівняння представленої бібліотеки скінченних елементів з відомими аналогами, що

реалізовані у популярних інженерних комплексах прикладних програм ЛІРА, СКАД і MSC/NASTRAN показало високу ефективність запропонованої бази скінченних елементів з точки зору швидкості збіжності результатів до точного при аналогічних варіантах апроксимації моделей та стійкість і вірогідність розв'язків для широкого спектру тонкостінних, масивних і комбінованих конструкцій.

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 77. - с. 3-29.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І.* Дослідження динамічної пружнопластичної взаємодії неоднорідних тіл на основі НМСЕ. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. –К.:КНУБА, 2000 р. - Вип.67. – с. 3-18.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
5. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченого елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2005 р. - Вип. 76. - с. 3-26.
6. *Гуляр А.И., Козак А.Л., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Применение МСКЭ к расчету круглых пластин и оболочек вращения. //Сопrotивление материалов и теория сооружений. –1978. – Вып.33. – с. 81-85.
7. *Гуляр А.И., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования. //Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1978, №32 – с.3-10.
8. *Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І.* Просторова задача динаміки для пружнопластичних неоднорідних тіл обертання в схемі напіваналітичного методу скінченних елементів. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник. – К.:КНУБА, 1999 р. - Вип.66. – с.56-57.
9. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975- 539 с.
10. *Кислоокій В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А.* Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек. //Проблемы прочности. –1977. -№7. – с.25-33.
11. *Сахаров А.С., Кислоокій В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
12. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений. //Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып.24. – с.147-156.
13. *Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в дослідженні пружнопластичних коливань неоднорідних призматичних тіл. //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.:КНУБА, 2002 р. - Вип.71. –с. 3-17
14. *Wilson E.L.* Structural Analysis of Axisymmetric Solids. - 1965, AIAA J., Vol. 3, No 12, pp.2269-2274.

## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Остапенко Р.М.</i> Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі термов'язкопружнопластичності для неоднорідних тіл обертання . . .	3
<i>Гайдайчук В.В., Носенко В.П.</i> Динаміка вітроенергетичних установок під дією вітрових та інерційних навантажень . . . . .	31
<i>Баженов В.А., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.</i> Особливості обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень при динамічному навантаженні . . . . .	39
<i>Гоцуляк Є.О., Барвінко А.Ю., Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Шах В.В.</i> Оцінка впливу початкових недосконалостей циліндричних оболонок резервуарів на їх стійкість при дії бокового тиску . . . . .	48
<i>Шульга М. О., Григор'єв С.А.</i> Пружнелектричні коливання радіально поляризованої п'єзокерамічної кулі з розрізними електродами . . . . .	55
<i>Кривенко О.П.</i> Вплив комбінованого закріплення контуру на стійкість пологих квадратних у плані панелей . . . . .	65
<i>Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.</i> Аналіз динаміки ударно-вібраційного майданчика при зміні його параметрів . . . . .	71
<i>Дзира Б.І., Чернописький Д. Г.</i> Про збіжність першого варіанту методу збурення форми границі для розв'язку просторових задач теорії пружності у випадку тіл обертання, близьких до канонічних . . . . .	83
<i>Дохняк Б.М.</i> Розрахунок конструкцій із композиційних матеріалів методом скінченних елементів . . . . .	91
<i>Киричук О.А., Палій О.М.</i> Вплив геометричних характеристик на стійкість усталених коливань циліндричних оболонок . . . . .	102

---

<i>Гуляр О.І., Сахаров О.С., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.</i> Визначення $j$ -інтеграла при скінченоелементному розв'язанні задач змішаного руйнування . . . . .	111
<i>Пошивач Д. В.</i> Чисельне дослідження стійкості за імовірністю випадкових параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою стінкою . . . . .	126
<i>Охтень І.О., Гоцуляк С.О., Лук'янченко О.О.</i> Дослідження стійкості тонкостінних елементів відкритого профілю з урахуванням початкових недосконалостей . . . . .	131
<i>Іванченко Г.М.</i> Повне внутрішнє відображення розривних хвиль на межах анізотропних середовищ . . . . .	137
<i>Білик С.І.</i> Стійкість плоскої форми згину консольної двотаврової балки зі змінною висотою стінки за методом Рітца . . . . .	146
<i>Солодей І.І.</i> Ефективність скінченоелементної бази напіваналітичного метода скінченних елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки . . . . .	154

Наукове видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

Випуск 82

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 08. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.  
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.  
Тираж 100. Зам. № 7-

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03037.

---

Віддруковано на ЗАТ “ВІПОЛ”  
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.