

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 83

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2009

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 31 серпня 2009 року, протокол № 46.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 83 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2009. – 166 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,
м. Київ, 03037,
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2009

УДК 539.376

В.А. Баженов, д-р техн. наук,
С.О. Пискунов, канд. техн. наук,
Р.М. Остапенко

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ КОНТИНУАЛЬНОГО РУЙНУВАННЯ РОТОРА ПАРОВОЇ ТУРБІНИ З ДЕФЕКТОМ В УМОВАХ ПОВЗУЧОСТІ

На основі напіваналітичного методу скінчених елементів проведено дослідження процесу накопичення пошкоджень і розвитку зони континуального руйнування ротора з початковим дефектом в умовах повзучості. Показано, що зона континуального руйнування поширюється в межах поперечного перерізу ротора і набуває вигляду напівеліптичної тріщини.

Вступ. Ротори являють собою тіла обертання складної форми, які працюють в умовах тривалого навантаження під дією високих температур. Визначення їх несучої здатності та ресурсу вимагає визначення параметрів напружено-деформованого стану з урахуванням наявності деформацій повзучості і накопичення пошкожденості. Такі задачі розглядаються, здебільшого, у вісесиметричній постановці, що передбачає певну ідеалізацію, зокрема однорідність властивостей матеріалу. Але, з експериментальної практики відомо, що внаслідок технологічної обробки відхилення фізико-механічних властивостей матеріалу, що характеризують пружно-пластичне деформування сягає 2-3% від номінальних значень. При розгляді повзучості матеріалу такі відхилення можуть бути набагато більшими [6]. У зв'язку з цим актуальною є задача розрахункової оцінки ресурсу з урахуванням просторової неоднорідності напружено-деформованого стану, викликаного наявністю в матеріалі областей із зазначеними відхиленнями фізико-механічних характеристик матеріалу. Розв'язання просторової задачі на основі МСЕ в цьому призводить до значних обчислювальних витрат. Зважаючи на те, що ротор є тілом обертання раціональним є використання напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ).

У роботі [4] була розроблена та апробована методика розрахунку тіл обертання в умовах повзучості з урахуванням неоднорідності напружено-деформованого стану, а також розв'язана задача про визначення основного ресурсу ротора парової турбіни за наявності в ньому дефекту у вигляді розташованої в поперечному перерізі локальної області, фізико-механічні характеристики повзучості матеріалу в якій відрізняються від номінальних. Для подальшого дослідження процесу континуального

руйнування і визначення величини додаткового ресурсу, пов'язаного із часом утворення магістральної тріщини, необхідним є моделювання розвитку зони континуального руйнування ротора.

Таким чином, метою даної роботи є визначення додаткового ресурсу ротора парової турбіни за наявності в ньому дефекту на основі моделювання росту зони континуального руйнування.

Вихідні співвідношення. Опис пружного деформування матеріалу здійснюється із використанням закону Гука, припущення деформацій повзучості визначаються на основі теорії зміцнення:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij}, \quad (1)$$

де f_c – функція, що визначає поверхню повзучості.

При наявності континуального руйнування вираз функції поверхні повзучості містить параметр пошкодженості ω :

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - \left[\sigma_i \left(\sigma_c, T, \xi_c^i, \omega \right) \right]^2 = 0, \quad (2)$$

для опису якого застосовується кінетичне рівняння вигляду:

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[\frac{\sigma_e}{1 - \omega^r} \right]^m \frac{1}{(1 - \omega)^q} \omega^\beta,$$

наведене в роботі [3].

Алгоритм розв'язання просторових задач повзучості. Для розв'язання задач повзучості при дослідженні процесу нелінійного деформування необхідним є використання покрокового алгоритму. На кожній ітерації n кроку m вектор невідомих переміщень $\{u\}_n^m$ системи нелінійних рівнянь НМСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} \left(\{Q_l\}_n^m - \{R_l\}_n^m \right). \quad (3)$$

де $\{Q_l\}_n^m$ – вектор вузлових навантажень на кроці m ; $\{R_l\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n .

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L \left(\{ \Delta u \}_l^n \right)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L \left(\{ u \}_l^n \right)^2 . \quad (4)$$

На початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень σ_{ij} обчислюються за формулою:

$$\left(\sigma_{ij} \right)_n = \left(\sigma_{ij} \right)_{n-1} + \left(\Delta \sigma_{ij} \right)_n , \quad (5)$$

Дійсні значення напружень $\left(\overline{\sigma}_{ij} \right)_n^m$, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{ R \}_n^m$, обчислюються за формулою:

$$\left(\overline{\sigma}_{ij} \right)_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\sigma_{ij} \right)_n^m + \left(s^{ij} \right)_n^m = \left(\sigma_o \right)_n^m + \left(s^{ij} \right)_n^m , \quad (6)$$

де

$$\left(\overline{s}^{ij} \right)_n^m = \left(s^{ij} \right)_n^m - G_1 \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c \right)_n^m , \quad \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c \right)_n^m = \left(\xi_{ij}^c \right)_n^m \Delta t_m , \quad (7)$$

Отримані за формулами (5), (6), (7) напруження перевіряються за умовою (4), після виконання якої проводиться обчислення прирощень деформацій повзучості $\left(\Delta \varepsilon_{ij}^c \right)_m$ і пошкодженості $\left(\Delta \omega \right)_m$ із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку, і відповідних накопичених величин $\left(\varepsilon_{ij}^c \right)_m$ і ω_m :

$$\left(\varepsilon_{ij}^c \right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c \right)_{m-1} + \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c \right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c \right)_{m-1} + \left(\xi_{ij}^c \right)_m \Delta t_m , \quad (8)$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + \left(\Delta \omega \right)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_m \Delta t_m .$$

Формули (5)–(8) є інваріантними щодо конкретизованого вигляду виразів ξ_i^c і $\frac{d\omega}{dt}$.

У кінці кожного кроку для всіх точок тіла здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу:

$$\omega > \omega^*, \quad (9)$$

де ω^* – критичне значення параметра пошкодженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу.

Момент часу t^* , коли хоч в одному із СЕ задовольняється умова (9), фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і несущільностей у матеріалі, що враховуються інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів. Моделювання їхнього розвитку до утворення початкових тріщин може бути продовжено на основі співвідношень континуальної механіки руйнування.

Алгоритм моделювання розвитку зони континуального руйнування в умовах повзучості. При розв'язанні задачі континуального руйнування в умовах повзучості момент часу t^* , коли в одному із СЕ, координати центра ваги якого $\{z^{1*}, z^{2*}, z^{3*}\}$, задовольняється умова $\omega > \omega^*$, де ω^* – критичне значення параметра пошкодженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу, $\omega^* = 1$ [211], фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і несущільностей у матеріалі, наявність яких враховується інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів – розвитку зони континуального руйнування рис.1,а. Для моделювання розвитку зони континуального руйнування в точці з координатами $\{z^{1*}, z^{2*}, z^{3*}\}$ вводиться порожнина об'ємом V_0 , в межах якої напруження і модуль пружності матеріалу дорівнюють нулю (рис. 1,б).

Подальше розв'язання задачі виконується на основі алгоритму, що полягає в прирівнюванні до нуля напружень і модуля пружності для елементів, в центрі ваги яких виконується умова $\omega = \omega^*$. Процес закінчується при досягненні порожниною заданого об'єму V і визначенні необхідного для цього часу t_V (рис. 1,в).

При використанні НМСЕ розмір початкової зони руйнування в площині (z^1, z^2) визначається розмірами СЕ, а розмір в напрямку z^3 – прийнятим для досліджуваного об'єкта числом гармонік в апроксимації переміщень за напрямком z^3 .

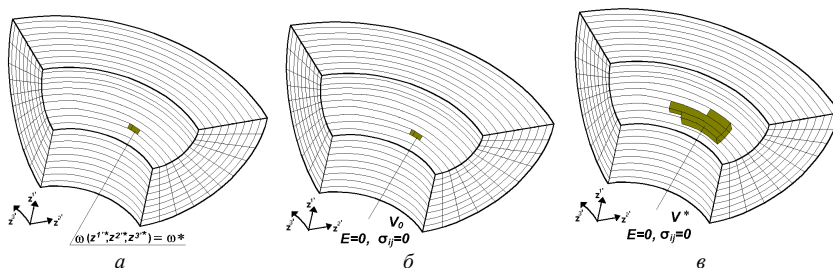


Рис.1. Розвиток зони континуального руйнування:

а – $t = t^*$; б – $t = t^* + \Delta t$; в – $t = t_V$

Вірогідність такого підходу було перевірено шляхом розв'язання тестового прикладу про розвиток зони континуального руйнування в товстостінній трубі. Отримані розподілення колових напружень при різних характерних розмірах зони руйнування збігаються із наведеними в роботі [2], рис. 2.

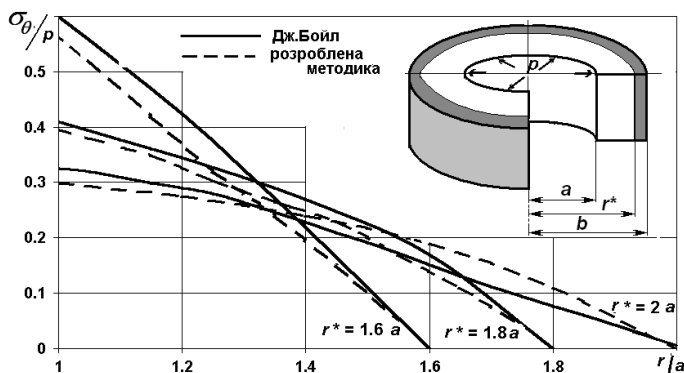


Рис. 2. Розподіл інтенсивності колових напружень в товстостінній трубі

Моделювання розвитку зони континуального руйнування ротора парової турбіни за наявності дефекту. При дослідженні впливу дефекту, що являє собою розташовану в поперечному перерізі локальну область, в межах якої значення фізико-механічних характеристик повзучості відрізняються від номінальних (рис. 3) в було досліджено накопичення параметра пошкоженості до моменту виконання умови локальної втрати несучої здатності матеріалу ($\omega^* = 1$).

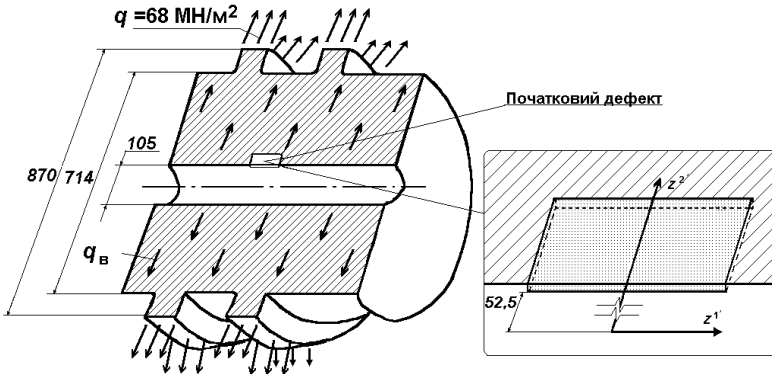
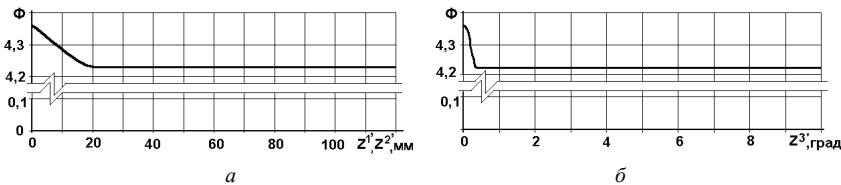


Рис. 3. Ротор парової турбіни з початковим дефектом

Дефект, що має форму паралелепіпеду (рис. 3), представлений у вигляді об'єму матеріалу розмірами 40*20 мм в площині поперечного перерізу, товщиною 0,5 мм та являє собою ділянку, в межах якої одна з констант матеріалу, що входить до рівняння, яке описує деформування тіла в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості матеріалу, розподіляється за нелінійним законом так, що максимальна розбіжність з номінальним значенням цієї константи для іншої частини матеріалу ротора складає 3,5% (рис. 4).

$$\xi_i^c = A \left(\frac{\sigma_i}{1 - c\omega} \right)^n t^m, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left[\frac{(1 - \alpha)\sigma_i + \alpha\sigma_l}{1 - \omega} \right]^\phi$$

Рис.4 Графіки розподілу константи Φ :

а – в площині поперечного перерізу ротора, б – по коловій координаті

Для проведення дослідження збіжності в залежності від кількості вузлів в поперечному перерізі дискретної моделі розглянуті дискретні моделі при $N = 731$ та 2047 (рис. 5,а,б). Їх структура, на відміну від використаних в [1], орієнтована на опис особливостей напружено-

деформованого стану в околі дефекту та подальше моделювання розвитку зони континуального руйнування.

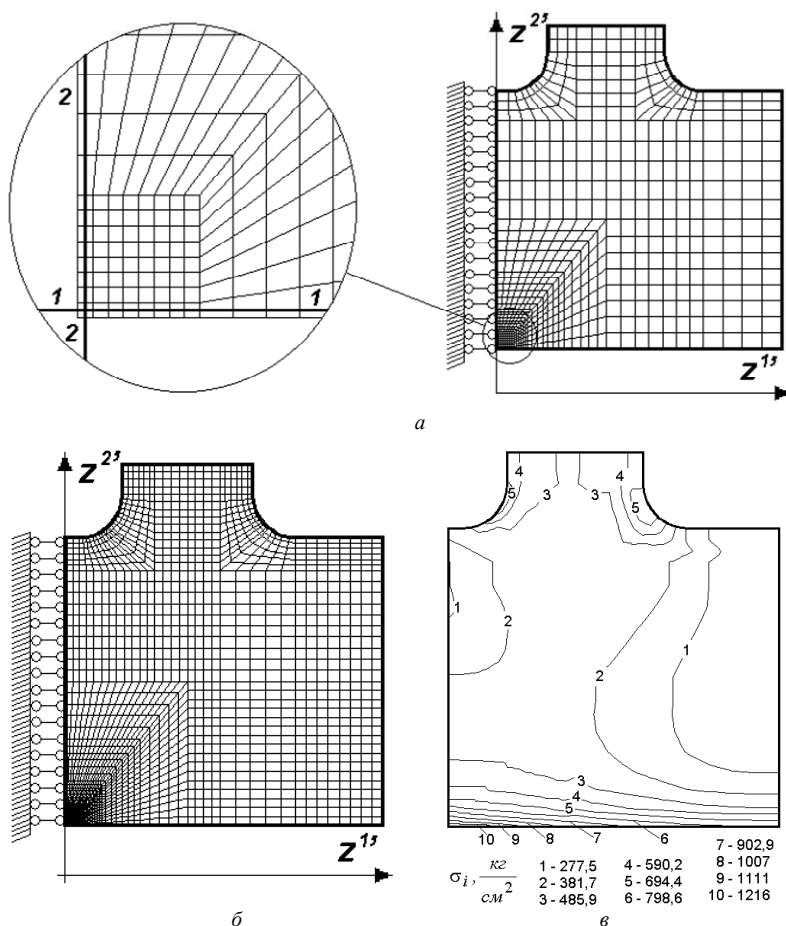


Рис. 5. Скінченноелементні моделі поперечного перерізу ротора (а, б) та напружено-деформований стан ротора при пружному деформуванні (в)

Область поперечного перерізу ротора, де розташований дефект дискретизована регулярною скінченноелементною сіткою 8×8 (рис. 5,а) та 16×16 (рис. 5,б) відповідно для скінченноелементних моделей з $N = 731$ та 2047. Згущення скінченноелементної моделі сприяє отриманню результатів більш високої точності, проте використання густішої дискретної моделі

(рис. 5,б) дозволило уточнити величину додаткового ресурсу ротора менше ніж на 1%. Зважаючи на суттєво більший обсяг обчислювальних витрат, подальше збільшення кількості вузлів понад ніж 731 є недоцільним.

Розподілення напружень при пружному деформуванні, отримане з використанням вищезазначених скінченноелементних моделей ідентичні. (рис. 5,в).

З урахуванням проведених досліджень збіжності в залежності від числа гармонік, яке проводилось для скінченноелементної моделі при $N = 731$, величина основного ресурсу роботи ротора при наявності дефекту становить 104000 годин, що на 15% менше, ніж при відсутності дефекту.

З ізоліній розподілу параметра пошкодженості в межах поперечного перерізу ротора, до якого потрапляє дефект (рис. 6, 7) можна простежити еволюцію процесу руйнування та характер впливу дефекту на появу місця, в якому і відбувається зародження тріщини. Так уже після 2200 годин після початку навантаження видно, що максимальні значення параметра пошкодженості ω_{\max} знаходяться поблизу дефекту і з часом досягають своїх критичних значень. У момент часу 103650 годин чітко спостерігається, що розповсюдження максимальних значень ω відбувається в двох напрямках в межах площини поперечного перерізу ротора. З рис. 7 видно, що наявність дефекту, контур якого описаний штриховою лінією, носить лише локальний характер.

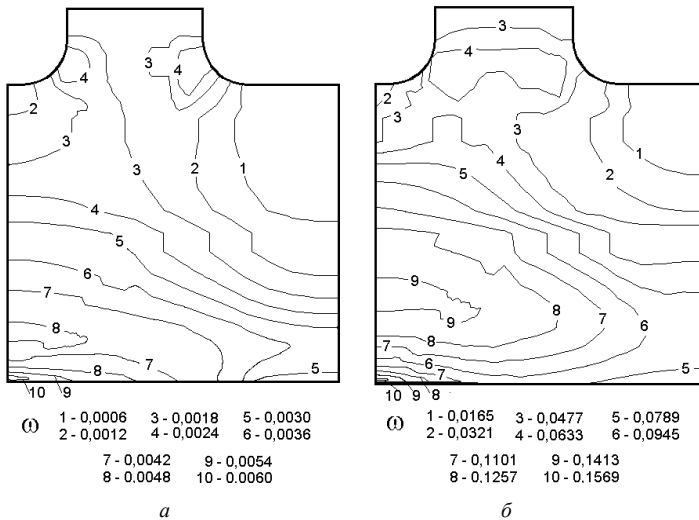


Рис.6. Розподілення параметра пошкодженості в поперечному перерізі ротора з дефектом: а - для $t = 2200$ год., б - для $t = 60400$ год.

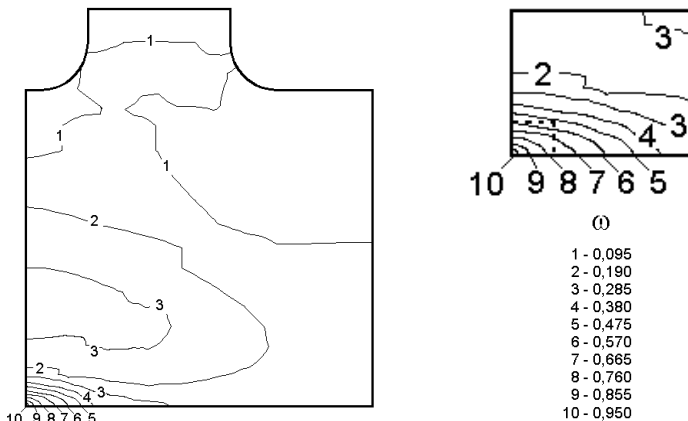


Рис.7. Розподілення параметра пошкоженості в поперечному перерізі ротора з дефектом для $t = 103650$ год.

Величина додаткового ресурсу роботи ротора складає 6000 годин. Еволюцію розвитку зони континуального руйнування в околі дефекту проілюстровано на рис. 8, де зображено вигляд зони в поперечному перерізі на різних стадіях її розповсюдження (розмір розглядуваного фрагмента поперечного перерізу відповідає винесеному на рис. 5,а регулярному фрагменту дискретної моделі; його розташування також показано пунктирною лінією на збільшеному фрагменті ізоліній, рис. 7).

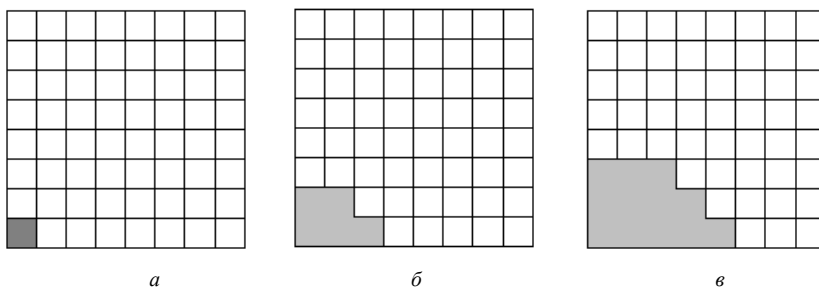


Рис.8. Розподілення параметра пошкоженості в околі початкового дефекту при континуальному руйнуванні для: а – $t=104000$ год.; б – $t=107000$ год.; в – $t=110000$ год.

Так в момент часу 104 000 годин (рис. 8,а), що відповідає величині основного ресурсу, ще зарано говорити про форму зони континуального руйнування. Але з часом область накопичення максимальних значень ω збільшується в обох напрямках поперечного перерізу ротора при чому

таким чином, що в напрямку осі обертання приріст максимальних значень параметра пошкоженості відбувається інтенсивніше. В момент часу 107000 годин (рис. 8,б) співвідношення між характерними розмірами зони в напрямку осей z^1 і z^2 становить $2/3$. Надалі якісний характер цього співвідношення зберігається і на моменту часу 110000 годин співвідношення розмірів зони континуального руйнування в площині поперечного перерізу становить приблизно $1/2$. При цьому, як свідчить аналіз, проведений на основі розгляду побудованих графіків розподілення пошкоженості в напрямку осі обертання і радіуса ротора, значення параметра пошкоженості (рис. 9,а,б) в скінчених елементах, що межують із зоною руйнування не перевищує 0,3, тобто накопичення пошкоженості носить ярко виражений локальний характер.

Крім того, розмір зони континуального руйнування по коловій координаті суттєво менший за її розміри в поперечному перерізі ротора, що підтверджується наведеними на рис. 10 графіками розподілення пошкоженості в коловому напрямку: це розподілення майже не змінюється із зростанням зони в площині поперечного перерізу. Як видно з графіків, ω набуває максимальних значень по коловій координаті лише в області, прилеглої до поперечного перерізу ротора, і залишається однаковою по товщині. Внаслідок цього, в момент часу 110000 годин співвідношення характерного розміру зони руйнування в поперечному перерізі l до розміру по h складає $l/h \approx 1/25$. Таким чином можна зробити висновок про утворення в роторі дефекту у вигляді напівеліптичної тріщини із співвідношенням напівосей $1/2$.

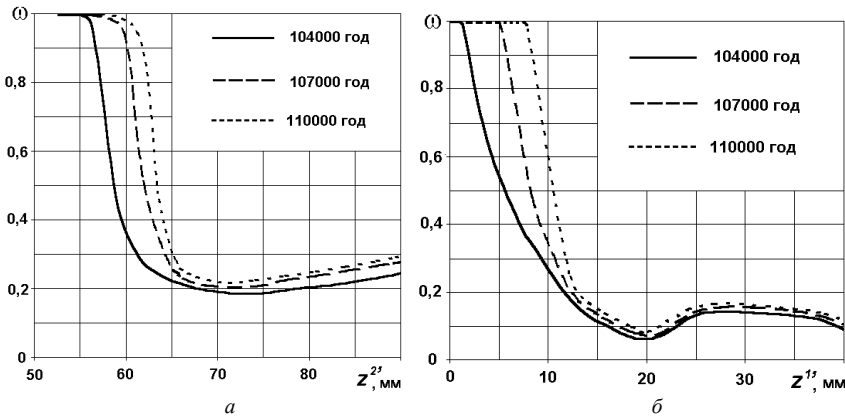


Рис.9. Розподілення параметра пошкоженості:
а – вздовж радіуса; б – вздовж осі обертання

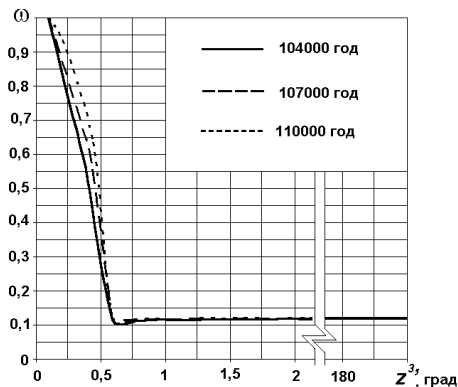
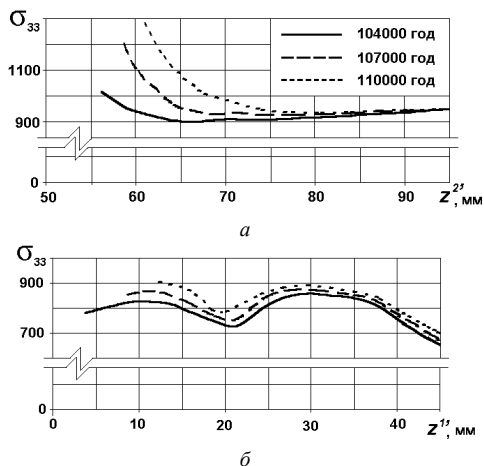


Рис.10. Розподілення параметра пошкоженості по колівій координаті

З метою більш детального дослідження розвитку зони континуального руйнування додатково був проведений аналіз одержаних розподілень колівих напружень вздовж радіуса та осі обертання по лініях 1-1 і 2-2, точкою перетину яких є елемент, де спостерігається найбільша концентрація напружень та починається розвиток зони континуального руйнування (рис. 5,а, рис. 8,а). На графіках розподілу колівих напружень (рис. 11) можна спостерігати процес вирівнювання їх значень для різних моментів часу при поступовому віддаленні від зони континуального руйнування.

Рис.11. Розподілення колівих напружень:
а – вздовж радіуса; б – вздовж осі обертання

Висновки. У роботі було проведено дослідження процесу континуального руйнування та визначено величину додаткового ресурсу ротора парової турбіни з дефектом. Час зростання зони континуального руйнування до утворення тріщиноподібного дефекту складає 6000 годин. Зона континуального руйнування поширюється в межах поперечного перерізу ротора і набуває вигляду напівеліптичної тріщини зі співвідношеннями напівосей $1/2$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1976. – 360с.
3. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикл. механика. – 2000. – № 3. – С. 31–66.
4. *Пискунов С.О., Остапенко Р.М.* Врахування початкового дефекту при визначенні основного ресурсу ротора парової турбіни в умовах повзучості // Матеріали конференції „Математичні проблеми технічної механіки – 2009” –Дніпродзержнськ.– 2009. – С.177.
5. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
6. *Шульженко М., Протасова Т., Мележик І.* Неосесиметричне деформування та тріщиностійкість роторів парових турбін //Машинознавство. – 2007. – №8. – С.13-17.

Отримано 01.05.09

На основе полуаналитического метода конечных элементов проведено исследование процесса накопления повреждений и развития зоны континуального разрушения ротора с начальным дефектом в условиях ползучести. Показано, что зона континуального разрушения распространяется в пределах поперечного сечения ротора и приобретает вид полуэллиптической трещины.

On the basis of a semianalytical finite element method a research of process of damage accumulation and continual failure zone propagation of a rotor with initial defect under conditions of creep has been made. It is shown that the continual failure zone extends within cross-section of a rotor and takes a form of a semielliptic crack.

УДК 539.3

Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук

О.О. Лук'янченко, канд. техн. наук

ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМІЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ГОФРОВАНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ

Побудована розрахункова модель динамічної стійкості плоскої форми згину двотаврової балки з гофрованою стінкою. Редукування дискретної скінченноелементної моделі балки виконано за допомогою методу узагальнених координат. Досліджена динамічна стійкість параметричних коливань балки при дії розподіленого навантаження. Визначені границі областей нестійкості балки при головних та комбінованих параметричних резонансах.

В різних несучих конструктивних елементах плоскі стінки, що посилені для підвищення їх стійкості ребрами жорсткості, вже давно замінюються більш жорсткими гофрованими. Відсутність достатньо надійних даних про роботу гофрованих конструкцій під навантаженням, про методи їх проектування та розрахунку, не дає змогу більш широкому їх застосуванню.

Метою роботи є дослідження динамічної стійкості параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою при дії розподіленого навантаження. Двотаврова гофрована балка має такі геометричні характеристики: $l=1000$ мм, $h=200$ мм, $b=80$ мм, $\delta_n=4$ мм, $\delta_{cm}=1,5$ мм. Пружні характеристики відповідають матеріалу сталь: $E=2,06E11$ Па; $\mu=0,3$; $G=0,792E11$ Па. Двотаврова гофрована балка розглядається як система, що складається з двох поясів, гофрованої стінки та граничних ребер жорсткості. Розрахункова модель балки побудована за допомогою обчислювального комплексу скінченно-елементного аналізу і містить 7227 вузлів та 8020 елементів (рис. 1). Стінка та полки моделюються пластинчатими елементами, граничні ребра жорсткості – балочними. Поперечний переріз балки та геометричні параметри гофра (глибина f та довжина a)

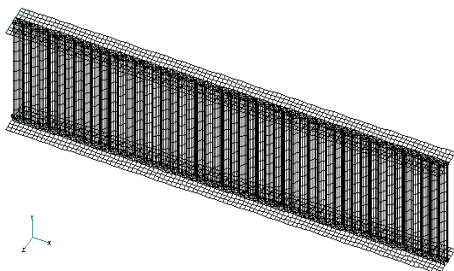


Рис. 1. Скінченноелементна модель балки

наведені на рис. 2.

Розподілене навантаження є параметричним навантаженням, що викликає плоску форму згину балки з площини її стінки. Воно прикладається до вузлів, що розташовані посередині стінки балки вздовж її довжини, і дорівнює $q(t) = q_0 + q_t \cos \omega t$. Амплітуда статичної складової навантаження приймається рівною $q_0 = 100 \text{ Н}$ на кожен вузол або $q_0 = 25525 \text{ Н}$ на 1 м довжини синусоїдальної гофрованої стінки балки.

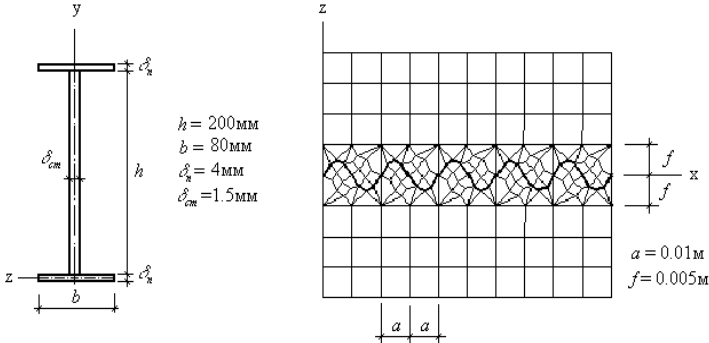


Рис. 2. Поперечний переріз балки та параметри синусоїдального гофра

Методика побудови редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем представлена в статті [1]. Редукована розрахункова модель балки формується за допомогою методу узагальнених координат з використанням процедур сучасного програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Вона визначається своїми редукованими матрицями мас, жорсткості та геометричної жорсткості і має вигляд:

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + K^* \dot{\bar{y}}(t) + \varphi(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0, \quad (1)$$

де M^* , K^* , K_G^* - редуковані матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, $\bar{y}(t)$ - вектор узагальнених координат.

Обчислювальний комплекс скінченноелементного аналізу формує матрицю власних форм, що нормована по матриці мас, тобто $\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_i = E$, де $E = \text{diag}(1, 1)$. Тому матриця жорсткості представляє собою діагональну матрицю, члени якої є квадратами частот власних згинальних та крутильних коливань балки, які отримані при розв'язанні задачі на власні коливання

$K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1\gamma}^2)$. На рис. 3 представлені форми згинальних та крутильних власних коливань балки та відповідні частоти.

Для перевірки редукування математичної моделі динамічної стійкості параметричних коливань балки (1) матриця жорсткості також визначена за допомогою обчислювальної комплексу при знаходженні в докритичному напруженому стані реакції конструкції на узагальнені переміщення, які описують форми коливань, що нормовані з урахуванням малого параметру $K^* = \text{diag}(\bar{\varphi}_1^T K \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2^T K \bar{\varphi}_2)$. Перевірка показала, що значення членів матриці жорсткості співпадають зі значеннями квадратів частот власних коливань балки

$$K^* = \begin{bmatrix} 789583,2104 & 0 \\ 0 & 1096132,617 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

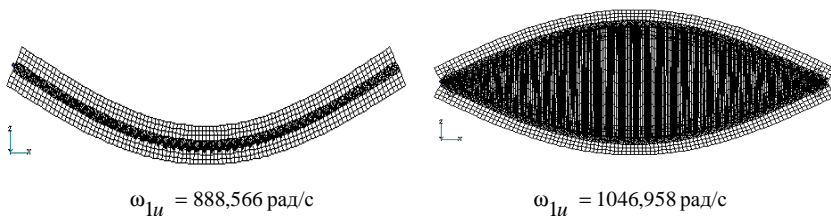


Рис. 3. Перші форми власних згинальних та крутильних коливань

Для побудови редукованої матриці геометричної жорсткості застосована процедура розв'язання задачі нелінійної статки при поетапному навантаженні пружної системи. Побудова матриці геометричної жорсткості виконується за допомогою згортання оператора на основі базису, що складається з форм коливань, і знаходження різниці між згорнутими операторами в околі докритичного і ненавантаженого станів[1]

$$(K^* + K_G^*) - (K^*) = K_G^*. \quad (3)$$

Сума редукованих матриць жорсткості та геометричної жорсткості обчислюється за формулою

$$(K^* + K_G^*) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\varphi}_{1u}^T (K + K_G) \bar{\varphi}_{1\gamma} \\ \bar{\varphi}_{1\gamma}^T (K + K_G) \bar{\varphi}_{1u} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Редукована розрахункова модель динамічної стійкості параметричних коливань гофрованої балки набуває вигляду

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 888,566^2 [u_k - 0,055184\varphi(t)\gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 1046,958^2 [\gamma_k - 0,038508\varphi(t)u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1,2,3\dots) \quad (5)$$

Задача побудови редукованої моделі динамічної стійкості параметричних коливань гофрованої балки з реальними геометричними параметрами є складною і розрахована на застосування обчислювальних засобів з великими ресурсами та швидкодійними процесорами. Для зменшення об'ємів вхідних даних в роботі виконується побудова редукованої моделі гофрованої балки у вигляді еквівалентної плоскої ортотропної пластини з еквівалентними ребрами, які забезпечують згинальну жорсткість балки. Гофрована стінка має різну жорсткість на розтяг (стиск) у вертикальному та горизонтальному напрямках. Цим вона схожа на ортотропну пластинку, пружні сталі якої (E_1, E_2, μ_1, G_1) визначаються з рівності на розтяг та зсув гофрованої та плоскої ортотропної пластинок. Тому гофрована стінка може бути замінена еквівалентною плоскою стінкою, яка моделюється плоскими ортотропними елементами. Для синусоїдальних гофрів пружні сталі визначаються за формулами

$$E_1 = \frac{E}{\frac{6}{\sin \beta_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 (\beta_0 - \frac{3}{2} \sin 2\beta_0 + 2\beta_0 \cos^2 \beta_0)}; \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{\beta_0}{\sin \beta_0} E, \quad G_1 = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{\sin \beta_0}{\beta_0}, \quad \mu_1 = \mu \frac{E_1}{E_2}. \quad (7)$$

Тут R - радіус хвилі гофра у вигляді кола; δ - товщина стінки гофра; $2\beta_0$ - центральний кут півхвилі гофра; E - модуль пружності матеріалу стінки балки; μ - коефіцієнт Пуасона матеріала стінки.

Згідно формул (6) та (7) пружні сталі гофрованої балки в роботі приймаються такими: $E_1 = 0,01E$; $E_2 = 1,5E$; $\mu_1 = 0,002$, $\mu_2 = 0,3$; $G_1 = 0,257E$. Полки та опорні ребра моделюються балочними елементами. Кількість вузлів моделі складає 2121, кількість елементів - 2240. Розподілене навантаження прикладається до вузлів, що розташовані посередині стінки балки вздовж її довжини, і дорівнює $q(t) = q_0 \cos \omega t$.

Амплітуда навантаження приймається рівною $q_0 = 100$ Н на кожен вузол або $q_0 = 10100$ Н на 1 м довжини плоскої еквівалентної стінки балки.

При дослідженні динамічної стійкості плоскої форми згину балки необхідно врахувати її згинальні характеристики із площини дії навантаження. Для цього вводяться додатково еквівалентні ребра, що моделюються у вигляді стержневих скінчених елементів. Поперечний переріз еквівалентного ребра приймається із врахуванням вимоги

$$A_{cm} + A_p = A_{2оф}. \quad (8)$$

Тут A_{cm} - площа еквівалентної плоскої стінки довжиною в півхвилі ($A_{cm} = l_{cm} \times \delta_{cm}$), $A_{2оф}$ - площа синусоїдального гофра довжиною в півхвилі ($A_{2оф} = \pi \times R \times \delta_{cm}$). Та вимоги рівності осьового моменту інерції еквівалентного ребра моменту інерції синусоїдального гофра, що визначається за формулою

$$I_{2оф} = 2t_w f^2 \left[1 - \frac{0,81}{1 + 2,5 \left(\frac{f}{a} \right)} \right] \times a, \quad (9)$$

де $t_w = 1,5$ мм - товщина стінки, $f = 4,96$ мм - глибина гофра, $a = 10,68$ мм - довжина півхвилі гофра.

За розрахунком момент інерції гофра $I_{2оф} = 3.74 \times 10^{-10} \text{ м}^4$, площа поперечного перерізу еквівалентного ребра $A_p = 8.37 \times 10^{-6} \text{ м}^2$. З урахуванням того, що осьовий момент інерції еквівалентного ребра при моделюванні його поперечного перерізу у вигляді прямокутника повинен дорівнювати $I = bh^3 / 12$, приймаємо $b_p = 0,00036$ м та $h_p = 0,02324$ м. Еквівалентні ребра встановлюються зі кроком довжини півхвилі синусоїдального гофра.

Формування редукованих рівнянь, що описують динамічну стійкість плоскої форми згину гофрованої балки, виконується аналогічно алгоритму наведеному для двотаврової балки з реальними гофрами. На рис. 4 представлені згинальна та крутильна форми власних коливань двотаврової балки, що моделювалася у вигляді плоскої еквівалентної ортотропної пластини з еквівалентними ребрами жорсткості.

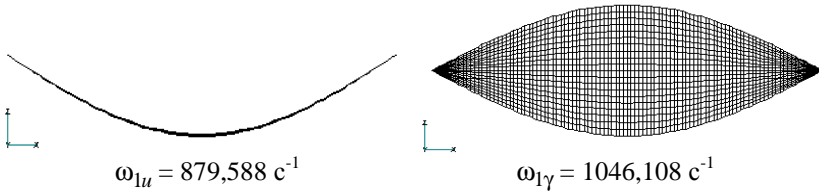


Рис. 4. Перші форми власних згинальних та крутильних коливань
Матриці жорсткості та геометричної жорсткості набувають вигляду

$$K^* = \begin{bmatrix} 773626,64 & 0 \\ 0 & 1094332,84 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0 & -13085,57 \\ -13088,36 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Редукована розрахункова модель динамічної стійкості параметричних коливань двотаврової балки у вигляді плоскої еквівалентної ортотропної пластини з еквівалентними ребрами жорсткості набуває вигляду

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 879.588^2 [u_k - 0.01691\varphi(t)\gamma_k] = 0, \\ \dot{\gamma}_k + 1046.108^2 [\gamma_k - 0.01196\varphi(t)u_k] = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

Дана оцінка впливу розрахункових моделей гофрованої двотаврової балки на коефіцієнти матриць її редукованої моделі (1).

Таблиця 1

Модель балки	Перш частоти згинальних та крутильних коливань, с ⁻¹		$q_{кр}$, Н/м	Коефіцієнти редукованих рівнянь динамічної параметричних коливань гофрованої балки			
	ω_{1u}	$\omega_{1\gamma}$		\bar{a}_{12}	\bar{a}_{21}	$\bar{a}_{12} \times q_{кр}$	$\bar{a}_{21} \times q_{кр}$
Балка з синусоїдальними гофрами	888.566	1046.108	365510	2.161×10^{-6}	1.508×10^{-6}	0.724031	0.511980
Еквівалента ортотропна пластинка з еквівалентними ребрами	879.588	1046.958	432361	1.674×10^{-6}	1.184×10^{-6}	0.789502	0.551429

Перші власні форми і частоти згинальних та крутильних коливань близькі за значенням. Для двох видів розрахункових моделей гофрованої балки коефіцієнти рівнянь динамічної стійкості параметричних коливань для одиничної статичної складової навантаження з урахуванням значень критичних навантажень, які отримані при розв'язанні статичної задачі втрати стійкості, ($\bar{a}_{12} \times q_{кр}$; $\bar{a}_{21} \times q_{кр}$) мало відрізняються.

Дослідження динамічної стійкості параметричних коливань гофрованої балки при дії розподіленого навантаження полягало у визначенні областей нестійкості. Досліджувались головні та комбіновані параметричні резонанси. Головні резонанси відбуваються при частотах зовнішнього навантаження, що дорівнюють подвоєній частоті згинальних та крутильних власних коливань завантаженої балки. Границі областей нестійкості та власні частоти завантаженої балки визначалися за допомогою формул Болотіна та Якубовича [2, 3].

На рис. 5, а, б представлені області динамічної нестійкості параметричних коливань гофрованої балки відповідно при першому та другому головних резонансах для різних значень статичної та динамічної складових розподіленого навантаження.

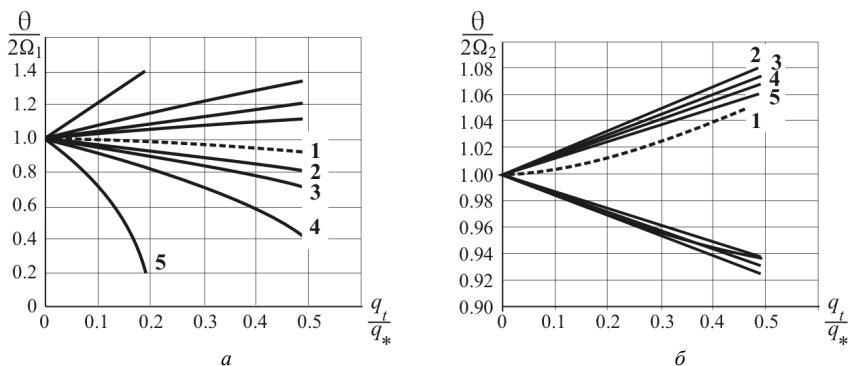


Рис. 5. Области нестійкості гофрованої балки при першому і другому головних резонансах: 1) $q_0=0$; 2) $q_0=0.3q_*$; 3) $q_0=0.5q_*$; 4) $q_0=0.7q_*$; 5) $q_0=0.9q_*$

Області нестійкості або області збудження - це області, в яких будь яке початкове відхилення буде необмежено збільшуватися з часом, тобто прямолінійна форма балки буде динамічно нестійкою. Ці області мають границі, які відповідають умові, при якій диференціальні рівняння мають періодичні або майже періодичні розв'язки з періодами T та $2T$. Видно, що ширина області нестійкості при першому головному резонансі збільшується при збільшенні як статичної так і динамічної складової. Для

другого головного параметричного резонансу ширина області нестійкості залежить лише від динамічної складової навантаження. Область нестійкості при першому головному резонансі більше за область другого головного резонансу.

На рис. 6,а представлено порівняння областей нестійкості при першому та другому головних резонансах, що отримані за різними формулами, при статичній складовій $0.5q_{ст}$. Видно, що границі областей нестійкості при другому головному резонансі незначно відрізняються.

В роботі також були порівняні частоти власних коливань завантаженої гофрованої балки, які отримані за формулами Якубовича, Болотіна та обчислювального комплексу при розв'язанні задачі на власні коливання з урахуванням матриці геометричної жорсткості балки (рис. 6,б). Частоти, що отримані за формулою Болотіна та обчислювального комплексу співпадають. Обчислення за формулою Якубовича при зростанні статичної складової параметричного навантаження відрізняються від значень отриманих іншими способами.

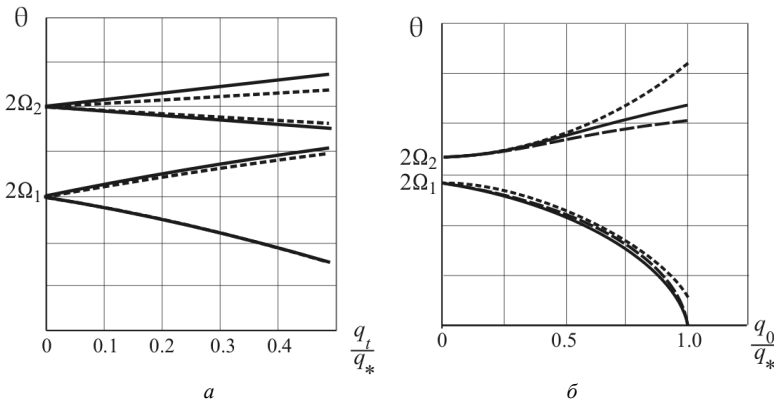


Рис. 6. Порівняння областей нестійкості гофрованої балки при першому і другому головних резонансах

(—— - формула Болотіна, - формула Якубовича, - - - - НАСТРАН)

На рис. 7 представлені області динамічної нестійкості балки при комбінованому резонансі, що отримані за формулами Якубовича [3].

При збільшенні статичної складової навантаження ширина області нестійкості однакова, але частота збудження зменшується і області нестійкості зміщуються вниз.

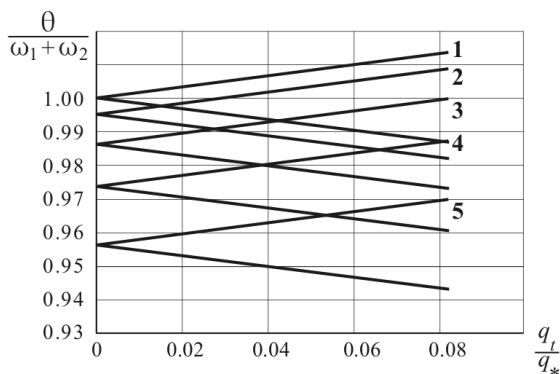


Рис. 7. Области нестійкості гофрованої балки при комбінаційному резонансі:
1) $q_0=0$; 2) $q_0=0.3q_*$; 3) $q_0=0.5q_*$; 4) $q_0=0.7q_*$; 5) $q_0=0.9q_*$

На рис. 8,а,б представлені області нестійкості при двох головних та комбінованому параметричних резонансах гофрованої балки при двох значеннях статичної складової навантаження.

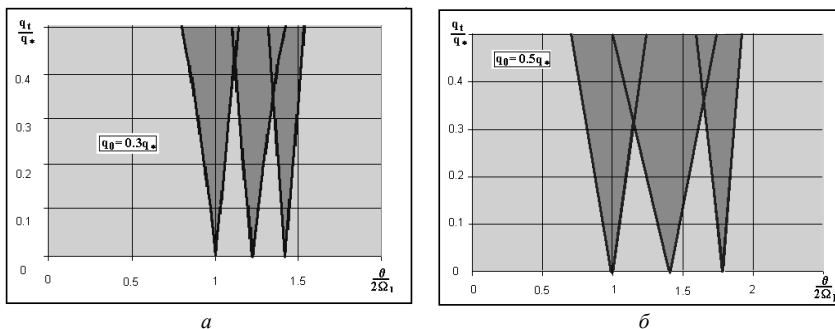


Рис. 8. Области нестійкості гофрованої балки

Динамічна стійкість незабезпечена при значеннях статичної та динамічної складових навантаження, що відповідають темно-синій області.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'яненко О.О., Борисенко В.Г. Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. -№74.

2. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956 - 600 с.
3. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.
4. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). - М.: Машиностроение, 1978—Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. 352 с., ил.*
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Отримано 08.05.09

Построена расчетная модель динамической устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки с гофрированной стенкой. Редуцирование дискретной конечноэлементной модели балки выполнено с помощью метода обобщенных координат. Исследована динамическая устойчивость параметрических колебаний балки при действии распределенной нагрузки. Определены границы областей неустойчивости балки при главных и комбинированных параметрических резонансах.

The model of dynamic stability of j-beam with the corrugated wall flat bending is built. The reducing of discrete finite elements model is executed with the use of the generalized coordinates method. Dynamic stability of beam parametric oscillation under the pressure is investigated. The borders of instability areas are determined at main and combined parametric resonances.

УДК 539.375

С.О. Пискунов, канд. техн. наук,
О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
Ю.В. Максим'юк

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ В'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ТІЛ

Проведено розробку і дослідження ефективності кроково-ітераційного алгоритму розв'язання геометрично нелінійних задач пластичності і повзучості двовимірних тіл. Досліджено ефективність застосування початкових наближень і корекції тензора пружних констант відповідно до властивостей пластичності і повзучості матеріалу.

Вступ. Основною задачею на стадії проектування відповідальних елементів конструкцій, що являють собою вісесиметричні тіла обертання, є забезпечення міцності і надійності їх роботи під час всього періоду експлуатації. На практиці ця задача, як правило, вирішується методами чисельного моделювання процесів нелінійного деформування та накопичення ушкоджень матеріалу, які виникають в матеріалі під впливом тривалого зовнішнього навантаження. При цьому, особливо на етапі розвитку зон континуального руйнування, в матеріалі можуть виникати значні деформації, урахування яких при визначенні несучої здатності потребує розв'язання геометрично нелінійних задач в'язкопружнопластичності з урахуванням ушкодження матеріалу.

1. Алгоритми розв'язання системи нелінійних рівнянь в'язкопружнопластичності з урахуванням геометричної нелінійності

1.1. Розв'язання фізично-нелінійних задач

Визначення напружено-деформованого стану тіл при в'язкопружно-пластичному деформуванні є складною задачею механіки деформованого твердого тіла, що пов'язано з необхідністю урахування незворотних деформацій різного характеру. Так, деформації пластичності є миттєвими, а виникнення деформацій повзучості пов'язано з плином часу.

Складність процесу в'язкопружнопластичного деформування потребує побудови ефективних алгоритмів розв'язання поставленої задачі. Ці алгоритми орієнтовані на моделювання тривалих за часом процесів деформування матеріалу, є інваріантними щодо використовуваних форм рівнянь повзучості та надають можливість урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від параметрів напружено-деформованого стану і температури.

Моделювання еволюційного процесу нелінійного деформування для геометрично нелінійних задач здійснюється кроковим методом за параметрами навантаження і часу. Вибір величини кроку за параметром (Δt за часом і Δp за навантаженням) здійснюється виходячи з необхідності дотримання умов збіжності, як ітераційного процесу розв'язання систем нелінійних рівнянь, так і отримуваних результатів. При цьому значення Δt і Δp суттєво залежать від механічних характеристик матеріалу (параметрів кривих пружнопластичного деформування і повзучості) та характеру змінення зовнішнього навантаження. Правильний вибір кроку за часом і навантаженням суттєво впливає на точність отримуваних результатів, тому проведення відповідних досліджень збіжності є важливим етапом розв'язання задачі. При розв'язанні задач пластичної формозміни та повзучості при силовому навантаженні інтервал часу t , під час якого триває процес деформування, розбивається на скінченне число M відрізків Δt_m ($m=1,2,3,\dots,M$) в загальному випадку різної величини. При цьому критерієм вибору оптимального значення Δt є збіжність ітераційного процесу розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Передбачається, що механічні характеристики в межах кроку по часу є сталими і визначаються по результатам розв'язку на попередньому кроці.

На кожному кроці по часу Δt_m основні операції виконуються в такій послідовності. За величиною обраного кроку по часу Δt_m (навантаженню) із використанням значень вектора прирощень переміщень на попередньому кроці $\{\Delta u_{m-1}\}$ і співвідношенням параметрів Δt_{m-1} і Δt_m визначається початкове значення приросту вектора переміщення на даному кроці $\{\Delta u_m\}$. На кожній ітерації n кроку m вектор невідомих переміщень $\{u\}_n^m$ системи нелінійних рівнянь МСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \left[K^* \right]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (1)$$

де $\left[K^* \right]$ – матриця жорсткості дискретної моделі, обчислена з урахуванням корекції тензора пружних констант.

$$C^{ijkl*} = C^{ijkl} - 4G^2 s^{ij} s^{kl} \left(\frac{1}{\gamma^p} + \frac{1}{\gamma^c} \right),$$

де $C^{ijkl} = \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl}$.

Якщо ітераційну процедуру виконувати з матрицею, елементи якої обчислюються без урахування корекції тензора пружних сталей, то формулу (1) можна записати у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m). \quad (2)$$

Передбачаючи, що змінення швидкості деформування від кроку до кроку є незначним, значення приросту вектора переміщень на кроці m визначається таким чином:

$$\{\Delta u_m\} = \frac{\{\Delta u_{m-1}\} \Delta t_m}{\Delta t_{m-1}}. \quad (3)$$

У випадку крокового розв'язання задачі пластичності за параметром навантаження Δp_m відповідно отримаємо

$$\{\Delta u_m\} = \frac{\{\Delta u_{m-1}\} \Delta p_m}{\Delta p_{m-1}}. \quad (4)$$

Обчислення здійснюються до виконання умови:

$$(\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m) \leq \zeta \|\{Q\}_n^m\|, \quad (5)$$

де ζ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Величини напружень уточнюються на кожній ітерації кроку в залежності від поточного рівня деформацій пластичності і повзучості. В кінці кожного кроку здійснюється обчислення величини повних напружень на кроці m .

2. Обчислення напружень при наявності деформацій пластичності і повзучості.

При ізотермічному навантаженні зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями теорії пластичного текучості для матеріалу при ізотропному зміцненні.

Повний приріст тензора деформацій $d\varepsilon_{ij}$ дорівнює сумі приросту пружних $d\varepsilon_{ij}^e$, пластичних $d\varepsilon_{ij}^p$ деформацій і деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^c$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c. \quad (6)$$

Передбачається, що пружні деформації малі і зв'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Матеріал пластично нестисливий і зміна його об'єму лінійно-пружна: $\varepsilon_{ij}^p = 0$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e$.

Прирошення деформацій пластичності визначається згідно з асоційованим законом пластичного течіння, пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні текучості:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}.$$

Для ізотропного матеріалу за наявності спрочнення при умові текучості Мизеса поверхні текучості описується рівнянням:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - \tau_s^2 = 0.$$

де τ_s – межа текучості при чистому зсуві; $\chi = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$ – параметр зміцнення Одквіста.

В загальному випадку на кожному кроці розв'язання задачі на першому етапі проводиться визначення напружено-деформованого стану в припущенні пружного деформування (розв'язання лінійної задачі).

Отримані напруження перевіряються за умовою наявності пластичного деформування $\tau > \tau_s$, де τ_s – поточне значення межі текучості. При виконанні цієї умови у відповідних точках конструкції проводиться визначення напружено-деформованого стану, яке пов'язано із припущенням миттєвих деформацій пластичності. Після цього з урахуванням припущення часу на кроці проводиться визначення напружено-деформованого стану з урахуванням перебігу процесу повзучості.

На початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ обчислюються за формулою:

$$\left(\tilde{\sigma}^{ij}\right)_n = \left(\tilde{\sigma}^{ij}\right)_{n-1} + \left(\Delta\tilde{\sigma}^{ij}\right)_n, \quad (7)$$

де $\left(\Delta\tilde{\sigma}^{ij}\right)_n$ – прирощення напружень, які визначаються згідно з законом Гука за величиною прирощення повних деформацій.

Дійсні значення напружень $\left(\sigma^{ij}\right)_n^m$, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються за формулою:

$$\left(\sigma^{ij}\right)_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} \left(\sigma^{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m, \quad (8)$$

де $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ – компоненти девіатора напружень, що враховують прирощення нелінійних деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ тензора дійсних напружень, що входять до формули (8), при наявності деформацій пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості τ_s [11]:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\mathbf{S}^{ij}\right)_n^m \frac{\tau_s}{\tau}, \quad (9)$$

де $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}}/2$ – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій пластичності $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m$:

$$(\varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) (\overline{s_{ij}})_m / G_1.$$

При наявності деформацій повзучості на початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень σ_{ij} також обчислюються за формулами (7), (8) з урахуванням наявності деформацій повзучості. У цьому випадку:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = (s^{ij})_n^m - G_1 (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m, \quad (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m = (\xi_{ij}^c)_n^m \Delta t_m, \quad (10)$$

де $G_1 = E / (1 - 2\nu)$, $(\xi_{ij}^c)_n^m = \frac{3}{2} [\xi_i^c(\sigma_i)]_m^n \frac{(s_{ij})_n^m}{(\sigma_i)_m^n}$, Δt_m – величина кроку за часом.

Після виконання умови збіжності ітераційного процесу (5) проводиться обчислення прирощень деформацій повзучості $(\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m$ і ушкодження $(\Delta \omega)_m$ із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку, і відповідних накопичених величин $(\varepsilon_{ij}^c)_m$ і ω_m :

$$(\varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_m = (\varepsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t_m, \quad (11)$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta \omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_m \Delta t_m,$$

де $(\xi_{ij}^c)_m$ обчислюється відповідно до використовуваних законів стану матеріалу - на основі рівнянь теорії текучості: $\xi_i^c = A \sigma_i^n$, теорії зміцнення: $\xi_i^c = B \frac{\sigma_i^m}{\partial_c \alpha}$, або теорії накопичення пошкоджень

Ю.М.Работнова [6]: $\xi_i^c = D \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^m$. Величина $\left(\frac{d\omega}{dt} \right)_m$ найбільш часто

приймається у вигляді ступеневої функції напруження, або у вигляді рівняння

Качанова [2]: $\frac{d\omega}{dt} = C_1 \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega} \right]^m$, рівняння Работнова

[6]: $\frac{d\omega}{dt} \omega^{-\beta} = C_2 \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega} \right]^m$, рівняння Шестерикова [13]: $\frac{d\omega}{dt} = C_3 \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega^r} \right]^m$,

рівняння Леметра [15]: $\frac{d\omega}{dt} = C_4 \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega} \right]^m \frac{1}{(1-\omega)^q}$.

Формули (7), (8), (9) є інваріантними щодо конкретизованого вигляду зазначених рівнянь повзучості.

У кінці кожного кроку для всіх точок тіла здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу:

$$\omega > \omega^*, \quad (12)$$

де ω^* – критичне значення параметра ушкодження, що відповідає моменту руйнування матеріалу, $\omega^*=1$ [6].

При чисельному розв'язанні задачі континуального руйнування відповідно до викладеного алгоритму стан повного руйнування матеріалу $\omega^*=1$ в дійсності не досягається [1]. У зв'язку з цим, в чисельних розв'язках приймається $\omega^* < 1$ ($\omega^*=0,9$ [4], $\omega^*=0,95\dots 0,96$ [12], $\omega^*=0,99$ [1]).

Виконанні зазначеної умови руйнування (12) свідчить про виникнення в матеріалі макроскопічної порожнини, в межах якої несуча здатність матеріалу є вичерпаною – зони континуального руйнування. Її моделювання здійснюється із використанням спеціального алгоритму (див. п. 3).

Для дослідження характеру збіжності і вірогідності результатів, та порівняння ефективності використання викладених алгоритмів обчислення напружень при наявності деформацій пластичності розглянемо приклад про деформування нескінченної товстостінної труби під впливом внутрішнього тиску, який змінюється від 0 до $p_{\max} = 0.07 \text{ МН/м}^2$, характеристики матеріалу: $E = 1 \text{ МПа}$, $\nu = 0,3$ [9].

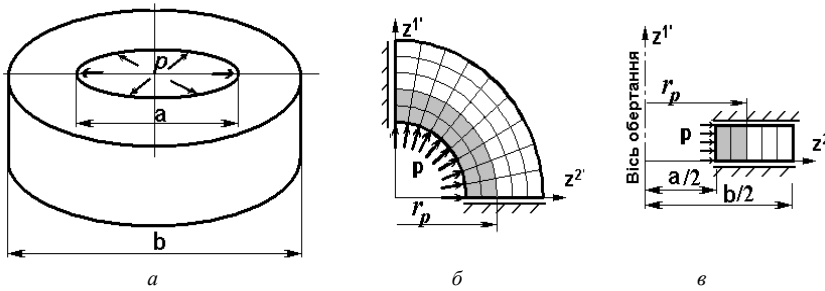


Рис.1. Пружно-пластичне деформування товстостінної труби:
розрахункові схема, дискретні моделі МСЕ

Розрахунок проведений для фрагмента труби, обмеженого двома перпендикулярними до її осі поперечними перерізами, дискретна модель якого побудована із використанням вісесиметричних СЕ та СЕ для розв'язання плоскої задачі. (рис. 1). Отримані значення напружень співпали з еталоном і між собою.

При зростанні навантаження від 0 до $p_1 = 0,037 \text{ МН/м}^2$ на внутрішній поверхні труби виникає зона пластичних деформацій (зона пластичності), діаметр якої збільшується із зростанням навантаження. При $p = p_{\max}$ зона пластичності розповсюджується на всю товщину стінки труби. При розв'язанні задачі покрокове зміння навантаження p в інтервалі $p_1 \leq p \leq p_{\max}$ проводилось так, щоб на кожному з кроків за навантаженням прирощення радіуса зони пластичності становило 1/5 товщини стінки труби ($p_1 = 0,037$, $p_2 = 0,051$, $p_3 = 0,059$, $p_4 = 0,064$, $p_5 = p_{\max} = 0,07 \text{ МН/м}^2$).

В таблиці 1 наведені величини кільцевого напруження на внутрішній поверхні труби $\sigma_{z'z'}^{\max}(z^2 = a)$ і максимальних значень кільцевого напруження $\sigma_{z'z'}^{\max}(p)$ при різних значення навантаження p . Протягом всього процесу деформування спостерігається збіг результатів, отриманих за розробленим алгоритмом із розв'язком наведеним в [9].

Таблиця 1

$p, \text{ МН/м}^2$	0,037	0,051	0,059	0,064	0,07
$\sigma_{z'z'}^{\max}, \text{ МПа [еталон]}$	0,06	0,067	0,074	0,081	0,086
$\sigma_{z'z'}^{\max}, \text{ МПа (1)-(5)}$	0,061	0,066	0,073	0,08	0,084
Похибка	1,6%	3%	1,6%	0	0

Ефективність застосування алгоритмів (1) і (2)-(4) показано на (рис. 2а) і (рис. 2,б) відповідно у вигляді залежності обсягу обчислювальних витрат, необхідних на розв'язання задачі при різних розмірах зони пластичного деформування, границя якої відповідає координаті $\rho = r_p / R$ (рис. 3.), де R - зовнішній радіус циліндра.

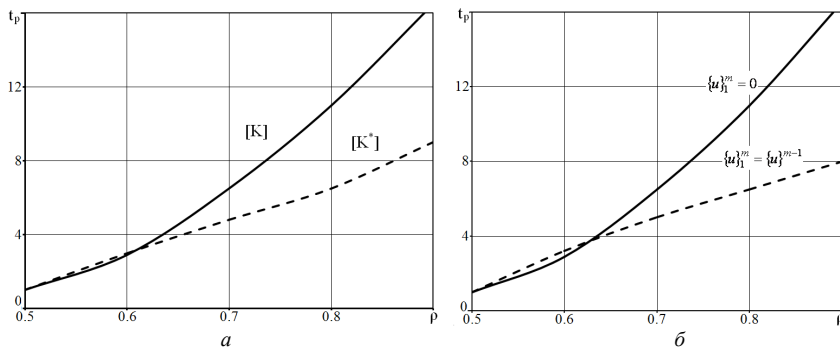


Рис. 2. Пружно-пластичне деформування товстостінної труби: порівняння обчислювальних витрат

Для дослідження збіжності отримуваних результатів розв'язання задачі здійснювалось при вдвічі менших кроках за навантаженням. Розбіжність величин напружень і деформацій пластичності, одержаних у цих двох випадках становила менше 1%.

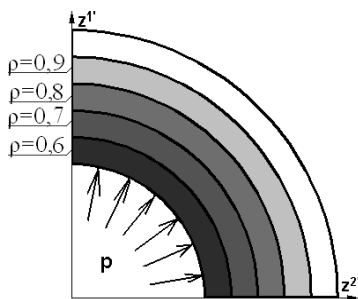


Рис. 3. Розповсюдження зони пластичності в товстостінній трубі

Розв'язання даного тестового прикладу засвідчило, що кількість обсяг обчислювальних витрат при використанні алгоритмів (1) і (2)-(4) зменшується в два рази.

Для дослідження характеру збіжності ітераційного процесу при розв'язанні задач повзучості і підтвердження вірогідності отримуваних результатів розглянемо тестовий приклад про деформування в умовах повзучості тонкостінної трубки. При моделюванні процесу деформування розглядалася ділянка

зразка, що обмежена двома поперечними перетинами, проведеними на відстані 1 мм, яка апроксимувалася із використанням вісесиметричного та плоских скінчених елементів (рис. 4.).

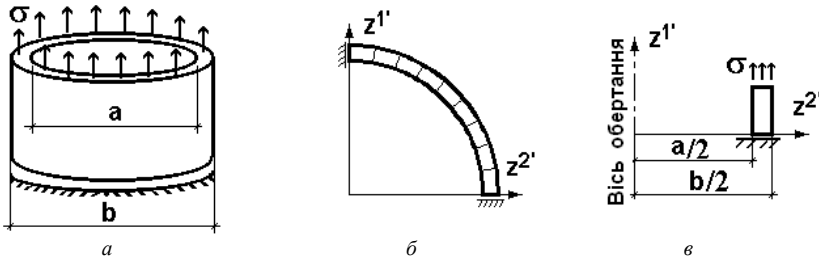


Рис. 4. Тонкостінна труба: розрахункова схема, дискретні моделі МСЕ

Деформування під впливом постійного розтягуючого навантаження в умовах повзучості описується системою рівнянь:

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A \frac{Sh(\sigma/c)}{(1-\omega)^{k_1}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (13)$$

де $A = 3,12 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}$, $k_1 = 2,36$, $c = 20,5 \text{ МПа}$, $B = 0,58 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3,17} \text{ год}^{-1}$, $k_2 = 3,17$ – константи матеріалу при $T = 850^\circ \text{C}$ [3;13].

Величини деформацій повзучості при $\sigma = 60 \text{ МПа}$, отримані за формулами (7)-(13) (таблиця 2), добре узгоджуються з експериментальним результатом [3].

Таблиця 2

t , год	2,5	5	7,5	10	12,5
ε_c % [еталон]	0,625	1,27	2,2	3,6	5
ε_c % (7)-(13)	0,625	1,29	2,4	3,76	5
Похибка	0	1,55%	9%	4,44%	0

На графіку (рис. 5) показана залежність відношення кількості ітерацій N , необхідних на розв'язання задачі при різних значеннях деформацій повзучості до кількості ітерацій N_0 , потрібної для розв'язання задачі до максимального рівня деформацій повзучості при застосуванні алгоритму (2) при $\{u\}_1^m = 0$.

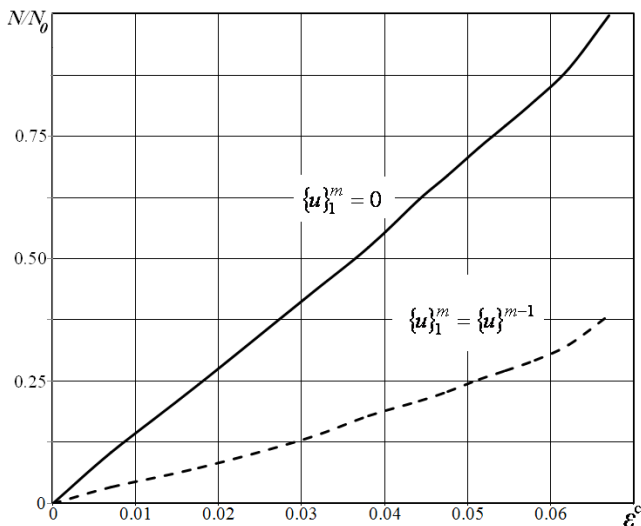


Рис. 5. Деформування в умовах повзучості тонкостінної труби порівняння обчислювальних витрат

Як видно, застосування початкового наближення природжень переміщень дозволяє зменшити обчислювальні витрати в три рази.

3. Розв'язання задач континуального руйнування в умовах повзучості.

Момент часу t^* , коли хоч в одному із СЕ, координати центра ваги якого $\{z^{1*}, z^{2*}\}$, задовольняється умова (12), фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і порушення суцільності матеріалу, що враховуються інтегрально за допомогою параметра ушкодження, до процесу зародження макроскопічних дефектів – розвитку зони континуального руйнування. Для моделювання розвитку зони континуального руйнування в точці з координатами $\{z^{1*}, z^{2*}\}$ вводиться порожнина із площею поперечного перерізу S_0 , в межах якої напруження і модуль пружності матеріалу дорівнюють нулю. Подальше визначення напружено-деформованого стану і параметра ушкодження для нової розрахункової схеми, що містить порожнину, і часу до досягнення умов $\omega = \omega^*$ в прилеглих до порожнини точках виконується за алгоритмом (2,7,9), (10)-(12). При цьому до зони руйнування поступово приєднується нові фрагменти (скінчені елементи).

При реалізації описаної процедури в межах двовимірної постановки МСЕ початковий розмір зони континуального руйнування S_0 приймається таким, що має форму скінченного елемента, координати центра ваги якого дорівнюють $\{z^{1*}, z^{2*}\}$ (рис. 6,в). Подальший розвиток зони континуального руйнування реалізується шляхом урахування умови дорівнювання нулю напружень і модуля пружності для елементів, в центрі ваги яких виконується умова $\omega = \omega^*$. На рис.6,в проілюстровано цей процес, де час до приєднання кожного нового фрагмента зон руйнування позначений $\Delta t_i, i=1,2\dots k$. Розв'язання задачі закінчується при досягненні порожниною заданої площі S_k і визначенні необхідного для цього часу $t_s = t_0 + \Delta t_k$.

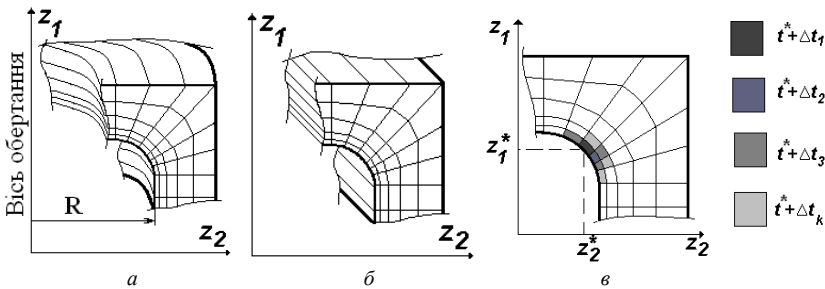


Рис. 6. Дискретні моделі МСЕ, розвиток зони континуального руйнування:

a, б -нанесення скінченоелементної сітки для розрахунку плоских і віссесиметричної об'єктів МСЕ,
в - процес розвитку зони континуального руйнування

Для апробації викладеного алгоритму моделювання розповсюдження зони континуального руйнування розглянуто наведену в роботі [1] задачу про розвиток зони континуального руйнування в товстостінній трубі. Загальний вигляд труби за наявності зони континуального руйнування радіусом r^* наведений на (рис. 7).

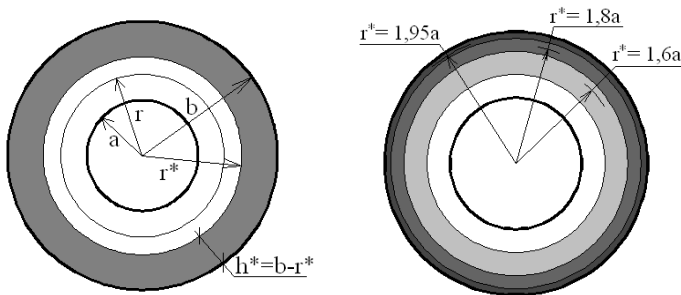


Рис. 7. Загальний вигляд труби за наявності зони континуального руйнування

Для опису деформування в умовах повзучості в роботі [1] використані кінетичні рівняння вигляду

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{d\tau} = B \left(\frac{\sigma_i}{1-\omega} \right)^{k_1}, \quad \frac{d\omega}{d\tau} = D \left(\frac{\sigma_{33'}}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (18)$$

де $B = 1$, $D = 1$, $k_1 = 5$; $k_2 = 3.5$ – константи матеріалу; τ – приведений безрозмірний час; $\sigma_{33'}$ – кільцеве напруження.

Побудова дискретних моделей виконана аналогічно до прикладу, розглянутому в п. 2 (рис.1, а, б). Результати розв'язання задачі до досягнення параметром ушкодження критичного значення, проведеного за алгоритмом (11-12)-(14-16) збігаються з наведеними в роботі [1]. При деформуванні в умовах повзучості відбувається пере розподілення напружень, яке призводить до досягнення параметром ушкодження критичного значення на зовнішній поверхні труби. У подальшому зона руйнування радіусом r^* просувається із зовні до внутрішньої поверхні труби.

Для проведення аналізу вірогідності результатів моделювання розповсюдження зони континуального руйнування проведено порівняння змінення величин кільцевих напружень в залежності від товщини (розмірів) зони континуального руйнування в різних точках поперечного перерізу (рис. 8.). Отримані результати збігаються з наведеними в роботі [1].

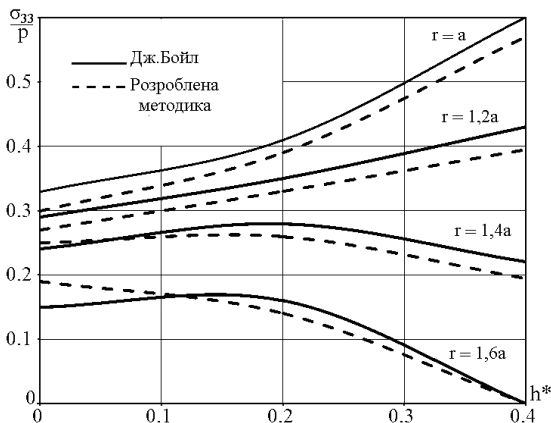


Рис. 8. Змінення величин кільцевих напружень в залежності від товщини зони континуального руйнування

Отже, розроблений алгоритм моделювання розвитку зони континуального руйнування дозволяє з високим ступенем точності визначати зміни параметри напружено-деформованого стану при змінні розмірів зони континуального руйнування .

4. Розв'язання геометрично нелінійних задач при пружному деформуванні.

У випадку наявності геометрично-нелінійного деформування наприкінці кожного кроку перерахунок базисних координат усіх вузлів сіткової області виконується по формулі:

$$z_m^\alpha = z_{m-1}^\alpha + \Delta u_m^\alpha .$$

Для дослідження характеру збіжності і вірогідності результатів, отримуваних із використанням викладеного алгоритму при наявності повних деформацій розглянуто тестову задачу про згин защемленої по контуру круглї пластини, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 9,а).

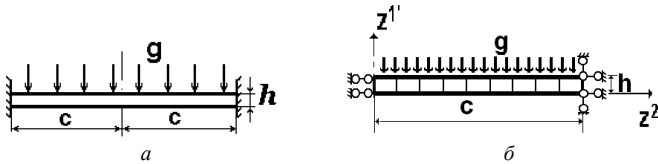


Рис. 9. Пластина защемлена по контуру: розрахункова схема, дискретна модель МСЕ

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: $a=0.2$ м, $h=0.01$ м, модуль пружності $E = 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий в роботі [10], що показаний на (рис. 10) суцільною лінією в вигляді залежності безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження. Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ, із використанням зображеної на (рис. 9,б) дискретної моделі, майже повністю збігаються із еталонним розв'язком (рис. 10).

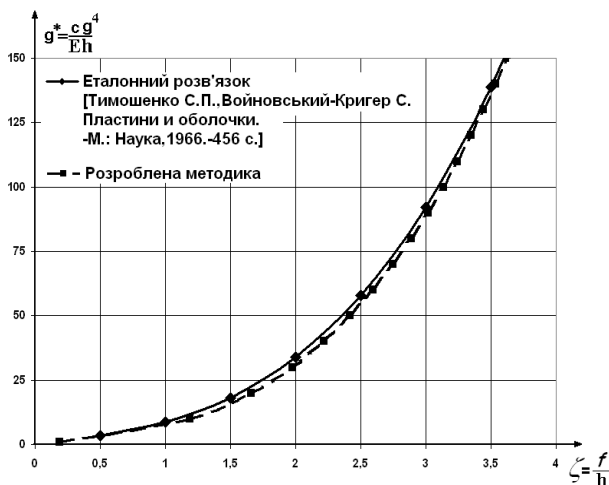


Рис. 10. Залежність безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження

5. Геометрично нелінійне деформування при наявності деформацій пластичності і повзучості.

Для доведення достовірності розв'язку задач при скінчених переміщеннях і великих пластичних деформаціях для тіл обертання, проведено дослідження пружнопластичного деформування суцільного циліндра між двома плоскими шерохватими плитами. Висота циліндра $H=0,8$ см, $R_0=0,95$ см, початковий радіус $R_0=1,1906$ см. Механічні характеристики матеріалу: модуль пружності $E=7 \cdot 10^4$ МПа коефіцієнт Пуассона $\nu=0$.

Розрахункова схема об'єкта зображена на (рис. 11.) Сітка СЕ на меридіанній переріз циліндра нанесена рівномірно вдовж осі z^1 і z^2 .

Результати розрахунку показані у вигляді епюр радіального зміщення в

залежності від нормованого переміщення верхньої плити $z^* = \frac{H - z^1}{h}$

(рис. 11.). Результати, показані на графіку суцільною лінією приведені в роботі [14], отримані по виведеній методиці показані пунктиром. Як видно, спостерігається хороша збіжність результатів.

З метою перевірки методики розв'язання задачі повзучості в геометрично нелінійній постановці було розглянуто задачу про осаджування з постійною швидкістю $V_0=0,167$ см/с циліндра висотою $H=25$ мм, діаметром $R_0=12.5$ мм до величини відносного стиснення 30% (рис. 11.).

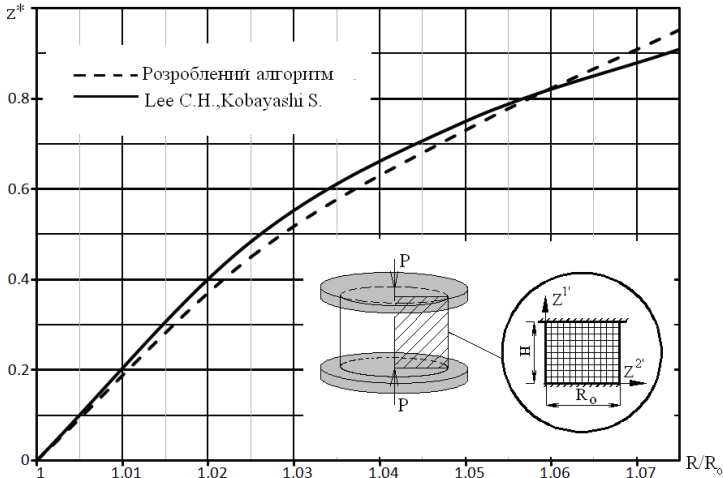


Рис. 11. Циліндр між двома плоскими плитами, дискретна модель, результати розрахунку

Механічні характеристики матеріалу прийняті у відповідності з графіком кривих деформаційного спрочнення сплаву Д16 при температурі 450°C . На границі контакту інструмент – заготовка є повне прилипання. В якості еталону прийняті результати експериментального дослідження, приведені в роботах [5;7;8].

В табл.3 показані результати, які відображають залежність величини відносного обтиснення до деформуючого зусилля. Можна відмітити добру збіжність результатів, отримані різними методами.

Таблиця 3

Відносне обтиснення %	5	10	15	20	25	30
P , МН [експ.]	0,023	0,025	0,026	0,027	0,028	0,03
P , МН (1)-(5)	0,024	0,026	0,027	0,028	0,029	0,031
Похибка	4.3%	4%	3,8%	3,7%	3,5%	3,3%

Висновки.

В статті представлений кроковий блочно-ітераційний алгоритм моделювання еволюційного процесу фізично і геометрично нелінійного

деформування, що ґрунтується на ітераційній процедурі Ньютона-Канторовича. Розглянуті модифікації алгоритму, згідно до яких розв'язання задачі проводиться або із обчисленою на кожному кроці матрицею жорсткості, компоненти якої враховують корекцію тензора пружних констант відповідно до властивостей пластичності і повзучості матеріалу, або із матрицею жорсткості, обчисленою за вихідними величинами тензора пружних констант та початковими наближеннями переміщень, на кожному кроці. Застосування зазначених модифікацій алгоритму має майже однакову ефективність і дозволяє зменшити обчислювальні витрати для розв'язання задач на основі МСЕ приблизно в два-три рази. Описані алгоритми розв'язання задач континуального руйнування дозволяють досліджувати процес зростання зон континуального руйнування з урахуванням пластичності, повзучості і накопичення ушкодження матеріалу. Вірогідність отримуваних на основі розроблених алгоритмів результатів підтверджується їх збіжністю при послідовному збільшенні параметрів дискретних моделей, а також незначним відхиленням від отриманих іншими авторами експериментальних і чисельних результатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1976. – 360 с.
2. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
3. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения // Прикл. механика и техн. физика. – 1982. – № 1. – С. 160–163.
4. *Мазур В.Н., Кокоулин Э.М.* Оценка и прогнозирование ресурса ответственных элементов конструкций путем решения трехмерных краевых задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала в процессе длительного термоциклического нагружения // Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций: Тез. докл. межд. конф. / Отв. ред. В.Т.Трошенко: в 2 т. – К.: Нац.АН Украины. Ин-т пробл. прочности, 2000. – Т. 2. – С. 393–394.
5. *Малинин Н.Н., Романов К.И.* Решения задач горячего формоизменения методом конечных элементов. // Изв. вузов. Машиностроение. – 1985. – № 8. – С. 127–131.
6. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
7. *Романов К.И.* Исследование методом конечных элементов горячей осесимметричной осадки. – Машиноведение, 1978. – № 5. – С. 79–86.
8. *Романов К.И.* Экспериментальное исследование горячей осадки // Изв. вузов. Машиностроение. – 1977. – № 6. – С. 147–1151.
9. *Соколовский В.Н.* Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969.– 214 с.
10. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966.–456 с.
11. *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений. – В кн.: Вычислительные методы в гидротехнике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.

12. Шевченко Ю.Н., Мазур В.Н. Решение плоских и осесимметричных задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала при ползучести // Прикл. механика. – 1986. – № 8. – С. 3–14.
13. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под ред. С.А. Шестерикова – М.: Машиностроение, 1983. –101 с.
14. Ли/Lee С.Н./ ,Кобаяси /Kobayashi S./ Анализ осесимметричной осадки и поперечной осадки в условиях плоской деформации сплошных цилиндрических заготовок методом конечных элементов // АМЕ, сер. В,1971. – N 2. – С. 73-84
15. Lemaitre J. Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1985. – № 51. – P. 31–49.

Отримано 11.05.09

Проведена разработка и исследование эффективности шагово-итерационного алгоритма решения геометрически нелинейных задач пластичности и ползучести двумерных тел. Исследована эффективность применения начальных приближений и коррекции тензора упругих констант соответственно свойствам пластичности и ползучести материала.

The elaboration and efficiency testing of step-iterative algorithm for gemetrically nonlinear plasticity and creep problems of two-mentioned bodies was made. The efficiency of initial approximation and correction of elasticity constant tensor according to plasticity and creep property of material has been investigated.

УДК 624.04, 004.4

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О.В. Шишов, канд. техн. наук

ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ТЕСТУВАННЯ В АВТОНОМНОМУ РЕЖИМІ РІВНЯ ЗНАТЬ З БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Пропонується програмне забезпечення, призначене для тестування в автономному режимі знань та умінь студентів у галузі будівельної механіки стержневих систем.

Залучення інформаційних технологій до навчального процесу у вищих навчальних закладах України, вимагає створення спеціалізованих програмних навчальних засобів, до яких, зокрема, можна віднести програмні засоби для тестування рівня знань та умінь студентів.

Викладачами кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури створено програмний комплекс **CNTRBIL**, призначений для тестування в автономному режимі рівня знань та умінь студентів з будівельної механіки. Комплекс розроблено на базі системи програмування Visual Basic 6.0. До складу комплексу входять спеціальним чином структурована база тестових білетів і рисунків, програми тестування і автоматизації підготовки тестових білетів, а також деякі допоміжні файли і прикладні програми. Комплекс встановлюється на окремі комп'ютери, які працюють незалежно один від одного.

Тестування здійснюється перевіркою відповідей на вибрану тему. Кількість запитань протягом сеансу тестування може бути від 5 до 10. Запитання і рисунки виводяться в робоче вікно програми. Для надання відповідей виділяється обмежений відрізок часу (40 хвилин). Відповіді аналізуються програмою шляхом порівняння з еталонними відповідями. Наприкінці тестування програма повідомляє інтегральну оцінку рівня знань.

Інтерфейс програми передбачено двомовним. Базовою мовою є українська. Другою мовою взята російська. Зміна мови інтерфейсу виконується без зміни програмних кодів

Програму розроблено для тестування знань та умінь студентів в галузі будівельної механіки стержневих систем. Разом із тим можливе використання зазначеного програмного забезпечення без зміни програмних кодів для тестування рівня знань та умінь студентів з інших інженерних дисциплін.

Комплекс виконує такі дії:

1. Надає можливість вибрати одну з тем для проведення тестування.

2. Вибирає випадковим чином тестовий білет з обраної теми.
3. Дас можливість вибирати в будь-якому порядку запитання білета і виводить на екран власне запитання, рисунок і, в разі необхідності, варіанти можливих відповідей.
4. Підсумовує кількість балів, набраних за певними правилами, і пропонує інтегральну оцінку знань та умінь з теми, що тестується.
5. Зберігає результати тестування на вінчестері.
6. Дозволяє змінювати кількість та назви тем, склад тестових білетів та мову інтерфейсу без втручання в програмні коди.
7. Дас можливість у процесі тестування залучати до роботи допоміжні прикладні програми: стандартний калькулятор, програму розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, програму визначення коефіцієнтів формул методу переміщень для задач стійкості, короткий довідник з будівельної механіки.

Після запуску програми самотестування на екран виводиться її головне вікно (рис.1):

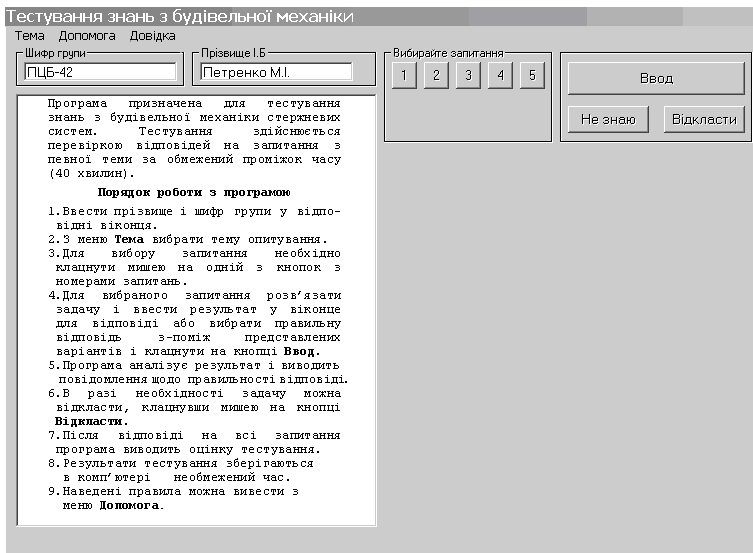


Рис. 1

Головне вікно поділяється на окремі зони, кожна з яких має певні функції.

Рядок заголовка, в якій виводиться назва обраної студентом теми. При завантаженні програми, коли тема тестування ще не вибрана, в рядок виводиться назва дисципліни.

Поля ідентифікації “Шифр групи”, “Прізвище І.Б.”. Тут необхідно ввести персональні дані особи, що проходить самотестування. Якщо віконця не заповнені, тестові запитання не виводяться.

Спадаючі меню, за допомогою яких вибирається тема тестування, завершується робота з програмою, виводяться на екран допоміжні засоби (програми розв’язання рівнянь, короткий довідник тощо) та правила роботи з програмою, а також переглядаються результати поточного тестування.

Зона рисунка. Сюди виводяться рисунки, схеми або допоміжні тексти, які відносяться до поточних запитань. На початку роботи до зазначеної зони виводяться короткі правила роботи з програмою тестування.

Зона запитання призначена для надання поточного запитання.

У зоні **Варіанти відповіді** розміщено чотири поля, в які виводяться варіанти можливих відповідей на поставлене запитання, що вибираються з тестового білета і виводяться у віконця випадковим чином. Такий вигляд зона набуває у випадку, коли відповідь носить вибірковий характер. Якщо ж відповідь на запитання виражається числом, тобто має фіксований характер, то замість зони **Варіанти відповіді** програма виводить поле **Відповідь**, в яке необхідно ввести правильний результат.

Характер відповіді (фіксований чи вибірковий) визначається програмою автоматично.

У зоні **Вибирайте запитання** розміщено від 5 до 10 кнопок. Кількість кнопок визначається програмою автоматично і залежить від кількості запитань в тестовому білеті. Кнопки можна натискати в будь-якому порядку. Натиснення на якусь кнопку виводить в робоче вікно відповідне запитання з поточного тестового білета. Після надання відповіді кнопка блокується і повторна відповідь стає неможливою. При цьому кнопка зафарбовується в певний колір: зелений, якщо відповідь правильна, червоний – якщо неправильна, жовтий – якщо надано відповідь “Не знаю”. Тестування може бути завершене за умови, що на всі запитання білета дана та чи інша відповідь.

В окремій зоні зібрано **кнопки введення відповіді**. Кнопка **Ввод** натискається після того як студентом вибрано правильний, на його думку, варіант відповіді або введена числова відповідь. Натиснення цієї кнопки призводить до порівняння з еталонною відповіддю і завершує роботу з даним запитанням. Якщо б не була відповідь – правильною чи не правильною – повернутися до даного запитання неможливо.

Кнопка **Відкласти** дає змогу повернутись до запитання пізніше, а кнопка **Не знаю** знімає запитання з розгляду в поточному сеансі тестування.

В **інформаційному рядку** студент сповіщається щодо поточного номера запитання, правильності відповіді, часу, який залишається до закінчення

поточного сеансу тестування. У цей же рядок виводиться результат тестування.

Робота програми починається з вибору теми тестування. Список тем виводиться на екран за допомогою меню **Тема** (рис.2):

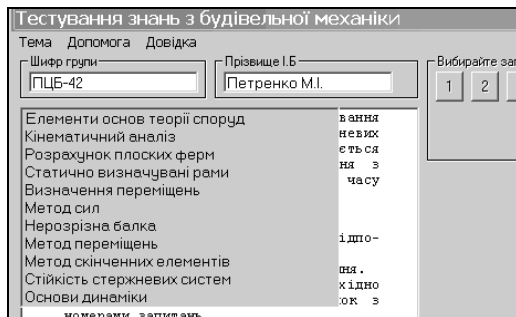


Рис.2

Після вибору курсором миші якої-небудь теми, наприклад "Метод переміщень", у зоні Вибирати запитання активізуються кнопки запитань, кількість яких визначається автоматично програмою залежно від кількості запитань у тестовому білеті (рис.3):

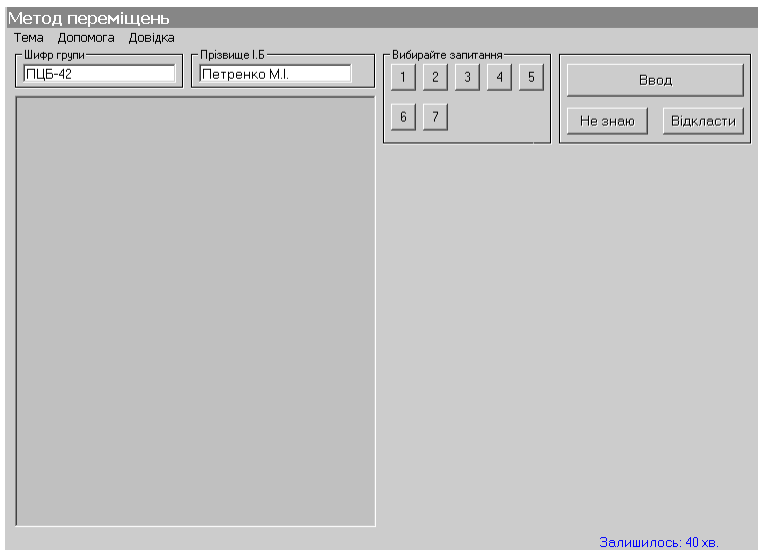


Рис.3

Далі починається власне тестування шляхом введення запитань тестового білету. Запитання вводяться натисненням у будь-якому порядку кнопок запитань.

При вибіркового характері відповіді програма пропонує чотири їх можливі варанти, один з яких правильний. Пропоновані відповіді виводяться у поля робочого вікна випадковим чином. Якщо вибрано правильний варіант, в **Інформаційному рядку** з'являється відповідне повідомлення, а кнопка з номером запитання зафарбовується в зелений колір (рис.4).

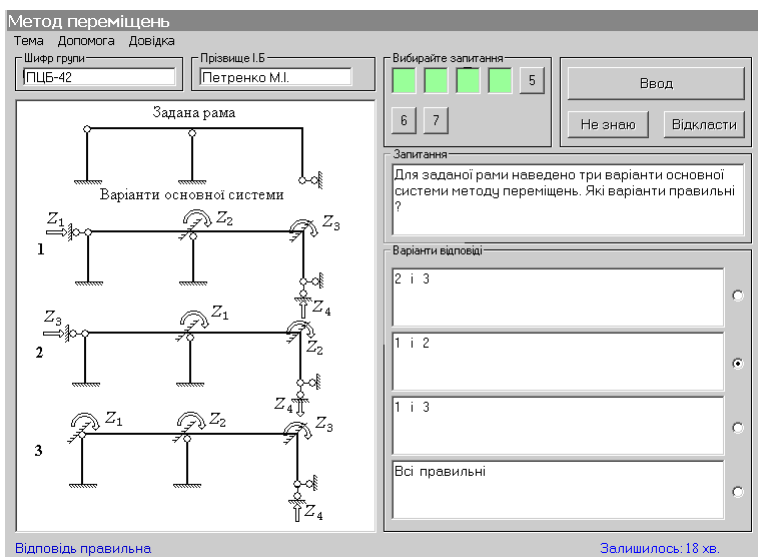


Рис.4

Якщо запитання має фіксований характер, тобто виражається певним числом, то у **Поле відповіді** необхідно ввести число, отримане в результаті розрахунку. Число може бути додатним або від'ємним, цілим або дробовим, причому ціла частина від дробової відокремлюється крапкою або комою (рис.5).

Якщо студент не може обчислити результат або має сумніви щодо нього, він може відмовитись від відповіді, натиснувши кнопку **Не знаю**. У цьому випадку в інформаційному рядку з'являється повідомлення щодо відсутності відповіді а кнопка з номером запитання зафарбовується в жовтий колір. До питання, на яке не було дано відповіді повернутися не можна.

Після відповіді на останнє запитання тестового білету в інформаційному рядку з'являється повідомлення стосовно інтегральної оцінки тестування. На цьому процедура тестування завершується.

Рис.5

Залежно від правильності кожної відповіді студенту нараховується певна кількість балів. Результатам тестування є інтегральна оцінка знань та умінь студента з певної теми, яка визначається програмою залежно від кількості балів, набраних студентом.

Прийнята в програмі система нарахування балів наведена в табл.1.

Таблиця 1

Характер відповіді	Відповідь		
	Правильна	Неправильна	“Не знаю”
Вибірковий	5	0	1
Фіксований	5	1	0

Тобто, правильна відповідь на будь-яке запитання приносить студенту 5 балів. Неправильна відповідь для запитання із фіксованою відповіддю дає один бал, тобто “бал за спробу”, а для запитання з

вибірковою відповіддю – 0 (“нуль”) балів. Натомість відповідь “Не знаю” приносить студенту один бал (“бал за чесність”) для запитання з вибірковою відповіддю і 0 (“нуль”) балів для запитання із фіксованою відповіддю.

Інтегральна оцінка тестування залежить від відсотку P набраних балів по відношенню до максимально можливої їх кількості. Оцінки наведені в табл. 2:

Таблиця 2

Відсоток набраних балів P	Інтегральна оцінка
$P \geq 90\%$	Відмінно
$90\% > P \geq 80\%$	Добре
$80\% > P \geq 60\%$	Задовільно
$P < 60\%$	Незадовільно

Інтегральна оцінка тестування виводиться в статусний рядок вікна програми після відповіді на останнє запитання білета.

Протоколи тестування зберігаються у файлі **C:\TESTING\testing.prt** (рис.6).

```

# ПРОТОКОЛ ТЕСТУВАННЯ ЗНАНЬ
Дисципліна <БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА>
05.10.2009 18:03:07

Тема: Метод переміщень
Файл білета: C:\TESTING\THEME_8\MP
Група: ПЦБ-42
Студент: Петренко М.І.

N зап.  Бали  Відповідь
1      5      1
2      5      1
3      5      12
4      5      3
5      0
6      5      -17.25
7      5      8

Сумарна кількість балів: 30 (85.71429%)
Оцінка ДОБРЕ
Використаний час: 22 хвил. 20 сек.

```

Рис.6

Файли тестових білетів – це текстові файли, які містять запитання і еталонні відповіді з певної теми. Ці файли можуть бути створені за допомогою текстового редактора **WordPad** або спеціально розробленої прикладної програми.

Тестовий білет може містити від 5 до 10 запитань. Кожному запитанню у файлі білета відведено 6 записів:

1. Повне ім'я файла рисунка, що ілюструє запитання.
2. Текст запитання.

3. Правильна (еталонна) відповідь.

4-6. Варіанти неправильних відповідей.

Якщо правильна (еталонна) відповідь є числовою (фіксованою), то вона повинна бути цілим або дійсним числом. Записи 4,5 або 6 при цьому можуть бути будь-якими, у тому числі й пустими.

Правильні числові відповіді можуть задаватися у вигляді цілих або дійсних чисел. Якщо відповідь задається без десяткової крапки, тобто у вигляді цілого числа, то при перевірці програма вимагає точної відповіді без жодної похибки. Якщо ж відповідь у білеті містить десяткову крапку, то таке число вважається дійсним і припускає похибку у відповіді до 0,1 – 1 % залежно від величини числа.

Рисунки, що входять до складу текстових білетів, утворюються за допомогою редакторів растрової графіки, таких як **Paint**, **PhotoShop**, і зберігаються в файлах з розширеннями **bmp**, **jpg** або **gif**. Останній формат є найбільш економічним. Крім того, рисунки можна отримувати шляхом сканування рисунків, виконаних на папері.

Пробна експлуатація комплексу **CNTRBIL** показала його ефективність у контролі знань та умінь студентів, а також певною мірою знизила завантаження викладачів і перетворила їх з контролюючих осіб на консультантів, до яких за допомогою звертаються студенти.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології. – К.: Каравела, 2009 р. –696 с.
2. *Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. – К.: Каравела, 2007 р. –364 с.

Отримано 08.05.09

Предлагается программное обеспечение, предназначенное для тестирования в автономном режиме знаний и умений студентов в области строительной механики стержневых систем.

The software for testing in autonomous behavior of knowledges and abilities of students in area of structural mechanics is offered.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, ст. наук. співр.
Н.А. Гречух, наук. співр.

КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНЧАСТИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ПРИЄДНАНИХ МАС, ПРУЖНИХ В'ЯЗЕЙ І ВИРІЗІВ

Викладені алгоритми розв'язання задач про власні коливання континуальних конструкцій з використанням редукованих скінченноелементних моделей, що дають змогу враховувати такі особливості конструкцій, як наявність приєднаних мас і пружність опор. Приведені результати розв'язання задач з урахуванням цих особливостей, які порівнюються з результатами, що отримані за допомогою інших методів.

Побудова розрахункових моделей континуальних конструкцій виконується на основі методу скінченних елементів співвідношення для яких побудовані на основі положень тривимірної теорії пружності. Використання універсальних тривимірних схем МСЕ в задачах динаміки оболонок і пластин дає змогу зберігати властивості гіперболічності систем розв'язувальних рівнянь за рахунок природного урахування сил інерції зсуву і повороту. Останнє особливо важливе при дослідженні багаточастотних режимів коливань і хвильових процесів.

Забезпечення сталості обчислень по відношенню помилок округлення при розрахунку тонких і середньої товщини пластин і оболонок виконується шляхом використання у якості розв'язувальних функцій переміщень вузлів на серединній поверхні елемента та узагальнені кути повороту, які подаються як різниця переміщень вузлів на обмежуючих поверхнях [1]. Окрім цього, використовується гіпотеза про сталість напружень обтиснення по товщині оболонки. Введення такої гіпотези замість більш сильної умови $\sigma^{11} = 0$ (координата x^1 орієнтована по товщині) не вносить не усунює похибки в просторовий скінченний елемент, дає змогу врахувати поперечне деформування оболонки і позбавляє необхідності переходу до переміщення в місцевій системі координат. Останнє має суттєве значення при дослідженні комбінованих конструкцій для яких умови контакту окремих фрагментів можуть бути подані у єдиній глобальній системі координат без виконання попередніх перетворень.

У кожний окремо взятий момент часу натужно-деформований стан оболонки як тривимірного тіла повинен задовольняти варіаційному рівнянню руху, яке у відповідності з принципом Лагранжа-Даламбера має вигляд:

$$\int_v \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - \int_v \rho \left(F_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \delta u^i dv - \int_s X_i \delta u^i ds = 0. \quad (1)$$

При побудові системи рівнянь руху дискретної моделі МСЕ спочатку необхідно у варіаційному рівнянні (1) перейти від інтегрування по об'єму тіла до суми інтегралів по об'ємам скінченних елементів, використовуючи співвідношення для матриць жорсткості, мас і узагальнених сил. Приймаючи до уваги, що в цих співвідношеннях невідомими є залежні від часу значення вузлових узагальнених переміщень, отримаємо співвідношення:

$$\sum_e \delta \{u\}_e^T [K]_e \{u\}_e + \sum_e \delta \{u\}_e^T [M]_e \{\ddot{u}\}_e - \sum_e \delta \{u\}_e^T \{Q(t)\}_e = 0, \quad (2)$$

де $\{u\}_e$, $\{\ddot{u}\}_e$ – вектори узагальнених переміщень і прискорень, що визначаються у вузлах скінченних елементів; $[K]_e$, $[M]_e$, $\{Q(t)\}_e$ – відповідно матриці жорсткості, мас скінченного елемента та вектор вузлових сил, еквівалентних зовнішнім навантаженням. Символ \sum_e означає підсумування по всім елементам моделі.

В подальшому в (2) виконується перегрупування і зведення подібних членів таким чином, щоб перейти від підсумування по елементам до підсумування по індексам компонент вектора переміщень усієї дискретної моделі. При цьому відповідність між номерами вузлів усієї моделі конструкції і локальними номерами вузлів у скінченних елементах установлюється за допомогою матриць відповідності або “шаблонів” сіткової області.

В результаті отримаємо дискретний аналог варіаційного рівняння (1) у вигляді матричного рівняння:

$$\{u\}^T ([K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} - \{Q(t)\}) = 0, \quad (3)$$

де $\{u\}$, $\{\ddot{u}\}$ – n -вимірні вектори узагальнених переміщень і прискорень вузлів скінченноелементної моделі, яка має n степенів вільності; $[K]$, $[M]$ – матриці жорсткості і мас дискретної моделі конструкції; $\{Q(t)\}$ – вектор узагальнених вузлових сил.

Необхідною і достатньою умовою, що задовольняє рівняння (3) при довільних можливих (сумісних із в'язями) варіаціях вектора $\{u\}$ є умова рівності нулю співвідношення, яке в (3) розміщено в дужках:

$$[K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\} = \{Q(t)\}. \quad (4)$$

Методи розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь руху дискретної моделі МСЕ (4) при заданих початкових умовах

$$\{u(t)\}\big|_{t=0} = \{u(0)\}, \quad \{\dot{u}(t)\}\big|_{t=0} = \{\dot{u}(0)\} \quad (5)$$

досить повно розроблені у теорії малих коливань [2].

Стосовно задачі про власні коливання при $\{Q(t)\} = 0$, матричне рівняння (4) допускає розв'язок у вигляді

$$\{u\} = \{r\} \text{Sin}(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

і зводиться до узагальненої проблеми про власні значення [3]

$$([K] - \lambda[M]) = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) має нетривіальний розв'язок за умов

$$\det[K] - \lambda[M] = 0, \quad (8)$$

що є характеристичним рівнянням системи.

Корні λ_i ($i=1,2,\dots,n$) і відповідні їм вектори розв'язку системи (7) $\{r\}^{(i)}$ називаються власними значеннями і власними векторами матриці $[M]^{-1}[K]$. Підставимо їх у (7) та отримаємо рівність

$$[K][R] = [\Lambda][M][R], \quad (9)$$

де $[R]$ – модальна матриця, стовпцями якої є відповідним чином нормовані вектори $\{r\}^{(i)}$, $[\Lambda]$ – діагональна матриця, складена із власних значень λ_i .

Окрім самостійного використання при оцінці частот і форм власних коливань конструкції, що має важливе значення для прогнозування резонансних явищ в реальних конструкціях розв'язок проблеми (7) набуває фундаментальну роль у теорії малих коливань, а також в методах розв'язання нелінійних задач (таких як метод малого параметра, методи теорії стійкості руху, розгалуження рішень та ін.).

Нормування векторів $\{r\}^{(i)}$, що визначаються з точністю до довільної постійної, виконується за формулою

$$\{r\}^{(i)} = \{\tilde{r}\}^{(i)} \cdot \|\{r\}^{(i)}\|^{-\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

де

$$\|\{r\}^{(i)}\| = \{\tilde{r}\}^{(i)T} [M] \{\tilde{r}\}^{(i)}. \quad (11)$$

Тут $[M]$ являє собою метричну матрицю n - вимірною лінійного метричного простору розв'язку систему (4). Розв'язок узагальненої проблеми про власні значення (7) дає змогу виконати перетворення системи розв'язувальних рівнянь до головного (нормального) базису простору. Важливіші для застосування властивості ортогональності власних векторів при нормалізації (9) записуються у вигляді:

$$[R]^T [M] [R] = [E], \quad [R]^T [K] [R] = [\Lambda], \quad (12)$$

де $[E]$ – одинична матриця.

Стосовно задач про вільні коливання.

Розв'язок (4) за умов $\{Q(t)\} = 0$ і довільних початкових умов (5) подано у вигляді:

$$\{u\} = [R][S(t)]\{a\} + [R][C(t)]\{b\}, \quad (13)$$

де $[S(t)], [C(t)]$ – діагональні матриці, компоненти яких є гармонічні функції, що мають вигляд:

$$S_{(i,i)}(t) = \text{Sin} \omega_i t, \quad C_{(i,i)} = \text{Cos} \omega_i t, \quad (14)$$

де $\{a\}, \{b\}$ – вектор невідомих амплітудних значень при відповідних гармоніках;

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_{(i)}}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) - \quad (15)$$

значення колових частот власних коливань.

Підставимо початкові умови (5) при $t = 0$ в (13):

$$\{u(0)\} = [R]\{b\}, \quad \{\dot{u}(0)\} = [R][\Lambda]\{a\}. \quad (16)$$

Розв'язуючи (16) з урахуванням того, що у відповідності з (12)

$$[R]^{-1} = [R]^T [M], \quad ([R][\Lambda])^{-1} = [\Lambda]^{-1} [R]^{-1} = [\Lambda]^{-1} [R][M]. \quad (17)$$

Отримаємо:

$$\{b\} = [R]^T [m] \{u(0)\}, \quad \{a\} = [\Lambda]^{-1} [M] \{\dot{u}(0)\}, \quad (18)$$

де компоненти діагональної матриці $[\Lambda]^{-1}$ є величини $\lambda_{(i)}^{-1}$.

До розв'язку задачі, що розглядається, слід віднести такі практично важливі випадки динамічного навантаження конструкцій, як імпульс початкової швидкості; миттєве прикладання навантаження; продовження розв'язку задачі про змушені коливання, коли зовнішні сили досягли найбільшого значення.

Початкові переміщення $\{u(o)\}$ повинні бути задані відносно врівноваженого стану.

Аналізуючи описані методи розв'язання задач динаміки з точки зору їх реалізації на ПЕОМ стосовно до МСЕ, усю сукупність обчислень слід розділити на дві групи. До першої відносяться елементарні операції лінійної алгебри (обчислення суми та лінійних комбінацій векторів, скалярних добутоків векторів і норм векторів у просторі розв'язків задачі, визначення сум і добутоків матриць і т.п.).

Реалізація цих обчислень на алгоритмічній мові із забезпеченням оптимізації витрат машинного часу досягається за рахунок ретельно продуманої техніки програмування з використанням у більшості випадків стандартного математичного забезпечення ЕОМ.

До другої групи операцій, від ефективності реалізації яких залежить час і трудомісткість процесів завдання даних, розв'язок задачі і обробки результатів а також сама можливість отримання достовірних результатів стосовно складних конструкцій, слід віднести:

1) алгоритми реалізації співвідношень МСЕ (подання геометрії, топології, в'язей, навантажень; обчислення матриці жорсткості, мас і зведених вузлових сил в елементах і усїєї конструкції);

2) розв'язання узагальненої проблеми про власні значення матриць типу (6), побудова форм коливань моделі конструкції і т.п;

3) алгоритми розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Труднощі побудови і реалізації цих алгоритмів обумовлені перш за все великими розмірами систем рівнянь МСЕ для складних континуальних конструкцій. Успішний розв'язок цих проблем можливий за умови комплексного розгляду взаємопов'язаних питань механіки, системотехніки обчислювальної математики і програмування.

Стосовно розв'язку задачі про власні коливання об'єктів та ще й з урахуванням особливостей, таких як наявність вирізів, приєднаних мас, пружної піддатливості в'язей структура алгоритмів значно ускладнюється. До цього слід додати, що розв'язання задачі динаміки вимагає приблизно на порядок більше витрат машинного часу у порівнянні з витратами на розв'язання відповідної задачі статички. В той же час у більшості випадків щодо практичних застосувань слід визначити лише деяку частину власних частот нижньої частини спектру дискретної моделі.

У зв'язку з цим виникла проблема редукування (пониження порядку) системи розв'язувальних рівнянь.

Суть більшості методів редукування полягає у пошуку такого перетворення вектора невідомих

$$\{u\} = [U]\{q\}, \quad (19)$$

щоб вектор нових узагальнених координат мав значно меншу розмірність, а нижні частоти власних коливань вихідної і редукованої моделей були близькими. Можливість такого перетворення пояснюється тією обставиною, що у випадку прийняття складовими $[U]$ визначені якимось чином m власних векторів вихідної задачі, то отримаємо редуковану систему m -го порядку, власні значення якої повністю співпадають з власними значеннями, що відповідають вибраним для перетворення власним векторам вихідної моделі.

Викладене положення лежить в основі алгоритму одночасних ітерацій у підпросторі [2].

У даній роботі набув розвитку запропонований В.М. Кислюком метод базисних векторів, який не пов'язаний зі способом дискретизації вихідної задачі і найбільш повно проявив себе стосовно скінченноелементної моделі.

Суть метода полягає у переході до нових узагальнених координат за допомогою перетворення (19). Підставляючи (19) у (3) отримаємо систему руху редукованої моделі, що набуває вигляду:

$$[A]\{q\} + [B]\{\ddot{q}\} = \{q(t)\}, \quad (20)$$

де

$$[A] = [U]^T [K] [U], \quad (21)$$

$$[B] = [u]^T [M] [U], \quad (22)$$

$$\{q(t)\} = [U]^T \{Q(t)\}. \quad (23)$$

відповідно матриці жорсткості, мас і вектор узагальнених сил, які характеризують рух редукованої моделі. У якості базисних векторів приймається m розв'язків статичної задачі.

$$[K][U] = [P], \quad (24)$$

де $[P]$ – матриця, складена з m лінійно незалежних (наприклад, одиничних) векторів

$$[U] = [K]^{-1} [P]. \quad (25)$$

Найпростіший варіант методу базисних векторів ґрунтується на методі переміщень будівельної механіки, коли з набору вузлових переміщень скінченноелементної моделі, яка має тисячі ступенів вільності, у якості нових узагальнених координат вибираються переміщення деякої сукупності переміщень вузлів, так званих базисних вузлів, регулярно розташованих у сітковій області скінченноелементної моделі. Будується основна система методу переміщень шляхом накладання в'язей у напрямку призначених переміщень базисних вузлів. Цим підкреслюється незалежність нових узагальнених координат – переміщень базисних вузлів.

Матриця базисних векторів визначається у результаті розрахунку основної системи на змушені одиничні зміщення по напрямку нових узагальнених координат. Задача зводиться до розв'язку системи рівнянь

$$[K^*][\tilde{U}^*] = [P^*], \quad (26)$$

у якій матриця $[P]^*$ будується зі стовпчиків матриці $[K]$, а матриця $[K]^*$ отримана у результаті обнуління недиагональних елементів, що стосуються переміщень, прийнятим у якості узагальнених координат.

Цей метод побудови базисних векторів, назвемо його методом одиничних станів, допускає ряд важливих узагальнень.

По-перше, розмірність базисного вектора співпадає з числом ступенів вільності вихідної скінченноелементної моделі і у зв'язку з цим побудова редукованих матриць жорсткості і мас (21), (22), виконується із збереженням просторової апроксимації переміщень і форм коливань скінченноелементної моделі конструкції.

По-друге – коефіцієнти редукованих матриць жорсткості і мас відповідають переміщенням базисних вузлів, які визначені на топологічній схемі редукованої моделі. Кожній узагальненій координаті редукованої моделі чітко визначено номер. А це дає змогу визначити положення відносно її коефіцієнта в редукованих матрицях жорсткості і мас. При необхідності урахування пружної піддатливості в'язей, накладених на конструкцію, розташування такої в'язі і її орієнтація повинні співпадати з відповідним базисним вузлом і його переміщенням, тобто узагальненою координатою редукованої моделі, пов'язаним з цим базисним вузлом. Коефіцієнт жорсткості, який характеризує пружну в'язь, додається до відповідного коефіцієнта редукованої матриці жорсткості і таким чином враховується вплив пружної піддатливості в'язей.

У разі необхідності врахувати наявність приєднаної маси на конструкції, аналогічно корегується коефіцієнт редукованої матриці мас.

Кожна узагальнена координата редукованої моделі характеризується сітковим номером вузла скінченноелементної моделі, який прийнято як базисний і номером осі глобальної системи координат, по напрямку якої базисний вузол зміщується. У загальному випадку базисний вузол має шість ступенів вільності: 3 поступальних переміщення по напрямку 3-х осей глобальної системи координат і три узагальнених кутів повороту. Кожній узагальненій координаті призначається глобальний номер у наскрізній нумерації узагальнених координат дискретної моделі. У конкретному випадку число ступенів вільності, що враховують у базисному вузлі залежить від задачі, яку слід розв'язати. Якщо необхідно визначити мінімальну частоту, то у базисному вузлі зберігають ступені вільності по напрямку найменшої жорсткості конструкції. Наприклад, при розв'язанні задачі про власні коливання пластини, в базисному вузлі слід зберігати переміщення по нормалі до поверхні пластини. Тобто у базисному вузлі зберігається один ступінь вільності.

У випадку, коли розглядається задача про коливання складної конструкції, всю сукупність базисних вузлів слід згрупувати таким чином, щоб основна система розпалася на ряд ізольованих фрагментів. Побудова редукованих матриць фрагментів виконується незалежно, але нумерація узагальнених координат виконується для цілої моделі конструкції таким чином, щоб узагальнені координати вузлів різних фрагментів, які з'єднуються мали однакові глобальний номер.

Проведено дослідження впливу піддатливості пружних опор на частоти і форми власних коливань пластини з коловим вирізом, показаної на рис.1. Пластина по краю АВ має закріплення щодо лінійних переміщень та дві пружні опори, шарнірно закріплені в точках С і D.

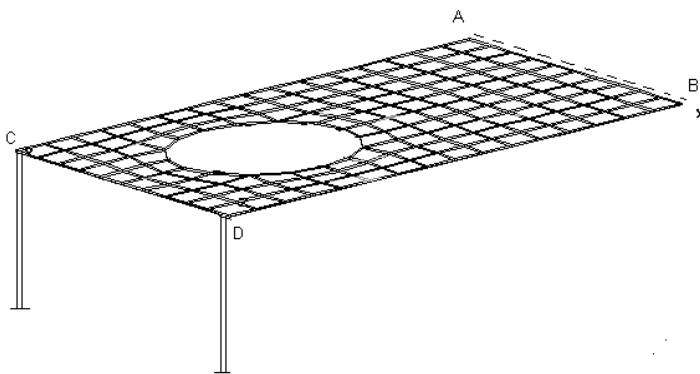


Рис. 1. Пластина з коловим вирізом

Врахування піддатливості пружних в'язей виконується за умов того, що переміщення точок контакту оболонки і пружної в'язі є спільними. Реакція пружної в'язі на змушене одиничне переміщення використовується як добавка до коефіцієнта матриці жорсткості конструкції, що відповідає узагальненому переміщенню вузла, до якого притикає пружна в'язь.

Для розв'язання задачі використана редукована модель. Базисні вузли, кожен з яких має один ступінь вільності по напрямку нормалі до поверхні пластини, показаної на рис.1, вибирається таким чином, щоб два вузли з цього набору були віднесені до вузлів сітки у точках кріплення пружних в'язей. Редукована матриця жорсткості пластини формується один раз. Надалі виконується її корегування шляхом додавання до діагональних членів редукованої матриці, які відповідають базисним вузлам з опорними в'язями, значень коефіцієнтів жорсткості опорних в'язей.

Частоти власних коливань пластини з вирізом для декількох значень параметру жорсткості стержня показані на рис. 2. Суттєвий вплив зміни жорсткості опорних в'язей стосується першої і другої частоти власних коливань. У четвертій формі коливань точки кріплення пружних в'язей розташовані на вузловій лінії і тому жорсткість опорних стержнів на четверту частоту власних коливань впливає незначним чином.

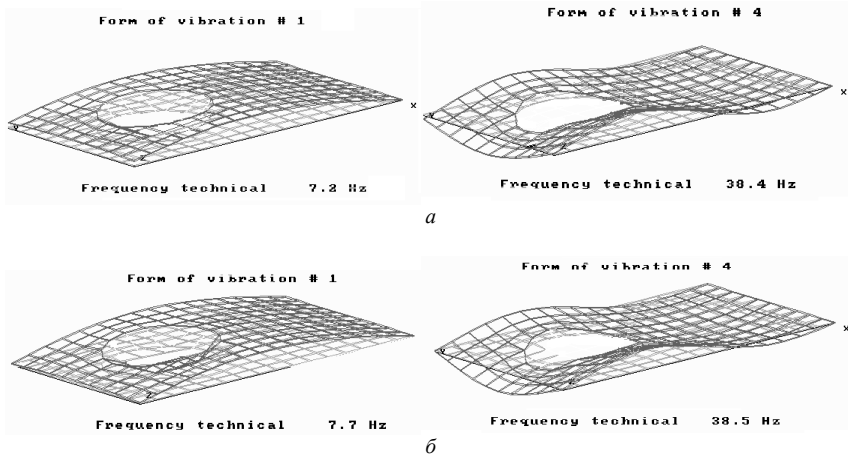


Рис. 2. Частоти власних коливань пластини з вирізом
а) збільшення жорсткості опори в 1.5 рази; б) збільшення жорсткості опори в 10 разів

Вплив приєднаних точкових мас на частоти власних коливань виконано для пластини, показаної на рис. 3.

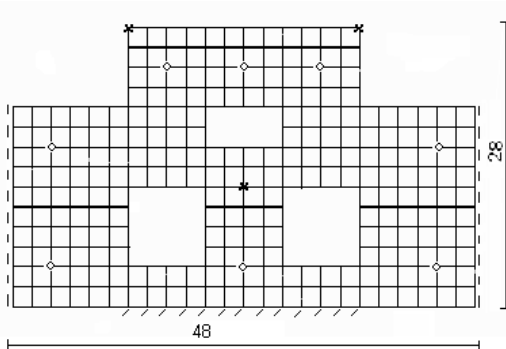
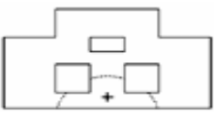
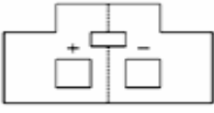
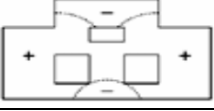
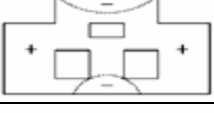
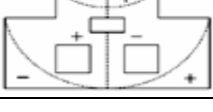


Рис. 3. Пластина з приєднаними точковими масами

Пластина з вирізами шарнірно закріплена по двох протилежних краях (пунктирні лінії), частково закріплена по третьому краю і ще має три точкові опори, позначені на схемі хрестиками. Приєднані точкові маси позначені кружечками. Товщина пластини $h = 0.3$ см, модуль пружності $E = 1.96 \cdot 10^{11}$ н/м², щільність $-7.8 \cdot 10^3$ кг/м³, коефіцієнт Пуассона -0.3 . Результати розв'язку цієї задачі викладені в [3]. Для нас вона розглядається як тестова задача. При побудові скінченноелементної моделі пластини приєднані маси розташовані у вузлах сітки. Ці вузли включені до складу базисних вузлів редукованої моделі. Дослідження впливу приєднаних мас на частоти і форми власних коливань виконується шляхом додавання їх до відповідних діагональних членів редукованої матриці мас моделі конструкції.

Порівняння результатів розв'язку задачі отриманих за допомогою описаної методики з даними в [3] показані в табл. 1.

Таблиця 1

Форми власних коливань	Технічні частоти власних коливань (Гц)	
	Без урахування приєднаних мас	З урахуванням приєднаних мас
	180	112
	213	183
	248	233
	478	326
	535	480

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кислоокий В.Н., Легостаев А.Д., Сахаров А.С., Соловей Н.А.* Об одном варианте метода конечных элементов в задачах статики и динамики консольных оболочек. – В кн.: Сопrotивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1975, вип. 27. С. 45-51.
2. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
3. *Богомолов С.И., Журавлева А.М.* Колебания сложных механических систем. – Харьков.: Вища школа, 1978. –136 с.

Отримано 08.05.09

Изложены алгоритмы решения задач о собственных колебаниях континуальных моделей конструкций с использованием редуцированных конечноэлементных моделей позволяющих учитывать наличие присоединенных масс, упруго-податливых связей и вырезов. Приведены результаты решения задач, в которых учтены указанные особенности конструкции. Выполнено сравнение этих результатов с полученными другими методами и экспериментально.

The algorithms of modal analysis of environments with use of the reduced final elements models are stated. These models allow to take into account presence of attached weights, elastic connections and cuts. The results of the decision of problems taking into account specified features of a design are given. The comparison of these results with received with the help of other methods and experimentally is made.

УДК 539.3

М.О. Соловей, д-р техн. наук
О.П. Кривенко, канд. техн. наук
О.Б. Калашніков

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ СТІЙКОСТІ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК

Порівнюються результати розрахунків пружних тонкостінних конструкцій, що виконані за моментною схемою скінченних елементів, за різними програмними комплексами та за методиками інших авторів. З'ясовані можливості застосування комплексу ЛІРА при розв'язанні геометрично нелінійних задач стійкості тонких оболонок сталої та лінійно-змінної товщини.

У сучасному розвитку методу скінченних елементів (МСЕ) важливе значення мають питання, що присвячені дослідженню властивостей скінченних елементів (СЕ), лінійних і нелінійних методик й алгоритмів розрахунку [1]. Ця проблема вирішується шляхом порівняння розв'язків МСЕ з відомими, що отримані аналітичними, чисельними або експериментальними методами. Вивчення збіжності розв'язків у лінійних задачах дозволяє дослідити основні властивості скінченних елементів і методів розрахунку. Методики розв'язування багатьох нелінійних статичних і динамічних задач звичайно зводяться до багаторазового розв'язання лінеаризованих систем рівнянь. Тому ефективність цих методик у значній мірі визначається ефективністю та точністю лінійного розрахунку тонких пружних пластин і оболонок при дії силових і температурних навантажень [2, 3].

Згин квадратної пластини. Для порівняння збіжності та точності розв'язків лінійних задач, що отримані при застосуванні моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) за методикою [4-8] та у відомих програмних комплексах (ПК), розглянута задача згину тонкої жорстко затиснутої по контуру квадратної пластини (рис. 1, а). В якості розрахункового фрагмента прийнята чверть конструкції. Для пластини, що навантажена рівномірним нормальним тиском, порівнювалися величини прогину в її центрі u'_{max} (рис. 1, б; де N – кількість невідомих, Δ – відсоток розбіжності з розв'язком [9]). Аналіз результатів виконаний для систем ANSYS [10], NASTRAN [11], COSMOS [12], SCAD [13], ЛІРА [14], ФРОНТ [15]. Також використані дані з праць О.Зенкевича [16] та В.О.Постнова й І.Я.Хархуріма [17]. За точний прийнятий розв'язок С.П.Тимошенка [9], що отриманий за теорією тонких пластин. Прийняті

наступні вихідні дані: $a=200$ см, $h=1$ см, $E=2 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu=0.3$. Задавалася величина інтенсивності тиску $q=u'_{max} Eh^3/[0.01512a^4(1-\nu^2)]$ кг/см², для якої згідно до [9] $u'_{max}=1$ см. Результати розрахунків, що отримані за допомогою МССЕ і ПК ЛІРА, наведені в табл. 1. За МССЕ використовувався просторовий СЕ [8], за ПК ЛІРА – плоский чотирикутний СЕ № 19.

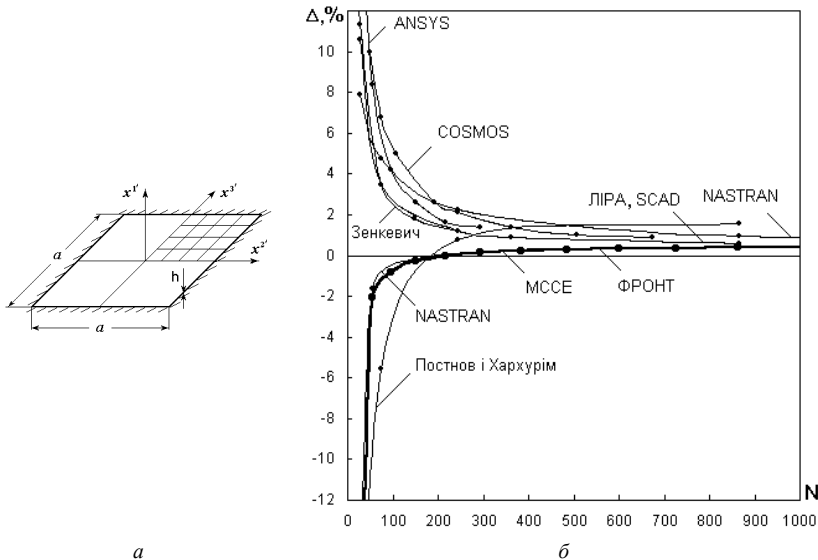


Рис. 1. Порівняння збіжності прогину центра квадратної жорстко затиснутої пластини

Всі порівнювальні розв'язки швидко збігаються й отримуються достатньо точно. За винятком розв'язку [17], для пластинчатих СЕ [10-14, 16] спостерігається збіжність «згори», а для просторових СЕ (ПК NASTRAN, ФРОНТ та даної роботи) – «знизу». Останні результати практично співпадають між собою. Виконане тестування підтверджує, що в області рідких сіток маємо більш швидку збіжність та вищу точність розв'язку за МССЕ, в порівнянні з пластинчатими СЕ у відомих ПК.

Проблемам побудови методик дослідження нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки оболонок з різноманітними конструктивними особливостями та питанням реалізації відповідних обчислювальних алгоритмів присвячена обмежена кількість робіт. У сучасних обчислювальних системах (наприклад ЛІРА, SCAD,

АПРОКС [22], ANSYS) недостатньо представлені та розроблені алгоритми дослідження процесів втрати стійкості гнучких оболонок. У зв'язку зі значною складністю цих алгоритмів вирішення розглядуваних проблем далеке від свого завершення.

Таблиця 1

Сітка CE	Кількість невідомих	Розрахунок за МССЕ		Розрахунок за ПК ЛІРА	
		u'_{max} , см	Δ , %	u'_{max} , см	Δ , %
2×2	54	0.97937	-2.06	1.10591	10.59
3×3	96	0.99180	-0.82	1.05574	5.57
4×4	150	0.99731	-0.27	1.03424	3.42
5×5	216	0.99993	-0.01	1.0237	2.37
6×6	294	1.0014	0.14	1.01797	1.80
7×7	384	1.0022	0.22	1.01504	1.5
8×8	486	1.0028	0.28	1.01202	1.12
9×9	600	1.0032	0.32	1.01073	1.07
10×10	726	1.0034	0.34	1.00923	0.92
11×11	864	1.0037	0.37	1.00852	0.85
12×12	1014	1.0038	0.38	1.00771	0.77
13×13	1176	1.0039	0.39	1.00712	0.71
14×14	1350	1.0040	0.40	1.00645	0.64
19×19	2400	1.0043	0.43	1.00562	0.56
Точний розв'язок		1.000	0	1.0000	0

Вивчення властивостей нелінійних скінченноелементних методик, для яких необхідно досліджувати вплив на збіжність і точність розв'язків великої кількості параметрів, що впливають на напружено-деформований стан (НДС) оболонок, доцільно виконувати на спеціально підбраному наборі як лінійних, так і нелінійних тестових задач. Наповнення такого набору тестів являє собою окрему проблему, яка незважаючи на її практичну важливість, висвітлена у літературі недостатньо. Це пов'язано зі складністю задачі, з математичними та обчислювальними труднощами її розв'язку, трудомісткістю аналізу нелінійного деформування та втрати стійкості оболонок різноманітної форми при дії різних термосилових навантажень.

Нижче на прикладах геометрично нелінійних задач стійкості оболонок сталої та лінійно-змінної товщини наведені чисельні результати

розв'язків, що отримані за розробленою методикою [4-8] та для порівняння за програмним комплексом ЛПА [14].

Скінченноелементна методика дослідження НДС, стійкості та закритичної поведінки тонких неоднорідних оболонок [4-8] базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та положеннях МССЕ. Завдяки такому підходу методика дозволяє на основі єдиної методологічної бази досліджувати тонкі пружні оболонки з різноманітними геометричними особливостями за товщиною та неоднорідностями матеріалу при термосилових навантаженнях. Моделювання оболонки виконується універсальним просторовим СЕ, який дозволяє розглядати тонкі оболонкові конструкції як тривимірні тіла. Нелінійний розв'язок отримується комбінованим алгоритмом, який поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром із ітераційною процедурою Ньютона-Канторовича на кожному кроці навантаження. Достовірність методики обґрунтована великою кількістю чисельних досліджень збіжності та точності лінійних і нелінійних скінченноелементних розв'язків для різних класів задач [2, 3, 7, 18-23].

В ПК ЛПА для розв'язування нелінійних задач застосовується кроковий нелінійний процесор, який організовує процес покрокового навантаження конструкції та забезпечує розв'язок лінійованої системи рівнянь на кожному кроці поточного збільшення вектора вузлових навантажень. Моделювання геометричної нелінійності виконується за допомогою скінченних елементів, що враховують зміну геометрії конструкції при її деформуванні. Момент втрати стійкості конструкції пов'язується з появою від'ємних значень коефіцієнтів на діагоналі матриці жорсткості системи. Розв'язування задачі нелінійного деформування реалізовано лише до верхнього критичного навантаження. Вивчення закритичного стану конструкції зі застосуванням даного алгоритму неможливе.

Стійкість сферичної панелі сталого товщини. Розглянута полога осесиметрична сферична панель, що жорстко затиснута за контуром і навантажена рівномірним тиском інтенсивністю q (рис. 2, а). Результати досліджень подано з використанням безрозмірних параметрів

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4, \quad \bar{u}^l = \frac{u^l}{h}, \quad k = \frac{H}{h}, \quad (1)$$

де r – радіальна координата точки панелі у плані; a – радіус опорного контуру; h – товщина; H – стріла підйому; k – параметр, що характеризує пологість панелі; R – радіус серединної поверхні сферичної панелі; E, ν –

модуль пружності та коефіцієнт Пуассона ізотропного матеріалу; u^I – переміщення вздовж осі декартової системи координат x^I .

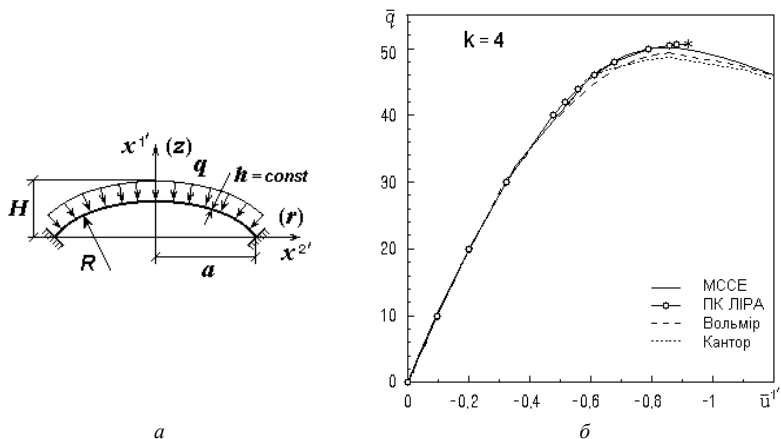


Рис. 2. Порівняння розв'язків для сферичної панелі сталі товщини

У чисельному розрахунку прийняті наступні вихідні данні: $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.3$, $a = 1$ м, $h = 0.01$ м, $k = 4$, $H = 0.04$ м, $R = 12.52$ м. Ця панель згідно до [25, 26] деформується та втрачає стійкість за осесиметричною формою. Тому за розрахункову модель для МССЕ прийнята чверть сферичної панелі з рівномірним розподілом СЕ вздовж радіуса та за колом.

При розрахунку за ПК ЛПА скінченноелементна модель оболонки (СЕМО) моделювалася двома типами оболонкових елементів: № 344 – нелінійним трикутним СЕ та № 342 – нелінійним чотирикутним СЕ. У полюсі оболонки застосовувався трикутний, а на інших ділянках – чотирикутний елементи.

Точність отриманих за МССЕ розв'язків порівняна з результатами робіт [25, 26] і ПК ЛПА (рис. 2, б). Спостерігається повний збіг розв'язків у докритичній області та незначне розходження у верхній критичній точці (табл. 2). На діаграмах “навантаження-прогин у центрі панелі”, що отримані за ПК ЛПА, зірочкою позначено момент припинення обчислень, що приймається за момент втрати стійкості оболонки.

Таблиця 2

Розв'язки	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$	$\bar{u}_{кр}^{1^e}$	$\Delta, \%$
МССЕ	50.12	1.46	-0.882	2.56
ПК ЛПА	50.70	2.63	-0.920	6.98
Вольмір	49.4	0	-0.860	0
Кантор	48.8	-1.21	0.859	-0.12

Стійкість сферичних панелей лінійно-змінної товщини. Для підвищення несучої спроможності гнучких оболонок їх загальну жорсткість можна збільшити за рахунок більш раціонального розподілу матеріалу (маси) в об'ємі оболонки. Одним із таких способів є проектування оболонки зі змінною товщиною. Цей підхід вимагає застосування відповідних методів розрахунку на стійкість оболонок змінної товщини. Для гнучких оболонок вплив на їхню стійкість законів розподілу гладко-змінної товщини обшивки мало досліджений [25, 26]. Це пояснюється ускладненнями, які вносить змінна товщина в розробку геометрично нелінійних методів розрахунку на стійкість оболонок.

На прикладах жорстко затиснутих вздовж контуру пологих панелей обертання лінійно-змінної товщини (рис. 3, а) виконаний порівняльний аналіз розв'язків з результатами, що наведені в роботі Б.Я.Кантора [26] В ній геометрично нелінійна задача теорії пологих оболонок розв'язана в осесиметричній постановці варіаційним методом. Математична модель пологої панелі представлена як пластина з початковим прогином, а метрика криволінійної поверхні замінена метрикою площини. Технічна теорія побудована на гіпотезі прямих нормалей, у межах якої розглянуті згин, стійкість та закритична поведінка пологих оболонок з лінійним розподілом товщини за меридіаном.

Результати досліджень панелі подані з використанням наступних безрозмірних параметрів, які прийняті в [26]

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h_{\bar{r}=0}} \right)^4, \quad \bar{u}^l = \frac{u^l}{h_{\bar{r}=0}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{h}(\bar{r}) = \frac{h(\bar{r})}{h_{\bar{r}=0}}, \quad k = \frac{H}{h_{\bar{r}=0}}, \quad (2)$$

де $h(\bar{r})$ – функція товщини панелі; $h_{\bar{r}=0}$, $h_{\bar{r}=1}$ – товщини в центрі та на краю панелі.

Розподіл товщини панелі задається лінійною функцією (рис. 3, б)

$$\bar{h}(\bar{r}) = 1 + (b_o - 1)\bar{r}, \quad (3)$$

де безрозмірний параметр $b_o = h_{\bar{r}=1}/h_{\bar{r}=0}$ визначає ступінь змінності товщини панелі за меридіаном. На рисунках кожному типу змінної товщини відповідає свій значок.

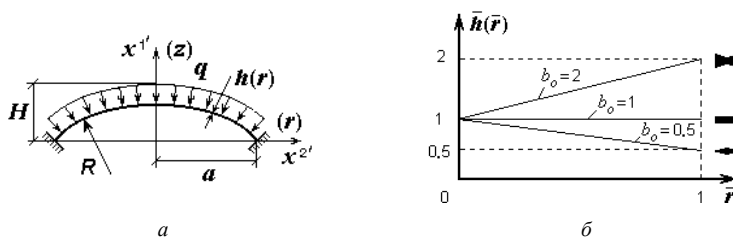


Рис. 3. Сферична панель лінійно-змінної товщини

Оболонки навантажуються рівномірним тиском інтенсивністю q . При дослідженні сферичних панелей лінійно-змінної товщини прийняті наступні вихідні данні: $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.3$, $a = 1$ м, $h_{\bar{r}=0} = 0.01$ м, $k = 5$, $H = 0.05$ м, $R = 10.025$ м. Збіжність розв'язків для панелей лінійно-змінної товщини подібна до збіжності розв'язків для панелей сталої товщини. Розглядається, як і в роботі [26], осесиметричне деформування оболонок. З врахуванням можливої появи у закритичній області складних форм деформування за розрахункову для чверті оболонки прийнята сітка 20×20 SE.

Виконаний у [21, 22] порівняльний аналіз нелінійних розв'язків МССЕ та роботи [26] показав їх добрий збіг на всіх ділянках діаграм “навантаження-прогин”. Нижче проведено порівняння нелінійних розв'язків МССЕ і ПК ЛПА в діапазоні зміни параметра $1 \leq b_o \leq 2.5$, що відповідає потовщенню оболонки від центра до краю (рис. 4, рис. 5, табл. 3). При розрахунку за ПК ЛПА сферична панель лінійно-змінної товщини, як і в попередній задачі, моделювалася тими же двома типами SE. Через неможливість реалізації в ПК ЛПА лінійної зміни товщини розглядувані оболонки моделювалися, як панелі зі ступінчато-змінною товщиною. Відповідно ступінчато змінювалася і жорсткість оболонок. Точність апроксимації змінної товщини панелі забезпечило застосування достатньо густої сітки.

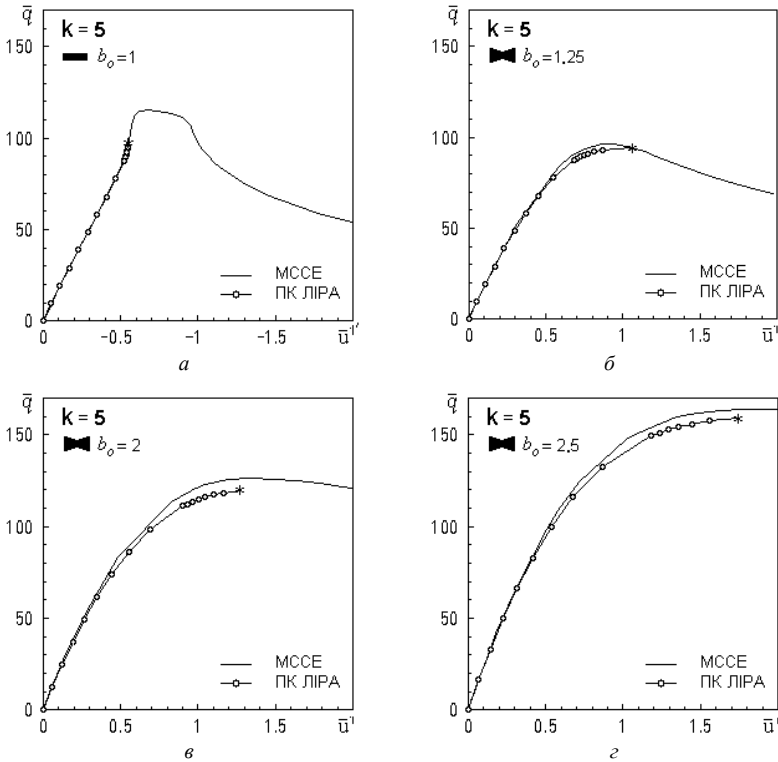


Рис. 4. Порівняння діаграм “навантаження-прогин” для оболонок лінійно-змінної товщини

Спостерігається повний збіг розв'язків у докритичній області та незначне розходження результатів у верхній критичній точці. ПК ЛІРА визначив для панелі сталої товщини ($b_0=1$) кінцеву точку $\bar{q} = \bar{q}^* = 94.9$ (точку можливого розгалуження розв'язку), як критичну. За МССЕ у всіх випадках, за винятком панелі сталої товщини, в докритичній області відсутні точки розгалуження. Для панелі сталої товщини критичне навантаження $\bar{q}_{кр}^g = 115.3$. При цьому при уточненому визначенні точки розгалуження (через внесення збурення у вихідну форму оболонки) отримано величину $\bar{q} = \bar{q}^* = 94.40$, що складає розбіжність Δ у 0.53%.

Таблиця 3

$b_o=1$			$b_o=1.25$		$b_o=2$		$b_o=2.5$	
$\bar{q}_{кр}^e$	\bar{q}^*	\bar{u}^{1*}	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}^{1*e}_{кр}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}^{1*e}_{кр}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}^{1*e}_{кр}$
МССЕ								
115.3	94.40	0.539	96.37	0.944	126.20	1.343	164.03	1.921
ПК ЛІРА								
94.90	94.90	0.547	94.03	1.062	128.00	1.541	160.84	1.217
$\Delta, \%$								
-17.69	0.53	1.48	-2.43	12.50	1.43	14.74	-1.94	-36.65

Втрата стійкості панелей лінійно-змінної товщини (рис. 5, а) характеризується їх проклацуванням у полюсі. Спостерігається гарний збіг форм деформування. Втрата стійкості панелі сталої товщини відбувається з утворенням кільцевої ум'ятини посередині меридіану (крива $b_o=1$). На рис 5, б демонструється відмінність форм деформування, що отримані за МССЕ, в точці розгалуження ($\bar{q}^*=93.63$) та у верхній критичній ($\bar{q}_{кр}^e=115.3$). Між цими точками відмічається зміна форми деформування.

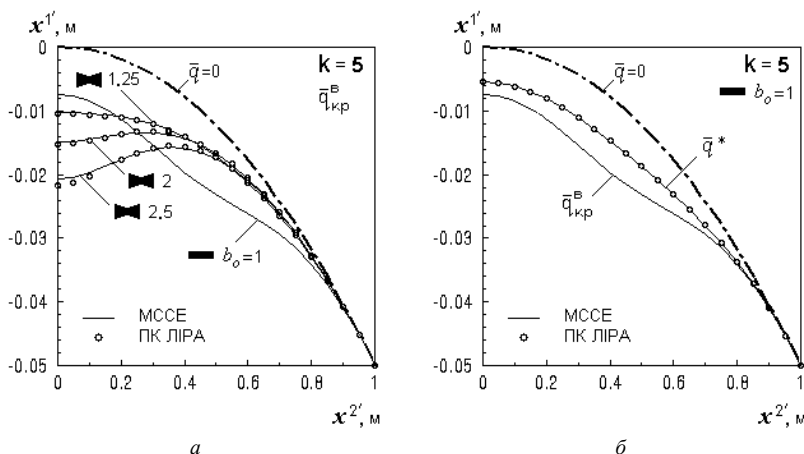


Рис. 5. Порівняння форм деформування

Порівняння результатів розрахунків за МССЕ та ПК ЛПА продемонстрував на розглянутих конструкціях гарний збіг лінійних і нелінійних розв'язків у докритичній області та в момент втрати стійкості. Це засвідчує можливість застосування ПК ЛПА при розв'язанні геометрично нелінійної задачі стійкості для оболонок сталюї та лінійно-змінної товщини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюцкий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. - 480 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Збіжність і точність розв'язків для просторового скінченного елемента в задачах нерівномірного нагріву стержнів і балок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006. - Вип. 80. - С. 54-65.
3. *Сахаров А.С., Соловей Н.А.* Исследование сходимости метода конечных элементов в задачах пластин и оболочек. - В кн.: Пространственные конструкции зданий и сооружений, вып. 3, М., Стройиздат, 1977, с. 10-15.
4. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатощарових поребриних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
5. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Нелинейные уравнения МКЭ в задачах устойчивости неоднородных оболочек // Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. С. 40-44.
6. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
7. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности, 1999. - N 5. - С. 96-102.
8. *Соловей М.О.* Модифікований просторовий скінченний елемент для моделювання тонких неоднорідних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006 р. - Вип. 80. - С. 96-113.
9. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.
10. ANSYS User's Manual for revision 5.6. Volume I. Procedure; Volume II. Command; Volume III. Elements; Volume IV. Theory.
11. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Window. - М.: ДМК Пресс, 2003. - 448 с.
12. *Алямовский А.А.* SolidWorks/COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов. - М.: ДМК Пресс, 2004. - 432 с.
13. *Карпиловский В.С., Крикунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А.* SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD. - М.: АСВ, 2004. - 591 с.

14. ЛИРА 9.2. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие. / Е.Б. Стрелец-Стрелецкий, Ю.В. Гензерский, М.В. Лазнюк, Д.В. Марченко, В.П. Титок. – К.: «Факт», 2005. – 146 с.
15. *Минькович В.И., Кравец В.И.* Комплекс программ "Фронт" для расчета МКЭ тонкостенных подкрепленных пространственных конструкций на ЕС ЭВМ // Комплексный расчет зданий и сооружений с применением ЭВМ. - К.: Киев. инж. строит. ин-т, 1978. - С. 73-76.
16. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир. - 1975. - 541 с.
17. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1974. - 344 с.
18. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гладких ребристих та послаблених вирізами гнучких пологих панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2000 р. - Вип.67. - С. 92-103.
19. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Стійкість гнучких пологих панелей ступінчато-змінної товщини // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Зб. наук. праць. - Спец. вип. - Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2001. - С. 7-11.
20. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості гнучких оболонок при різних законах нерівномірного нагріву // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2002 р. - Вип. 70. - С. 104-109.
21. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
22. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Вплив змінної товщини на стійкість пологих панелей при дії рівномірного тиску // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Зб. наук. праць. – Вип. 4(27).- Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2003. - С. 15-20.
23. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2003 р. - Вип. 72. - С. 83-96.
24. *Гондык А.В., Сахаров А.С.* Программный комплекс для автоматизации прочностных расчетов оболочечных и комбинированных систем "АПРОКС" // XVII Междунар. конф. " Мат. моделирование в механике сплошных сред на основе методов гранич. и конеч. элементов", 22-25 июня, 1999 г., Санкт-Петербург: Тез. докл. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999. - С. 56-62.
25. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.
26. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. - К.: Наукова думка, 1974. - 136 с.

Отримано 18.05.09

Сравниваются результаты расчетов упругих тонкостенных конструкций, которые выполнены по моментной схеме конечных элементов, по разным программным комплексам и по методикам других авторов. Выяснены возможности использования комплекса ЛИРА при решении геометрически нелинейных задач устойчивости тонких оболочек постоянной и линейно-переменной толщины.

The outcomes of the analyses of elastic thin-walled constructions are compared. These outcomes are carried out by the moment scheme of finite elements, by different programming complexes and by

techniques of other authors. The possibilities of using the complex LIRA have been learned by solving geometrically nonlinear tasks of a stability of thin shells with a constant and linearly-variable thickness.

УДК 539.3

О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

ВПЛИВ КРОКУ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ НА ОТРИМАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЇЇ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ

Виконано чисельне дослідження динамічної поведінки двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності. Показано, як характеристики режиму коливальної системи, отриманого в результаті інтегрування рівнянь руху, залежать від вибору кроку інтегрування цих рівнянь.

1. Постановка проблеми

Віброударні системи досить широко застосовуються в техніці, тому дослідження динамічних процесів у таких системах представляє чималий інтерес [1]. Для фахівців, що займаються створенням устаткування для сучасного будівельного виробництва такі дослідження також актуальні [2].

У статті розглядається двомасова система з двома ступенями вільності, що відповідає віброударному майданчику, який використовується у будівельному виробництві для ущільнення бетонних сумішей і формування бетонних виробів [2-4].

Найпростіший варіант моделі двомасового віброударного майданчика без закріплення форми має вигляд (рис.1):

Стіл майданчика масою m_1 кріпиться до фундаменту лінійними віброізолюючими пружинами із сумарною жорсткістю k_1 . Двигуни, встановлені під столом, генерують збурюючу силу $F(t)$. До столу кріпиться пружна прокладка (обмежник коливань) товщиною h з лінійною жорсткістю k_0 , на якій лежить форма з бетонною сумішшю масою m_0 . Форма до прокладки не кріпиться і може від неї відриватися.

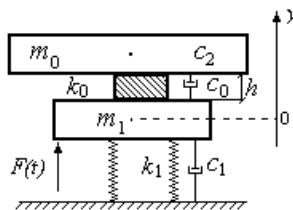


Рис. 1. Розрахункова схема

Зі стану рівноваги форма і стіл майданчика починають спільний вертикальний рух уздовж осі y і рухаються так доти, поки форма не відірветься від столу (прокладки). У стані відриву форма і стіл рухаються роздільно до того моменту, поки форма не впаде на прокладку.

Відбувається удар, під час якого тіла знову рухаються спільно до моменту відриву форми від прокладки і т.д. [5,6].

Зовнішнє навантаження від вібраторів вважається гармонічним $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Сили пружності мають вигляд: у прокладці $F_{k0} = k_0 \Delta l_0 = k_0 [h - (y_0 - y_1)]$, у віброізолюючих пружинах $F_{k1} = k_1 \Delta l_1 = k_1 (y_1 - \lambda_{ст})$, де $\lambda_{ст} = \frac{P_0 + P_1}{k_1}$, $\lambda_{ст}$ – статична деформація пружин. Вводимо три сили опору, які прийняті пропорційними першої ступені швидкості: у бетонній суміші $F_{демп2} = c_2 \dot{y}_0$, у прокладці $F_{демп0} = c_0 \dot{y}_0$, у віброізолюючих пружинах $F_{демп1} = c_1 \dot{y}_1$.

Коли форма падає на стіл майданчика (на прокладку), між ними виникає удар. У [5] показано, що в розглянутій моделі удар найкраще моделювати силою контактної взаємодії $F_{уд} = F_{кон}$, що описується законом Герца [7-9]:

$$F_{уд} = F_{кон} = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (1)$$

де $\alpha(t)$ – відносне зближення тіл, $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$, K - константа Герца

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1) \sqrt{A+B}},$$

q , A і B – константи, що характеризують місцеву геометрію зони контакту,

$$\delta_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0 \pi}, \quad \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi},$$

μ_i і E_i – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл.

Спільний рух столу з формою до її першого відриву описується рівняннями:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \omega_0^2 [h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2) \omega_0 \dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2 \chi [h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1 \omega_1 \dot{y}_0 + 2\xi_0 \omega_0 \chi \dot{y}_0 + \frac{1}{m_1} F(t), \end{aligned} \quad (2)$$

де введені позначення

$$\frac{k_0}{m_0} = \omega_0^2, \quad \frac{k_1}{m_1} = \omega_1^2, \quad \frac{c_0}{m_0} = 2\xi_0\omega_0, \quad \frac{c_1}{m_1} = 2\xi_1\omega_1, \quad \frac{c_2}{m_0} = 2\xi_2\omega_0, \quad \frac{m_0}{m_1} = \chi, \quad (3)$$

y_0, y_1 – поточні координати форми і столу відповідно.

Початкові умови при $t = 0$ мають вигляд:

$$\varphi = 0; \quad y_1 = 0; \quad \dot{y}_1 = 0; \quad y_0 = h - \lambda_{cm}; \quad \dot{y}_0 = 0. \quad (4)$$

Роздільний рух тіл описується рівняннями

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g - 2\xi_2\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння спільного руху під час удару мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \frac{K}{m_0} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \frac{K}{m_1} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Числові характеристики майданчика, що відповідають нормативній літературі [3,4], представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Маса форми з бетоном m_0 , кг	15000,0
Маса столу майданчика m_1 , кг	7400,0
Жорсткість прокладки k_0 , Н/м	$3,0 \cdot 10^8$
Сумарна жорсткість віброізолюючих пружин k_1 , Н/м	$1,278 \cdot 10^6$
Товщина прокладки h , м	0,0275
Амплітуда зовнішнього навантаження F_0 , Н	$2,44 \cdot 10^5$
Частота зовнішнього навантаження ω , Гц	25,0
Початкова фаза зовнішнього навантаження φ , рад	0,0

Модель, що досліджується в роботі, має деякі особливості, а саме: велику масу падаючого тіла – форми з бетоном; м'якість, піддатливість однієї з контактуючих поверхонь – прокладки; відрив одного тіла (форми) від іншого (прокладки) та роздільний рух тіл віброударної системи.

Рівняння руху тіл віброударного майданчика (6) крім параметрів приведених в таблиці 1, містять: коефіцієнти демпфірування ξ_0, ξ_1, ξ_2 , які визначають сили опору; модулі пружності E_0 і E_1 та коефіцієнти Пуассона μ_0 і μ_1 обох тіл, що співударяються; константи A, B та q , які характеризують місцеву геометрію контактуючих поверхонь. Останні три групи параметрів входять в опис сили контактної взаємодії Герца (1) і таким чином зв'язані зі способом моделювання удару.

Вплив вказаних параметрів на динаміку віброударної системи описаний в [6, 10]. Зафіксуємо значення цих параметрів (табл. 2):

Таблиця 2

Модуль пружності форми $E_0, 10^8 \text{Н/м}^2$	2000
Коефіцієнт Пуассона форми μ_0	0,3
Коефіцієнт Пуассона прокладки μ_1	0,4
Константи A, B , що характеризують місцеву геометрію зони контакту, $1/\text{м}^2$	$A=B=0,1$
q	0,318
Коефіцієнт демпфірування в бетонній суміші ξ_2	0,03
Коефіцієнт демпфірування в прокладці ξ_0	0,02
Коефіцієнт демпфірування у віброізолюючих пружинах ξ_1	0,02

2. Дослідження залежності отриманого режиму коливань від кроку інтегрування

Рівняння руху віброударної системи (2,5,6) чисельно інтегруються з певним кроком, який вибирається таким чином: задається число точок інтегрування $N_{\text{тос}}$ на одному періоді зовнішнього навантаження, тоді крок інтегрування обчислюється як $\Delta t = T / N_{\text{тос}}$. Тут T – період зовнішнього навантаження $F(t)$, $T = 2\pi/\omega$.

Дослідження показали, що значення кроку інтегрування рівнянь руху віброударної системи помітно впливає на характер отриманих результатів. Така чутливість пояснюється по-перше, суттєвою нелінійністю віброударної системи, по-друге, її конструктивними особливостями, які обговорювались раніше.

У [6] були проведені дослідження впливу модуля пружності прокладки E_1 на динамічну поведінку віброударного майданчика. Відомо, що модулі пружності різних гум (E_1) на чотири порядки менше за модуль пружності сталі E_0 . Але при таких значеннях E_1 форма і стіл майданчика рухаються спільно увесь час. Відрив форми від прокладки не відбувається, що не відповідає задачі, яка досліджується [6]. Тому був обраний більший модуль пружності прокладки E_1 , і був проаналізований його вплив на режим коливань. Всі розрахунки виконувались при певному кроці інтегрування, а саме при $N_{loc}=250$, тобто крок інтегрування мав значення $\Delta t=0,0001600811543$ с. Було встановлено, що при цьому в діапазоні значень модуля пружності прокладки

$$4,35 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2 < E_1 < 5,70 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2 \quad (\mu_1=0,4) \quad (7)$$

отримуємо субгармонічний $2T$ -періодичний двоударний режим коливань. Субгармонічний режим коливань періоду nT з k ударами за цикл називатиме (n, k)-періодичним [10]. Тобто в діапазоні (7) при $N_{loc}=250$ в системі одержуємо (2,2)-періодичний режим коливань. Подивимось тепер, яку поведінку має система при зміні значень крока інтегрування рівнянь руху системи.

Спочатку розглянемо поведінку системи у випадках, коли модуль пружності прокладки має значення поза діапазоном (7). При $E_1=3 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2$ маємо таку картину динамічного стану системи. При відносно великому кроці інтегрування $N_{loc}=100$ ($\Delta t=0,0004002028858$ с) отримуємо на перших секундах рух, близький до усталеного (3,1)-періодичного режиму (рис. 2). Фазова траєкторія стола при цьому має три характерних кільця (рис. 2,г).

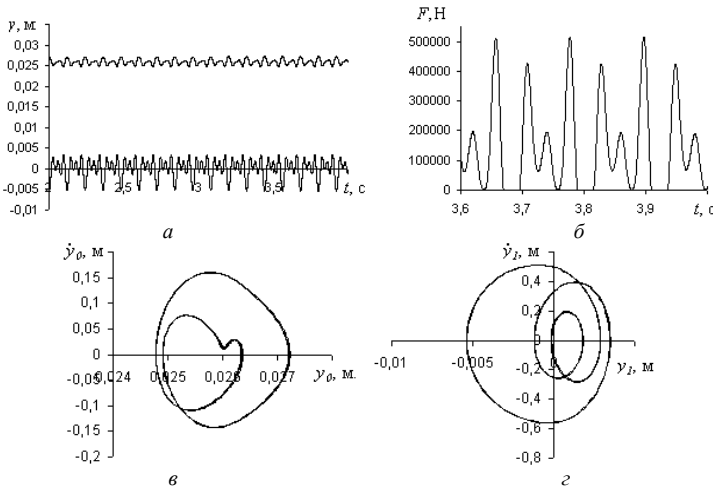


Рис. 2

При значенні кроку інтегрування $N_{loc}=100$ (3,1)–періодичні коливання в перехідному режимі (рис. 2) змінюються в усталеному (2,2)–періодичним режимом (рис. 3). Фазова траєкторія при цьому має два характерних кільця (рис. 3,г).

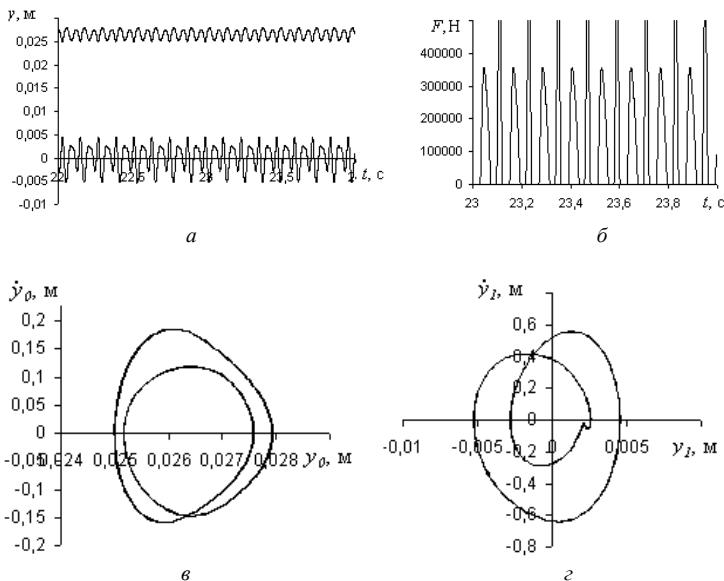


Рис. 3

При тому ж самому значенні кроку інтегрування $N_{loc}=100$, але значенні модуля пружності прокладки $E_1=4 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ отримуємо субгармонічний $3T$ -періодичний режим з двома ударами за період коливань ((3,2)–періодичний режим) як в перехідному режимі, так і в усталеному (рис. 4).

При значенні кроку інтегрування $N_{loc}=200$ при обох значеннях модуля пружності прокладки отримуємо усталений одноударний гармонічний режим коливань ((1,1)–періодичний режим) (рис. 5). Відмітимо, що у перехідному процесі в обох випадках був одержаний $3T$ –періодичний субгармонічний режим коливань з двома ударами за період - (3,2)–періодичний режим.

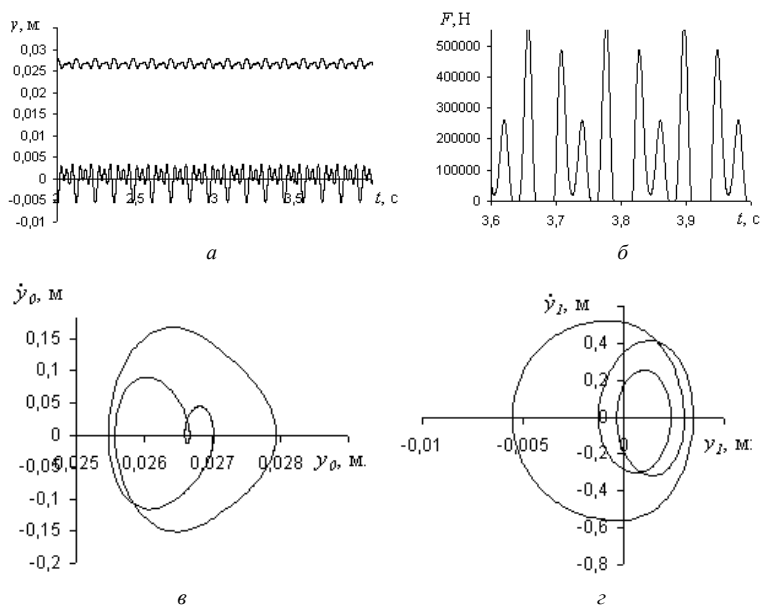


Рис. 4

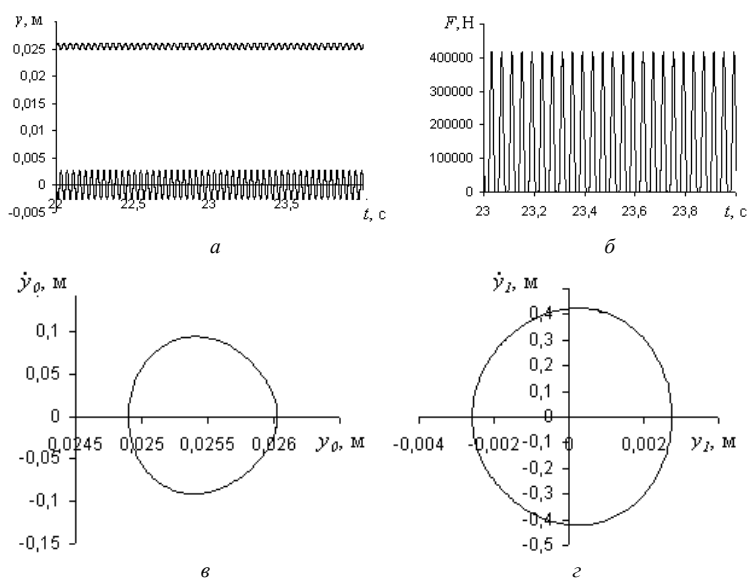


Рис. 5

Субгармонічність $3T$ -періодичних та $2T$ -періодичних режимів коливань наочно демонструється графіками, що поєднують сили зовнішнього навантаження та сили контактної взаємодії для цих режимів (рис. 6, б, в). На графіках тонкою лінією зображена зовнішня сила $F(t)$, товстою – контактна $F_{\text{кон}}(t)$. На рис. 6, а для порівняння зображені такі самі сили для гармонічного T -періодичного режиму ((1,1)–періодичного режиму).

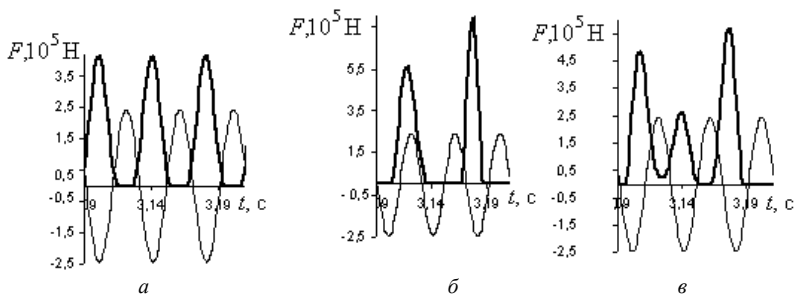


Рис. 6

При подальшому зменшенні кроку інтегрування в системі швидко встановлюється одноударний гармонічний режим коливань.

При більших значеннях модуля пружності прокладки $E_1 \geq 6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ вже при великому кроці інтегрування $N_{\text{toc}}=100$ ($\Delta t=0,0004002028858 \text{ с}$) в системі швидко встановлюється одноударний гармонічний режим (навіть при $N_{\text{toc}}=50$). На рис. 7 приведені результати для $E_1=6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ та $N_{\text{toc}}=100$.

Повернемося тепер до розгляду поведінки системи у випадку, коли модуль пружності прокладки знаходиться в діапазоні значень (7). При $E_1=5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ і близьких до нього величин E_1 відповідно діапазону (7) величина кроку інтегрування, необхідного для отримання одноударного гармонічного режиму значно менша. Як було сказано вище і описано в [6], при $N_{\text{toc}}=250$ ($\Delta t=0,0001600811543 \text{ с}$) для $E_1=5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ в системі встановлюється субгармонічний $2T$ -періодичний режим коливань з двома ударами за період коливань ((2,2)–періодичний режим). Така ж сама картина спостерігається при $N_{\text{toc}}=300$. Лише при $N_{\text{toc}}=330$ ($\Delta t=0,0001212736018 \text{ с}$) після 2-ої – 3-ої секунди в системі встановлюється одноударний гармонічний режим коливань ((1,1)–періодичний режим). При більшому числі точок інтегрування (тобто меншому кроці інтегрування) перехідний процес коротше, ми швидше отримуємо усталений одноударний гармонічний режим. Відмітимо, що

при великому кроці інтегрування $N_{ioc}=100$ ($\Delta t=0,00040020288586$ с) також отримуємо одноударний гармонічний режим, близький до усталеного, але при $N_{ioc}=125$ ($\Delta t=0,00032101623086$ с), $N_{ioc}=200$ ($\Delta t=0,0002001014429$ с) одержуємо субгармонічний $2T$ -періодичний режим коливань з двома ударами за період коливань ((2,2)–періодичний режим).

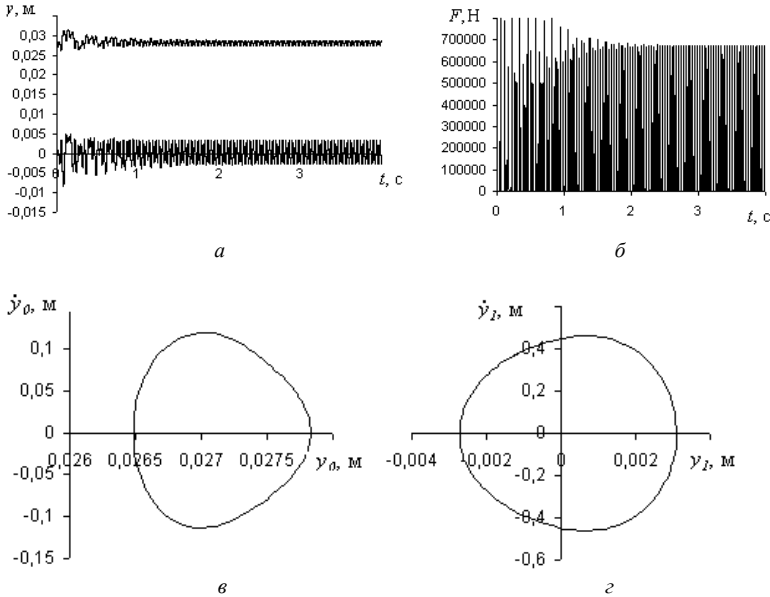


Рис. 7

Описані вище результати представлені в таблиці 3, яка дає наочну картину впливу кроку інтегрування на отримання (n, k) - періодичного режиму коливань віброударного майданчика.

Таблиця 3

N_{ioc}	50	100	125	200	250	300	330	600
$E_1=3 \cdot 10^8 \text{ Н/М}^2$		(3,1)-перех. (2,2)-уст.		(3,2)-перех. (1,1)-уст.	(1,1)	(1,1)		(1,1)
$E_1=4 \cdot 10^8 \text{ Н/М}^2$		(3,2)-перех. (3,2)-уст.		(3,2)-перех. (1,1)-уст.		(1,1)		(1,1)
$E_1=5 \cdot 10^8 \text{ Н/М}^2$		(1,1)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(2,2)	(1,1)	(1,1)
$E_1=6 \cdot 10^8 \text{ Н/М}^2$	(1,1)	(1,1)		(1,1)	(1,1)	(1,1)		(1,1)

3. Висновки

Проведені дослідження показали, що від вибору кроку інтегрування може залежати характер (субгармонічність, багатударність) отриманого в результаті чисельного інтегрування систем руху режиму коливань віброударної системи. Така чутливість віброударної системи, що розглядається, до кроку інтегрування пояснюється її суттєвою нелінійністю і, зокрема, особливостями її конструкції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.:Наука, 1978. – 352 с.
2. *Назаренко І.І.* Машини для виробництва будівельних матеріалів: Підручник.-Киев: КНУБА, 1999.- 488 с.
3. *Гусев Б.В., Зазимко В.Г.* Вибрационная технология бетона. – К.: Будівельник, 1991. – 160 с.
4. Рекомендации по вибрационному формированию железобетонных изделий//НИИЖБ. – М., 1986. – 78 С.
5. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – (Здана до друку).
6. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Аналіз динаміки ударно-вібраційного майданчика при зміні його параметрів// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2008.-Вип.82 – сс. 71-82.
7. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
8. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.
9. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
10. *Lamarque C. H., Janin O.* Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal// Journal of Sound and Vibration. - 2000. № 235(4). – P. 567-609.

Отримано 19.05.09

Выполнено численное исследование динамического поведения двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы. Показано, как характеристики режима колебаний системы, полученного в результате интегрирования уравнений движения, зависят от выбора шага интегрирования этих уравнений.

The numeric dynamic investigation of two-mass impact vibration system with two freedom degrees is fulfilled. It is shown how the vibration regime characteristics, which were deceived after the integration of motion equations depend from the integration step.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

О.В. Герашенко, канд. техн. наук

МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ МАСИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ТРІЩИНАМИ

Розглядається чисельна методика дослідження гармонічних коливань пружних масивних елементів конструкцій з тріщинами. Проведена регуляризація і вказано спосіб обчислення гіперсингулярного граничного інтегралу, який входить до складу інтегрального представлення для напружень. Розв'язана тестова задача про динамічне навантаження пружного простору, послабленого круговою тріщиною.

В задачах про деформування масивних елементів конструкцій, послаблених тріщинами, місця концентрації напружень локалізовані і відомі заздалегідь. Цей факт зумовлює привабливість ідеї про застосування для дослідження таких об'єктів методу потенціалу. В той же час відомо [1], що системи граничних інтегральних рівнянь (ГІР), отримані на основі формули Соміліани для переміщень, в задачах про НДС масивів з тріщинами дуже часто є виродженими. Тому в таких випадках перевага надається алгоритмам, що базуються на інтегральних представленнях для напружень в граничних точках розрахункової області. Недоліком таких систем є висока сингулярність інтегральних рівнянь, що значно ускладнює процедуру чисельного розв'язання задачі. В задачах статички для обчислення гіперсингулярних інтегралів традиційно застосовують два прийоми регуляризації. Перший з них базується на перетворенні підінтегрального виразу із застосуванням теореми Стокса [2], [3], в результаті чого знижується порядок особливості ядра, а невідомі функції граничних переміщень замінюються на похідні за дотичними до поверхні тіла напрямками. Другий підхід використовує виключення постійної складової у виразі функції щільності за допомогою переміщення тіла як жорсткого цілого, після чого потреба в обчисленні гіперсингулярної частини відповідного інтегралу зникає. Нажаль, константа не є розв'язком системи диференціальних рівнянь, яка відповідає коливанням пружного масиву, тому в задачах динаміки цей прийом використати не можливо. В той же час застосування теореми Стокса в таких задачах приводить до надто складних інтегро-диференціальних рівнянь, невідомими в яких є як переміщення, так і їх дотичні похідні.

В роботі [4] використана наступна процедура отримання гіперсингулярного ГІР для задачі про гармонійні коливання пружного тіла. Замість вихідної розрахункової області Ω з границею Γ розглядаємо допоміжну область Ω_0 , яку отримуємо із заданої за допомогою виключення з останньої малого околу полюсу $x_0 \in \Gamma$ (рис. 1). При цьому вважаємо, що $\tau \cdot x_0$ лежить на гладкій частині Γ , а Γ_s – частина сфери радіусу ε з центром в x_0 .

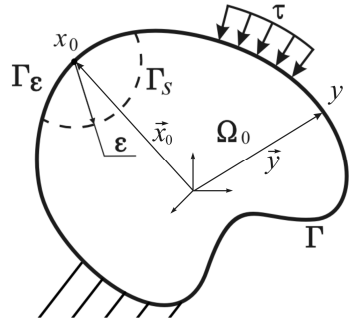


Рис.1. Утворення допоміжної області Ω_0

По відношенню до області Ω_0 точка x_0 є зовнішньою, тому формула Соміліани для напружень набуває вигляду [5]

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y = 0, \quad \vec{x}_0, \vec{y} \in \Gamma, \quad (1)$$

де через $u_k(\vec{y})$ і $\tau_k(\vec{y})$ позначені компоненти векторів переміщень та напружень; вирази для ядер $D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y})$ і $S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y})$ наведені в [4].

Зауважимо, що яким би малим не був радіус ε , полюс x_0 завжди лежить поза Ω_0 і тому при граничному переході справедливність тотожності (1) не порушується:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (2)$$

Будемо вважати, що переміщення $u_j(y)$ поблизу точки x_0 можна представити у вигляді

$$u_j(\vec{y}) = u_j(\vec{x}_0) + \frac{\partial u_j(\vec{x}_0)}{\partial x_m} (y_m - x_{0m}) + O(r^{1+\alpha}). \quad (3)$$

В свою чергу

$$\frac{\partial u_j(\bar{y})}{\partial y_m} = \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} + O(r^\alpha), \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}(\bar{y}) = \sigma_{ij}(\bar{x}_0) + O(r^\alpha), \quad (5)$$

де r – відстань між точками \bar{x}_0 і \bar{y} .

Оскільки при $\varepsilon \rightarrow 0$ поверхню Γ_ε можна вважати півсферою, то після інтегрування по Γ_ε вираз (2) набуде наступного вигляду [4,6]:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(\bar{x}_0) = \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (6)$$

Тут використані позначення

$$\int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

тобто $\int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$ - це головне за Коші значення невластного

інтегралу $\int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$, тоді як $\int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$ - це скінченна

за Адамаром [7] частина невластного інтегралу $\int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y$. За

такого тлумачення невластні інтеграли можуть бути визначені чисельно після гранично-елементної дискретизації поверхні розрахункової області.

Співвідношення (6) є гіперсингулярним ГІР, розв'язок якого дозволяє визначити незадані граничні умови і перейти до аналізу НДС пружного тіла.

Розглянемо задачу про коливання пружного простору, послабленого плоскою тріщиною. Гармонічне нормальне навантаження симетрично прикладене до берегів тріщини. Вісь x_3 декартової системи координат спрямуємо вздовж нормалі до площини, в якій розташована тріщина. Симетрична половина розрахункової області показана на рисунку 2.

В силу симетрії ГР (6) набуває наступного вигляду:

$$\sigma_{33}(\bar{x}_0) = -\int_{\Gamma} \Delta u_3(\bar{y}) S_{333}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (9)$$

де Δu_3 - різниця між вертикальними переміщеннями берегів тріщини; Γ - поверхня одного з берегів тріщини.

Крім того, оскільки точки \bar{x}_0, \bar{y} лежать в одній площині, ядро $S_{333}(\bar{x}_0, \bar{y})$ визначається таким чином:

$$S_{333} = -\frac{\mu}{4\pi r^3} \left\{ 4 \exp(z_2) [z_2 - 4 + 9z_2^{-1} - 9z_2^{-2}] - 4 \exp(z_1) [z_1^2 - z_1 + 1] + \right. \\ \left. + 4\beta \exp(z_1) [z_1^2 - 2z_1 + 5 - 9z_1^{-1} + 9z_1^{-2}] + \beta^{-1} \exp(z_1) z_1^2 \right\}, \quad (10)$$

де $z_k(r) = \frac{i\omega r}{C_k}$, $k=1,2$; $\beta = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$; $r = \sqrt{(x_k - y_k)(x_k - y_k)}$; ω - частота коливань; λ і μ - константи Ляме; C_1 та C_2 - швидкості розповсюдження хвиль розширення та викривлення відповідно; $C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$; $C_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$; ρ - густина пружного середовища.

Коефіцієнти алгебраїчного аналога системи ГР обчислюються за формулою

$$a_{kj} = \int_{\Delta\Gamma_j} \varphi_j S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (11)$$

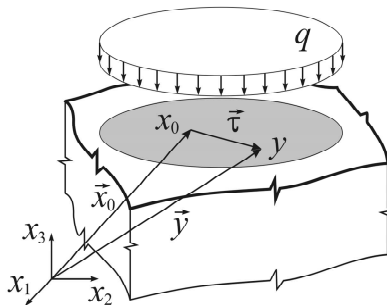


Рис.2. Простір з тріщиною нормального відриву

де φ_j - функція форми для переміщення вузла \bar{x}_j ; $\Delta\Gamma_j$ - граничний елемент (ГЕ), на якому розташований j -й вузол.

Якщо полюс \bar{x}_k не лежить на тому ж граничному елементу, по якому здійснюється інтегрування, то визначення a_{kj} за допомогою (11) не викликає утруднень. В протилежному випадку знаходження a_{kj} зводиться при кусочно-квадратичній апроксимації невідомих до обчислення інтегралів

$$\oint_{\Delta\Gamma_j} S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad \oint_{\Delta\Gamma_j} r_{,l} r S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad \oint_{\Delta\Gamma_j} r_{,l} r_{,m} r^2 S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (12)$$

В полярній системі координат, пов'язаній з полюсом \bar{x}_k , інтеграли (12) можуть бути визначені наступним чином:

$$\oint_{\Delta\Gamma_j} S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^{t(\theta)} S_{333}(r) r dr d\theta + \int_{\Gamma_s} S_{333}(\varepsilon) d\Gamma_y \right\}, \quad (13)$$

$$\oint_{\Delta\Gamma_j} r_{,l} r S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^{t(\theta)} S_{333}(r) r^2 dr \cos(\theta) d\theta \right\}, \quad (14)$$

$$\oint_{\Delta\Gamma_j} r_{,l} r_{,m} r^2 S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^{t(\theta)} S_{333}(r) r^3 dr \cos^2(\theta) d\theta \right\}, \quad (15)$$

де $t(\theta)$ - відстань від полюса \bar{x}_k до точки, що лежить на контурі і визначається кутом θ .

Внутрішні інтеграли по r можна взяти аналітично:

$$F_0(r) = \int S_{333}(r) r dr = \frac{\mu}{\pi r} \left\{ \exp(z_2) \left[3z_2^{-1} - 3z_2^{-2} - 1 \right] + \exp(z_1) \left[z_1 - 1 \right] - \beta \exp(z_1) \left[z_1 - 2 + 3z_1^{-1} - 3z_1^{-2} \right] - 0.25\beta^{-1} \exp(z_1) z_1 \right\}, \quad (16)$$

$$F_1(r) = \int S_{333}(r) r^2 dr = \frac{\mu}{2\pi} \left\{ \exp(z_2) \left[9z_2^{-1} - 9z_2^{-2} - 1 \right] - Ei(z_2) + \exp(z_1) \left[z_1 (2 - 0.5\beta^{-1}) - 4 + 0.5\beta^{-1} \right] - \beta \exp(z_1) \left[2z_1 - 6 + 9z_1^{-1} - 3z_1^{-2} \right] + (2 - \beta) Ei(z_1) \right\}, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned}
 Ei(x) &= \int \frac{\exp(x)}{x} dx, \\
 F_2(r) &= \int S_{333}(r)r^3 dr = \frac{\mu r}{\pi} \left\{ \exp(z_2)z_2^{-1} [5 - 9z_2^{-1} - z_2] + \right. \\
 &+ \exp(z_1)z_1^{-1} [z_1^{-2} - 3z_1 + 4] - \beta \exp(z_1)z_1^{-1} [z_1^2 - 4z_1 + 9 - 9z_1^{-1}] - \\
 &\left. - 0.25\beta^{-1} \exp(z_1)z_1^{-1} (z_1^{-2} - 2z_1 + 2) \right\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

З урахуванням (16) вираз (13) може бути переписаний наступним чином:

$$\oint_{\Delta\Gamma_j} S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} F_0[t(\theta)] d\theta - 2\pi F_0(\varepsilon) + \int_{\Gamma_s} S_{333}(\varepsilon) d\Gamma_y \right\}, \quad (19)$$

При малих значеннях аргументу за допомогою заміни експоненти початковим відрізком степеневого ряду виразу (16) можна надати такого вигляду:

$$F_0(\varepsilon) = \frac{\mu}{\pi \varepsilon} [1 - \beta + z_1\beta - z_2 - z_1\beta^{-1}] + O(\varepsilon). \quad (20)$$

В свою чергу вираз для інтегралу по півсфері, наведений в [4], при прямуючому до нуля радіусі запишеться так:

$$\int_{\Gamma_s} S_{333}(\varepsilon) d\Gamma_y = \frac{2\mu}{\varepsilon} (1 - \beta + z_1\beta - z_2) + O(\varepsilon). \quad (21)$$

Підставимо (19), (20) до (21) і в результаті граничного переходу отримаємо:

$$\oint_{\Delta\Gamma_j} S_{333}(\bar{x}_k, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_0^{2\pi} F_0[t(\theta)] d\theta + 2\mu \frac{i\omega}{C_1} \beta^{-1}. \quad (22)$$

Отже, визначення скінченної за Адамаром частини невластного інтегралу по плоскому фрагменту поверхні зводиться до обчислення регулярного контурного інтегралу.

Далі, з урахуванням (17) перетворимо вираз (14):

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta\Gamma_j} r_{,1} r S_{333}(\vec{x}_k, \vec{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} F_1[t(\theta)] \cos(\theta) d\theta - F_1(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \right\} = \\ &= \int_0^{2\pi} F_1[t(\theta)] \cos(\theta) d\theta \quad . \end{aligned} \quad (23)$$

Таким чином, головне за Коші значення невластного інтегралу по плоскому фрагменту поверхні також виражається через регулярний контурний інтеграл.

Нарешті, за допомогою (18) перетворимо (15):

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta\Gamma_j} r_{,1} r_{,1} r^2 S_{333}(\vec{x}_k, \vec{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} F_2[t(\theta)] \cos^2(\theta) d\theta - F_2(\varepsilon) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right\} = \\ &= \int_0^{2\pi} F_2[t(\theta)] \cos^2(\theta) d\theta - \pi F_2(0) \quad , \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$F_2(0) = \frac{i\mu C_1}{2\omega} [8\beta - 8 + \beta^2] . \quad (25)$$

Отже, обчислення такого невластного інтегралу також не викликає труднощів.

Співвідношення (11)-(25) складають алгоритмічну основу розв'язання за методом граничних елементів задачі про динамічне деформування лінійно-пружного масиву з тріщиною. В результаті розрахунку отримуємо переміщення у вузлах на поверхні тріщини. Аналізуючи величини переміщень у точках, наближених до фронту тріщини, визначаємо динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН).

Як приклад розглянемо задачу про усталені гармонічні коливання пружного простору, послабленого круговою тріщиною, до берегів якої прикладене рівномірно розподілене навантаження. Графіки залежності нормованого КІН від безрозмірного параметру частоти коливань при різних значеннях коефіцієнту Пуассона ν наведені на рисунках 3, 4, 5. Суцільна лінія відповідає значенням, взятим з довідкової літератури [8]. Штриховою лінією з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного апарату на досить розрідженій сітці граничних елементів (4 елементи вздовж радіусу тріщини). Штрих-пунктирна лінія побудована за результатами, знайденими на більш густій сітці (8 елементів вздовж радіусу).

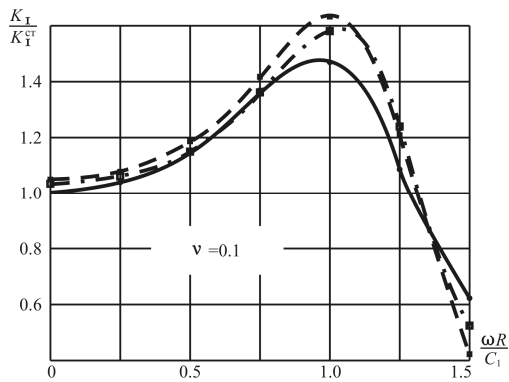


Рис. 3

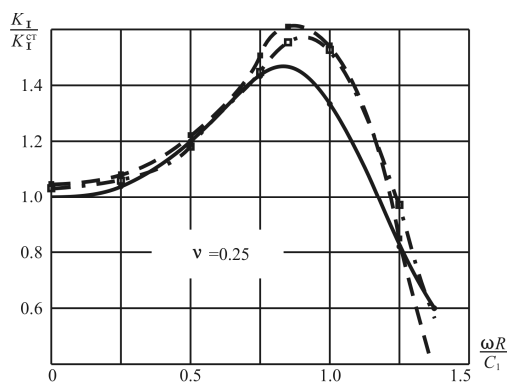


Рис. 4

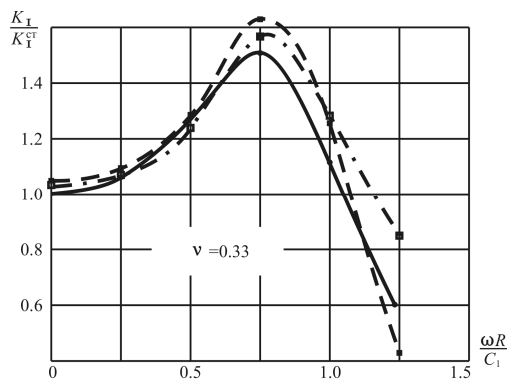


Рис. 5

Наведені результати наочно свідчать про задовільну узгодженість розрахункових та довідкових даних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Cruse T.A.* Recent advances in boundary element analysis methods // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62 (1987), pp. 227-244
2. *Хуторянский Н.М.* Граничные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения второго рода для основной смешанной задачи теории упругости // *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. – 1981. – С.3–13
3. *Sladek V., Sladek J.* Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 17 (1996), pp. 5-18
4. *Ворона Ю.В., Геращенко О.В.* Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – 2007. – Вип. 81.– С.119–134
5. *Кутрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 280 с.
6. *Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolph T.J., Rizzo F.J.* A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *ASME J.of Applied Mechanics*, 59 (1992), pp. 604-614
7. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
8. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ./Под ред. Ю.Мураками.* – М: Мир, 1990. – 1016 с.

Отримано 21.05.09

Рассматривается численная методика исследования гармоничных колебаний упругих массивных элементов конструкций с трещинами. Проведена регуляризация и указан способ вычисления гиперсингулярного граничного интеграла, который входит в состав интегрального представления для напряжений. Решена тестовая задача о динамическом нагружении упруго пространства, ослабленного круговой трещиной.

The numerical technique for analysis of harmonic vibration of three-dimensional elastic solids with cracks is described. The method is proposed for regularization and evaluation of hypersingular boundary integrals that occur in traction boundary integral equations. An example of elastic medium with penny-shaped crack stress analysis is presented to illustrate the technique.

УДК 539.3

І.І. Солодей, канд. техн. наук,

М.О. Вабішевич,

О.І. Гуляр, д-р техн. наук,

О.С. Сахаров, д-р техн. наук

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ В НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ НА ОСНОВІ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ПІДХОДУ

Розглянута методика визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень при використанні J -інтеграла для тіл з тріщинами, що знаходяться під дією динамічного навантаження. Проведено узагальнення метода реакцій для обчислення J -інтеграла на задачі динаміки. На основі тестових досліджень отримані параметри вірогідності та ефективності запропонованого підходу.

Вступ.

Ефективність розв'язання задач механіки руйнування безумовно залежить від методик обчислення параметрів, що визначають напружено-деформований стан (НДС) в околі вершини тріщини. Визнаними основними параметрами механіки руйнування є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) та J -інтеграл Черепанова-Райса [9, 15, 21], які обчислюються на основі, так званих, прямих та енергетичних методів та мають однозначний зв'язок в межах лінійної механіки руйнування.

Використання в механіці руйнування енергетичних методів та інтегралів, що не залежать від шляху інтегрування висвітлено в значній кількості наукових публікацій [4, 9, 11, 12, 30, 31 та ін.]. Розглянуті методи безпосереднього обчислення контурного J -інтеграла [30], підатливості [4], еквівалентного об'ємного інтегрування [12], віртуального зростання тріщини [11, 31], модифікованого інтеграла закриття тріщини [9] та багато інших.

Визначення величини J -інтеграла на основі методу скінченних елементів (МСЕ) розглянуто в роботах [1, 8, 10, 12–14, 18, 19, 22–29, 32, 33 та ін.]. Ефективність запропонованих методик великою мірою залежить від мірності задачі, певних обмежень на форму і розміри області інтегрування. При цьому постають питання задоволення фундаментальним властивостям J -інтеграла: його інваріантності відносно області інтегрування та рівності нулю при інтегруванні по замкнутому контуру.

В роботах різних авторів відзначається відмінність результатів обчислення J – інтеграла при варіюванні контурів інтегрування [13, 19, 35]. Запропоновані шляхи подолання цієї проблеми ґрунтуються або на встановленні обмежень на форму та розміри області інтегрування або на усередненні отриманих величин J – інтеграла на різних контурах, що призводить до значних обчислювальних витрат. Робота [6] пропонує нову методику обчислення J – інтеграла на основі величин, що безпосередньо входять до рівнянь методу скінченних елементів – вузлових реакцій та переміщень скінченноелементної моделі (метод рекцій). Показано високу ефективність запропонованого підходу та задоволення фундаментальним властивостям J – інтеграла в задачах статки.

Метою даної роботи є розвиток методики визначення J – інтеграла та КІН на основі напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ) за величинами вузлових реакцій та переміщень на новий клас задач динаміки та дослідження вірогідності і ефективності запропонованого чисельного апарату.

1. Співвідношення просторової задачі динаміки при наявності тріщин.

Розглядаються системи неоднорідних ізотропних тіл обертання та призматичних тіл з тріщинами (рис. 1), що знаходяться під дією довільного динамічного навантаження або зміщень, на інтервалі часу $T \in [t_0, t_1]$.

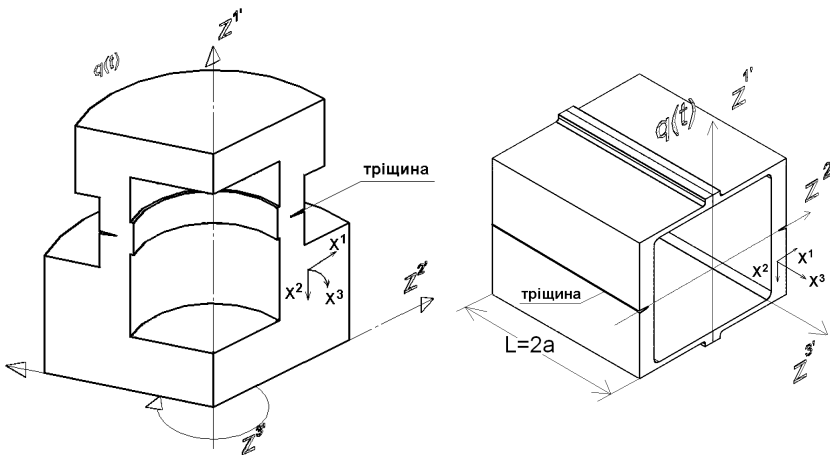


Рис.1. Просторові призматичні тіла та тіла обертання

Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системі координат $Z^{i'}$, що в подальшому називається базисною. Для подання напружено-деформованого стану тіла із складною формою поперечного перетину запроваджується місцева криволінійна система координат x^i , яка пов'язана з геометрією тіла.

Компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [2]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} - 2u_{k'} z_{,i} z_{,j}^{l'} \Gamma_{l'm'}^{k'} \right), \quad (1)$$

де для замкнутого тіла обертання в циліндричній системі координат:

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0, \quad z_{,3}^{3'} = 1, \quad \Gamma_{3'3'}^{2'} = -Z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{Z^{2'}},$$

для призматичного прямолінійного тіла в ортогональній системі координат:

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0, \quad z_{,3}^{3'} = a, \quad \Gamma_{l'm'}^{k'} = 0$$

Компоненти тензора напружень ізотропного тіла виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (2)$$

де $\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $E = E(Z^{i'})$, $\nu = \nu(Z^{i'})$ - значення модуля пружності і коефіцієнта Пуасона в точці тіла, що розглядається.

Динамічні процеси в неоднорідному ізотропному тілі, об'ємом V , обмеженого поверхнею S описуються рівнянням, що є наслідком принципу Даламбера [17]:

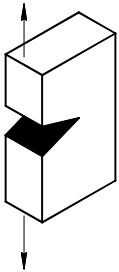
$$\delta W + \delta T - \delta A = 0, \quad (3)$$

покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд:

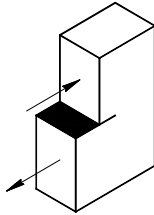
$$\delta W = \int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} dV, \quad \delta T = \int_V \rho i^i \delta u_i dV, \quad \delta A = \int_V f^i \delta u_i dV + \int_{S_p} p^i \delta u_i dS \quad (4)$$

варіації потенційної, кінетичної енергій та роботи зовнішніх сил.

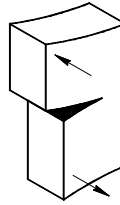
Для прямолінійних призматичних тіл та тіл обертання розглядаються поздовжні стаціонарні тріщини, фронт яких збігається за напрямком із твірною тіла. Виділяють три типи тріщин: нормального відриву, поперечного та поздовжнього зсуву (рис. 2).



Нормальний відрив



Поперечний зсув



Поздовжній зсув

Рис.2. Типи тріщин

Найчастіше, при аналізі стану тіла з тріщинами, дослідники оперують коефіцієнтами інтенсивності напружень. Вирази (5) і (6) представляють собою зв'язок між традиційними характеристиками тріщиностійкості в області лінійної механіки руйнування: КІН та J - інтегралом [1].

$$K_{I/II} = \frac{1}{2} \sqrt{H} \left(\sqrt{J_1 - J_2 - G_{III}} \pm \sqrt{J_1 + J_2 - G_{III}} \right), \quad (5)$$

$$K_{III} = \sqrt{2\mu G_{III}}, \quad (6)$$

де $\mu = E/2(1+\nu)$ - модуль зсуву, H - ефективний модуль пружності (= E плоский напружений стан; = $E/(1-\nu^2)$ плоска деформація).

Швидкість вивільнення енергії G при динамічному процесі розповсюдження хвиль у тілі зі стаціонарною тріщиною для випадку пружних матеріалів – лінійних або нелінійних може бути представлена у наступному вигляді [1]:

$$G_k = J_k = \int_{\Gamma} \left[(W+T)n_k - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right] d\Gamma, \quad (7)$$

де Γ - контур інтегрування, n_k - проекція на вісь x^k одиничної зовнішньої нормалі до контуру Γ , t_i - проекція на вісь x^k вектора зусиль на контурі Γ .

2. Напіваналітичний метод скінченних елементів для просторових призматичних тіл та тіл обертання.

Для дискретизації тіл обертання та призматичних тіл при динамічному навантаженні застосовуються кільцевий та призматичний скінченні елементи (СЕ) [20] (рис.3).

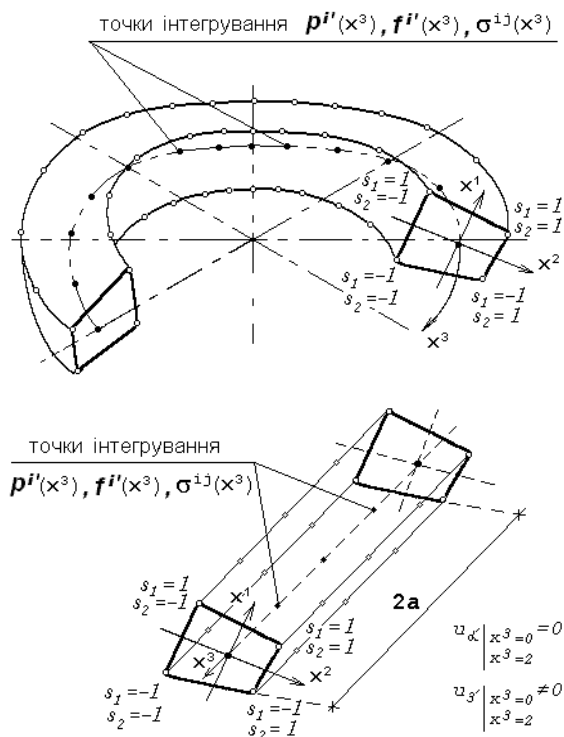


Рис.3. Кільцевий замкнений та прямолінійний призматичний скінченні елементи

Припускається, що щільність матеріалу ρ , компоненти тензора пружних постійних d^{ijkl} і визначник метричного тензора g незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента:

$$\rho = \rho|_{x^\alpha=0}, \quad d^{ijkl} = d^{ijkl}|_{x^\alpha=0}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{g}|_{x^\alpha=0}. \quad (8)$$

Зовнішнє навантаження і напруження довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування.

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ в базисній системі координат $(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'}$, де k' - напрямок в базисній системі координат.

Розподіл невідомих в напрямку x^3 проводиться 2π - періодичними функціями x^3 і їх вузлові значення представляються відрізками тригонометричних рядів Фур'є. При умові наявності хоча б однієї площини симетрії:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \Psi_{k'}^l, \quad (9)$$

для замкненого тіла обертання в циліндричній системі координат:

$$\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \Psi_{3'}^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi,$$

для призматичного прямолінійного тіла в ортогональній системі координат:

$$\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \Psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2.$$

В площині перетину елемента прийнято білінійний розподіл переміщень, швидкостей і прискорень:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)} (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}, \quad P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left(S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right). \quad (10)$$

Для подання деформацій використовується моментна схема скінченного елемента (МСЕ) [16], застосування якої дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі методу скінченних елементів [7, 17].

Підставляючи апроксимації (9) до (4), можна представити варіації потенційної, кінетичної енергій та роботи зовнішніх як суму їх амплітудних складових:

$$\delta W = \sum_{l=l_0}^L \delta W_l, \quad \delta T = \sum_{l=l_0}^L \delta T_l, \quad \delta A = \sum_{l=l_0}^L \delta A_l. \quad (11)$$

Для однорідних вздовж направляючої просторових тіл система рівнянь (3) розпадається на ряд незалежних амплітудних підсистем для кожної з гармонік l [7]:

$$\delta W_l + \delta T_l - \delta A_l = 0. \quad (12)$$

3. Методика визначення J - інтеграла за величинами вузлових реакцій та перемішень при наявності інерційних сил.

Традиційно для обчислення J - інтеграла в межах сіткових методів використовується формулювання (13). Вважається, що тріщина пов'язана із системою координат x^α (рис. 4,а), де індекс α визначає повздовжній напрямок тріщини, N_j - сторони вибраного контуру інтегрування.

$$J = \sum_{j=1}^{N_2} (W+T)_{\alpha} ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} (W+T)_{\alpha} ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} (n_i \sigma^{ik} \zeta_{k\alpha}) ds_j - \\ - \sum_{j=1}^{N_2} (n_i \sigma^{ik} \zeta_{k\alpha}) ds_j - \sum_{j=1}^{N_3} (n_i \sigma^{ik} \zeta_{k\alpha}) ds_j - \sum_{j=1}^{N_4} (n_i \sigma^{ik} \zeta_{k\alpha}) ds_j. \quad (13)$$

Відповідно до (12), представимо J - інтеграл через його амплітудні значення, тобто:

$$J = \sum_{l=l_0}^L J_l, \quad (14)$$

де

$$J_l = \sum_{j=1}^{N_2} (W_l + T_l)_\alpha ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} (W_l + T_l)_\alpha ds_j - \sum_{j=1}^{N_1} (n_i \sigma_l^{ik} \zeta_{lk\alpha}) ds_j - \\ - \sum_{j=1}^{N_2} (n_i \sigma_l^{ik} \zeta_{lk\alpha}) ds_j - \sum_{j=1}^{N_3} (n_i \sigma_l^{ik} \zeta_{lk\alpha}) ds_j - \sum_{j=1}^{N_4} (n_i \sigma_l^{ik} \zeta_{lk\alpha}) ds_j. \quad (15)$$

В даній роботі для обчислення значень J - інтеграла використовується методика, яка розвинена в роботі [6] для тіл с тріщинами, що знаходяться під дією статичного навантаження (метод реакцій), у відповідності до якої всі члени, які входять до (15), визначаються за допомогою амплітудних вузлових реакцій та переміщень сіткової області для моменту часу $\tau = t + \Delta t$ (рис. 4,б):

$$(W_l + T_l)_\alpha^\tau ds = \frac{\{u\}_l^{\tau T} \{R\}_l^\tau}{2(\Delta x_\alpha)}, \quad n_i \sigma_l^{\tau ik} ds = R_{lk}^\tau, \quad (16)$$

$$R_{lk}^\tau = \frac{1}{2} (R_{lq,k}^\tau + R_{lq',k}^\tau), \quad \zeta_{lk\alpha}^\tau = \frac{1}{\Delta x_\alpha} (u_{lq,k}^\tau - u_{lq',k}^\tau). \quad (17)$$

Виходячи із вищесказаного вираз (15) можна записати у вигляді:

$$J_l^\tau = \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{lj}^{\tau T} \{R\}_{lj}^\tau - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{lj}^{\tau T} \{R\}_{lj}^\tau - \\ - \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{(R_{lq,k}^\tau + R_{lq',k}^\tau)(u_{lq,k}^\tau - u_{lq',k}^\tau)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(\frac{(R_{lq,k}^\tau + R_{lq',k}^\tau)(u_{lq,k}^\tau - u_{lq',k}^\tau)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \\ - \sum_{j=1}^{N_3} \left(\frac{(R_{lq,k}^\tau + R_{lq',k}^\tau)(u_{lq,k}^\tau - u_{lq',k}^\tau)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_4} \left(\frac{(R_{lq,k}^\tau + R_{lq',k}^\tau)(u_{lq,k}^\tau - u_{lq',k}^\tau)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j. \quad (18)$$

При використанні інваріантності J - інтеграла відносно контуру інтегрування, даний підхід дозволяє значно скоротити кількість математичних операцій при його обчисленні в межах сіткових методів [6].

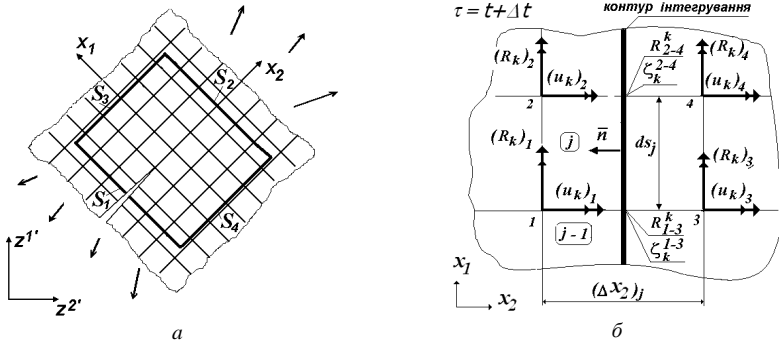


Рис.4. Схема визначення вузлових реакцій та переміщень

Розглянемо більш детально визначення вузлових реакцій при динамічному навантаженні. Вираз (20) представляє собою напівдискретне рівняння руху записане через вузлові реакції, (19) – більш традиційна та відома форма його запису [3].

$$[M]_{lm} \{\ddot{U}\}^{m,\tau} + [K]_{lm} \{U\}^{m,\tau} = \{Q\}_l^\tau, \quad (19)$$

$$[M]_{lm} \{\ddot{U}\}^{m,\tau} + \{R_\sigma\}_l^\tau = \{Q\}_l^\tau, \quad (20)$$

де

$$\{R_\sigma\}_l^\tau = \left\{ \sum_{\beta=1}^2 [B_\beta]_T^T \{\overset{\circ}{\sigma}_\beta\}_l^\tau + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [B_\beta]_T^T \{\overset{\circ}{\sigma}_\beta\}_{\alpha l}^\tau \right\} \sqrt{g}. \quad (21)$$

У відповідності до формулювання методу Н'юмарка

$$\{\ddot{U}\}^{m,t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[\{U\}^{m,t+\Delta t} - \{U\}^{m,t} - \{\dot{U}\}^{m,t} \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{U}\}^{m,t} \right] + \{\ddot{U}\}^{m,t}, \quad (22)$$

вираз (20) можна переписати у вигляді:

$$\{R_\sigma\}_l^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_l^{t+\Delta t} = \{Q\}_l^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_\rho\}_l^t, \quad (23)$$

де

$$\{\bar{R}_\rho\}_l^{t+\Delta t} = a_0 [M]_{lm} \{U\}^{m,t+\Delta t}, \quad (24)$$

$$\left\{ \overline{R}_\rho \right\}_l^t = [M]_{lm} \left\{ a_0 \{U\}^{m,t} + a_2 \{\dot{U}\}^{m,t} + a_3 \{\ddot{U}\}^{m,t} \right\}. \quad (25)$$

Таким чином, вузлові реакції для задачі динаміки із стаціонарною тріщиною при використанні прямого метода інтегрування рівнянь руху будуть обчислюватись на основі виразу:

$$\{R\}_l^\tau = \{R_\sigma\}_l^{t+\Delta t} + \{\overline{R}_\rho\}_l^{t+\Delta t} - \left\{ \overline{R}_\rho \right\}_l^t, \quad (26)$$

та включати статичну та динамічну складові.

Слід зазначити, що для різних методів прямого інтегрування рівнянь руху: Вільсона, Хаболта та ін. динамічна складова реакції (26) не буде однозначною і повинна визначатись у відповідності до вибраного підходу.

У випадках, коли динамічний розв'язок задачі формується на основі невеликої кількості перших власних форм конструкції, для розв'язання системи звичайних диференціальних лінійних рівнянь руху дискретної моделі (19) використовують чисельний підхід заснований на розкладі розшукуваного рішення по формам власних коливань конструкції, відповідно до якого (19) перетворюється до низки незалежних диференціальних рівнянь вигляду [3]:

$$[I] \{\ddot{X}\}^\tau + [\Lambda] \{X\}^\tau = \sum_{l=l_0}^L [\Phi]_l^T \{Q\}_l^\tau. \quad (27)$$

Перехід від невідомих задачі до вузлових переміщень визначається лінійним перетворенням:

$$\{U\}_l^\tau = [\Phi]_l \{X\}^\tau, \quad (28)$$

а вузлові реакції обчислюються аналогічно (26) за формулою:

$$\{R\}_l^\tau = \{R_\sigma\}_l^* + \{\overline{R}_\rho\}_l^*, \quad (29)$$

де

$$\{R_\sigma\}_l^* = [K]_{lm} \{U\}_m^*, \quad (30)$$

$$[K]_{lm} = \left[\sum_{\beta=1}^2 [B_{\beta}]_l^T [D_{\beta}]_{lm} [B_{\beta}]_m + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [B_{\beta}]_{\alpha l}^T [D_{\beta}]_{\alpha lm} [B_{\beta}]_{\alpha m} \right] \sqrt{g},$$

$$\{R_p\}_l^* \tau = -[\Lambda][M]_{lm} \{U\}_m^* \tau, [M]_{lm} = \frac{1}{4} \sqrt{g} \rho_{lm}^k [g^{k'(k')}]. \quad (31)$$

4. Вірогідність та ефективність метода реакцій в задачах динаміки.

Для оцінки ефективності запропонованого підходу проведено аналіз швидкості збіжності параметрів механіки руйнування для різних довжин тріщин при варіюванні розмірів привершинної сіткової області. Розглянуто пластину з центральною тріщиною під дією миттєво прикладеного розтягуючого тиску [5]. Динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (ДКІН) визначались на основі J -інтеграла (рис. 5). Як видно з результатів обчислень, похибка ДКІН при використанні J -інтеграла входить у межі 2% при співвідношенні розміру SE при вершині тріщини до її довжини 1/5 на відміну від прямого методу [5] коли 2% досягаються тільки при значенні 1/20.

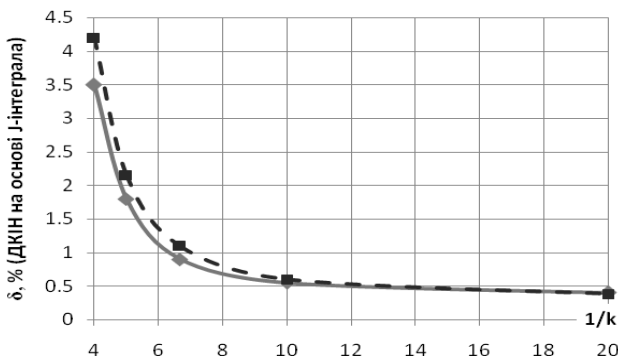


Рис. 5. Збіжність обчислення ДКІН на основі J -інтеграла

Графіки відображають збіжність ДКІН в задачах динаміки для довжини тріщини, що дорівнює 0.1 ширини пластины (штрихпунктир) та 0.5 ширини пластины (суцільна лінія).

Вірогідність обчислення величин J -інтеграла із застосуванням метода реакцій при різних швидкостях навантаження об'єкту дослідження продемонстровано на прикладі пластины з центральною тріщиною, що знаходиться під дією змінного у часі рівнорозподіленого розтягуючого тиску (рис. 6). Модуль Юнга $E = 2 \times 10^{11}$ Па, коефіцієнт

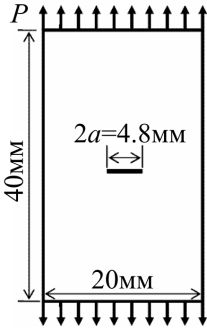


Рис. 6

Пуасона $\nu = 0.3$, щільність $\rho = 5 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$. Динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень представлені у вигляді нормалізованих значень по відношенню до параметра $P_0(\pi a)^{1/2}$.

Розглянуто два випадки імпульсного навантаження: миттєво прикладений імпульс тиску, який зберігається на всьому часовому інтервалі дослідження (рис. 7), та у вигляді функції, що має профіль трикутника (рис. 8).

Графіки отримані в [34] показано суцільною лінією, за допомогою представленої методики (14) – кружками. Відмінність результатів для двох випадків навантажень не перевищує 1.5-2%. Аналогічні результати на основі прямого методу обчислення ДКІН представлені в роботі [5].

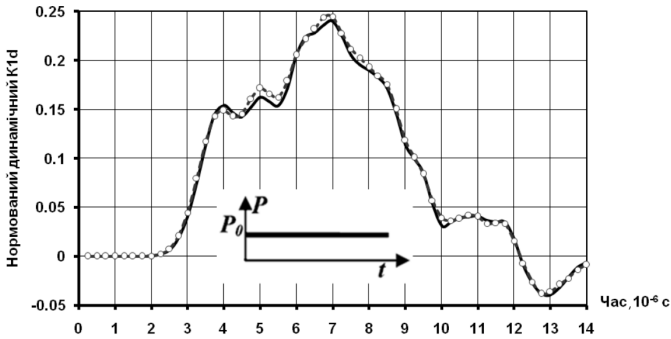


Рис. 7. Миттєво прикладений імпульс тиску

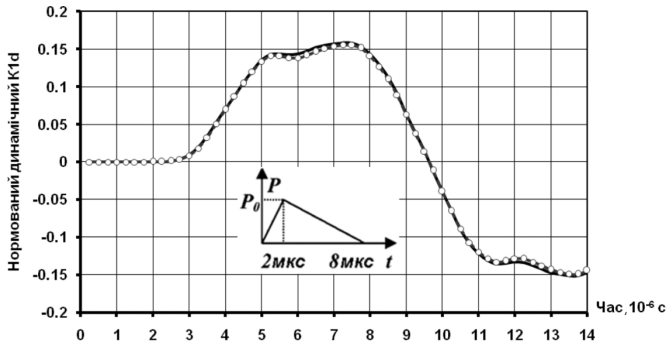


Рис. 8. Навантаження у вигляді функції, що має профіль трикутника

5. Дослідження динамічного деформування ємкості високого тиску з тріщиною.

Демонстрація можливостей підходу проведена на прикладі дослідження динамічного деформування ємкості високого тиску, що являє собою тіло обертання з кільцевою тріщиною (рис. 9).

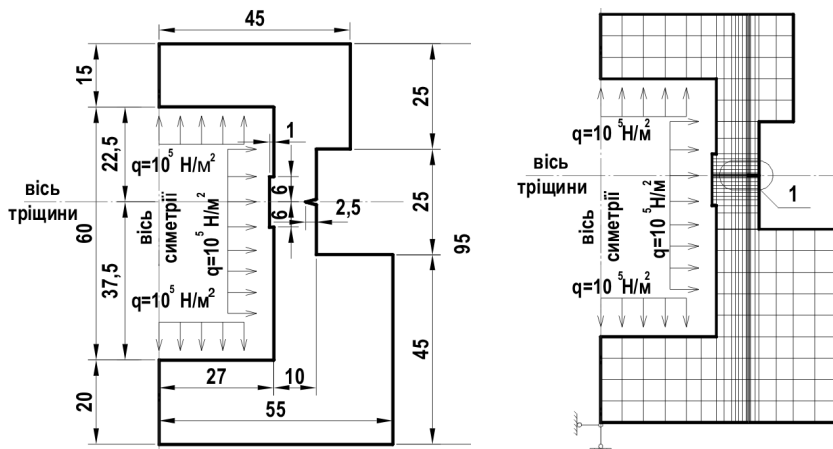


Рис. 9. Розрахункова схема

Одним із ключових питань при розгляді дії силових імпульсів є вплив зміни швидкості навантаження на напружено-деформований стан конструкції, а отже, і на параметри механіки руйнування. Проведено дослідження зміни значень динамічного КІН в залежності від швидкості приросту внутрішнього тиску (рис. 10). При характерному часі приросту навантаження до $t_0 \sim 10^{-3}$ сек значення КІН практично співпадають із статичними, починаючи з $t_0 \sim 10^{-3}$ сек динамічний КІН різко зростає і стабілізується при $t_0 \sim 10^{-4.5} \div 10^{-5}$ сек. Подальше збільшення швидкості приросту імпульсу включаючи випадок миттєвого удару $t_0 = 0$ сек не призводить до суттєвого збільшення значень КІН. При цьому величина динамічного КІН приблизно в 1.9-2.1 рази вища за статичний.

Еволюція динамічного КІН у часі представлена для двох швидкостей приросту навантаження (рис. 11).

Перший відповідає швидкості з часом приросту навантаження $t_0 \sim 3.5 \times 10^{-4}$ с, другий - миттєвому удару. Для порівняння штриховою

лінією показано значення статичного КІН. Видно, що при досягненні імпульсом швидкостей, зіставних із швидкістю розповсюдження пружних хвиль у матеріалі конструкції, починає виявлятися вплив спектру високих частот власних форм досліджуваного об'єкта.

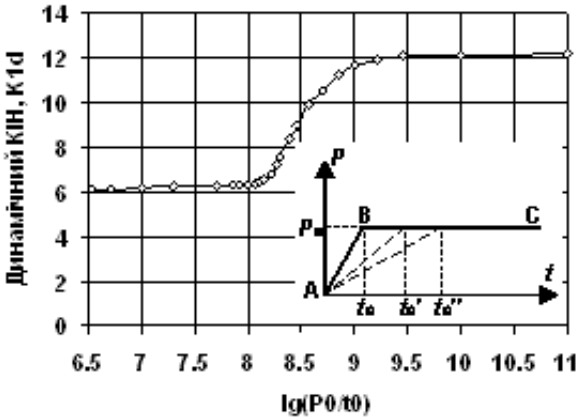


Рис. 10. Залежність ДКІН від швидкості зростання навантаження ($P_0 = 10^5$ Па)

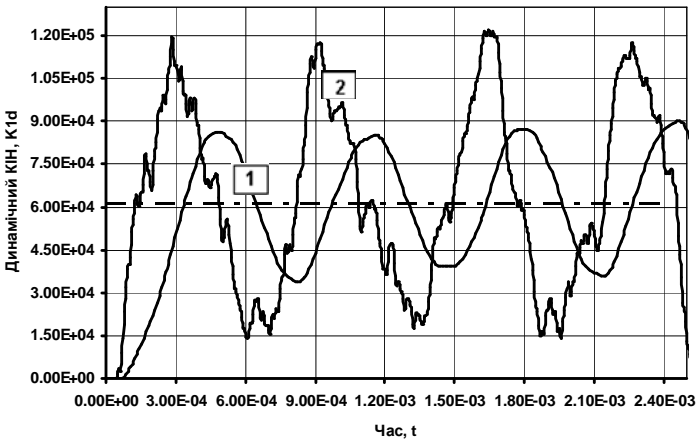


Рис. 11. Еволюція ДКІН у часі (1 – $Lg(P_0/t_0) = 8.5$, 2 – $Lg(P_0/t_0) = 10$)

Графіки максимальних динамічних КІН в залежності від довжини тріщини також представлені для різних швидкостей навантаження (рис. 12).

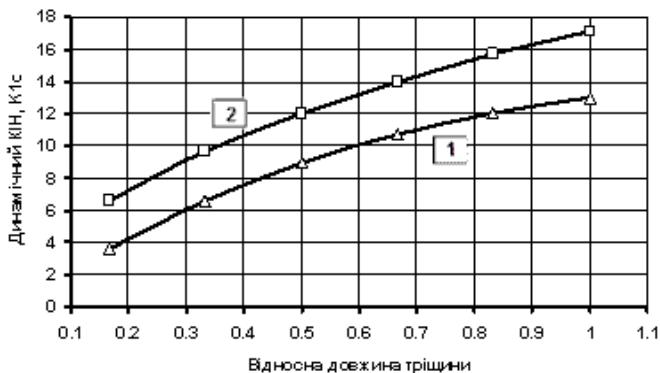


Рис. 12. Значення максимальних ДКІН для різних довжин тріщини

Висновки

Таким чином, на основі напіваналітичного методу скінчених елементів та моментної схеми скінченного елемента розроблено новий ефективний алгоритм обчислення контурного J -інтеграла для твердих тіл зі стаціонарними тріщинами, які перебувають під дією динамічного навантаження. На основі проведених досліджень доведено вірогідність та ефективність запропонованої методики. Проведено аналіз поведінки параметрів механіки руйнування у часі для ємності високого тиску з тріщиною, що знаходиться під дією силових імпульсів різної інтенсивності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлурі С.* Вычислительные методы в механике разрушения.- Москва: Мир, 1990.- 392с., ил.
2. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Алгоритми розв'язання рівнянь рівноваги для динамічних задач напіваналітичним методом скінчених елементів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. – К.:КНУБА, Вип.79, 2006.-с.43-62.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
5. *Баженов В.А., Вабіщевіч М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень при динамічному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.39-47.
6. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Особливості визначення J -інтеграла в дискретних моделях метода скінчених елементів. – Опір матеріалів і теорія споруд. – № 76, 2005. – с.86-97.

7. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
8. *Гуляр О.И., Сахаров О.С., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.* Визначення J - інтеграла при скінченноелементному розв'язанні задач змішаного руйнування // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. -К.:КНУБА, Вип.82, 2008.- с.109-123.
9. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 1980. – 256 с.
10. *Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г.* Расчет энергетического интеграла для тел с вырезами и трещинами при упругопластическом деформировании. // Тр. ЦКТИ – 1988. – №246. – С. 67 – 73.
11. *Никишков Г.П., Вайншток В.А.* Метод виртуального роста трещины для определения коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} // Проблемы прочности, 1986. – №6. – С.86-92.
12. *Никишков Г.П.* Метод эквивалентного объемного интегрирования для для расчета параметров механики разрушения несимметричных трещин. – Препринт МИФИ. – 031-87. – 20 с.
13. *Носиков А.И., Горохов М.Ю., Семенов А.С., Мельников Б.Е.* Инвариантность J -интеграла для трещины в материале с негладкой диаграммой деформирования.// Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Тр. VI Межд. конф. – С.-Петербург: СПбГТУ, 2005. – С. 350–359.
14. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука. – 1985. – 504 с.
15. *Дж. Райс* Математические методы в механике разрушения. В книге: Разрушение т. 2. Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975 – 764 с.
16. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Спротивлення матеріалів і теорія споруд. –1974. –Вип.24. –С.147-156.
17. *Сахаров А.С., Кислюк В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
18. *Синайський В.М.* Определение параметров разрушения методом рентгеноструктурного анализа. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2002. – т.68. – № 4. – С.35 – 38.
19. *Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения / Пер. с японск. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
20. *Солодей І.І.* Ефективність скінченноелементної бази напіваналітичного метода скінченних елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. -К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.154-163.
21. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640с.
22. *Anderson T.L.* Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. – CRC Press Boca Raton, Ann Arbor, Boston, 2000. – 793 p.
23. *Hellen T.K.* On the Method of Virtual Crack Extensions. – Int. Journal for Numerical Methods of Engineering. – Vol.9. – 1975. – pp.187–207.
24. *Kishimoto K., Aoki S., Sakata M.* On the path independent integral J . – Engineering Fracture Mechanics. – 1980. – V.13.– p.841–850.
25. *de Lorenci H.G.* On the Energy Release Rate and J -integral of 3–D Crack Configurations. – Int. Journal of Fracture. – Vol.19. – 1982. – pp.183–193.
26. *de Lorenci H.G.* Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method. – Engineering Fracture Mechanics. – Vol.21. – 1985. – pp.129–143.

27. *Murakami T., Salo T.* Three-dimensional J -integral calculations of path-trough surface crack problems // *Comput. And Structures.* – 1983. – V.17. – N 5-6. – p.731–736.
28. *Parks D.M.* A stiffness Derivative Finite Elements Technique for Determination of Crack Tip Intensity Factors // *Int. Journal of Fracture.* – Vol.10. – 1974.– pp.487–502.
29. *Parks D.M.* The Virtual Crack Extensions Method for Nonlinear Material Behavior. – *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – Vol.12. – 1977. – pp.353–364.
30. *Rice J.R.* A path independent integral and approximate analysis of strain concentration by notches and crack // *J.Appl.Mech.* , 1968. – № 35. – P.379-386.
31. *Yang Z.J, Chen J.F., Holt G.D.* Efficient evaluation of stress intensity factors using virtual crack extension technique // *Computers and Structures.* – v.79. –2001. –P.2705-2715.
32. *Shich G.F., Moran B., Nakamura T.* Energy Release Rate Along a Three-Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body. – *Int. Journal of Fracture.* – Vol.30. – 1986.– pp.79–102.
33. *Smith C.W.* Measurement of fracture parameters in three dimensional cracked body problems. // *Прикладная механика* – 2003, - т.39, № 5. – С.3 – 27.
34. *Yang Z. J., Deeks A. J., Hao H.* Transient Dynamic Fracture Analysis Using Scaled Boundary Finite Element Method: a Frequency-Domein Approach // *Engineering Fracture Mechanics* 74, 2007.-pp.669-687.
35. *Wilson W.K., Osias J.R.* A comparison of finite element solutuion for an elastic-plastic crack problem/ – *Int. J.Fracture.* – 14.– 1978. – PP.95-127.

Отримано 28.05.09

Рассмотрена методика определения коэффициентов интенсивности напряжений при использовании J -интеграла для тел с трещинами, которые находятся под действием динамического нагружения. Проведено обобщение метода реакций для вычисления J -интеграла на задачи динамики. На основе тестовых исследований получены параметры достоверности и эффективности предлагаемого подхода.

Methodology of stress intensity factor calculation based on the J -integral is considered for 3D solids with cracks under dynamic loadings. Concept generalization of Reactions method to compute J -integral is performed for dynamic problem. Reliability and efficiency parameters of mentioned approach are obtained with the help of test solutions.

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук,
В.П. Носенко,
І.В. Горбунович

ПРЕЦЕСІЙНІ РЕЗОНАНСИ ПРУЖНОГО ДИСКУ З ЛОПАТЯМИ ПРИ СКЛАДНОМУ ОБЕРТАННІ

Побудовані диференціальні рівняння, що описують пружні коливання системи, які обумовлені періодичними переносними, відносними і коріолісовими силами інерції. Запропоновано методику їх розв'язання. Досліджено прецесійні коливання швидко обертового пружного диска з вінцем лопаток, вісь обертання якого робить плоский поворот. Установлено, що збуджені складним обертанням коливання можуть мати резонансний характер.

Досліджені прецесійні коливання системи швидко обертового пружного диска з вінцем лопаток, вісь обертання якого робить плоский поворот. Побудовано диференціальні рівняння, що описують пружні коливання системи, які обумовлені періодичними переносними, відносними й коріолісовими силами інерції. Запропоновано методику їх розв'язання. Установлено, що збуджені складним обертанням коливання носять резонансний характер і що підрахований з урахуванням вібрацій момент сил пружності, що діє на вал ротора, істотно відрізняється від відповідного гіроскопічного моменту, прикладеного до еквівалентного жорсткого ротора. Виявлені явища мають місце в роторах авіаційних двигунів у моменти зміни орієнтації їх осі.

Відомо, що переважна більшість відмов авіаційних двигунів відбувається при зльотах, посадках і маневрах літаків, коли ротор двигуна перебуває в стані складного обертання й піддається додатковим пружним коливанням, що обумовлені гіроскопічною взаємодією різних видів руху. У той же час при аналізі динамічної поведінки пружних роторів основна увага проектувальників приділяється лише врахуванню впливу на їх міцність на перший погляд більше відчутних відцентрових сил інерції простого обертання, що відбувається з високою швидкістю, аеродинамічних сил і теплових впливів. Незважаючи на те, що ресурс двигуна визначається числом маневрів літака, вплив додаткових прецесійних коливань пружних елементів двигуна, що збуджені гіроскопічною взаємодією обертових рухів ротора у зв'язку з передбачуваною малістю викликаних ними напружень, не береться до уваги.

Наближено, без врахування коливань підраховується й діючий на ротор у цілому і його загальний гіроскопічний момент, що передається через його опори на всю конструкцію літака, і визначається добутком $M_g = I_z \omega \omega_0$ осевого моменту інерції I_z гіпотетичного жорсткого ротора на кутові швидкості обертального ω і поворотного ω_0 рухів [1].

Нехтування цими коливаннями не завжди виявляється виправданим, оскільки вони є змушеними, супроводжуються прецесійними ефектами, відбуваються із частотою обертання ротора й при певних значеннях механічних і геометричних параметрів, і швидкості обертання носять резонансний характер. Врахування пружної піддатливості ротора приводить до істотного уточнення гіроскопічного моменту M_g , який може виявитися на порядок більше й мати інший знак.

Характерна особливість задачі про пружні коливання гнучкого обертового ротора полягає в тому, що спектр частот і форм його власних коливань залежить від кутової швидкості його обертання й еволюціонує при зміні останньої. Тому методи спектрального аналізу виявляються мало придатними для дослідження зазначених явищ і для їх вивчення повинні застосовуватися прямі методи їх математичного моделювання. Деякі окремі питання дослідження динаміки пружного ротора при складному обертанні розглянуто в роботах [2-5].

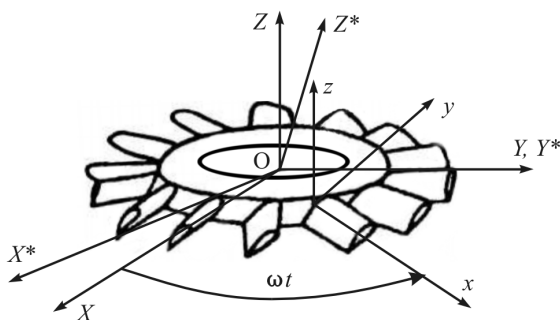


Рис. 1

Нехай ротор (рис. 1) складається із пружного диска товщиною h і N пружних закручених лопаток довжиною S . Вважається, що диск насаджений на жорсткий вал діаметром $2R_0$, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω , вісь якого робить плоский поворот з кутовою швидкістю ω_0 . Уведемо інерційну систему координат $OX^*Y^*Z^*$ і систему $OXYZ$, що обертається навколо осі OY^* , вісь OZ якої є віссю власного

обертання ротора, а вісь OY збігається з віссю OY^* . Для описання коливань лопаток зв'яжемо з кореневим перерізом однієї з них локальну систему координат $oxuz$ так, щоб вісь ox збігалася з поздовжньою віссю лопатки, а вісь oz була паралельна осі обертання системи. Досліджуємо збуджувані цими обертаннями прецесійні коливання елементів ротора й підрахуємо момент M_θ , що діє на вал зі сторони пружного диска.

При виведенні рівнянь коливань диска й лопатей будемо вважати, що $\omega \gg \omega_0$. Таке припущення дозволяє виділити в загальному русі ротора два стани. У першому стані система здійснює просте обертання з кутовою швидкістю ω і коливань не здійснює, диск напружений у своїй площині, а в лопатях виникає тільки поздовжня сила, викликана дією відцентрових сил інерції. У другому стані, викликаному поворотом системи, на елементи диска й лопатей діють додаткові періодичні сили інерції, що збуджують малі згинні коливання системи відносно вихідного напруженого стану. Умова $\omega \gg \omega_0$ дозволяє розглядати ці стани окремо. При цьому рівняння коливань системи в другому стані будуються за допомогою лінеаризації рівнянь руху відносно першого стану.

Напружений стан диска при простому обертанні визначається за допомогою рівнянь [6]:

$$d\sigma_r/dr = \sigma_\theta - \sigma_r/r - \gamma\omega^2 r, \quad d\sigma_\theta/dr = \sigma_\theta - \sigma_r/r - \nu\gamma\omega^2 r,$$

де r, θ - відповідно радіальна й колова координати; σ_r, σ_θ - радіальне й кільцеве напруження; γ - щільність матеріалу диска; ν - коефіцієнт Пуассона.

Граничні умови на краях $r = R_0$ і $r = R_1$ відповідно представимо у вигляді $\varepsilon_\theta = (\sigma_\theta - \nu\sigma_r)/E = 0$, $\sigma_r = F_w(0)/(h\Delta\theta R_1)$, де $F_w(0)$ - поздовжня сила в кореновому перерізі лопатки, $\Delta\theta$ - секторний кут лопатки. Друге рівняння цієї системи отримано в результаті усереднення по координаті θ сил взаємодії диска й лопаток.

У стані простого обертання лопатка напружена поздовжніми відцентровими силами інерції інтенсивністю $m\omega^2(R_1 + s)ds$, де m - погонна щільність, $R_1 + s$ - відстань від осі обертання до розглянутого елемента лопатки. Тому

$$F_w(0) = \gamma F \omega^2 (R_2^2 - R_1^2) / 2,$$

де F - площа перерізу лопатки, $R_2 = R_1 + s$, s - довжина лопатки.

Викликані складним обертанням згинні коливання диска описуються рівнянням [6]

$$D\Delta^2\Delta^2 w - (1/r)\partial(N_r r \partial w / \partial r) - (1/r^2)\partial / \partial \theta (N_\theta r \partial w / \partial \theta) + \gamma h \partial^2 w / \partial t^2 = q_{ин},$$

де w - нормальне до поверхні пластини переміщення; N_r, N_θ - викликані простим обертанням радіальне й колове зусилля; D - циліндрична жорсткість; $q_{ин}$ - інтенсивність додаткового інерційного навантаження, обумовленого складним обертанням.

Прийmemo, що лопатки є відносно довгими і їх можна вважати гнучкими закрученими стрижнями. Тоді рівняння згинно-крутильних коливань лопаток можна представити у формі [7, 8]

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} / ds &= \boldsymbol{\omega}_\chi \times \mathbf{F} + \mathbf{f}_{ин} = 0, \quad d\mathbf{M} / ds = \boldsymbol{\omega}_\chi \times \mathbf{M} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{F} = 0, \quad M_u = A(p - p_0), \\ M_u &= B(q - q_0), \quad M_w = C(r - r_0), \quad d\boldsymbol{\tau} / ds = (p + q)\mathbf{n}, \\ d\mathbf{n} / ds &= -(p + q)\boldsymbol{\tau} + (r - d\chi / ds)\mathbf{b}, \quad d\mathbf{r} / ds = \boldsymbol{\tau}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\mathbf{F}(s), \mathbf{M}(s)$ - головні вектори внутрішніх сил і моментів; $\mathbf{f}_{ин}$ - вектор інтенсивності зовнішніх сил; M_u, M_v - згинні моменти; M_w - крутний момент; p, q, r - функції кривини й крутіння; $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\tau}$ - орти тригранника Френе; \mathbf{r} - радіус-вектор точок осьової лінії; s - координатна лінія, що збігається з осьовою лінією лопатки. Рівняння (1) повинне задовольняти граничним умовам на краях $r = R_0, r = R_1$:

$$\begin{aligned} w(R_0) &= 0, \quad \partial w / \partial r|_{r=R_0} = 0, \quad M_r(R_1) = M_\chi(0) / (R_1 \Delta \theta), \\ Q_r(R_1) &= Q_\chi(0) / (R_1 \Delta \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

де M_r, Q_r - відповідно згинний момент і сила, що перерізує, на зовнішньому краї диска; M_χ, Q_χ - згинний момент і сила, що перерізує, у площині hoz перетину лопаті $s = 0$.

Щоб підрахувати сили інерції складного руху введемо наступні праві системи координат: $OX_1Y_1Z_1$ - пов'язана із жорстким валом обертова прямокутна система, вісь OZ_1 якої збігається з віссю власного обертання ротора, а вісь OX_1 напрямлена радіально уздовж виділеної для розрахунку

лопатки; пов'язана із пружним диском полярна система координат r, θ , у якій θ відкладається від осі OX_1 з кожною точкою стрижня зв'язана локальна система осей (u, v, w) , початок який лежить у центрі ваги площі перерізу лопатки, вісь w спрямована по дотичній до пружної лінії, осі u і v - по головних центральних осях інерції площі перерізу. Положення точки на пружній лінії буде визначатися координатою s , рівної відстані від початкового перерізу стрижня уздовж пружної лінії.

Для обчислення сил інерції, що діють на елемент ротора при складному обертанні, підрахуємо за допомогою теореми Коріоліса [1,8] вектор його абсолютного прискорення

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^e + \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^c \quad (4)$$

де $\mathbf{a}^e, \mathbf{a}^r, \mathbf{a}^c$ - вектори переносного, відносного й коріолісового прискорень відповідно. Вектор \mathbf{a}^e обчислюється за формулою $\mathbf{a}^e = \mathbf{e} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$, де $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\omega}_0 + \mathbf{\omega}$, $\mathbf{e} = \mathbf{\omega}_0 \times \mathbf{\omega}$ - відповідно вектори абсолютних кутовий швидкості й кутове прискорення рухомої системи координат $OX_1Y_1Z_1$, r - радіус-вектор елемента ротора в деформованому стані.

Компоненти вектора відносного прискорення визначаються другими похідними пружних переміщень елементів ротора. Компонентами коріолісова прискорення, пов'язаного із пружними коливаннями лопатки, будемо нехтувати, оскільки у випадку нерозтяжності лопатки уздовж осьової лінії й малості динамічних переміщень елементів пружного диска у своїй площині їх можна не брати до уваги.

При виведенні остаточних виразів для компонентів вектора абсолютного прискорення (4) елементів ротора врахуємо, що $\omega \gg \omega_0$.

Нехтуємо доданками, що містять як множники ω_0^2 і добуток ω_0 на малі пружні переміщення диска й лопаток. У результаті в рухомій системі координат $OX_1Y_1Z_1$ одержимо [2, 3] $a_{x1} = -\omega^2 X_1$, $a_{y1} = \partial^2 Y_1 / \partial t^2 - \omega^2 Y_1$, $a_{z1} = \partial^2 Y_1 / \partial t^2 + F_z / (\gamma F)$.

На основі цих співвідношень одержуємо компоненти додаткових інерційних навантажень q_{un} , f_z представлених у рівняннях (1), (2):

$$q_{un} = 2\gamma\omega\omega_0 hr \sin(\omega t + \theta), \quad f_z = 2\gamma F (R_1 + s)\omega \times \omega_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (5)$$

Вид діючого на систему навантаження дозволяє замінити змінні θ і t однією фазовою координатою $\varphi = \theta + \omega t$ і понизити розмірність задачі. Для цього виділимо для розрахунку одну лопатку при $\theta = 0$ і шукані змінні представимо у вигляді

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) &= W(r) \sin(\omega t + \theta), \quad \Delta F_u(s, t) = \Delta F_u^s(s) \sin \omega t, \\ \Delta F_v(s, t) &= \Delta F_v^s(s) \sin \omega t, \dots, \Delta z(s, t) = \Delta z^s(s) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Введемо новий вектор $x(\tau)$ розмірності 16 шуканих змінних $W(r)$, ΔF_u^s , $\Delta F_v^s(s)$, $\Delta F_w^s(s)$, $\Delta p^s(s)$, $\Delta q^s(s)$, $\Delta r^s(s)$, $\Delta \tau_x^s(s)$, $\Delta \tau_y^s(s)$, $\Delta \tau_z^s(s)$, $\Delta n_x^s(s)$, $\Delta n_y^s(s)$, $\Delta n_z^s(s)$, $\Delta x^s(s)$, $\Delta y^s(s)$, $\Delta z^s(s)$, де τ - введена незалежна змінна, об'єднуюча змінні r і s . З їх допомогою рівняння із частинними похідними (1), (2) приводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dx / d\tau = A(\tau)x + \omega_0 f(\tau), \quad (6)$$

де $A(\tau)$ - матриця коефіцієнтів, обумовлена рівняннями (1), (2); $f(\tau)$ - заданий вектор правих частин, обумовлений діючими на диск і лопатки силами інерції.

Розв'язок системи (6) при граничних умовах (3) і умовах вільного краю на кінцях лопаток визначається методом початкових параметрів [9]. При цьому відповідна матриця фундаментальних розв'язків будується методом Рунге-Кутта з використанням методу ортогоналізації [9].

За допомогою запропонованої методики виконане дослідження впливу геометричних і інерційних параметрів ротора на його коливання при складному обертанні. Для значень кутової швидкості власного обертання ω , що змінюються в межах від 0 до ω_f з інтервалом 1с^{-1} , і $\omega_0 = 1\text{с}^{-1}$ були обчислені амплітудні значення переміщень $w(r, \theta, t)$ диска, переміщень $\Delta y(s, t)$, $\Delta z(s, t)$ лопаток, а також функції їх напруженого стану. З їх допомогою були підраховані величини діючі на центральний вал результуючого пружного моменту M_θ , підраховуваного по формулі

$$M_\theta = \pi(R_0^2 Q_r^{\max} - R_0 M_r^{\max}). \quad (7)$$

Ці значення порівнювали з гіроскопічним моментом $M_g = I_z \omega_0 \omega$, що діє на еквівалентний абсолютно жорсткий ротор. Відзначимо, що при малих значеннях ω , коли прецесійні коливання відбуваються з низькою частотою ω і є квазістатичними, значення M_θ , M_g практично збігаються. Однак зі збільшенням ω динамічний характер коливань пружних елементів ротора стає більш помітним і проявлення сил інерції відносних коливань пружних елементів ротора приводить до того, що M_θ починає помітно перевищувати M_g .

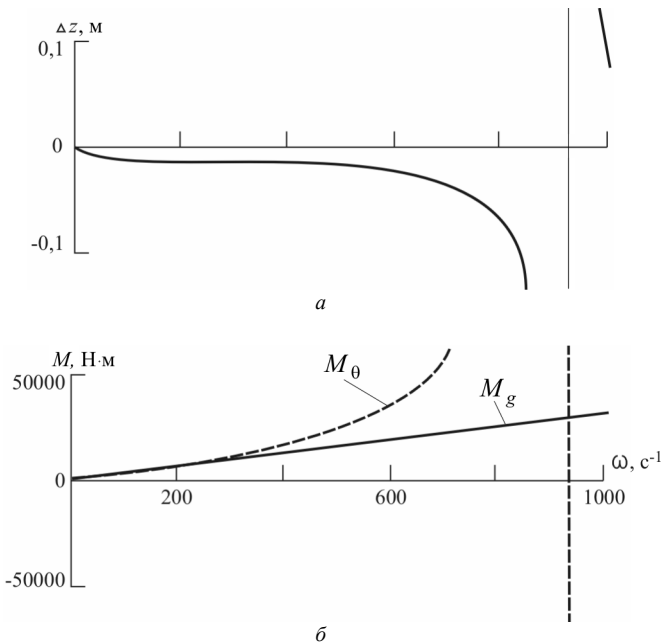


Рис. 2

Вид правих частин (5) рівнянь (1), (2) свідчить про те, що гіроскопічно збуджувані при складному обертанні коливання системи відбуваються із круговою частотою ω , рівної кутової швидкості власного обертання ротора. Зі зміною ω змінюється також і системи, що впливають на власні частоти, відцентрові сили інерції. У зв'язку із цим при варіюванні ω може виникнути ситуація, коли вона стає рівній нижчій частоті власних коливань системи й виникає резонанс. Виконані розрахунки показали, що при деяких значеннях визначальних параметрів

в області вибраного діапазону зміни кутової швидкості $0 < \omega < \omega_f$ резонансні режими коливань не реалізуються, в інших випадках резонансні коливання мають місце. Тут ω_f - граничне значення ω , при якому досягається збіжність обчислень. Аналіз показує, що зміна кутів α й ψ мало впливає на резонансні значення ω , хоча зміна кута установки приводить до деякого зниження резонансних частот, а закручення лопаток - до їх деякого підвищення.

На рис. 2, а показаний графік зміни амплітуди коливань кінця лопатки залежно від ω для ротора з параметрами $\alpha = 0$, $\psi = 0$. Можна помітити, що при $\omega = 100 \text{ c}^{-1}$ досягається локальний максимум модуля цієї функції. Потім обумовлені збільшенням ω відцентрові сили інерції приводять до збільшення "жорсткості" конструкції ротора й $\Delta Z(\omega)$ падає. Незабаром проявляється вплив резонансного ефекту й $\Delta Z(\omega)$ різко зростає. На рис. 2,б наведені графіки зміни гіроскопічного моменту сил інерції M_g (суцільна лінія) і пружного моменту M_θ (пунктирна лінія), прикладених до вала ротора. Діючий на відповідний жорсткий ротор момент M_g залежить від ω лінійно, у той час як момент сил пружних коливань M_θ (7) зі збільшенням ω зростає і при резонансному ω прямує до нескінченності. В області щодо малих значень ω ($0 < \omega < 300 \text{ c}^{-1}$), коли сили інерції пружних коливань малі, ці моменти практично збігаються.

Робота виконана в рамках проекту 0109U002146 при фінансовій підтримці Міністерства освіти і науки України.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Наука, 1962. 824 с.
2. *Гуляев В.И., Лизунов П.П.* Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. Киев: Вища школа, 1989. 199 с.
3. *Гуляев В.И., Мирчевский А.В.* Колебания лопастей роторов при сложном вращении // *Машиноведение*. 1989. № 5. С. 81-88.
4. *Barlow J.* Inertia loading in finite element analysis of structures subject to compound motion // *Intern. J. for Numeric. Meth. in Engineering*. 1976. V. 10. P. 197-209.
5. *Sacata M., Kimura K., Park S.K., Ohnabe H.* Vibration of bladed flexible rotor due to gyroscopic moment // *J. Sound and Vibration*. 1989. V. 131. № 3. P. 417-430.
6. *Коваленко А.Д.* Пластины и оболочки в роторах турбомашин. Киев: Изд-во АН УССР, 1955. 304с.
7. *Светлицкий В.А.* Механика стержней. Ч. 1,2. М.: Высш. шк., 1987.

8. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. Киев: Наук. думка, 1992. 344 с.
9. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 487 с.

Отримано 28.05.09

Построены дифференциальные уравнения, описывающие упругие колебания системы, которые обусловлены периодическими переносными, относительными и кориолисовыми силами инерции. Предложена методика их решения. Исследованы прецессионные колебания быстро вращающегося упругого диска с венцом лопаток, ось вращения которого делает плоский поворот. Установлено, что возбужденные сложным вращением колебания могут иметь резонансный характер.

The differential equations describing elastic vibrations of the structural system are constructed with allowance made for relative, Coriolic and periodic bulk inertia forces. The techniques for their solution are proposed. Precession vibrations of a bladed elastic rotating disc whose axis performs plane turning is analyzed. It is established that the vibrations excited by the compound rotation can acquire resonant character.

УДК 539.3

Г.М. Іванченко, канд. техн. наук
Ю.О. Заць

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФРОНТІВ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗІ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРУЖНОСТІ

Розглядається задача про перебудову плоскої розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі. На основі променевого методу виведені розв'язувальні рівняння. Досліджено залежність форми променів і фронтів від зміни параметрів пружності.

Вступ. В явищі поширення розривних (слабких ударних) хвиль у пружних середовищах можливі ефекти їх суперпозиції та виникнення каустик, на яких хвилі фокусується, і їх інтенсивність прямує до нескінченності (в рамках ідеальної лінійної пружності) [1, 3]. В задачах сейсмології, сейсмології, при аналізі динамічної поведінки тектонічних структур під впливом вибухових збурень, актуальними виявляються задачі математичного моделювання процесів взаємодії ударних хвиль з поверхнями розділу порід, що володіють різними механічними властивостями.

Специфіка динамічних явищ, що виникають у цих випадках пов'язана з короткочасністю високointенсивного початкового поля тиску, зазвичай, сконцентрованого на початковому етапі часу в малій області, пов'язаного з вільною граничною поверхнею середовища, і перебудові поверхні фронту ударної хвилі з її поширенням. Оскільки при цьому межа виділеної для розрахунку області еволюціонує з просуванням хвильового фронту, для аналізу таких процесів виявляються малоефективними традиційні методи розв'язування крайових задач математичної фізики.

Зазвичай при дослідженні ударних хвиль найбільша увага приділяється питанням геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій і обчисленням значень цих розривів, що дають найбільш повну інформацію про фронт ударної хвилі й інтенсивності стерпного нею імпульсу в кожній крапці фронту. Тому для постановки і розв'язування таких задач важливу роль грають методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, що забезпечує гарний кількісний опис широкого кола хвильових явищ різної фізичної природи [4, 5].

Застосування променевого методу полягає у виділенні функції оптичного шляху хвилі, чи ейконала, і побудові за допомогою рівняння ейконала системи променів і фронтів ударної хвилі. Ця задача порівняно

легко розв'язується для ізотропних середовищ, однак і там виникають деякі ускладнення, коли доводиться досліджувати взаємодію хвилі з деякою поверхнею розділу середовищ з різними механічними властивостями (пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища й ін.), в результаті чого утворюються каустики, пов'язані з фокусуванням енергії і необмеженим зростанням інтенсивності поля.

Фізична картина динамічних явищ різко ускладнюється при вивченні поширення хвиль сильних розривів у неоднорідних пружних анізотропних середовищах, оскільки в цих випадках польова функція виявляється векторною; для кожного напрямку існує три види хвиль, що відрізняються поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать як від поляризації хвилі, так і від напрямку її поширення; промені, у загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових і між їх напрямками не завжди існує однозначна відповідність. Крім того промені викривлюються, а на поверхні фронтів можуть утворюватися геометричні особливості.

Постановка задачі. В теорії поширення хвиль у неоднорідних пружних середовищах зазвичай розглядають два типи неоднорідностей – розривні та неперервні. Неоднорідності першого типу зазвичай реалізуються за рахунок з'єднання двох однорідних середовищ на загальній поверхні контакту. Поширення хвиль у таких середовищах поза поверхнею контакту відбувається вздовж прямолінійних променів. Однак під час взаємодії падаючої пружної хвилі з поверхнею розподілу утворюються додаткові відбиті та заломлені квазіповздовжні та квазіпоперечні хвилі. Процеси формування таких хвиль дослідженні у роботах [6-10]. У середовищах другого типу хвильові збурення розповсюджуються лише вздовж криволінійних променів. За рахунок криволінійних променів відбувається суттєва перебудова хвильових фронтів, що часто супроводжуються виникненням на них геометричних особливостей (каустик). У даній роботі розглядаються неоднорідності другого типу.

Динамічна рівновага пружного середовища в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (1)$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$; $c_{ik,pq}$ – параметри пружності; ρ – густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних переміщень, t – час.

В зв'язку з тим, що в анізотропних середовищах промені, у загальному випадку, не ортогональні поверхням хвильових фронтів,

будемо розрізняти вектори фазової v і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронт є поверхнею постійної фази $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}$, кожна елементарна площадка якого рухається уздовж місцевої одиничної нормалі \mathbf{n} зі швидкістю v . Тут \mathbf{r} – радіус-вектор точки фронту.

Вектори поляризації \mathbf{A} хвилі і її фазової швидкості \mathbf{v} для обраного напрямку \mathbf{n} можна побудувати з однорідної системи алгебраїчних рівнянь [4, 6]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (2)$$

як власні числа і вектори матриці її коефіцієнтів.

З умови існування нетривіальних розв'язків цієї системи випливає рівняння третього ступеня щодо квадрата фазової швидкості v^2

$$\sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} = 0, \quad (3)$$

за допомогою якого для кожного напрямку нормалі \mathbf{n} можна визначити і розташувати в порядку спадіння три швидкості по-різному поляризованих хвиль.

Надаючи величині v^2 в системі (2) по черзі одне зі знайдених значень $v_r^2(n)$ ($r = 1,2,3$), можна визначити компоненти векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ трьох хвиль, що рухаються в розглянутому напрямку зі своїми фазовими швидкостями $\mathbf{v}_r(n)$.

Поверхня фронту ударної хвилі визначається співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (4)$$

у якому функція τ повинна задовольняти диференціальному рівнянню в частинних похідних першого порядку [4]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

що узагальнює рівняння ейконала в геометричній оптиці для пружних анізотропних хвиль.

Величини, що входять у (5) p_k ($k = 1, 2, 3$) являють собою компоненти вектора рефракції

$$p_k \equiv \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{n_k}{v_r(n)} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Хвильовий фронт (4) ударної хвилі в однорідному анізотропному середовищі будується після знаходження розв'язку рівняння (5), яке за допомогою методу характеристик зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{d\tau} = \xi_k &= \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k/d\tau &= 0, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

Перша група цих рівнянь описує поширення хвилі уздовж променя з променевою швидкістю $\xi = \xi^{(r)}(n, x_k)$. Друга група рівнянь вказує на прямолінійність променів в однорідному середовищі.

Однак, якщо пружне середовище є неоднорідним, рівняння (6) замінюються більш складнішими співвідношеннями [4, 8-10]

$$\begin{aligned} \frac{dx_m}{d\tau} = \xi_m &\equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (m = 1, 2, 3), \\ \frac{dp_m}{d\tau} = \eta_m &\equiv \frac{-1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Наведені залежності дають можливість описати фронти складної геометрії, які перебудовуються під час свого поширення. В такому випадку промені стають криволінійними.

В загальному випадку на відміну від однорідного, для неоднорідного середовища густина ρ та параметри l, m, p є функціями координат x_1, x_2, x_3 . Розглянемо середовища, у яких змінною величиною є тільки величина m , яка змінюється за законом $m = \mu(\alpha_0 + \beta x_3)$. Тоді компоненти C_{ik}, p_q

тензора пружних параметрів трансверсально-ізоотропного середовища можна представити у формі шестирядної квадратної матриці:

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \mu(\alpha_0 + \beta x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - \mu(\alpha_0 + \beta x_3) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де λ і μ – параметри Ламе, l , m , p – константи, що відрізняють середовище від ізоотропного.

На основі запропонованої методики проведено комп'ютерне моделювання задачі про поширення хвиль, що породжуються ударним полем тиску в сферичній порожнині трансверсально-ізоотропного пружного середовища параметр ізоотропії m якого змінюється за лінійним законом.

Рисунок 1 ілюструє систему променів і фронтів розривної хвилі зі зміною часу для середовища 1 з параметрами: $m = \mu(\alpha_0 + \beta x_3)$, $\alpha_0 = 0.1$, $\beta = -5 \cdot 10^{-5}$, $\rho = 2760 \text{ кг/м}^3$, $E = 3 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.1$, параметри анізоотропії $l = 0.3\lambda$, $p = 0.5(\lambda + 2\mu)$.

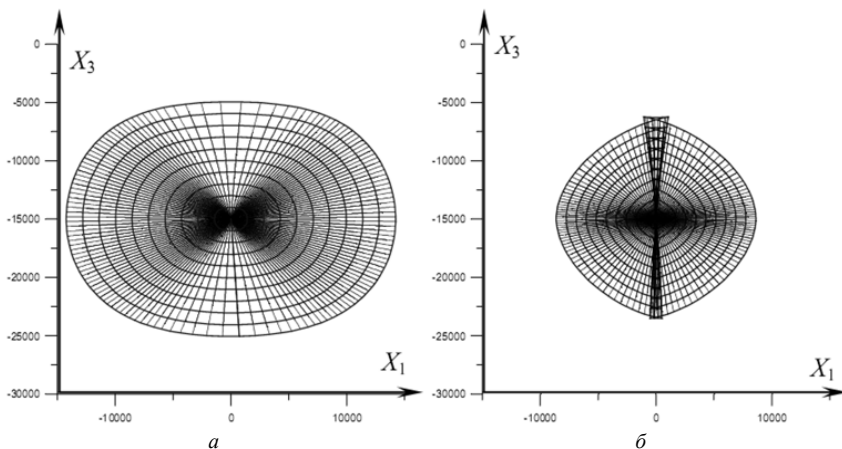


Рис 1. Система променів і фронтів в середовищі 1
а) квазіповздовжньої qP -вилі; б) квазіпоперечної qS -хвилі

Рисунок 2 відповідає випадку поширення хвилі у середовищі 2, де $m = \mu(\alpha_0 + \beta x_3)$, $\alpha_0 = -0.1$, $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$, $\rho = 2760 \text{ кг/м}^3$, $E = 3 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\nu = 0.1$, параметри анізотропії $l = -0.5\lambda$, $p = -0.3(\lambda + 2\mu)$.

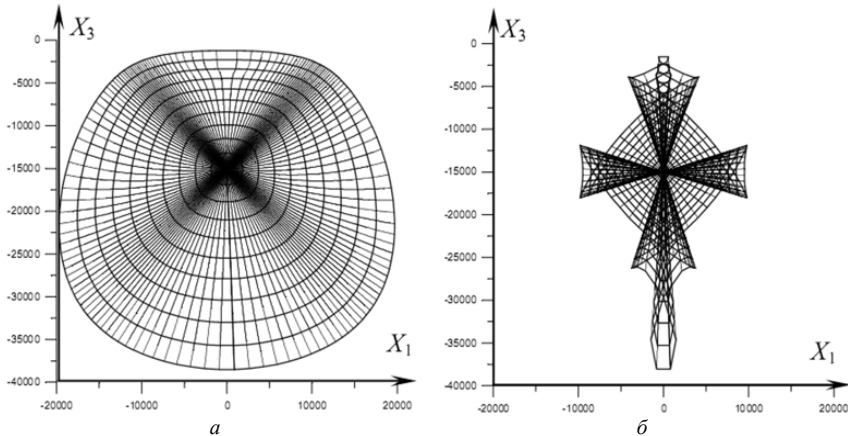


Рис 2. Система променів і фронтів в середовищі 2
а) квазіповздовжньої qP -хвилі; б) квазіпоперечної qS -хвилі

Висновки. Отримані результати дають змогу зробити висновки про те, що неоднорідність механічних властивостей пружного середовища призводить до суттєвої перебудови системи променів і фронтів. При цьому промені набувають суттєвої кривизни, а на поверхнях фронтів утворюються геометричні особливості – каустики, де промені фокусуються, внаслідок чого інтенсивність поля необмежено зростає.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Іванченко Г.М., Ваціліна О.В., Засць Ю.О. Розповсюдження фронтів розривних хвиль в неоднорідних трансверсально – ізотропних пружних середовищах // Вісник НТУ. – 2007. – №15. – С. 372 – 375.
2. Іванченко Г.М., Ваціліна О.В., Засць Ю.О. Перебудова фронтів розривних хвиль в неоднорідних трансверсально – ізотропних пружних середовищах // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81. – С. 135-141.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М., Наука, 1980. 304с.
4. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград, Наука, 1980. 280с.
5. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К., Наукова думка, 1988. 220с.

6. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т.64, №3.– С. 394–402.
7. Гуляев В.И., Луговой П.З., Крицкий В.Б., Иванченко Г.М. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболоидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофизический журнал. – 2005. – Т.27, №3. – С. 418-426.
8. Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.
9. Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media // International Journal of Solids and Structures – 2006. – 43. – P. 74-90.
10. Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M. Focusing and dispersion of a plane wave by transversally isotropic elastic lenses // Acoustical Physics – 2004. – Vol. 50. – 2. – P. 140-145.

Отримано 01.06.09

Рассматривается задача о перестройке плоской разрывной волны в неоднородной трансверсально-изотропной среде. На основе лучевого метода выведены разрешающие уравнения. Исследована зависимость формы лучей и фронтов от изменения параметров упругости.

The problem about discontinuous wave front transformation in an inhomogeneous transversely isotropic medium is considered with the use of the ray method the constitutive equations are constructed. Analysis of dependence of the rays and fronts shapes on the varying of the elasticity parameters is performed.

УДК 539.3

І.О. Охтень

Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук,

О.О. Лук'яненко, канд. техн. наук.

ДОСЛІДЖЕННЯ СУМІСНОГО ВПЛИВУ ПОЧАТКОВИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ І ЕКСЦЕНТРИСИТЕТУ НА СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

Досліджений сумісний вплив початкових недосконалостей та ексцентриситету прикладення поздовжньої сили на стійкість стержнів відкритого тонкостінного профілю. Скінченноелементна модель стержня сформована за допомогою сучасного обчислювального комплексу. Недосконалості задані у формі хвилеподібного випучування стінки та у формі загальної втрати стійкості, що отримані при лінійному розрахунку стійкості. Визначені критичні значення навантаження для центрально та позацентрально стиснутого стержня з ексцентриситетами та початковими недосконалостями.

Авторами досліджена стійкість стержнів відкритого тонкостінного профілю з урахуванням початкових недосконалостей [1].

Недосконалості були задані двома способами: у формі хвилеподібного випучування стінки та у формі загальної втрати стійкості, що отримані при лінійному розрахунку стержня на стійкість. Хвилеподібне випучування відповідало першій формі втрати стійкості, а загальна втрата стійкості – п'ятнадцятій. Результати дослідження наведені на графіках (рис. 1 і 2). На графіках по осі абсцис відкладені величини амплітуд, що віднесені до товщини елемента, а по осі ординат – значення відповідних критичних сил, що віднесені до P_k (критичної сили, яка була отримана при лінійному розрахунку).

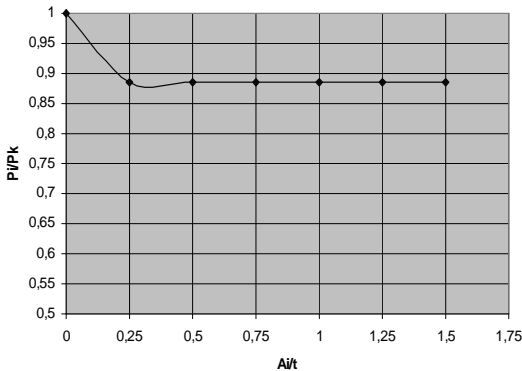


Рис. 1. Графік критичних сил при недосконалостях у вигляді першої форми втрати стійкості

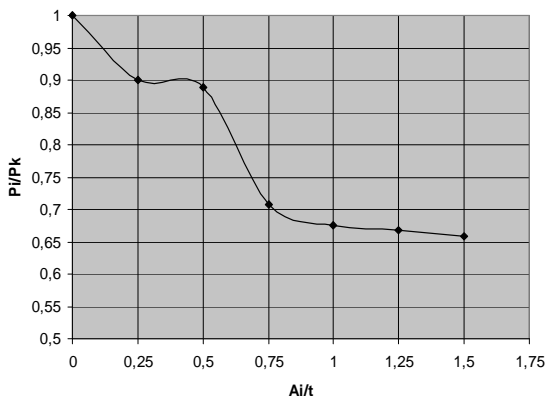


Рис. 2. Графік критичних сил при недосконалостях у вигляді п'ятнадцятої форми втрати стійкості

На основі даних графіків зроблений висновок, що втрата стійкості стержнів для всіх величин початкових недосконалостей по загальній формі досягається раніше ніж при недосконалостях по формі хвилеподібного випучування стінки і полиць.

Розрахунки ідеальних і недосконалих стержнів різного поперечного перерізу (160x50x30x2, 150x50x20x2, 200x60x24x2) у лінійній постановці показали, що величини критичних сил, які відповідають різним формам втрати стійкості, зменшуються повільно - на рис. 3 наведений спектр критичних сил для стержня 200x60x24x2, довжиною 2м, і кожна наступна критична сила відрізняється від попередньої в межах 1-10%.

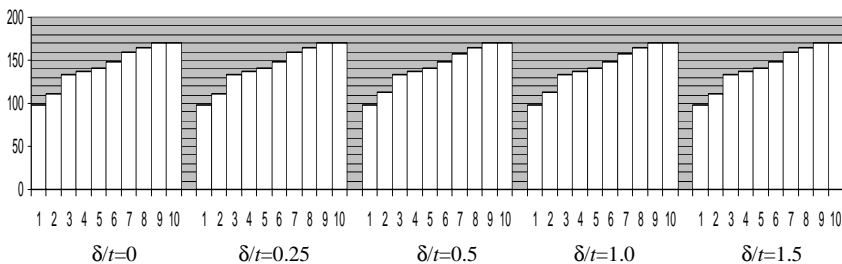


Рис. 3. Спектри критичних сил для центрально стиснутого стержня при різних значеннях початкових недосконалостей

Втрата стійкості може відбуватися по одній з чотирьох форм: загальна втрата стійкості (рис. 4,а), хвилеподібне випучування стінок (рис. 4,б), депланації стержня (рис. 4,в) і втрата стійкості на кінцях

стержня (рис. 4,г). Аналогічні форми отримані і при проведенні лабораторних випробувань стержнів. Такий густий спектр критичних сил, а також наявність початкових недосконалостей стержнів вимагає досліджувати стійкість з урахуванням недосконалостей по всім можливим формам. Крім цього необхідно досліджувати вплив ексцентриситету прикладення сили, який можна вважати одним з видів недосконалостей.

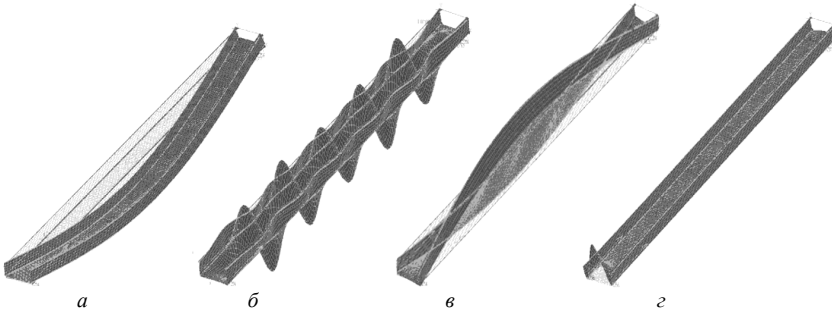


Рис. 4. Можливі форми втрати стійкості стержнів при лінійному розрахунку

Для проведення повного аналізу стійкості стержнів необхідно враховувати сумісний вплив недосконалостей, по чотирьом можливим формам, і різних значень ексцентриситетів прикладення сили.

Для дослідження сумісного впливу початкових недосконалостей і ексцентриситету на стійкість стержнів відкритого профілю вибрано стержень, що зображений на рис. 5. Розглядалися три варіанти навантаження: центрально і позациентрово стиснутий стержень з ексцентриситетами 10 і 20 мм (рис. 5).

Скінченноелементна (математична) модель стержня формується за допомогою обчислювального комплексу оснований на МКЕ. Полички, стінки і відгини стержня моделювалися плоскими скінченними чотирикутними елементами розмірами 10x10мм, всього у моделі 8600 елементів і 16640 вузлів. Матеріал - сталь Ст3 з наступними механічними характеристиками: $E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0.3$.

Розрахункову модель недосконалото стержня будуються за допомогою обчислювального комплексу скінченноелементного аналізу та розробленої програми, в якій для формування нових координат вузлів моделі стержня компоненти вектора подібного до форми втрати стійкості додаються до відповідних координат середньої поверхні стержня. Амплітуда недосконалостей приймаються пропорційною товщині стінки стержня t : $\delta/t=0.25$; $\delta/t=0.5$; $\delta/t=1.0$; $\delta/t=1.5$.

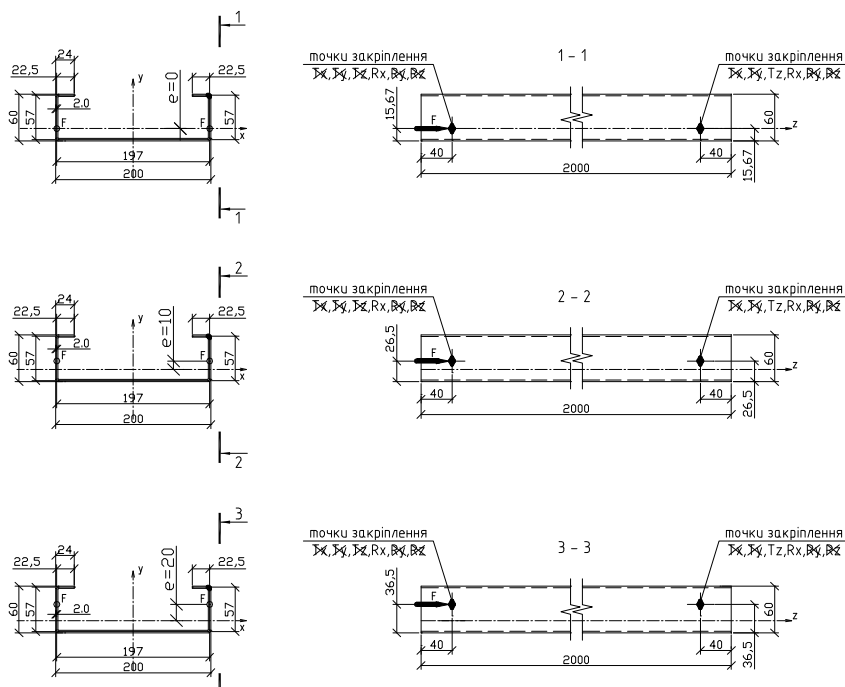


Рис. 5. Варіанти навантаження стержня

Використовуючи процедуру обчислювального комплексу розв'язання нелінійної задачі статки, для стержня з різними амплітудами початкових недосконалостей визначаються граничні значення стискаючої сили. Навантаження на стержень задається у вигляді $P_{кр} \cdot \beta$, де β – безрозмірний параметр, що змінюється в інтервалі від 0 до 1. На кожному етапі навантаження за допомогою метода Ньютона-Рафсона знаходяться розв'язки рівняння рівноваги недеформованого стержня до забезпечення умови збіжності по зміні нев'язки навантаження та по роботі внутрішніх сил на приростах вузлових переміщень.

Для трьох значень ексцентриситету проведено аналіз впливу початкових недосконалостей на величину критичної сили. Початкові деформації моделювалися у вигляді 1-ї форми втрати стійкості, отриманої при лінійному розрахунку. Прораховані варіанти з різними амплітудами початкових недосконалостей, які приймаються пропорційними товщині стінки стержня t : $\delta/t=0.25$; $\delta/t=0.5$; $\delta/t=1.0$; $\delta/t=1.5$.

Перша форма втрати стійкості для недеформованого стержня відбувається у вигляді хвилеподібного випучування стінки і полиць (рис. 6). Ця форма була

перетворена вище описаним способом у початкові недосконалості з різними амплітудними значеннями для проведення нелінійних розрахунків. На рис. 7 у вигляді графіків наведено результати таких розрахунків. Тут по осі абсцис відкладено амплітуду недосконалостей, а по осі ординат – значення критичної сили. Графік розбитий на дві частини: лінійний і нелінійний розрахунки.

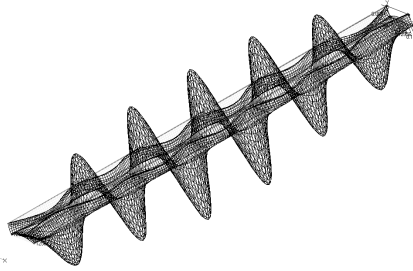


Рис. 6. Перша форма втрати стійкості ідеального центрального стиснутого стержня



Рис. 7. Результати розрахунків центрально стиснутого стержня

На основі розрахунків такого деформованого стержня можна зробити такі висновки:

- При лінійному розрахунку критична сила зменшується при збільшенні амплітуди недосконалостей. Перші форми страти стійкості можуть змінюватися зі зміною амплітуди недосконалостей.
- Критична сила деформованого стержня при нелінійному розрахунку на 1,5-3,5% нижче від ідеального.
- Зміна амплітуди початкових недосконалостей майже не впливає на величину критичної сили, зміна коливається в межах 0,2%.
- Втрата стійкості відбувається у вигляді зв'язного випучування, тобто одночасного випучування по зальній і місцевій формам.
- При розрахунку стержня з ексцентриситетом рівним 10 мм, перша форма втрати стійкості недеформованого стержня відбувається у вигляді депланації стержня, тобто його закручуванні відносно власної осі (рис. 8).

На основі нелінійного розрахунку такого деформованого стержня з різними значеннями амплітуд початкових недосконалостей (рис. 9) можна зробити такі висновки:

- Початкові недосконалості, що задані у вигляді форми деплацації, майже не впливають на величину критичної сили.

- При збільшенні величини початкових недосконалостей відбувається незначне збільшення критичної сили.

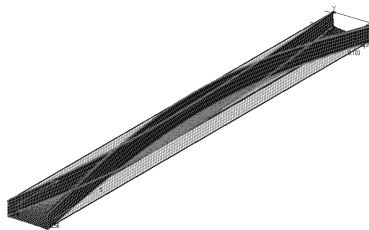


Рис. 8. Перша форма втрати стійкості ідеального стержня при позacentровому стиску з ексцентриситетом $e=10\text{мм}$

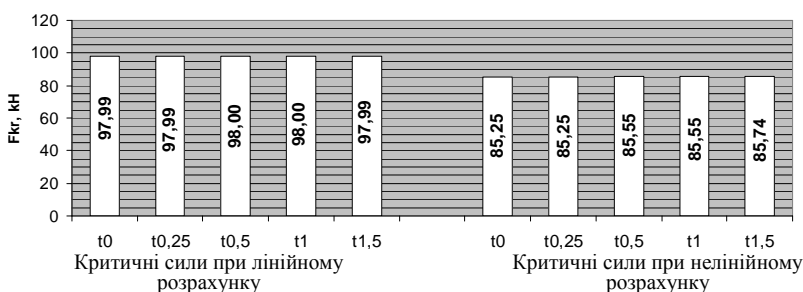


Рис. 9. Результати розрахунків позacentрово стиснутого стержня ($e=10\text{мм}$)

Ці результати підтверджені розрахунками з ексцентриситетом 20мм (рис. 10), при якому виявлені аналогічні закономірності, при чому у даному випадку зміна величини ексцентриситету впливає на критичну силу ще в меншій мірі ніж при $e=10\text{ мм}$.

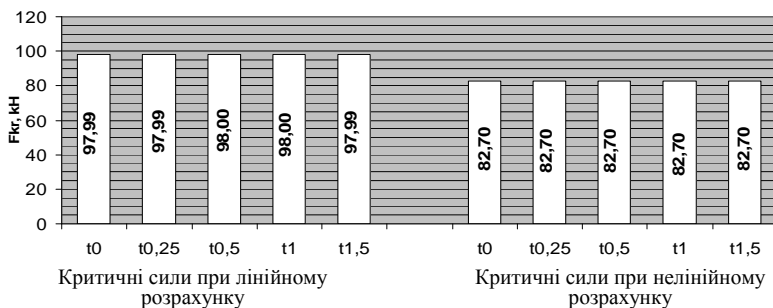


Рис. 10. Результати розрахунків позacentрово стиснутого стержня ($e=20\text{мм}$)

Загалом, після проведення серії розрахунків і випробувань можна виділити чотири види форм втрати стійкості для стержнів такого типу: загальна втрата стійкості (рис. 4,а), хвилеподібне випучування стінок (рис. 4,б), депланації стержня (рис. 4,в) і втрата стійкості на кінцях стержня (рис. 4,г).

Дослідивши вплив різних видів недосконалостей на стійкість стержнів, можна зробити наступні висновки:

- Лише недосконалості, що задані у вигляді загальної форми втрати стійкості і хвилеподібного спучування впливають на величину критичної сили.
- Вплив величини недосконалостей проявляється лише при задані їх у вигляді загальної форми втрати стійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Охтеня І.О., Гоцуляк Є.О., Лук'яненко О.О.* Дослідження стійкості тонкостінних елементів відкритого профілю з урахуванням початкових недосконалостей // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.82. – К.:КНУБА, 2008.
2. *Ракша С.В.* Связная потеря устойчивости и весовая оптимизация тонкостенных стержней открытого профиля. Дисертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Днепропетровск – 2003.
3. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
4. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807с.
5. *Доннелл Л.Г., Ван К.* Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии // Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит.-ры. – 1951. – №408, С.91 – 107.
6. *Койтер В.Т.* Устойчивость и критическое поведение упругих систем // Механика: Сб. перев. иностр. статей. – 1960. – №5, С.99 – 110.
7. Строительные нормы и правила. СНиП II-23-81*. Стальные конструкции/Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990. –96с.

Отримано 03.06.09

Исследовано совместное влияние начальных несовершенств и эксцентриситета приложения продольной силы на устойчивость стержней открытого тонкостенного профиля. Конечноеэлементная модель стержня сформирована с помощью современного вычислительного комплекса. Несовершенства заданы в форме волнообразного выпучивания стенки и в форме общей потери устойчивости, которые получены при линейном расчете. Определены критические значения нагрузки для центрально и внецентренно сжатого стержня с эксцентриситетами и начальными несовершенствами.

Combined influence of initial imperfections and eccentricity of longitudinal force on stability of the opened thin-walled type bars is investigated. The finite element model of bar is built with the use of the modern program. Imperfections are set in form undulating goggling of wall and in form general loss of stability, defined by the buckling analysis. The critical loads are found for central and eccentrically compressed bar with initial imperfections.

УДК 531.31

М.В. Гончаренко, канд. техн. наук
П.П. Гусар

АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ РЕАКЦІЇ ПІЛОНА ПРИ СТОХАСТИЧНОМУ ВІТРОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Досліджується вплив стохастичного характеру вітрового навантаження на коливання пластинчато-стрижневої конструкції. Вітрове навантаження представляється сумою двох складових: усталеного тиску і пульсаційної складової, яка описується за допомогою спектра Давенпорта. Дослідження сукупності реалізацій замінюється дослідженням однієї достатньо довгої реалізації. На основі методу статистичного моделювання будується реалізація випадкового процесу. Графік коливань системи будується як сума гармонічних коливань різної частоти з відповідною інтенсивністю і стохастичною початковою фазою.

Досліджується динамічна реакція пластинчато-стрижневої просторової системи, що представляє собою альтернативну конструкцію пілона мосту. В м. Салехарді у Росії збудовано міст, загальний вигляд якого показано на рис. 1 [3]. Автошляховий міст з двома смугами проходить через річку Шайтанку і пов'язує центральний район міста з аеропортом. Проект мосту розроблений Проектним Бюро АТ Мостобуд (м. Київ). Пілон має нахил у бік головного прогону, що обумовлено архітектурними міркуваннями – пілон символізує руку, що підняла факел. На верхівці пілона розташовано ресторан, до якого ведуть ліфти, обладнані ззовні ніг пілона, і сходи, розташовані всередині ніг пілона. Нога пілона має прямокутний коробчастий переріз. Вивчається можливість застосування пілона, побудованого зі стрижневих елементів, замість пілона суцільного коробчатого перерізу.

Основні конструктивні характеристики було збережено. Ноги пілона мають квадратний поперечний переріз 3,5х3,5 м. Відносно повздовжньої осі моста пілон защемлений в опорі, відносно поперечної осі має шарнірне обпирання. Вгорі під рестораном ноги пілона поєднано ригелем. Ресторан розташовано на відстані 50 м від шарніру. Складними вузлами є обпирання пілону на шарнір і поєднання пілону з ригелем. При створенні стрижневої конструкції вважалось, що ці елементи збережено такими, як в оригінальній конструкції. Обпирання пілона було виконано на литі шарніри за рахунок системи діафрагм, висотою 2,5 м, товщиною 40мм. Шарніри допускають поворот на $\pm 20^\circ$, що дозволяє вести монтаж у вертикальному положенні.

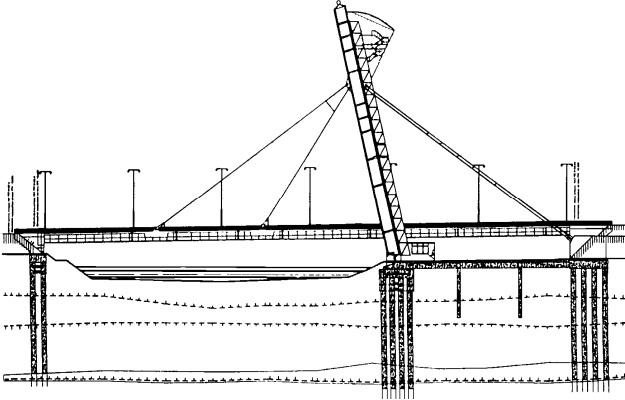


Рис. 1. Загальний вигляд мосту

Розроблено просторову стрижневу конструкцію, показану на рис. 2. Такий варіант споруди дозволить використовувати стандартні елементи, спростить ремонт ліфтового обладнання, зробить перебування на сходах більш комфортним.

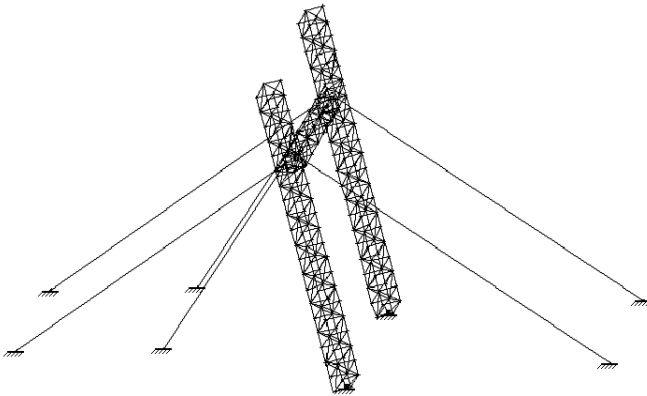


Рис. 2. Стрижнева конструкція пілона

Розрахунки стрижневого пілона здійснено у програмному комплексі “Ліра”. Навантаження, що діє на пилон, показане на рис. 3, складається з власної ваги конструкції пілона, ваги ресторану і додаткових зусиль від натягу вант. Звичайно за допомогою натягу вант зменшують прогин головного прольоту мосту. Пилон звичайно розташований або вертикально, або нахилений від головного прольоту, щоб своєю вагою

підтримувати головний прогін. В даному випадку задача ускладнюється і берегові ванти повинні витримувати натяг руслових вант і підтримувати пілон.

Значне навантаження створює вітровий потік впоперек мосту. Внаслідок великої підвітряної площі ресторану вітрове навантаження грає визначальну роль у конструюванні пілона.

За допомогою “ЛИР-СТК” було підібрано стрижневі елементи конструкції. Було розглянуто декілька варіантів решітки, при різних перерізах елементів. Кутові елементи прийняті у вигляді труб розміром 299x20, решта – труби 168x18.

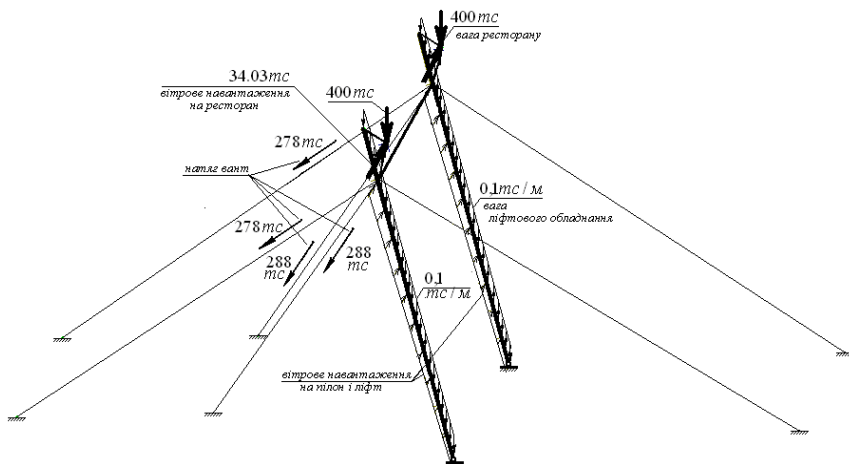


Рис.3. Навантаження на пілон

Значне навантаження створює вітровий потік впоперек мосту. Внаслідок великої підвітряної площі ресторану вітрове навантаження грає визначальну роль у конструюванні пілона. Під час розрахунків споруд на вітрове навантаження приймається, що дія вітрового потоку складається з певного усталеного тиску, викликаного постійною складовою швидкості вітру, та випадкових пульсацій, що виникають внаслідок турбулентного характеру вітрового потоку, тобто на постійну складову швидкості вітру накладаються нерегулярні пульсаційні складові (пориви), що викликають вимушені коливання споруди в напрямку швидкості потоку [1]

$$v(z, t) = \bar{v}(z) + v'(z, t), \quad (1)$$

де $\bar{v}(z)$ – середня постійна складова швидкості, $v'(z, t)$ – пульсацій на складова швидкості вітру на висоті z .

Тиск w повітряного потоку, що рухається зі швидкістю v , у деякій точці визначається рівнянням Бернуллі

$$w = 0.5 \cdot \rho \cdot v^2, \quad (2)$$

де ρ – щільність повітря, за звичайних умов $\rho = 1.25 \text{ кг/м}^3$.

Згідно зі стандартом [4], розрахункове значення середньої складової вітрового тиску на висоті z над поверхнею землі визначається за формулою

$$w_m^{позр.}(z) = w_m^{норм.} \cdot \gamma_f, \quad w_m^{норм.}(z) = w_0 \cdot k(z), \quad (3)$$

де γ_f – коефіцієнт надійності за навантаженням, $\gamma_f = 1.3$; w_0 – нормативний швидкісний напір вітру на висоті 10 м над поверхнею землі, для даного випадку $w_0 = 4.7088 \text{ Па}$; $k(z)$ – коефіцієнт, що враховує зміну швидкості напору з висотою. Значення усталеної складової вітрового тиску на висоті 50 м складає:

$$w_m^{позр.}(50) = 1.3 \cdot 4.7088 \cdot \left(\frac{50}{10}\right)^{0.3} = 9,9203 \text{ Па}. \quad (4)$$

Пульсаційну складову вітрового тиску можна визначити за допомогою спектра Давенпорта [1]

$$G(\omega) = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2\pi)^{2/3} \cdot 1200 \cdot \bar{V}_0^{2/3} \cdot \omega}{\left((2\pi\bar{V}_0)^2 + (1200 \cdot \omega)^2 \right)^{4/3}}, \quad (5)$$

де \bar{V}_0 – швидкість вітру на висоті 50 м, $\bar{V}_0 = 3.984 \text{ м/с}$. Графік спектра Давенпорта показано на рис. 4.

Даний процес є ергодичним, а в такому випадку дослідження сукупності реалізацій можна замінити дослідженням однієї, але достатньо довгої реалізації. На базі методу статистичного моделювання будеється реалізація випадкового процесу. В кожен момент часу значення навантаження визначається як сума гармонік, амплітуда яких залежить

від спектральної щільності процесу, а фаза є рівномірно розподіленим випадковим процесом.

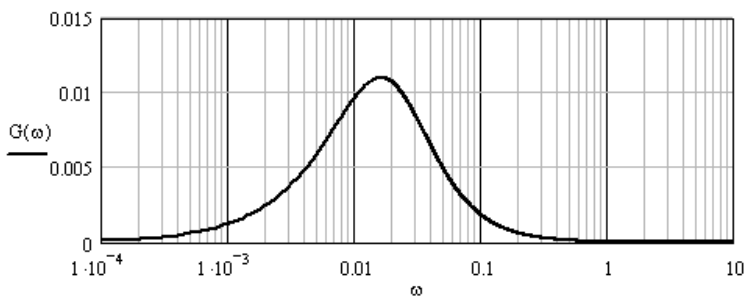


Рис.4. Спектр Давенпорта

Реалізацію даного процесу можна отримати методом статистичного моделювання за допомогою виразу [2]

$$p(t) = \sum_{i=1}^n \cos(\omega_i \cdot t + \delta_i) \cdot \sqrt{2G(\omega_i)\Delta\omega_i}, \quad (6)$$

де δ_i – випадковий процес, рівномірно розподілений на інтервалі від 0 до 2π , $G(\omega_i)$ – спектр Давенпорта, $\Delta\omega_i$ – крок зміни колової частоти, ω_i – i -те значення колової частоти.

Для моделювання використовується програмний комплекс MathCad. Графік випадкового процесу зображений на рис. 5.

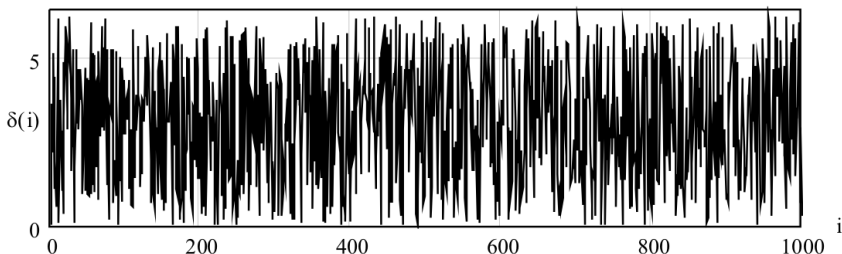


Рис. 5. Графік випадкової початкової фази

Виконавши обчислення за допомогою виразу (6), отримується реалізація випадкового динамічного навантаження (рис. 6).

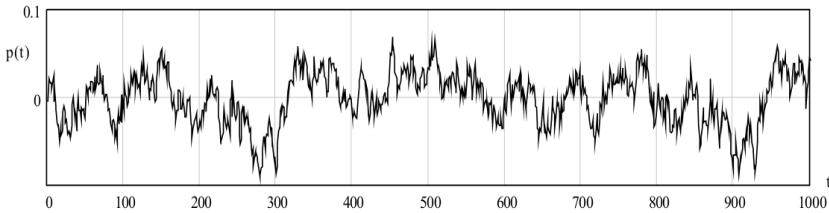


Рис. 6. Графік випадкового динамічного навантаження

Для визначення реакції системи на таке навантаження виконуються розрахунки в програмному комплексі Ліра на гармонічне навантаження. Інтенсивність навантаження приймається одиничною, а діапазон розрахункових частот від 0 до 2 рад/с з кроком 0,05 (в цьому діапазоні спектр Давенпорта приймає найбільші значення). Потім отримані гармоніки помножуються на відповідні амплітуди виразу (6) і сумуються. Отриманий графік переміщень показаний на рис. 7.

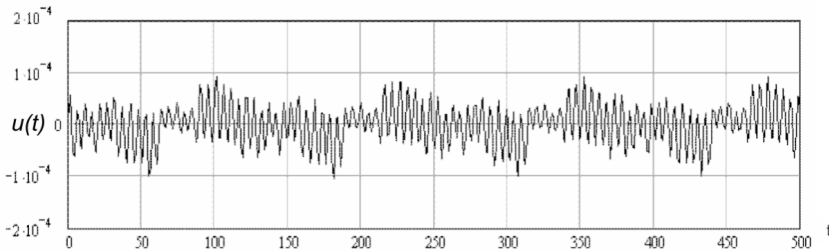


Рис.7. Реакція системи на вітрове навантаження

Розрахунок показав, що при швидкостях вітру, передбачених нормативними документами, переміщення від статичної і стохастичної складових не перевищують допустимі. Можна зробити висновок, що така конструкція може бути створена, для чого потрібно проводити подальші розрахунки і розробки вузлів конструкції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С.* Імовірнісні методи розрахунку конструкцій. Випадкові коливання пружних систем: Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2005. – 420 с.
2. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
3. *Корнеев М.М.* Стальные мосты: теоретическое и практическое пособие по проектированию. – К.: 2003. – 547с.

4. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия/Госстрой СССР. — М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. - 36 с.

Отримано 08.06.09

Исследуется влияние стохастического характера ветровой нагрузки на колебания пластинчато-стержневой конструкции. Ветровая нагрузка представляется как сумма постоянного давления и пульсационной составляющей, которая описывается с помощью спектра Давенпорта. Исследования совокупности реализаций заменяется исследованием одной достаточно длинной реализации. На основании метода статистического моделирования строится реализация случайного процесса. График колебаний системы строится как сумма гармонических колебаний разной частоты с соответствующей интенсивностью и случайной начальной фазой.

The effect of wind load stochastic character on construction oscillation is studied. Wind load is constitute of two parts: constant pressure and pressure pulsation. Last one describe by Davenport spectrum. Analysis sum of realization replace by analysis of one rather long realization. Compilation of stochastic process realization is based on using the statistical modeling method. Construction oscillation diagram is made as sum of different frequency harmonic oscillation with adequate intension and stochastic starting phase.

УДК 539.375

Б.М. Дохняк, канд. техн. наук

Ю.Г. Козуб, канд. техн. наук

М.І. Львова

Г.О. Козуб, канд. техн. наук

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО – ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СТРІЧКОВО-СТРУННИХ СИТ ІНКРЕМЕНТАЛЬНИМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянуто розв'язок динамічної задачі теорії пружності з використанням інкрементального методу скінченних елементів. Виконано розрахунок параметрів жорсткості та власних частот коливань елементів стрічково-струнного сита.

Вступ. Сьогодні на металургійних підприємствах, у вугільній та будівельній промисловості використовують грохоти для розділення по фракціям дроблених гірничих порід та вугілля. Для просівання можуть використовуватись металеві або гумові сита. При використанні гумових сит збільшується просівання й поліпшується його якість за рахунок товщини гумових сит [1, 2].

Раніше для виготовлення сит використовувалася дротова суцільна металева сітка, потім струнна, котра набирається з окремих струн. Але в цих випадках спостерігається зниження ефективності просівання, обумовленою здебільшого більше низьким перетином, що визначається як широкими перемичками між осередками, так і порівняно великою втратою робочої площі за рахунок деталей кріплення і погіршення якості просівання за рахунок товщини сит. Також застосовувалися так звані традиційні конструкції гумових сит, тобто із квадратними отворами без армування, армованих сталевим аркушем або армованих сталевую дротяною сіткою. Однак доцільніше застосовувати резонуючі стрічково-струнні сита, у яких усунуті вище згадані недоліки. Такі стрічково-струнні сита підвищують продуктивність і ефективність просівання й навіть іноді перевершують результати, одержувані при використанні дротових сит. Термін служби резонуючих стрічково-струнних сит досягає до 8000 годин.

1. Постановка задачі. Резонуюче стрічково-струнне сито являє собою поверхню, що просіває, та складається з окремих елементів - стрічок-струн з періодичними виступами зубцями з однієї сторони стрічки. Геометричні параметри стрічки-струни показані на рис.1: довжина 382 мм, розрахункова довжина 370 мм. Стрічки виготовлені з

гуми марки 2959, умовно-рівноважний модуль зсуву $\mu = 0,74$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,49$, щільність $\rho = 1200$ кг/м³, [3].

Конструктивні параметри стрічок-струн і її натягування вибираються такими, щоб забезпечувалася близькість частоти основного тону вільних коливань струн до частоти коливань грохоту. Режимні параметри цих сит не виходять за межі параметрів режимів сучасних серійних вібраційних грохотів і забезпечують одержання технологічних показників в області їхніх паспортних характеристик.

З умов роботи еластомірних елементів сит спочатку моделюється монтажне розтягання стрічки-струни на 20%, яка закріплюється в спеціальних опорах підситника грохоту. Потім прикладається експлуатаційне поверхнєве навантаження інтенсивністю q , при цьому амплітуда прогину складає порядку 10-20% від висоти конструкції.

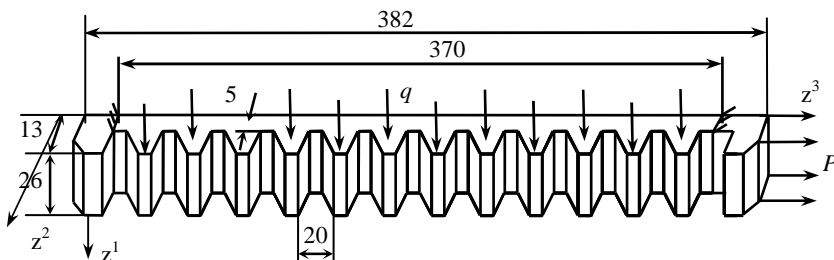


Рис. 1. Стрічка-струна

2. Вихідні співвідношення інкрементальної теорії пружності.

Для опису напружено – деформованого стану конструкції з попередніми напруженнями та переміщеннями використовується інкрементальна тривимірна теорія пружності. Розв’язання задачі будується на основі використання методу скінченних елементів [4]. Розглядається два рівноважних стани конструкції – попередній, на якому діють напруження σ_0^{ij} , та суміжний з невідомими σ^{ij} . Варіаційна постановка динамічної задачі для пружного тіла з початковими напруженнями із заданими додатковими масовими силами Q_i , поверхневими силами P^i і переміщеннями u_i має вигляд:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V (\sigma^{ij} + \sigma_0^{ij}) \delta(e_{ij} + e_{ij}^0) dV - \delta \iiint_V \frac{1}{2} \rho u_m \dot{u}_m dV - \right. \\ \left. - \iiint_V (Q^i + Q_0^i) \delta u_i dV - \iint_S (P^i + P_0^i) \delta u_i dS dt \right\} dt = 0.$$

Тут індекс (0) відноситься до попереднього стану, \dot{u}_i – швидкість.

Повний тензор деформації визначається співвідношенням

$$e_{ij} + e_{ij}^0 = \frac{1}{2} [u_{j,i} + u_{j,i}^0 + u_{i,j} + u_{i,j}^0 + (u_{j,i} + u_{j,i}^0)(u_{i,j} + u_{i,j}^0)],$$

$$\text{де } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial z^j}.$$

Враховуючи, що в попередньому стані виконується умови рівноваги, а в суміжному всі параметри лінійно залежні функції від u_i , для пружної задачі можна записати

$$\iiint_V (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_0^{ij} u_{m,i} u_{m,j}) dV - \iiint_V Q^i \delta u_i dV - \iint_S P^i \delta u_i dS = 0,$$

$$\text{де } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(\delta_i^m + u_{m,i}) u_{m,j} + (\delta_j^m + u_{m,j}) u_{m,i}].$$

Власні частоти ω та форми гармонійних коливань визначаються із рівняння

$$\iiint_V (\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_0^{ij} u_{m,i} u_{m,j}) dV - \omega^2 \iiint_V \rho u_m u_m dV = 0.$$

Переміщення попереднього стану u_i^0 вважаються відомими, а в суміжному варіюються величини u_i . Функціональну залежність переміщень u_i по об'єму скінченного елемента можна записати через вузлові переміщення Δ_i^k і функції форми N_k у вигляді:

$$u_i = N_k \Delta_i^k.$$

Стационарність повної потенційної енергії приводить до системи лінійних рівнянь пружної задачі

$$[K^{st} + K_0] \{\Delta_t\} = \{P^s\},$$

де $[K]$ – матриця жорсткості конструкції, $[K_0]$ – геометрична, або інкрементальна матриця

$$[K^{st}] = \iiint_V C^{ijkl} \frac{\partial N_i^s}{\partial z^j} \frac{\partial N_k^t}{\partial z^l} dV; [K_0^{st}] = \iiint_V \sigma_0^{ij} \frac{\partial N_p^s}{\partial z^i} \frac{\partial N_p^t}{\partial z^j} dV.$$

Визначення мод власних коливань зводиться до розв'язання узагальненої проблеми власних векторів і власних чисел

$$([K + K_0] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = 0.$$

При побудові матриці мас використовуються ті ж функції форми, що і для матриці жорсткості

$$[M] = \iiint_V \rho \{N\} \{N\}^T dV.$$

Для конструкцій, що працюють при динамічних навантаженнях практичну цінність мають нижчі значення власних частот. У випадках, коли матриці жорсткості і мас мають велику розмірність раціонально використовувати наближені методи визначення власних значень. Одним з таких підходів є ітераційний алгоритм [5]:

$$[K + K_0] \{\Delta_{n+1}\} = \lambda [M] \{\Delta_n\}.$$

Вектор початкового наближення Δ_0 вибирається з урахуванням кінематичних обмежень, накладених на конструкцію.

Мінімальне значення власної частоти визначається по формулі

$$\omega^2 \approx \frac{\{\Delta_n\}^T [K + K_0] \{\Delta_n\}}{\{\Delta_n\}^T [M] \{\Delta_n\}}.$$

Використовуючи M -ортогональність власних векторів, можна скоротити порядок системи рівнянь і визначити наступне власне значення.

В результаті чисельного моделювання поставленої задачі в обчислювальному комплексі «МІРЕЛА+» [6] отримано наступні результати.

Зусилля попереднього натягування струни становить $P=75,4$ Н при подовженні на 20%. Розподіл напруження σ^{33} в ослабленому перетині показано на рис. 2. На рис. 3 зображено напружено-деформований стан ділянки струни у вигляді муарових полос. На рис. 2. показано залежність жорсткості вигину струни сита з поверхневим навантаження $q=1,632$ кПа, обчислені по класичній теорії пружності $C_{(кл)} = 80,4$ Н/м та інкрементальній $C_{(інн)} = 1048,6$ Н/м. При заданій інтенсивності розтягування розбіжність в жорсткостях складає 13 разів.

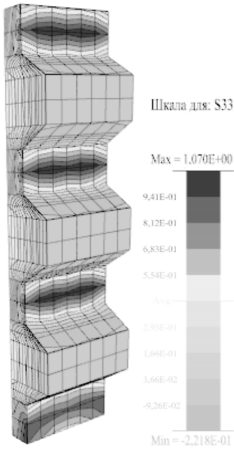


Рис. 2. Напружений стан стрічки-струни

Розподіл напружень σ^{33} по висоті стрічки-струни h із попереднім напруженням при відносному прогині 15% від висоти конструкції показано на рис. 3. Як видно з графіків, характер розподілу напружень поверхні зі сторони зубців (3) неоднорідний.

Перша власна кругова частота для струни без початкових переміщень складає $\omega_{(кл)} = 18,57$ с⁻¹. Для струни з початковим подовженням 20% нижча кругова частота обчислена по інкрементальній теорії дорівнює $\omega_{(інн)} = 67,45$ с⁻¹.

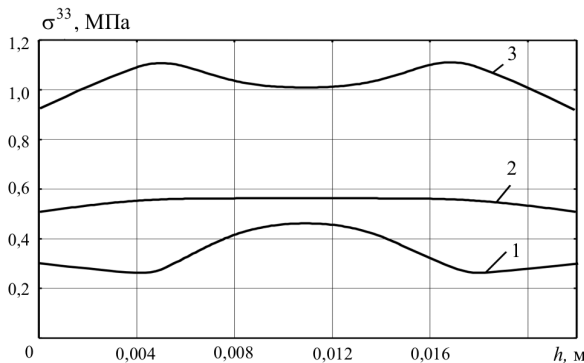


Рис. 3. Розподіл напруг σ^{33} по висоті стрічки-струни h при розтяганні 20 % по товщині:

1 - $z^2 = 0$ м; 2 - $z^2 = 0,0025$ м; 3 - $z^2 = 0,005$ м

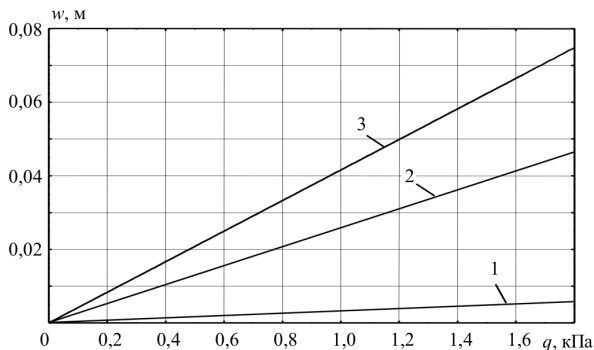


Рис. 4. Залежність прогину w в центрі струни від навантаження q при попередньому розтяганні 1 - на 20%; 2 - 10%; 3 - без врахування попереднього напруження

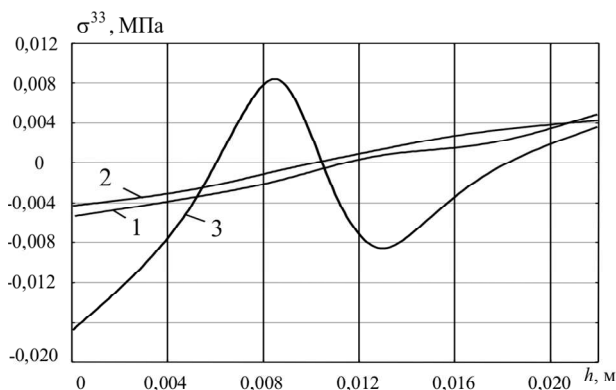


Рис. 5. Розподіл напружень вигину σ^{33} по висоті стрічки-струни h із попередньою напруженням при прогині 15%: 1 - $z^2=0$ м; 2 - $z^2=0,0025$ м; 3 - $z^2=0,005$ м

Висновки. Використання класичної теорії пружності для розрахунку конструкцій з попереднім напруженням дає значно занижені результати по жорсткості і динамічним параметрам. Інкрементальна теорія дозволяє найбільш реально дослідити напружено-деформований стан, частоти і форми коливань подібних конструкцій, що дуже важливо при проектуванні нових механізмів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вайсберг Л.А.* Проектирование и расчет вибрационных грохотов.-М.: Недра, 1986.-144с.
2. *Резонирующие ленточно-струйные сита для грохотов / А.Г. Червоненко, Л.А. Вайсберг, О.А. Вальцева и др. // Строительные материалы.-1985. -№2.- с.29-30.*
3. *Метод конечных элементов в механике эластомеров/В.В. Киричевский.-К.: Наук. думка, 2002.-655с.*
4. *Дохняк Б.М.* Применение моментной схемы метода конечных элементов для решения задач инкрементальной теории упругости с начальными напряжениями /Киричевский В.В., Ищенко М.И. // Проблемы прочности.– 2006.– №3. –С.131-143.
5. *Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский и др. ; под общ. ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха – Киев: Вища шк., 1982. – 480 с.*
6. *Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+». – / Киричевский В.В., Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г. и др. – К.: Наукова думка, 2005. – 403 с.*

Отримано 17.06.09

Рассмотрено решение динамической задачи теории упругости с использованием инкрементального метода конечных элементов. Выполнен расчет параметров жесткости и собственных частот колебания предварительно напряженных элементов ленточно-струнного сита.

The decision of dynamic task of theory of tensile is considered with the use of incremental finite elements method. The of parameters of inflexibility and eigen frequencies of oscillation of preliminary elements of band-string sieve is executed.

УДК 539.413, 622.243

С.М. Худолій, канд. техн. наук

Л.В. Гловач

ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНИХ СТЕРЖНІВ У КРИВОЛІНІЙНИХ КАНАЛАХ

Сформульована задача про визначення статичних параметрів, які впливають на сили тертя на криволінійних ділянках пружного стержня і на різних етапах його згину у криволінійних каналах. За допомогою розробленого підходу досліджено вплив обрису осьової лінії свердловини на значення параметрів деформованого стану бурильної колони при здійсненні спуску - підіймальних робіт.

Вступ. У загальному випадку криволінійні гнучкі стержні піддаються впливу довільних статичних (силових або деформаційних), а також динамічних збурень, обумовлених силовими та кінематичними збудженнями гармонічних коливань, переносними, відносними та коріолісовими силами інерції, викликаними складним рухом несучого тіла у гравітаційному полі центру тяжіння, гіроскопічними силами інерції роторів, що обертаються, силами взаємодії з зовнішніми потоками рідини та газу, неоднорідними силами інерції та силами в'язкого тертя, що виникають при русі в трубчастих конструкціях рідини.

До числа найбільш актуальних проблем будівельної механіки криволінійних стержнів відносяться питання дослідження коливань лопатей вітроенергетичних установок і пружного деформування бурільних колон в криволінійних каналах нафтових та газових свердловин. Диференціальні рівняння, що описують ці явища, мають високий порядок та містять нелінійності складного виду. В зв'язку з цим до сьогоднішнього дня ці ефекти залишаються недосить вивченими і є актуальними як з теоретичної, так і з прикладної точок зору.

Відмітимо, що загальна постановка прямих задач про деформування криволінійних стержнів представлена в роботах [1-3]. Прикладні аспекти цієї проблеми розглядалися у [4-8]. В даній роботі сформульовані обернені задачі згинання гнучких стержнів у криволінійних каналах.

Постановка задачі. Сформулюємо задачу про визначення статичних параметрів, які впливають на сили тертя на криволінійних ділянках пружного стержня і на різних етапах його згину в криволінійних каналах. Оскільки у початковому стані вісь стержня є прямою, а в кінцевому стані вона набуває форму істотно нелінійної кривої осьової лінії каналу, для опису її напружено-деформованого стану будемо застосовувати теорію гнучких криволінійних стержнів, викладену в [1]. При цьому будемо

вважати, що завдяки малому діаметру стержня в порівнянні з радіусом кривини його осьової лінії, матеріал стержня працює в пружному стані. Тому при постановці задачі згинання стержнів приймається лінійне формулювання закону Гука.

Для опису згинання стержня застосовуватимемо нерухому систему координат $Oxyz$ з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, вісь Oz якої спрямована вертикально вниз (рис. 1).

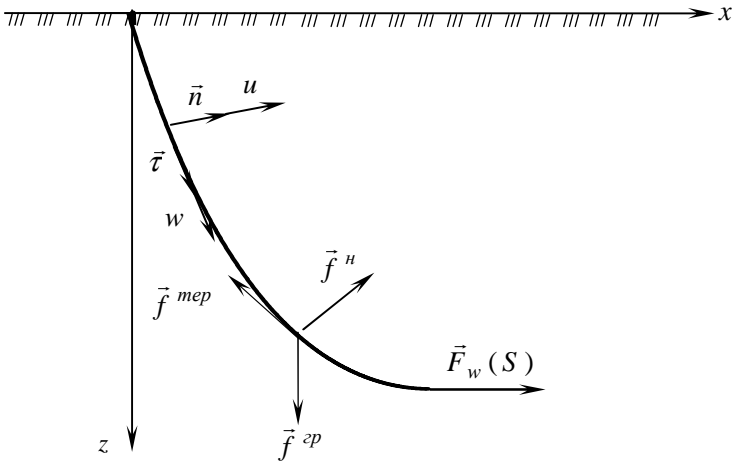


Рис. 1. Розрахункова схема згинання пружного стержня в плоскому криволінійному каналі

Випишемо рівняння рівноваги сил

$$\begin{aligned} dF_u / Dd\vartheta &= rF_v - qF_w - f_u, \\ dF_v / Dd\vartheta &= pF_w - rF_u - f_v, \\ dF_w / Dd\vartheta &= qF_u - pF_v - f_w, \end{aligned} \quad (1)$$

та моментів

$$\begin{aligned} \frac{dp}{Dd\vartheta} &= \frac{1}{A} \left(\frac{A dp_0}{Dd\vartheta} - Cqr + Cqr_0 + Brq - Brq_0 + F_v - m_u \right), \\ \frac{dq}{Dd\vartheta} &= \frac{1}{B} \left(\frac{B dq_0}{Dd\vartheta} - Arp + Arp_0 + Cpr - Cpr_0 - F_u - m_v \right), \end{aligned}$$

$$\frac{dr}{Dd\vartheta} = \frac{1}{C} \left(\frac{C dr_0}{Dd\vartheta} - Bpq + Bpq_0 + Aqp - Aqp_0 - m_w \right), \quad (2)$$

прикладених до елемента стержня [1-3].

Нехай рівняння осьової лінії такого каналу мають вигляд

$$x = x(\vartheta), \quad y = 0, \quad z = z(\vartheta), \quad (3)$$

де ϑ - деяка незалежна змінна.

Параметри кривизни та кручення цієї кривої можна представити у вигляді

$$p = \frac{1}{R} \sin \chi, \quad q = \frac{1}{R} \cos \chi, \quad r = \frac{d\chi}{Dd\vartheta}. \quad (4)$$

Рівності (3) – (4) дозволяють сформулювати обернені задачі для рівнянь (1), (2) та знайти змінні $\tau_x, \tau_y, \tau_z, n_x, n_y, n_z, b_x, b_y, b_z$. Тоді задача про пружне згинання стержня у каналі буде визначатись рівняннями рівноваги (1), (2). Прийнемо, що у вихідному стані осьова лінія стержня прямолінійна і $p_0 = 0, q_0 = 0, r_0 = 0$. Це дозволяє спростити рівняння (1), (2) і звести їх до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dF_u}{Dd\vartheta} &= \frac{d\chi}{Dd\vartheta} \cdot F_v - \frac{1}{R} \cos \chi \cdot F_w - f_u^{ep} - f_u^H, \\ \frac{dF_v}{Dd\vartheta} &= \frac{1}{R} \sin \chi \cdot F_w - \frac{d\chi}{Dd\vartheta} \cdot F_u - f_v^{ep} - f_v^H, \\ \frac{dF_w}{Dd\vartheta} &= \frac{1}{R} \cos \chi \cdot F_u - \frac{1}{R} \sin \chi \cdot F_v - f_w^{mep} - f_w^{ep}, \\ \frac{1}{R} \cos \chi \frac{d\chi}{Dd\vartheta} &= \frac{(A-C)}{A} \cdot \frac{1}{R} \cos \chi \frac{d\chi}{Dd\vartheta} + \frac{F_v}{A}, \\ -\frac{1}{R} \sin \chi \frac{d\chi}{Dd\vartheta} &= \frac{(C-A)}{A} \cdot \frac{1}{R} \sin \chi \frac{d\chi}{Dd\vartheta} - \frac{F_u}{A}, \\ \frac{d}{Dd\vartheta} \left(\frac{d\chi}{Dd\vartheta} \right) &= -\frac{m_w^{mep}}{C}. \end{aligned} \quad (5)$$

При виведенні рівнянь (5) враховано, що для трубчастого стержня $A = B$, а розподілені моменти m_u і m_v дорівнюють нулю. Також вважалось, що вектор \vec{f} зовнішніх розподілених сил, що діють на кожний елемент стержня, складається з вектора сили гравітації \vec{f}^{zp} , вектора нормальної сили контактної взаємодії стінок стержня з поверхнею каналу \vec{f}^H та вектора сили тертя \vec{f}^{mep} (рис. 1), тобто

$$\vec{f} = \vec{f}^{zp} + \vec{f}^H + \vec{f}^{mep}. \quad (6)$$

Компоненти цих сил отримуються шляхом проектування лівих та правих частин рівності (6) на осі u , v , w в формі співвідношень

$$f_u = f_u^{zp} + f_u^H, \quad f_v = f_v^{zp} + f_v^H, \quad f_w = f_w^{zp} + f_w^{mep}, \quad (7)$$

де гравітаційні сили підраховуються за формулами

$$f_u^{zp} = \gamma g n_z, \quad f_v^{zp} = \gamma g b_z, \quad f_w^{zp} = \gamma g \tau_z, \quad (8)$$

в той час як f_u^H , f_v^H , f_w^{mep} стають новими шуканими змінними. Тому система шести рівнянь (5) містить вісім невідомих F_u , F_v , F_w , χ , f_u^H , f_v^H , f_w^{mep} , m_w^{mep} і стає невизначеною.

Після введення позначень $\chi = h_1$, $\frac{d\chi}{d\vartheta} = \frac{dh_1}{d\vartheta} = h_2$ та виконання відповідних перетворень систему (5) приводимо до вигляду

$$\frac{dh_1}{d\vartheta} = h_2, \quad (9)$$

$$\frac{dh_2}{d\vartheta} = \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{d\vartheta} \cdot h_2 - \frac{D^2 m_w^{mep}}{C}, \quad (10)$$

$$F_u = \frac{C}{R} \sin h_1 \cdot \frac{h_2}{D}, \quad (11)$$

$$F_v = \frac{C}{R} \cos h_1 \cdot \frac{h_2}{D}, \quad (12)$$

$$\frac{dF_w}{Dd\vartheta} = \frac{1}{R} \cos h_1 \cdot F_u - \frac{1}{R} \sin h_1 \cdot F_v - f_w^{mep} - f_w^{ep}, \quad (13)$$

$$f_u^H = \frac{\sin h_1 \cdot m_w^{mep}}{R} + \frac{C}{R^2} \cdot \frac{dR}{d\vartheta} \cdot \sin h_1 \cdot \frac{h_2}{D^2} - \frac{1}{R} \cos h_1 \cdot F_w - f_u^{ep}, \quad (14)$$

$$f_v^H = \frac{\cos h_1 \cdot m_w^{mep}}{R} + \frac{C}{R^2} \cdot \frac{dR}{d\vartheta} \cdot \cos h_1 \cdot \frac{h_2}{D^2} - \frac{1}{R} \sin h_1 \cdot F_w - f_v^{ep}, \quad (15)$$

$$f_w^{mep} = \pm \mu \left[\sqrt{(f_u^H)^2 + (f_v^H)^2} \cdot \frac{\dot{w}}{\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}} \right], \quad (16)$$

$$m_w^{mep} = \pm \mu \left[\sqrt{(f_u^H)^2 + (f_v^H)^2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\omega d/2}{\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}} \right]. \quad (17)$$

Особливість системи рівнянь (9) - (17) полягає в тому, що у ній завдяки постановці обернених задач для частини змінних поряд з диференціальними рівняннями (9), (10), (13) присутні рівності (11), (12), (14), (15), (16), (17), що виконують функції перших інтегралів. Тому при чисельній реалізації розв'язку цієї системи застосовується спеціальний підхід, який полягає в тому, що побудова розв'язку здійснюється не з початку $\vartheta=0$ області інтегрування, де функції h_1 , h_2 , F_w невідомі, а з кінця ϑ_s , на якому при виконанні спуско-підймальних операцій $h_1=0$, $h_2=0$, $F_w=0$. Інтегрування диференціальних рівнянь проводиться покроково методом Рунге-Кутта.

Результати досліджень. За допомогою розробленого підходу досліджено вплив виду обрису осьової лінії свердловини на значення статичних параметрів деформованого стану бурильної колони (БК) при здійсненні спуско-підймальних операцій. Розглянуто випадок, коли координати початкової та кінцевої точок свердловини співпадають, а її осьова лінія розміщена у вертикальній площині, що проходить через ці точки. Вибрані найбільш прості закони їх геометрії (рис. 2) – в формі дуг еліпса (1), параболи (2) та гіпербол (3, 4).

Початкова і кінцева точки всіх зазначених кривих співпадають, однак, між цими точками вказані криві мають обрис, який відрізняється кривизною. Характерна особливість дуги еліпса (крива 1) полягає в тому, що дотичні до неї в точках $x=0$ та $x=S$ є відповідно вертикальними і горизонтальними, а її кривизна хоча і максимальна в точці $x=0$, але має порівняно невеликі значення на всьому інтервалі $0 \leq x \leq S$. У зв'язку з

цим можна припустити, що всі функції зовнішніх та внутрішніх сил розподіляються в такій буринній колоні більш рівномірно. Параболічна траєкторія (крива 2), розміщена вище неї, має меншу кривизну на більшій частині проміжку $0 \leq x \leq S$, однак при наближенні до точки $x=0$ її кривизна збільшується і починає значно перевищувати кривизну еліптичної кривої. Тому можна припустити, що у вказаній ділянці свердловини на БК діють сили фрикційної та контактної взаємодії з більшими значеннями.

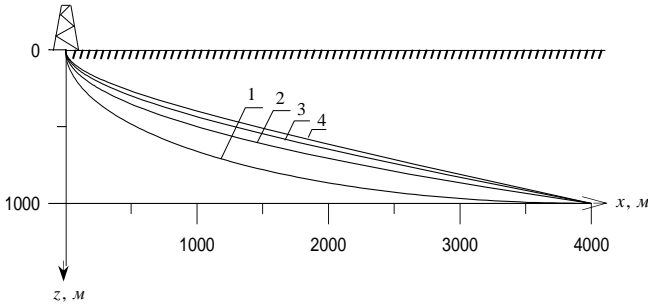


Рис. 2. Геометрична схема свердловин еліптичної (1), параболічної(2) та гіперболічної (3, $e=1,01$; 4, $e=1,015$) форм ($h=1000\text{м}$, $S=4000\text{м}$).

Відмічені для параболічної свердловини особливості у ще більшій мірі проявляються для гіперболічних траєкторій (криві 3, 4). При вибраних значеннях геометричних параметрів зі збільшенням x ці криві асимптотично наближаються до прямих, однак в околі краю $x=0$ гіперболічні криві набувають суттєвого викривлення. У зв'язку з цим цікаво виявити як впливають зазначені вище особливості траєкторій свердловин на механічну поведінку розміщених у них буринних колон при виконанні спуско-підіймальних операцій.

Нижче приведені результати досліджень осьового руху буринної колони в еліптичній свердловині при різних співвідношеннях $v = \dot{w}/(\omega d/2)$ швидкостей осьового руху \dot{w} та колового руху $(\omega d/2)$ елемента поверхні буринної колони. Вважається, що свердловини є похило-скерованими порівняно малої глибини $h=1000$ і 2000м з віддаленням по горизонталі від початкової точки буріння $S=4000, 8000, 10000, 12000\text{м}$.

Рівняння осьової лінії еліптичної свердловини мають вигляд

$$x = S(1 - \cos \vartheta), \quad y = 0, \quad z = h \cdot \sin \vartheta, \quad (18)$$

де ϑ - незалежна змінна.

Основні геометричні параметри цієї кривої відповідно набувають виду

$$D = \sqrt{S^2 \sin^2 \vartheta + h^2 \cos^2 \vartheta}, \quad R = \frac{\sqrt{(S^2 \sin^2 \vartheta + h^2 \cos^2 \vartheta)^3}}{S h},$$

$$n_z = -\frac{S \sin \vartheta}{\sqrt{S^2 \sin^2 \vartheta + h^2 \cos^2 \vartheta}}, \quad \tau_z = \frac{h \cos \vartheta}{\sqrt{S^2 \sin^2 \vartheta + h^2 \cos^2 \vartheta}}. \quad (19)$$

При цьому довжина L та сила тяжіння G всієї колони обчислювались за формулами

$$L = \int_0^{\vartheta_s} D(\vartheta) d\vartheta, \quad G = \gamma g L, \quad (21)$$

де $\gamma = \pi (d_1^2 - d_2^2) (\rho_{cm} - \rho_p) / 4$. Тут $d_1 = 0,1683$ м, $d_2 = 0,1483$ м – зовнішній та внутрішній діаметри труби БК, $\rho_{cm} = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ – густина сталі, $\rho_p = 1,8 \cdot 10^3$ кг/м³ – густина промивальної рідини.

Аналіз результатів проведених розрахунків дозволив встановити, що при малих значеннях співвідношення ν величина сили $F_w(0)$ практично не залежить від типу операції та довжини бурильної колони. Це можна пояснити тим, що при таких значеннях ν осьова сила тертя є дуже малою і поздовжня сила $F_w(0)$ стає необхідною для утримання лише тієї частини сили тяжіння БК, що проектується на вертикаль та залишається незмінною у всіх випадках ($h = 1000$ м). Однак крутний момент у точці підвісу $M_w(0)$ виявляється приблизно пропорційним довжині L бурильної колони, оскільки розподілені моменти сил тертя m_w^{mep} діють на всій її довжині.

В той же час, збільшення співвідношення ν до величини $\nu = 1/5$ призводить до порушення цієї закономірності і поздовжня сила $F_w(0)$ починає суттєво залежати як від виду операції (підйом, спуск), так і від довжини БК. Наприклад, оскільки осьова розподілена сила тертя f_w^{mep} зростає, то при підйомі її дія додається до дії сили тяжіння і вона призводить до значного збільшення осьової сили $F_w(0)$, в той час як при спуску дії цих сил нейтралізують одна одну і осьова сила $F_w(0)$,

необхідна для утримання БК, зменшується. При значеннях $S = 8000$ і 10000 м сили тертя стають настільки великими, що $F_w(0)$ набуває від'ємних значень і спуск бурильної колони стає неможливим. У зв'язку з цим для здійснення операції спуску при даних умовах необхідно або довантажувати БК в точці $\vartheta = 0$ додатковими стискаючими силами, або збільшувати ν шляхом надання їй додаткового обертального руху.

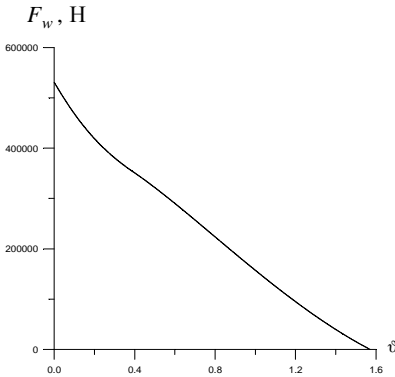


Рис. 3. Графік зміни поздовжньої сили F_w при підйомі колони з еліптичної свердловини

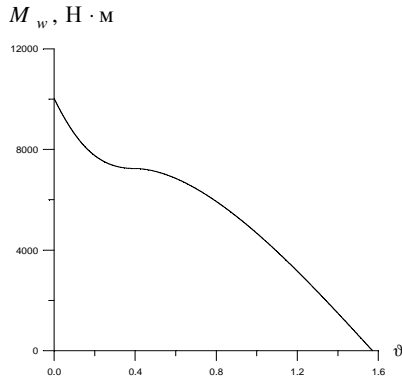


Рис. 4. Графік зміни крутного моменту M_w при підйомі колони з еліптичної свердловини

Рисунки 3 і 4 стосуються випадку підйому БК із еліптичної свердловини з параметрами $h = 1000$ м, $S = 4000$ м при $\nu = 1/0,5$. Можна бачити, що функції внутрішньої поздовжньої сили $F_w(\vartheta)$ та крутного моменту $M_w(\vartheta)$ мають вигляд гладких кривих. В околі значення $\vartheta = 0,4$ момент M_w піддається локальному викривленню. Це можна пояснити тим, що оскільки на даному проміжку набувають нульових значень контактні сили f_u^H та f_v^H , то нульових значень набувають розподілена сила тертя f_w^{mep} і розподілений крутний момент m_w^{mep} , а, отже, функція $M_w(\vartheta)$ залишається приблизно сталою. Цього не відбувається, однак, з функцією $F_w(\vartheta)$, значення якої залежать, в основному, від сил гравітації.

Якщо розглянути задачу про спуск БК у тій же еліптичній свердловині, тобто $h = 1000$ м, $S = 4000$ м, $\nu = 1/0,5$, то можна легко побачити, що суттєвих якісних змін з відповідними кривими не відбулося,

з тою лише різницею, що у зв'язку зі зміною напрямку руху БК у свердловині змінився знак розподіленої сили тертя f_w^{mep} .

Роботу виконано в рамках проекту 0109U002146 при фінансовій підтримці Міністерства освіти та науки України.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наукова думка, 1992. – 344 с.
2. *Понов Е.П.* Нелинейные задачи статики тонких стержней.- Москва: ОГИЗ, 1948.– 178 с.
3. *Светлицкий В.А.* Механика стержней. - Москва: Высшая школа; ч.1, 1987. – 320 с.; ч.2, 1987. – 304 с.
4. *Gulyayev V.I., Tolbatov E.Yu.* Forced and self-excited vibrations of pipes containing mobile boiling fluid clots // *Journal of Sound and Vibration.* – 2002. – 257. P. 425 - 437.
5. *Gulyayev V.I., Tolbatov E.Yu.* Dynamics of spiral tubes containing internal moving masses of boiling liquid // *Journal of Sound and Vibration.* – 2004. – 274. P. 233 - 248.
6. *Akgun F.* "A finite element model for analyzing horizontal well BHA behavior"// *Journal of Petroleum Science and Engineering.* – 2004. – V.42, №2-4. P. 121-132.
7. *Jonggeun Choe, Jerome J.Schubert, Hans C. Juvkam-Wold.* "Well-control analyses on extended-reach and multilateral trajectories"// *SPE Drilling & Completion.* – 2005. – June, P. 101-108.
8. *Sawaryn, S.J., Thorogood J.L.* "A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method"// *SPE Drilling & Completion,* 2005, March, – P. 24-36.

Отримано 23.06.09

Сформулирована задача об определении статических параметров, которые влияют на силы трения на криволинейных участках упругого стержня и на различных этапах его изгиба в криволинейных каналах. С помощью разработанного подхода исследовано влияние очертания осевой линии скважины на значение параметров деформированного состояния буровой колонны при совершении спуско-подъемных работ.

The problem on calculation of a static parameters influencing on the friction forces in the curvilinear segments of a rod in curvilinear channel is considered. Different stages of the rod bending are analyzed. Through the use of the elaborated approach influence of the bore-hole trajectory geometry on the force parameters of the deformed state of a drill string are investigated for the rising-lowering operations.

УДК 539.375

О.О. Шкриль, канд. техн. наук

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ХРЕСТОПОДІБНИХ ЗРАЗКАХ ПРИ ЇХ ОДНОВІСНОМУ ТА ДВОВІСНОМУ РОЗТЯЗІ

Розглянута методика обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень прямим методом і методом піддатливості в дискретних моделях МСЕ. Побудовані графіки К-тарировки для хрестоподібних зразків з отвором та без отвору, при їх одновісному та двовісному розтязі.

На сьогоднішній день в експериментальних дослідженнях для визначення параметрів тріщиностійкості широкого застосування набули хрестоподібні зразки. Вирішення такої задачі передбачає побудову графіків К-тарировки на різних довжинах тріщини. Це в свою чергу вимагає визначення напружено-деформованого стану (НДС) зразка при різних довжинах тріщин. Серед методів обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) найбільшого використання набули прямий метод та метод піддатливості.

1. Прямий метод. У випадку лінійного деформування НДС в околі вершини тріщини може бути описаний асимптотичними формулами [5], в яких переміщення та напруження виражені через коефіцієнти інтенсивності напружень. Для найбільш часто розглядуваного випадку тріщин нормального відриву (тип I) (рис.1), в яких переміщення берегів тріщини перпендикулярні її поверхні, ці вирази мають наступний вигляд:

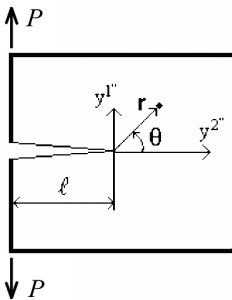


Рис. 1. Тріщина нормального відриву

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad u_i = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} F_i(\theta),$$

де r, θ – полярні координати з початком в точці фронту тріщини для якої визначені КІН; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона.

Для визначення КІН при побудові скінченно-елементної моделі передбачається наявність привершинної зони згущення. Як показали дослідження [1], найбільш точні результати визначення КІН забезпечуються при використанні біля вершини тріщини (т. А,

рис. 2) зони згущення квадратної форми. В частині зони, що межує з поверхнею тріщини, в кожному вузлі визначається величина КІН за переміщеннями $K_I^i(u)$ (позначена на рис. 2 хрестиками). В частині зони, що розташована за фронтом тріщини в центрах СЕ КІН визначається за напруженнями $K_I^j(\sigma)$ (відповідні точки показані на рис.2 кружками).

Подальше усереднення величин $K_I^i(u)$ і $K_I^j(\sigma)$ по частинах зони згущення дозволяє визначити середні значення КІН за переміщеннями і напруженнями:

$$K_I(u) = \frac{\sum_{i=1}^{k_1} K_I^i}{k_1}, \quad K_I(\sigma) = \frac{\sum_{j=1}^{k_2} K_I^j(\sigma)}{k_2},$$

де k_1, k_2 – кількість точок при визначенні КІН за переміщеннями і напруженнями відповідно. Кінцева величина КІН в точці А фронту тріщини визначається за формулою:

$$K_I = \frac{K_I(u) + K_I(\sigma)}{2}.$$

Ефективність методики обчислення КІН прямим методом показана на задачі про розтяг квадратної пластини з центральною тріщиною (рис.3). Результати показали (табл.1), що при довжині тріщини в діапазоні від 0.1-0.5 ширини пластини похибка обчисленого КІН знаходиться в межах 2%.

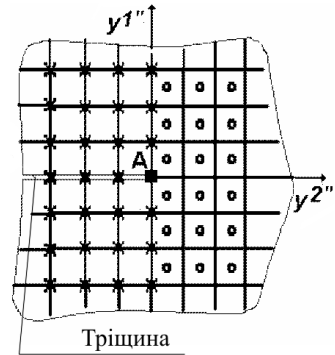


Рис. 2. Зона згущення для обчислення КІН

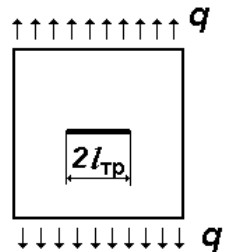


Рис.3. Пластина з центральною тріщиною

Таблиця 1

$L_{тр}$	K_I^{em} [3]	K_I	δ , %
0.1B	1.7897	1,7758	0,77
0.2B	2.6564	2,6741	-0,67
0.4B	4.3237	4,3003	0,5
0.5B	5.2712	5,1870	1,6

2. Метод піддатливості. При використанні методу піддатливості передбачається, що розвиток тріщини відбувається при порушенні по її поверхні в'язей, що перешкоджають цьому розвитку. При збільшенні тріщини на величину $\Delta l = l_2 - l_1$ вивільнюється енергія $\Delta W = W_2 - W_1$. Значення величин енергії деформації W_1 і W_2 , що відповідають стану тіла при наявності в ньому тріщин довжиною $l_1 = l_{mp} - l_e$ і $l_2 = l_{mp} + l_e$ (рис. 4), обчислюються за формулою:

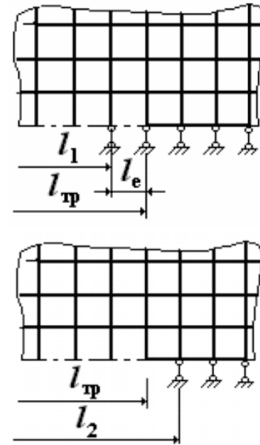
$$W = \sum_{i=1}^{N_e} W_i = \sum_{i=1}^{N_e} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{\circ} \varepsilon_{ij}^{\circ} \sqrt{g} \right)_i.$$

Різниця отриманих значень енергії, віднесена до відстані між вузлами, що визначають вершину тріщини довжиною l_1 і l_2 , з урахуванням прийнятої скінченно-елементної апроксимації, дорівнює [5]:

$$\frac{\Delta W}{\Delta l} = \frac{\Delta W}{2l_e} = -\frac{\Delta \Pi}{\Delta l} = J.$$

При застосуванні методу піддатливості введення в розрахункову схему тріщин різної довжини проводиться шляхом змінення граничних умов (рис. 4) [1-3].

Для тестового прикладу про розтяг квадратної пластини з центральною тріщиною (рис. 3) похибка визначення КІН на основі методу піддатливості порівняно з еталоном [4] лежить в межах 2%.

Рис. 4. Розрахункові схеми для визначення W_1 та W_2

Результати розв'язання задачі про згин квадратної пластини з боковим надрізом (рис. 5) показали, що на рівномірній сітці збіжність КІН досягається при дискретизації пластини СЕ розміром $0,1 l_{mp}$ (табл. 2).

В даній роботі із застосуванням двох методів обчислення КІН розв'язано задачу про деформування хрестоподібного зразка з тріщиною різних розмірів при одновісному та двовісному розтягу (рис. 6).

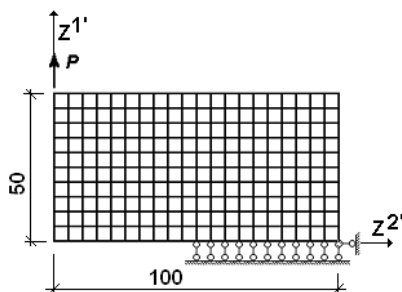


Рис. 5. Дискретна модель пластини з боковим надрізом

Таблиця 2

l_e / l_{mp}	$K_I, (\text{кг/см}^2) \sqrt{\text{см}}$	$\delta, \%$
1/5	3.062	4.3
1/10	3.173	0.84
1/20	3.193	0.22
1/40	3.191	0.29

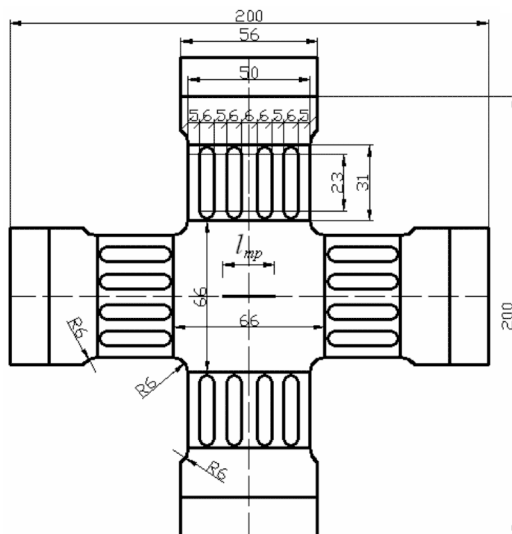


Рис.6. Хрестоподібний зразок без отвору

Матеріал зразка сталь ЭП517-Ш, для якої $E = 2.14 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$. При побудові дискретної моделі (рис. 7) враховуючи вісьову симетрію розглядалась чверть зразка.

Отримані для різних довжин тріщини результати виявили, що значення КІН при одновісному розтязі є приблизно на 10% більшими, ніж при двовісному розтязі (рис. 8).

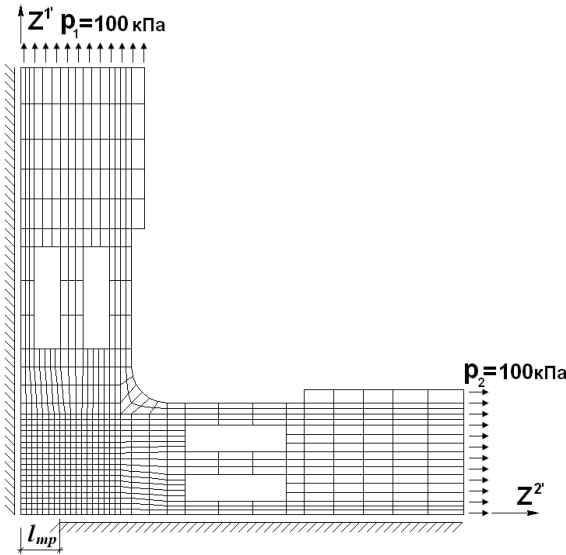


Рис. 7. Дискретна модель хрестоподібного зразка

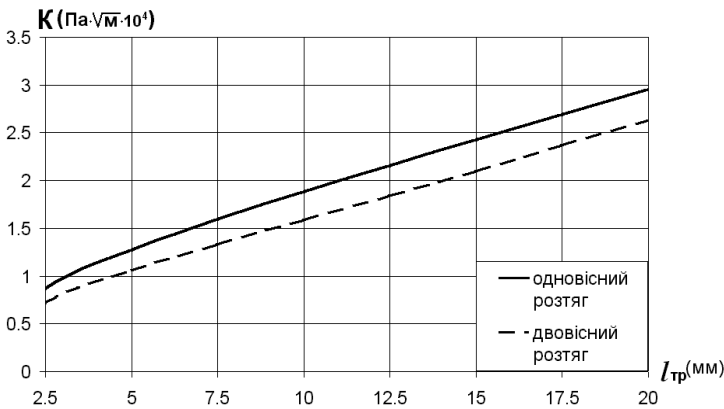


Рис. 8. Графік К-тарировки для зразка без отвору

Також було розглянуто задачу про деформування хрестоподібного зразка з тріщиною при наявності отвору радіусом $R = 4$ мм (рис. 9). Дискретна модель представлена на рис.10.

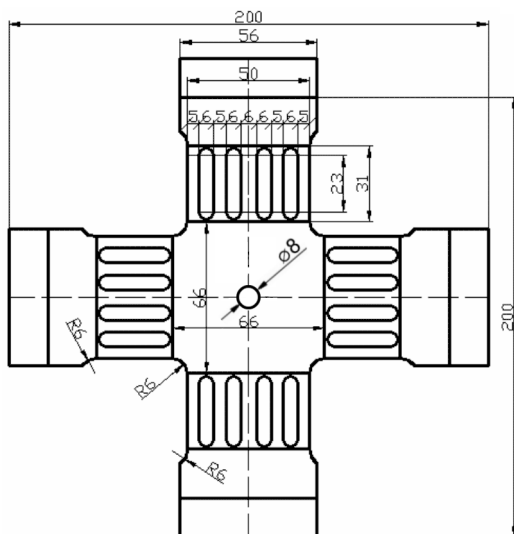


Рис.9. Хрестоподібний зразок з отвором

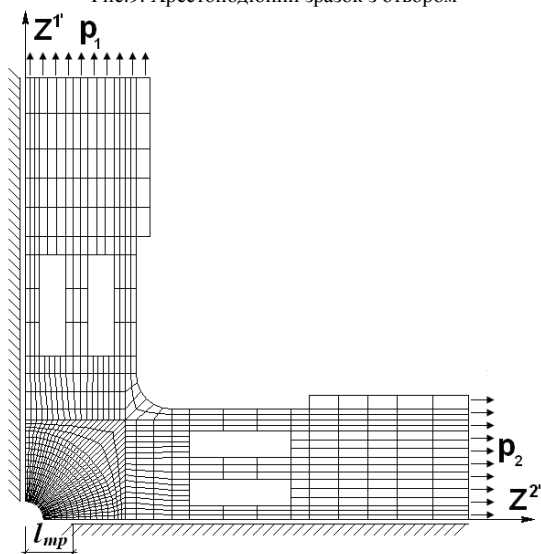


Рис.10. Дискретна модель хрестоподібного зразка з отвором

Як і в попередньому випадку величини КІН, обчислені на різних довжинах тріщини при одновісному розтязі, є більшими ніж при двовісному розтязі (рис. 11).

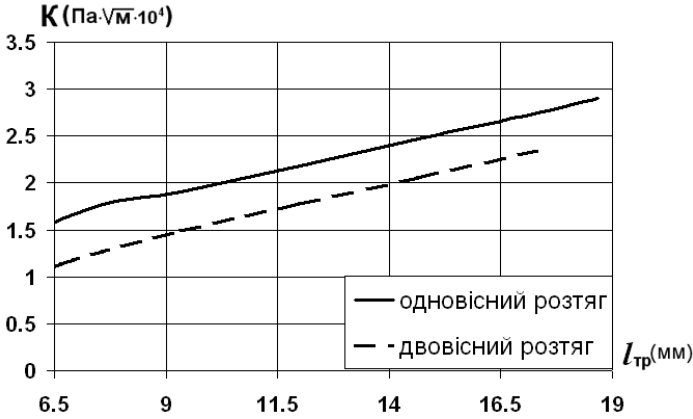


Рис.11. Графік К-тарировки для зразка з отвором

Порівняння результатів розрахунку хрестоподібного зразка в умовах одновісного розтягу показало, що наявність отвору призводить до збільшення значень КІН (рис. 12).

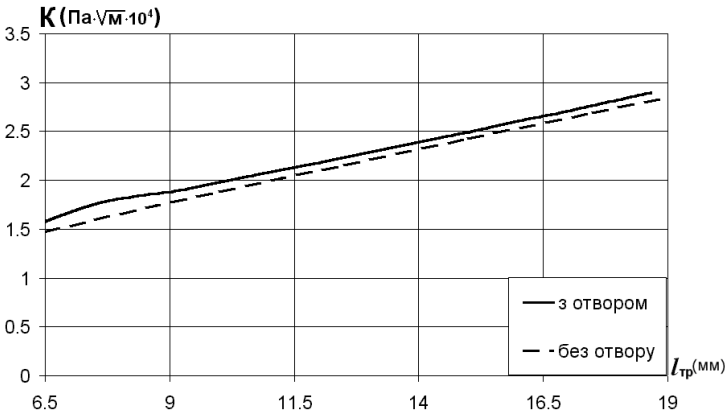


Рис.12. Вплив наявності отвору на КІН при одновісному розтязі

В умовах двовісного розтягу наявність отвору навпаки призводить до зменшення КІН. Але це стосується лише тріщин малих розмірів. При збільшенні довжини тріщини вплив отвору на КІН відсутній (рис. 13).

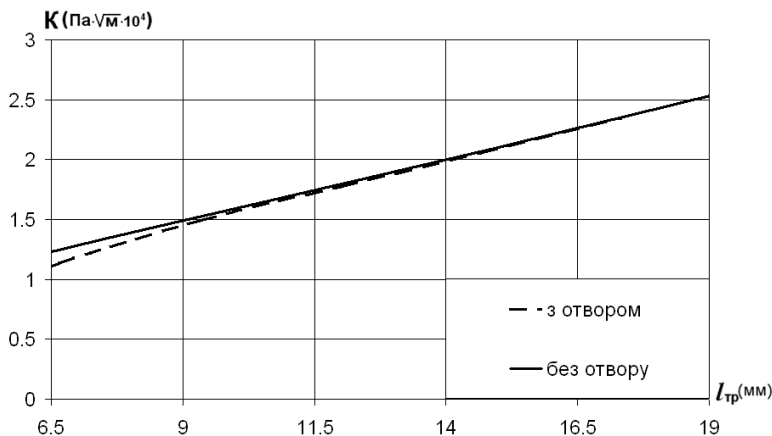


Рис.13. Вплив наявності отвору на КІН при двовісному розтязі

Значення КІН, що наведені на рисунках були отримані методом піддатливості. Величини КІН, що були обчислені прямим методом відрізняються від наведених результатів в межах 5%, що підтверджує вірогідність отриманих результатів. Результати розв'язання задачі в тривимірній постановці співпали з результатами двовимірного розрахунку. Таким чином такі задачі доцільно розв'язувати в двовимірній постановці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл. // Монографія. – К.: КНУБА, 2005. - 298 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Сахарова О.М., Шкріль О.О.* Ефективність методів обчислення параметрів механіки руйнування двовимірних задач // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 106 – 115.
3. *Гуляр А.И., Кушинченко Т.А., Сахаров А.С.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} на основе метода податливости в несимметричных задачах механики разрушения // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1982. – Вып. 40. – С.85–90.
4. *Механика разрушения и прочность материалов: Справ. Пособие: в 4 т. / АН УССР. физ.-мех. ин-т им. Г.В. Карпенко. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – 620 с.*

5. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 256 с.

Отримано 24.06.09

Рассмотрена методика вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) методом податливости в дискретных моделях МКЭ. Построены графики К-тарировки для крестообразных образцов с отверстием и без отверстия, при их одноосном и двухосном растяжении.

The technique of calculation of stress intensity factor by the method of pliability in the discrete models of FEM is considered. The diagrams K-rating for cross section samples with the hole and without one at their monaxonic and biaxial tension are plotted.

УДК 539.3

І.В. Жупаненко, асистент

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ТОВСТОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ

Для розрахунку частот та форм власних коливань товстої кільцевої пластини вісесиметричної структури пропонується аналітично-чисельна методика, що реалізує проблемно-орієнтований алгоритм і дозволяє з високою точністю отримувати розв'язок задач, індивідуалізованих за класами областей, видами впливів, характеристиками фізичних властивостей тощо.

Розглядається пластина вісесиметричної структури товщиною h , співрозмірною з радіусом R . В центрі пластина має отвір радіусом R_0 .

Тривимірна постановка задачі про визначення динамічної реакції такого тіла дає, безсумніву, найбільш точну картину динамічного деформування. Проте розв'язок таких задач загальними числовими методами досить трудомісткий, що дає підстави говорити про необхідність розробки методики розрахунку частот та форм власних коливань на основі комбінованого підходу. Такий підхід базується на поєднанні аналітичних і числових методів і передбачає розв'язок просторової задачі динамічної теорії пружності вести в два етапи: на першому знижується вимірність вихідних рівнянь та граничних умов, на другому редукована крайова задача розв'язується чисельно.

В якості вихідних рівнянь прийнято співвідношення лінійної динамічної теорії пружності в вісесиметричній постановці, записані відносно компонент вектора переміщень та напружень в циліндричній системі координат [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{R_0 + r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + F_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{R_0 + r} \sigma_{rz} + F_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{R_0 + r} u_r; \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda + 2\mu}{R_0 + r} u_r;$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{R_0 + r} u_r; \quad \sigma_{rz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial u_r}{\partial z}. \quad (2)$$

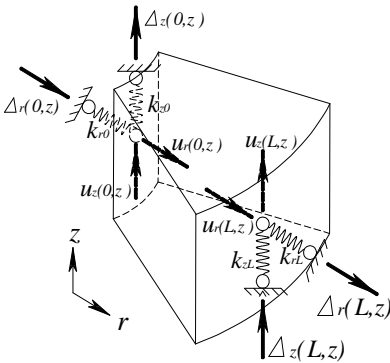


Рис. 1. Граничні умови на торцевих поверхнях пластини

Взаємодія пластини з оточуючим середовищем та опорними конструкціями моделюється за допомогою пружних в'язів (стержнів) відомої жорсткості k (рис. 1).

Такий підхід дозволяє реалізувати всі звичайні граничні умови та врахувати піддатливість опори за рахунок варіювання жорсткості в'язів. Так наприклад, якщо $k = 0$, то в даному напрямку в'язь відсутня і може бути задане напруження та навпаки, при $k = \infty$ в'язь набуває

нескінченної жорсткості і може задаватися зміщення.

Граничні умови записуються наступним чином:

$$\frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} u_j(0) - \frac{1}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \sigma_{rj}(0) = \frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \cdot \Delta_{j0} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \cdot q_{j0},$$

$$\frac{k_{jL}}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} u_j(L) + \frac{1}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \sigma_{rj}(L) = \frac{k_{jL}}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \cdot \Delta_{jL} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \cdot q_{jL},$$

(3)

($j = r, z$),

де k_{i0}, k_{iL} - жорсткість в'язів по відповідному напрямку на торцевій поверхні $r=0$ та $r=L$ відповідно.

Для побудови рівнянь динамічної теорії товстих пластин обрано узагальнений метод скінчених інтегральних перетворень, запропонований В.К. Чибіряковим [2] – [4] як узагальнення проекційного методу І.Н. Векуа, з розкладом невідомих функцій в ряди Фур'є по системі $(N+1)$ нормованих поліномів Лежандра.

Процес зниження вимірності вихідних рівнянь розглядається як формальна процедура, що зводиться до заміни елементів, які входять у вихідні рівняння та граничні умови на торцевих поверхнях, їх

проекційними аналогами за побудованою таблицею проекційних відповідностей [4], подібних співвідношенням операційного числення.

За часовою координатою при гармонічному збуджуючому навантаженні приймаємо стаціонарні коливання системи у вигляді стоячих хвиль виду:

$$u_z^i(z, t) = u_{z,0}^i(z) \cdot \sin(\theta \cdot t), \quad \left(u_z^i \Leftrightarrow u_r^i \Leftrightarrow \sigma_z^i \Leftrightarrow \sigma_r^i \Leftrightarrow \sigma_{zr}^i \right), \quad (4)$$

в результаті чого після редукції і виключення характеристик, що входять в редуковані рівняння алгебраїчно, отримуємо крайову задачу у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з граничними умовами для розрахункових вектор-функцій редукованих рівнянь, що в матричній формі має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dr} \vec{Y} = [A] \cdot \vec{Y} + \vec{F}, \quad (5)$$

$$[C_0] \cdot \vec{Y}(0) = \vec{\Phi}(0), \quad [C_L] \cdot \vec{Y}(L) = \vec{\Phi}(L), \quad (6)$$

де

$$\vec{Y} = \begin{bmatrix} u_r^i \\ u_z^i \\ \sigma_{rr}^i \\ \sigma_{rz}^i \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2} \\ \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2} \end{bmatrix};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{R^0+r} \cdot \delta^{ij} & -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h} \cdot m^{ij} & \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ -\frac{2}{h} m^{ij} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{(R^0+r)^2} \cdot \delta^{ij} & \frac{4 \cdot \lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{R^0+r} \cdot \frac{1}{h} m^{ij} & -\frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{R^0+r} \cdot \frac{2}{h} m^{ji} & \\ \frac{4 \cdot \lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{R^0+r} \cdot \frac{1}{h} m^{ji} & \frac{16 \cdot (\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{1}{h^2} \cdot m^{\alpha i} \cdot m^{\alpha j} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h} m^{ji} & -\frac{1}{R^0+r} \end{bmatrix}$$

$$[C_0] = \begin{bmatrix} \frac{k_{r0}}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{k_{z0}}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij} \end{bmatrix};$$

$$[C_L] = \begin{bmatrix} \frac{k_{rL}}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{k_{zL}}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij} \end{bmatrix};$$

$$\vec{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} \frac{k_{r0}}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \Delta_{r0} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot q_{r0} \\ \frac{k_{z0}}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \Delta_{z0} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot q_{z0} \end{bmatrix};$$

$$\vec{\Phi}(L) = \begin{bmatrix} \frac{k_{rL}}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \Delta_{rL} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot q_{rL} \\ \frac{k_{zL}}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \Delta_{zL} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot q_{zL} \end{bmatrix}.$$

Така система при фіксованому значенні частоти збуджуючого навантаження θ вирішується методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [5], за яким задача розв'язується в два етапи: виконується прямий та обернений хід.

Прямий хід передбачає знаходження розв'язку системи для матриці \mathbf{Z} , складеної з векторів, ортонормованих до векторів фундаментальної системи розв'язків \mathbf{Y} . Для цього вектори фундаментальної системи розв'язків однорідних рівнянь (5), ортонормуються в точках ортогоналізації і зводяться до матриці \mathbf{Z} . Таким чином, в точках ортогоналізації розв'язок системи (5) шукається у вигляді:

$$\vec{Y}(s_i) = \mathbf{Z} \cdot \vec{B}(s_i) + \vec{Z}_0, \quad (7)$$

де $\vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N/2} \end{bmatrix}$ – невідомі сталі інтегрування, а \vec{Z}_0 – частковий розв’язок

неоднорідної системи (5). Невідомі сталі \vec{B} в останній точці інтегрування знаходяться з граничної умови на правому кінці:

$$\vec{B}(s_L) = [C_L \cdot Z]^{-1} \cdot \left(\vec{\Phi}_0 - \vec{Z}_0 \right). \quad (8)$$

Оскільки задача розглядається в лінійній постановці, то при наближенні частоти збуджуючої сили θ до частоти власних коливань ω_i компоненти напружено-деформованого стану необмежено зростають і детермінант матриці $[C_L Z]$ прямує до нуля. Це дає змогу визначити частоту власних коливань наступним чином: розглядається послідовність значень θ з певним кроком, для якої виконується лише прямий хід алгоритму дискретної ортогоналізації з визначенням детермінанту матриці $[C_L Z]$. Якщо детермінант змінює знак, методом ділення навпіл визначається значення θ , при якому детермінант матриці $[C_L Z]$ менший заданого малого числа ε . Таке значення θ присвоюється відповідному ω_i .

Після визначення частоти власних коливань відповідна форма коливань знаходиться наступним чином. Оскільки при знаходженні частот та форм власних коливань розглядається однорідна система рівнянь (5), то система алгебраїчних рівнянь для знаходження вектора сталих інтегрування \vec{B} в останній точці інтервалу визначення задачі (5), (6) теж є однорідною:

$$[C_L \cdot Z] \cdot \vec{B} = 0, \quad (9)$$

і має ненульові розв’язки, якщо детермінант матриці $[C_L Z]$ дорівнює нулю. Числові експерименти показують, що дефект цієї матриці дорівнює одиниці (кратних частот в нижній частині спектру немає), тому в системі (9) відкидають одне рівняння і покладають $b_1 = 1$, а інші сталі b_i ($i = 1, 2, \dots, N/2$) знаходять з цієї системи. Після цього виконують

обернений хід алгоритму С.К.Годунова і знаходять значення \vec{B} в інших точках ортогоналізації, що дає змогу побудувати відповідну форму коливаний.

Наведена методика реалізована у вигляді програми, написаної мовою FORTRAN, за допомогою якої досліджено вільні коливання защемленої по контуру круглої пластини радіусом $R=2$ м та защемленої по внутрішньому контуру кільцевої пластини радіусом $R=2$ м з отвором радіусом $R_0=0,5$ м. Фізичні характеристики пластин наступні: $\rho = 2,4 \text{ т/м}^3$, $\nu = 0,3$, $E=2,4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^3$.

Частоти власних коливань круглої пластини при різних співвідношеннях товщини до радіусу підраховані з використанням рівнянь (5), (6) при $N=4$ та за методикою С.П. Тимошенко [6]. Порівняння частот наведено в табл. 1.

Власні коливання кільцевої пластини також досліджувались при різних співвідношеннях товщини до радіусу з використанням рівнянь (5), (6) при $N=4$ та з використанням рівнянь класичної теорії пластин [7]. Порівняння частот наведено в табл. 2.

Таблиця 1

Частоти власних коливань круглої пластини

Частоти коливань	Порховано за		Розбіжність, %
	методикою С.П.Тимошенко [6]	методом скінченних інтегральних перетворень при $N=4$	
$h=0,15$ м			
ω_1	115,9	114,4	1,3
ω_2	451,7	431,2	4,5
ω_3	1013	922,4	8,9
$h=0,2$ м			
ω_1	154,5	151	2,3
ω_2	601,9	556	7,6
ω_3	1345	1157	14,0
$h=0,4$ м			
ω_1	309	282	8,7
ω_2	1204	929	22,8
ω_3	2690	1753	34,9

Таблиця 2

Частоти власних коливань кільцевої пластини

Частоти коливань	Пораховано за		Розбіжність, %
	За класичною теорією пластин [7]	За методом скінченних інтегральних перетворень	
$h=0,15$ м			
ω_1	37,7	36,8	2,4
ω_2	234,6	228,5	2,6
ω_3	683,4	635,9	7,0
$h=0,2$ м			
ω_1	50,3	57,1	14,0
ω_2	312,8	296,0	5,4
ω_3	911,1	806,7	11,4
$h=0,4$ м			
ω_1	100,5	100,1	0,4
ω_2	625,5	510,2	18,0
ω_3	1822	1272	30,0

Відповідні форми коливань круглої та кільцевої пластин при товщині $h=0,2$ м наведено на рис. 2.

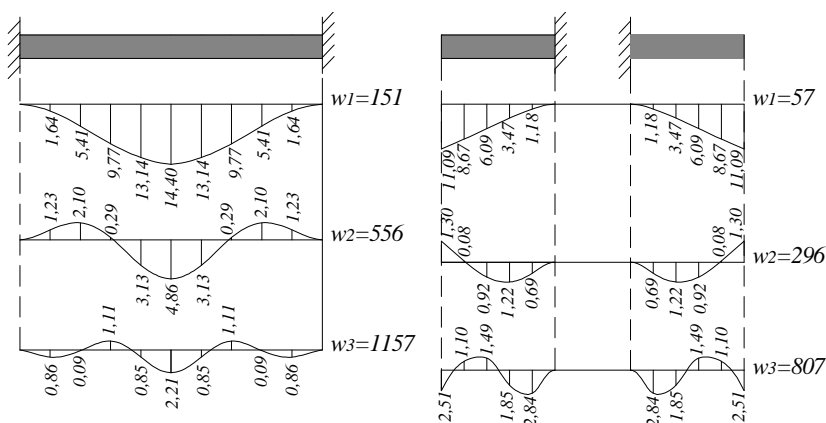


Рис. 2. Форми власних коливань пластин

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Лен.: Судпромгиз, 1958.–372 с
2. *Чибиряков В.К.* Обобщенный метод конечных интегральных преобразований в статике и динамике пластин. // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1982. – Вып. 40. – С. 90 – 95.
3. *Чибиряков В.К., Смоляр А.М.* Об одном обобщении метода конечных интегральных преобразований в теории толстых пластин. // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1983. – Вып. 42. – С. 80 – 86.
4. *Чибиряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонки: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
5. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – В кн.: Успехи математических наук, 1961, т. XVI, вып. 3, с. 171 – 174.
6. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
7. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.: Пер. с англ. – М.: Наука, 1956. – 635 с.

Отримано 23.06.09

Предложена численно-аналитическая методика решения задачи о собственных колебаниях толстых осесимметричных пластин. Аналитическая часть методики состоит в применении обобщенного метода конечных интегральных преобразований по толщине пластины для снижения размерности исходных уравнений трехмерной задачи динамической теории упругости без введения геометрических гипотез. По окружной координате операторы краевой задачи редуцируются рядами Фурье. Редуцированные одномерные задачи численно решаются методом дискретной ортогонализации С.К.Годунова.

A numerical-analytical method is proposed for solution of the problem on free vibrations of thick axi-symmetric slabs. The analytical part of the method consists of application of the method of finite integral transforms on slab's thicknesses for reduction of three-dimensional equations of the dynamic theory of elasticity without geometrical hypothesize. The operator of boundary-value problem is reduced by Fourier series along a circular coordinate. The reduced one-dimensional problem are solved numerically by a Godoonov's method of discrete ortogonalization.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Пискунов С.О., Остапенко Р.М.</i> Дослідження процесу континуального руйнування ротора парової турбіни з дефектом в умовах повзучості	3
<i>Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О.</i> Визначення областей динамічної нестійкості параметричних коливань гофрованої двотаврової балки	15
<i>Пискунов С.О., Гуляр О.І., Максим'юк Ю.В.</i> Алгоритм розв'язання геометрично нелінійної задачі в'язкопружнопластичного деформування двовимірних тіл	25
<i>Баженов В.А., Шишов О.В.</i> Програмне забезпечення для тестування в автономному режимі рівня знань з будівельної механіки	43
<i>Легостаєв А.Д., Гречух Н.А.</i> Колівання пластинчастих конструкцій з урахуванням приєднаних мас, пружних в'язей і вирізів	51
<i>Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б.</i> Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості тонких пружних оболонок	63
<i>Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Вплив кроку інтегрування рівнянь руху віброударної системи на отримання характеристик її динамічної поведінки	74
<i>Ворона Ю.В., Геращенко О.В.</i> Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами	84
<i>Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І., Сахаров О.С.</i> Обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень в нестационарних задачах динаміки просторових тіл на основі енергетичного підходу	93
<i>Гайдайчук В. І., Носенко В. П., Горбунович І. В.</i> Прецесійні резонанси пружного диску з лопатями при складному обертанні	110

Іванченко Г.М., Заєць Ю.О.

Перетворення фронтів розривних хвиль в трансверсально –
ізотропних середовищах зі змінними параметрами пружності 119

Охтень І.О., Гоцуляк Є.О., Лук'яненко О.О.

Дослідження сумісного впливу початкових недосконалостей і
ексцентриситету на стійкість стержнів відкритого профілю 126

Гончаренко М.В., Гусар П.П.

Аналіз динамічної реакції пілона при стохастичному вітровому
навантаженні 133

Дохняк Б.М., Козуб Ю.Г., Львова М.І., Козуб Г.О.

Чисельне моделювання напружено–деформованого стану стрічково-
струнних сит інкрементальним методом скінченних елементів 140

Худолій С.М., Гловач Л.В.

Прямі та обернені задачі деформування пружних стержнів у
криволінійних каналах 147

Шкриль О.О.

Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в хрестоподібних
зразках при їх одновісному та двовісному розтязі 156

Жупаненко І.В.

Власні коливання товстої кільцевої пластини 165

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 83

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 09. Формат 60x84 1/16. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.
Тираж 100. Зам. № 7-

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

Віддруковано на ЗАТ “ВПОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.