

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 84

Заснований у 1965 р.

КИЇВ 2009

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 30 жовтня 2009 року, протокол № 47.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 84 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2009. – 164 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,
м. Київ, 03680
тел.: (044) 241-5466

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2009

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

С.О. Пискунов, канд. техн. наук

В.П. Андрієвський

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ НЕРІВНОМІРНОГО РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ НА РЕСУРС ХВОСТОВИКА ЛОПАТКИ ГАЗОТУРБІННОЇ УСТАНОВКИ

Із використанням напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) проведено дослідження впливу нерівномірного розподілу температури на величину основного ресурсу хвостовика лопатки газотурбінної установки в умовах повзучості.

Лопатки є одними з найвідповідальніших елементів газотурбінних установок (рис. 1). Лопатка знаходиться під впливом відцентрового навантаження в неоднорідному, як по висоті, так і в поперечних перерізах полі температур. В лопатці можна виділити дві основні конструктивні частини: хвостовик та перо. Враховуючи складну геометричну форму та конструктивні особливості лопатки, її розрахунок доцільно проводити для пера лопатки та хвостовика окремо. В роботах [1, 3, 4] було проведено детальне дослідження напружено-деформованого стану та визначено основний і додатковий розрахунковий ресурс пера лопатки газотурбінної установки під дією як силового так і термосилового навантажень.

Метою даної роботи є дослідження напружено-деформованого стану та визначення розрахункового ресурсу хвостовика лопатки газотурбінної установки в умовах повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу при постійному та нерівномірному розподілі температури в його перерізі. Розробка методики розв'язання даного класу задач та дослідження ефективності її застосування була здійснена в роботах [2, 3].

Хвостовик лопатки являє собою неоднорідне призматичне тіло, що знаходиться під дією термосилового навантаження (рис. 2). Вплив пера лопатки на хвостовик моделюється нерівномірним розподіленням навантаженням. Зубці хвостовика спираються на відповідні до них вирізи в ободі

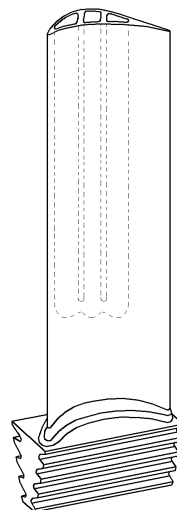


Рис. 1. Загальний вигляд лопатки газотурбінної установки

диска, які деформуються. Таким чином, вздовж поверхонь сполучення зубців хвостовика із диском реалізуються граничні умови у вигляді пружних опор (рис. 2). Розв'язання задачі про деформування хвостовика в такій постановці потребує наявності інформації про жорсткість зубців диска турбіни. З іншого боку, для моделювання таких умов

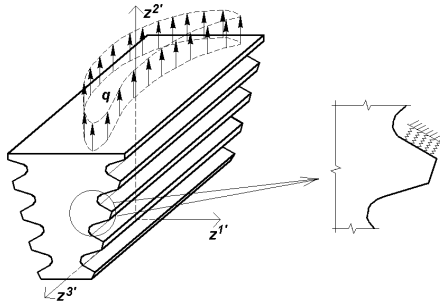


Рис. 2. Хвостовик лопатки газотурбінної установки

обпирання пружні опори доцільно замінити зустрічною деталлю, що за геометрією та умовами роботи відповідає фрагменту обода диска турбіни.

Розрахунок хвостовика проведений для його серединного перетину під впливом рівномірно розподіленого розтягуючого навантаження $q = 0.5\sigma_0$, що відповідає дії відцентрових сил пера лопатки. Внаслідок симетрії при розрахунку розглядалася половина поперечного перетину. Граничні умови визначено з умов симетрії та закріплення в радіальному напрямку: $u^1(z^1 = 0) = 0$, $u^2(z^2 = 0, 0.66R_0) = 0$, $u^2(z^2 = 0) = 0$.

Характерні розміри хвостовика подані у відносних величинах, пов'язаних із величиною R_0 , що визначає відстань від вісі обертання диска до перерізу пера лопатки в якому відбувається руйнування [1, 3, 4]. Також у відносних величинах в подальшому подані всі дані про напружено-деформований стан хвостовика. Застосована при цьому величина σ_0 являє собою усереднене значення інтенсивності напружень в перерізі, що знаходиться на відстані R_0 від вісі обертання.

Опис деформування матеріалу хвостовика лопатки в умовах повзучості здійснюється рівняннями вигляду

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q}, \quad (1)$$

де $B=B(T)$, $C=C(T)$, $m=m(T)$, $n=n(T)$, $r=r(T)$, $q=q(\sigma, T)$ – константи матеріалу, T – температура, ω – параметр пошкоженості Качанова-Работнова $0 \leq \omega \leq 1$ [5], t – час, ε_c – інтенсивність деформацій повзучості, σ – інтенсивність нормальних напружень.

Враховуючи складну конфігурацію розрахункової схеми, що включає хвостовик і фрагмент обода диска турбіни, для побудови скінченоелементної моделі доцільно їх розбити на фрагменти (рис. 3).

На першому етапі дослідження було проведено розрахунок хвостовика лопатки газотурбінної установки при постійному розподілі температур в його поперечному перерізі.

Дослідження збіжності отримуваних результатів моделювання пружного деформування в залежності від кількості невідомих скінченоелементної моделі проведено шляхом співставлення розподілів безрозмірної інтенсивності напружень для сіток з кількістю невідомих 1074, 3344 та 9596 (рис. 4).

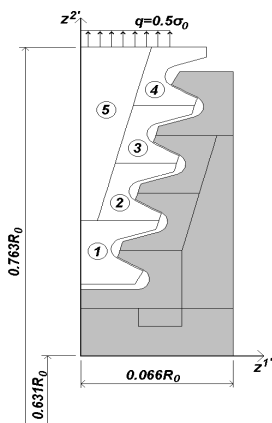


Рис. 3. Розрахункова модель хвостовика і фрагмента обода диска турбіни

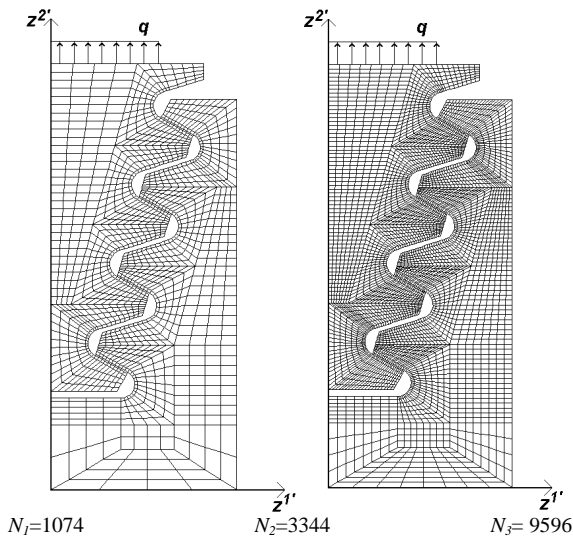


Рис. 4. Скінченоелементні моделі хвостовика і фрагмента обода диска турбіни

Отримані розподілення безрозмірної інтенсивності напружень наведено на рис. 5. Як видно, характер розподілення безрозмірної інтенсивності напружень для всіх наведених сіток однаковий. Максимальні напруження виникають на галтелях хвостовика та зустрічної деталі.

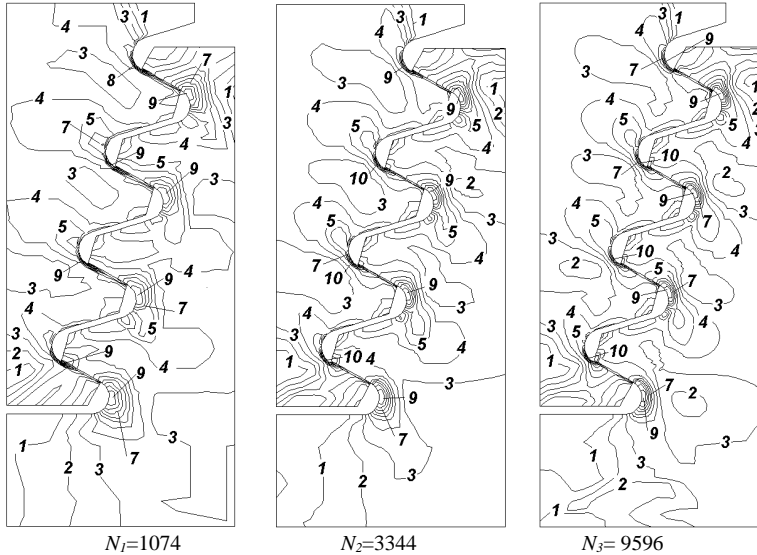


Рис. 5. Розподілення безрозмірної величини інтенсивності напружень σ_i / σ_0 при пружному деформуванні (1 – 0.12; 2 – 0.24; 3 – 0.36; 4 – 0.48; 5 – 0.60; 6 – 0.72; 7 – 0.84; 8 – 0.95; 9 – 1.07; 10 – 1.19)

Для більш детального аналізу побудуємо графіки розподілення безрозмірної інтенсивності напружень вздовж кривих, що проходять через зони максимальних напружень вздовж поверхонь зубців хвостовика (рис. 6). Як видно з наведених графіків, результати, отримані при застосуванні скінченоелементних моделей з кількістю невідомих 3344 та 9596 майже повністю співпали (похибка менше 1%), в той же час на сітці з кількістю невідомих 1074 максимальні напруження є меншими майже на 10%.

Також було проведено дослідження збіжності отримуваних результатів в залежності від кількості невідомих скінченоелементних моделей при визначенні розрахункового ресурсу хвостовика лопатки і фрагмента обода диска турбіни. З цією метою проведено порівняння перебігу процесу накопичення пошкодженості з часом в точці B фрагмента I для кожної сітки, де значення параметра пошкодженості є найбільшими. Отримані результати свідчать, що похибка визначення ресурсу при застосуванні сіток з кількістю невідомих 3344 та 9596 складає менше 5%, тоді як застосування сітки з кількістю невідомих 1074 дає завищені на понад 20% значення ресурсу (рис. 7). Для подальшого аналізу і порівняння результатів значення розрахункового ресурсу отримане на сітці з кількістю невідомих 3344 прийнято за t_0 .

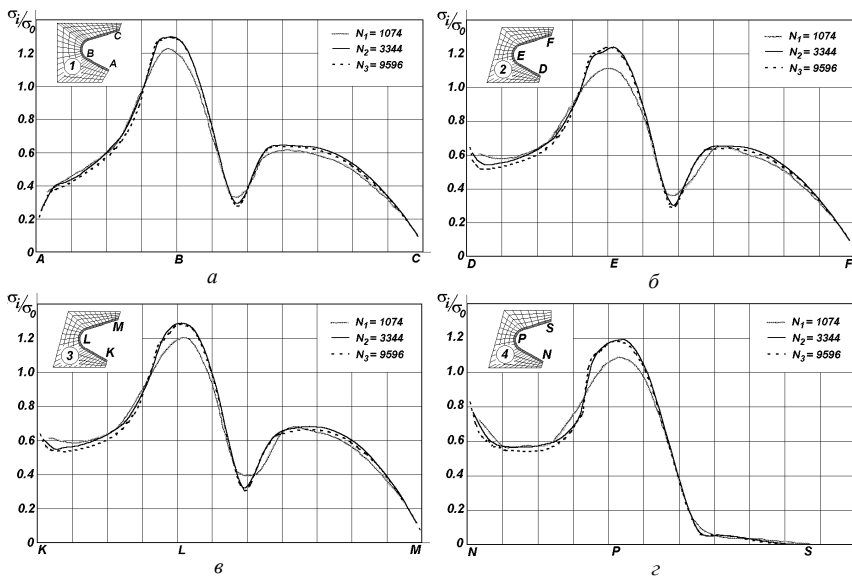


Рис. 6. Розподілення безрозмірної інтенсивності напружень при пружному деформуванні

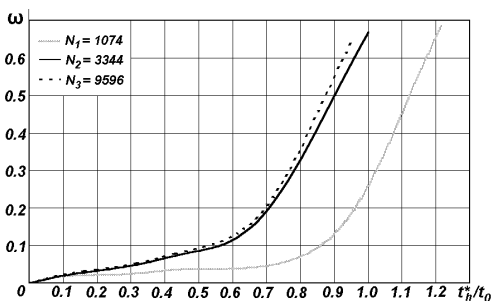


Рис. 7. Залежність зміни параметра пошкодженості з часом для різних скінченоелементних моделей

Таким чином, аналізуючи величини похибок, отриманих на різних сітках, можна зробити висновок, що збіжність результатів як при пружному деформуванні так і в умовах повзучості досягається при використанні сітки з кількістю невідомих 3344.

В подальшому був проведений більш детальний аналіз отриманих результатів при постійній температурі на сітці з кількістю невідомих 3344. На рис. 8 проілюстровано залежність зміни параметра пошкодженості з

часом для характерних точок всіх чотирьох галтелей хвостовика. Як видно з графіка максимальні значення пошкодженості виникають в точці B , що знаходиться на галтелі фрагмента I . Також на рис. 9 проілюстровано зміну безрозмірної інтенсивності напружень з часом в характерних точках хвостовика. Проаналізувавши отримані результати можна зробити висновок, що при постійній температурі максимальні значення пошкодженості в хвостовику виникають в тій самій точці, де в початковий момент часу виникають максимальні значення напружень.

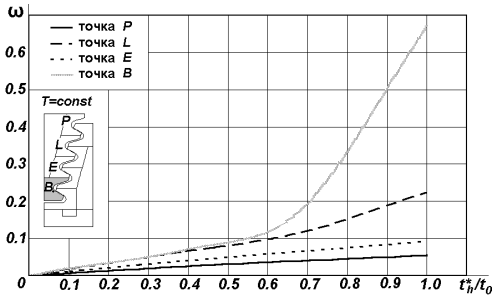


Рис. 8. Залежність зміни параметра пошкодженості з часом

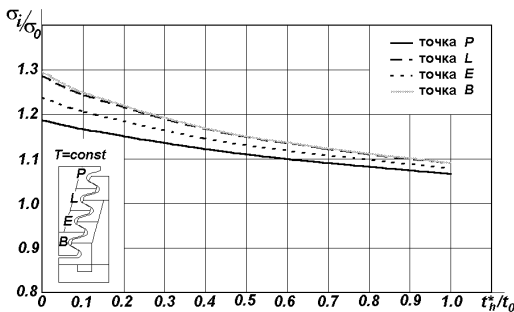


Рис. 9. Залежність зміни безрозмірної інтенсивності напружень з часом

На другому етапі розв'язання даної задачі проведено дослідження впливу неоднорідного температурного поля на еволюцію параметрів напружено-деформованого стану і розрахунковий ресурс хвостовика лопатки. Зміна температури по висоті поперечного перерізу хвостовика лопатки описується лінійним законом, максимальні і мінімальні значення лежать в межах $\pm 0.5\%$ від значення температури в перерізі, що знаходиться на відстані від вісі обертання диска $0.713R_0$.

Проведений розрахунок хвостовика показав, що врахування нерівномірного розподілення температури майже не впливає на загальний напружено-деформований стан. Відповідна якісна картина розподілення напружень як в цілому в поперечному перерізі так і вздовж галтелей, що наведена відповідно на рис. 5 і рис. 6, не змінюється. В той же час, температура суттєво відображається на фізико-механічних характеристиках матеріалу (константах повзучості) (1), що призводить до зміни величини ресурса. Для даного розподілення температури значення розрахункового ресурсу становить $t_h^{*T} = 0,9t_h^*$.

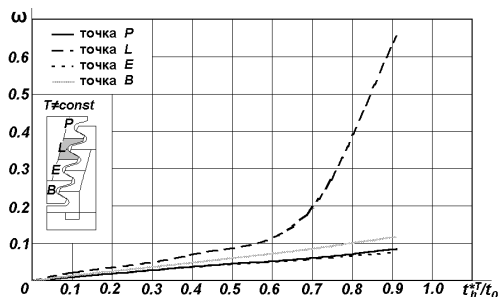


Рис. 10. Залежність зміни параметра пошкодженості з часом

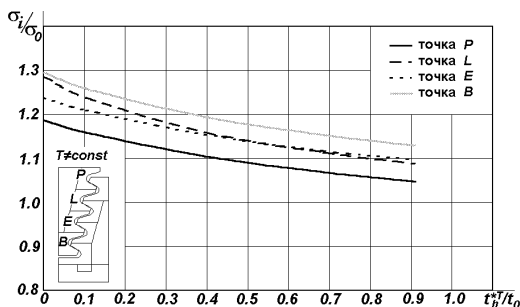


Рис. 11. Залежність зміни безрозмірної інтенсивності напружень з часом

З графіка залежності зміни параметра пошкодженості з часом (рис. 10) видно, що врахування нерівномірного розподілення температури в хвостовику приводить до зміни розташування точки, де виникають максимальні значення пошкодженості порівняно з розрахунком при постійній температурі: максимальні значення напружень в початковий

момент часу виникають в точці B , що знаходиться на галтелі фрагмента I , а максимальні значення пошкодженості виникають в точці L фрагмента 3 .

Таким чином, проведене визначення ресурсу до початку руйнування хвостовика лопатки газотурбінної установки в умовах термосилового навантаження показало, що врахування нерівномірного розподілення температур по висоті дозволяє уточнити величину розрахункового ресурсу приблизно на 9%.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Шкрель А.А.* Определение ресурса лопатки газовой турбины в условиях ползучести на основе континуальной механики разрушения // Проблемы прочности. – 2006. – №4. – С. 87-93.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Андриевский В.П.* Алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружнопластичності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості//Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006 р.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Андриевский В.П.* Вплив температурного навантаження на основний та додатковий ресурс лопатки газотурбінної установки // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 81. – С.3–32.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
5. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.

Отримано 25.06.09

В.А.Баженов, А.И. Гуляр, С.О. Пискунов, В.П. Андриевский

Исследование влияния неравномерного распределения температуры на ресурс хвостовика лопатки газотурбинной установки

С использованием полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) проведено исследование влияния неравномерного распределения температуры на величину основного ресурса хвостовика лопатки газотурбинной установки в условиях ползучести.

V.A.Bazhenov, A.I. Gulyar, S.O. Pyskunov, V.P. Andryevsky

Research of impact of irregular temperature distribution on lifetime of gasturbine unit blade batt

The research of impact of irregular temperature distribution on lifetime of gasturbine unit blade batt under creep loading condition using semianalytical finite element method (SFEM) has been made.

УДК 539.3

Є.О.Гоцуляк, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук

О.О. Лук'яниченко, канд. техн. наук

ПОБУДОВА РЕДУКОВАНОЇ МОДЕЛІ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ЧИСТОМУ ЗГІНІ

Побудована динамічна модель параметричних коливань циліндричної оболонки при дії прикладених на торцях пар сил. Дискретизація континуальної моделі виконана за допомогою методу скінченних елементів із застосуванням сучасного обчислювального комплексу. Редукування дискретної моделі оболонки здійснено на основі методу узагальнених координат. Досліджено питання вибору базисних функцій для адекватного описання докритичної поведінки оболонки при чистому згині.

Питання про стійкість тонкостінних циліндричних оболонок при чистому згині виникає при розрахунку, наприклад, довгих трубопроводів, елементів авіаційних конструкцій. Стійкість таких оболонок вивчалася в двох постановках. Вперше Л. Бразье в 1927р. розглядав геометрично нелінійну залежність деформації оболонки від моменту в припущенні, що всі поперечні перерізи оболонки при її згинанні деформуються однаково. Але ця модель не враховує утворення місцевих вм'ятин при втраті стійкості. Теоретичне вивчення стійкості оболонки при згинанні з урахуванням утворення вм'ятин вперше було виконано В. Флюгге. Надалі ця модель аналізу стійкості циліндричної оболонки при згинанні став переважаючим. Вона розвивалася багатьма дослідниками, результати робіт яких детально висвітлені у відомих монографіях С.П. Тимошенко (1961 р.), А.С. Вольміра [1] та ін. Але і ці дослідження другого напрямку не привели до результатів, які дозволили б визначити величину критичного навантаження, що задовільно узгоджується з результатами експериментальних досліджень для достатньо довгих оболонок. Останніми роками урахування докритичної геометрично нелінійної деформації є вагомим уточненням розрахунку критичного навантаження на оболонку. Цьому напрямку присвячені дослідження конкретних задач, які наведені в книзі [2].

Теорія динамічної стійкості є одним із ще менш розвинених розділів механіки деформованих тіл. Першими дослідниками динамічної стійкості пружних систем були В.М. Беляєв (1924 р.), Н.М. Крилов, Н.Н. Боголюбов (1935 р.), В.А. Боднер (1938 р.), В.Н. Чаломей (1939 р.) та інш. Динамічну стійкість циліндричних оболонок вперше дослідили А.Н. Марков (1949 р.) та О.Д. Оніашвілі (1950 р.). Глибокі дослідження динамічної стійкості

циліндричних оболонок при дії осьового стиснення та поверхневого тиску представлені в фундаментальній монографії В.В. Болотіна [3]. Задача динамічної стійкості тонкостінних циліндричних оболонок при чистому згинанні залишаються недостатньо дослідженою. Проблема полягає у її складності та відсутності необхідної кількості експериментальних даних.

Метою даної роботи є побудова динамічної моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при дії прикладених на торцях пар сил, які б дозволили дослідити стійкість оболонки та визначити області її динамічної нестійкості. Побудова редукованої динамічної моделі виконується за допомогою чисельної методики, що розроблена авторами і представлена в статті [4]. Континуальна модель може бути отримане з рівняння рівноваги для статичної задачі стійкості додаванням даламберових сил інерції із врахуванням складових незбудженого напружено-деформованого стану оболонки, які залежать від часу. В роботі робиться перехід від системи диференціальних рівнянь в частинних похідних до дискретної моделі за допомогою методу скінченних елементів із застосуванням сучасного обчислювального комплексу [5]. Дискретна модель має велику розмірність, тому необхідно виконати її редукування. Для цього застосовується метод узагальнених координат. Але непротим питанням є вибір базисних функцій. Якщо форми власних коливань та форми втрати стійкості однакові, наприклад при дії поверхневого тиску на оболонку, частіше за базисні функції приймаються вектори власних коливань. Якщо форми втрати стійкості та власних коливань різні, треба прийняти за базис форму, яка б адекватно описала докритичну поведінку оболонки. Для визначення базисних функцій при побудові редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки досліджується її докритична поведінка при згині в лінійній та нелінійній постановці, розв'язується задача на власні коливання.

В роботі розглядається тонкостінна циліндрична оболонка радіусом

$R = 1$ м, довжиною $L = 8$ м та товщиною стінки $h = 2$ мм, що виготовлена із сталі з такими механічними характеристиками: $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, $G = 0,792 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0,3$. Оболонка шарнірно оперта по торцях. Стінка оболонки моделюється плоскими прямокутними скінченними елементами (рис. 1) у циліндричній системі координат. Твірна оболонка розбивається на 252 частини,

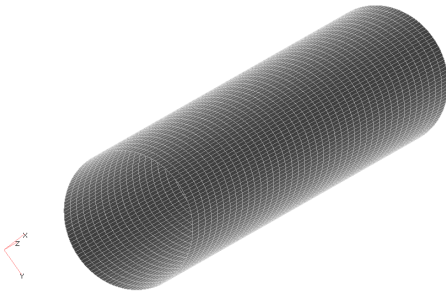


Рис. 1. Скінченноелементна модель оболонки

коло - на 64.

Дія пар сил (рис. 2) характеризується моментом пар M , що прикладений в діаметральній площині оболонки аналогічно представленню в книзі [1]. Нормальні напруження в поперечних перерізах оболонки розподіляються до випучування за законом:

$$P = \frac{M}{\pi R^2 h} \cos \frac{y}{R},$$

де y - колова координата, яка відкладається від точки перетину площини дії пари з серединною поверхнею, що розташована у розтягнутій частині перерізу.

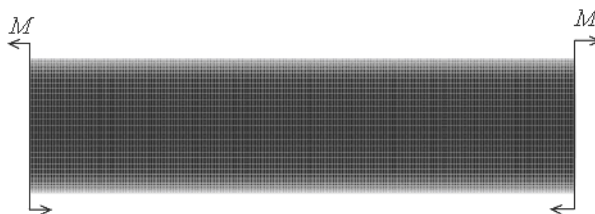


Рис. 2. Параметричне навантаження циліндричної оболонки

При розв'язанні лінійної задачі статки визначений напружено-деформований стан оболонки. На рис. 3 представлена форма деформування оболонки. Випучування оболонки відбувається в зоні максимального згинального моменту.

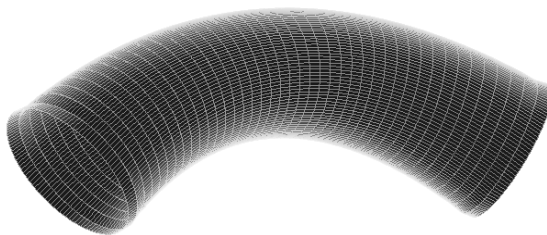


Рис. 3. Форма деформування оболонки

Виконаний розрахунок на власні коливання, визначенні форми коливань у вигляді системи векторів $\Phi = \{\bar{\Phi}_k\}_{k=1}^m$ та відповідні їм частоти: $\omega_1 = 10,497$ Гц; $\omega_2 = 12,708$ Гц; $\omega_3 = 13,603$ Гц; $\omega_4 = 17,503$. На рис. 4

представлені перші чотири форми власних коливань циліндричної оболонки: вздовж кола спостерігається відповідно 4, 5, 3 та 6 хвиль. Всі форми коливань оболонки мають вздовж твірної тільки одну хвилю.

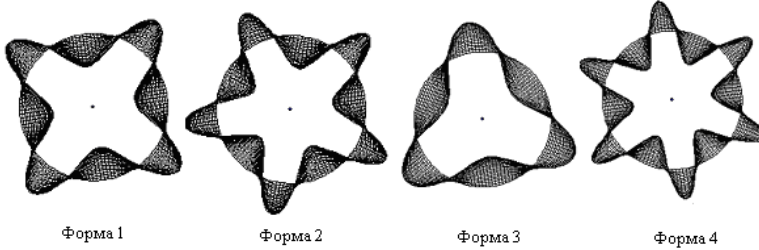


Рис. 4. Власні форми коливань циліндричної оболонки

Для отримання форм втрати стійкості оболонки при дії пар сил у вигляді системи векторів $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^m$ за допомогою обчислювального комплексу [5] розв'язана лінійна задача стійкості оболонки, визначені форми втрати стійкості і відповідні критичні значення напруження. Перша форма втрати стійкості оболонки представлена на рис. 5.

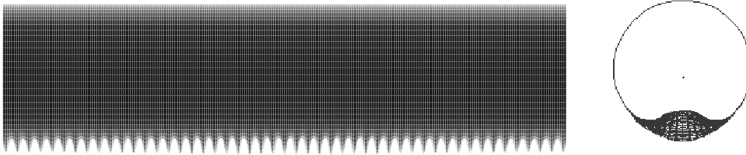


Рис. 5. Перша форма втрати стійкості оболонки

Втрата стійкості відбулася при напруженні $P_{кр} = 2,591 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$. Видно, що вздовж кола форма втрати стійкості оболонки має одну хвилю, вздовж твірної 50 хвиль. Спектр критичних значень напруження щільний:
 $P_{кр1} = 2,591 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $P_{кр2} = 2,596 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $P_{кр3} = 2,597 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$,
 $P_{кр4} = 2,606 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

Розрахункове значення верхнього критичного напруження було визначено при дослідженні стійкості оболонки при чистому згині Вольміром А.С. [1] за формулою

$$P_{кр} = \hat{P}_{кр} \frac{Eh}{R}, \quad (1)$$

де $\widehat{P}_{кр}$ - коефіцієнт критичного напруження, що визначається згідно графіка наведеного в [1] в залежності від параметру ξ , який знаходиться за формулою

$$\xi = \frac{L}{mR} \sqrt{h/R}, \quad (2)$$

де m – кількість хвиль вздовж твірної.

Згідно рекомендацій автора необхідно змінювати кількість хвиль для визначення меншого значення критичного напруження. За формулою (2) визначаємо параметр ξ для $m = 1, 2, \dots, 50$. Він знаходиться в діапазоні $0,358 \div 0,007$. Аналітичне значення верхнього критичного напруження (1) склало $P_{кр} = 2,42 \cdot 10^8 \div 2,5 \cdot 10^8$ Н/м² і майже співпало з розрахунковим критичним значенням.

Однак, форма втрати стійкості оболонки при лінійному розрахунку (рис. 5) відрізняється від форми деформування оболонки, що наведена в [1]. Стверджується, що для тонких оболонок зі значним відношенням довжини до радіусу оболонки, випучування відбувається по довгим півхвилям, подібно випадку рівномірного стиснення. Тому для адекватного описання поведінки оболонки при втраті стійкості треба врахувати геометричну нелінійність. Для цього в роботі розв'язана нелінійна задачі статички. Форма деформування оболонки при втраті стійкості представлена на рис. 6.

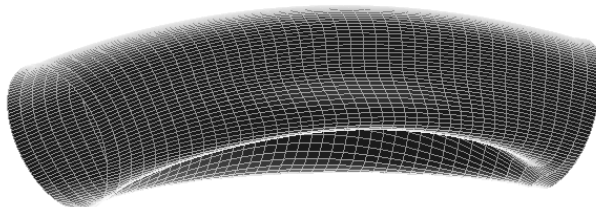


Рис. 6. Форма деформування оболонки при нелінійному розрахунку

Форма деформування оболонки є випучуванням по довгих хвилях. Втрата стійкості відбулася при напруженні $P_{кр} = 2,42 \cdot 10^8$ Н/м². При лінійному та нелінійному розрахунках стійкості оболонки критичні напруження дуже близькі за значенням, цей момент також був відмічений в [1].

Отримані критичні значення напружень можна перевірити за допомогою задачі визначення власних частот циліндричної оболонки при дії статичної складової параметричного навантаження. Параметричне навантаження має вигляд періодичної функції виду: $f(t) = f_0 + f_t \sin \theta t$, де f_0 і f_t - статична та динамічна складові навантаження. В роботі статичною складовою навантаження є момент M , що характеризує дію пар сил. За допомогою обчислювального комплексу [5] виконаний лінійний та нелінійний динамічні розрахунки. На рис. 7 представлені криві залежності чотирьох власних частот оболонки від дії статичної складової параметричного навантаження. По осі абсцис відкладені значення напруження на елемент оболонки P , по осі ординат – власні частоти коливань навантаженої оболонки ω^* .

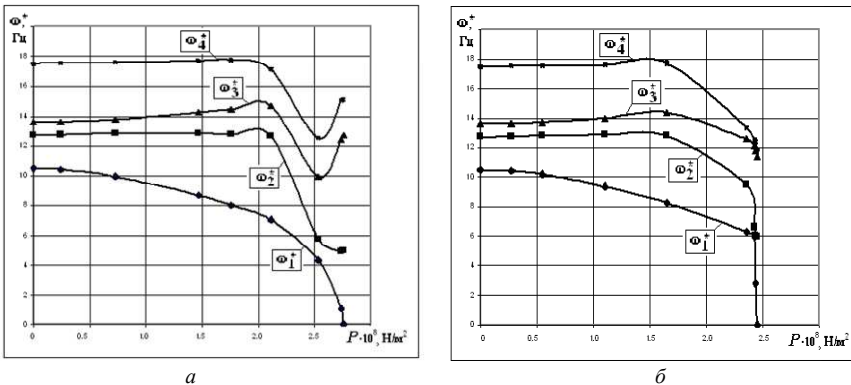


Рис. 7. Власні частоти коливань навантаженої циліндричної оболонки:
а) лінійний розрахунок; б) нелінійний розрахунок

Розрахунки показали, що якщо статична складова параметричного навантаження дорівнює нулю, власні частоти навантаженої оболонки при лінійному та нелінійному розрахунках співпадають з власними частотами ненавантаженої оболонки і складають: 10,50; 12,71; 13,61; 17,50 (Гц). При збільшенні статичної складової навантаження власні частоти навантаженої оболонки зменшуються. Напруження при нульовому значенні першої власної частоти навантаженої оболонки є розрахунковим верхнім критичним значенням напруження при втраті стійкості оболонки. При лінійному розрахунку критичне напруження склало $P_{кр} = 2,76 \cdot 10^8$ Н/м², при нелінійному – $P_{кр} = 2,45 \cdot 10^8$ Н/м². Ці значення лежать в діапазоні критичних напружень, що визначені аналітично.

Дослідження показали, що форми власних коливань та форми втрати стійкості при лінійному і нелінійному розрахунках різні, хоча відповідні критичні значення напружень близькі за значенням. Можна зробити висновок, що тільки форма втрати стійкості оболонки при нелінійному розрахунку може бути прийнята за базис редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині.

Згідно чисельної методики [4] редукована дискретна модель параметричних коливань оболонки має вигляд системи m звичайних диференціальних рівнянь

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + K^* \dot{\bar{y}}(t) + f(t) K_G^* \bar{y}(t) = 0. \quad (3)$$

Тут M^* , K^* та K_G^* - редуковані матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості розмірністю $m \times m$ представлені відповідно виразами

$$M^* = V^T M V, \quad K^* = V^T K V, \quad K_G^* = V^T K_G V, \quad (4)$$

де $V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)^T$ - матриця розмірністю $n \times m$, що визначається системою базисних векторів $\{\bar{v}_k\}_{k=1}^m$; $\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ - вектор узагальнених координат; $f(t)$ - періодична функція.

В обчислювальному комплексі [4] матриця власних форм коливань $\Phi = \{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^m$ нормована по матриці мас, тому редукована матриця мас має вигляд одиничної діагональної матриці $M^* = \Phi^T M \Phi = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості визначаються за формулами:

$$K^* = \Omega^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2), \quad K_G^* = \Phi^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K \Phi. \quad (5)$$

Тут вектори матриць $K\Psi$ і $K\Phi$ обчислюються за допомогою процедури визначення реакції системи на задане поле переміщень, яке подається у вигляді векторів форм втрати стійкості $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^m$, та форм коливань $\Phi = \{\bar{\varphi}_k\}_{k=1}^m$; $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ - матриця критичних значень навантаження, що отримані при розв'язанні задачі стійкості оболонки; ω_k ($k=1, 2, \dots, n$) - вектор частот власних коливань.

Редукована модель параметричних коливань оболонки (3) переписується у вигляді

$$\ddot{y}(t) + \Omega^2 \bar{y}(t) + f(t) \Phi^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T K \Phi \bar{y}(t) = 0. \quad (6)$$

У зв'язку з тим, що за базисну функцію прийнятий вектор форми втрати стійкості оболонки при нелінійному розрахунку, система рівнянь (6) записується виразом

$$y(t) + \omega_1^2 y(t) + f(t) \bar{\Phi}_1^T K \bar{\Psi}_1 \lambda^{-1} \bar{\Psi}_1^T K \bar{\Phi}_1 y(t) = 0. \quad (7)$$

Після розрахунків редукована модель параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині (7) набуває вигляду рівняння

$$y(t) + 65,954^2 - 0,0856 f(t) y(t) = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) можна подати у вигляді рівняння Мат'є [3]

$$y(t) + 65,954^2 (1 - 1,96 \times 10^{-5} f(t)) y(t) = 0. \quad (9)$$

Отримане рівняння дає змогу дослідити динамічну стійкість циліндричної оболонки при чистому згині, визначити області нестійкості і оцінити вплив динамічної складової параметричного навантаження на поведінку оболонки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 880 с.
2. *Аксельрад Э.Л.* Гибкие оболочки. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. – 376 с.
3. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
4. *Гоцуляк Є.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2004. – № 74.
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001. – 448с.

Отримано 30.06.09

Е.А. Гоцуляк, Е.С. Дехтярюк, О.А. Лукьянченко

Построение редуцированной модели параметрических колебаний цилиндрической оболочки при чистом изгибе

Построена динамическая модель параметрических колебаний цилиндрической оболочки при действии на ее торцах пар сил. Дискретизация континуальной модели выполнена с помощью метода конечных элементов с применением современного вычислительного комплекса. Редуцирование дискретной модели оболочки осуществлено на основе метода обобщенных координат. Исследован вопрос выбора базисных функций для адекватного описания докритического поведения оболочки при чистом изгибе.

E.O. Gotsuliak, E.S. Dehtiaruk, O.O. Lukianchenko

A construction of reduce model of parametric oscillation of cylindrical shell bending

The dynamic model of parametric oscillation of cylindrical shell under action of pair of forces applied at it ends is built. Discretizing of continual model is executed by the method of finite elements with the use of modern program. The reducing of discrete model is carried out on the basis of generalized coordinates method. The problem of choice of base functions is investigated for adequate description of precritical behavior of shell bending.

УДК 539.375

С.О. Пискунов, канд. техн. наук**О.І. Гуляр**, д-р техн. наук**С.В. Мицюк**

ВИЗНАЧЕННЯ РЕСУРСУ З ВИКОРИСТАННЯМ ПАРАМЕТРА ПОШКОДЖУВАНOSTІ ПРИ БАГАТОЦИКЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На основі НМСЕ реалізована методика визначення ресурсу з використанням континуальної механіки руйнування. Наведені дослідження достовірності отриманих результатів.

Вступ. Забезпечення і підвищення працездатності машин і конструкцій в значній мірі залежать від правильної оцінки довговічності їх окремих деталей і елементів, які працюють, зокрема, під дією повторно-змінюваних (циклічних) навантажень. Величина ресурсу в цих умовах визначається величиною втомної довговічності N . У випадку багатоциклового навантаження розглядаються бази навантаження $N > 2 \cdot 10^5$.

Експериментально встановлено, що одним з основних факторів, що призводить до вичерпання ресурсу, є накопичення в матеріалі незворотних пошкоджень [2]. На першій стадії процес накопичення пошкоджуваності відбувається до утворення макроскопічного дефекту, після чого відбувається розвиток зони континуального руйнування.

Визначення пошкоджуваності відповідальних елементів конструкцій при циклічному навантаженні потребує визначення просторового напружено-деформованого стану. Розв'язання таких задач із використанням тривимірної постанови методу скінчених елементів (МСЕ) призводить до великих обчислювальних витрат, які можуть бути неприйнятними. Ефективним засобом скорочення обчислювальних витрат при розгляді просторових тіл канонічної форми, зокрема тіл обертання, є напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ).

Метою даної роботи є створення методики визначення ресурсу просторових тіл обертання при багатоцикловому навантаженні на основі НМСЕ із використанням підходів континуальної механіки руйнування його апробація і визначення на цій основі ресурсу до початку руйнування просторового елемента конструкції. На сьогоднішній день розв'язання подібних задач виконано лише для незначної кількості тестових задач [2,4,7].

Розв'язання поставленої задачі потребує вибору співвідношень для опису процесу континуального руйнування при циклічному навантаженні, створення алгоритму визначення параметрів континуальної механіки руйнування і проведення розв'язання тестових прикладів для перевірки еквівалентності отримуваних розрахункових результатів відомим експериментальним даним.

1. Фізичні співвідношення механіки континуального руйнування при циклічному навантаженні. Першим і найбільш розповсюдженим поданням параметрів континуального руйнування є гіпотеза лінійного додавання пошкоджень запропонована А.Пальмгреном [13]. Умова руйнування для дискретного і неперервного законів зміни амплітуди навантаження має вигляд:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_{Ri}} = 1 \quad \text{або} \quad \sum_0^{N_R} \frac{dN}{N_R(\sigma_a)} = 1, \quad (1.1)$$

де N_i – число циклів дії навантаження постійної амплітуди; N_{Ri} – число циклів до руйнування при цьому навантаженні; n – число ступенів зміни навантаження; $N_R(\sigma_a)$ – число циклів до руйнування, що відповідає миттєвому значенню напруження σ_a .

В подальшому ця гіпотеза була розвинута М.А. Майнером [11].

Величина $\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N_{Ri}} = D_i$ в цьому випадку є мірою пошкодження матеріалу, викликаного за N_i циклів навантаженням з рівнем напруження σ_a . Тоді умова руйнування запишеться наступним чином:

$$\sum_{i=1}^n D_i = 1 \quad (1.2)$$

На теперішній час гіпотеза, котра визначається рівняннями (1.1)-(1.2), відома під назвою закону Пальмгрена-Майнера-Робінсона або закону лінійного накопичення пошкоджень при змінному навантаженні. Як видно із структури цих рівнянь, точна умова руйнування виконується тільки при постійному навантаженні. В усіх інших випадках варто очікувати відхилення від (1.2), причому чим сильніше змінюється навантаження, тим відхилення повинні бути більшими.

В залежності від послідовності прикладання навантаження відхилення може відбуватись як в безпечну, так і в небезпечну сторону.

При цьому лінійна гіпотеза к передісторії навантаження не чуттєва. Відомі різні спроби уточнення (1.1) - (1.2) з метою забезпечення кращого співставлення з експериментом. Проте в практичних розрахунках лінійна гіпотеза зберігає своє значення дякуючи, перш за все, концептуальній і математичній простоті [13].

Більш перспективним є інтерпретація пошкодженості як кінетичного процесу утворення і розвитку внутрішніх несучильностей. В ряді робіт закономірності втомного руйнування досліджуються шляхом введення феноменологічної міри руйнування D і відповідних кінетичних рівнянь при циклічному навантаженні.

На сьогоднішній день в механіці пошкоджуваності для опису руйнування при циклічному навантаженні в якості внутрішньої змінної частіше всього застосовується параметр пошкоджуваності D в формі:

$$\frac{dD}{dN} = F(D, \sigma), \quad (1.3)$$

Значення $D(0) = D_0$ відповідає початковому стану матеріалу (зокрема, наявності початкових пошкоджень, у випадку відсутності яких $D_0=0$), а значення $D(N^*) = 1$ – критичне значення пошкодженості, що відповідає повністю пошкодженому стану, в якому несуча здатність є вичерпаною.

Вигляд функції $F(D, \sigma)$ і значення фізико-механічних констант матеріалу, що входять до цього співвідношення визначаються на основі експериментальних досліджень. Розглянемо деякі відомі форми цього рівняння.

В роботі [12] В.В. Болотіним був запропонований вираз наступного вигляду:

$$F(D, \sigma) = \frac{\eta(\sigma)}{B} \sigma^b D^{1 - \frac{1}{\eta(\sigma)}}, \quad (1.4)$$

де B і b – параметри рівняння кривої втоми, $\eta(\sigma)$ - незростаюча функція σ , що визначається по результатам програмних досліджень з урахуванням граничних умов

$$D(0) = 0, \quad D^* = 1. \quad (1.5)$$

Зазначений вираз дозволяє врахувати вплив послідовності прикладання програмного навантаження на довговічність.

Відомі також інші подання функції $F(D, \sigma)$. Зокрема, для опису монотонної зміни інтенсивності накопичення пошкодженості із збільшенням кількості циклів в роботі [7] був запропонований вираз вигляду:

$$\frac{dD}{dN} = k(\sigma)m(\sigma)N^{m(\sigma)-1}, \quad (1.6)$$

де $k(\sigma)$ і $m(\sigma)$ – залежні від напруження σ коефіцієнти; пошкодженість в даному випадку залежить як від рівня напружень, так і від накопиченої кількості циклів навантаження, монотонно зростаючи при $m(\sigma) > 1$ і монотонно зменшуючись при $m(\sigma) < 1$.

В роботі [8] із посиланням на [10] зазначено, що оскільки для певного класу конструкційних матеріалів процес накопичення пошкодженості при циклічному навантаженні характеризується уповільненням із зростанням кількості циклів. Урахування цього ефекту запропоновано здійснювати введенням в вираз для $\frac{dD}{dN}$ спадаючої функції $\psi(\sigma, N)$ [8]:

$$\frac{dD}{dN} = e^{A\sigma+B} \psi(\sigma, N), \quad (1.7)$$

де $\psi(\sigma, N) = e^{-m\sigma(N-1)}$, σ – амплітудне значення напруження; A і B експериментальні константи, що визначаються по кривій втоми, рівняння якої подано у вигляді $\frac{1}{N} = e^{A\sigma+B}$.

В роботі [2] вигляд рівняння накопичення пошкодженості передбачає урахування зменшення ефективного перерізу елемента конструкції за рахунок накопичення пошкодженості, що відповідає первісному фізичному трактуванню пошкодженості, запропонованому Ю.Н. Работновим [6]. Для урахування циклічного навантаження вираз для пошкодженості містить номінальне значення напруження σ_1^0 :

$$\frac{dD}{dN} = \begin{cases} B \left(\frac{\sigma_1^0}{1-D} \right)^m & (\sigma_1^0 > 0); \\ 0 & (\sigma_1^0 < 0), \end{cases} \quad (1.8)$$

де $\sigma_1^0 = \sigma_{m0} + \sigma_{a0} \sin(2\pi ft)$ – номінальне напруження, f – частота прикладання навантаження. При конкретизації величини σ_1^0 для окремих випадків вираз (1.8) отримаємо у вигляді:

- для симетричного навантаження ($\sigma_m = 0$, $\sigma_a \neq const$):

$$\frac{dD}{dN} = C \frac{(\sigma_{a0} \sin 2\pi N)^m}{2^m (1-D)^m}, \quad (1.9)$$

- для асиметричного навантаження ($\sigma_m = const$, $\sigma_a = const$):

$$\frac{dD}{dN} = C \frac{(\sigma_{m0} + \sigma_{a0} \sin 2\pi N)^m}{2^m (1-D)^m}, \quad (1.10)$$

де m і C константи матеріалу, σ_a , σ_{m0} , σ_{a0} – номінальні значення статичної та циклічної компонент відповідно.

Вираз, що ґрунтується на концепції пошкодженості Ю.Н.Работнова [6], запропонований також в роботі [9]:

$$\frac{dD}{dN} = A \left(\frac{\sigma}{\sigma_B (1-D)} \right)^n, \quad (1.11)$$

де A та n – експериментально визначені константи; σ_B – межа міцності матеріалу.

В роботі [9] вище наведене рівняння (1.11) було розв'язане в замкненому вигляді, що дозволило отримати вираз для величини пошкодженості у вигляді:

$$D = 1 - (n+1) \sqrt[1 - \frac{A}{(n+1) \sigma_B^n \int_0^{N^*} \sigma^n dN}]{\quad} \quad (1.12)$$

де N^* - кількість циклів навантаження в даний момент часу ($0 \leq N^* \leq N$).

При відомій історії навантаження $\sigma(N)$ цей вираз дозволяє обчислити пошкоджуваність D в будь-який момент часу. У випадку коли $\sigma = \sigma_a = const$, вираз (1.12) матиме вигляд [9]:

$$D = 1 - (n+1) \sqrt[1 - \frac{A}{(n+1)\sigma_B^n} \sigma^n N]{} \quad (1.13)$$

звідки може бути знайдена кількість циклів для початку руйнування :

$$N^* = \frac{(n+1)\sigma_B^n (1 - (1-D)^{n+1})}{A\sigma^n} \quad (1.14)$$

У випадку коли $D = 1$ число циклів навантаження дорівнює числу циклів до руйнування. Використовуючи відоме рівняння кривої втоми вигляду $N = C\sigma^{-m}$ і підставляючи його в рівняння можна визначити константи рівняння (1.13) у вигляді:

$$n = m, \quad A = ((n+1)\sigma_B^n) / C. \quad (1.15)$$

Такий підхід не потребує додаткових експериментальних випробувань для визначення рівнянь накопичення пшкодженості при циклічному навантаженні.

Таким чином, при наявності визначених параметрів напружено-деформованого стану використання вищенаведених рівнянь і визначених за викладеним підходом констант рівнянь дозволяє визначати величину пошкодженості при циклічному навантаженні.

2. Алгоритм розв'язання задач континуального руйнування при багаточикловому навантаженні на основі НМСЕ. В загальному випадку процес циклічного навантаження може здійснюватись із змінними параметрами циклу (середнім значенням напруження і амплітуди). Для моделювання процесу деформування і континуального руйнування процес навантаження необхідно розділити на певну кількість етапів – кроків розв'язання задачі – S^* , при цьому в межах кожного етапу s навантаження відбувається із сталим середнім напруженням σ_{0s} і сталою амплітудою σ_{as} протягом N_s циклів. При визначених таким чином параметрах навантаження на кожному кроці виконується визначення напружено-деформованого стану. Величина пошкодженості D_s , за всю попередню історію навантаження (кількість циклів навантаження $N_S = \sum_{s=1}^S N_s$) визначається за формулою (1.12), поданою із урахуванням покрокової дискретизації процесу навантаження:

$$D_s = 1 - (n+1) \sqrt{1 - \frac{A}{(n+1)\sigma_B^n} \sum_{s=1}^S (\sigma_{as})^n N_s} \quad (2.1)$$

У випадку циклічного навантаження із сталими параметрами циклу визначення напружено-деформованого стану достатньо виконати лише один раз, а визначення кількості циклів до початку руйнування N^* виконується за формулою (1.14) при $D = D^* = 1$:

$$N^* = \frac{(n+1)\sigma_B^n}{A\sigma^n} \quad (2.2)$$

При необхідності моделювання перебігу процесу накопичення пошкодженості здійснюється послідовним використанням формули (2.1) при значеннях N : $0 \leq N \leq N^*$.

Для апроксимації просторових тіл обертання із на основі НМСЕ використовуються просторові кругові неоднорідні скінчені елементи [1]. Визначення напружено-деформованого стану потребує розв'язання систем рівнянь НМСЕ із використанням блочно-ітераційних алгоритмів.

На кожній ітерації k кроку розв'язання задачі (етапу навантаження) s вектор невідомих амплітудних переміщень системи рівнянь НМСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u\}_k^s = \{u\}_{k-1}^s + \{\Delta u\}_k^s = \{u\}_{k-1}^s + [K]_{\lambda\lambda}^{-1} (\{P\}^s - \{R\}_k^s), \quad (2.3)$$

де $\{P\}^s$ – вектор вузлових навантажень на кроці s ; $\{R\}_k^s$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n , обчислений за величинами напружень σ_{ij} , що відповідають значенням параметрів циклу навантаження і визначаються за умов пружного деформування тіла; $[K]_{\lambda\lambda}$ – матриця жорсткості дискретної моделі [1].

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} (\{\Delta u\}_\lambda^k)^2 \leq \zeta \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} (\{u\}_\lambda^k)^2, \quad (2.4)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності

отриманого розв'язку, λ – номер члену ряду розкладу переміщень в ряд за поліномами при застосуванні НМСЕ [1].

В кінці кроку після визначення величин D_s для всіх СЕ тіла проводиться перевірка умови $D_s < D^* \approx 1$, у випадку виконання якої фіксується момент утворення початкової зони континуального руйнування.

3. Дослідження вірогідності результатів. Для дослідження характеру збіжності і вірогідності результатів, отримуваних із використанням викладеного алгоритму при наявності циклічних навантажень розглянемо приклад про деформування стержня трубчастого поперечного перерізу (рис.1) під впливом циклічного навантаження з амплітудою. Максимальні величини напруження в стержні становили $\sigma_a = 10\text{МПа}$; 15МПа ; 17МПа .

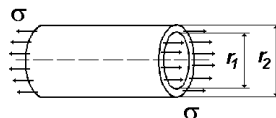


Рис. 1

Матеріал стержня – сталь 30ХГСА, для якої $E=1\text{МПа}$, $\nu=0$, $\sigma_B = 1400\text{МПа}$, рівняння кривої втоми наведено в роботі [3] і має вигляд: $N = C\sigma^{-m} = 3.07 \cdot 10^6 \sigma^{-3.27}$. Із використанням наведеного рівняння були отримані наступні еталонні значення ресурсу стержня (табл.1).

Таблиця 1

	$q_1=10\text{МПа}$	$q_2=15\text{МПа}$	$q_3=17\text{МПа}$
$N = C\sigma^{-m}$	$3.07 \cdot 10^7$	$8.153 \cdot 10^6$	$5.4146 \cdot 10^6$

Із використанням констант матеріалу для обчислення параметра пошкодженості за рівняннями (1.13), визначених із використанням (1.15) отримаємо: $A=2.6985357 \cdot 10^3$ та $n=3.27$. Криві пошкодженості, отримані із використанням цих рівнянь і констант зображені на рис. 2.

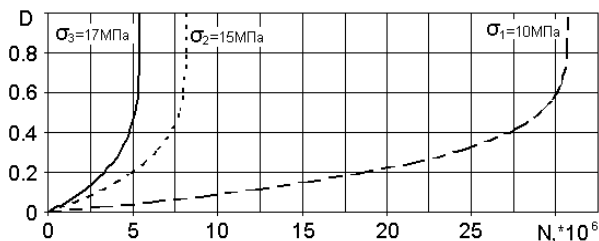


Рис. 2

Розрахунок проведений за допомогою НМСЕ, відповідна дискретна модель показана на рис. 3.

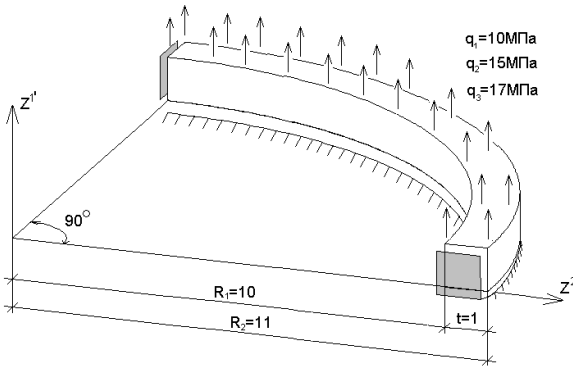


Рис. 3

Обчислені із використанням отриманих значень напружень величини параметра пошкоженості і кількості циклів до початку руйнування повністю збігаються із наведеними на рис. 2 і в табл. 1.

4. Приєднувальний штуцер. Досліджуваний об'єкт представляє собою масивне тіло обертання із ступенево змінною геометрією меридіального перерізу, виготовлене із сталі 08Х14АН4МДБ, для якої коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$; модуль пружності $E = 20.3 \cdot 10^4$ МПа; межа текучості при розтязі $\sigma_T = 1045$ МПа, межа міцності $\sigma_B = 1300$ МПа. В коловому напрямку геометричні і механічні характеристики не змінюються. Розрахункова схема зображена на (рис. 4,а).

Визначення напружено-деформованого стану проводиться під дією внутрішнього тиску. величиною $q=2500$ кг/см² частота змінення навантаження становить 50Гц.

Для дослідження збіжності результатів визначення напружено-деформованого стану використані дискретні моделі з кількістю невідомих $N=1280$ (рис. 4,а) і $N=1722$ (рис. 4,б). Отримані із їх використанням розподілення інтенсивності напружень в поперечному перерізі штуцера є ідентичними. Розподілення інтенсивності напружень по висоті вздовж внутрішньої поверхні штуцера, де значення напружень є максимальними, наведено на рис. 5. Як видно, в більшій частині штуцера (при $100 \leq z^1 \leq 270$) напруження змінюються несуттєво, на відміну від частин при $z^1 \leq 100$ і $z^1 \geq 270$, що пояснюється відповідною зміною площі поперечного перерізу.

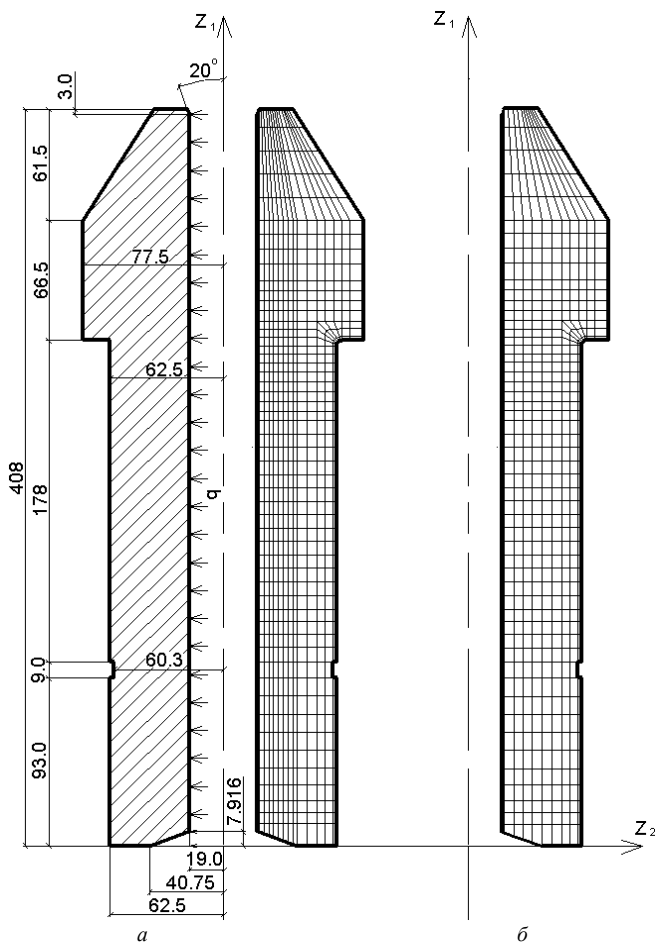


Рис. 4

Величини напружень в цій частині штуцера можуть бути отримані із використанням відомих формул задачі про деформування товстостінного циліндра. Так, отримані розподілення напружень вздовж радіуса по перерізу 1-1 повністю збігається (рис. 6) із зазначеним аналітичним розв'язком.

Визначення констант матеріалу для обчислення параметра пошкоженості за рівняннями (1.11) було здійснено за допомогою кривої втоми $N = C\sigma^{-m} = 2 \cdot 10^6 \sigma^{-4.267}$ [5], із використанням (1.15) отримаємо: $A = 1,5495 \cdot 10^{-2}$ та $n = 4,267$. Величина ресурсу становить з $4,9 \cdot 10^9$.

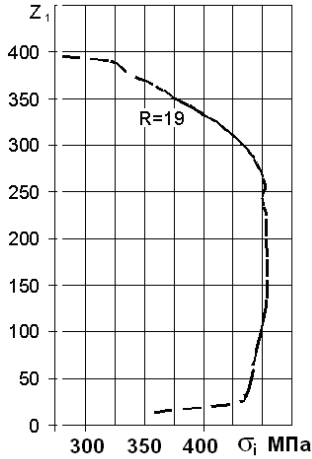


Рис. 5

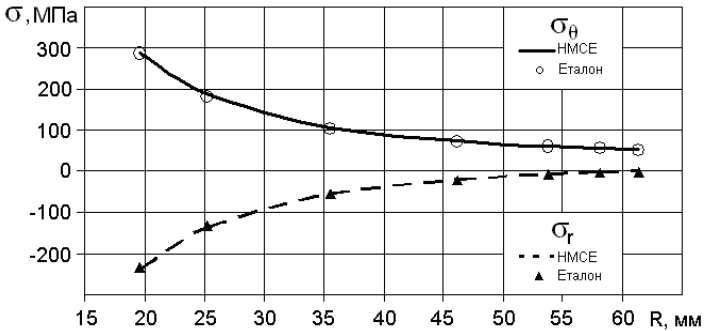


Рис. 6

Таким чином було створено і апробовано методику визначення ресурсу просторових тіл обертання при циклічному навантаженні на основі НМСЕ із використанням підходів континуальної механіки руйнування до початку руйнування просторового елемента конструкції. В майбутньому це дасть змогу проводити розв'язання задач від моменту експлуатації об'єкту до повного втрачання ним несучої здатності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Голуб В.П.* Поврежденность и одномерные задачи разрушения в условиях циклического нагружения // Прикл. механика. – 1987.-23, №10. – С.19-29
3. *Гудрамович В.С.* Несущая способность и долговечность элементов конструкций – К.:Наук. думка, 1981. – 284 с.
4. *Кузьменка В.А.* Многоцикловая усталость при переменных амплитудах нагружения – К.: Наук. думка, 1988.
5. *Лебедев А.А.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: – К.:Издательский Дом «Ин Юре», 2003. – 540 с.
6. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементо конструкций. – М.:Наука, 1966. – 732 с.
7. *Серенсон С.В. и др.* Прочность при нестационарных режимах нагрузки. – К.:Наук. думка, 1961.
8. *Серенсон С.В.* Усталость материалов и элементов конструкций К.:Наук. думка, 1985.
9. *Сильверстов И.Н.* Расчет ресурса и длительной прочности с использованием критерия повреждаемости.– Проблемы машиностроения и надежности машин, 2006, №6. – С.116-118.
10. *Nishihara T., Jamada T.* Memor. Fac. Engineering K yoto Univ. 1956, №3.
11. *Miner M.A.* Cumulative damage in fatigue // *Ibid.* – 1945. – 12, №1. – P. A159-A164
12. *Murakami S., Imazumi T.* Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // *J. Theor. and Appl. Mech.* – 1982. – 1, №5. – P.743-761.
13. *Palmgren A.* Die Lebensdauer von Kugellagern // *Zf Vereines Deutscher ING.* - 1924. - 68, №14. – S.339-341.

Отримано 01.07.09

С.О. Пискунов, А.И. Гуляр, С.В. Мицюк

Определение ресурса с использованием параметра повреждаемости при многоцикловом нагружении

На основе ПМКЭ реализована методика определения ресурса с использованием подходов континуальной механики разрушения. Приведены исследования достоверности полученных результатов.

S.O. Pyskunov, O.I. Gulyar, S.V.Mytsyuk

Life time determination using of damage parameter under multicyclic loading condition

On the basis of SFEM the method of life time determination is realized using of continual damage mechanics approaches. Researches of authenticity of the obtained results are presented.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
І.І. Солодей, канд. техн. наук
А.Ю. Приходько

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ДИНАМІЧНОГО РОЗРАХУНКУ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ, ЩО ЗНАХОДЯТЬСЯ ПІД ДІЄЮ РУХОМИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Проведено дослідження меж використання розробленого апарату розв'язання стаціонарної задачі динамічного деформування тіл під дією рухомого навантаження. В рамках НМСЕ створені нові алгоритми для моделювання процесу взаємодії тіла з неоднорідною пружною основою. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів.

Вступ.

На сьогоднішній день значно зросла роль динамічного розрахунку інженерних конструкцій. Пов'язано це не тільки з необхідністю задоволення жорстким нормам безпеки в різноманітних сферах народного господарства, але і бажанням створення оптимальних рішень з точки зору вартості розробки та подальшої експлуатації запроектованих об'єктів. Побудова динамічних моделей розрахунку деформівних систем надає можливість оцінювати не тільки кількісні характеристики явища, але виявляти та пояснювати нові якісні його сторони. При цьому до числа найбільш складних проблем динаміки будівельних систем відносяться питання дослідження деформування елементів конструкцій при дії навантажень, місце прикладання і інтенсивність яких змінюється в залежності від часу. Найпростішими прикладами систем з рухомими навантаженнями є залізничні рельси, полотна, мости, тунелі під дією залізничних потягів; асфальтовані, бетоновані та інші поверхні під дією транспортних засобів; палуби авіаносців, аеродроми під дією літальних апаратів; виготовлення великогабаритних дзеркал різноманітної геометричної форми (дія рухомого полірувальника); пластинки і оболонки під дією рухомих штампів, рідини або газу, вибухових хвиль і багато інших. Сюди відносяться задачі визначення несучої здатності, пошук максимальних переміщень, швидкостей, прискорень та напружень, встановлення критеріїв стійкості і міцності.

Труднощі розрахунку конструкцій при наявності динамічних (рухомих або стаціонарних) навантажень багатократно збільшуються у порівнянні з об'ємом статичних розрахунків. Для полегшення аналізу, в багатьох випадках, вводять додаткові гіпотези, які, як правило, звужують клас досліджуваних об'єктів і процесів. Питання визначення областей

застосування різноманітних теорій і методів традиційно займають одне з найбільш важливих місць у наукових дослідженнях.

1. Основні співвідношення стаціонарної задачі динаміки при деформуванні тіл під дією рухомого навантаження в схемі напіваналітичного методу скінченних елементів.

В узагальненій постановці про дію рухомого навантаження на пружні системи враховується маса навантаження і маса самої системи. Якщо знехтувати кожною із таких складових, то розв'язок виявляється більш-менш наближеним. Однак, існує ряд задач, в яких маса рухомого навантаження не впливає на загальне рішення [6].

Розглядаються сталі процеси в призматичних прямокутних тілах при постійній швидкості руху навантаження, з фронтом якого пов'язують рухому базисну систему координат $y^{i'}$ (рис. 1).

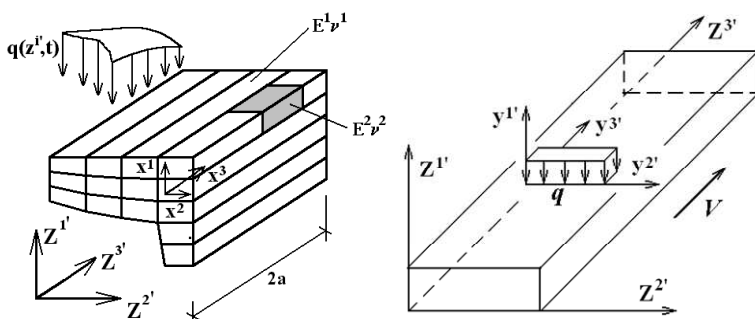


Рис. 1

Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в базисній декартовій системі координат $Z^{i'}$. Напружено-деформований стан тіла із складною формою поперечного перерізу подається в місцевій криволінійній системі координат x^i , яка пов'язана з геометрією тіла [5].

Зв'язок між рухомою і нерухомою системами координат подається через співвідношення:

$$y^{3'} = Z^{3'} - V_p t, \quad y^{\alpha'} = Z^{\alpha'}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1)$$

Зв'язок між переміщеннями та деформаціями приймається у вигляді рівнянь Коші. Компоненти тензора напружень обчислюються за компонентами тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука.

Як показано в роботі [3], рівняння руху для визначеного класу задач записується у вигляді:

$$\int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV + V_p^2 \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial y^{3'}} \frac{\partial \delta u_i}{\partial y^{3'}} dV = \int_V f^i \delta u_i dV + \int_S p^i \delta u_i dS = 0. \quad (2)$$

В ряді публікацій, зокрема в роботах [1, 2], доведено, що для аналізу подібного класу об'єктів найбільш раціональним є застосування напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ).

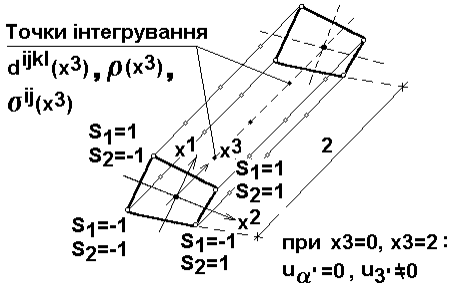


Рис. 2

Апроксимація просторових призматичних тіл виконується на основі скінченного елемента (СЕ) (рис.2), що являє собою прямокутну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж направляючої у вигляді прямої лінії. Суть апроксимації полягає в розкладі невідомих задачі вздовж твірної по деякій системі

неперервних гладких функцій (ряди Фур'є) у поєднанні із скінченною елементною дискретизацією в області поперечного перерізу. Матриці жорсткості та мас СЕ отримані в роботах [3, 7].

Система розрахункових рівнянь НМСЕ для задачі динаміки приймає вигляд:

$$[K]_{lm} \{U\}_l = \{Q\}_m, \quad m = l_0, \dots, l, \dots, L \quad (3)$$

де $[K]_{lm} = [K]_{lm} + A[M]_{lm}$ - ефективна амплітудна матриця жорсткості системи алгебраїчних рівнянь; A - параметр, пов'язаний з методом апроксимації невідомих по часовій координаті.

Розв'язання системи рівнянь (3) виконується за допомогою алгоритму, що заснований на методі блокової послідовної верхньої релаксації [9]:

$$\{U\}_{l,i+1} = \{U\}_{l,i} + \tilde{\omega} [K]_{ll}^{-1} (\{Q\}_l - \{R\}_{l,i}), \quad (4)$$

де $\{R\}_{l,i}$ - вектор вузлових амплітудних реакцій на ітерації i , який визначається співвідношенням:

$$\{R\}_{l,i} = \sum_{m=l_0}^{l-1} [K]_{lm} \{U\}_{i+1}^m + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{U\}_i^m, \quad (5)$$

де $\{U\}_{i+1}^m$, $\{U\}_i^m$ - амплітудні значення вузлових переміщень на ітераціях $i+1$ та i відповідно, $\tilde{\omega}$ - параметр релаксації ($1 \leq \tilde{\omega} < 2$).

2. Динамічне деформування неоднорідної системи тіло - пружна основа.

Вважається, що реакція пружної основи пропорційна переміщенням точок граничної поверхні і направлена по нормалі до поверхні S_c . При цьому, вводиться поняття коефіцієнта постелі або пропорційності k , що у фізичному сенсі представляє собою величину реакції, яка приходить на одиницю поверхні тіла при відповідному одиничному переміщенні. Особливістю взаємодії деформованого тіла із основою є обов'язкове урахування одностороннього характеру в'язів. Інакше кажучи, основа запобігає переміщенню точок поверхні S_c тіла тільки вглиб самої основи. Якщо переміщення спрямоване в протилежному напрямку реакція пружної основи дорівнює нулю.

Система нелінійних рівнянь НМСЕ, що описує односторонню взаємодію з пружною основою для задачі динаміки записується у вигляді:

$$([K]_{lm} + [C]_{lm})\{U\}_l = \{Q\}_m, \quad (6)$$

де $[C]_{lm}$ - амплітудні матриці жорсткості пружної основи, які складаються із доданків до діагональних елементів матриці жорсткості для вузлів, що контактують з пружною основою.

Коефіцієнти матриці $[C]_{lm}$ обчислюються за формулами:

$$[c]_{lm} = \frac{1}{2} k_{lm}^{k'} \sqrt{g} (g^{k'k'})^{\frac{3}{2}}, \quad (7)$$

$$k_{lm}^{\alpha'} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} k_n \phi_2^l(n) \phi_2^m(n), \quad k_{lm}^{\beta'} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} k_n \phi_1^l(n) \phi_1^m(n), \quad (8)$$

де k_n - коефіцієнт постелі, обчислений в центрі поперечного перерізу, що відповідає n -ій точці інтегрування. Всі позначення збережені із роботи [3].

Для однорідної пружної основи інтегрування в (8) можна виконати в замкнутій формі:

$$k_{lm}^{k'} = k \times \begin{cases} 1, l=m \\ 0, l \neq m \end{cases}. \quad (9)$$

Рівняння (6) можна представити у вигляді:

$$[K]_{lm} \{U\}_l = \{Q\}_m - \{R_c\}_m, \quad (10)$$

де $\{R_c\}_m = [C]_{lm} \{U\}_l$ - вектор зовнішнього навантаження прикладений до поверхні S_c конструкції, який залежить від переміщень скінченноелементної моделі.

Розв'язання системи (10) природно виконувати на основі ітераційних процедур (4), які дозволяють зберігати одноразово зформовану та триангуляризовану ефективну матрицю жорсткості на протязі всього процесу обчислення.

3. Дослідження вірогідності та ефективності використання методики в задачах динаміки.

Деформування шарнірно опертої балки під дією сили, що рухається з постійною швидкістю.

Оцінка можливості використання підходу до аналізу коливань протяжних тіл під дією рухомих навантажень проведена на прикладі деформування шарнірно опертої балки під дією сили P , що рухається з постійною швидкістю V . У початковий момент часу сила розташована над лівою опорою. Класичне рішення поставленої задачі приведено в роботі [8]. Вважається, що повний розв'язок включає дві складові: перша описує вимушені коливання системи, що залежать від швидкості руху сили P вздовж балки, друга являє собою вільні коливання системи.

Досліджено внесок кожного з доданків у загальне рішення прогину балки при різних швидкостях руху сили P . Характеристики балки відповідають рис. 3 та приймають значення: $L = 1$ м, $h = 0.003$ м, $b = 0.01$ м, модуль пружності $E = 2 \times 10^{11}$ Н/м², коефіцієнт Пуасона $\nu = 0.3$, щільність матеріалу $\rho = 7.8 \times 10^3$ кг/м³.

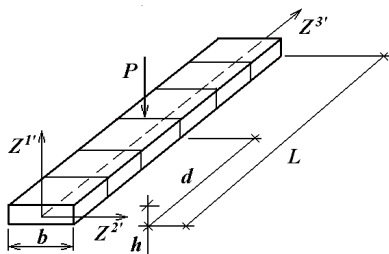


Рис.3

Нижнє критичне значення швидкості руху навантаження для розглянутої балки визначається формулою [8]:

$$V_c^1 = \frac{\pi h}{2L} \sqrt{\frac{E}{3\rho}} = 13.7768 \text{ м/с.}$$

За контрольні дані вибрано вертикальні переміщення осі балки.

Точка прикладання сили $P=1 \text{ Н}$ в досліджуваній момент часу $Z^3' = 0.5 \text{ м}$. Рішення отримані на основі прямого методу інтегрування рівнянь руху [4] та представленої методики.

Як видно з приведених даних (табл.1), доданок, що обумовлює вільні коливання балки, при русі зосередженої сили зі швидкостями $V \leq 0.08V_c^1$ складає приблизно 2÷5% від доданка, що описує вимушені коливання балки. При швидкостях руху навантаження $V \geq 0.08V_c^1$ співвідношення різко збільшується. Рис. 4 відображає повну картину співвідношення оговорених складових стосовно параметра V/V_c^1 , що підтверджується аналітичними розрахунками [6].

Для ілюстрації, на рис. 5 представлені значення прогинів для різних швидкостей руху навантаження в момент часу, коли сила досягає середини балки. Штрихова лінія – з використанням прямого методу, суцільна – даної методики.

Таблиця 1

V/V_c^1	$W_f \times 10^{-4}$, м Прямий метод інтегрування [4]	$W_0 \times 10^{-4}$, м Представлена методика	δ , %
0.036	4.60	4.63	0.7
0.073	4.57	4.65	1.7
0.145	5.39	4.73	-12.2
0.363	7.09	5.32	-24.9
0.726	3.91	9.71	148.3

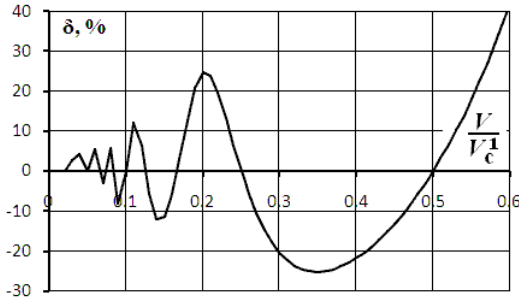


Рис.4

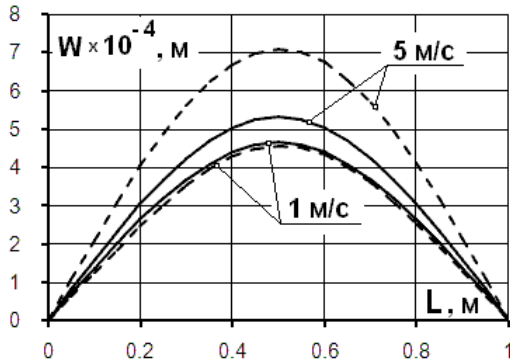


Рис. 5

Таким чином, для тіл із граничними умовами на торцях, що відповідають шарнірному опираю, застосування розробленого підходу суттєво обмежено швидкостями руху навантаження: $V \leq 0.08 V_c^{1/2}$. При більш високих значеннях швидкості, необхідно застосовувати апарат розкладу рішення за власними формами конструкції або проводити обчислення на основі прямих методів інтегрування рівнянь руху. В обох випадках обчислювальні витрати на отримання розв'язків задачі значно зростають.

Аналіз коливань балки на суцільній пружній основі під дією рухомої сили.

Розглянемо вигин нескінченної балки, що лежить на суцільній однорідній пружній основі, та деформується під дією сили P , яка рівномірно рухається зі швидкістю V . Відмінною рисою даної задачі є можливість застосування підходу, заснованого на введенні рухомої базисної системи координат. Картина вигину осі балки залишається незмінною та переміщується зі швидкістю руху сили, супроводжуючи

лінію її дії. Таке явище називається «біг хвилі згину» [6]. Передбачається, що опір пружної основи коливанням балки, пропорційний значенню прогину в кожній точці і визначається коефіцієнтом постелі, що характеризує жорсткість пружного середовища.

Для оцінки застосування розробленого підходу до розв'язання розглянутого класу задач при докритичних швидкостях руху фронту навантаження зіставимо рішення на основі прямого методу інтегрування рівнянь руху та представленої методики.

Розглянемо балку прямокутного поперечного перерізу (рис.6): $L = 1$ м, $h = 0.003$ м, $b = 0.01$ м, що лежить на пружній основі з коефіцієнтом постелі $k = 100$ Н/м². Модуль пружності матеріалу балки $E = 2 \times 10^{11}$ Н/м², коефіцієнт Пуасона $\nu = 0.3$, щільність матеріалу $\rho = 7.8 \times 10^3$ кг/м³. Величина сили $P = 1$ Н, точка прикладання сили в

досліджуваній момент часу $Z^3 = 0.5$ м.

Нижче критичне значення швидкості руху навантаження для розглянутої балки:

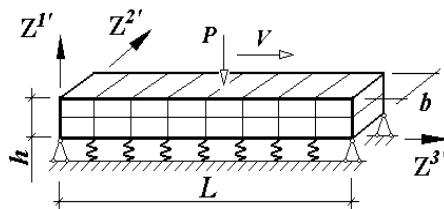


Рис.6

$$V_c^1 = \sqrt{\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{kEh}{3b}}} = 13.465 \text{ м/с.}$$

Результати рішення задачі представлені на рис. 7 у вигляді графіків, що відображають вертикальні переміщення балки по її довжині при різних швидкостях руху навантаження: 1м/с, 2м/с, 5м/с та 10м/с. Суцільні лінії – значення, отримані представленою методикою, марками – на основі прямого методу інтегрування. Легко помітити, що із збільшенням швидкості руху навантаження похибка наближеного підходу для розглянутої конструкції зростає, а для $V = 0.743V_c^1 = 10$ м/с становить біля 100%. З метою аналізу впливу граничних умов на торцях на величину прогину отримані рішення (рис.8) для балок різної довжини під дією зосередженої сили, що рухається з постійною швидкістю $V = 0.743V_c^1$.

Зпівставлення даних показує, що при швидкості руху навантаження $V \leq 0.25V_c^1$ застосування наближеного підходу забезпечує для балки довжиною $L = 1$ м точність результатів за переміщеннями в межах 1.5÷2% (рис. 7).

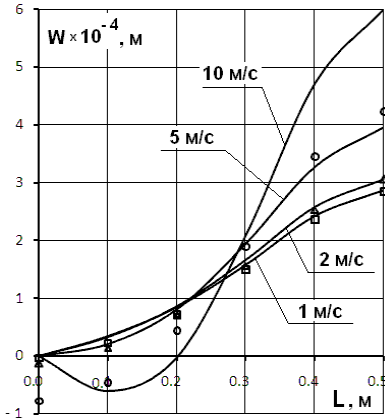


Рис. 7

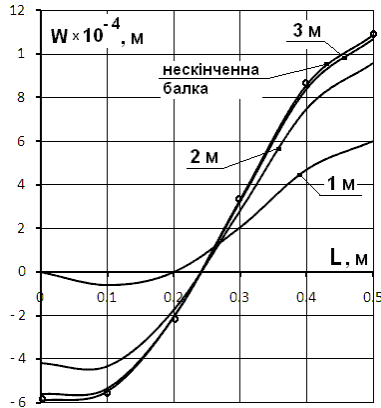


Рис. 8

При подальшому прирості швидкості, позначається вплив граничних умов на торцях балки, що стримують прогин. Але, при збільшенні прольоту балки між опорами при фіксованій швидкості, спостерігається поступове урівнювання результатів. Для балки довжиною 3 м прогин стає однаковим при застосуванні обох підходів (рис. 8, суцільна лінія та кружки).

На основі отриманих результатів встановлено, що для одержання вірогідного рішення обговореної задачі на основі розробленого підходу є необхідним виконання умови: $L_p \geq 4V/V_c^1$, де L_p - довжина прольоту між опорами.

Висновки.

Таким чином, розроблена методика дозволяє ефективно проводити аналіз змінного і часі напружено-деформованого стану протяжних об'єктів (трубопроводів, залізничних насипів, дорожніх покриттів, прольотів мостів, перекриттів і т.п.) під дією рухомих навантажень для широкого класу реальних об'єктів. Однак, для одержання вірогідних результатів необхідно попередньо оцінювати швидкість руху навантаження та будувати адекватні чисельні моделі досліджуваних конструкцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл // Київ: КНУБА, 2005, 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел // Киев: Випол, 1993, 376с.
3. *Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах лінійних стаціонарних коливань просторових тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К.:КНУБА, Вип.81, 2007, с.142-158.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Алгоритми розв'язання рівнянь рівноваги для динамічних задач напіваналітичним методом скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. –К.:КНУБА, Вип.79, 2006, с.43-62
5. *Блох В.И.* Теория упругости // Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1964, 483с.
6. *Пановко Я.Г., Губа нова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем // М.: Наука, 1987, 352с.
7. *Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в дослідженні пружнопластичних коливань неоднорідних призматичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. Збірник. –К.:КНУБА, Вип.71, 2002, с.90-98.
8. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций // М.: Наука, 1975, 704с.
9. *Хэмминг Р.В.* Численные методы. // М.: Наука, 1972, 407с.

Отримано 20.07.09

В.А. Баженов, И.И. Солодей, А.Ю. Приходько

Исследование эффективности динамического расчета строительных конструкций, находящихся под действием движущихся нагрузений

Проведено исследование границ использования разработанного аппарата решения стационарной задачи динамического деформирования тел под действием движущейся нагрузки. В рамках ПМКЭ созданы новые алгоритмы для моделирования процесса взаимодействия тела с неоднородным упругим основанием. Достоверность получаемых результатов и эффективность подхода подтверждены решением контрольных примеров.

V.A. Bazhenov, I.I. Solodei, A.Y. Pryhodko

Efficiency research of dynamic structural analysis under moving loadings

Research of methodology limits is carried out to analyze of dynamic deformation stationary problem for solids under moving loadings. New algorithm within the bounds of SAFEM to simulate interaction between construction and elastic foundation is developed. Reliability of computational intelligence and efficiency of mentioned approach are corroborated with the help of test solutions.

УДК 539.3

А.А. Гром, канд. техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук

ПРЕЦЕСІЙНІ КОЛИВАННЯ ТОНКИХ КРУГОВИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Виконано дослідження напружено-деформованого стану і прецесійних коливань тонких кругових пластин змінної товщини при складному обертанні. Проаналізовано вплив величин швидкості власного обертання і повороту осі обертання пластини на розподіл радіальних і окружних напружень.

При проектуванні турбінних дисків авіаційних двигунів, гнучких з'єднань валів, дискових пружин виникає потреба в дослідженні динаміки тонких кругових дисків змінної товщини при складному русі. Полотна дисків, як правило, мають профільовану в меридіанному перерізі конічну та гіперболічну форми [1,2]. В багатьох випадках з конструктивних міркувань в роторах дискобарабанного типу диски виконуються з центральним отвором, розміри якого визначаються загальною компоновкою компресора, турбіни або всього двигуна, а на зовнішньому контурі вони прикріплюються до силової оболонки. Наявність отвору в диску призводить до концентрації напружень, для усунення яких на вільному контурі в області отвору робиться потовщення з гладким переходом вздовж меридіана. В роторах дискового типу диски на внутрішньому контурі прикріплюються до валу, а на зовнішньому контурі до дисків можуть прикріплюватись робочі лопатки або вони можуть бути вільними.

В даній роботі на основі рівнянь, наведених в [3,4], виконано дослідження прецесійних коливань дисків змінної товщини з урахуванням гіроскопічних сил складного обертання. В якості розрахункової схеми розглядається тонка пластина, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ навколо осі симетрії, перпендикулярної до її площини. Серединна поверхня пластини в недеформованому стані співпадає з координатною площиною xOy , яка може здійснювати поворот з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_0$ відносно інерційної системи координат $OXYZ$.

Положення будь-якої точки в системі координат $Oxyz$, яка жорстко зв'язана з пластиною, визначається полярними координатами r та θ . Товщина пластини h змінюється вздовж меридіана і є функцією радіуса

r . В якості узагальнених координат у деформованому стані приймаються лінійні переміщення u, v, w (u, v вздовж координат r і θ відповідно, а w – із площини пластини).

При дослідженні динаміки пластини, яка здійснює складний рух, її загальний напружено-деформований стан визначається як результат додавання двох рухів навколо взаємно перпендикулярних осей. При цьому додатковий кососиметричний коливальний стан, обумовлений поворотом осі обертання пластини, обчислюється з урахуванням основного осесиметричного стану, обумовленого його власним обертанням. Диференціальне рівняння поперечних коливань пластини під дією коріолісових сил інерції, обумовлених поворотом осі обертання, відносно стану пружної рівноваги має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 D_M \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{dD_M}{dr} \left(2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2+v}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\
 \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 D_M}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\
 \left. + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(N_r r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(N_\theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \\
 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 2\rho \omega \omega_0 h r \cos(\theta + \omega t), \quad (1)
 \end{aligned}$$

де $N_r = \sigma_{22}^0 h$, $N_\theta = \sigma_{11}^0 h$ – радіальне та окружне зусилля в пластині;

$D_M = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – циліндрична жорсткість; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ –

оператор Лапласа.

Для визначення нормальних радіальних σ_{22}^0 і окружних σ_{11}^0 напружень при обертанні навколо осі симетрії $O_1 Z_1$ використовуються такі рівняння

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{22}^0}{dr} - \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{r} + \sigma_{22}^0 \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} = -\gamma \omega^2 r, \\
 \frac{d\sigma_{11}^0}{dr} + \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{r} + \nu \sigma_{22}^0 \frac{1}{h} \frac{dh}{dr} = \nu \gamma \omega^2 r. \quad (2)
 \end{aligned}$$

При цьому вважається, що товщина пластини вздовж радіуса змінюється повільно, напруження по товщині пластини при простому обертанні розподілені рівномірно, а напруження, рівнобіжні осі пластини, відсутні.

Розглядаючи сталий процес і враховуючи вид періодичного навантаження від коріюлісових сил інерції, рішення рівняння (1) приймемо у формі

$$w = w(r) \cos(\theta + \omega t). \quad (3)$$

З урахуванням рішення (3) рівняння поперечних коливань пластини (1) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} D_M \frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \left(\frac{D_M}{r} + \frac{dD_M}{dr} \right) \frac{d^3 w}{dr^3} + \left(-\frac{D_M}{r^2} + \frac{2+\nu}{r} \frac{dD_M}{dr} + \frac{d^2 D_M}{dr^2} - N_r \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \\ + \left(-\frac{D_M}{r^3} - \frac{3}{r^2} \frac{dD_M}{dr} + \frac{\nu}{r} \frac{d^2 D_M}{dr^2} - \frac{dN_r}{dr} - \frac{N_r}{r} \right) \frac{dw}{dr} + \left(\frac{3}{r^3} \frac{dD_M}{dr} - \frac{\nu}{r^2} \frac{d^2 D_M}{dr^2} - \right. \\ \left. - \frac{3D}{r^4} + \frac{N_\theta}{r^2} - \gamma h \omega^2 \right) w = 2\gamma \omega \omega_0 h r. \quad (4) \end{aligned}$$

Рівняння (1) і (4), доповнені граничними умовами на краях пластини, дозволяють визначити деформований стан пластини при складному русі для різних значень кутової швидкості власного обертання ω і кутової швидкості повороту осі обертання ω_0 .

Для заданого класу задач характерним закріпленням на контурах є:

- жорстке закріплення на внутрішньому контурі і вільний край на зовнішньому;
- жорстке закріплення на зовнішньому контурі і вільний край на внутрішньому.

Для розв'язання крайових задач використовується метод початкових параметрів з ортогоналізацією по С.К. Годунову.

При дослідженні коливань диску ротора дискобарабанного типу, коли силова оболонка проходить по зовнішньому контуру диска, в якості розрахункової схеми вибрана кругова пластинка з вільним краєм на внутрішньому контурі і жорстко закріпленим на зовнішньому контурі. Розрахунки проводились при таких значеннях параметрів: модуль пружності матеріалу $E = 1,75 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, щільність матеріалу $\gamma = 8000$ кг/м³, товщина пластини на внутрішньому

контурі $h_0=0,005$ м, товщина пластини на зовнішньому контурі $h_k = 0,0025$ м, зовнішній радіус пластини $R_k = 0,2$ м. Інші параметри варіювалися.

Виконано дослідження напружено-деформованого стану і коливань пластини конічного профілю при $\omega = 250$ с⁻¹ і $\omega_0 = 0,5$ с⁻¹. На рис. 1 наведені графіки розподілу напружень в пластині з $R_0 = 0,04$ м. Напруження при складному русі на поверхні пластини при $z = +h/2$ та $z = -h/2$ позначені відповідно символами “+” і “-”. Досліджено вплив величини отвору на розподіл напружень вздовж меридіана пластини. Відмітимо, що для пластин конічного профілю із збільшенням R_0 відбувається збільшення повздовжніх напружень σ_{11} та зменшення прогину на вільному краї.

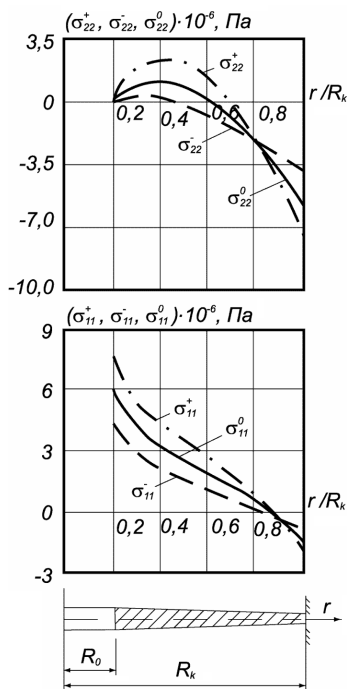


Рис.1. Графіки розподілу напружень в пластині конічного профілю ($R_0 = 0,04$ м)

На рис. 1 для ілюстрації впливу повороту осі обертання пластини на напружений стан наведені також графіки зміни радіальних σ_{22}^0 і окружних σ_{11}^0 напружень при простому обертанні. Зазначимо, що при обертанні кругових пластин з вільним краєм на внутрішньому контурі і жорстко закріпленим на зовнішньому контурі напружений стан на вільному краї ($x^2 = R_0$) визначається окружними напруженнями, а на закріпленому ($x^2 = R_k$) – радіальними.

Виконано дослідження коливань пластини гіперболічного профілю при складному русі. Розрахунки проводились при тих же значеннях фізичних і геометричних параметрів, а кутова швидкість повороту осі пластини дорівнювала $\omega_0 = 0,5$ с⁻¹. На рис. 2 наведені графіки розподілу напружень в пластині гіперболічного профілю при $\omega = 1000$ с⁻¹.

Збільшення ω призводить до суттєвого зменшення амплітуд прецесійних коливань і зменшення радіальних та окружних напружень. При кутовій швидкості обертання $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ в області отвору з'являється додаткова зона знакозмінних радіальних напружень (рис. 2).

На основі розробленої методики виконано дослідження впливу геометричних та інерційних параметрів пластини з вільним краєм на зовнішньому контурі та жорстко закріпленим на внутрішньому на її напружено-деформований стан. Розрахунки проводились при таких значеннях параметрів:

$E = 1,75 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\nu = 0,3$;
 $\gamma = 8000 \text{ кг/м}^3$; товщина пластини на внутрішньому контурі $h_0 = 0,005 \text{ м}$, товщина пластини на зовнішньому контурі $h_k = 0,0025 \text{ м}$; зовнішній радіус $R_k = 0,2 \text{ м}$; кутова швидкість повороту осі обертання пластини $\omega_0 = 0,5 \text{ с}^{-1}$. Внутрішній радіус R_0 і кутова швидкість обертання пластини ω варіювались.

Для пластини з вільним краєм на зовнішньому контурі та жорстко закріпленим на внутрішньому, яка обертається навколо осі симетрії, виконано дослідження впливу відношення внутрішнього та зовнішнього радіусів R_0/R_k , а також швидкості власного обертання ω на розподіл радіальних і окружних напружень. Деякі із отриманих результатів (максимальні значення напружень в пластині) приведені в таблиці 1. Зазначимо, що збільшення величини швидкості обертання диску призводить до збільшення радіальних і окружних напружень в ньому, а збільшення відношення R_0/R_k при постійній швидкості обертання ω веде до їх зменшення.

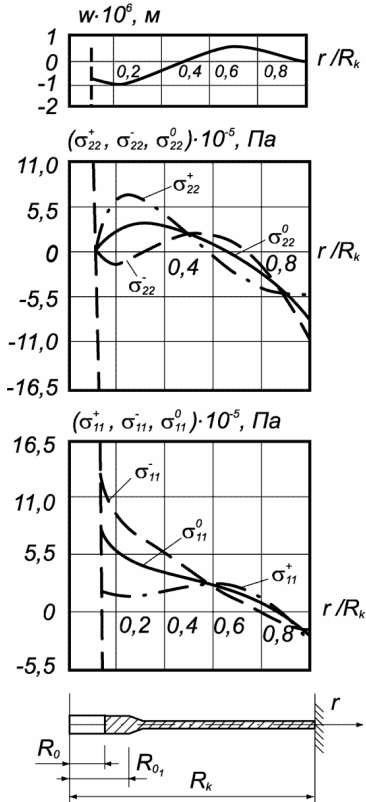


Рис.2. Графіки розподілу напружень в пластині гіперболічного профілю ($\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$)

Таблиця 1

Максимальні значення напружень в пластині конічного профілю
для різних значень ω і R_0/R_k

$\omega, \text{ c}^{-1}$	$R_0/R_k=0,1$		$R_0/R_k=0,2$		$R_0/R_k=0,3$	
	$\sigma_{22}^0, \text{ Па}$	$\sigma_{11}^0, \text{ Па}$	$\sigma_{22}^0, \text{ Па}$	$\sigma_{11}^0, \text{ Па}$	$\sigma_{22}^0, \text{ Па}$	$\sigma_{11}^0, \text{ Па}$
250	$9,112 \cdot 10^6$	$5,679 \cdot 10^6$	$8,723 \cdot 10^6$	$4,926 \cdot 10^6$	$8,123 \cdot 10^6$	$4,115 \cdot 10^6$
500	$3,645 \cdot 10^7$	$2,272 \cdot 10^7$	$3,489 \cdot 10^7$	$1,970 \cdot 10^7$	$3,249 \cdot 10^7$	$1,646 \cdot 10^7$
1000	$1,458 \cdot 10^8$	$9,087 \cdot 10^7$	$1,396 \cdot 10^8$	$7,881 \cdot 10^7$	$1,300 \cdot 10^8$	$6,584 \cdot 10^7$
1500	$3,280 \cdot 10^8$	$2,044 \cdot 10^8$	$3,140 \cdot 10^8$	$1,773 \cdot 10^8$	$2,924 \cdot 10^8$	$1,481 \cdot 10^8$

Досліджено напружений стан пластини гіперболічного профілю при складному обертанні. На рис. 3 для пластини з тими ж фізичними і геометричними параметрами при $\omega = 500 \text{ c}^{-1}$ і $\omega_0 = 1 \text{ c}^{-1}$ приведено розподіл вздовж радіуса радіальних і окружних напружень. Видно, що в пластині також виникають зони знакозмінних напружень, які суттєво впливають на її міцність.

Таким чином, за допомогою розробленої методики проаналізовано вплив величин швидкості власного обертання і повороту осі обертання тонких кругових пластин змінної товщини на розподіл радіальних і окружних напружень. Встановлені діапазони зміни геометричних і інерційних параметрів, при яких виникають знакозмінні напруження, які суттєво впливають на міцність і надійність пластинчастих елементів конструкцій. Отримані результати розрахунків, за допомогою яких можна обґрунтовано обирати конструктивні проектні параметри відповідальних елементів конструкцій, давати рекомендації для зниження матеріалоемності та підвищення надійності конструкцій.

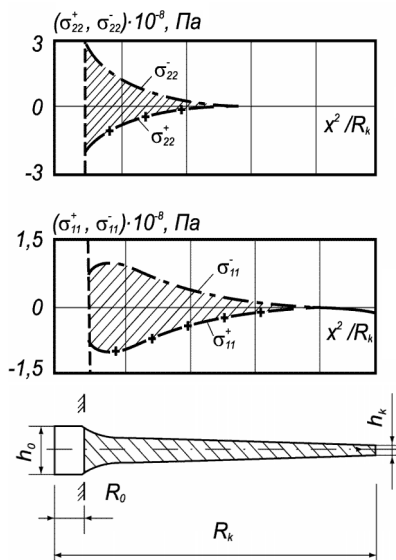


Рис. 3. Графіки розподілу напружень в пластині гіперболічного профілю ($\omega = 500 \text{ c}^{-1}$)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бюргер И.А., Шорр Б.Ф., Шнейдерович Р.М.* Расчет на прочность деталей машин.- М.: Машиностроение, 1966.- 616 с.
2. *Богомолов С.И., Журавлева А.М.* Взаимосвязанные колебания в турбомашинах и газотурбинных двигателях.- Харьков: Вища школа, 1973.- 179 с.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости.- М. - Л., 1935. - 614 с.
4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.- М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963.- 528 с.

Отримано 21.07.09

А.А. Гром, П.П. Лизунов

Прецессионные колебания тонких круговых пластин переменной толщины

Выполнено исследование напряженно-деформированного состояния и прецессионных колебаний тонких круговых пластин переменной толщины при сложном вращении. Проанализировано влияние величин скорости собственного вращения и поворота оси вращения пластины на распределение радиальных и окружных напряжений.

A.A. Grom, P.P. Lizunov

Process fluctuations of thin round sheet with changeable thickness

Research of the intense-deformed condition and fluctuations of thin circular plates of a variable thickness at difficult rotation is executed. Influence of sizes of speed of own rotation and turn of an axis of rotation of a plate on distribution of radial and district pressure is analysed.

УДК 539.3

І.І. Солодей, канд. техн. наук

М.О. Вабіщевич

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

ВИКОРИСТАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ТРІЩИНОЮ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

На основі нових типів спеціальних скінченних елементів розроблена ефективна методика дослідження перехідних процесів динамічного деформування просторових тіл обертання та призматичних тіл з тріщинами. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів.

Вступ.

Прагнення зменшити чисельні витрати та спростити дискретні моделі при розв'язанні задачі механіки руйнування без втрати точності отриманих результатів потребують розробки нових методик з використанням спеціальних скінченних елементів з тріщинами (ССЕТ). Існує декілька важливих аспектів які обумовлюють їх використання.

Густота сітки скінченних елементів (СЕ) у привершинній області – один із основних чинників ефективності моделі. Відомі рішення проблеми використання більш рідких сіток базуються, з однієї сторони, на введенні до функцій форми СЕ очікуваної сингулярної поведінки у вершині тріщини з додаванням спеціальних функцій розщеплення в її середині [14-16], або спеціальних процедурах зміщення вузлів звичайного СЕ [11, 13]. З іншої сторони, пропонується комбінація ССЕТ, як моделі із прямою коррекцією тензора напружень звичайного СЕ, та алгоритма усереднення отриманих розв'язків по ефективній привершинній підобласті [3, 5], що дозволяє зберегти регулярну структуру дискретної моделі і значно зменшити чисельні витрати.

Розв'язання задачі динаміки для тіл з тріщинами потребує введення до рівнянь руху обмежень від взаємного проникнення берегів тріщини, оскільки нестационарні задачі передбачають наявність силових факторів різних знаків. Подібний аспект виникає також і в задачах статички [1], наприклад при розгляді згину пластини із скрізною тріщиною коли її береги прагнуть розкритись на розтягнутій стороні пластини і зімкнутись на стороні стиснення. ССЕТ забезпечує природньо легке вирішення цієї проблеми варіюванням напружень нормальних до поверхні контакту берегів тріщини.

Більш того, використання спеціальних скінченних елементів для моделювання тріщини дає можливість безпосереднього роздільного обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН), що легко здійснюється при почерговому задоволенні умов рівності нулю відповідних компонент тензора напружень [5].

1. Основні співвідношення нестационарної задачі механіки руйнування в схемі напіваналітичного метода скінченних елементів.

Для прямокутних призматичних тіл та тіл обертання розглядаються поздовжні стаціонарні тріщини, фронт яких збігається за напрямком із твірною тіла (рис. 1).

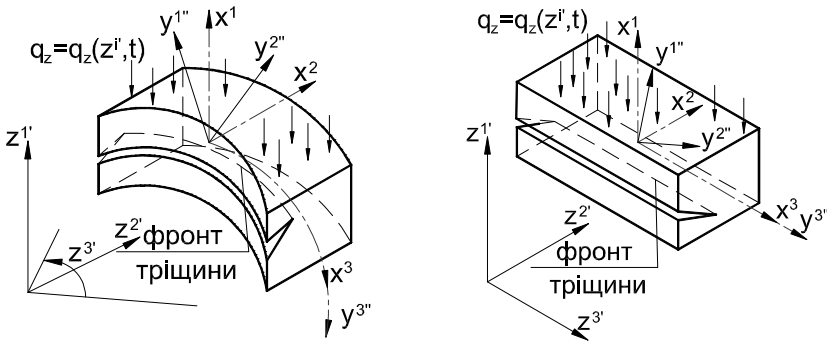


Рис. 1. Просторові призматичні тіла та тіла обертання

Класичне рівняння руху однорідного вздовж направляючої ізотропного тіла для напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ) записується у вигляді незалежних амплітудних підсистем виду [9]:

$$\delta K_l + \delta W_l - \delta A_l = 0 \quad (1)$$

де δW_l , δK_l , δA_l амплітудні варіації потенційної, кінетичної енергій та роботи зовнішніх сил, що забезпечується використанням кільцевого та прямокутного призматичного скінченних елементів з апроксимаціями невідомих в напрямку x^3 2π - періодичними функціями тригонометричних рядів Фур'є [9]:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{i'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u: \dot{u}: \ddot{u})_{i'(S_1, S_2)}^l \Psi_{i'}^l, \quad (2)$$

для замкненого тіла обертання в циліндричній системі координат:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \psi_{3'}^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi,$$

для призматичного прямолінійного тіла в ортогональній системі координат:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2$$

Слід зазначити, що компоненти тензорів напружень і деформацій приймають вигляд повних рядів Фурь'є, незалежно від наявності площин симетрії:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{l=l_0}^L \bar{\varepsilon}_{ij}^l \psi_{1'}^l + \bar{\varepsilon}_{ij}^l \psi_{3'}^l, \quad \sigma^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \bar{\sigma}_l^{ij} \psi_{1'}^l + \bar{\sigma}_l^{ij} \psi_{3'}^l. \quad (3)$$

Відомо, що розкриття тріщини у твердому тілі може проходити трьома різними шляхами: нормальний відрив (тип I), поперечний (тип II) та повздожній зсув (тип III). У зв'язку з цим локальні напруження біля вершини тріщини відповідно харектиризуються параметрами K_I , K_{II} , K_{III} , що отримали назву коефіцієнтів інтенсивності напружень.

K_I , K_{II} , K_{III} є параметрами силового критерію руйнування – основою для розв'язання задач механіки руйнування прямими методами. У відповідності до (2) і (3) можна записати:

$$K_I = H_I^\sigma \sum_{l=l_0}^L K_{I\sigma}^l, \quad K_{II} = H_{II}^\sigma \sum_{l=l_0}^L K_{II\sigma}^l, \quad K_{III} = H_{III}^\sigma \sum_{l=l_0}^L K_{III\sigma}^l$$

$$K_I = H_I^u \sum_{l=l_0}^L K_{Iu}^l, \quad K_{II} = H_{II}^u \sum_{l=l_0}^L K_{IIu}^l, \quad K_{III} = H_{III}^u \sum_{l=l_0}^L K_{IIIu}^l, \quad (4)$$

де $K_{I\sigma}^l$, $K_{II\sigma}^l$, $K_{III\sigma}^l$, K_{Iu}^l , K_{IIu}^l , K_{IIIu}^l - амплітудні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень; H_I^σ , H_{II}^σ , H_{III}^σ , H_I^u , H_{II}^u , H_{III}^u - відомі функції асимптотичних формул компонент тензора напружень і переміщень. Для найчастіше розглядуваного випадку тріщини нормального відриву вони мають вигляд:

$$H_I^\sigma = \sqrt{2\pi r} / \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad (5)$$

$$H_I^u = G \sqrt{\frac{2\pi}{r}} / \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (6)$$

$$K_{I\sigma}^l = \bar{\sigma}_l^{-1} \bar{1}' \psi_{1'}^l + \bar{\sigma}_l^{-1} \bar{1}'' \psi_{3'}^l, \quad (7)$$

$$K_{Iu}^l = u_{1'}^l \psi_{1'}^l. \quad (8)$$

Для вісесиметричної та двовимірних задач теорії пружності коефіцієнт інтенсивності напружень повздовжнього зсуву $K_{III} = 0$, а амплітудні значення тотожно дорівнюють їх координатним аналогам.

Енергетичний підхід передбачає обчислення J -інтеграла, який при динамічному процесі розповсюдження хвиль у тілі зі стаціонарною тріщиною для пружних матеріалів – лінійних або нелінійних представляє собою швидкість вивільнення енергії G [1]. Як показано в роботі [9] у відповідності до метода реакцій:

$$J = \sum_{l=l_0}^L J_l, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} J_l = & \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{l,j}^T \{R\}_{l,j} - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{l,j}^T \{R\}_{l,j} - \\ & - \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{(R_{lq,k} + R_{lq',k}) (u_{lq,k} - u_{lq',k})}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(\frac{(R_{lq,k} + R_{lq',k}) (u_{lq,k} - u_{lq',k})}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_3} \left(\frac{(R_{lq,k} + R_{lq',k}) (u_{lq,k} - u_{lq',k})}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_4} \left(\frac{(R_{lq,k} + R_{lq',k}) (u_{lq,k} - u_{lq',k})}{2\Delta x_\alpha} \right)_j. \quad (8) \end{aligned}$$

Всі члени, які входять до (8), визначаються за допомогою амплітудних вузлових реакцій та переміщень сіткової області для моменту часу $\tau = t + \Delta t$ задачі динаміки.

В області лінійної механіки руйнування існує однозначна залежність між величинами коефіцієнтів інтенсивності напружень (4) та J -інтегралом (7) [1].

2. Спеціальні скінченні елементи з тріщиною для задачі динаміки.

Складнощі апроксимації тріщини, що виникають при розв'язанні задач механіки руйнування для об'єктів із складною формою та конфігурацією поперечного перерізу, можуть бути подолані на основі використання спеціальних скінчених елементів, матеріал яких не сприймає дію нормальних та дотичних до траєкторії тріщини напружень.

Розглянемо кільцевий замкнений та призматичний скінченні елементи з поперечним перерізом у вигляді криволінійного чотирикутника довільного обрису, що перетинається тріщиною (рис. 2).

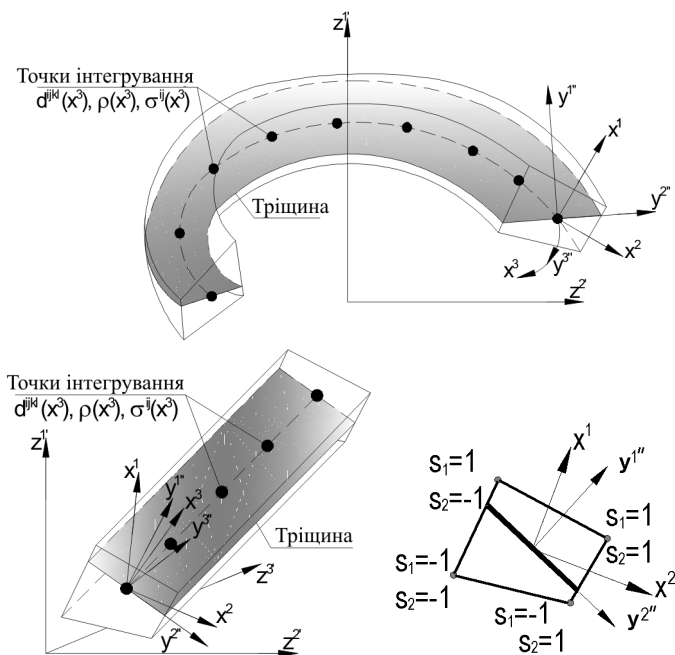


Рис. 2. Спеціальні кільцевий замкнений та призматичний прямолінійний скінченні елементи з тріщиною

Будемо вважати, що область, яку займає елемент, відображається на квадрат з одиничними сторонами, внутрішні властивості якого визначаються механічними і геометричними характеристиками елемента.

Помістимо в центр елемента початок системи координат x^i , направляючи осі вздовж сторін. За невідомі обрані вузлові переміщення, швидкості та прискорення $(u : \dot{u} : \ddot{u})_{i'(s_1 s_2)}$ в базисній системі координат Z^i , де індекси s_1 та s_2 визначають положення вузла відносно центра елемента і набувають значень ± 1 (рис.2). Позначка “:” відповідає логічному оператору “або”, що означає вибір для розгляду однієї з компонент в круглих дужках.

Припускається, що щільність матеріалу ρ , компоненти тензора пружних постійних d^{ijkl} і визначник метричного тензора g незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі:

$$\rho = \rho|_{x^\alpha=0}, \quad d^{ijkl} = d^{ijkl}|_{x^\alpha=0}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{g}|_{x^\alpha=0}. \quad (9)$$

Напротивагу цьому компоненти метричного тензора, постійні матеріала і напруження довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування.

Якщо обмежитися білінійним розподілом переміщень, швидкостей і прискорень в площині перерізу елемента:

$$(u : \dot{u} : \ddot{u})_{i'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)} (u : \dot{u} : \ddot{u})_{i'(S_1, S_2)}, \quad P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left(S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right). \quad (10)$$

Нормовані компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (11)$$

Як показано в роботах [3, 5], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [8] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \varepsilon_{\alpha(\alpha)}^\circ + \left[\varepsilon_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^\circ - \varepsilon_{\alpha(\alpha)}^\circ h_{(\alpha\alpha), (3-\alpha)} \right] x^{(3-\alpha)} \right\},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}}{2} (h_{(\alpha\alpha), (3-\alpha)} + h_{33, (3-\alpha)}) \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} h_{33, \alpha} \right] x^{\alpha} \right\},\end{aligned}\quad (12)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij, \beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad h_{(ii), \beta} = \frac{g_{(ii), \beta}}{g_{(ii)}}.$$

Формули для обчислення компонент (12) отримані в роботі [4].

Нормовані компоненти тензора напружень визначаються співвідношенням:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}. \quad (13)$$

Зв'язок між компонентами тензора нормованих фізичних напружень та деформацій подається на основі узагальненого закону Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{d}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \quad (14)$$

Аналогічно (12) представимо компоненти тензора напружень відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{(\alpha\alpha)} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}'^{\alpha(\alpha)}_{, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\sigma}^{12} &= \sqrt{g_{11}g_{22}} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}'^{\alpha 3}_{, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\sigma}^{33} &= g_{33} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}'^{\alpha 33}_{, \alpha} x^{\alpha} \right\}.\end{aligned}\quad (15)$$

Компоненти $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{i(i)}(\alpha \neq i)$ відображають напруження згину і їх впливом на точність розв'язання нехтувати не можна, в особливості для оболонки і пластин. Члени ряду типу $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{12}$, $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{3(\alpha)}$ визначають зміну напружень зсуву. Вклад їх в енергію деформації елемента при використанні МССЕ рівний нулю.

Для тонких оболонок з навантаженням, що приведене до серединної поверхні в класичній теорії запроваджуються умови рівності нулю нормальних напружень на площадках, які паралельні площині, що дотична до серединної поверхні. Цій умові відповідає наступна гіпотеза, яка визначає постійність напружень обтягу:

$$\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{(\alpha)(\alpha)} = 0, \quad (16)$$

З умови (16) отримуємо зв'язок між коефіцієнтами розкладів (12) і (15) в центрі меридіонального перерізу СЕ на основі узагальненого закону Гука:

$$\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} = d^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{kl}, \quad (17)$$

а також зв'язок між похідними напружень і деформацій для лінійно-пружного матеріалу, який забезпечує універсальність СЕ, що пропонуються:

$$\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}{}^{ij} = d_{\alpha}{}^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}'_{kl,\alpha}, \quad d_{\alpha}{}^{ijkl} = d^{ijkl} - \frac{d^{ij(\alpha)(\alpha)} d^{(\alpha)(\alpha)kl}}{d^{(\alpha)(\alpha)(\alpha)(\alpha)}}. \quad (18)$$

В силу замкнутості кільцевого СЕ, сталості його геометричних параметрів вздовж окружної координати та для забезпечення виконання граничних умов для шарнірно опертих призматичних тіл розподіл невідомих в напрямку x^3 проводиться 2π - періодичними функціями x^3 і їх вузлові значення представляються відрізками тригонометричних рядів Фур'є:

$$(u; \dot{u}; \ddot{u})_{i'}(S_1, S_2) = \sum_{l=l_0}^L (u; \dot{u}; \ddot{u})_{i'}^l(S_1, S_2) \Psi_{i'}^l, \quad (19)$$

де для кільцевого СЕ: $\psi_1^{l'} = \psi_2^{l'} = \cos lx^3$, $\psi_3^{l'} = \sin lx^3$, $l_0 = 0$, $0 \leq x^3 \leq 2\pi$,
 $\vartheta = \begin{cases} 1/2\pi, & \text{якщо } l = 0; \\ 1/\pi, & \text{якщо } l > 0; \end{cases}$, призматичного СЕ: $\psi_1^{l'} = \psi_2^{l'} = \sin \frac{\pi l}{2} x^3$,
 $\psi_3^{l'} = \cos \frac{\pi l}{2} x^3$, $l_0 = 1$, $0 \leq x^3 \leq 2$, $\vartheta = 1$.

У відповідності до розкладу (19), члени ряду Маклорена в (12) можна представити у вигляді рядів:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \psi_1^{l'} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \psi_3^{l'}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \psi_1^{l'} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \psi_3^{l'}, \quad (20)$$

амплітуди для яких отримані в роботі [4].

Напруження і їх похідні незалежно подаються відрізками ряду Фур'є вздовж x^3 :

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} \psi_1^{l'} + \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} \psi_3^{l'}, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} \psi_1^{l'} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} \psi_3^{l'}. \quad (21)$$

Для однорідних вздовж x^3 тіл амплітудні значення напружень та їх похідних в центрі поперечних перерізів СЕ можуть бути отримані безпосередньо через амплітудні значення деформацій і їх похідних:

$$\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l. \quad (22)$$

В загальному випадку, компоненти тензора пружних постійних залежать від координати x^3 і значення напружень неможливо отримати через амплітудні значення деформацій. Тому, амплітудні значення напружень визначаються співвідношеннями гармонійного аналізу чисельним інтегруванням [10]:

$$\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_1^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_1^l(n),$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_2^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_2^l(n), \quad (23)$$

де $\overset{\circ}{\sigma}_{n}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij}$ - координатні значення напружень і їх похідні в центрі поперечних перерізів, що відповідають точкам інтегрування n , $2N$ - загальне число точок інтегрування вздовж координати x^3 , необхідне для обчислення амплітудних значень аж до $l = L$ включно. Для кільцевого

$$\text{СЕ: } \phi_1^l(n) = \cos l \frac{\pi n}{N}, \quad \phi_2^l(n) = \sin l \frac{\pi n}{N}, \quad \theta = \begin{cases} 2, & \text{якщо } l = 0; \\ 1, & \text{якщо } l > 0; \end{cases} \quad \text{для}$$

$$\text{призматичного: } \phi_1^l(n) = \sin l \frac{\pi n}{2N}, \quad \phi_2^l(n) = \cos l \frac{\pi n}{2N}, \quad \theta = 1.$$

Для спеціальних скінчених елементів з тріщиною введемо ортогональну систему координат $y^{i''}$ (рис.2) таким чином, щоб $y^{2''}$ проходила по дотичній до траєкторії тріщини, а $y^{1''}$ - по нормалі і утворювала з додатнім напрямком осі Z^1 кут φ . Вважається, що на берегах тріщини нормальні та дотичні напруження повинні дорівнювати нулю:

$$\sigma^{1''1''} = 0, \quad \sigma^{1''2''} = 0, \quad \sigma^{1''3''} = 0. \quad (24)$$

Використаємо подання тензора пружних сталей через коефіцієнти Ляме і компоненти метричного тензора для анізотропного матеріалу:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}). \quad (25)$$

Оскільки для ортогональної системи координат $y^{i''}$:

$$g^{i''j''} = 0 \text{ при } i'' \neq j'', \quad g^{i''i''} \neq 0, \quad (26)$$

на основі закону Гука представимо напруження через деформації:

$$\begin{aligned} \sigma^{1''1''} &= d^{1''1''1''1''} \varepsilon_{1''1''} + d^{1''1''2''2''} \varepsilon_{2''2''} + d^{1''1''3''3''} \varepsilon_{3''3''} = 0; \\ \sigma^{1''2''} &= 2d^{1''2''1''2''} \varepsilon_{1''2''} = 0; \\ \sigma^{1''3''} &= 2d^{1''3''1''3''} \varepsilon_{1''3''} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

З урахуванням (27) зв'язок між напруженнями та деформаціями в системі координат $y^{i''}$ представимо наступним чином:

$$\sigma^{i''j''} = d^{i''j''k''l''} \varepsilon_{k''l''}, \quad (28)$$

де

$$d_*^{i''j''k''l''} = d^{i''j''k''l''} - d_p^{i''j''k''l''} - d_c^{i''j''k''l''} - d_q^{i''j''k''l''}, \quad (29)$$

$$d_p^{i''j''k''l''} = d^{i''j''1''1''} d^{1''1''k''l''} / d^{1''1''1''1''}, \quad (30)$$

$$d_c^{i''j''k''l''} = 2d^{i''j''1''2''}, \quad (31)$$

$$d_q^{i''j''k''l''} = 2d^{i''j''1''3''}. \quad (32)$$

Тут $d_p^{i''j''k''l''}$ - доданок, обумовлений відсутністю напружень $\sigma^{1''1''}$, $d_c^{i''j''k''l''}$ - напружень $\sigma^{1''2''}$, $d_q^{i''j''k''l''}$ - напружень $\sigma^{1''3''}$.

Виконавши відповідні перетворення, формулу (28) можна подати в місцевій криволінійній системі координат x^i :

$$\sigma^{mn} = d_*^{mnst} \varepsilon_{st}. \quad (33)$$

Коррекція тензора пружних констант матеріалу d^{mnst} в зоні тріщини проводиться згідно формули:

$$d_*^{mnst} = d^{mnst} - d_p^{mnst} - d_c^{mnst} - d_q^{mnst}. \quad (34)$$

Вирази для їх обчислення, у відповідності до відомих формул тензорного аналізу [6], мають вигляд:

$$d_p^{mnst} = C_{i''}^m C_{j''}^n C_{k''}^s C_{l''}^t d^{i''j''1''1''} d^{1''1''k''l''} / d^{1''1''1''1''}, \quad (35)$$

$$d_c^{mnst} = 2C_{i''}^m C_{j''}^n C_{1''}^s C_{2''}^t d^{i''j''1''2''}, \quad (36)$$

$$d_q^{mnst} = 2C_{i''}^m C_{j''}^n C_{1''}^s C_{3''}^t d^{i''j''1''3''}. \quad (37)$$

де $C_{i''}^m$ - коефіцієнти перетворення, що визначають зв'язок між системою координат x^i та системою координат $y^{\alpha''}$:

$$C_{i''}^m = C_k^m C_{i''}^{k'}, \quad C_{i''}^{k'} = \cos(Z^{k'} \wedge y^{i''}). \quad (38)$$

Проведемо перетворення величин, що входять до (35) - (37) у відповідності до (25) та (26):

$$d_p^{mnst} = \frac{2\mu}{1 + \frac{\lambda}{2\mu}} S^{mn} S^{st}, \quad S^{mn} = \frac{\lambda}{2\mu} g^{mn} + C_1^m C_1^n, \quad (39)$$

$$d_c^{mnst} = 2\mu(C_2^m C_1^n C_1^s C_2^t + C_1^m C_2^n C_1^s C_2^t), \quad (40)$$

$$d_q^{mnst} = 2\mu(C_3^m C_1^n C_1^s C_3^t + C_1^m C_3^n C_1^s C_3^t). \quad (41)$$

Якщо симетризувати вирази (40) та (41) і ввести позначення $r_{i''}^{ms} = C_{(i'')}^m C_{(i'')}^s$, можемо записати:

$$d_c^{mnst} = \mu(r_1^{ns} r_2^{mt} + r_1^{ms} r_2^{nt} + r_1^{nt} r_2^{ms} + r_1^{mt} r_2^{ns}), \quad (42)$$

$$d_q^{mnst} = \mu(r_1^{ns} r_3^{mt} + r_1^{ms} r_3^{nt} + r_1^{nt} r_3^{ms} + r_1^{mt} r_3^{ns}). \quad (43)$$

Важливою перевагою запропонованого підходу, заснованого на зміні відповідним способом механічних характеристик матеріалу, є те, що деформоване тіло з тріщиною апроксимується за допомогою повністю сумісних типів скінченних елементів. При цьому, обчислення коефіцієнтів ефективної матриці жорсткості спеціального скінченного елемента виконуються по тим самим формулам, що і для звичайних СЕ, обмежуючись корекцією елементів матриць пружних сталей. Більш того, виникає можливість збереження регулярної структури скінченних елементів, оскільки тріщина може проходити незалежно від топології сіткової області (рис.4).

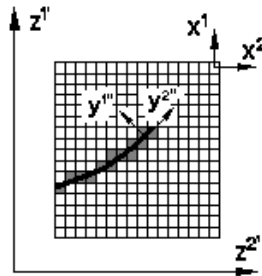


Рис. 4

3. Вірогідність та ефективність використання спеціального скінченного елемента з тріщиною в задачах динаміки.

До переліку факторів, що впливають на процес збіжності та вірогідності отриманих рішень при розв'язанні адач механіки руйнування

методом скінченних елементів (МСЕ), відносять вибір схеми МСЕ, метода визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень, способу апроксимації тріщини. Основним параметром, що свідчить про ефективність будь-якого сіткового методу, є густота сітки скінченних елементів, яка необхідна для отримання достатньо точних результатів. У проведених дослідженнях приділено увагу вивченню швидкості збіжності наближених розв'язків при послідовному стисненні апроксимуючої сітки та порівнянню цієї характеристики для різних способів апроксимації тріщини і методів визначення динамічного КІН.

Аналіз впливу апроксимації тріщини спеціальними скінченними елементами на точність обчислення параметрів механіки руйнування проведено на прикладі розтягу квадратної пластини розміром $2b \times 2L = 0.2 \times 0.2 \text{ м}$ з центральною тріщиною довжиною $2l = b$ (рис. 5).

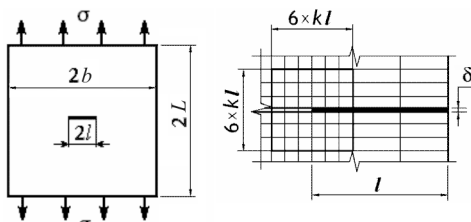


Рис. 5

Коефіцієнт Пуасона

$\nu = 0.35$, модуль пружності $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$, щільність матеріала $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$. На рис. 6 приведені графіки збіжності результатів розрахунку динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень K_{dl} при апроксимації тріщини спеціальними скінченими елементами (ССЕТ) та скінченими елементами нульової жорсткості, запропонованими в роботах [7, 12] (Виріз) по відношенню до схеми із введенням тріщини в розрахункову схему (модель із закріпленням частини бокової поверхні пластини).

Кольором відмічені спеціальні скінченні елементи з тріщиною. Граничні умови відображають наявність двох вісей симетрії по Z^1 та Z^2 . При обчисленні значень ДКІН використовували методики описані в роботах [2, 9].

Похибка визначення K_{dl} обчислювалась у відповідності до формули:

$$\psi = \frac{K_{dl}^{\tau} - K_{dl}^{z\tau}}{K_{dl}^{z\tau}} \cdot 100\% ,$$

де $K_{dl}^{z\tau}$ - динамічний КІН еталонної моделі, обчислений для момента часу τ ; K_{dl}^{τ} - ДКІН розрахункових моделей для того ж момента часу.

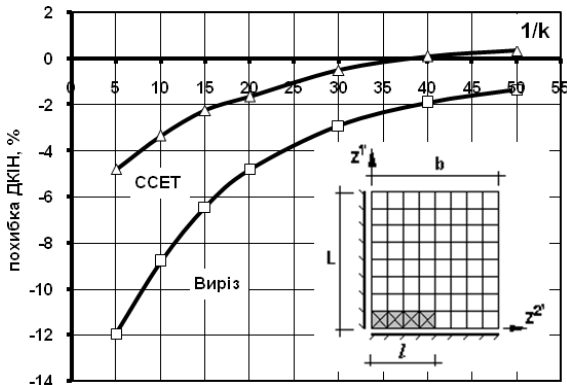


Рис. 6

Дослідження показали, що точність обчислення K_{dl} із застосуванням спеціальних скінчених елементів з тріщиною приблизно в два с половиною рази вища, ніж при використанні скінчених елементів жорсткість яких дорівнює нулю, на всьому діапазоні зміни розмірів сіткової області. При цьому, можна відмітити, що вже при сітці з показником $1/k=10$, похибка K_{dl} , отримана по запропонованій методиці, лише на 3.3% більша, ніж при введенні тріщини в розрахункову схему. В той же час, скінчені елементи нульової жорсткості при такій самій сітковій області дають похибку 8.8%.

Можна припустити, що зменшення товщини шару скінчених елементів δ , що апроксимує тріщину, повинно сприяти підвищенню точності визначення параметрів руйнування. Дослідження були проведені на попередньому тестовому прикладі. Для того, щоб виключити вплив густини сітки скінчених елементів на похибку обчислення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень, була зафіксована сітка скінчених елементів із показником $1/k=20$. Зміні підлягала тільки товщина ССЕ або вирізу відповідної моделі. Графіки залежності похибки ДКІН від товщини шару скінчених елементів з тріщиною (ССЕТ) і нульовою жорсткістю (Виріз) приведені на рис. 7.

Як видно з одержаних результатів, при використанні ССЕТ значення K_{dl} практично не змінюються при зменшенні товщини шару скінчених елементів на протилежному моделі з вирізом, для якої результати уточнюються в межах 2%.

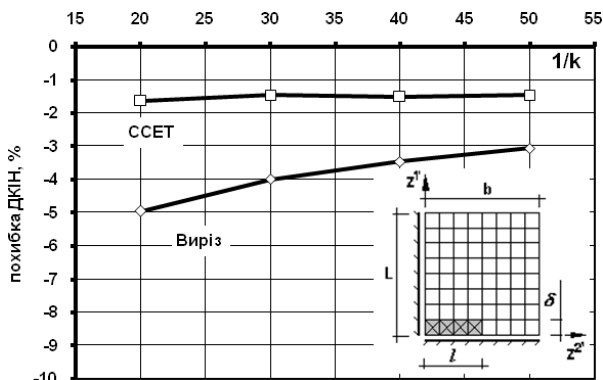


Рис. 7

Такий ефект можна пояснити відсутністю напружень вздовж довжини тріщини, при використанні елементів з нульовою жорсткістю, у порівнянні із спеціальними скінченними елементами, які корегують тільки відповідні компоненти тензора напружень: нормальні та дотичні до берегів тріщини. Крім того, при побудові матриці мас у випадку моделі з вирізом втрачається деяка маса, пов'язана із елементами нульової жорсткості та щільності.

Висновки.

Таким чином, на основі напіваналітичного метода скінченних елементів розроблена ефективна методика дослідження перехідних процесів динамічного деформування просторових тіл обертання та призматичних тіл з тріщинами. В процесі роботи створені нові типи спеціальних скінченних елементів, побудовані їх розрахункові співвідношення. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів. Крім того, проведені дослідження дозволяють зробити висновок, що використання спеціальних скінчених елементів з тріщиною є високоефективним засобом розв'язання задач механіки руйнування при динамічному навантаженні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлури С.* Вычислительные методы в механике разрушения // М: Мир, 1990, 392с.
2. *Баженов В.А., Вабіцевич М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень при динамічному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.39-47.

3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напівааналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл // КНУБА, 2005, 298с.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.77, 2005.-с.3-29.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376с.
6. *Блох В.И.* Теория упругости. - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
7. *Карзов Г.П., Кархин В.А., Леонов В.П., Маргалин Б.З.* Расчетное определение траектории трещины и интенсивности высвобождения упругой энергии при циклическом нагружении с учетом сварочных напряжений // Проблемы прочности, 1983, N9, с.104-109.
8. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Соппротивление материалов и теория сооружений, 1974, N24, с.147-156.
9. *Солодей І.І., Вабищевич М.О., Гуляр О.И., Сахаров О.С.* Обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень в нестационарних задачах динаміки просторових тіл на основі енергетичного підходу // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.83, 2009.-с.93-109.
10. *Хэмминг Р.В.* Численные методы. –М.: Наука, 1972. –407с.
11. *Barsoum R.S.* - Int. J. Fracture, 1974, 10, p.603-605.
12. *Bazant Z.P., Cedolin L.* Blunt crack band propagation in finite element analysis // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1979, 105, N2, p.297-315.
13. *Henshell R.D., Shaw K.G.* Int. J. Numer. Meth. In Engng., 1975, 9, p.495-507.
14. *Swedow J.L.* Int. J. Numer. Meth. In Engng., 1978, 12, p.1779-1798.
15. *Dolbow J., Moes N., Belytschko T.* Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method // Finite Elements in Analysis and Design, 2000, N36, p.235-260
16. *Moes N., Gravouil A., Belytschko T.* Non-planar 3D crack growth by the extended 5nite element and level sets—Part I: Mechanical model // Int. J. Numer. Meth. Engng, 2002; 53:2549–2568 (DOI: 10.1002/nme.429).

Отримано 27.07.09

И.И. Солодей, М.А. Вабищевич, А.И. Гуляр

Использование специальных конечных элементов с трещиной в задачах механики разрушения при нестационарных динамических нагружениях

На основе новых типов специальных конечных элементов разработана эффективная методика исследования переходных процессов динамического деформирования пространственных тел вращения и призматических тел с трещинами. Достоверность получаемых результатов и эффективность подхода подтверждены решением контрольных примеров.

I.I. Solodei, M.O. Vabischevich, A.I. Gulyar

Application of special finite element with crack in fracture mechanics problem in case of non-stationary dynamic loadings

Effective methodology of transient process of dynamic deformation research based on the new kind of special finite elements to model 3D solids of revolution and simply supported prismatic solids with cracks is developed. Reliability of computational intelligence and efficiency of mentioned approach are corroborated with the help of test solutions.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, ст. наук. співр.
 Н.А. Гречух, наук. співр.

ПОБУДОВА СПІВВІДНОШЕНЬ МСЕ ДЛЯ ПРОСТОРОВОГО ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА

Передбачено побудувати співвідношення просторового скінченного елемента, який дає змогу створювати моделі як тонких, так і не тонких оболонок і пластин з одношаровою апроксимацією конструкції по товщині з використанням лінійного закону змінювання розв'язувальної функції в межах СЕ, що дасть змогу отримати задовільні результати при мінімальному числі невідомих. Спрощена апроксимація переміщень може привести до спотворення модуля пружності і коефіцієнта Пуассона. Для компенсації такого явища передбачені два прийоми: вводиться гіпотеза про постійність напружень, орієнтованих по нормалі до серединної поверхні, та враховується змінність геометричних параметрів по товщині оболонки.

1. Побудова співвідношень для обчислення матриці жорсткості СЕ.

При одношаровій апроксимації оболонок (один СЕ по товщині) місцеву систему координат в елементі вибираємо таким чином, щоб вісь x^1 була орієнтована по товщині оболонки, а осі x^2 і x^3 розташовувались в площині, дотичній до серединної поверхні.

Початок місцевої системи координат пов'язаний із центром СЕ.

Гіпотеза про постійність напружень $\sigma^{11} = const$ не вносить суттєвої похибки в просторовий елемент, надає можливість враховувати поперечну деформацію оболонок і не потребує визначення переміщень у місцевій системі координат, що дає змогу задавати переміщення для всіх фрагментів комбінованої конструкції у єдиній глобальній системі координат, в якій умови контакту формулюються досить просто.

Напруження у напрямку x^1 подано відрізком ряду Маклорена із збереженням двох членів:

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij} \Big|_0 + M^{ij} \Big|_0 x^1, \quad (1)$$

де

$$\sigma^{ij} = C^{*ijmn} \zeta_{mn}, \quad (2)$$

$$M^{ij} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^1} = C_{,1}^{*ijmn} \zeta_{mn} + C^{*ijmn} \zeta_{mn,1}, \quad (3)$$

$$\zeta_{mn} = Z_n^{k'} \frac{\partial u_k}{\partial x^m}. \quad (4)$$

У відповідності з прийнятою гіпотезою, запишемо рівність:

$$\begin{aligned} M^{11} \Big|_{x^1=0} &= C_{,1}^{*11mn} \zeta_{mn} \Big|_{x^1=0} + C^{*1111} \zeta_{11,1} \Big|_{x^1=0} + \\ &+ C^{*11} \zeta_{MN,1} \Big|_{x^1=0} (1 - \delta_{(m)}^1 \delta_{(n)}^1) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

із якої отримаємо :

$$\zeta_{11,1} \Big|_{x^1=0} = - \frac{C_{,1}^{*11mn}}{C^{*1111}} \zeta_{mn,1} \Big|_{x^1=0} - \frac{C^{*11mn}}{C^{*1111}} (1 - \delta_{(m)}^1 \delta_{(n)}^1) \zeta_{mn,1} \Big|_{x^1=0}. \quad (6)$$

Вісь x^1 місцевої системи координат з причини пологості поверхні в межах СЕ несуттєво відхиляється від нормалі до серединної поверхні, а тому похідною від компонент тензора пружності по x^1 , що входять в (38) можна знехтувати. Тоді

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= C^{*ijmn} \zeta_{mn} \Big|_0 + C^{*ijmn} (1 - \delta_m^1 \delta_n^1) x^1 \zeta_{mn,1} \Big|_0 - \\ &- \frac{C^{*ij11} \cdot C^{*11mn}}{C^{*1111}} \zeta_{mn,1} \Big|_0 (1 - \delta_m^1 \delta_n^1) C^1 = \\ &= C^{*ijmn} \zeta_{mn} \Big|_0 + \left(C^{*ijmn} - \frac{C^{*ij11} \cdot C^{*11mn}}{C^{*1111}} \right) \left((1 - \delta_m^1 \delta_n^1) x^1 \zeta_{mn,1} \Big|_0 \right) \zeta_{mn,1} \Big|_0 = \\ &= C^{*ijmn} \zeta_{mn} \Big|_0 + B^{ijmn} \zeta_{mn,1} \Big|_0 x^1. \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$B^{ijmn} = \left(\begin{array}{c} * \\ C^{ijmn} - \frac{*}{C^{ij11} \cdot C^{11mn}} \\ * \\ C^{1111} \end{array} \right) (1 - \delta_m^1 \delta_n^1). \quad (8)$$

У відповідності з положеннями моментної схеми МСЕ [1], розкладемо величини ζ_{mn} в ряд Маклорена в центрі МСЕ ($x^1 = x^2 = x^3 = 0$) і утримаємо три перших члена

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \zeta_{11}|_0 + \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2 + \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial x^3} \Big|_0 x^3 + \frac{\partial^2 \zeta_{11}}{\partial x^2 \partial x^3} \Big|_0 x^2 x^3, \\ \zeta_{22} &= \zeta_{22}|_0 + \frac{\partial \zeta_{22}}{\partial x^1} \Big|_0 x^1 + \frac{\partial \zeta_{22}}{\partial x^3} \Big|_0 x^3 + \frac{\partial^2 \zeta_{22}}{\partial x^1 \partial x^3} \Big|_0 x^1 x^3, \\ \zeta_{33} &= \zeta_{33}|_0 + \frac{\partial \zeta_{33}}{\partial x^1} \Big|_0 x^1 + \frac{\partial \zeta_{33}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2 + \frac{\partial^2 \zeta_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_0 x^1 x^2, \\ \zeta_{21} &= \zeta_{21}|_0 + \frac{\partial \zeta_{21}}{\partial x^3} \Big|_0 x^3, \quad \zeta_{31} = \zeta_{31}|_0 + \frac{\partial \zeta_{31}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2, \\ \zeta_{12} &= \zeta_{12}|_0 + \frac{\partial \zeta_{12}}{\partial x^3} \Big|_0 x^3, \quad \zeta_{32} = \zeta_{32}|_0 + \frac{\partial \zeta_{32}}{\partial x^1} \Big|_0 x^1, \\ \zeta_{13} &= \zeta_{13}|_0 + \frac{\partial \zeta_{23}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2, \quad \zeta_{23} = \zeta_{23}|_0 + \frac{\partial \zeta_{23}}{\partial x^1} \Big|_0 x^1 \end{aligned} \quad (9)$$

або в компактному запису:

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ij} + \varphi_{ij}^m x^m \omega_{(ij)}^{(mn)} + \psi_{ij}^{mn} x^m x^n \omega_{(mn)}^{(nij)} \delta_{(ij)}^{(i)}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \zeta_{ij} &= \zeta_{ij}|_0, \quad \varphi_{ij}^m = \frac{\partial \zeta_{ij}}{\partial x^m} \Big|_0, \quad \psi_{ij}^{mn} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta_{ij}}{\partial x^m \partial x^n} \Big|_0, \quad \omega_{i\dots k} = \omega_m^i \omega_n^j \dots, \\ \omega_m^i &= \begin{cases} 1 & \text{при } i \neq m \\ 0 & \text{при } i = m \end{cases}. \end{aligned} \quad (11)$$

Коефіцієнт матриці жорсткості СЕ отримаємо на основі формули для пружного потенціалу

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_v \sigma^{ij} \frac{1}{2} \left(Z'_j \delta \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} \delta u'_i + Z'_i \delta \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} \delta \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} \right) dv = \\ &= \int_v \sigma^{ij} \left(Z'_j + \frac{\partial u'_i}{\partial x^j} \right) \delta \frac{\partial u'_j}{\partial x^i} dv \end{aligned}$$

у якій введено тензор скінченних деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(Z'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} + Z'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} \right).$$

З урахуванням (1) і (7), виконавши інтегрування по криволінійних координатах, остаточно отримуємо:

$$\delta W_{CE} = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(C^{ijmn} \zeta_{mnl} \Big|_{x^1=0} + B \zeta_{mnl} \Big|_{x^1=0} x^1 \right) \delta \zeta_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (12)$$

Градiєнти вектора перемiщень та їх похiднi по x^1 . Що входять в (12) для $x^1 = 0$ у вiдповiдностi з (10) мають значення:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{11}, \quad \zeta_{11,1} \Big|_{x^1=0} = 0, \quad \zeta_{21} \Big|_{x^1=0} = \zeta_{21}, \\ \zeta_{21,1} \Big|_{x^1=0} &= 0, \quad \zeta_{31} \Big|_{x^1=0} = \zeta_{31}, \quad \zeta_{31,1} \Big|_{x^1=0} = 0, \\ \zeta_{21} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{12}, \quad \zeta_{12,1} \Big|_{x^1=0} = 0, \quad \zeta_{22} = \zeta_{22} \Big|_0 + \zeta_{22,3} \Big|_0 x_1^3, \\ \zeta_{22,1} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{22,1} \Big|_0 + \zeta_{22,3} \Big|_0 + \zeta_{22,3} \Big|_0 x_1^3, \\ \zeta_{32} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{21,1} \Big|_0, \quad \zeta_{32,1} \Big|_{x^1=0} = \zeta_{32,1} \Big|_0, \\ \zeta_{13} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{13}, \quad \zeta_{13,1} \Big|_{x^1=0} = 0, \quad \zeta_{23} \Big|_{x^1=0} = \zeta_{23} \Big|_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{23,1}|_{x^1=0} &= \zeta_{23,1}|_0, \quad \zeta_{33}|_{x^1=0} = \zeta_{33}|_0 + \zeta_{33,2}|_0 x^2, \\ \zeta_{33,1}|_{x^1=0} &= \zeta_{33,1}|_0 + \zeta_{33,2}|_0 x^2.\end{aligned}\quad (13)$$

Співвідношення (12) з урахуванням (11) і (13) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\delta W_{CE} &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[C^{ijmn} \left(\zeta_{11}|_0 x^2 + \zeta_{11,3}|_0 x^3 + \zeta_{1123}|_0 x^2 x^3 \right) + \right. \\ &+ C^{ij21} \left(\zeta_{21}|_0 + \zeta_{21,3}|_0 x^3 \right) + C^{ij31} \left(\zeta_{31}|_0 + \zeta_{31,2}|_0 x^2 \right) + \\ &+ C^{ij21} \left(\zeta_{12}|_0 + \zeta_{12,3}|_0 x^3 \right) + C^{ij22} \left(\zeta_{22}|_0 + \zeta_{22,2}|_0 x^3 \right) + \\ &+ B^{ij22} \left(\zeta_{22,1}|_0 x^1 + \zeta_{22,13}|_0 x^1 x^3 \right) + C^{ij32} \zeta_{32}|_0 + B^{ij32} \zeta_{32,1}|_0 x^1 + \\ &+ C^{ij21} \left(\zeta_{12}|_0 + \zeta_{12,3}|_0 x^3 \right) + C^{ij22} \left(\zeta_{22}|_0 + \zeta_{22,2}|_0 x^3 \right) + \\ &+ C^{ij23} \left(\zeta_{33}|_0 + \zeta_{33,2}|_0 x^2 \right) + B^{ij33} \left(\zeta_{33,1}|_0 x^1 + \zeta_{33,12}|_0 x^1 x^1 \right) \Big] \times \\ &\times \delta \left(\zeta_{ij}|_0 + \zeta_{ij,m}|_0 x^m \omega_{(ij)}^{(mn)} + \frac{1}{2} \zeta_{ij,mn}|_0 x^m x^n \delta_{(j)}^{(i)} \omega_{(mmm)}^{(nii)} \right) \cdot \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (14)\end{aligned}$$

Вважаємо, що геометричні характеристики по товщині СЕ змінні. Це дає змогу більш точно обчислювати компоненти тензора пружності, особливо у випадку великих градієнтів товщин.

Інтегрування по x^1 в (14) виконується чисельно за квадратурними формулами Гауса [2]. Враховуючи те, що таблиці вагових квадратурних коефіцієнтів відповідають границям інтегрування (-1,+1), обчислення

інтеграла загального вигляду $\int_a^b f(x) dx$ необхідно виконати заміну

$$\text{змінних } z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Формула Гауса для загального випадку має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a-b}{2} [C_1 f(z_1) + C_2 f(z_2) + \dots C_n f(z_n)] x_i$$

$$z_i = \frac{1}{2} x_i, \quad z_1 = -\frac{0,57735}{2}, \quad z_2 = +\frac{0,57735}{2}.$$

Тоді

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2} f(x) \Big|_{x=-0,288675} + \frac{1}{2} f(x) \Big|_{x=0,188675}.$$

Подальші дії, що стосуються виводу формул для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості СЕ пов'язані з визначенням градієнтів і їх похідних через переміщення, апроксимація яких у межах СЕ подається за полілінійним законом:

$$u^i = \sum_{S_1=+1} \sum_{S_2=+1} \sum_{S_3=+1} u^i_{S_1 S_2 S_3} \prod_{\delta=1}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right), \quad (15)$$

де $S_{(\delta)}$ – параметри, які визначають положення вузла в локальній системі

координат; $S_{(\delta)} = \begin{cases} 1 & \text{при } x^{(\delta)} > 0 \\ 0 & \text{при } x^{(\delta)} < 0 \end{cases}$; $u^i_{S_1 S_2 S_3}$ – переміщення вузлів СЕ в

декартові системі координат.

При чисельній реалізації МСЕ для тонких оболонок і оболонок середньої товщини суттєвим фактором отримання сприйнятливої точності результатів обчислень є стійкість обчислювального процесу щодо помилок округлення. У випадку лінійного розподілення переміщень по товщині чисельні експерименти показали, що найбільш стійкі результати досягаються тоді, коли у якості незалежних параметрів переміщень прийняти переміщення вузлів на серединній поверхні:

$$U^i_{S_2 S_3} = \frac{1}{2} (u^i_{+1 S_2 S_3} + u^i_{-1 S_2 S_3}) \quad (16)$$

і узагальнених кутів повороту ребер СЕ, орієнтованих по товщин. Кутові переміщення визначаються як різниця переміщень відповідних вузлових точок на обмежуючих поверхнях СЕ

$$\gamma'_{S_2 S_3} = u'_{+1 S_2 S_3} - u'_{-1 S_2 S_3}. \quad (17)$$

Вузлу на нижній обмежувачій поверхні відповідає $S_1 = -1$, а на верхній поверхні – $S_1 = +1$. Зробимо заміну змінних в (15) у відповідності з (16) і (17), тоді

$$\begin{aligned} u' &= \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \left[u'_{-1 S_2 S_3} \left(-x^1 + \frac{1}{2} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= u'_{-1 S_2 S_3} \left(-x^1 + \frac{1}{2} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) \Big] = \\ &= \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \left(-x^1 + \frac{1}{2} \right) \left(v'_{S_2 S_3} - \frac{1}{2} \gamma'_{S_2 S_3} \right) \left(x^1 + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\quad \times \left(v'_{S_2 S_3} + \frac{1}{2} \gamma'_{S_2 S_3} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \left(v'_{S_2 S_3} + x^1 \gamma'_{S_2 S_3} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Граденти вектора переміщень (15) виражені через переміщення (18) вигляду:

$$\begin{aligned} \zeta_{11}|_0 &= \frac{\partial u_{m'}}{\partial x^1} Z_1^{m'} \Big|_0 = \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \gamma'_{S_2 S_3} \left(S_2 x^2 + \frac{1}{2} \right) \left(S_3 x^3 + \frac{1}{2} \right) Z_1^{m'} \Big|_0 = \\ &= \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \frac{1}{4} \gamma'_{S_2 S_3} Z_1^{m'} \Big|_0. \quad (19) \end{aligned}$$

Після підстановки значень градієнтів в (14) і приведення подібних членів при варіаціях о кожному виду переміщень, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
 dW_{CE} = & \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} \left(K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b'} \delta v'_{P_2P_3} + \right. \\
 & + K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b't'} v_{S_2S_3}^{b'} \delta \gamma'_{P_2P_3} + K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b't'} \gamma_{S_2S_3}^{b'} \delta v'_{P_2P_3} + \\
 & \left. + K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b't'} \gamma_{S_2S_3}^{b'} \delta \gamma'_{P_2P_3} \right), \quad (20)
 \end{aligned}$$

де $K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b't'}$ – коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента.

2. Побудова співвідношень для обчислення матриці мас СЕ.

В методі скінченних елементів найбільш сприйнятливою для розв'язання задач динаміки є узгоджена матриця мас, методика визначення якої аналогічна процедурі побудови матриці жорсткості.

Скористаємось формулою, що визначає роботу сил інерції на можливих переміщеннях

$$\delta T = \int_v \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} \delta u^i dv. \quad (21)$$

Апроксимація переміщень в межах СЕ виконується відповідно (18). За таким же законом змінюються і прискорення:

$$\ddot{u}_i = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \left(\ddot{v}_i^{S_2S_3+x^1} + \gamma_i^{S_2S_3} \right) \prod_{\delta=2}^{-3} \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right). \quad (22)$$

Підставивши (18) і (22) в (21) і виконавши інтегрування в межах СЕ, вважаючи, що \sqrt{g} в межах се залежить від x^1 тримаємо:

$$\delta T_{CE} = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} \int_v \left(\ddot{v}_i^{S_2S_3} + \gamma_i^{S_2S_3} x^1 \right) \prod_{\delta=2}^{-3} \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta \left(\ddot{v}_{P_2 P_3}^{i'} + x^1 \dot{\gamma}_{P_2 P_3}^{i'} \right) \prod_{\alpha=2}^{-3} \left(P(\alpha) x^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \right) \rho \sqrt{g} dv = \\
& = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\ddot{v}_{i'}^{S_2 S_3} \delta v_{P_2 P_3}^{i'} + x^1 \ddot{v}_{i'}^{S_2 S_3} \delta \gamma_{P_2 P_3}^{i'} + \right. \\
& \quad \left. + x^1 \dot{\gamma}_{i'}^{S_2 S_3} \delta v_{P_2 P_3}^{i'} + (x^1) \ddot{\gamma}_{i'}^{S_2 S_3} \delta \gamma_{P_2 P_3}^{i'} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S(\delta) x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) \times \\
& \quad \times \prod_{\delta=2}^3 \left(P(\alpha) x^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = \\
& = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(S_2 S_3 \ddot{v}_{i'}^{S_2 S_3} \delta v_{P_2 P_3}^{i'} m_{P_2 P_3 S_2 S_3} + \ddot{v}_{i'}^{S_2 S_3} \delta \gamma_{P_2 P_3}^{i'} m_{P_2 P_3 S_2 S_3} + \right. \\
& \quad \left. + \ddot{\gamma}_{i'}^{S_2 S_3} \delta v_{P_2 P_3}^{i'} m'_{P_2 P_3 S_2 S_3} + \ddot{\gamma}_{i'}^{S_2 S_3} \delta \gamma_{P_2 P_3}^{i'} m^*_{P_2 P_3 S_2 S_3} \right), \quad (23)
\end{aligned}$$

де елемент матриці еквівалентних мас CE

$$m_{P_2 P_3 S_2 S_3} = \rho \prod_{\delta=2}^3 \frac{S(\alpha) P(\alpha) + 1}{12} I_0, \quad (24)$$

$$m_{P_2 P_3 S_2 S_3} = \rho \prod_{\alpha=2}^3 \frac{S(\alpha) P(\alpha) + 3}{12} I_1, \quad (25)$$

$$m_{P_2 P_3 S_2 S_3} = \rho \prod_{\alpha=2}^3 \frac{S(\alpha) P(\alpha) + 3}{12} I_2, \quad (26)$$

визначимо чисельно на основі двохчленної квадратурної формули Гауса.

3. Дослідження деформованого стану і коливань циліндричної панелі з урахуванням геометричної не лінійності.

Прямокутна в плані полога циліндрична оболонка (рис. 1) підсилена по контуру ребрами жорсткості являє собою кришку оглядового отвору корпусу парової турбіни і знаходиться під дією атмосферного тиску (в

середині корпусу атмосферний тиск відсутній). Використана модель 14×12 скінченних елементів. Проведено дослідження деформованого стану оболонки під дією рівномірно розподіленого по поверхні конструкції тиску у лінійній і геометрично нелінійній постановці.

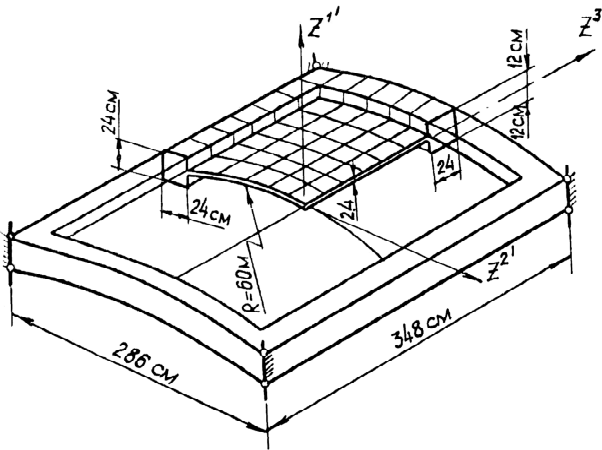


Рис. 1. Оболонка оглядового отвору корпусу парової турбіни

Розв'язок задачі у геометрично нелінійній постановці виконано методом продовження по параметру навантаження у комбінації з методом Ньютона–Канторовича. На рис. 2 суцільною лінією показано графік функції “навантаження – прогин” центральної точки оболонки який відображає характер переміщення цієї точки для восьми кроків навантаження у діапазоні до верхнього критичного значення тиску, що відповідає умовам втрати стійкості. Для кожного із зазначених положень оболонки були зафіксовані переміщення і напруження, які в подальшому використані для обчислення динамічних характеристик оболонки і побудовані графіки зміни частот власних коливань. Найбільш чутливо до змін напруженого стану оболонки є частота основного тону. Пунктирною лінією відображено графік змін відношення цієї частоти до її значення, що відповідає натуральному (ненапруженому) стану конструкції. Одночасно приведено такий же аналіз, але напружено-деформований стан оболонки визначається у лінійній постановці (штрихпунктирна лінія). Порівняння двох графіків показує, що величина тиску, при якому частота основного тону досягає нульового значення (тобто відповідає динамічному критерію втрати стійкості) є реальною тільки для нелінійного алгоритму визначення напружено-деформованого стану

оболонки. Характер зміни п'яти частот власних коливань оболонки від дії напружено-деформованого стану приведений у таблиці 1.

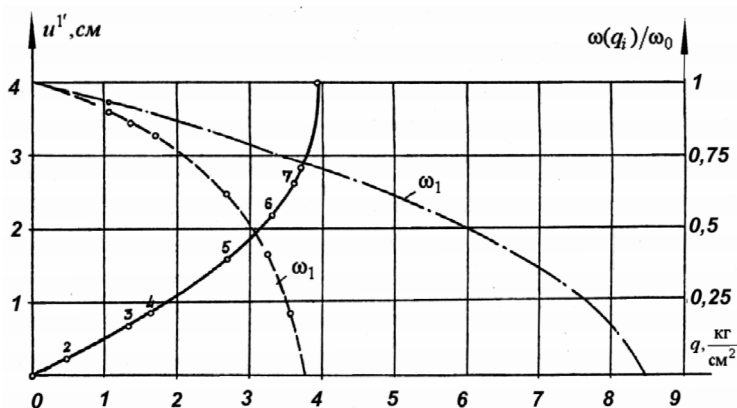


Рис. 2. Зміна частоти основного тону оболонки

Таблиця 1

№	Крок навантаження, кг/см ²	Частота власних коливань, Гц				
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1	0	63,5	83,1	140,4	148,2	180,2
2	0,5	60,1	82,9	140,0	147,4	178,9
3	1,3	53,7	82,6	139,2	146,1	176,9
4	1,62	50,9	82,5	138,7	145,6	176,0
5	2,64	38,5	82,3	133,5	143,5	171,1
7	3,5	13,0	82,3	131,5	143,8	170,0

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений. – Сопrotивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1974, вып. 24. С. 147–156.
2. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. –265с.

Отримано 30.07.09

A.D. Legostaev, N.A. Grechukh

Построение соотношений МКЭ для пространственного преднапряженного конечного элемента

Предусмотрено построить соотношения пространственного конечного элемента, который позволяет создавать модели как тонких так и не тонких пластин и оболочек при однослойной аппроксимации конструкции по толщине с использованием линейного закона изменения разрешающей функции в пределах КЭ. Это дает возможность получить удовлетворительные результаты при минимальном числе неизвестных. Упрощенная аппроксимация перемещений может привести к искажению модуля упругости и коэффициента Пуассона. Для компенсации этого явления предусмотрено два приема: вводится гипотеза о постоянстве напряжений, ориентированных по нормали к срединной поверхности и учитывается изменение геометрических параметров по толщине оболочки.

A.D. Legostaev, N.A. Grechukh

Construction mfe ratios for spatial prestressed finite element

It is necessary to construct a ratio of a spatial finite element, which allows to create models both for thin and not thin plates and shells at one layer approximation of construction on thickness using linear law of changing of permitting function in FE limits. It permits to get satisfactory results at minimal number of unknowns. The simplified approximation of displacements leads to distortion of modulus of elasticity and Poisson coefficient. To indemnification this phenomenon two receptions are accepted: the hypothesis about constant stresses oriented perpendicularly to the middle surface and changing of geometrical parameters on thickness of the shell are taken into account.

УДК 539.3

О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

ВПЛИВ ПАРАМЕТРА ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ДИНАМІЧНУ ПОВЕДІНКУ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ З УДАРОМ О М'ЯКИЙ ОБМЕЖНИК

Виконано числове дослідження динамічної поведінки двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності з ударом о м'який обмежник. Показано, як отримання того чи іншого режиму коливань залежить від параметра зовнішнього навантаження. Побудовані криві навантаження для обох тіл системи та крива залежності сили контактної взаємодії від цього параметра.

1. Постановка задачі.

Віброударні системи досить широко застосовуються в техніці, тому дослідження динамічних процесів у таких системах являє собою чималий інтерес [1]. В літературі (див. наприклад [2]) представлені принципи класифікації механічних систем с ударами, різні типи таких систем мають різну динамічну поведінку. У віброударній механічній системі, що розглядається у цій роботі, має місце удар о м'який обмежник. У такій системі тривалість удару не є безмежно короткою, и тому класичне (спрощене) моделювання удару за допомогою граничних умов з використанням коефіцієнта відновлення, який має незмінне значення, не дає результатів, що відповідають реальному рухові системи. Це твердження для моделі, що розглядається, було доведено в [3]. Саме тому для моделювання удару о м'який обмежник в роботі застосовується сила контактної взаємодії, що змінюється під час удару згідно із законом Герца. Такий підхід дозволяє описати рух тіл системи на всій часовій осі включаючи період удару, спостерігати динамічну поведінку системи під час удару, обчислювати величину контактної сили та тривалість удару.

У роботі досліджується двохмасова система з двома ступнями вільності, що відповідає віброударному майданчикові, якій використовується у будівельному виробництві для ущільнення бетонних сумішей і формовання бетонних виробів [4-6].

Найпростіший варіант моделі двохмасового віброударного майданчика без закріплення форми показано на рис. 1.

Стіл майданчика масою m_1 кріпиться до фундаменту лінійними віброізолюючими пружинами із сумарною жорсткістю k_1 . Двигуни, встановлені під столом, генерують збурюючу силу $F(t)$, яка вважається гармонічною $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$. До столу кріпиться пружна прокладка

(м'який обмежник коливань) товщиною h з лінійною жорсткістю k_0 , на якій лежить форма з бетонною сумішшю масою m_0 . Форма до прокладки не кріпиться, і тому під час руху відривається від прокладки, а потім на неї падає.

Ця модель докладно описана в [3,7,8].

Коли форма падає на стіл майданчика (на прокладку), відбувається удар, під час якого форма і стіл рухаються спільно. Як було сказано вище, в розглянутій моделі удар найкраще моделюється силою контактної взаємодії $F_{кон}$, що описується законом Герца [3,9,10]:

$$F_{кон} = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (1)$$

де $\alpha(t)$ – відносне зближення тіл, $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$, K – константа Герца

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}},$$

q , A і B – константи, що характеризують місцеву геометрію зони контакту,

$$\delta_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0 \pi}, \quad \delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi},$$

μ_i і E_i – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл.

Спільний рух столу з формою з початку руху до першого відриву форми від прокладки описується рівняннями:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \omega_0^2[h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0 \dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2 \chi[h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1 \omega_1 \dot{y}_0 + \\ &+ 2\xi_0 \omega_0 \chi \dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

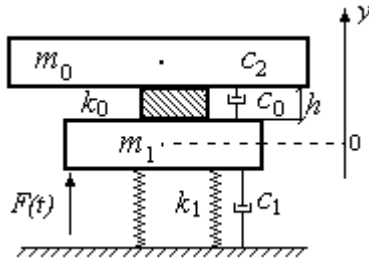


Рис. 1. Розрахункова схема

де введені позначення

$$\frac{k_0}{m_0} = \omega_0^2, \quad \frac{k_1}{m_1} = \omega_1^2, \quad \frac{c_0}{m_0} = 2\xi_0\omega_0, \quad \frac{c_1}{m_1} = 2\xi_1\omega_1, \quad \frac{c_2}{m_0} = 2\xi_2\omega_0, \quad \frac{m_0}{m_1} = \chi, \quad (3)$$

y_0, y_1 – поточні координати форми і столу відповідно.

Вихідні умови при $t = 0$ мають вигляд:

$$\varphi = 0; \quad y_1 = 0; \quad \dot{y}_1 = 0; \quad y_0 = h - \lambda_{cm}; \quad \dot{y}_0 = 0. \quad (4)$$

Роздільний рух тіл під час відриву форми від прокладки описується рівняннями

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g - 2\xi_2\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Рівняння спільного руху тіл під час удару мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 &= -g + \frac{K}{m_0} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0, \\ \ddot{y}_1 &= g\chi - \omega_1^2 y_1 - \frac{K}{m_1} [h - (y_0 - y_1)]^{3/2} - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 + \frac{F_0}{m_1} \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

Числові характеристики майданчика узяті відповідно до нормативної літератури [5,6] і представлені в таблиці.

Таблиця 1

Маса форми з бетоном m_0 , кг	15000,0
Маса столу майданчика m_1 , кг	7400,0
Жорсткість прокладки k_0 , Н/м	$3,0 \cdot 10^8$
Сумарна жорсткість віброізолюючих пружин k_1 , Н/м	$1,278 \cdot 10^6$
Товщина прокладки h , м	0,0275
Амплітуда зовнішнього навантаження F_0 , Н	$2,44 \cdot 10^5$
Частота зовнішнього навантаження ω , Гц	25,0
Початкова фаза зовнішнього навантаження φ , рад	0,0

До рівнянь руху тіл віброударного майданчика (2,5,6) крім параметрів, які рекомендовані нормативною літературою і значення яких наведені у таблиці 1, входять: коефіцієнти демпфірування ξ_0, ξ_1, ξ_2 , що визначають сили опору, модулі пружності і коефіцієнти Пуассона обох тіл, що співударяються, E_0 і E_1, μ_0 і μ_1 ; константи A, B і q , які характеризують місцеву геометрію контактуючих поверхонь. Останні дві групи параметрів входять в опис сили Герца (1) і в такий спосіб зв'язані зі способом моделювання удару.

Вплив цих параметрів на динаміку віброударної системи описаний в [7,11]. Зафіксуємо їхні значення:

Таблиця 2

Модуль пружності форми $E_0, 10^8 \text{Н/м}^2$	2000
Модуль пружності прокладки $E_1, 10^8 \text{Н/м}^2$	3
Коефіцієнт Пуассона форми μ_0	0,3
Коефіцієнт Пуассона прокладки μ_1	0,4
Константи A, B , що характеризують місцеву геометрію зони контакту, $1/\text{м}^2$	$A=B=0,1$
q	0,318
Коефіцієнт демпфірування в бетонній суміші ξ_2	0,03
Коефіцієнт демпфірування в прокладці ξ_0	0,02
Коефіцієнт демпфірування у віброізолюючих пружинах ξ_1	0,02

2. Числові дослідження впливу зовнішнього навантаження на динамічну поведінку віброударної системи.

Для дослідження впливу величини зовнішнього навантаження на режим коливань тіл системи та на характеристики руху введемо параметр зовнішнього навантаження, тобто гармонічну збуджуючу силу запишемо у вигляді

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Змінюючи λ і залишаючи незмінними інші параметри динамічної системи, простежимо вплив параметра зовнішнього навантаження на її поведінку.

2.1. Безударний (1,0)-періодичний режим коливань при λ в діапазоні $0,35 \leq \lambda \leq 0,5$.

Числовий аналіз показав, що при значенні параметра зовнішнього навантаження $\lambda=0.3$ і менше збуджуюча сила надто мала для того, щоб

відірвати форму від прокладки. При такому зовнішньому навантаженні форма з бетоном і стіл майданчика рухаються спільно увесь час. Коли параметр λ стає більшим, змінюючись в діапазоні $0,35 \leq \lambda \leq 0,5$, тобто збурююча сила зростає, первісний відрив форми від прокладки існує, але потім швидко встановлюється гармонічний безударний режим спільних коливань обох тіл системи – режим (1,0)-періодичний. Тут і далі субгармонічний (чи гармонічний) режим коливань періоду nT з k ударами за цикл називатимемо (n,k) -періодичним [8,12]. На рис. 2 представлені залежності від часу переміщень обох тіл системи, контактної сили та проекції траєкторії руху тіл на фазову площину при $\lambda = 0,4$. Як добре видно на рис. 2, контактна сила приймає нульове значення тільки у перехідний період руху системи, а потім вона увесь час позитивна, що свідчить про відсутність відриву форми від прокладки під час спільних усталених коливань.

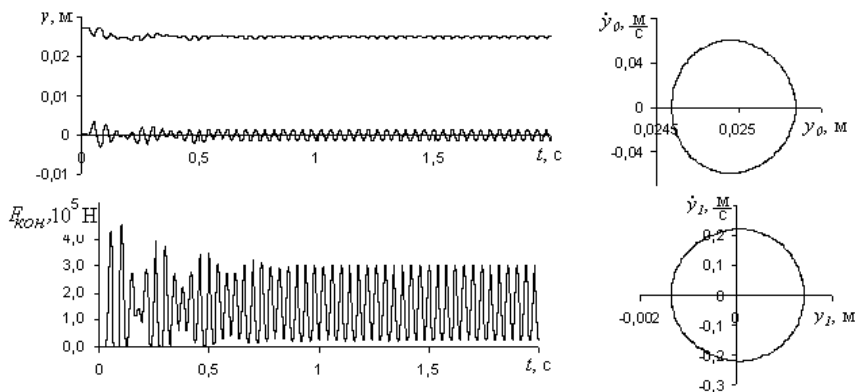


Рис. 2

2.2. Одноударний гармонічний (1,1)-періодичний режим коливань при λ в діапазоні $0,6 \leq \lambda \leq 1,5$.

Із подальшим збільшенням значення параметру навантаження λ , тобто зростанням збурюючої сили, система починає рухатися в звичайному режимі: має місце гармонічний одноударний ((1,1)-періодичний) режим коливань. На рис. 3 представлена залежність сили контактної взаємодії від часу; графік сили в більшому масштабі наочно демонструє наявність одного удару за один період зовнішнього навантаження T .

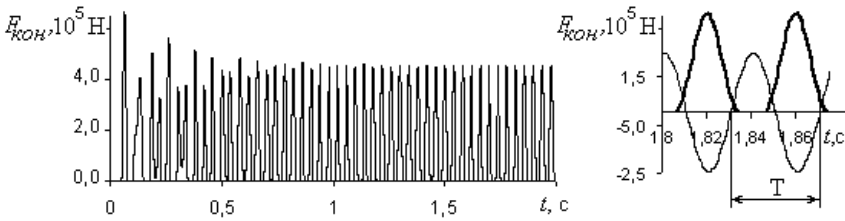


Рис. 3

2.3. Двохударний субгармонічний (2,2)-періодичний режим коливань при λ в діапазоні $1,55 \leq \lambda \leq 1,6$.

В цьому вузькому діапазоні значень параметра зовнішнього навантаження λ система суттєво змінює режим коливань – він стає двоударним субгармонічним з періодом $2T$, тобто (2,2)-періодичним режимом. На рис.4 представлені залежності від часу переміщень обох тіл системи та контактної сили та їх фазові траєкторії при $\lambda = 1,6$. Фазові траєкторії обох тіл мають два характерних кільця, що відповідає $2T$ -періодичному режиму коливань.

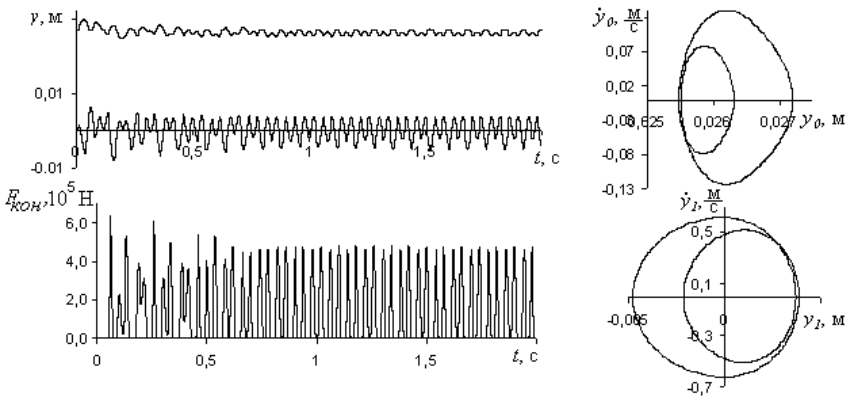


Рис. 4

На рис. 5,а тонкою лінією зображена зовнішня збудуюча сила, а товстою – сила контактної взаємодії (для $\lambda = 1,6$).

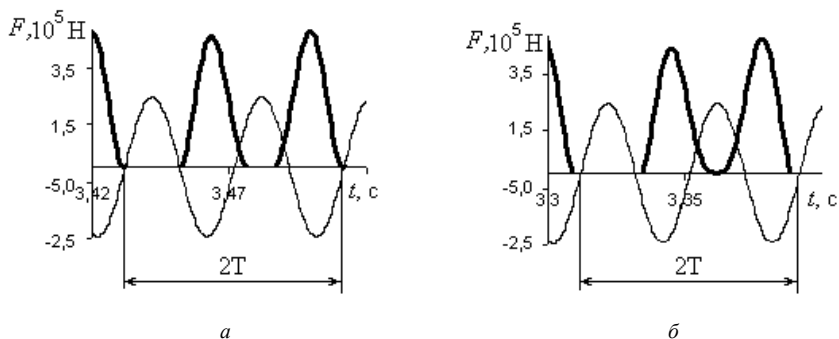


Рис. 5

Цей рисунок наочно демонструє, що в системі за час $2T$ два рази відбувається відрив форми від прокладки, під час чого сила контактної взаємодії відсутня. За той же час $2T$ два рази відбувається удар, під час якого контактна сила зростає від нуля до максимального значення і знов зменшується до нуля.

2.4. Одноударний субгармонічний (2,1)-періодичний режим коливань при λ в діапазоні $1,7 \leq \lambda \leq 2,06$.

В цьому діапазоні значень параметра λ можна виділити два піддіапазони, в яких динамічна поведінка системи дещо різна. В піддіапазоні $1,7 \leq \lambda \leq 1,9$ маємо яскраво виражений (2,1)-періодичний режим коливань – субгармонічний $2T$ -періодичний режим з одним ударом за цикл (рис.6 для $\lambda = 1,8$). Фазові траєкторії обох тіл мають два характерних кільця.

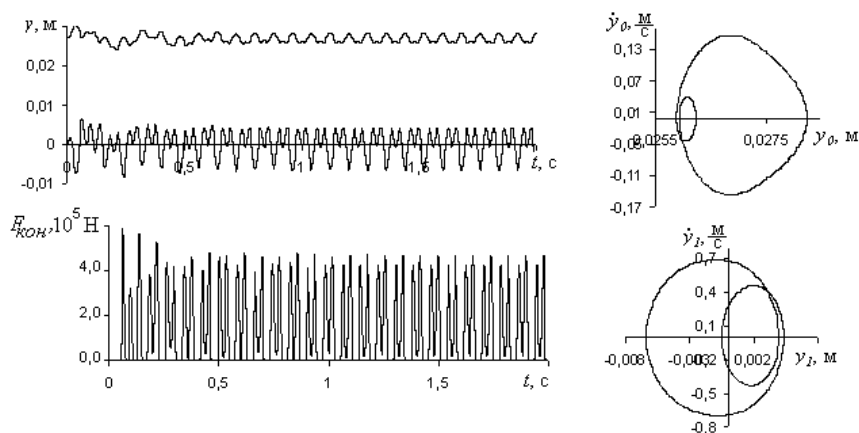


Рис.6

На рис. 5,б тонкою лінією зображена зовнішня збурююча сила, а товстою – сила контактної взаємодії (для $\lambda = 1,8$). Цей рисунок наочно демонструє, що в системі за час $2T$ лише один раз відбувається відрив форми від прокладки та один раз відбувається удар.

В піддіпазоні $2,0 \leq \lambda \leq 2,06$ зберігається (2,1)-періодичний режим коливаль, але характер руху форми змінюється. На рис.7 представлені залежності від часу переміщень обох тіл системи та контактної сили та їх фазові траєкторії при $\lambda = 2,05$. Фазова траєкторія стола має два характерних кільця, в той час коли фазова траєкторія форми має лише одне кільце, і рух форми стає майже гармонічним.

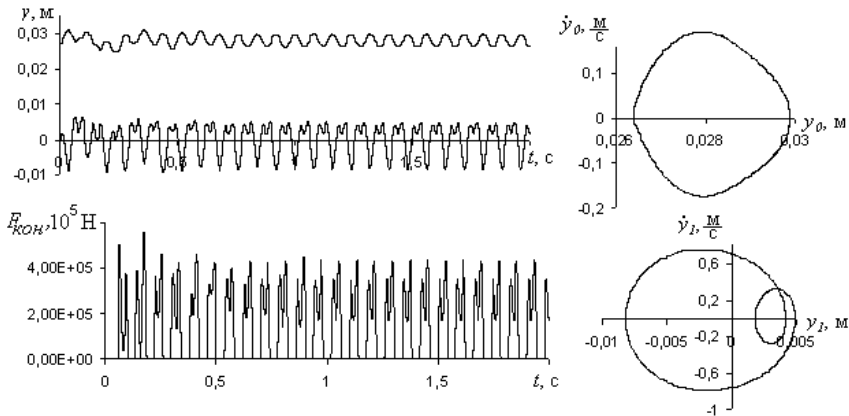


Рис.7

Для порівняння на рис. 8 у великому масштабі зображені зміни сил контактної взаємодії за період часу $2T$ в усталеному режимі коливаль для різних значень параметра λ . Тонкою лінією, як звичайно, зображена збурююча гармонічна сила. На том же рисунку також в великому масштабі представлені графіки переміщень форми для тих же значень λ . Тут наочно видно, як змінюється характер коливаль форми зі зміною λ .

2.5. Хаотичні коливання системи при $\lambda \geq 2,07$.

Коли збурююча сила стає надто великою, коливальний рух віброударної сити не устанавлюється, увесь час він залишається хаотичним. Наприклад, на рис.10 представлені залежності від часу переміщень обох тіл системи та контактної сили та їх фазові траєкторії при $\lambda = 2,1$.

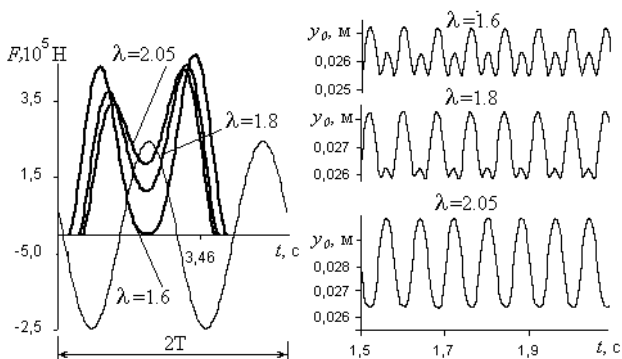


Рис. 8

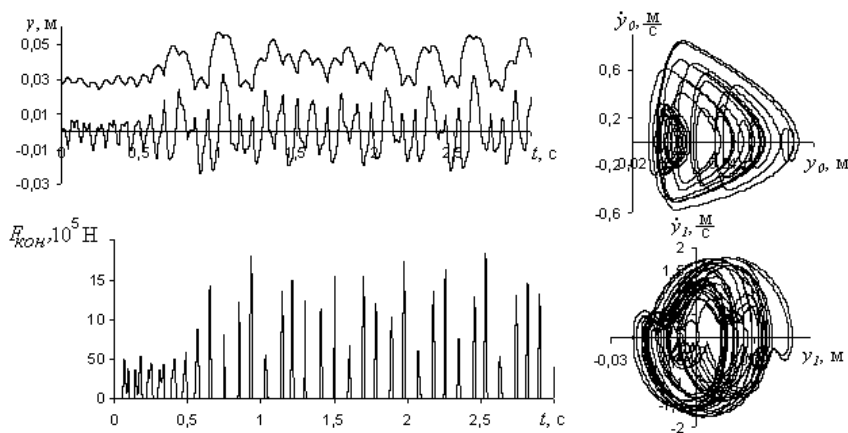


Рис. 9

3. Підсумкові результати числових досліджень динамічної поведінки віброударної системи

Для того, щоб отримати наочну картину динамічної поведінки системи на всьому діапазоні значень параметра зовнішнього навантаження λ , представимо одержані результати в вигляді таблиці 3. В таблиці приведені максимальні значення сили контактної взаємодії, тип режиму коливальності системи, а також значення напіврозмахів стола і форми, які обчислюються за стандартною формулою:

$$A_1 = \frac{|y_{1,\max}| + |y_{1,\min}|}{2}, \quad A_0 = \frac{|y_{0,\max}| + |y_{0,\min}|}{2}. \quad (7)$$

Таблиця 3

Параметр λ	$A_0, \text{мм}$	$A_1, \text{мм}$	$F_{max}, 10^5 \text{Н}$	Режим коливань
0,30				Спільні коливання
0,35	0,338	1,237	2,842597	(1,0)
0,40	0,375	1,389	3,010356	(1,0)
0,50	0,437	1,668	3,310306	(1,0)
0,60	0,484	1,913	3,556447	(1,1)
0,70	0,513	2,121	3,742980	(1,1)
0,80	0,542	2,402	3,965277	(1,1)
0,90	0,550	2,491	4,030782	(1,1)
1,00	0,566	2,675	4,153193	(1,1)
1,10	0,576	2,751	4,266510	(1,1)
1,20	0,586	2,836	4,372270	(1,1)
1,30	0,595	3,003	4,471774	(1,1)
1,40	0,605	3,167	4,566159	(1,1)
1,50	0,611	3,331	4,655262	(1,1)
1,55	0,622	3,588	4,701246	(2,2)
1,56	0,625	3,613	4,710636	(2,2)
1,57	0,730	3,930	4,744350	(2,2)
1,58	0,785	4,098	4,750634	(2,2)
1,59	0,823	4,217	4,753497	(2,2)
1,60	0,857	4,319	4,754441	(2,2)
1,70	1,056	4,941	4,729038	(2,1)
1,80	1,187	5,360	4,676533	(2,1)
1,90	1,340	5,783	4,586465	(2,1)
2,00	1,563	6,261	4,446409	(2,1)
2,01	1,595	6,317	4,427938	(2,1)
2,02	1,629	6,375	4,408698	(2,1)
2,03	1,667	6,438	4,388453	(2,1)
2,04	1,710	6,505	4,367855	(2,1)
2,05	1,760	6,580	4,346059	(2,1)
2,06	1,826	6,673	4,318563	(2,1)
2,07	16,100	24,912	17,45324	Хаотичні коливання
2,08	16,569	23,808	16,06968	Хаотичні коливання
2,10	16,611	25,506	15,98413	Хаотичні коливання
2,20	13,713	23,529	16,63876	Хаотичні коливання
2,30	17,969	25,001	14,89117	Хаотичні коливання

На рис. 10 зображені криві навантаження системи (залежності напіврозмахів коливань обох тіл системи від параметра навантаження λ) та залежність від λ максимального значення сили контактної взаємодії в усіх режимах на всьому діапазоні значень λ . Цікаво відмітити, що при $\lambda > 1,5$ в режимах (2,2)-періодичному та (2,1)-періодичному максимум контактної сили зменшується, а напіврозмахи коливань обох тіл системи в той же час збільшуються.

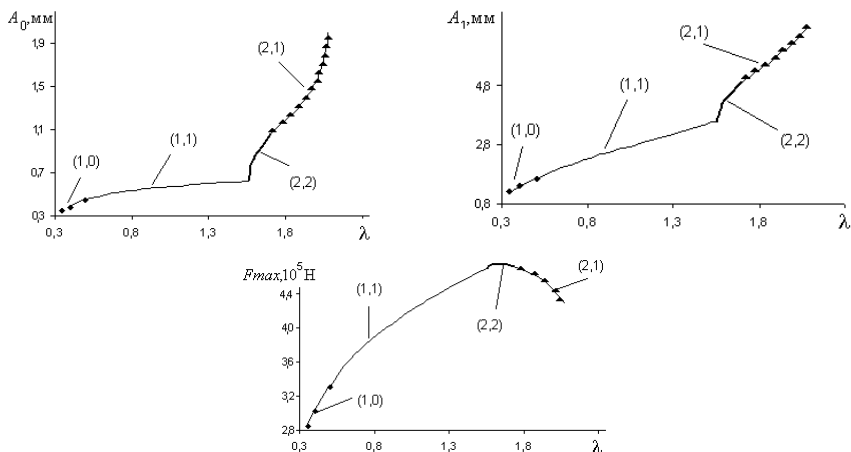


Рис. 10

4. Висновки

Отже, числові дослідження динамічної поведінки двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності, в якій удар відбувається о м'який обмежник, показали, що:

1. Використання сили контактної взаємодії, що описується законом Герца, для моделювання удару у віброударній системі із ударом о м'який обмежник дає надійний результат і дозволяє отримати закон руху всіх тіл системи на всій часовій осі, включаючи період удару. Цей підхід дозволяє також обчислити величину контактної сили та тривалість удару, яка в системі з ударом о м'який обмежник не є безмежно малою, а є кінцевою величиною і її можна порівнювати з часом роздільного руху тіл системи.

2. Побудовані в роботі криві навантаження для обох тіл системи показують, як зі зміною параметра навантаження λ змінюються (зростають) не тільки амплітуди коливань, але і самі режими коливань: безударний гармонічний, одноударний гармонічний, двоударний субгармонічний з періодом $2T$, одноударний субгармонічний з періодом $2T$ і, нарешті, хаотичний.

3. Побудована крива залежності максимуму сили контактної взаємодії від параметра навантаження λ показує, що з ростом λ , тобто збурюючої сили зовнішнього навантаження, цей максимум також зростає. Проте, коли режим коливань стає субгармонічним з періодом $2T$, максимум контактної сили починає зменшуватися, а напіввзмахи коливань обох тіл однак продовжують зростати.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.:Наука, 1978. – 352 с.
2. *Barbara Blazejczyk-Okolewska, Krzysztof Czolczynski, Tomasz Kapitaniak* Classification principles of types of mechanical systems with impacts – fundamental assumptions and rules// *European Journal of Mechanics* . - 2004. № 23 - P.517–537.
3. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009.(Здана до друку).
4. *Назаренко І.І.* Машини для виробництва будівельних матеріалів: Підручник.-Київ: КНУБА, 1999.- 488 с.
5. *Гусев Б.В., Зазимко В.Г.* Вибрационная технология бетона.–К.: Будівельник, 1991.–160 с.
6. Рекомендации по вибрационному формованию железобетонных изделий//НИИЖБ. – М., 1986. – 78 С.
7. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Аналіз динаміки ударно-вібраційного майданчика при зміні його параметрів// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2008.-Вип.82 – сс. 71-82.
8. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Вплив кроку інтегрування рівнянь руху виброударної системи на отримання характеристик її динамічної поведінки// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2009.(Здана до друку).
9. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стройиздат, 1965. –448 с.
10. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.
11. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Влияние отдельных конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику//Пробл. прочности. - 2009.(Здана до друку).
12. *Latawiec C. H., Janin O.* Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal// *Journal of Sound and Vibration* . - 2000. № 235(4). – P. 567-609.

Отримано 21.07.09

О.С. Погорелова, Т.Г. Постникова

Влияние параметра внешнего нагружения на динамическое поведение виброударной системы с ударом о мягкий ограничитель

Выполнено численное исследование динамического поведения двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы с ударом о мягкий ограничитель. Показано, как характеристики режима колебаний системы, полученного в результате интегрирования уравнений движения, зависят от параметра внешней нагрузки. Построены кривые нагружения для обоих тел системы и кривая зависимости силы контактного взаимодействия от этого параметра.

O.S. Pogorelova, T.G. Postnikova

The external loading parameter influence at the dynamical behaviour of vibro-impact system with the impact on a soft limiting stop

The numeric investigation of dynamical behaviour of vibro-impact two-mass two-degree-of-freedom system with impact on a soft limiting stop is fulfilled. It is shown how the vibration regime characteristics which have been received after the integration of motion equations depend from the external loading parameter. The loading curves for the both system bodies and the curve of the contact force dependence from this parameter are built.

УДК 539.3

М.О. Соловей, д.-р. техн. наук
О.П. Кривенко, канд. техн. наук
О.Б. Калашніков
О.А. Тамілко, студ.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЛІНІЙНО-ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Порівнюються результати розрахунків, що виконані за моментною схемою скінченних елементів та зі застосуванням комплексу ЛІРА при розв'язанні геометрично нелінійних задач стійкості осесиметричних сферичних панелей лінійно-змінної товщини.

Задачам стійкості гладких пологих панелей, які є класичними в геометрично нелінійній теорії оболонок, присвячена численна література [1-9 та інші]. На цьому типі оболонок, здебільшого сталої товщини, досліджуються методи й алгоритми розв'язання нелінійних задач стійкості.

Підвищення загальної жорсткості гладкої пологої оболонки (і відповідно її несучої спроможності) виконується за рахунок більш раціонального розподілу матеріалу в об'ємі конструкції, що звичайно досягається заміною сталої товщини оболонки на змінну. Вплив на стійкість гнучких пологих панелей змінності товщини мало вивчений [1, 4, 5], що пояснюється складністю розв'язування подібних нелінійних задач.

Робота присвячена порівнянню результатів розв'язків геометрично нелінійних задач стійкості пологих осесиметричних панелей лінійно-змінної товщини, що отримані за моментною схемою скінченних елементів (МССЕ) [10-13] та зі застосуванням програмного комплексу (ПК) ЛІРА [14]. Методика [10-12] базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, положеннях МССЕ та застосуванні для тонких оболонок універсального просторового скінченного елемента (СЕ) лінійно-змінної товщини [13]. При розрахунку за ПК ЛІРА, як і в [19], скінченноелементна модель оболонки (СЕМО) моделювалася двома типами нелінійних оболонкових СЕ сталої товщини: трикутним № 344 та чотирикутним № 342. У полюсі панелі застосовувався трикутний, а на інших ділянках – чотирикутний елементи. Співвідношення для СЕ оболонки отримані на основі теорії пологих оболонок. Таким чином, досліджувані панелі лінійно-змінної товщини при розрахунках за МССЕ апроксимувалися точною СЕМО лінійно-

змінної товщини, а при розрахунках за ПК ЛПА – наближеною СЕМО ступінчасто-змінної товщини.

Для забезпечення можливості реалізації як осесиметричних, так і неосесиметричних форм деформування, СЕМО вибрана у вигляді чверті сферичної панелі з рівномірним розподілом СЕ вздовж радіусу та за колом. Для зменшення розбіжності розв'язків через наближену апроксимацію в ПК ЛПА геометрії СЕМО за розрахункову була прийнята сітка великого розміру 20x20 СЕ.

Нелінійний розв'язок за МССЕ знаходиться комбінованим алгоритмом, який поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром із ітераційною процедурою Ньютона-Канторовича на кожному кроці навантаження [15]. В ПК ЛПА застосовується кроковий нелінійний процесор, який забезпечує розв'язок лінеаризованої системи рівнянь нелінійної задачі на кожному кроці проросту вектора вузлових навантажень із врахуванням зміни геометрії конструкції при її деформуванні.

У роботах [16-19] досліджувались нелінійне деформування та стійкість пологих сферичних панелей лінійно-змінної товщини, що жорстко затиснуті вздовж контуру та навантажені рівномірним нормальним тиском інтенсивністю q (рис. 1, а). Приймалися наступні дані: вихідна (“базова”) товщина $h^* = 0.01$ м, стріла підйому $H = 5h^*$, радіус серединної поверхні $R = 1002.5h^*$, радіус опорного контуру $a = 100h^*$, модуль пружності $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

Закон лінійного розподілу товщини вздовж меридіана панелі був представлений у загальному вигляді через два визначальні параметри – товщини панелі в центрі $h_{\bar{r}=0}$ та на контурі $h_{\bar{r}=1}$

$$h(\bar{r}) = h_{\bar{r}=0} + (h_{\bar{r}=1} - h_{\bar{r}=0})\bar{r}, \quad (1)$$

де $\bar{r} = r/a$, r – радіальна координата точки панелі у плані.

Розглядалися два способи лінійної зміни товщини оболонки.

У першому способі товщина панелі в центрі $h_{\bar{r}=0}$ була зафіксована, а товщина на контурі $h_{\bar{r}=1}$ змінювалася (рис. 1, б). Ввівши безрозмірний параметр $b_o = h_{\bar{r}=1}/h_{\bar{r}=0}$, що чисельно характеризує ступінь лінійної змінності товщини від центра до контуру, функцію (1) було представлено у вигляді

$$h(\bar{r}) = h^* [1 + (b_o - 1)\bar{r}], \quad (2)$$

де за “базову” товщину панелі була прийнята товщина в її центрі ($h^* = h_{\bar{r}=0}$).

У другому способі була зафіксована товщина на контурі панелі $h_{\bar{r}=1}$, а товщина у центрі $h_{\bar{r}=0}$ змінювалася (рис. 1, в). Ввівши безрозмірний параметр $b_a = h_{\bar{r}=0}/h_{\bar{r}=1}$, що чисельно характеризує ступінь лінійної змінності товщини від контуру до центра, функцію (1) було представлено у вигляді

$$h(\bar{r}) = h^* [1 + (b_a - 1)(1 - \bar{r})], \quad (3)$$

де за “базову” товщину панелі була прийнята її товщина на контурі ($h^* = h_{\bar{r}=1}$). На всіх рисунках

кожному типу змінної товщини відповідає свій значок.

Перший спосіб лінійної зміни товщини (2) був розглянутий у роботах [16, 17], де досліджені збіжність і точність розв’язків, які були порівняні з наявним розв’язком Б.Я.Кантора [5]. У роботі [19] ці розв’язки зіставлені з результатами розрахунків за ПК ЛІРА. У всіх розглянутих задачах отримано повний їх збіг у докритичній області та незначне розходження в точках розгалуження та верхній критичній.

У даній роботі виконані порівняння розв’язків для другого способу розподілу товщини (3), який згідно досліджень [18] є більш раціональним у задачах стійкості пологих сферичних панелей лінійно-змінної товщини. Результати розрахунків, які наведені в таблиці 1 та на рис. 2 і рис. 3, подані з використанням безрозмірних

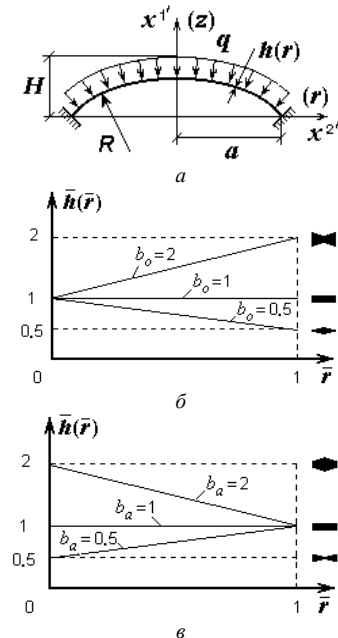


Рис. 1. Сферична панель лінійно-змінної товщини

параметрів $\bar{q} = q/E(a/h^*)^4$ та $\bar{u}^l = u^l/h^*$, де u^l – прогин центра панелі в декартовій системі координат x^i .

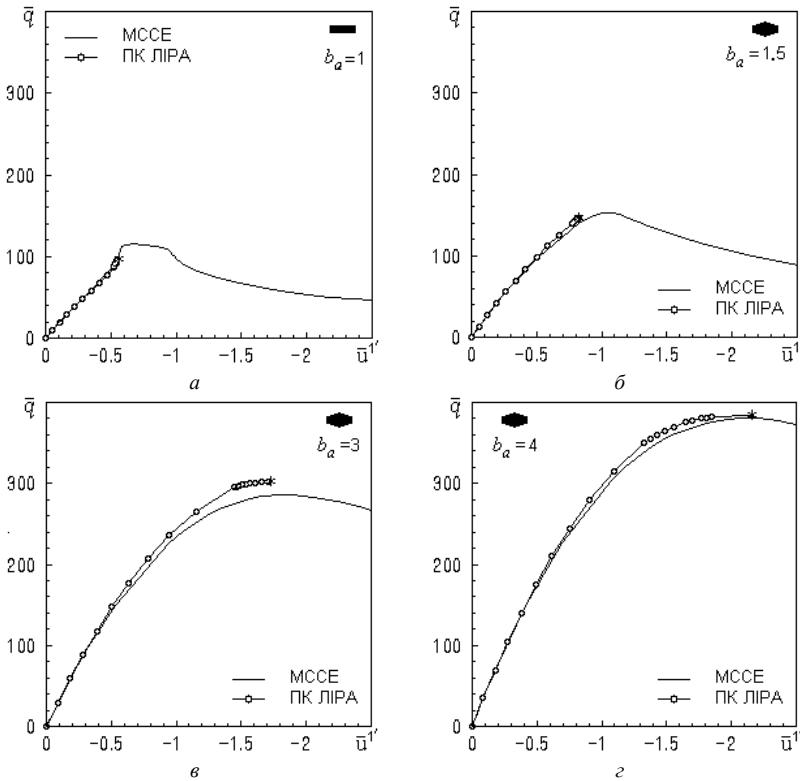


Рис. 2. Порівняння діаграм “навантаження-прогин центра панелі”

На всіх діаграмах “навантаження-прогин” спостерігається повний збіг розв’язків у докритичній області (рис. 2). Існуюче обмеження результатів ПК ЛІРА у точках розгалуження \bar{q}^* та верхній критичній $\bar{q}_{кр}^6$ (табл. 1) можна пояснити наступним. Відомо [6], що в задачах стійкості оболонок у критичних точках і в точках розгалуження нелінійних розв’язків відбувається вироджуваність матриці системи розв’язувальних рівнянь. В нелінійному процесорі ПК ЛІРА на кроці навантаження відслідковується поява від’ємних значень діагональних коефіцієнтів матриці лінеаризованої системи розв’язувальних рівнянь, тобто вироджуваність цієї матриці. На відміну від методики [10-13] аналіз типу особливих точок не виконується. Тому точка, де вироджується матриця, яка позначена на діаграмах зірочкою “*”, приймається за критичну. Саме по ній в ПК ЛІРА визначається величина

критичного навантаження. Подальший розрахунок припиняється і тому дослідження закритичного стану конструкції при застосуванні нелінійного процесора ПК ЛПА не виконується.

Таблиця 1

Порівняння розв'язків МССЕ і ПК ЛПА в особливих точках							
$b_a=1$		$b_a=1.5$		$b_a=3$		$b_a=4$	
\bar{q}^*	$\bar{q}_{кр}^e$	\bar{q}^*	$\bar{q}_{кр}^e$	\bar{q}^*	$\bar{q}_{кр}^e$	\bar{q}^*	$\bar{q}_{кр}^e$
МССЕ							
94.4	115.3	151.2	153.0	–	286.3	–	380.3
ПК ЛПА							
94.9	–	146.9	–	–	302.7	–	384.0
$\Delta, \%$							
0.5	–	-2.8	–	–	5.7	–	1.0

Аналіз по розв'язкам МССЕ особливих точок показав (табл. 1) наявність точок розгалуження тільки для панелей з $b_a=1$ ($\bar{q}^*=94.4$) та $b_a=1.5$ ($\bar{q}^*=151.2$). У цих точках розбіжність величин навантажень з відповідними величинами в розв'язках ПК ЛПА, які трактуються як критичні, становить відповідно 0.5% і 2.8%. Для панелей з $b_a=3$ і $b_a=4$ маємо гарний збіг величини верхнього критичного навантаження: розбіжність цих величин складає відповідно 5.7% і 1.0%.

Порівняння форм деформування (рис. 3), які виявились, як і в [19], осесиметричними, показало їх гарний збіг. Для панелей лінійно-змінної товщини ($b_a=1.5, 3, 4$) найбільше деформування відбувається у полюсі оболонки. Найбільше деформування панелі сталої товщини ($b_a=1$) відбувається посередині меридіану з утворенням кільцевої вм'ятини. Для панелей з параметрами $b_a=1$ і $b_a=1.5$ на рис 3, а, б продемонстрована відмінність форм деформування, що отримані за МССЕ, в точці розгалуження (\bar{q}^*) та у верхній критичній ($\bar{q}_{кр}^e$). Для панелі сталої товщини вона виявилась суттєвою: збільшення величини навантаження з \bar{q}^* до $\bar{q}_{кр}^e$ (на 18.1%) привело до зміни форми деформування панелі.

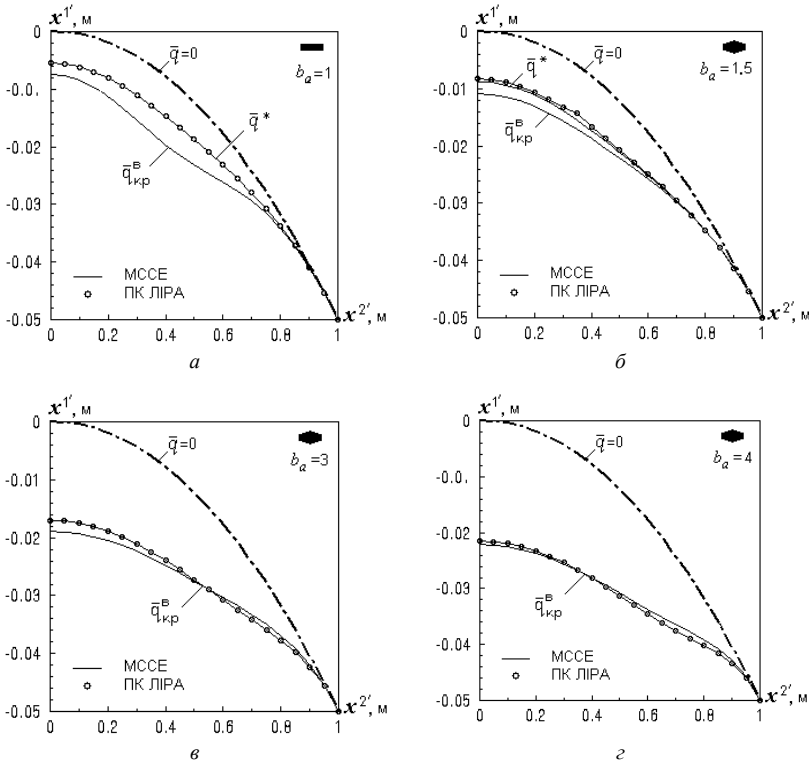


Рис. 3. Порівняння форм деформування

Гарний збіг отриманих за МССЕ та ПК ЛПРА результатів розрахунків нелінійного деформування та втрати стійкості пологих оболонок обертання сталої та різної лінійно-змінної товщини підтвердив можливість застосування ПК ЛПРА для дослідження нелінійної задачі стійкості розглянутого класу оболонок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Валлигали Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976. - 278 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.
3. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. - М.: Наука, 1978. - 360 с.
4. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. - Львов: Вища школа, 1982. - 255 с.

5. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. - К.: Наукова думка, 1974. - 136 с.
6. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюцкий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. - 480 с.
7. *Срубицкий Л.С.* Выпучивание и послекритическое поведение оболочек. - Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1981. - 96 с.
8. *Феодосьев В.И.* Об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления // Прикл. мат. и мех., 1954. - Т. 18, N 1. - С. 35-42.
9. *Шилькрут Д.И., Вырлан П.М.* Устойчивость нелинейных оболочек. - Кишинев: Штиинца, 1977. 104 с.
10. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатощарових поребриних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
11. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
12. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности, 1999. - N 5. - С. 96-102.
13. *Соловей М.О.* Модифікований просторовий скінченний елемент для моделювання тонких неоднорідних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006. - Вип. 80. - С. 96-113.
14. ЛИРА 9.2. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие./ *Е.Б.Стрелец-Стрелецкий, Ю.В.Гензерский, М.В.Лазнюк, Д.В.Марченко, В.П.Титок.* - К.: «Факт», 2005. - 146 с.
15. *Соловей Н.А.* Реализация алгоритма решения систем нелинейных уравнений в задачах устойчивости оболочек в вычислительном комплексе ПРОЧНОСТЬ-75 // Вычислительная и прикладная математика. 1987. - Вып.62. - С. 39-51.
16. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
17. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив змінної товщини на стійкість пологих панелей при дії рівномірного тиску // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Збірн. наук. праць. - Вип. 4(27).- Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2003. - С. 15-20.
18. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2003. - Вип. 72. - С. 83-96.
19. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашиков О.Б.* Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості тонких пружних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2009. - Вип. 83. - С. 40-50.

Отримано 30.07.09

Н.А. Соловей, О.П. Кривенко, А.Б. Калашников, Е.А. Тамилко

Сравнительный анализ устойчивости осесимметричных оболочек линейно-переменной толщины

Сравниваются результаты расчетов, которые выполнены по моментной схеме конечных элементов и с применением комплекса ЛИРА при решении геометрически нелинейных задач устойчивости осесимметричных сферических панелей линейно-переменной толщины.

M.O. Solovey, O.P. Kryvenko, O.B. Kalashnikov, O.A. Tamilko

Comparative analysis of a stability of axially-symmetric shells with the linearly-variable thicknesses

The outcomes of the analyses are compared which are carried out by the moment scheme of finite elements and by the complex LIRA. Solutions of geometrically nonlinear tasks of stability for axially-symmetric spherical shells with the linearly-variable thickness are compared.

УДК 539.3

О.О. Лук'яненко., канд. техн. наук

О.В.Костіна, канд. техн. наук

І.Г.Гаран, асп.

МОДЕЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ЇЇ СТІЙКОСТІ ПРИ ДІЇ КОМБІНОВАНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розроблена чисельна методика дослідження стійкості циліндричної оболонки з початковою недосконалістю форми при дії комбінованого навантаження. Початкові недосконалості оболонки моделюються у вигляді комбінацій форм втрати стійкості при дії осевого стиснення та поверхневого тиску різної амплітуди. Оцінений вплив початкових недосконалостей на критичне значення комбінованого навантаження. Визначені області стійкості циліндричної оболонки з регулярними недосконалостями.

В задачах стійкості циліндричної оболонки при окремій дії поверхневого тиску або осевого стиснення в багатьох випадках початкова недосконалість моделюється у вигляді відповідних форм втрати стійкості, бо така модель регулярних недосконалостей має значний вплив на стійкість оболонки. При дії комбінованого навантаження задача моделювання початкових недосконалостей оболонки є ще не до кінця дослідженою [1-3]. Тому актуальною є оцінка впливу різних моделей початкової недосконалості оболонки у вигляді форм втрати стійкості на критичне значення комбінованого навантаження.

В роботі розглядається циліндрична оболонка радіусом $R_{cp}=19.978$ м та висотою $H=17.88$ м. Товщина оболонки змінна по висоті через кожні 1.49 м і складає: 15,98; 14,75; 13,83; 11,66; 10,53; 9,33; 9,06; 7,86; 7,7; 7,83; 7,63; 7,83 (мм). Скінченноелементна модель оболонки формується в циліндричних координатах без урахування початкової недосконалості за допомогою сучасного обчислювального комплексу [4]. Поверхня оболонки моделюється плоскими трикутними елементами з відповідними до сталі Ст3 фізико-механічними характеристиками: $E=2,06 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0,3$. У вузлах верхньої кромки моделі оболонки накладаються в'язі, що обмежують переміщення по радіусу та колу; у вузлах нижньої кромки обмежені переміщення по трьом циліндричним координатам (по радіусу, колу та твірній).

У зв'язку з періодичністю форм втрати стійкості оболонки для розрахунків була сформована скінченноелементна модель сегменту, центральний кут якого складає $2\pi/21$ рад. Модель містить 425 вузлів і 768

плоских трикутних елементів. У вузлах граничних твірних сегменту накладені додаткові в'язі, що враховують умови симетрії.

Початкова недосконалість моделюється у вигляді комбінацій форм втрати стійкості досконалої оболонки при дії поверхневого тиску та осьового стиснення (рис. 1, а-д): $[\gamma\psi_p : (1-\gamma)\psi_q]$, де γ – безрозмірний коефіцієнт, що приймає значення (0; 0,3; 0,5; 0,7; 1), ψ_p та ψ_q – вектори форм втрати стійкості досконалої оболонки при дії осьового стиснення та поверхневого тиску відповідно. Створена програма, в якій компоненти векторів форм втрати стійкості додаються до відповідних координат серединної поверхні досконалої оболонки. При цьому компоненти векторів форм втрати стійкості задаються з масштабними коефіцієнтами таким чином, щоб максимальна амплітуда початкової недосконалості дорівнювала півтори мінімальній товщині стінки оболонки $\Delta_{\max}=1,5t_{\min}=1,5 \cdot 7,63=11,4\text{мм}$.

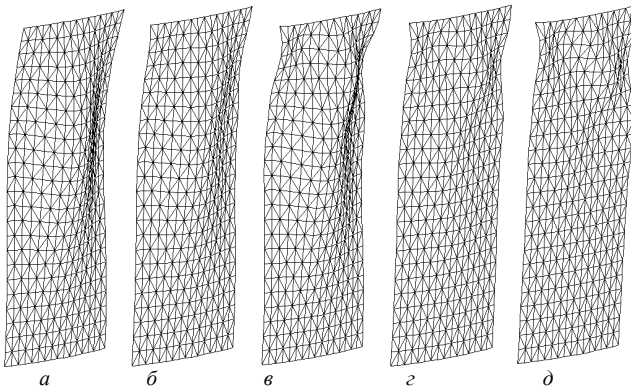


Рис. 1. Скінченноелементна модель сегменту оболонки з різними моделями початкової недосконалості

Оцінка впливу моделі початкової недосконалості оболонки на значення комбінованого навантаження при втраті стійкості виконується за допомогою методу покрокового навантаження при розв'язанні нелінійної задачі статyki. Комбіноване навантаження задається у вигляді $\beta[\alpha P_{кр}^0; (1-\alpha)q_{кр}^0]$, де α – безрозмірний коефіцієнт, що приймає значення [0; 0,3; 0,5; 0,7; 1], β – безрозмірний параметр, який змінюється від 0 до 1. Критичні значення осьового стиснення $P_{кр}^0$ та поверхневого тиску $q_{кр}^0$ визначені при розв'язанні задачі стійкості досконалої оболонки і складають 430598 Н/м та 1230,4 Н/м² відповідно. На кожному кроці навантаження за допомогою методу Ньютон-Рафсона знаходяться розв'язки рівняння рівноваги до забезпечення умови

збіжності по зміні нев'язки навантаження та по роботі внутрішніх сил на приростах вузлових переміщень. В результаті отримані криві навантаження, форми деформування і відповідні напруження оболонки з заданими моделями початкової недосконалості (рис. 1, а-д) при дії комбінованого навантаження.

Представлені криві навантаження та форми деформування сегменту для комбінації навантаження $[0,5P_{кр}^0; 0,5q_{кр}^0]$ з початковою недосконалістю оболонки, яка моделюється у вигляді форми втрати стійкості досконалої оболонки при дії поверхневого тиску (рис. 2, а), комбінацій форм втрати стійкості досконалої оболонки при дії поверхневого тиску та осьового стиснення в пропорції $[0,5\psi_p; 0,5\psi_q]$ (рис. 2, б), форми втрати стійкості досконалої оболонки при дії осьового стиснення (рис. 2, в).

Втрата стійкості оболонки відбувається при навантаженні, що значно менше за критичне комбіноване навантаження досконалої оболонки. Більші деформації спостерігаються у верхніх елементах моделі оболонки, де стінка є тоншою.

Результати розрахунків визначення критичного комбінованого навантаження оболонки з різними моделями її початкової недосконалості зведені в табл. 1. Втрата стійкості відбувається при навантаженні $\beta^{гран} [\alpha P_{кр}^0; (1-\alpha)q_{кр}^0]$, де $\beta^{гран}$ – параметр критичного навантаження.

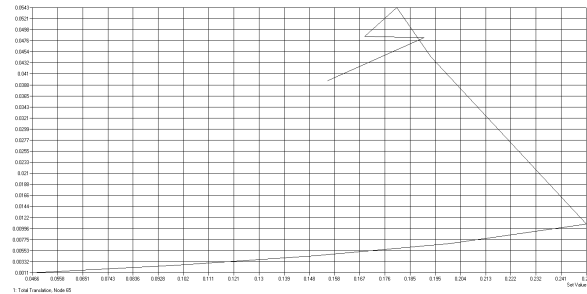
Таблиця 1

Коефіцієнт α	Параметр критичного навантаження $\beta^{гран}$ при моделюванні початкової недосконалості оболонки у вигляді форм втрати стійкості				
	поверхневий тиск	комбінація 0,3:0,7	комбінація 0,5:0,5	комбінація 0,7:0,3	осьове стиснення
0	0,4	0,492	0,598	0,5	0,821
0,3	0,25	0,25	0,25	0,25	0,243
0,5	0,25	0,25	0,259	0,25	0,25
0,7	0,3	0,3	0,278	0,3	0,268
1	0,4	0,35	0,3	0,35	0,275

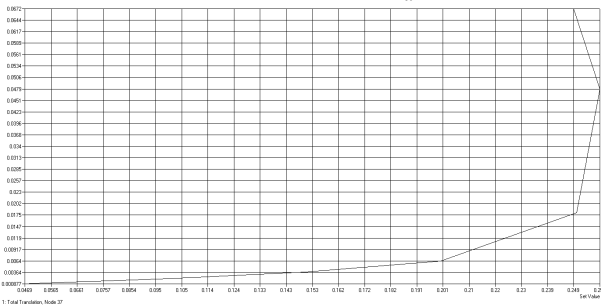
На рис. 3 представлена залежність параметра критичного навантаження $\beta^{гран}$ від коефіцієнта комбінованого навантаження α для різних моделей початкової недосконалості оболонки.

Відоме твердження про те, що при окремій дії поверхневого тиску або осьового стиснення на оболонку початкову недосконалість необхідно моделювати у вигляді форм втрати стійкості оболонки при дії відповідних навантажень, підтверджено в даній роботі. Видно, що при дії поверхневого тиску критичне навантаження зменшується на 60% для оболонки з

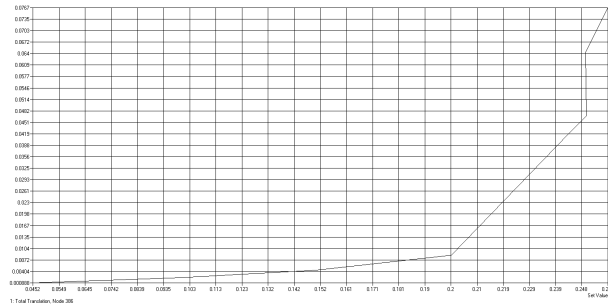
недосконалістю у вигляді форми втрати стійкості при дії поверхневого тиску, а модель недосконалості у вигляді форми втрати стійкості при дії осьового стиснення зменшує критичне значення лише на 20%. Так само, при дії осьового стиснення на оболонку недосконалість у вигляді відповідної форми втрати стійкості зменшує критичне навантаження на 73%, для моделі недосконалості у вигляді форми втрати стійкості при поверхневому тиску зменшує критичне навантаження на 60%.



a



б



в

Рис. 2. Криві навантаження та форми деформування при втраті стійкості сегмента недосконалої оболонки

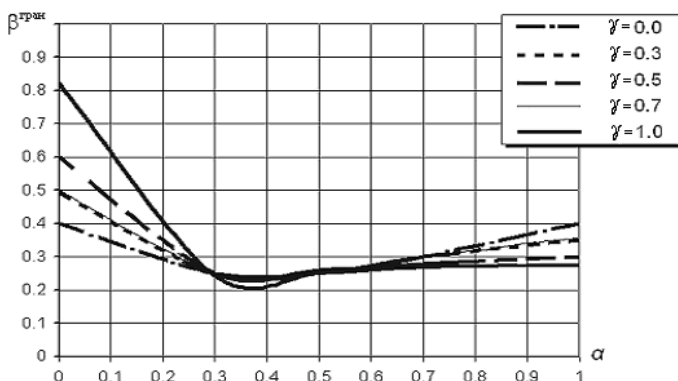


Рис. 3. Залежність параметра критичного навантаження $\beta^{\text{гран}}$ від коефіцієнта комбінованого навантаження α .

Коли навантаження є сумісною дією поверхневого тиску та осьового стиснення вплив моделей недосконалостей не є однозначним. Так при дії комбінованого навантаження з коефіцієнтом $\alpha=(0\div 0.3)$ недосконалисть у вигляді форми втрати стійкості при дії поверхневого тиску впливає на критичне навантаження більше за інші моделі. При коефіцієнтах комбінованого навантаження $\alpha>(0.3\div 1)$ спостерігається більший за інші вплив моделі недосконалості у вигляді форми втрати стійкості оболонки при дії осьового стиснення. Моделі недосконалостей оболонки у вигляді комбінацій форм втрати стійкості менше впливають на критичне навантаження ніж моделі у вигляді форм втрати стійкості при окремій дії поверхневого тиску та осьового стиснення.

Для побудови області стійкості оболонки з регулярними недосконалостями при дії комбінованого навантаження визначені критичні сполучення значень осьового стиснення та поверхневого тиску для різних моделей початкової недосконалості. У табл. 2 наведені критичні значення комбінованого навантаження, які віднесені до критичних значень отриманих для досконалої оболонки.

На рис. 4 представлена діаграма областей стійкості оболонки при дії комбінованого навантаження. По осі ординат відкладене відношення критичного поверхневого тиску недосконалої оболонки до критичного поверхневого тиску досконалої оболонки. По осі абсцис - відношення критичного осьового стиснення недосконалої оболонки до критичного осьового стиснення досконалої оболонки.

Таблиця 2

Критичні значення комбінованого навантаження [$P_{кр}/P_{кр}^0; q_{кр}/q_{кр}^0$] при різних моделях недосконалості оболонки				
поверхневий тиск	комбінація [0,3;0,7]	комбінація [0,5;0,5]	комбінація [0,7;0,3]	осьове стиснення
[0; 0,4]	[0; 0,492]	[0; 0,598]	[0; 0,5]	[0; 0,821]
[0,075; 0,175]	[0,075; 0,175]	[0,075; 0,175]	[0,075; 0,175]	[0,073; 0,17]
[0,125; 0,125]	[0,125; 0,125]	[0,13; 0,13]	[0,125; 0,125]	[0,125; 0,125]
[0,21; 0,09]	[0,21; 0,09]	[0,195; 0,083]	[0,21; 0,09]	[0,188; 0,08]
[0,4; 0]	[0,35; 0]	[0,3; 0]	[0,35; 0]	[0,275; 0]

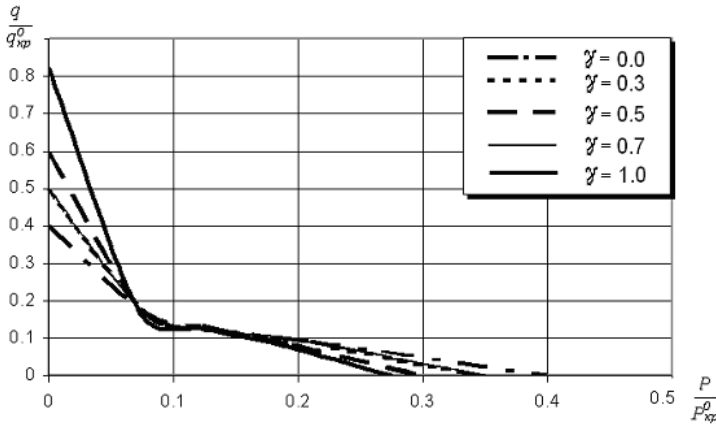


Рис. 4. Діаграма областей стійкості циліндричної недосконалої оболонки при дії комбінованого навантаження

Видно, що області стійкості для оболонки з різними моделями регулярних недосконалостей є різними. Вплив моделей недосконалостей не є пропорційним до відповідних комбінацій навантажень. Тому при дослідженні стійкості оболонки змінної товщини при дії комбінованого навантаження слід враховувати всі моделі її початкової недосконалості (рис. 1), а областю стійкості оболонки вважати область, яка знаходиться між осями координат та лінією, що огинає знизу отримані криві.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807с
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 880 с.
3. Гоцуляк С.О., Барвінко А.Ю., Лук'яненко О.О., Костіна О.В., Шах В.В. Оцінка впливу початкових недосконалостей циліндричних оболонок резервуарів на їх стійкість при дії бокового тиску //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. – 2008. – № 82. – С. 48-54.
4. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.– 448 с.

Отримано 25.08.09

О.А. Лукьяненко, Е.В. Костина, И.Г. Гаран

Моделирование начальных несовершенств цилиндрической оболочки переменной толщины при исследовании ее устойчивости под действием комбинированного нагружения

Разработана численная методика исследования устойчивости цилиндрической оболочки с начальным несовершенством формы при действии комбинированной нагрузки. Начальные несовершенства оболочки моделируются в виде комбинаций форм потери устойчивости при действии осевого сжатия и поверхностного давления разной амплитуды. Оценено влияние начальных несовершенств на критическое значение комбинированной нагрузки. Определены области устойчивости цилиндрической оболочки с регулярными несовершенствами.

O.O. Lukianchenko, O.V. Kostina, I.G. Garan

A design of initial imperfections of cylindrical shell with variable thickness is at investigate of its stability under combined loading

The numerical technique for research of stability of cylindrical shell with the initial defect of form under combined loading is developed. Initial imperfections of shell are designed as combinations of forms of loss of stability at the action of axial compression and superficial pressure of different amplitude. Influence of initial imperfections on the critical value of the combined loading is evaluated. The areas of stability of cylindrical shell with regular imperfections are defined.

УДК 539.375

О.О. Шкриль, канд.техн.наук

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ J -ІНТЕГРАЛА В ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЯХ МЕТОДА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянуті методи обчислення величини J -інтеграла Черепанова-Райса в дискретних моделях метода скінчених елементів (МСЕ), наведені результати розв'язання тестових задач.

Вступ.

На сучасному етапі розвитку механіки руйнування серед параметрів що дають можливість описувати напружено-деформований стан (НДС) в околі вершини тріщини найбільшого застосування набув J -інтеграл Черепанова-Райса. До найбільш поширених методів його обчислення в дискретних моделях МСЕ можна віднести безпосереднього інтегрування за величинами напружень та градієнтів переміщень, метод реакцій, об'ємного еквівалентного інтегрування, віртуального росту тріщини. Найбільшого розповсюдження набули два останні методи. Ефективність їхнього застосування відображена в достатній кількості літературних джерел [1,5,9,10,11,13]. В роботах [8,12] зазначаються недоліки цих методів, які полягають в тому, що значення отриманого J -інтеграла виявляються залежними від прийнятого контуру інтегрування. В даній роботі розглянуті перші два метода обчислення J -інтеграла Черепанова-Райса в дискретних моделях МСЕ. Показані межі ефективного застосування кожного з двох підходів.

1. Обчислення J -інтеграла за величинами напружень та градієнтів переміщень.

В кожній точці фронту тріщини величина J -інтеграла обчислюється за довільною поверхнею F , що обрана в околі зазначеної точки, охоплює фронт тріщини і має характерний розмір Δ вздовж фронту тріщини (рис.1). При цьому для обчислення J -інтеграла використовується вираз, отриманий на основі гіпотез про суцільність середовища, де розповсюджується тріщина, і співвідношень теорії пружності:

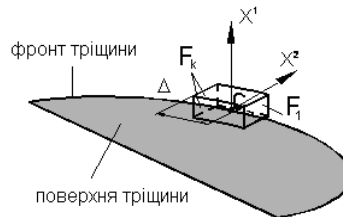


Рис.1. Поверхня інтегрування в точці визначення J -інтеграла

$$J = \frac{1}{\Delta} \int_F \left(W n_t - \bar{n} \cdot \bar{\sigma} \cdot (\bar{\nabla} u)^T \cdot \bar{t} \right) dF, \quad (1)$$

де W – величина повної енергії деформування, в загальному випадку $W = \int_0^{\bar{\varepsilon}} \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon}$, при пружному деформуванні $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$; $\bar{\sigma}$ – тензор напружень, $\bar{\varepsilon}$ – тензор деформацій, \bar{n} – зовнішня нормаль до поверхні інтегрування F ; \bar{t} – вектор, що визначає напрямок розвитку тріщини в точці фронту, де обчислюється J -інтеграл; n_t – проекція нормалі \bar{n} на напрямок вектора \bar{t} ; $\bar{\nabla} u$ – градієнт переміщень.

Поверхня для обчислення J -інтеграла в околі кожної з точок фронту тріщини буде складатися з контурної (F_k) та двох бічних (F_1 і F_2) поверхонь

$$J = \frac{1}{\Delta} (J_{F_k} + J_{F_1} + J_{F_2}).$$

При скінченно-елементному обчисленні J -інтеграла за формулою (1) для виконання інтегрування обирається контур S , який лежить в площині, перпендикулярній до фронту тріщини (рис. 2). В місцевій системі координат контур має прямокутну форму і проходить через центри СЕ. Рекомендації щодо вигляду привершинної області через яку має проходити контур інтегрування наведені в [7]. В межах кожного елемента інтегрування здійснюється за віссю, вздовж якої контур перетинає СЕ. У межах тих СЕ, що містять кутові точки контуру, інтегрування проводиться за двома ділянками, що відповідають напрямкам осей із урахуванням відповідних проекцій нормалі до контуру \bar{n} на вектор напрямку розвитку тріщини \bar{t} .

З урахуванням скінченно-елементної дискретизації тіла, покомпонентне подання J -інтеграла у виразі (1) буде мати наступний вигляд:

$$J = \sum_{i=1}^{N_e + n_e} \left(W t^j n_j - n_m \sigma^{mn} \nabla_k u_n t^k \right) ds_i,$$

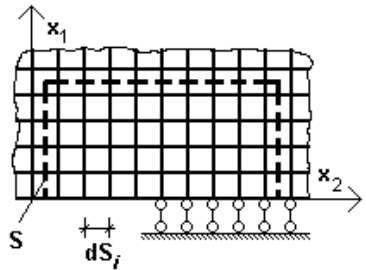


Рис. 2. Контур інтегрування при обчисленні J -інтеграла в дискретних моделях МСЕ

де N_e – загальна кількість СЕ, крізь які проходить обраний для обчислення J -інтеграла контур; n_e – кількість СЕ, що містять кутові точки контуру; ds_i – довжина відрізка контуру в межах i -го СЕ; W – енергія деформування тіла (системи з N_e СЕ):

$$W = \sum_{i=1}^{N_e} W_i = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\sqrt{g}}{2} \sigma^{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Як показали дослідження проведені в [2,4] обчислення J -інтеграла за допомогою напружень та градієнтів переміщень ефективно проводити при розв'язанні двовимірних задач. При розв'язанні певного класу просторових задач значення J -інтеграла починають залежати від розмірності обраного контуру інтегрування. В таких випадках для отримання достовірних значень J -інтеграла необхідно значно згущувати дискретну модель і накладати певні обмеження на контур інтегрування.

2. Обчислення J -інтеграла методом реакцій.

Згідно з методом реакцій величина J -інтеграла незалежно від розмірності контуру інтегрування може бути отриманою за наступною формулою:

$$\begin{aligned} J_{II} = & \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j \{R\}_j - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j \{R\}_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_1} \left(R^{k'} \frac{(\{u_{k'}\}_3 + \{u_{k'}\}_4) - (\{u_{k'}\}_1 + \{u_{k'}\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(R^{k'} \frac{\{u_{k'}\}_4 - \{u_{k'}\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_3} \left(R^{k'} \frac{(\{u_{k'}\}_3 + \{u_{k'}\}_4) - (\{u_{k'}\}_1 + \{u_{k'}\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j, \end{aligned}$$

де N_1, N_2, N_3 – кількість ділянок обчислення інтеграла на відповідних

контурах S_1, S_2, S_3 (рис. 3,а); $\{u\}_j = \left\{ \{u_{k'}\}_i \right\}$, $\{R\}_j = \left\{ \{R_{k'}\}_i \right\}$ – вектори

переміщень та реакцій двох вузлів i , що відносяться до даного контуру, за напрямком k' вісєй базисної системи координат z^k (рис. 3, б).

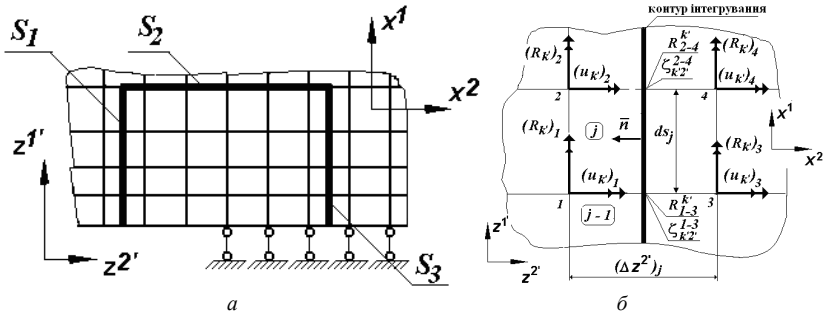


Рис.3. Контур інтегрування в дискретній моделі

Необхідною умовою для застосування методу реакцій є рівномірність дискретної моделі (що потрапляє в область інтегрування) вздовж лінії тріщини. Більш детально ідеологія методу реакцій викладена в роботах [2-4].

Проведені дослідження [2-4] показали, що значення J -інтеграла отримані методом реакцій дійсно не залежать від прийнятого контуру інтегрування як при лінійному, так і нелінійному деформуванні просторових тіл.

В якості прикладу в даній роботі наведено результати розв'язання задачі про деформування компактного зразка (рис. 4) [6] виготовленого зі сталі 12Х2МФА, для якої $E = 2.05 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, а закон пластичного деформування має вигляд:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_m} = 1 + 0.645(\bar{\epsilon}_p)^{0.388},$$

$$\sigma_m = 637 \text{ МПа}.$$

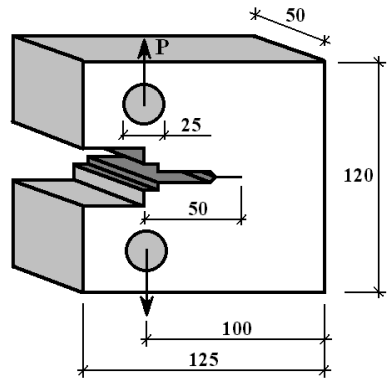


Рис. 4. Компактний зразок

Розв'язання задачі в двовимірній постановці показало, що значення J -інтеграла отримані при різних рівнях навантаження співпадають з еталонним розв'язком (рис. 5). Розв'язання задачі в просторовій постановці показало, що розподіл J -інтеграла вздовж фронту тріщини є нерівномірним (рис. 6).

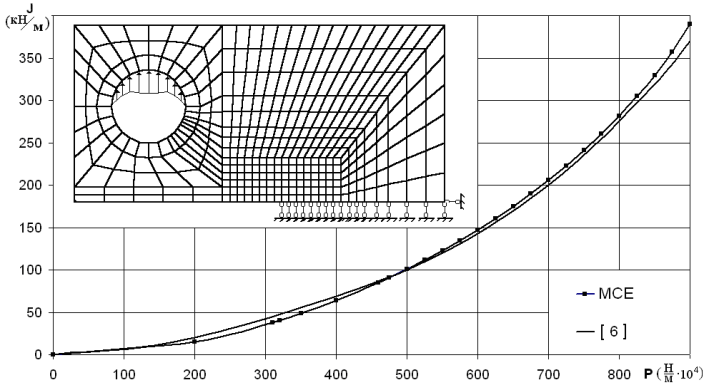


Рис.5. Результати розв'язання задачі про деформування компактного зразка з тріщиною в двовимірній постановці

Як можна побачити з графіків із збільшенням рівня навантаження, і відповідно деформації пластичності, ця нерівномірність збільшується, як і збільшується різниця між значеннями J -інтеграла отриманого в результаті двовимірного і тривимірного розрахунків. Тому розв'язання таких задач необхідно проводити в тривимірній постановці.

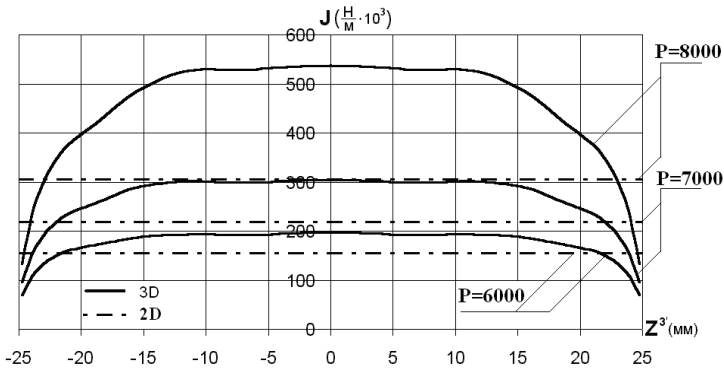


Рис.6. Розподіл J -інтеграла вздовж фронту тріщини при зростанні рівня навантаження

Проведений аналіз двох методів обчислення J -інтеграла в дискретних моделях виявив, що найбільш ефективним та універсальним є метод реакцій, оскільки на відміну від першого методу він потребує дискретних моделей із значно меншою кількістю невідомих, і не залежить від розмірності контуру інтегрування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлурі С.* Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Особливості визначення J -інтеграла для дискретних моделей метода скінченних елементів. //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2005.- Випуск .77. с.3-25.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Метод реакцій для обчислення J -інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування . //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2006.- Випуск .79. с.3-17.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль А.А.* Метод определения независимых от пути величин J -интеграла в линейных и нелинейных задачах механики разрушения //Прикладная механика. – К., 2008.- N.12. с.3-25.
5. *Вайншток В.А.* Расчет весовых функций и J -интегралов для несимметричных задач механики разрушения модифицированным методом виртуального роста трещины // Пробл. прочности. – 1981. – № 8. – С.102–104.
6. *Морозов Е.М., Никшиков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 256 с.
7. *Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел / В.А. Баженов, А.И. Гуляр, А.С. Сахаров, А.Г. Топор.* – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
8. *Русаків А.В., Тарасов Ю.Л.* Расчетно-экспериментальная методика обеспечения надежности элементов конструкций летательных аппаратов с учетом условий эксплуатации //Вестн. Самар. Гос. Техн. Ун-та., сер. физ.-мат. науки – 2000. – № 9. – С.56-77.
9. *de Lorenci H.G.* On the Energy Release Rate and J -integral of 3–D Crack Configurations. – Int. Journal of Fracture. – Vol.19. – 1982. – pp.183–193.
10. *de Lorenci H.G.* Energy Release Rate Calculations by the Finite Element Method. – Engineering Fracture Mechanics. – Vol.21. – 1985. – pp.129–143.
11. *Li F., Shih C., Needleman A.* A comparison of methods for calculating energy release rates // Eng. Fract. Mech. – 1985. – V.21. – P.405-421.
12. *Kim Yun-Jae, Kim J., Park Y., Kim Young-Jin* Elastic–plastic fracture mechanics method for finite internal axial surface cracks in cylinders // Engineering Fracture Mechanics. – 2004. – V.71. – P.925–944.
13. *Nikishkov G., Atluri S.* An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermo-mechanical fracture // Eng. Fract. Mech. – 1987. – V.26. – N.6. – P.851-867.

Отримано 03.08.09

А.А. Шкріль

Методи определения J -интеграла в дискретных моделях метода конечных элементов

Рассмотрены методы вычисления величины J -интеграла Черепанова-Райса в дискретных моделях метода конечных элементов (МКЭ), приведены результаты решения тестовых задач.

О.О. Шкріль

The methods of determination of J -integral in the discrete models of finites elements

The methods of sizes calculation of Cherepanov-Rice's J -integral in the discrete models of method finite elements are considered. The results of test problems decision are given.

УДК 539.3

І.В. Хромов, канд. техн. наук

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ МЕХАНІКИ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО СТРИЖНЯ З ВРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ

Для задач складного навантаження стрижня представлені математичні моделі та універсальна процедура визначення напружень на основі розв'язання диференціальних рівнянь течії з врахуванням нелінійних властивостей матеріалу. Наведені приклади чисельного вирішення технологічних задач.

Механіка пружнопластичного стрижня є одним з важливих розділів загальної механіки деформівного твердого тіла, якій постійно розвивається. Аналіз сучасного стану теорії показує, що задачі вказаного розділу доцільно розділити на два класи: задачі, які пов'язані з оцінкою міцності або несучої здатності стрижневих конструкцій (будівельна механіка) [1–4] та задачі дослідження процесів незворотної пружнопластичної формозміни стрижня при силовій обробці (технологічна механіка) [5–8].

Для задач будівельної механіки історія деформації або навантаження не має істотного значення. Тут сповна обґрунтовано використовується деформаційна теорія пластичності, згідно якої зв'язок напружень і деформацій матеріалу описується скінченими аналітичними функціями, не залежними від порядку прикладання сил. Більшість задач цього розділу можуть розв'язуватися на основі методу скінчених елементів з використанням відомих програмних продуктів.

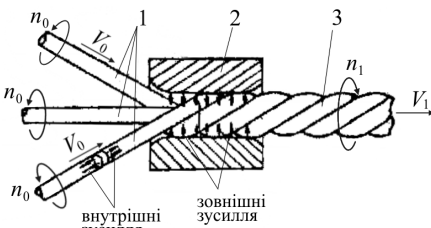


Рис. 1. Схема процесу виготовлення кручених виробів

В технологічній механіці стрижень розглядається як довгомірна заготовка, яка в процесі стаціонарного подовжнього руху під впливом робочих органів технологічного обладнання піддається складній пластичній деформації одночасного розтягу, кручення й гнуття. Характерним прикладом є представлений на рис. 1 процес

виготовлення багатодровових кручених виробів (сталеві канати, кабелі, металокорд).

В даному випадку напружений стан та форма стрижня, тобто технічні параметри готового виробу істотно залежать від історії його деформації на різних етапах технологічного процесу. Ефективне математичне моделювання подібних процесів можливе лише на основі диференціальних рівнянь пластичної течії [9] та потребує розробки спеціальних алгоритмів, методик і програмних продуктів. До теперішнього часу для вирішення подібних задач використовувалися найбільш прості моделі: матеріал без зміцнення або матеріал з лінійним зміцненням [6-8, 10]. На кафедрі технічної механіки і машинознавства Севастопольського національного технічного університету в останні п'ять років виконується цикл робіт по розвитку теоретичних основ механіки пружнопластичного стрижня на випадок матеріалу з нелінійним зміцненням.

Мета цієї роботи – класифікація задач та розробка узагальненої методики математичного моделювання об'єктів технологічної механіки з врахуванням нелінійного характеру зміцнення матеріалу. Розглянемо обмеження, передумови й базові математичні співвідношення, які використовуються для розв'язання вказаного класу задач. Відзначимо, що у сфері канатного й кабельного виробництва найчастіше застосовується стрижньова заготівля з круглою формою поперечного перерізу (круглий дріт), тому для побудови прикладних методик традиційно використовують гіпотезу плоских перерізів. Вводиться також припущення про те, що матеріал стрижня в довільній точці поперечного перерізу (рис. 2) піддається деформації подовження ε і зсуву γ , а на елементарній площадці dF діє нормальне σ і дотичне τ напруження (плоский напружений стан) [6].

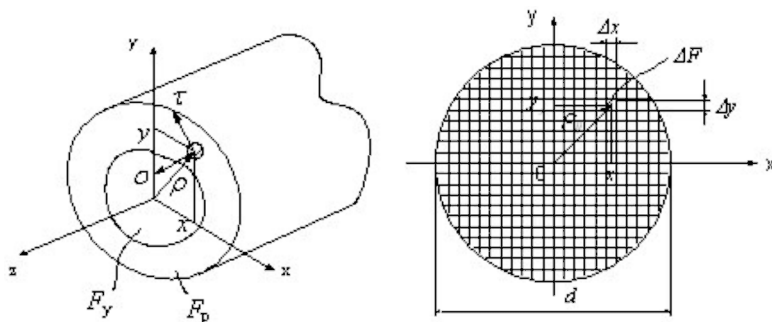


Рис. 2. Схема напруженого стану і дискретна модель поперечного перерізу стрижня

Для опису механічного стану стрижня в малій околиці заданого поперечного перерізу використовують вісім параметрів:

- параметри деформації подовжньої осі стрижня ε_0 , k_x , k_y , θ – відносне подовження, дві кривизни і кручення, відповідно;
- інтегральні внутрішні зусилля (внутрішні силові фактори) в заданому поперечному перерізі стрижня N , M_x , M_y , $M_{кр}$ – подовжня сила, два моменти гнуття і крутний момент, відповідно.

Всі задачі технологічної механіки можна розділити на три основні види:

- 1) пряма задача – по заданих рівняннях траєкторії деформації подовжньої осі стрижня $\varepsilon_0(t)$, $k_x(t)$, $k_y(t)$, $\theta(t)$ (t – деякий параметр технологічного процесу) знайти напруження σ , τ та внутрішні силові фактори N , M_x , M_y , $M_{кр}$ у заданому поперечному перерізі при довільному значенні параметра t ;
- 2) зворотня задача – по заданих рівняннях траєкторії навантаження стрижня $N(t)$, $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_{кр}(t)$ визначити параметри деформації його подовжньої осі ε_0 , k_x , k_y , θ та напруження σ , τ у заданому поперечному перерізі при довільному значенні параметра t ;
- 3) змішана задача – в умові міститься часткова інформація про параметри деформації подовжньої осі стрижня ε_0 , k_x , k_y , θ та часткова інформація про внутрішні силові фактори N , M_x , M_y , $M_{кр}$. Необхідно знайти невідомі параметри деформації подовжньої осі стрижня, напруження й внутрішні силові фактори для довільного етапу техпроцесу.

Розглянемо базові математичні співвідношення, необхідні для вирішення вказаних задач. Зв'язок деформацій матеріалу в довільній точці поперечного перерізу ε , γ та параметрів деформації подовжньої осі стрижня ε_0 , k_x , k_y , θ описується згідно з гіпотезою плоских перерізів простими формулами [4]:

$$d\varepsilon = d\varepsilon_0 + y \cdot dk_x - x \cdot dk_y; \quad d\gamma = \rho \cdot d\theta. \quad (1)$$

При описі напруженого стану стрижня площу його поперечного перерізу розділяємо на дві частини (рис. 2): F_y – ділянка пружного стану матеріалу, F_p – ділянка пластичної течії. У пружній ділянці прирости деформацій і напруг пов'язані законом Гука:

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon; \quad d\tau = G \cdot d\theta. \quad (2)$$

Математичне моделювання пластичного стану матеріалу в рамках даної роботи виконувалося на основі загальних методів теорії пластичної

течії. Для прийнятої моделі матеріалу з нелінійним ізотропним зміцненням отримані наступні диференціальні залежності (фізичні рівняння механічного стану) [11,12]

$$\begin{aligned}d\sigma &= E[(1 - K(\Gamma)\sigma^2)d\varepsilon - K(\Gamma)\sigma\tau d\gamma], \\d\tau &= \frac{E}{3}[-K(\Gamma)3\sigma\tau d\varepsilon + (1 - K(\Gamma)3\tau^2)d\gamma],\end{aligned}\quad (3)$$

де $K(\Gamma) = \frac{1 - \lambda(\Gamma)}{3T(\Gamma)^2}$ – функція зміцнення; Γ – інтенсивність деформації зсуву; $T(\Gamma)$ – інтенсивність дотичних напружень; $\lambda(\Gamma)$ – функція для коефіцієнта зміцнення матеріалу, яка визначається на основі аналізу експериментальної діаграми розтягу; E – модуль пружності при розтягу. Перехід матеріалу з пружного в пластичний стан контролюється на основі умови пластичності Мізеса $\sigma^2 + 3\tau^2 = T^2$.

Внутрішні силові фактори N , M_x , M_y , $M_{кр}$ при заданих поточних значеннях нормального і дотичного напруження σ , τ визначаються за допомогою інтегралів [4]:

$$N = \int_F \sigma \cdot dF, \quad M_x = \int_F \sigma \cdot y \cdot dF, \quad M_y = - \int_F \sigma \cdot x \cdot dF, \quad M_{кр} = \int_F \tau \cdot \rho \cdot dF, \quad (4)$$

де F – площа поперечного перерізу стрижня; x , y , ρ – координати центру ваги елементарної площадки dF (рис. 2).

Комплект рівнянь (1) – (4) достатній лише для розв'язання задач першого виду (прямі задачі). Для зворотної і змішаної задач необхідні додаткові співвідношення, що описують зв'язок нескінченно малих приростів внутрішніх силових факторів dN , dM_x , dM_y , $dM_{кр}$ та параметрів деформації подовжньої осі стрижня $d\varepsilon_0$, dk_x , dk_y , $d\theta$ [6,10]. Такі співвідношення виводяться на основі фізичних рівнянь механічного стану конкретного матеріалу і мають вигляд інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}dN &= G_{11}d\varepsilon_0 + G_{12}dk_x + G_{13}dk_y + G_{14}d\theta, \\dM_x &= G_{21}d\varepsilon_0 + G_{22}dk_x + G_{23}dk_y + G_{24}d\theta, \\dM_y &= G_{31}d\varepsilon_0 + G_{32}dk_x + G_{33}dk_y + G_{34}d\theta, \\dM_{кр} &= G_{41}d\varepsilon_0 + G_{42}dk_x + G_{43}dk_y + G_{44}d\theta.\end{aligned}\quad (5)$$

Узагальнені коефіцієнти жорсткості стрижня G_{ij} є інтегральними функціями від напруг. Для прийнятої моделі матеріалу (3) можна записати наступні формули%:

$$G_{ij} = G_{ij}^y - E \int_{F_p} K(\Gamma) \cdot f_{ij}(\sigma, \tau, x, y) dF, \quad (6)$$

де G_{ij}^y – пружні коефіцієнти жорсткості стрижня; $f_{ij}(\sigma, \tau, x, y)$ – деякі функції, залежні від напружень і координат в поточній точці поперечного перерізу стрижня.

З (1)–(6) видно, що методика розв’язання задач технологічної механіки для матеріалу з нелінійним зміцненням може бути побудована виключно на основі чисельних методів. Поперечний переріз стрижня розбиваємо прямокутною сіткою на скінчене число елементарних площадок (рис. 2) і інтеграли в (4), (6) замінюємо скінченими сумами. Питання точності вказаної дискретної моделі детально досліджені й викладені в роботі [13]. Для розв’язання диференціальних рівнянь пластичної течії (3) запропонований спеціальний метод, згідно з яким скінчене прирощення шуканої функції визначається не по дотичній до її графіка, як в методі Ейлера, а по дузі кола [14]. Розроблена також універсальна процедура для комп’ютерних програм, що дозволяє зберігати й обробляти інформацію про поточний стан матеріалу у всіх елементарних площадках поперечного перерізу стрижня, контролювати перехід матеріалу з пружного стану в пластичне, а також виконувати перерахунок масивів напружень згідно з (2) або (3) та узагальнених коефіцієнтів жорсткості стрижня (6) на кожному кроці досліджуваного процесу. Нижче наведено два тестові приклади розв’язання прямої та змішаної задач з використанням описаної методики.

Приклад розв’язання прямої задачі. Стрижень у вигляді тонкостінного циліндру з конструкційної вуглецевої сталі (рис. 3) піддається двом етапам деформації: пружний розтяг до відносного подовження $\epsilon_1 = 0,005$ та подальший чистий зсув до деформації $\gamma_2 = 0,035$ (ламана траєкторія деформації).

Аналіз зміни напруженого стану виконаний для трьох варіантів моделі матеріалу:

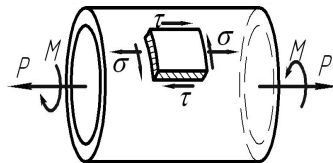


Рис.3. Схема навантаження тонкостінного циліндру

- без зміцнення $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{T1}, E\varepsilon, \sigma_{T1})$, де $\sigma_{T1} = 1608$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\lambda = 0$;

- з лінійним зміцненням $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{T2}, E\varepsilon, \sigma_{T2} + \lambda \cdot E(\varepsilon - \varepsilon_{T2}))$, де $\sigma_{T2} = 1406$ МПа, $\lambda = 0,1$;

- з нелінійним зміцненням $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{T3}, E\varepsilon, \sigma_{T3} + \sigma_0(1 - a^{\gamma(\varepsilon - \varepsilon_{T3})}))$, де $\sigma_{T3} = 1009$ МПа, $\sigma_0 = 723$ МПа, $a = 0,376$, $\gamma = 213$.

На першому етапі деформації циліндру напруги визначаються згідно із законом Гука. В процесі другого етапу, залежно від прийнятої розрахункової моделі, матеріал може переходити з пружного стану в пластичний. Для розрахунку напружень використовуємо диференціальні рівняння пластичної течії (3), вважаючи: для моделі без зміцнення $\lambda(\Gamma) = 0$; для моделі з лінійним зміцненням $\lambda(\Gamma) = const = \lambda$. Розрахунки і графічну обробку результатів виконували з використанням комп'ютерних технологій. На рис. 4. показані розрахункові залежності нормального і дотичного напруження від деформації зсуву в другому етапі процесу.

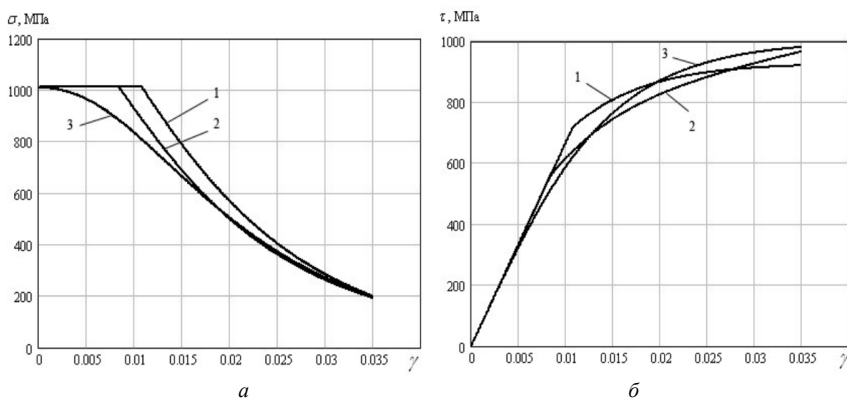


Рис. 4. Розрахункові залежності зміни нормальної *a*) і дотичної *б*) напруг для різних варіантів моделі зміцнення: 1 – без зміцнення; 2 – лінійне зміцнення; 3 – нелінійне зміцнення.

Видно, що нормальні напруження в процесі пластичної деформації зсуву зменшуються, а дотичні – збільшуються. На основі отриманого розв'язку вперше дана кількісна оцінка впливу типу використовуваної моделі зміцнення на точність розрахунку, розбіжність розрахункових даних може складати до 20 %.

Приклад розв'язання змішаної задачі. Суцільний круглий стрижень (дріт діаметром $D = 1,22$ мм) з конструкційної вуглецевої сталі жорстко закріплений в лівому перерізі (рис. 5). з нелінійним зміцненням. Поведінка сталі описується комбінованою нелінійною функцією

$\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{T3}, E\varepsilon, \sigma_{T3} + \sigma_0(1 - a^{\gamma(\varepsilon - \varepsilon_{T3})}))$, де $\sigma_{T3} = 1009$ МПа, $\sigma_0 = 723$ МПа, $a = 0,376$, $\gamma = 213$. На першому етапі до правого кінця стрижня прикладається подовжня сила N . На другому етапі стрижню надають деформацію кручення, що зростає від 0 до деякого значення θ при збереженні постійного значення подовжньої сили ($dN = 0$). Потрібно визначити подовження подовжньої осі ε_0 стрижня, напружений стан σ , τ і крутний момент $M_{кр}$ при довільному значенні параметра θ .

Для першого етапу пружного навантаження деформацію подовження подовжньої осі стрижня можна визначити згідно із законом Гуку

$\varepsilon'_0 = \frac{N}{EF}$. У другому етапі може з'явитися додаткова деформація подовження ε_0 , для розрахунку якої використовуємо рівняння (5) і умову задачі $dN = G_{11}d\varepsilon_0 + G_{14}d\theta = 0$. Звідси $d\varepsilon_0 = -\frac{G_{14}}{G_{11}}d\theta$. Подальший

алгоритм і відповідна програма розрахунків побудовані на основі описаної вище загальної методики. Програма реалізує циклічний розрахунок параметрів напруженого стану і внутрішнього крутного моменту на кожному етапі приросту деформації кручення $\Delta\theta$.

Результати розв'язання задачі для другого етапу описаного процесу при двох значеннях подовжньої сили $N = 225$ Н та $N = 588$ Н представлені на рис. 6, 7. Графіки ілюструють поступовий перехід поперечного перерізу стрижня з пружного стану в пластичний. Поки всі точки перерізу знаходяться в пружній стадії крутний момент зростає по лінійній залежності $M_{кр}(\theta)$ (рис. 6,а), деформація подовження подовжньої осі (рис. 6,б) і нормальна напруження (рис. 7,а) не змінюються ($\varepsilon'_0 = const$, $\sigma = const$). Як тільки в зовнішніх площадках поперечного перерізу з'являється зона пластичної течії, залежність для крутного моменту $M_{кр}(\theta)$ стає нелінійною, деформація подовження подовжньої осі починає зростати і відбувається перерозподіл напружень σ , τ (рис. 7,б,в): у міру переміщення досліджуваної точки поперечного перерізу від периферії до

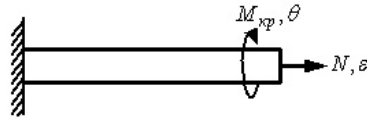


Рис. 5. Схема навантаження круглого стрижня

центру нормальні напруження збільшуються, а дотичні зменшуються по нелінійній залежності.

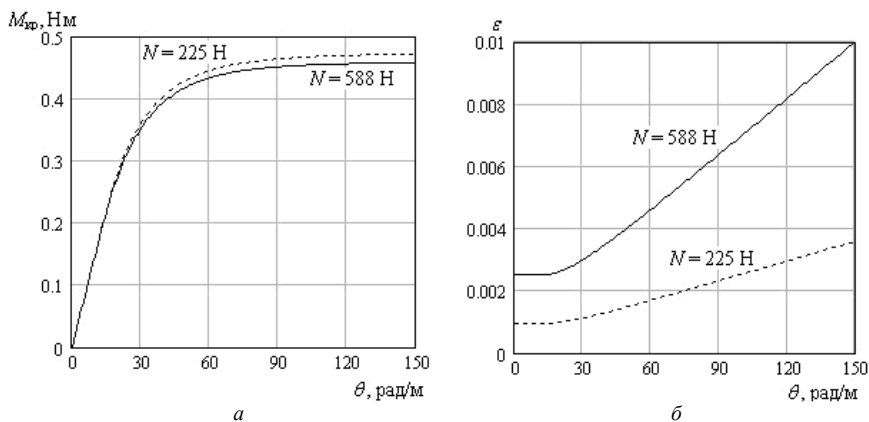


Рис. 6. Залежності крутного моменту а) та деформації подовження б) в функції від деформації кручення

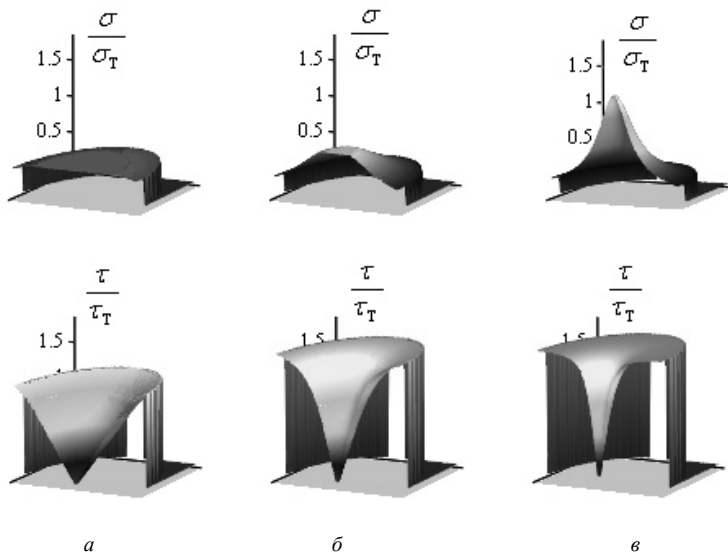


Рис. 7. Напружений стан круглого поперечного перерізу стрижня на різних етапах пружнопластичної деформації: а) $\theta = 20 \text{ рад/м}$; б) $\theta = 50 \text{ рад/м}$; в) $\theta = 150 \text{ рад/м}$.

Таким чином представлені в даній роботі математичні моделі у сукупності з розробленими алгоритмом розв'язання диференціальних рівнянь течії і універсальною процедурою розрахунку напружень створюють ефективну методіку розв'язання задач складного навантаження стрижня з врахуванням нелінійних властивостей матеріалу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
2. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести – М.: Высш. шк., 1961. – 537 с.
3. *Дикович И.Л.* Динамика упругопластических балок – Л.: Судпромгиз, 1962. – 292 с.
4. *Писаренко Г.С., Азарев В.А., Квитко А.Л.* Сопrotивление материалов. – К.: Высш. школа, 1979. – 694 с.
5. *Грачев В.П.* Сопоставление некоторых теорий пластичности для случая сложного нагружения канатной проволоки // Прочность и долговечность стальных канатов: сб. науч. тр. – К.: Техника, 1975. – С. 56 – 59.
6. *Хромов В. Г.* Механика процесса холодной упругопластической деформации стержня – К.: Учеб.–метод. кабинет по высш. образов. при МинВузе УССР, 1990. – 50 с.
7. *Geuricke W., Paech M., Albert E.* Simulation des Richtens von Draht // Draht. – 1996. – №47 – S. 23 – 29.
8. *Yitai Li.* Theoretische Analyse des Biegeprozesses von Rundstaben // Draht. – 1994. – 45(11-12) – S. 604 – 608. *Хромов И.В.* Исследование точности метода прямоугольников в прикладных расчетах интегральных характеристик упругопластического стержня // Труды междунар. науч. – техн. конф. «Моделирование и исследование сложных систем» – Том 1. – М.: МГАПИИ, 2001 – С. 85 – 89.
9. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности – М.: Наука, 1969. – 420 с.
10. *Хромов В.Г., Поляков В.В.* Анализ напряженно-деформированного состояния винтового стержня при растяжении с учетом пластических свойств материала // Проблемы прочности. – 2003. – №4 (364) – С.129 – 134
11. *Хромов В.Г., Хромов И.В.* Выбор аппроксимирующей функции для диаграммы растяжения материала в задачах технологической механики стержня // Вестник СевГТУ.: Механика, энергетика, экология: сб.науч.тр. – Севастополь, 2007. – Вып. 80 – С. 20 – 22.
12. *Хромов И.В.* Анализ напряженного состояния круглого тонкостенного цилиндра при сложном нагружении и нелинейном упрочнении материала // Проблемы прочности. – 2009. – №3 – С. 58 – 65.
13. *Хромов И.В.* Исследование точности метода прямоугольников в прикладных расчетах интегральных характеристик упругопластического стержня // Труды междунар. науч. – техн. конф. «Моделирование и исследование сложных систем» – Том 1. – М.: МГАПИИ, 2001 – С. 85 – 89.
14. *Хромов И.В.* Модификация метода Эйлера для решения дифференциальных уравнений пластического течения материала // Вестник СевГТУ.: Механика, энергетика, экология: сб. науч. тр. – Севастополь, 2006. – Вып. 75 – С. 44-49.

И.В. Хромов

Методика решения типовых задач технологической механики упругопластичного стержня с учетом нелинейных свойств материала

Для задач сложного нагружения стержня представлены математические модели и универсальная процедура вычисления напряжений на основе решения дифференциальных уравнений течения, учитывающих нелинейные свойства материала. Приведены примеры численного решения технологических задач.

I.V. Khromov

Solving methods for typical problems in technological mechanics of elastoplastic rod taking into consideration nonlinear material properties

Mathematical models and universal procedure for stress calculation on the basis of solution of differential plastic flow equations taking into consideration nonlinear material properties have been presented for problems of complex loading of a rod. Examples of computational solutions for technological problems have been given.

УДК 534-21:537.226.86

М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук

Л.О. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук

ПРО КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ШАРІВ З ВИКРИВЛЕНИМИ ГРАНИЦЯМИ

В статті дано представлення спільної системи рівнянь пружних товщинних коливань в сферичних, циліндричних та прямокутних координатах в формі операторної гамільтонової системи. Розроблено алгоритм визначення власних частот коливань шарів з викривленими границями і проведено їх порівняльний аналіз.

В монографії [5] та наступних роботах [8 та ін.] система рівнянь пружних коливань в декартових прямокутних координатах вперше була приведена до операторної системи гамільтонового типу по просторовій координаті відносно відповідним чином вибраних, умовно кажучи, канонічних змінних. Це питання знайшло подальший розвиток в статтях [3, 4], в яких складнішими перетвореннями до операторної гамільтонової системи по радіальній координаті зведена система пружних рівнянь коливань в циліндричних координатах.

В цій статті побудовано єдиний підхід до визначення власних частот для пластини, циліндру та шару з радіальним напрямком анізотропії. На основі розвинутого алгоритму проведено порівняльний аналіз частот власних коливань для тіл різної геометрії.

Будемо виходити з рівняння коливань

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

і матеріальних залежностей

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} + N c_{13} \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13} \frac{\partial u_r}{\partial r} + N \left[c_{11} - \frac{1}{2} (N-1)(c_{11} - c_{12}) \right] \frac{u_r}{r}, \end{aligned} \quad (2)$$

які є спільними для прямокутних, циліндричних і сферичних координат. При $N=1$, $r \sim z$ рівняння (1), (2) відповідають прямокутним

координатам, при $N = 1$ – циліндричним координатам, при $N = 2$ – сферичним координатам.

З першого рівняння системи (2) знаходимо

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}} - N \frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{u_r}{r}. \quad (3)$$

Це дає можливість одержати наступний вираз для $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{c_{13}}{c_{33}} \sigma_{rr} - \frac{1}{2} N [2c_{11**} - (N-1)(c_{11} - c_{12})] \frac{u_r}{r}, \quad (4)$$

в якому стала $c_{11**} = c_{11} - c_{13}^2 c_{33}^{-1}$.

З співвідношень (1) та (4) маємо

$$\frac{\partial r^N \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{N}{r} \frac{c_{13}}{c_{33}} r^N \sigma_{rr} + r^N \left[\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{N^2}{r^2} \left(c_{11**} - \frac{N-1}{2} (c_{11} - c_{12}) \right) u_r \right]. \quad (5)$$

Таким чином одержали систему двох рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^N \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{N}{r} \frac{c_{13}}{c_{33}} r^N \sigma_{rr} + r^N \left[\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{N^2}{r^2} \left(c_{11**} - \frac{N-1}{2} (c_{11} - c_{12}) \right) u_r \right], \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}} - N \frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{u_r}{r} \end{aligned} \quad (6)$$

відносно функцій $r^N \sigma_{rr}$ та u_r . Після їх визначення напруження $\sigma_{\theta\theta}$ знаходяться за формулою (4).

Звернемо увагу на те, що система (6), як і вихідні співвідношення (1), (2), справедлива і у тому випадку, коли механічні параметри ρ , c_{ij} будуть кусково-неперервними функціями координати r з розривами першого роду. В точках розриву $r = r_*$ повинні виконуватись умови неперервності функцій σ_{rr} та u_r .

На граничних поверхнях $r = r_0$ та $r = r_1$, ($r_0 < r_* < r_1$) необхідно задавати граничні умови по одній з альтернативних пар

$$\begin{aligned}
 u_r(r_0, t) &= u_r(t) \vee \sigma_{rr}(r_0, t) = \sigma_{rr}^0(t), \\
 u_r(r_1, t) &= u_r(t) \vee \sigma_{rr}(r_1, t) = \sigma_{rr}^1(t).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Якщо ввести канонічні змінні $r^N \sigma_{rr} = \mathcal{E}_1$ та $u_r = \mathcal{P}_1$, то систему (6) можна записати в операторній гамільтоновій формі [1] по просторовій координаті r

$$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_1}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial r} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{E}_1}
 \tag{8}$$

з операторною функцією Гамільтона

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(\mathcal{E}_1, \mathcal{P}_1) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{c_{33} r^N} \mathcal{E}_1^2 + \frac{N}{r} \frac{c_{13}}{c_{33}} \mathcal{P}_1 \mathcal{E}_1 + \\
 &+ \frac{1}{2} r^N \left[\rho \partial_t^2 + \frac{N^2}{r^2} \left(c_{11^{**}} - \frac{N-1}{2} (c_{11} - c_{12}) \right) \right] \mathcal{P}_1^2.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Розглянемо випадок гармонічних коливань $f(r, t) = \text{Re } f^a(r) \exp i\omega t$, використовуючи безрозмірні величини $c_{00} \bar{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}$, $c_{00} \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}$, $h \bar{u}_r = u_r$, $\rho_{00} \bar{\rho} = \rho$, $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ і безрозмірну координату $hx = r - R$. В цьому випадку система рівнянь (6) набуває вигляду (безрозмірні позначення збережені тільки для частоти)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a &= \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{c_{13}}{c_{33}} (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a + \\
 + (1 + \varepsilon x)^N &\left\{ \frac{N^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \left[c_{11^{**}} - \frac{N-1}{2} (c_{11} - c_{12}) \right] - \rho \bar{\omega}^2 \right\} u_r^a, \\
 \frac{du_r^a}{dx} &= \frac{1}{c_{33} (1 + \varepsilon x)^N} (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a - \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{c_{13}}{c_{33}} u_r^a.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Система (10) є гамільтоновою системою [1] по координаті x

$$\frac{dq_1}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \quad (11)$$

з канонічними змінними $q_1 = (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a$, $p_1 = u_r^a$. Функція Гамільтона

$$H(q_1, p_1) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{c}_{33}(1 + \varepsilon x)^N} q_1^2 + \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{\bar{c}_{13}}{\bar{c}_{33}} q_1 p_1 + \\ + \frac{1}{2} (1 + \varepsilon x)^N \left\{ \frac{N^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \left[\bar{c}_{11^{**}} - \frac{N-1}{2} (\bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}) - \bar{\rho} \bar{\omega}^2 \right] \right\} p_1^2. \quad (12)$$

Систему (10) можна одержати з умови стаціонарності функціоналу

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ u_r^a \frac{d}{dx} (1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{c}_{33}(1 + \varepsilon x)^N} \left((1 + \varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a \right)^2 - \frac{N\varepsilon}{1 + \varepsilon x} \frac{\bar{c}_{13}}{\bar{c}_{33}} r^N \sigma_{rr}^a u_r^a - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 + \varepsilon x)^N \left[\frac{N^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon x)^2} \left(\bar{c}_{11^{**}} - \frac{N-1}{2} (\bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}) - \bar{\rho} \bar{\omega}^2 \right) \right] u_r^a u_r^a \right\} dx. \quad (13)$$

при «ізохронних» варіаціях.

Для дослідження усталених резонансних гармонічних коливань треба скористатися концепцією комплексних модулів [2, 6, 7].

У випадку плоского шару задача про власні значення і власні форми має простий розв'язок:

- при $u_x^a(-h) = 0$, $u_x^a(+h) = 0$ власні частоти $\omega_n = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{c_{33}/\rho}$, а

відповідні власні форми $\sin n\pi \frac{x}{2h}$, $n = 1, 2, \dots$;

- при $u_x^a(-h) = 0$, $\sigma_{xx}^a(+h) = 0$ власні частоти $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{4h} \sqrt{c_{33}/\rho}$, а

відповідні власні форми $\sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{x}{2h}$, $n = 1, 2, \dots$;

- при $\sigma_{xx}^a(-h) = 0$, $\sigma_{xx}^a(+h) = 0$ власні частоти

$$\omega_n = \frac{(n-1)\pi}{2h} \sqrt{c_{33}/\rho}, \quad (14)$$

а відповідні власні форми

$$\cos(n-1)\pi \frac{x}{2h}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Цей розв'язок може слугувати як контрольний при розв'язанні системи (9) у випадках $N=1$ (циліндричні координати) та $N=2$ (сферичні координати).

Для знаходження власних частот тіл з викривленими поверхнями застосовується наступний чисельний спосіб розв'язання. Розв'язок системи (6) будемо шукати в вигляді вектора

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = (r^N \sigma_{rr}^a, u_r^a). \quad (16)$$

Система (6) при гармонічних коливаннях перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial r} &= \frac{N}{r} \frac{c_{13}}{c_{33}} Y_1 + r^N Y_2 \left[-\rho \omega^2 + \frac{N^2}{r^2} \left(c_{11^{**}} - \frac{N-1}{2} (c_{11} - c_{12}) \right) \right], \\ \frac{\partial Y_2}{\partial r} &= \frac{Y_1}{c_{33} r^N} - N \frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{Y_2}{r}. \end{aligned} \quad (17)$$

Після переходу до безрозмірних величин отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial x} &= \frac{\varepsilon N}{1+\varepsilon x} \frac{c_{13}}{c_{33}} Y_1 + \frac{Y_2 \varepsilon^N}{(1+\varepsilon x)^N} \left[-\rho \omega^2 + \frac{\varepsilon^2 N^2}{(1+\varepsilon x)^2} \left(c_{11^{**}} - \frac{N-1}{2} (c_{11} - c_{12}) \right) \right], \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x} &= \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} \right)^N \frac{Y_1}{c_{33}} - N \frac{c_{13} \varepsilon}{c_{33} (1+\varepsilon x)} Y_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Невідома частота ω є власною частотою для тіл з вільними зовнішніми поверхнями, якщо система (6) задовольняє однорідним граничним умовам

$$\sigma_{rr}^a(R-h) = 0, \quad \sigma_{xx}^a(R+h) = 0. \quad (19)$$

Для введених змінних

$$Y_1(-1) = 0, \quad Y_1(1) = 0. \quad (20)$$

Розв'язок системи (18) при конкретних значеннях ω будемо шукати як розв'язок задачі Коші при початкових значеннях $\mathbf{Y}(-1) = (0,1)$. Частота $\bar{\omega}_k$ ($k = 1, 2, \dots$) є власною частотою, якщо виконується друга умова з (20). Власні частоти шукаються методом бісекції.

Проаналізуємо частотні спектри для пружних шарів з вільними зовнішніми поверхнями. Розглядаються тіла з анізотропного матеріалу з наступними пружними модулями:

$$\begin{aligned} c_{11}^E &= 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{12}^E = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{33}^E &= 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{13}^E = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2. \end{aligned}$$

Для плоского шару з вільними поверхнями при введеному обмеженні маємо наступний спектр власних частот:

$$\Omega^{N=0} = (1.5708, 3.1416, 4.7124, 6.2834, 7.8546, 9.4263, 10.9988, \dots).$$

Він повністю збігається з частотами, обчисленими за (14).

Для циліндрів з різними параметрами кривизни маємо:

$$\Omega_{\varepsilon=0.05}^{N=1} = (0.0445, 1.5713, 3.1419, 4.7126, 6.2835, 7.8547, 9.4264, \dots);$$

$$\Omega_{\varepsilon=0.1}^{N=1} = (0.0895, 1.5730, 3.1427, 4.7132, 6.2839, 7.8550, 9.4266, \dots);$$

$$\Omega_{\varepsilon=0.3}^{N=1} = (0.2818, 1.5931, 3.1523, 4.7195, 6.2887, 7.8588, 9.4298, \dots);$$

$$\Omega_{\varepsilon=0.5}^{N=1} = (0.5181, 1.6556, 3.1794, 4.7368, 6.3014, 7.8689, 9.4382, \dots).$$

Для куль маємо наступні частоти:

$$\Omega_{\varepsilon=0.05}^{N=1} = (0.0726, 1.5723, 3.1424, 4.7129, 6.2838, 7.8549, 9.4265, \dots);$$

$$\Omega_{\varepsilon=0.1}^{N=1} = (0.1459, 1.5769, 3.1446, 4.7145, 6.2849, 7.8558, 9.4273, \dots);$$

$$\Omega_{\varepsilon=0.3}^{N=1} = (0.4619, 1.6325, 3.1717, 4.7324, 6.2983, 7.8665, 9.4362, \dots);$$

$$\Omega_{\varepsilon=0.5}^{N=1} = (0.8401, 1.8010, 3.2469, 4.7809, 6.3342, 7.8951, 9.4599, \dots).$$

Бачимо, що спектр власних частот циліндра і сфери відрізняється від спектру для плоского шару додатковою першою частотою, яка приймає приблизно пропорційні до $\varepsilon = h/R$ значення. Наступні частоти практично співпадають для тіл різної геометрії. В кулі власні частоти коливальні вищі, ніж у циліндра. В тілах з різними параметрами кривизни суттєво відрізняються перші кілька частот, вищі частоти практично однакові.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. В 2 т. Т 2. – Москва: Наука, 1977. – 439 с.
2. *Савін Г.М., Руцицький Я.Я.* Елементи механіки спадкових середовищ. – К.: Вища школа, 1976. – 252 с.
3. *Шульга В.М.* До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доповіді НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80-82.
4. *Шульга В.М.* О распространении упругих волн в ортотропных цилиндрах // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 7. – С. 34-41.
5. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наукова думка, 1981. – 200 с.
6. *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наукова думка, 1990. – 228 с.
7. *Шульга М.О., Карлаш В.Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наукова думка, 2008. – 270 с.
8. *Shulga N.A.* Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 7. – P. 763-796.

Отримано 05.08.09.

Н.А. Шульга, Л.О. Григорьева

О колебаниях упругих слоев с искривленными границами

В статье дано представление общей системы уравнений упругих толщинных колебаний в сферических, цилиндрических и прямоугольных координатах в форме операторной гамильтоновой системы. Разработан алгоритм определения собственных частот колебаний слоев с искривленными границами и проведен их сравнительный анализ.

M.O. Shul'ga, L.O. Grigoryeva

About vibrations of elastic layers with curved boundaries

Presentation of the united system of equations of elastic thickness vibrations in spherical, cylindrical and rectangular co-ordinates in the form of the operator Hamiltonian system is given in the article. The algorithm of determination of own vibrations frequencies of layers with curved boundaries is developed and their comparative analysis is conducted.

УДК 539.3

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
І.В. Жупаненко

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ТОВСТОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Пропонується аналітично-чисельна методика розрахунку частот та форм власних коливань віссиметричної товстої циліндричної оболонки сталого товщини. Особливістю методики є те, що динамічна теорія оболонки побудована без обмеження відносної товщини. Ефективність запропонованого підходу перевірялась при розв'язку модельних задач та порівнянням з результатами, отриманими за іншими методиками.

Розглядається однорідне тіло, внутрішня та зовнішня поверхні якого є круговими циліндрами радіусом відповідно R_0 та R . Товщина $h = R - R_0$ співрозмірна з його довжиною L .

Для такого тіла реалізується запропонована в [1] аналітично-чисельна методика визначення частот і форм власних коливань. Методика передбачає два етапи розв'язання просторової задачі динамічної теорії пружності:

- 1) зниження вимірності вихідних рівнянь та граничних умов;
- 2) розв'язок редукованої крайової задачі чисельними методами.

Для визначення з єдиних позицій граничних умов всіх видів передбачається, що кожна точка торцевих поверхонь закріплена двома пружними в'язями відомої жорсткості k . Це дає можливість реалізувати всі основні граничні умови за рахунок варіювання жорсткістю в'язів. Граничні умови в такому випадку записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} u_j(0) - \frac{1}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \sigma_{zj}(0) &= \frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \cdot \Delta_{j0} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{j0}^2}} \cdot q_{j0}, \\ \frac{k_{jL}}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} u_j(L) + \frac{1}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \sigma_{zj}(L) &= \frac{k_{j0}}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \cdot \Delta_{jL} + \frac{1}{\sqrt{1+k_{jL}^2}} \cdot q_{jL}, \end{aligned} \quad (1)$$

$(j = r, z)$

де k_{i0}, k_{iL} – жорсткість в'язів по відповідному напрямку на торцевій поверхні $z=0$ та $z=L$ відповідно.

Розглядаємо стаціонарні коливання системи у вигляді стоячих хвиль виду:

$$u_z^i(z, t) = u_{z,0}^i(z) \cdot \sin(\theta \cdot t), \quad \left(u_z^i \Leftrightarrow u_r^i \Leftrightarrow \sigma_z^i \Leftrightarrow \sigma_{zr}^i \right),$$

Вихідні співвідношення лінійної динамічної теорії пружності в вісесиметричній постановці записуються відносно компонент вектора переміщень та напружень в циліндричній системі координат (1) – (2) [1].

Двовимірна задача зводиться до системи одновимірних за просторовими координатами динамічних рівнянь теорії оболонок редукцією вихідних співвідношень та граничних умов по радіальній просторовій координаті за допомогою *узагальненого методу скінчених інтегральних перетворень* [2]. Після редукції вихідних рівнянь (1) – (2) [1] і виключення характеристик, що входять в редуковані рівняння алгебраїчно, отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_z^j}{dz} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \left(b^{jj} + \frac{2}{h} \cdot m^{ij} \right) \cdot u_r^j + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \sigma_{zz}^j \\ \frac{du_r^j}{dz} &= -\frac{2}{h} \cdot m^{ij} \cdot u_z^j + \sigma_{zr}^j \\ \frac{d\sigma_{zz}^j}{dz} &= \frac{\rho}{\mu} \cdot \theta^2 \cdot u_z^j + \left(-b^{ij} + \frac{2}{h} \cdot m^{ji} \right) \cdot \sigma_{zr}^j \\ \frac{d\sigma_{zr}^j}{dz} &= \left(2 \cdot b^{i\alpha} \cdot b^{j\alpha} - \frac{4}{h} \cdot b^{i\alpha} \cdot m^{j\alpha} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{2}{h} \cdot m^{i\alpha} \cdot b^{j\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{4}{h^2} \cdot m^{i\alpha} \cdot m^{j\alpha} - \frac{\rho}{\mu} \cdot \theta^2 \cdot \delta^{ij} \right) \cdot u_r^j + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{2}{h(s)} \cdot m^{ji} \cdot \sigma_{zz}^j \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Матричні коефіцієнти, що входять в редуковані рівняння (2), описані в [2]. Редуковані граничні умови отримуємо простою заміною функцій, що входять в умови (1), їхніми моментами.

Остаточно редуковану крайову задачу записуємо в матричній формі у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з граничними умовами для розрахункових вектор-функцій редукованих рівнянь:

$$\frac{d}{dr} \vec{Y} = [A] \cdot \vec{Y} + \vec{F}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 [C_0] \cdot \vec{Y}(0) = \vec{0}, \quad [C_L] \cdot \vec{Y}(L) = \vec{0}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\text{Тут } \vec{Y} = \begin{bmatrix} u_z^* = \mu \cdot u_z^i \\ u_r^* = \mu \cdot u_r^i \\ \sigma_{zz}^i \\ \tau_{rz}^i \end{bmatrix}; \quad \vec{F} = \vec{0};$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \left(b^{ij} + \frac{2}{h} m^{ij} \right) & \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ -\frac{2}{h} m^{ij} & 0 & 0 & \delta^{ij} \\ \frac{\rho}{\mu} \cdot \theta^2 \cdot \delta^{ij} & 0 & 0 & -b^{ij} + \frac{2}{h} m^{ij} \\ 0 & 2 \cdot b^{i\alpha} b^{j\alpha} - \frac{4}{h} b^{ij} \cdot m^{i\alpha} + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h} m^{i\alpha} \cdot b^{j\alpha} + \\ & + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{4}{h^2} m^{i\alpha} m^{j\alpha} - \frac{\rho}{\mu} \cdot \theta^2 \cdot \delta^{ij} & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h(s)} m^{ji} & 0 \end{bmatrix};$$

$$[C_0] = \begin{bmatrix} \frac{k_{z0}}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{k_{r0}}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+k_{r0}^2}} \cdot \delta^{ij} \end{bmatrix};$$

$$[C_L] = \begin{bmatrix} \frac{k_{zL}}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 \\ 0 & \frac{k_{rL}}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \delta^{ij} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+k_{rL}^2}} \cdot \delta^{ij} \end{bmatrix}.$$

Складний характер редукованих рівнянь виключає можливість знаходження їх розв'язку аналітичними методами. Тому звичайну послідовність застосування методу інтегральних перетворень до рівнянь в часткових похідних – перехід до зображень, розв'язання редукованих рівнянь аналітично та перехід до оригіналів – необхідно змінити,

використовуючи на другому етапі чисельні методи. Зокрема, для розв'язання системи (3) при фіксованому значенні частоти збуджуючого навантаження θ обрано ефективний метод дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [3]. Розв'язання задач Коші, до яких зводяться одновимірні крайові задачі, ведеться методом Рунге–Кутта–Фельберга з контролем точності на кроці [4].

Частоти власних коливань та відповідні їм форми визначаються пошаговим методом за алгоритмом, запропонованим для кільцевої пластини [1]. Розглядається послідовність значень θ з певним кроком, для якої виконується лише прямий хід алгоритму дискретної ортогоналізації. Після визначення частоти власних коливань виконується обернений хід для побудови відповідної форми коливань.

Наведена методика реалізована у вигляді програми на алгоритмічній мові FORTRAN. Основою алгоритмізації першого етапу розрахунку (зниження вимірності вихідних рівнянь динамічної теорії пружності) є можливість отримання коефіцієнтів редукованих рівнянь в явному вигляді. Формалізм прийнятого варіанту зниження вимірності дозволяє виділити в коефіцієнтах редукованих рівнянь скалярні множники та сталі матричні складові, на обробку яких в чисельних алгоритмах витрачається найбільше часу. Таке розділення коефіцієнтів не лише істотно скорочує об'єм інформації, що зберігається в пам'яті ЕОМ, але й сприяє оптимізації обчислювальних алгоритмів за рахунок програмування підготовчої роботи по обчисленню матриці коефіцієнтів для чисельного алгоритму, що реалізує другий етап розрахунку.

В якості ілюстрації можливостей розробленої методики досліджено вільні коливання защемленої та шарнірно опертої по обох торцевих поверхнях циліндричної оболонки довжиною $L=1,0$ м, зовнішнім радіусом $R=0,5$ м. Фізичні характеристики оболонки наступні: $\rho = 2,4 \text{ т/м}^3$, $\nu = 0,3$, $E = 2,4 \cdot 10^6 \text{ т/м}^2$.

Частоти власних коливань шарнірно опертої оболонки при різних співвідношеннях товщини до радіусу підраховані з використанням рівнянь (3) – (4) при $N=2, 4$ та 6 і за методикою В.С. Гонткевича [5]. Порівняння частот наведено в табл. 1.

Власні коливання жорстко защемленої оболонки також досліджувались при різних співвідношеннях товщини до радіусу з використанням рівнянь (3) – (4) при $N=2, 4$ та 6 і з використанням рівнянь класичної теорії оболонок [6]. Порівняння частот наведено в табл. 2.

Відповідні форми коливань шарнірно опертої та защемленої оболонок при товщині $h=0,1$ м наведено на рис. 1.

Таблиця 1

Частоти власних коливань шарнірно опертої оболонки

Частоти коливань	Пораховані за				Розбіжність, % (для N=2)
	формулою В.С.Гонткевича [5]	запропонованою методикою при			
		N=2	N=4	N=6	
<i>h=0,05 м</i>					
ω_1	2110	2043	–	–	3,1
ω_2	2188	2174	–	–	0,6
ω_3	2497	2507	–	–	0,4
<i>h=0,1 м</i>					
ω_1	2242	2151	2151	–	4,0
ω_2	2522	2471	2430	–	2,0
ω_3	3487	3321	3164	–	4,8
<i>h=0,125 м</i>					
ω_1	2316	2209	2209	2209	4,6
ω_2	2730	2625	2580	2580	3,8
ω_3	4064	3693	3503	3503	9,1

Таблиця 2

Частоти власних коливань жорстко защемленої оболонки

Частоти коливань	Пораховані за				Розбіжність, % (для N=2)
	класичною теорією оболонок [6]	запропонованою методикою при			
		N=2	N=4	N=6	
<i>h=0,05 м</i>					
ω_1	2196	2197	–	–	–
ω_2	2254	2259	–	–	–
ω_3	2793	2800	–	–	–
<i>h =0,1 м</i>					
ω_1	2389	2385	2372	–	0,2
ω_2	2781	2693	2622	–	3,2
ω_3	4272	3823	3621	–	10,5
<i>h =0,125 м</i>					
ω_1	2504	2489	2472	2472	0,6
ω_2	3021	2868	2792	2790	5,1
ω_3	5091	4208	3987	3981	17,3

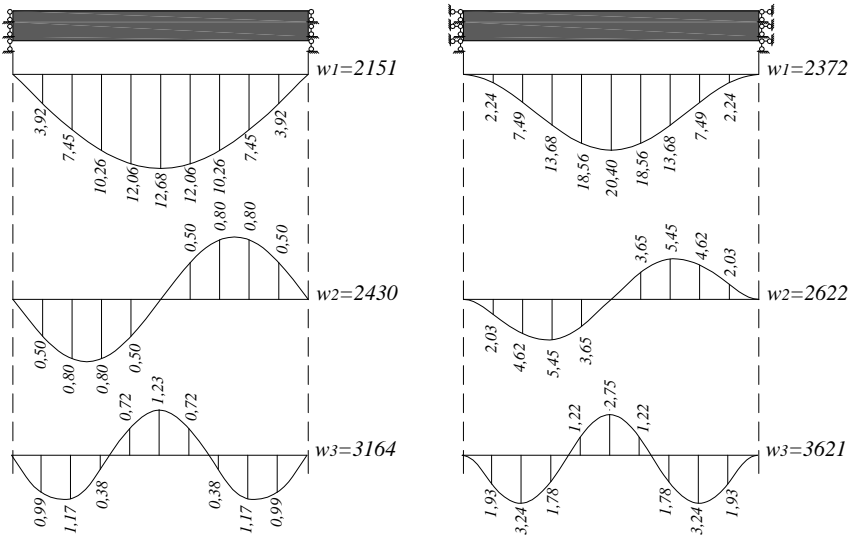


Рис. 1. Форми власних коливань оболонок

Варто відзначити, що запропонована методика дозволяє визначати частоти та форми власних коливань циліндричної оболонки для широкого діапазону значень відносної товщини $\varepsilon = h/R$. Методика орієнтована на клас товстих оболонок, але числові результати, наведені в табл. 1 – 2 показують, що при відносній товщині оболонки $\varepsilon = 0,1$ ($h=0,05$ м, $R=0,5$ м) частоти власних коливань практично співпадають з частотами, порахованими за класичною теорією оболонок. При значенні відносної товщини $\varepsilon = (1/5, 1/4)$ отримані за цією методикою частоти власних коливань істотно менші, причому чим вища частота, тим більша відносна різниця.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Жуваненко І.В. Власні коливання товстої кільцевої пластини. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. – Вып. 83. – К.: КНУБА. – 2009. – С. 165-172.
2. Чибіряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – В кн.: Успехи математических наук, 1961, т. XVI, вып. 3. – С. 171–174.

4. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.
5. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. Справочник./ Под ред. Филиппова А.П./ Киев: Наукова думка, 1964 – 288 с.
6. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки.: Пер. с англ. – М.: Наука, 1956. – 635 с.

Отримано 12.08.09.

В.К. Чибиряков, И.В. Жупаненко

Собственные колебания толстой цилиндрической оболочки

Предложена численно-аналитическая методика решения задачи о собственных колебаниях толстых осесимметричных цилиндрических оболочек. Аналитическая часть методики состоит в применении обобщенного метода конечных интегральных преобразований по толщине оболочки для снижения размерности исходных уравнений трехмерной задачи динамической теории упругости без введения геометрических гипотез. Редуцированные одномерные задачи численно решаются методом дискретной ортогонализации С.К.Годунова. Эффективность предложенной методики проверялась при решении модельных задач и сравнением с полученными по другим методикам результатами.

V.K. Chybiryakov, I.V. Zhupanenko

Free vibrations of thick axi-symmetric cylindrical shells

A numerical-analytical method is proposed for solution of the problem on free vibrations of thick axi-symmetric cylindrical shells. The analytical part of the method consists of application of the method of finite integral transforms on shell's thicknesses for reduction of three-dimensional equations of the dynamic theory of elasticity without geometrical hypothesize. The reduced one-dimensional problem are solved numerically by a Godoonov's method of discrete ortogonalization. Efficiency of this approach has been checked by solving some model problems and comparing with results obtained using other approaches.

УДК 624.072.33(045)

В.М. Першаков, канд. техн. наук
О.О. Яковенко

ТЕХНОЛОГІЯ ЗВЕДЕННЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ СТАЛЕВОЇ РАМИ

Розглядається попередньо напружена сталева рама, як одна з найбільш ефективних і цікавих рішень у конструктивному плані і за способом зведення. Технологія зведення попередньо напружених сталевих рамних конструкцій знаходить своє застосування при будівництві унікальних великопрогонових споруд (сільськогосподарських ферм, заводських корпусів і авіаційних ангарів), де для великої площі потрібне ефективне покриття з периферійним спіранням.

Вступ. На кафедрі комп'ютерних технологій будівництва факультету аеропортів Інституту міського господарства під керівництвом завідувача кафедрою професора Верюжського Ю.В. і професора Першакова В.М. був проведений патентний пошук нових конструктивних вирішень каркасів будівель і технологій їх зведення по семи провідних країнах за останні двадцять років.

Попередньо напружена сталева рама [1] є одним з найбільш ефективних і цікавих рішень у конструктивному плані і за способом її зведення.

Конструкція рами складається з жорстких рамних секцій, шарнірно сполучених в один ланцюг: двох кінцевих і однієї середньої. Можливий варіант з декількома середніми секціями. Середня секція сталевій рамної конструкції спирається на кінцеві секції і складається з:

- верхнього стиснутого поясу, що є в неробочому стані ланцюгом з прямих або частково зігнутих елементів;
- нижнього поясу, який складається з металевих переважно сталевих трубчастих секцій, що є напрямними для напружуваного каната;
- стійок і розкосів між верхнім і нижнім поясами.

Робота елементів рами при напруженні.

При зведенні сталевій конструкції використовується технологія попереднього напруження. При напруженні нижнього поясу сили діють і на верхній пояс. Кривизна нижнього поясу змінюється з вигином верхнього поясу при незмінній відстані між верхнім і нижнім поясами, тобто при незмінній довжині стійок і розкосів між цими поясами.

Кривизна верхнього і нижнього поясів залежить від розрахункової довжини кожного трубчастого сегменту нижнього поясу. Одним зменшенням довжини сегментів нижнього поясу можна досягти лише

відносно малого вигину верхнього поясу. Кожна трубчаста секція нижнього поясу сполучена за допомогою стійок або розкосів з верхнім поясом. Тому подальше напруження нижнього поясу викликають тільки стиснення його трубчастих секцій, і конструкція чинить опір подальшій зміні кривизни верхнього поясу. Вигин верхнього поясу може досягти критичного значення. Тому для забезпечення подальшого рівномірного вигину верхнього поясу його секції забезпечуються шарнірними з'єднаннями. Введенням шарнірних з'єднань можна зігнути верхній пояс у циркульну криву з відносно малим радіусом, створюючи конструктивні системи на зразок арок і порталних рам. Ступінь викривлення рамної конструкції залежить від її довжини і висоти.

Якщо напружуваний канат натягнути понад те, що потрібне для отримання проектно кривизни конструкції, то виросте напруга в стиснутих трубчастих секціях нижнього поясу разом з напругою в стійках і розкосах, що сполучають верхній і нижній пояси. Це явище необхідне для збільшення конструктивної міцності і жорсткості сталеві рамної конструкції і для її протидії землетрусу, вітровим і тимчасовим навантаженням.

Зазвичай сили попередньої напруги, що потрібні для опору вищеназваним навантаженням, в 0.1 - 100 або раз більше сил, що потрібні для надання конструкції необхідної кривизни.

При натягненні каната на деформації між сегментами нижнього поясу впливає зазор між напружуваним канатом і внутрішньою поверхнею трубчастих елементів. Цей зазор знаходиться в діапазоні від 3 мм до 100 мм і більше. Його величина залежить і від відношення між діаметром трубчастої секції і відстанню між стійками, і від необхідного ступеня вигину кожного елемента поясу.

Для зчеплення каната з трубою порожнина між канатом і внутрішньою стінкою трубчастої секції заливається цементуючим матеріалом. Це, як правило портландцемент, вода і хімічні добавки.

Кожна пара суміжних трубчастих секцій з'єднується ковним шарніром у вигляді патрубк. На обох кінцях цього патрубка є гофрована нарізка. Ширина області нарізки відповідає глибині, на яку патрубок входить у трубчасту секцію.

Місця перекриття патрубка трубчастою секцією заповнюються рідким в'язучим матеріалом і потрібні для того, щоб всі трубчасті секції нижнього поясу відповідали межі міцності на розрив.

Коли на сталеву рамну конструкцію діє зовнішнє навантаження, нижній пояс піддається стисненню, яке перевищує стиснення, викликане натягненням каната. Трубчасті секції нижнього поясу можуть стискуватися до критичного значення, яке залежить від межі міцності на розрив матеріалу трубчастих секцій і стикових з'єднань.

Технологія зведення сталевї рами.

Технологія збірки і установлення попередньо напружених сталевих рамних конструкцій показана на рис. 1 - 13.

На рис. 1, 2 і 3 показана попередньо напружувана сталева рама на різних стадіях напруги:

1. На землі збирають середню секцію. Вона складається з верхнього поясу 4 і нижнього поясу 7. Нижній пояс 7 виконаний з трубчастих сталевих елементів. Обидва пояси зв'язані розкосами 5 і стійками 6. По трубчастих напрямних нижнього поясу 7 проходить натягуваний канат.

2. До кожного кінця середньої секції за допомогою шарнірів 2 і 9 приєднують по одній кінцевій секції 1 і 10, які в робочому положенні гратимуть роль опор напруженої сталевї рамної конструкції. На рис. 1 показана вся зібрана рамна конструкція, що лежить на землі в ненапруженому стані.

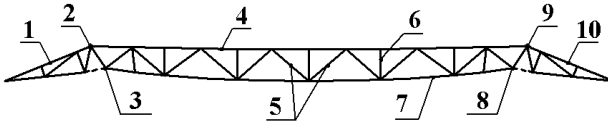


Рис. 1. Зібрана сталева рама до напруження:

1 - ліва кінцева секція; 2 - ліве шарнірне з'єднання; 3 - ліва точка фіксації натягнутого каната; 4 - верхній пояс середньої секції; 5 - розкіс середньої секції; 6 - стійка середньої секції; 7 - нижній пояс середньої секції; 8 - права точка фіксації натягнутого каната; 9 - праве шарнірне з'єднання; 10 - права кінцева секція

3. Канат, що проходить по трубчастих напрямних нижнього поясу 7, напружують, і його кінці фіксують в точках 3 і 8. Напруження каната приводить середню секцію до необхідної кривизни, показаної на рис. 2.

4. Канати, що проходять по трубчастих напрямних кінцевих секцій 2 і 8, закріплюють на середній секції 5 у точках 4 і 6.

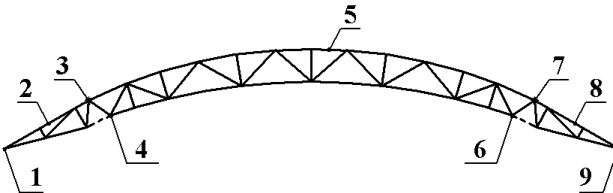


Рис. 2. Напруження каната середньої секції:

1 - ліва точка фіксації каната на кінцевій секції; 2 - ліва кінцева секція; 3 - ліве шарнірне з'єднання; 4 - ліва точка фіксації каната на середній секції; 5 - середня секція; 6 - права точка фіксації каната на середній секції; 7 - праве шарнірне з'єднання; 8 - права кінцева секція; 9 - права точка фіксації каната на кінцевій секції.

5. Одночасно або по черзі натягують канати кінцевих секцій 2 і 8, і фіксують їх у натягнутому стані в точках 1 і 9. Це призводить до того, що кінцеві секції 2 і 8 провертаються в шарнірних з'єднаннях 3 і 7 відносно середньої секції 5 і змикаються стикувальними вузлами з останньою. Подібний стан сталевій рамній конструкції показаний на рис. 3.

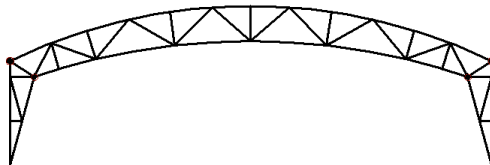


Рис. 3. Напружений стан сталевій рамі

6. Всю попередньо напружену сталеву рамну конструкцію піднімають краном у вертикальне положення.

7. Сталеву рамну конструкцію встановлюють краном в проектне положення.

На рис. 4 показана попередньо напружена сталеві рама в проектному положенні.

Вільні кінці напружених канатів кінцевих секцій слугують анкерами для закріплення сталевій рамній конструкції 2 у фундаментах 1 і 3 споруд, що перекриваються.

Існує можливість зводити конструкцію без використання кранів.

Для влаштування покриття паралельно встановлюють декілька вищезазначених конструкцій. Зв'язки між ними також можуть бути попередньо напружуваними конструкціями. Зібрана багаторамна конструкція покривається покрівельним матеріалом.

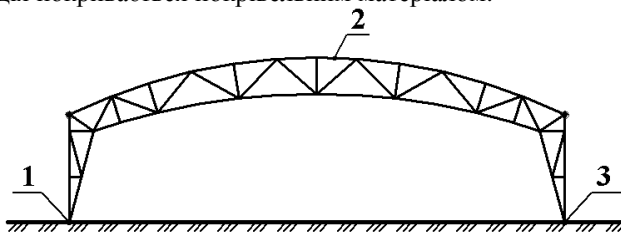


Рис. 4. Проектне положення сталевій рамі:

1 - лівий фундамент; 2 - сталеві рама конструкція; 3 - правий фундамент.

Покрівельним матеріалом можуть служити листовий метал, клеєна фанера або асбофанера.

На рис. 5 показано застосування вище-зазначених рам для багатопрілітних будівель.

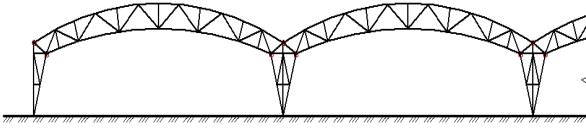


Рис. 5. Сталеві рамні конструкції у багатопролітній будівлі

Варіанти попередньо напружених сталевих рам.

Рис. 6, 7 і 8 відображають варіант сталеві рамної конструкції, в якій середня секція 3 і кінцеві секції 2 і 4 є фермами з паралельними поясами. На рис. 6 показана така конструкція в неробочому стані.

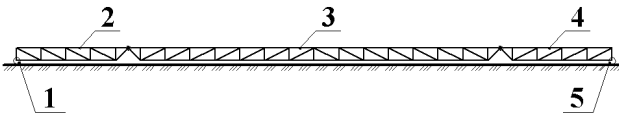


Рис. 6. Сталева рама, що складається з ферм з паралельними поясами, до напруження: 1 - лівий каток; 2 - ліва кінцева секція; 3 - середня секція; 4 - права кінцева секція; 5 - правий каток.

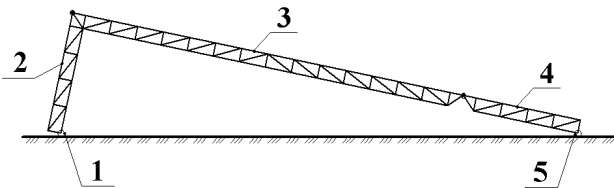


Рис. 7. Напруження сталеві рами (варіант з паралельними поясами): 1 - лівий каток; 2 - ліва кінцева секція; 3 - середня секція; 4 - права кінцева секція; 5 - правий каток.

Технологія зведення аналогічна вищенаведеним. Зведення можна виконувати за допомогою роликів катків 1 і 5, які розташовані у нижній частині кінцевих секцій 2 і 4 і котяться по відповідним напрямних, що знаходяться на поверхні майданчика монтажу. На рис. 7 і 8 показана сталеві рамна конструкція відповідно у напружуваному і проектному положеннях.

На рис. 9 показано використання сталевих рамних конструкцій для будівель з круглим контуром в плані. Рами розходяться радіусами з центральної точки.

На рис. 10 показано, як вищезазначені рами можуть використовуватися при їх взаємному перетині під прямим кутом.

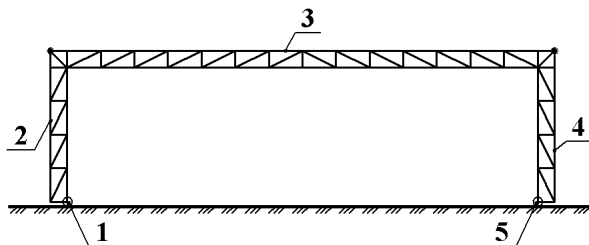


Рис. 8. Проектне положення сталеві рами (варіант з паралельними поясами):
1 - лівий каток; 2 - ліва кінцева секція; 3 - середня секція; 4 - права кінцева секція; 5 - правий каток.

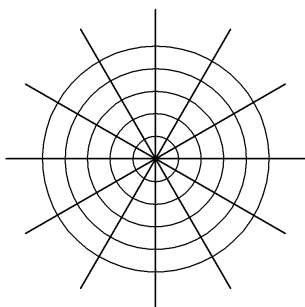


Рис. 9. Сталеві рами в будівлях з круглим контуром у плані

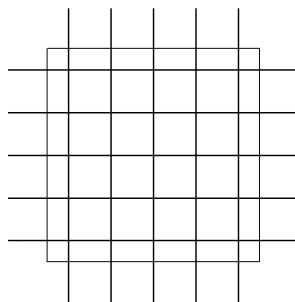


Рис. 10. Перетин сталевих рам під прямим кутом

Рис. 11, 12 і 13 ілюструють застосування сталеві рамної конструкції для великопролітних будівель. На рис. 11 показано, як збирають цю конструкцію, використовуючи тимчасові опори 3, 5, 8 і 11. Середня секція у цьому випадку є конструкцією, що складається з трьох окремих ферм: однієї центральної ферми 6 і двох крайніх ферм 4 і 9.

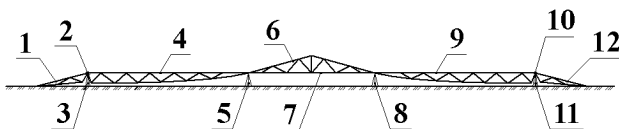


Рис. 11. Монтаж сталеві великопролітної рами:
1 - ліва опорна ферма; 2 - ліве шарнірне з'єднання; 3 - тимчасова опора; 4 - ліва крайня ферма середньої секції; 5 - тимчасова опора; 6 - центральна ферма середньої секції; 7 - натягуваний канат середньої секції; 8 - тимчасова опора; 9 - права крайня ферма середньої секції; 10 - праве шарнірне з'єднання; 11 - тимчасова опора; 12 - права опорна ферма.

До вільних кінців ферм 4 і 9 за допомогою шарнірних з'єднань 2 і 10 приєднуються опорні ферми відповідно 1 і 12. Один загальний натягуваний канат 7 проходить по трубчастих напрямних трьох ферм 4, 6 і 9.

Рис. 12 відображає стан конструкції після того, як натягуваний канат середньої секції вже напружено, а гідравлічний підйомний домкрат 5 із закріпленням на ньому підйомним канатом установили по осі центральної ферми 4.

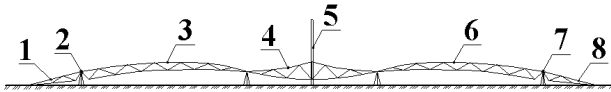


Рис. 12. Напруження сталеві великопролітної рами:

1 - ліва опорна ферма; 2 - ліве шарнірне з'єднання; 3 - ліва крайня ферма середньої секції; 4 - центральна ферма середньої секції; 5 - гідравлічний підйомний домкрат; 6 - права крайня ферма середньої секції; 7 - праве шарнірне з'єднання; 8 - права опорна ферма.

Канати, що проходять по трубчастих напрямних опорних ферм 1 і 8, закріплюють на двох крайніх фермах 3 і 6. Одночасно натягують канати опорних ферм 1 і 8, і фіксують їх в натягнутому стані. Це призводить до того, що опорні ферми 1 і 8 повертаються в шарнірних з'єднаннях 2 і 7 відносно середньої секції і зникаються з нею стикувальними вузлами, і сталеві рами конструкції переходять у вертикальне положення. Підйом центральної ферми 4 середньої секції проводиться за допомогою гідравлічного домкрата 5. Коли рама конструкції досягає положення, що відображене на рис. 13, по осі прольоту, що перекривається, ставиться колона 3, а тимчасові опори прибирають. Вільні кінці напружених канатів опорних ферм 2 і 4 слугують анкерами для закріплення сталеві рами конструкції у фундаментах 1 і 5 споруди, що перекривається.

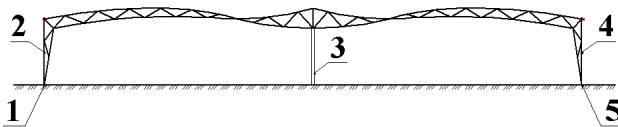


Рис. 13. Сталева великопролітна рама у проектному положенні:

1 - лівий фундамент; 2 - ліва опорна ферма; 3 - центральна колона; 4 - права опорна ферма; 5 - правий фундамент.

Відстань між крайніми опорними фермами 2 і 4 і центральною колоною 3 може доходити до 100 метрів.

Будівлі авіаційних ангарів повинні перш за все чинити опір вітровим навантаженням. Експериментальні дослідження показали, що рамними конструкціями при їх низькій будівлі із сталевими попередньо напруженими матеріаломісткості і мінімальних витратах на монтаж здатні протистояти силі тайфуну.

Висновки.

Дана технологія зведення попередньо напружених сталевих рамних конструкцій знаходить своє застосування при будівництві унікальних великопрогінних споруд (сільсько-господарських ферм, заводських корпусів і авіаційних ангарів), де для великої площі потрібне ефективне покриття, що периферійно спирається.

При створенні аналогічних рамних конструкцій для будівель з малими прольотами можна використовувати різні комбінації матеріалів. Нижній пояс може складатися із сталевих трубчастих секцій, а елементи верхнього поясу, стійкі і розкоси можуть бути дерев'яними.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Патент США 4,676,045; E04B1/24 - E04C3/38, E04B1/35E, E04C3/40; Попередньо напружена сталева рама / Елен Пітер (Гонконг); № US4676045; 1987-06-30

Отримано 16.08.09.

В.Н. Першаков, А.А. Яковенко

Технология возведения предварительно напряженной стальной рамы

Рассмотрена предварительно напряженная стальная рама как одно из наиболее эффективных и интересных решений в конструктивном плане и по способу ее возведения. Данная технология возведения предварительно напряженных стальных рамных конструкций находит свое применение при строительстве уникальных большепролетных сооружений (сельскохозяйственных ферм, заводских корпусов и авиационных ангаров), где для большой площади необходимо эффективное периферийно опирающееся покрытие.

V.N. Pershakov, O.O. Iakovenko

Technology of erection of post-tensioned steel frame

The article is examined post-tensioned frame as one of the most effective and interesting decisions in a structural plan and by the method of its erection. This technology of erection of post-tensioned steel frame constructions finds their use for covering of unique large-span buildings (agrarian farms, factory buildings and aviation hangars), where a large area needs effective peripherally supported coverage.

УДК 539.3

Є.О.Гоцуляк, д-р техн. наук
А.М.Шельменко, аспірант

РОЗРАХУНОК ОДИНИЧНОЇ ПАЛІ З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ЖОРСТКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСНОВИ

Виконано розрахунок палі з використанням скінченно-елементного програмного комплексу у двох постановках – за класичною теорією та з урахуванням залежності жорсткісних параметрів ґрунтового середовища від його напруженого стану. Результати приведеного розрахунку порівняні з експериментальними та теоретичними даними, що опубліковані в літературі.

Будівництво споруд ведеться в основному на паливних фундаментах. При розрахунку осідання паливних фундаментів за методикою СНиП, як правило, отримують результати, які виходять за межі допустимих. Але на практиці не спостерігається таких великих вертикальних переміщень споруд. Для прикладу розглянемо готову монолітну залізобетонну будівлю, побудовану в м. Києві, що має суцільний плитний ростверк розташований на буронабивних палиях довжиною 20 м та діаметром поперечного перерізу 600 мм. Для цього будинку виконаний теоретичний розрахунок осідання фундаменту за СНиП 2.02.03-85 та СНиП 2.02.01-83* методом лінійно-деформівного шару. В результаті отримано значення осідання, що становить 9 см. Відповідно до Додатку №4 СНиП 2.02.01-83*, максимально допустима осадка житлових багатоповерхових будівель складає $s_{\max, u} = 8$ см, тобто розрахункове значення перевищує максимально допустиме і унеможливує будівництво будинку в такій конфігурації. Проте, за півтора роки спостережень за станом будівлі її осадка склала 3 см. Є багато інших випадків, коли осідання будівель має аналогічний характер, а за розрахунком осадка сягає 30 см!

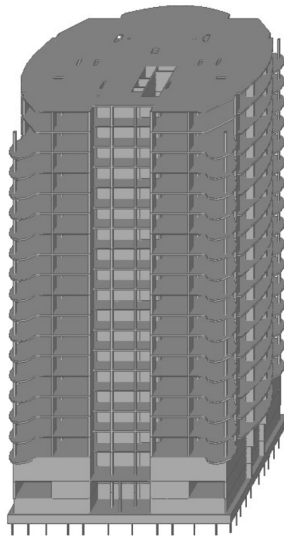


Рис.1

На наш погляд, така відмінність теоретичних і експериментальних результатів викликана тим, що в методиці розрахунку за СНиП не враховуються залежності жорсткісних характеристик ґрунту, тоді як при розрахунку шпунтових паль на горизонтальні навантаження використовується лінійна залежність параметрів жорсткості від глибини його залягання.

В наш час для розрахунку фундаментів використовують програмний комплекс PLAXIS 3D Foundation, який базується на скінченно-елементній дискретизації ґрунта в тривимірній постановці з урахуванням пружно-пластичної моделі Кулона-Мора (рис. 2). Дана теорія міцності враховує міцність ґрунтів на зсув. Для цього в програмі використовуються такі коефіцієнти як кут внутрішнього тертя та питоме зчеплення ґрунту. Даний програмний комплекс дозволяє розраховувати плитні та пальові фундаменти з поетапним навантаженням та зміною розрахункової схеми.

Співробітники Московського державного будівельного університету Знаменський, Рузаєв та Полинков виконали розрахунки палі за допомогою цього програмного комплексу і порівняли отримані результати з результатами натурних випробувань. Вони використали 9-тиметрову забивну палю перерізом 0,35x0,35 м (рис. 3), яку випробовували в глинистому ґрунті (табл. 1).

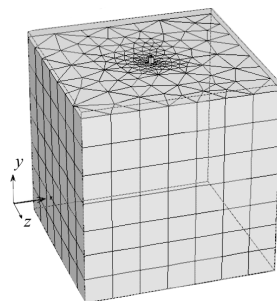


Рис. 2

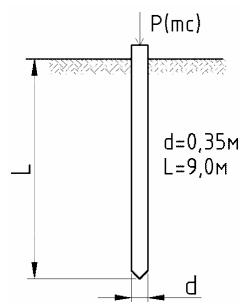


Рис. 3

Таблиця 1

Характеристика (позначення)	Величина
Модуль деформації E_{ref} , кН/м^2	22000
Коефіцієнт Пуасона ν	0,35
Зчеплення ґрунту c_{ref} , кН/м^2	40
Кут внутрішнього тертя φ	25
Кут делатансії ψ	0,1
Об'ємна вага ґрунта в природньому стані γ_{sat} , кН/м^3	18
Об'ємна вага ґрунта в сухому стані γ_{unsat} , кН/м^3	15
Коефіцієнт фільтрації $k_x = k_y$, м/добу	0,001

Отримані результати наведені на графіку (рис. 4), з якого видно, що значення несучої здатності палі мають достатню збіжність. Але з графіка також видно, що експериментальні значення осідання палі в 2-3 рази менші від теоретичного розрахунку при лінійній стадії роботи палі. Тобто, як і у випадку розрахунку за СНиП, так і у них є значна різниця в осадках, отриманих при розрахунках та експерименті.

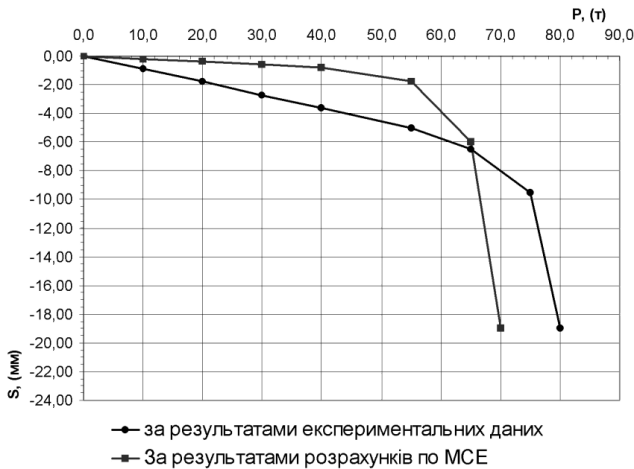


Рис.4 Графік залежності переміщень від навантаження (виконаний в МГСУ)

Нами запропоновано враховувати залежність жорсткісних параметрів ґрунтового середовища від його напруженого стану. Тому було виконано розрахунок аналогічної палі в ґрунті, модуль деформації якого зростає пропорційно вертикальному напруженню від власної ваги ґрунту за допомогою програмного комплексу PLAXIS 3D Foundation, оскільки в даній програмі реалізована можливість задання такого модуля деформації, який змінюється з глибиною.

На рис. 5 наведено графік залежності деформації від навантаження палі при постійному та змінному модулі деформації. Як бачимо, значення переміщення на лінійній ділянці роботи палі при змінному модулі деформації в середньому в 2,5 рази менші ніж при сталому модулі деформації і наближаються до результатів натурних випробувань.

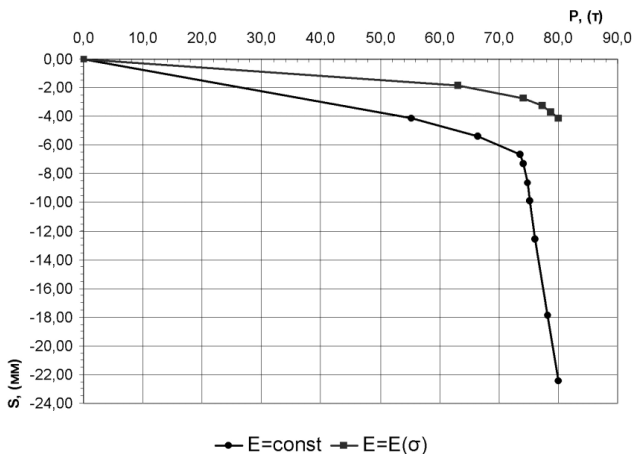


Рис. 5. Графік залежності переміщень від навантаження (виконаний в МГСУ)

Проаналізувавши результати приведених розрахунків в пружній стадії роботи фундаменту, бачимо, що у всіх випадках результати теоретичних розрахунків, виконаних за існуючою методикою, відрізняються від експериментальних в декілька разів. Причиною цієї різниці може бути неврахування зміни модуля деформації ґрунту від глибини його залягання. Відомо, що в практиці геологічних досліджень модуль деформації подається сталою величиною, але з наших розрахунків видно, що при використанні змінного модуля деформації отримуються значення осідання палі, які наближаються до результатів натурних випробувань.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Знаменский В.В., Рузаев А.М., Польшков И.Н. Сравнение результатов натурных экспериментов с расчетами, выполненными при помощи конечно-элементной программы PLAXIS 3D Foundation для забивных свай в глинистых грунтах// Вестник МГСУ. – 2008. - №2. – С. 18-23.
2. СНиП 2.02.03-85 Свайные фундаменты.
3. СНиП 2.02.01-83 Основания зданий и сооружений.
4. Цытович Н.А. Механика грунтов. – М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1963. – 636 с.
5. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В., Тер-Мартirosян З.Г., Чернышев С.Н. Механика грунтов, основания и фундаменты. – М.: АСВ, 1994. – 524 с.

Отримано 21.09.09.

Е.А. Гоцуляк, А.Н. Шельменко

Расчет одиночной сваи с учетом нелинейной зависимости жесткосных характеристик основания

Выполнен расчет сваи с использованием конечно-элементного программного комплекса в двух постановках - по классической теории и с учетом зависимости жесткосных параметров грунтовой среды от её напряженного состояния. Результаты приведенного расчета сравнены с экспериментальными и теоретическими данными, изложенными в литературе.

E.O. Gotsuliak, A. M. Shelmenko

Calculation of single pile with an allowance for nonlinear dependence of rigid foundation characteristics

Calculation of the pile was completed by using finite-element software in two arrangements - classical theory and on the basis of nonlinear relation of rigid ground parameters from its stress state. The results of this calculation were compared with experimental and theoretical data described in the literature.

УДК 624.034

С.Й. Цимбал, канд. тех. наук
М. Шахмохаммаді, аспірант

РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ В ОСНОВІ СТРІЧКОВИХ ФУНДАМЕНТІВ

Наведено вирішення задачі про розподіл напружень в пористому середовищі, яким є ґрунти, від вертикальної зосередженої сили, що діє на поверхні та в основі стрічкових фундаментів з урахуванням стану ґрунтів через коефіцієнт пористості. Проведено порівняльний аналіз розподілу напружень в суцільному і пористому середовищах. Показано вплив коефіцієнта пористості на формування напружень в основі стрічкових фундаментів.

Експериментальні дослідження Н.В. Лалетіна (1930 р.), І.С. Федорова, Г.І. Покровського (1932-1933 р.), Плантема (1952 р.), Д.С. Баранова (1955-1960 р.), М.П. Болштанського (1962 р.) та ін. підтверджують, що напруження в ґрунтах безпосередньо під навантаженням в 2-3 рази перевищують теоретичні, визначені за формулами теорії пружності. З метою наближення теоретичних до експериментальних напружень вводились в формули теорії пружності коефіцієнти концентрації напружень. Вперше про таку можливість наближення теоретичних даних до експериментальних в 1929 р. запропонував Н.Н. Іванов, яку в подальшому використовував О.К. Фр'оліх. Модифікації формул теорії пружності з використанням коефіцієнтів концентрації напружень дуже умовні і є чисто емпіричними. Так в формулі Бусінеска для скельних ґрунтів, які мають міцні зв'язки між частинками ґрунту, коефіцієнти концентрації напружень пропонується близьким до $k=3$, для зв'язних глин - $k=3...4$, а для зволожених глин і пісків $k=4...6$. Невідомо, за якими показниками приймати перший чи другий коефіцієнт концентрації напружень. Наприклад, зволоження глин і пісків характеризується коефіцієнтом водонасичення і його величина може змінюватись у великому діапазоні, але його вони не враховують.

Характер розподілу напружень в ґрунтовій основі найбільше цікавить практику з точки зору подальших розрахунків деформацій основи фундаментів. Для визначення загальних деформацій рівнянь теорії пружності буде недостатньою. Тут необхідно враховувати додаткові умови, які впливають із фізичної природи ґрунтів як дисперсного середовища, тобто зміну коефіцієнта пористості при зміні тиску за законом ущільнення. Враховуючи вищезазначене, нами зроблена спроба вирішення задачі про розподіл напружень в ґрунтовому масиві від зосередженої сили прикладеної на поверхні з врахуванням коефіцієнта пористості ґрунтів.

Розподіл напружень в лінійно – деформованому масиві ґрунту при дії вертикальної зосередженої сили можливо отримати розв'язком задачі Фламана [1], шляхом врахування коефіцієнта пористості ґрунтів.

В полярних координатах рівняння рівноваги плоскої задачі з урахуванням об'ємних сил, в радіальних напрямках, мають, як відомо, вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad (1)$$

У випадку, коли об'ємні сили відсутні, тобто $R=0$, напруження (рис. 1) можуть бути виражені через функцію напружень:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2},$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right). \quad (2)$$

Підстановкою можна впевнитись, що вирази для напружень тотожно задовольняють рівнянням рівноваги, та рівнянню сумісності, яке має вид:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (3)$$

Додатково до функції ϕ Фламана [1] введемо вираз $(1 + k \cdot \exp^{-\theta^2})$, який враховує коефіцієнт пористості ґрунтів. Загальний вид функції напружень буде:

$$\phi = \frac{P \cdot r}{\pi} \cdot (1 + k \cdot \exp^{-\theta^2}) \cdot \theta \cdot \sin \theta, \quad (4)$$

де k - коефіцієнт пористості ґрунтів.

При $k=0$ даний вираз зводиться до функції Фламана. Перевіркою встановлено, що прийнята функція ϕ задовольняє рівнянням рівноваги і сумісності.

Після диференціювання функції ϕ отримаємо із виразів (2):

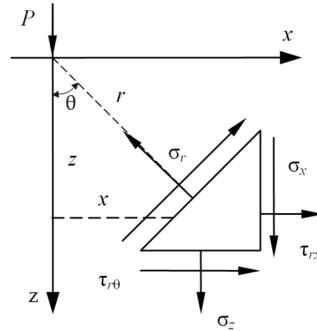


Рис. 1. Схема до визначення напружень від зосередженої сили, що діє на поверхні

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi r} \left[\cos \theta (1 + k \cdot e^{-\theta^2}) - \theta \cdot k \cdot e^{-\theta^2} \cdot (3 \sin \theta + 2\theta \cos \theta - 2\theta^2 \sin \theta) \right];$$

$$\sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (5)$$

Напруження в будь-якій точці ґрунтового масиву із координатами (x, z) (рис. 1) в прямокутних координатах буде:

$$\sigma_z = \sigma_r \cdot \cos^2 \theta = \frac{2 \cdot p \cdot k \cdot e^{-\arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2} \cdot z^2}{\pi \cdot r^2} \cdot \left[z \cdot \left(1 + \frac{1}{k \cdot e^{-\arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2}} \right) - \right.$$

$$\left. - 3 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot x + 2 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right)^3 \cdot x - 2 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2 \cdot z \right];$$

$$\sigma_x = \sigma_r \cdot \sin^2 \theta = \frac{2 \cdot p \cdot k \cdot e^{-\arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2} \cdot x^2}{\pi \cdot r^2} \cdot \left[z \cdot \left(1 + \frac{1}{k \cdot e^{-\arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2}} \right) - \right.$$

$$\left. - 3 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot x + 2 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right)^3 \cdot x - 2 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2 \cdot z \right];$$

$$\tau_{xz} = \sigma_r \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{2 \cdot p \cdot k \cdot e^{-\arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2} \cdot x \cdot z}{\pi \cdot r^2} \cdot \left[z \cdot \left(1 + \frac{1}{k \cdot e^{-\arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2}} \right) - \right.$$

$$\left. - 3 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot x + 2 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right)^3 \cdot x - 2 \cdot \arctg\left(\frac{x}{z}\right)^2 \cdot z \right], \quad (6)$$

де $r = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Формули (6) дають можливість визначити складові напружень від дії зосередженої сили, що діє на поверхні для будь-яких площадок, паралельних горизонтальній площині.

Отримані формули для напружень від дії зосередженого навантаження (6) можуть бути використані на випадок полосового навантаження, рівномірно розподіленого по підшві стрічкового фундаменту шириною $2b$.

Змінні інтегрування приведені на рис. 2, замінюючи P на $qd\xi$, вирази для σ_z , σ_x , τ_{xz} матимуть вигляд:

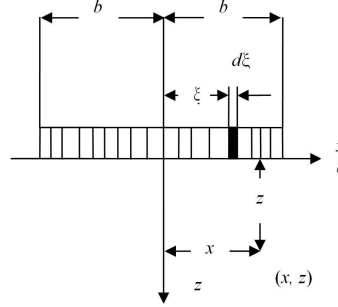


Рис. 2.Схема до визначення напружень в основі стрічкового фундаменту

$$\sigma_z = \frac{2kp}{\pi} \cdot \left[\int_{-b}^b e^{-\arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2} \cdot z^2 \cdot \left[z \left(1 + \frac{1}{k \cdot e^{-\arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2}} \right) - 3 \cdot \arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x-\zeta) + 2 \cdot \arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^3 \cdot (x-\zeta) - 2 \cdot \arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2 \cdot z \right] d\zeta \right];$$

$$\sigma_x = \frac{2kp}{\pi} \left[\int_{-b}^b e^{-\arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2} \frac{(x-\zeta)^2}{[(x-\zeta)^2 + z^2]^2} \left[z \left(1 + \frac{1}{ke^{-\arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2}} \right) - 3\arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x-\zeta) + 2 \cdot \arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^3 \cdot (x-\zeta) - 2 \cdot \arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2 \cdot z \right] d\zeta \right];$$

$$\tau_{xz} = \frac{2kp}{\pi} \left[\int_{-b}^b e^{-\arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2} \frac{(x-\zeta)z}{[(x-\zeta)^2 + z^2]^2} \left[z \left(1 + \frac{1}{ke^{-\arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2}} \right) - 3\arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x-\zeta) + 2 \cdot \arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^3 \cdot (x-\zeta) - 2 \cdot \arctg\left(\frac{x-\zeta}{z}\right)^2 \cdot z \right] d\zeta \right];$$

$$\times (x - \zeta) + 2 \cdot \arctg\left(\frac{x - \zeta}{z}\right)^3 \cdot (x - \zeta) - 2 \cdot \arctg\left(\frac{x - \zeta}{z}\right)^2 \cdot z \left] d\zeta \right]. \quad (7)$$

Приведені формули (7) дають можливість отримати аналітичні вирази компонент вектора переміщень і тензора напружень у вигляді інтегралів по області, яку займає підшва стрічкового фундаменту. Але безпосереднє визначення цих компонент пов'язано з великими труднощами. Складність полягає в тому, що підінтегральні вирази виключають можливість визначення їх в аналітичному вигляді і отримання, відповідно, виразів для вище згаданих компонент. У зв'язку з цим в даній роботі для визначення інтегралів використовується чисельний підхід, який ґрунтується на адаптивній програмі Mathcad 14. Использование цієї програми дозволяє визначити величини інтегралів так, щоб отриманий результат задовольняв встановленій точності.

Для виявлення впливу стану ґрунтів основи на характер розподілу напружень в ній розглянемо приклад. Підшва стрічкового фундаменту $b = 1.0$ м, яка заглиблена на 1.0 м від поверхні, передає на піщану основу рівномірно розподілене навантаження $q = 1$. На рис. 3 приведені епюри вертикальних напружень на осі фундаменту за глибиною.

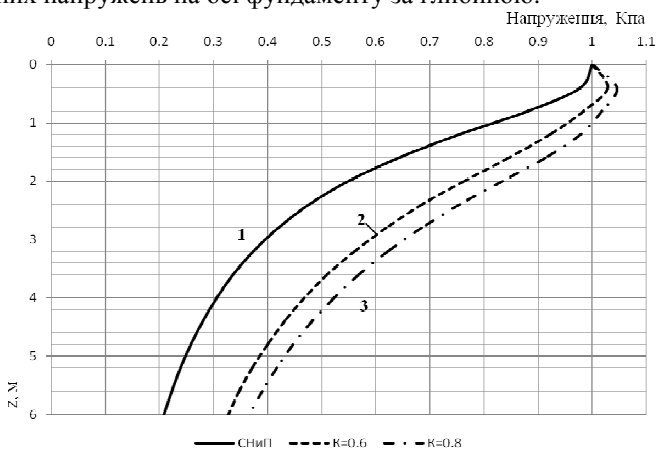


Рис. 3. Епюри розподілу вертикальних напружень по осі фундаменту: 1 - в суцільній основі, 2, 3 - в пористій основі, при коефіцієнті пористості відповідно 0.6;0.8

Якщо на глибині $z = 1$ м від підшви фундаменту напруження в суцільній основі прийняти за 100%, то при коефіцієнтах пористості $e = 0.6$; 0.8 відповідно напруження складатиме 116, 122%, а на глибині 2 м 139,

152%. Вертикальні напруження, які виникають в пористій основі, зі збільшенням коефіцієнта пористості мають значну концентрацію по осі фундаменту.

Приведені епюри вертикальних напружень в горизонтальних площинах (рис. 4, 5) наглядно показують характер розподілу їх в пористому і суцільному середовищі.

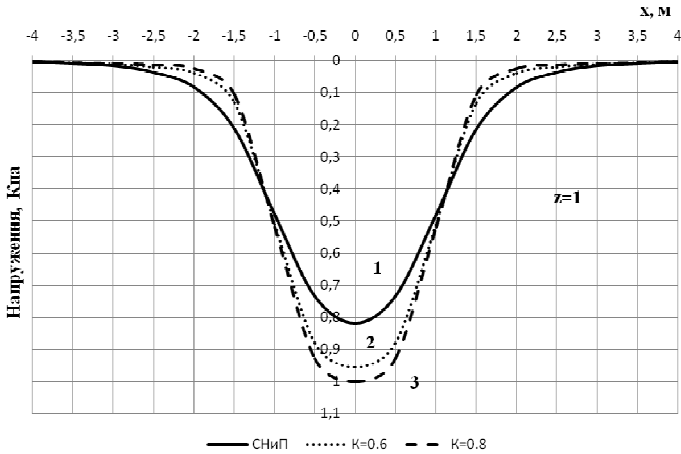


Рис. 4. Епюри вертикальних напружень на глибині $z = 1$ м від підшови фундаменту: 1- в суцільній основі; 2, 3- в пористій основі, при коефіцієнті пористості відповідно 0.6; 0.8

Враховуючи, що об'єм епюри напружень в горизонтальному перетині завжди залишається постійним і рівний зовнішньому навантаженню, очевидно, що підвищення концентрації напружень в точках, розмічених біля осі фундаменту може виникнути лише у тому випадку, коли вони компенсуються швидшим загасанням напружень при віддаленні від осі в горизонтальній площині. Це можна пояснити наявністю пор в ґрунтовій основі і низькою міцністю структурних зв'язків між частинками ґрунтів, що відрізняє її від суцільної основи.

За глибиною величини напружень як в суцільному, так і в пористому середовищі зменшуються. Більш суттєве зниження напружень має місце в суцільному середовищі, тому що в ньому пори відсутні і розподіл напружень розповсюджується на значну відстань від осі фундаменту, а в пористій основі зі збільшенням коефіцієнта пористості затухання напружень уповільнюється.

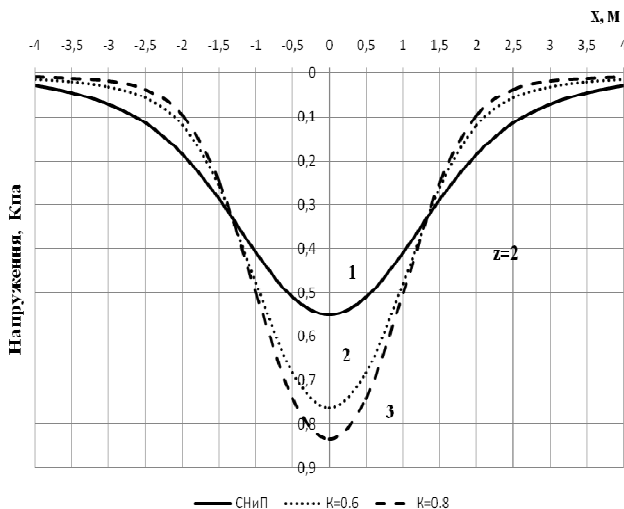


Рис.5. Епюри вертикальних напружень на глибині $z = 2$ м від підшви фундаменту: 1 - в суцільній основі, 2, 3 - в пористій основі, при коефіцієнті пористості відповідно 0.6;0.8

Висновки:

1. Коефіцієнти концентрації напружень не враховують стану ґрунтів, а тому користуватись ними проблематично.
2. В пористому середовищі по осі фундаменту має місце більша концентрація напружень в порівнянні з суцільним середовищем, що відзначалось в експериментальних даних різних авторів.
3. Зі збільшенням величини коефіцієнта пористості концентрація напружень зростає по осі стрічкового фундаменту і зменшується при віддаленні від неї в горизонтальній площині.
4. Врахування стану ґрунтів основи стрічкових фундаментів дає можливість з більшою достовірністю визначати напруження і деформований стан основи та проектувати більш економічні фундаменти.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Флорін В.А. Основи механіки ґрунтів. – Л. – М.: Госстройиздат.1959. – 359с.

Отримано 10.08.09.

С.Й. Цимбал, М. Шахмохаммаді

Распределение напряжений в основании ленточных фундаментов

Приведено решение задачи о распределении напряжений в пористой среде, которым есть грунты, от вертикальной сосредоточенной силы, которая действует на поверхности и в основании ленточных фундаментов с учетом состояния грунтов через коэффициент пористости. Проведен сравнительный анализ распределения напряжений в сплошной и пористой средах. Показано влияние коэффициента пористости на формирование напряжений в основании ленточных фундаментов.

S.Y. Tsymbal, M. Shahmohammadi

Stress distribution in the base of the strip foundations

There is a task solution about stress distribution in porous medium (it is soil), from concentrated load which is on the surface and on the base of the strip foundation together with soil condition through void ratio. A comparative analysis of stress distribution in solid and porous medium was made. The influence of void ratio on the stress formation in the base of the strip foundation was specified in this analysis.

УДК 531.31

М.В. Гончаренко, канд. техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОН ЗГУЩЕННЯ ОБЛАСТЕЙ НЕСТІЙКОСТІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Досліджується динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному навантаженні. Розглядаються два визначення стійкості: по імовірності і відносно моментних функцій. Коротко описуються процедури побудови меж областей динамічної стійкості за цими умовами при стаціонарному випадковому навантаженні. На прикладі задачі про динамічну стійкість кругової циліндричної оболонки при осьовому параметричному навантаженні побудовані області стійкості.

Досліджується вплив стохастичного характеру параметричного навантаження на конфігурацію областей стійкості пружних систем. Це питання являється частиною загальної проблеми аналізу параметричних резонансів в динамічних системах. Параметричні коливання, що часто супроводжують вимушені коливання, схожі з ними за зовнішніми проявами. Між тим в ряді випадків відомі методи депфірування і віброізоляції можуть не знизити рівень впливу, при якому виникають параметричні коливання. Тому вивчення умов виникнення і дослідження інтенсивності параметричних резонансів є актуальною проблемою у машинобудуванні, транспорті і промисловому будівництві. Такі дослідження для гармонічного параметричного навантаження викладені в роботах Н.М.Беляєв[4], Н.М.Крилов, Н.Н.Боголюбов[5], В.В.Болотін [6].

Випадковий характер більшості реальних процесів вимагає стохастичної постановки задачі. Зокрема при вітровому збудженні, навантаженні від промислового неврівноваженого обладнання та інших збудженнях доцільно використовувати модель стаціонарного випадкового впливу. Закінченими можна вважати дослідження, присвячені стійкості параметричних коливань при навантаженні типу білого шуму, оскільки в цьому випадку аналіз базується на теорії марковських процесів. Для випадкових параметричних збуджень із скінченим радіусом кореляції такого універсального підходу немає, розглянуті конкретні задачі, зокрема стійкість циліндричних оболонок [1-3].

Досліджується динамічна стійкість замкненої кругової циліндричної оболонки, шарнірно опертої по контуру. По торцях оболонки прикладене рівномірно розподілене динамічне стохастичне навантаження. Будуються межі динамічної стійкості при випадковому параметричному

навантаженні за двома визначеннями: по імовірності і відносно моментних функцій.

Рівняння руху пружної системи при параметричному навантаженні після переходу до системи рівнянь у нормальних координатах мають вигляд

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_{0i} \dot{y}_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \varphi(t) \sum_{k=1}^n g_{ik} y_k(t) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

де $y_i(t)$ – узагальнені координати, ω_{0i} – власні частоти системи, ξ_i – модальні параметри затухання, $\varphi(t)$ – стаціонарний випадковий процес, g_{ik} – компоненти матриці геометричної жорсткості.

Принциповим є той момент, що згідно із загальною теорією усереднення М.М. Боголюбова в рамках першого наближення при дослідженні динамічної стійкості можна розглядати тільки прості головні й комбінаційні резонанси. Відомо [8], якщо в пружній системі власні форми коливань співпадають з формами втрати стійкості при дії статичних навантажень, то $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$ і система (1) розпадається на незалежні рівняння, кожне з яких описує поведінку однієї з узагальнених координат:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_{0i} \dot{y}_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \varphi(t) g_{ii} y_i(t) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Відомо [6], що при гармонічному параметричному навантаженні прості резонанси знаходяться біля частот

$$\nu = \frac{2\omega_i}{m}, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ m = 1, 2, \dots \end{pmatrix}, \quad (3)$$

і межі таких зон визначаються виразом

$$\nu \approx 2\omega_i \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mu^2 \left(k_{ii}^g \right)^2 - 4\xi_i^2} \right). \quad (4)$$

Досліджується динамічна стійкість циліндричної оболонки в зоні цих же частот при стаціонарному стохастичному параметричному

навантаженні. Випадковий вплив моделюється процесом з прихованою періодичністю, кореляційна функція якого має вигляд

$$\langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \left[\cos(\theta_\alpha|\tau) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha|\tau) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau). \quad (5)$$

Спектральна щільність такого процесу описується виразом:

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha\theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2, \quad (6)$$

де θ - прихована частота, σ^2 - дисперсія, α - радіус кореляції.

При дослідженні динамічної стійкості при стохастичному навантаженні виникає проблема вибору визначення стійкості. Розглядаються два найбільш поширені визначення стійкості: стійкість відносно моментних функцій та стійкість по імовірності.

За першим визначенням для оцінки стійкості системи складаються рівняння відносно моментних функцій. Цей метод дозволяє звести дослідження стійкості рішень стохастичних диференціальних рівнянь до дослідження стійкості детерміністичних диференціальних рівнянь, що описують еволюцію моментних функцій. При дослідженні параметричних резонансів рішення системи (2) зводиться до дифузійного марківського процесу. Система диференціальних рівнянь будується методом усереднення, що ґрунтується на теоремі Стратоновича-Хасьмінського. Дослідження динамічної стійкості пружної системи зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку:

$$\det \begin{bmatrix} \left(-2\xi_j\omega_j + \frac{1}{2}g_{ij}^2S(2\omega_j) + \frac{1}{4}g_{ij}g_{ji}S^\pm \right) - \eta & \frac{1}{4}g_{ij}^2S^+ \\ \frac{1}{4}g_{ji}^2S^+ & \left(-2\xi_j\omega_j + \frac{1}{2}g_{ij}^2S(2\omega_j) + \frac{1}{4}g_{ij}g_{ji}S^\pm \right) - \eta \end{bmatrix} = 0, \quad (7)$$

де $S^\pm = S(\omega_i + \omega_j) \pm S(\omega_i - \omega_j)$.

Таким чином, задача дослідження стійкості в середньоквадратичному системі (2) зводиться до задачі на власні значення (7). Обчислюються власні значення η_i при збільшенні інтенсивності випадкового

навантаження μg_{ij} . Найменше значення μg_{ij} , при якому серед власних значень η_i з'являється хоча б одне з додатною дійсною частиною, вважається межею області стійкості.

Щоб отримати межу стійкості по імовірності, Ераертнам показав [9], що потрібно дослідити відповідні показники λ :

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \coth \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\Delta_0)^{1/2}} \alpha_1 \right] \right\} + \frac{1}{8} k_{12} k_{21} S^-, \quad (b_1 > 0), \quad (8)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \coth \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(-\Delta_0)^{1/2}} \alpha_2 \right] \right\} + \frac{1}{8} k_{12} k_{21} S^-, \quad (b_1 < 0), \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \coth \left[\frac{4(\lambda_1 - \lambda_2)}{|k_{12} k_{21}| S^+} \right] \right\} + \frac{1}{8} k_{12} k_{21} S^-, \quad (b_1 = 0), \quad (10)$$

де прийняті позначення

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{8} [(\lambda_1 + \lambda_2 + \xi \omega_1 + \xi \omega_2) - g_{12} g_{21} S(\omega_1 + \omega_2)], \\ \lambda_1 &= -\xi \omega_1 + \frac{1}{8} g_{11}^2 S(2\omega_1), \quad \lambda_2 = -\xi \omega_2 + \frac{1}{8} g_{22}^2 S(2\omega_2), \\ \alpha_1 &= \operatorname{arch} \left(\frac{K}{2|g_{12} g_{21}| S^+} \right), \quad \alpha_2 = \operatorname{arccos} \left(\frac{K}{2|g_{12} g_{21}| S^+} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$K = g_{11}^2 S(2\omega_1) + g_{22}^2 S(2\omega_2) \mp 2g_{12} g_{21} S^-, \quad \Delta_0 = \frac{1}{64} \left[K^2 - 4g_{12}^2 g_{21}^2 (S^+)^2 \right].$$

Розглядається алюмінієва циліндрична оболонка [7], що має зону згущення власних частот. Радіус оболонки 44,45 мм, довжина 88,9 мм, відношення радіусу до товщини 400. Найменші власні частоти:

$$\begin{aligned} \omega_{1,7} &= 0,706374 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \quad \omega_{1,8} = 0,714375 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \\ \omega_{1,9} &= 0,796671 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \quad \omega_{1,6} = 0,804672 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \end{aligned}$$

$$\omega_{1,10} = 0,926973 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \quad \omega_{1,5} = 1,053846 \cdot 10^4 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{1,7} = 1,091565 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \quad \omega_{1,12} = 1,281303 \cdot 10^4 \text{ рад/с}.$$

Відомо, що найбільш небезпечною є область нестійкості головного резонансу, яка знаходиться біля подвійної власної частоти. Визначаються межі областей нестійкості для кожної власної частоти для навантаження двох типів – гармонічного і стохастичного. Побудовані області нестійкості при різних значеннях радіуса кореляції $\alpha = k\omega_0$.

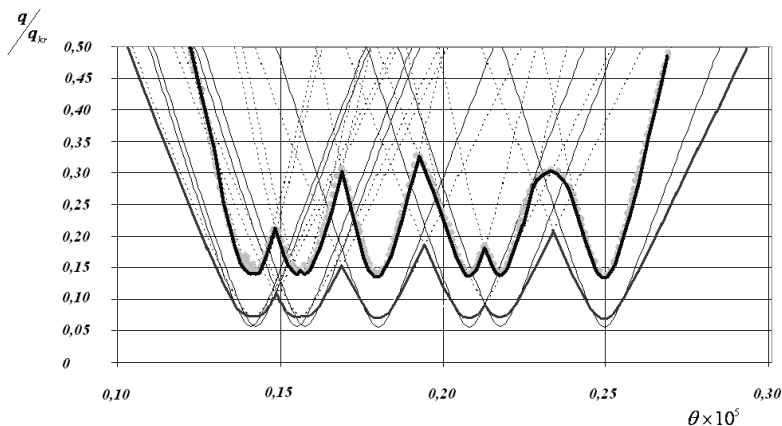


Рис.1. Межі стійкості в зонах простих головних резонансів при $k=0,25$

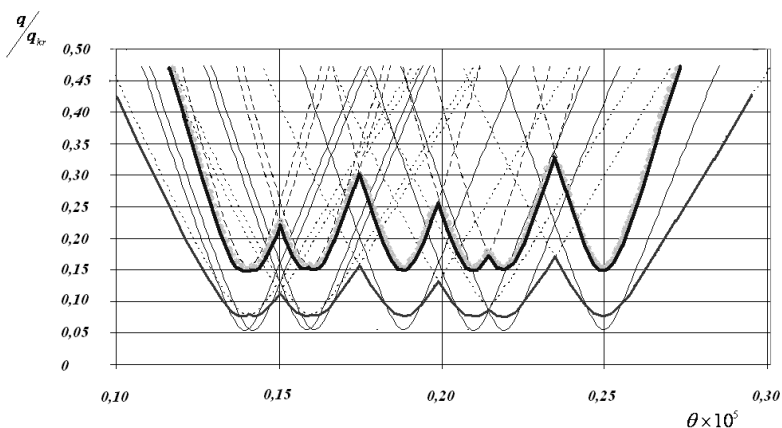


Рис.2. Межі стійкості в зонах простих головних резонансів при $k=0,5$

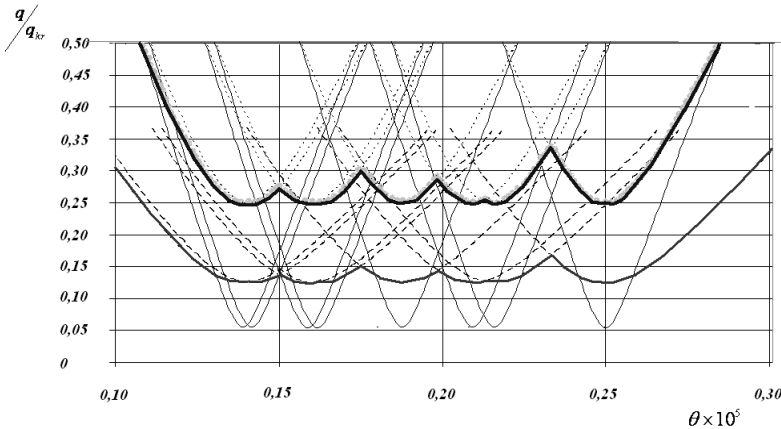


Рис.3. Межі стійкості в зонах простих головних резонансів при $k=2,0$

На рис. 1 і 2 нижня межа стійкості відповідає гармонічному навантаженню, середня лінія – межа стійкості відносно моментних функцій, верхня – межа стійкості по імовірності. Таким чином умова стійкості відносно моментних функцій є більш жорсткою, різниця складає 40-50%. Для оболонки, що розглядалась, області нестійкості при стохастичному навантаженні розширюються і в зоні згущення власних частот утворюють загальну область нестійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк С.С., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному збудженні // Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА. – 2000. – С. 51-59.
2. *Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк С.С., Отрашевська В.В.* Границі областей динамічної стійкості стиснутих силових елементів конструкцій, що піддаються додатковому поздовжньому випадковому навантаженню // Будівництво України – 2001. – №2. – С. 43-47.
3. *Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк С.С., Отрашевська В.В.* Стійкість динамічних систем при періодично нестаціонарному параметричному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд – К.: КНУБА, 2002. – Вип. 71. – С. 21-29.
4. *Беляев Н.М.* Устойчивость призматических стержней под действием продольных сил // Инж. сооружения и строит. механика.-М.: Путь, 1924.
5. *Боголюбов Н.Н., Крылов Н.М.* Введение в нелинейную механику.- К.: изд-во АН УССР, 1937. -363с.
6. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.*
7. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 314 с.

8. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
9. *Ariaratnam S.T., Wei-Chau Xie.* Lyapunov exponents and stochastic Stability of coupled linear systems under real noise excitation // Journal of applied mechanics. Transactions of the ASME. – 1992. – Vol.59. – P. 664-673.

Отримано 14.09.09.

М.В. Гончаренко

Исследование зон сгущения областей неустойчивости цилиндрической оболочки

Исследуется динамическая устойчивость упругих систем при стохастической параметрической нагрузке. Рассматриваются два определения устойчивости: по вероятности и относительно моментных функций. Коротко изложены процедуры построения границ областей динамической устойчивости при стационарной случайной нагрузке. На примере задачи про динамическую устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевой параметрической нагрузке построены области устойчивости.

M.V. Goncharenko

Investigation of cylindrical shell instability regions concentration

Dynamic stability of elastic systems under stochastic parametric loads is investigated. Two kinds of the stability determination is considered: probability stability and stability about moment functions. The technique for building of dynamic stability regions boundaries under stationary parametric loads is briefly described. Dynamic stability regions is obtained for example of the dynamic stability of a closed circular cylindrical shell subjected to longitudinal compression is investigated.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П.</i> Дослідження впливу нерівномірного розподілу температури на ресурс хвостовика лопатки газотурбінної установки	3
<i>Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О.</i> Побудова редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині	11
<i>Пискунов С.О., Гуляр О.І., Мицюк С.В.</i> Визначення ресурсу з використанням параметра пошкоджуваності при багатоциклового навантаженні	20
<i>Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.</i> Дослідження ефективності динамічного розрахунку будівельних конструкцій, що знаходяться під дією рухомих навантажень	32
<i>Гром А.А., Лізунов П.П.</i> Прецесійні коливання тонких кругових пластин змінної товщини	42
<i>Солодей І.І., Вабищевич М.О., Гуляр О.І.</i> Використання спеціальних скінченних елементів з тріщиною в задачах механіки руйнування при нестационарних динамічних навантаженнях	49
<i>Легостасв А.Д., Гречух Н.А.</i> Побудова співвідношень МСЕ для просторового попередньо напруженого скінченного елемента	65
<i>Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Вплив параметра зовнішнього навантаження на динамічну поведінку віброударної системи з ударом о м'який обмежник	77
<i>Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б., Тамілко О.А.</i> Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини	89
<i>Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Гаран І.Г.</i> Моделювання початкових недосконалостей циліндричної оболонки змінної товщини при дослідженні її стійкості при дії комбінованого навантаження	97

<i>Шкриль О.О.</i> Методи визначення J -інтеграла в дискретних моделях метода скінчених елементів	104
<i>Хромов І.В.</i> Методика розв'язання типових задач технологічної механіки пружно- пластичного стрижня з врахуванням нелінійних властивостей матеріалу .	110
<i>Шульга М.О., Григор'єва Л.О.</i> Про коливання пружних шарів з викривленими границями	120
<i>Чибіряков В.К., Жупаненко І.В.</i> Власні коливання товстої циліндричної оболонки	127
<i>Першаков В.М., Яковенко О.О.</i> Технологія зведення попередньо напруженої сталеві рами	134
<i>Гоцуляк Є.О., Шельменко А.М.</i> Розрахунок одиничної палі з урахуванням нелінійної залежності жорсткісних характеристик основи	142
<i>Цимбал С.Й., М. Шахмохаммаді</i> Розподіл напружень в основі стрічкових фундаментів	147
<i>Гончаренко М.В.</i> Дослідження зон згущення областей нестійкості циліндричної оболонки	155

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 84

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 06.11.09. Формат 60x84 1/16. Папір друк
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.
Тираж 100. Зам. № 9-

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

Віддруковано на ЗАТ “ВІПОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.