

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 86

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2010

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 16 вересня 2010 року, протокол № 57.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 86 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2010. – 162 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,
м. Київ, 03037,
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2010

УДК 539.375

В.А. Баженов, д-р техн. наук
С.О. Пискунов, канд. техн. наук
О.С. Сахаров, д-р техн. наук
О.О. Шкриль, канд. техн. наук
Д.В. Богдан

ЕФЕКТИВНІСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ J -ІНТЕГРАЛА В ЗАДАЧАХ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Наведений алгоритм розв'язання задач пружнопластичності на основі МСЕ. Розглянута методика визначення J -інтеграла методом напружень та методом реакцій. Вірогідність розв'язання задач пружнопластичності доведена на тестовій задачі про згин компактного зразка. Проведено дослідження виконання умови інваріантності J -інтеграла і доведена вірогідність його визначення при пружнопластичному деформуванні на прикладі двох тестових задач.

Вступ. Розв'язання переважної більшості задач механіки руйнування вимагає застосування чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів (МСЕ). При цьому невід'ємним етапом розв'язання задачі є обчислення параметрів механіки руйнування, найбільш універсальним з яких є J -інтеграл Черепанова-Райса [10, 11]. Як відомо, теоретично J -інтеграл є незалежним (інваріантним) від шляху інтегрування, тобто таким, величина якого не залежить від форми й розмірів контуру інтегрування та дорівнює нулю по будь-якому замкнутому контуру. В роботах [2,4] було показано, що безпосередня реалізація класичної формули для обчислення J -інтеграла із використанням величин напружень і градієнтів переміщень (метод напружень) дозволяє отримувати результати, що задовольняють умовам інваріантності, лише для обмеженого кола задач. Зважаючи на це, в згаданих роботах розроблений підхід, що орієнтований на скінченоелементне розв'язання задачі про напружено-деформований стан і ґрунтується на використанні для обчислення J -інтеграла величин вузлових реакцій і переміщень (метод реакцій). Його використання дозволило отримати інваріантні величини J -інтеграла в задачах пружного та, в часткових випадках, пружнопластичного деформування. Тому актуальним є подальше дослідження вірогідності значень J -інтеграла при появі та розвитку пружнопластичних деформацій.

Розв'язання задачі пластичності. При наявності незворотних деформацій пластичності зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається на основі співвідношень теорії пластичного течіння [5, 6]. В

цьому випадку прирощення повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$ може бути подане сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^T$ і прирощень деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^p$:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (1)$$

При використанні співвідношень теорії пластичного течіння вважається, що матеріал є пластично-нестікуваним і змінення його об'єму є лінійно-пружним:

$$\varepsilon_{i(i)}^p = 0, \quad \varepsilon_{i(i)} = \varepsilon_{i(i)}^e.$$

Прирощення пластичних деформацій визначається згідно з асоційованим законом:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}, \quad (2)$$

де $f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\vartheta_p)]^2 = 0$ – поверхня текучості, що обмежує область пружних деформацій; $\tau_s(\vartheta_p)$ – межа текучості при чистому зсуві;

$\vartheta_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ij p}}$ – параметр зміцнення Одквіста; $s_{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma^{kl} g^{ij}$ – компоненти девіатора напружень; δ_{kl} – символ Кронекера.

Чисельне моделювання процесу пружнопластичного деформування здійснюється на основі крокового алгоритму. Вибір кроку за навантаженням Δr здійснюється виходячи з необхідності вірогідного моделювання процесу деформування, зокрема урахування впливу змінення фізико-механічних характеристик матеріалу, визначення рівня деформацій пластичності та розмірів зон пластичності. При цьому значення Δr суттєво залежать від механічних характеристик матеріалу (параметрів кривих пружнопластичного деформування) та характеру змінення зовнішнього навантаження.

На кожній ітерації n кроку m вектор прирощень невідомих амплітудних переміщень $\{\Delta U\}_n^m$ системи нелінійних рівнянь МСЕ може бути поданий у вигляді [0]:

$$\{\Delta U\}_n^m = \{\Delta U\}_{n-1}^m + \beta [K]^{-1} \left(\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m \right), \quad (3)$$

де β – параметр релаксації ($1 \leq \beta < 2$), $\{Q\}^m$ – вектор повних вузлових навантажень на кроці m ; $[K]$ – матриця жорсткості, $\{R\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n кроку m , обчислений за величинами повних напружень σ^{ij} :

$$(\sigma^{ij})_n^m = (\sigma^{ij})_{n-1}^m + (\Delta\sigma^{ij})_n^m, \quad (4)$$

змінення яких відбуваються внаслідок прирощення зовнішнього навантаження і відповідного нелінійного деформування матеріалу.

Величини напружень, отримані після розв'язання задачі пружнопластичності в загальному випадку можуть перевищувати величину межі текучості матеріалу τ_s . Відповідно, після розв'язання задачі пружнопластичності в кожному скінченному елементі здійснюється перевірка умови наявності пластичного деформування:

$$\tau > \tau_s \quad (5)$$

де $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}}/2$ – поточне значення інтенсивності дотичних напружень; s_{ij} – компоненти девіатора напружень.

При виконанні умови (5) у відповідних точках конструкції проводиться визначення напружено-деформованого стану, яке пов'язано із прирощенням миттєвих деформацій пластичності. З цією метою на початку кожної ітерації n кроку m прирощення напружень $(\Delta\sigma_{ij})_n^m$ в (4) визначаються згідно з законом Гука за величиною прирощення повних деформацій. Дійсні значення напружень $(\overline{\sigma}_{ij})_n^m$, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються за формулою:

$$(\overline{\sigma}_{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\sigma_{ij})_n^m + (\overline{s^{ij}})_n^m = (\sigma_o)_n^m + (\overline{s^{ij}})_n^m, \quad (6)$$

де $(\overline{s^{ij}})_n^m$ – компоненти девіатора дійсних напружень, що враховують прирощення нелінійних деформацій пластичності.

Визначення компонент девіатора $(\overline{s^{ij}})_n^m$ при наявності деформацій

пластичності здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості τ_s [12]:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(s^{ij}\right)_n^m \frac{\tau_s}{\tau}. \quad (7)$$

Напруження, отримані за формулами (6), (7), використовуються для подальшого обчислення вектора вузлових реакцій і перевіряються за умовою збіжності ітераційного процесу, в разі виконання якої ітераційний процес визначення миттєвих деформацій пластичності припиняється. Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій пластичності $\left(\Delta\varepsilon_{ij}^p\right)_m$:

$$\left(\Delta\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) \left(\overline{s^{ij}}\right)_m / G_1, \quad (8)$$

та повних величин деформацій пластичності:

$$\left(\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(\Delta\varepsilon_{ij}^p\right)_m. \quad (9)$$

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\left\{\{Q\}^m - \{R\}_n^m\right\} \leq \zeta \left\|\{Q\}^m\right\|, \quad (10)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ – параметр точності розв’язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отриманого розв’язку.

При реалізації алгоритму (10), зважаючи на незначну відмінність прирощень параметрів напружено-деформованого стану порівняно з їх повними значеннями на двох послідовних кроках за навантаженням, для підвищення ефективності запропонованого алгоритму та, відповідно, зменшення обсягу обчислювальних витрат було реалізовано підхід, що базується на застосуванні екстраполяції прирощень переміщень $\left\{\Delta\bar{U}\right\}_1^m$ за їх величинами, отриманими на попередньому кроці $\left\{\Delta U\right\}^{m-1}$:

$$\left\{\Delta\bar{U}\right\}_1^m = \left\{\Delta U\right\}^{m-1} \frac{\left\{\Delta Q\right\}^m}{\left\{\Delta Q\right\}^{m-1}}. \quad (11)$$

де $\left\{\Delta Q\right\}^m$ і $\left\{\Delta Q\right\}^{m-1}$ – прирощення навантаження даного і попереднього

кроків.

За величиною отриманих переміщень обчислюються вузлові реакції $\{R\}_1^m$, які в подальшому використовуються в ітераційному процесі. Вірогідність і ефективність викладеного алгоритму показана в роботах [0,3].

Обчислення J -інтеграла за методом напружень. Загальна формула обчислення J -інтеграла має наступний вигляд:

$$J_k = \frac{1}{\Delta} \left(W n_k - \sigma^{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j \right) dF, \quad (12)$$

де $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ – величина повної енергії деформування; $\sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напружень і деформацій; n_k, n_j – проекції зовнішньої нормалі до поверхні інтегрування F на напрямки розвитку тріщини k і вісі місцевої системи координат x ; u_i – переміщення.

При скінченоеlementному обчисленні J -інтеграла розміри області в околі точки фронту тріщини визначаються параметрами дискретної моделі. Розглянемо контур для обчислення J -інтеграла в околі точки фронту тріщини. Контур охоплює вершину тріщини і проходить через центри СЕ на певній відстані від неї (рис.1).

В межах кожного скінченного елемента інтегрування здійснюється за віссю, вздовж якої контур перетинає СЕ. У межах тих СЕ, що містять кутові точки контуру, інтегрування проводиться за двома ділянками, довжина кожної з яких дорівнює $\Delta s_j / 2$ і відповідає напрямкам осей x_1 і x_2 .

Із врахуванням СЕ подання контуру формула обчислення J -інтеграла на основі величин напружень та градієнтів переміщень, визначених в центрі СЕ, набуде вигляду:

$$J = J(\sigma, \zeta) = \sum_{j=1}^{N_3} (W \Delta s)_j - \sum_{j=1}^{N_1} (W \Delta s)_j - \sum_{j=1}^{N_1} \left(n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2} \Delta s \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2} \Delta s \right)_j - \sum_{j=1}^{N_3} \left(n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'2} \Delta s \right)_j, \quad (13)$$

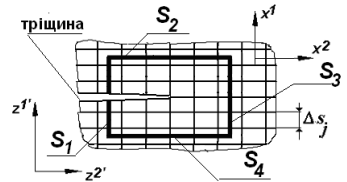


Рис. 1. Контур для обчислення J -інтеграла

де N_1, N_2, N_3, N_4 – загальна кількість СЕ на ділянках S_1, S_2, S_3, S_4 , крізь які проходить обраний для обчислення J -інтеграла контур; Δs_j – довжина відрізка контура в межах j -го СЕ.

Розв’язання двовимірних задач в пружній постановці показало, що для отримання вірогідних результатів в околі вершини тріщини достатньо використовувати СЕ із розмірами Δs_j в 10 разів меншими від довжини тріщини, а контур інтегрування повинен проходити в третьому від вершини тріщини СЕ [0,2].

Вірогідність такої методики визначення J -інтеграла в задачах пружнопластичного деформування було апробовано при розв’язанні задачі про деформування компактного зразка (рис. 2). Зразок виготовлений зі сталі 12Х2МФА, фізико-механічні характеристики якої $E = 2.05 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$ [7]. Закон пластичного деформування має наступний вигляд :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_m} = 1 + 0.645(\bar{\varepsilon}_p)^{0.388},$$

де $\sigma_m = 637$ МПа - межа текучості; $\bar{\sigma}$ - інтенсивність нормальних напружень; $\bar{\varepsilon}_p$ - інтенсивність деформацій.

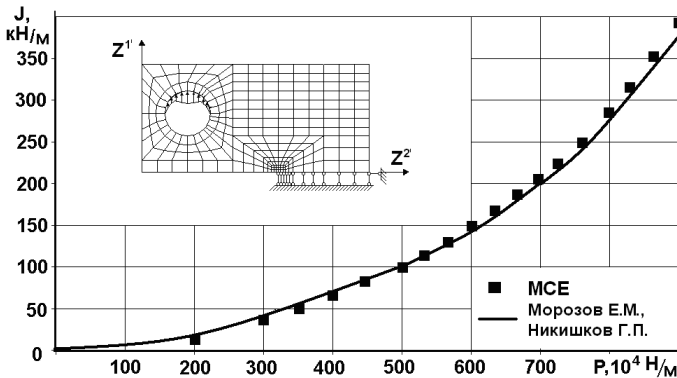


Рис. 2. Розподіл J -інтеграла в компактному зразку

Традиційно розрахунок компактного зразка здійснюється в умовах плоскої деформації. Дискретна модель, при якій досягається збіжність результатів визначення напружено-деформованого стану, показана на

рис. 2 Отримані значення J -інтеграла при різних величинах навантажень збігаються з наведеними в [7].

Обчислення J -інтеграла за методом реакцій. В деяких роботах [8,9] зазначається, що при наявності пружнопластичних деформацій значення J -інтеграла, обчислені в дискретних моделях МСЕ, втрачають інваріантність. Зважаючи на це в роботі [2], шляхом подання величин енергії деформування і градієнтів переміщень через величини вузлових реакцій і переміщень був отриманий вираз дискретного аналога J -інтеграла.

Розглянемо фрагмент контура інтегрування в межах СЕ. Величина енергії деформування СЕ W , що обчислена вздовж позначеного на рис. 3 відрізка контуру Δs_j , дорівнює:

$$(W \Delta s)_j = -\frac{1}{2(\Delta z^{2'})} \{u\}_j^T \{R\}_j, \quad (14)$$

де $\{u\}_j = \left\{ \left\{ u_{k'} \right\}_j \right\}$, $\{R\}_j = \left\{ \left\{ R_{k'} \right\}_i \right\}$ – вектори переміщень і вузлових

реакцій j -го СЕ, компоненти яких показані на рис. 3: індекс i відповідає номерам вузлів у межах СЕ, $i=1,2,3,4$, індекс k' – напрямкам осей базисної системи координат $z^{k'}$.

Усереднені величини вузлових реакцій, що діють вздовж сторін 2-4 і 1-3 СЕ, з використанням величин напружень можуть бути представлені у вигляді:

$$R_{2-4}^{k'} = n_i \sigma^{ik'} \frac{\Delta s}{2},$$

$$R_{1-3}^{k'} = n_i \sigma^{ik'} \frac{\Delta s}{2}.$$

В той же час ці величини можуть бути представлені з використанням вузлових реакцій СЕ:

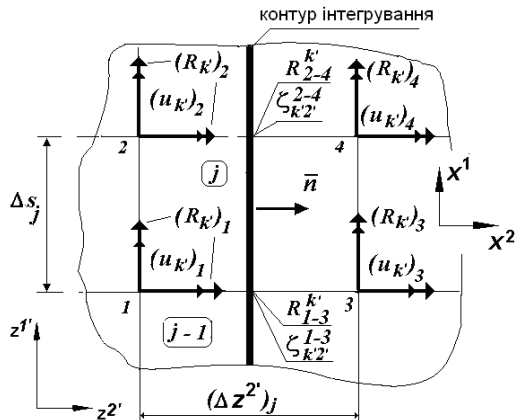


Рис. 3. Відрізок контуру інтегрування в межах i -го СЕ

$$R_{2-4}^{k'} = \frac{(R^{k'})_2 + (R^{k'})_4}{2}, \quad R_{1-3}^{k'} = \frac{(R^{k'})_1 + (R^{k'})_3}{2}.$$

Аналогічно можуть бути представлені величини градієнтів переміщень на сторонах 1-2 і 3-4 розглянутого СЕ:

$$\zeta_{k'2'}^{2-4} = \frac{(u_{k'})_4 - (u_{k'})_2}{\Delta z^{2'}}, \quad \zeta_{k'2'}^{1-3} = \frac{(u_{k'})_3 - (u_{k'})_1}{\Delta z^{2'}}.$$

З урахуванням введених позначень формула (13) для контурного інтеграла набуде вигляду:

$$\begin{aligned} J_{II} = J(u, R) = & \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j^T \{R\}_j - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta z^{2'})_j} \{u\}_j^T \{R\}_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_1} \left(R^{k'} \frac{(\{u_{k'}\}_3 + \{u_{k'}\}_4) - (\{u_{k'}\}_1 + \{u_{k'}\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(R^{k'} \frac{\{u_{k'}\}_4 - \{u_{k'}\}_2}{2\Delta z^{2'}} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_3} \left(R^{k'} \frac{(\{u_{k'}\}_3 + \{u_{k'}\}_4) - (\{u_{k'}\}_1 + \{u_{k'}\}_2)}{2\Delta z^{2'}} \right)_j, \end{aligned} \quad (15)$$

Для зазначеного виразу в [2] була доведена його інваріантність для дискретної моделі, регулярної в напрямку зростання тріщини.

Результати дослідження збіжності величин J -інтеграла при пружнопластичному деформуванні. При розв'язанні тестових задач проведені дослідження збіжності величин J -інтеграла за характерним розміром контуру інтегрування при пружнопластичному деформуванні при його обчисленні методом напружень та методом реакцій. Розглянуто тестові приклади про розтяг прямокутної пластини з центральною тріщиною (рис. 4), і деформування прямокутної пластини з боковою тріщиною (рис. 7). Матеріал об'єктів – сталь 12Х2МФА [7], фізико-механічні характеристики якої наведені в попередньому прикладі. Дослідження проведені із використанням регулярних дискретних моделей, характерний розмір скінчених елементів складає 1/10 довжини тріщини. Для обчислення величини J -інтеграла обрані контури інтегрування, що являють собою квадрат з рівновіддаленими від вершини тріщини сторонами. Ця відстань характеризується кількістю СЕ N_e , через середину останнього з яких проходить контур інтегрування. Надалі

величина N_e використовується для позначення таких П-подібних контурів інтегрування (П-контурів).

Розв'язання тестової задачі про розтяг пластини з центральною тріщиною проводилось до моменту появи у вершині тріщини пластичних деформацій у 7%. Внаслідок симетрії дискретна модель побудована для чверті пластини.

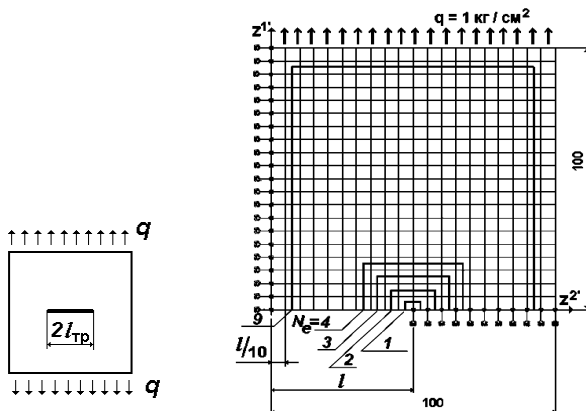


Рис. 4. Розрахункова схема і дискретна модель пластини з центральною тріщиною

Аналіз результатів проведений шляхом співставлення абсолютних величин J -інтеграла та їх похибок, отриманих при різних розмірах контура інтегрування. Похибка δ обчислена по відношенню до значення J -інтеграла, отриманого на контурі при $N_e=9$. Результати розрахунку показали, що із розвитком пружнопластичних деформацій значення J -інтеграла не задовільняють умовам інваріантності. В той же час, при збільшенні контуру інтегрування вони прямують до однієї величини. На рис. 5 і рис. 6 наведені відповідні залежності при навантаженні $q=5000$ кг/см, що відповідає рівню деформацій пластичності в 7%. Як можна побачити з результатів, метод реакцій досягає збіжності при меншій розмірності контуру інтегрування, ніж метод напружень (рис.7).

Аналогічні дослідження були проведені на задачі про пружнопластичне деформування квадратної пластини з боковим надрізом під впливом розтягуючого навантаження (рис.7).

При навантаженні $q=2300$ кг/см рівень пластичних деформацій в околі вершини тріщини складає 6,6%. Збіжність абсолютних значень J -інтеграла та похибка їх обчислення в залежності від розміру контура інтегрування при такому рівні пластичності наведено на рис. 8 і рис. 9.

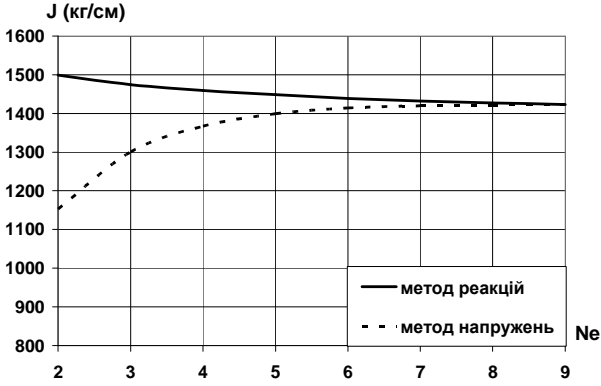
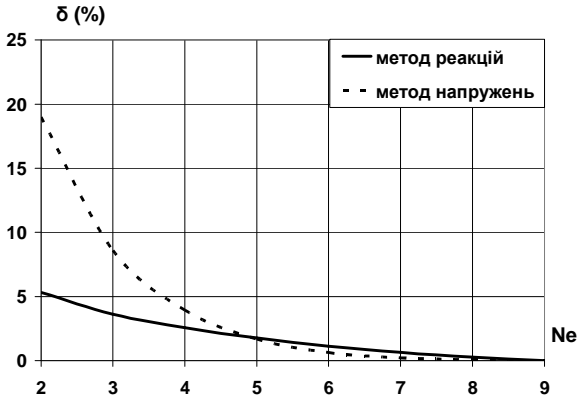
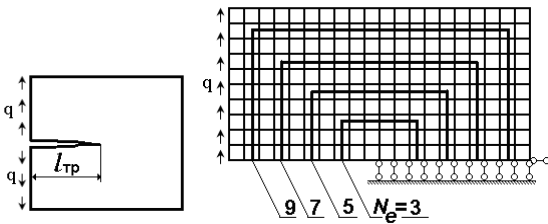
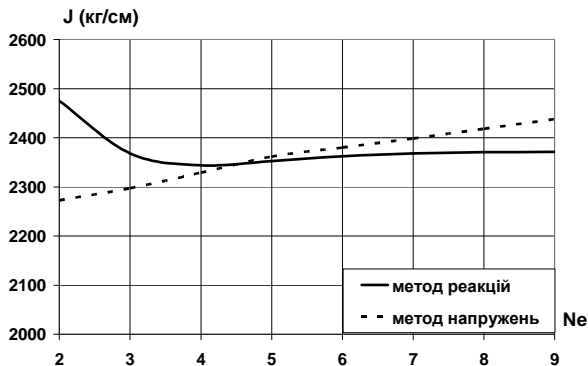
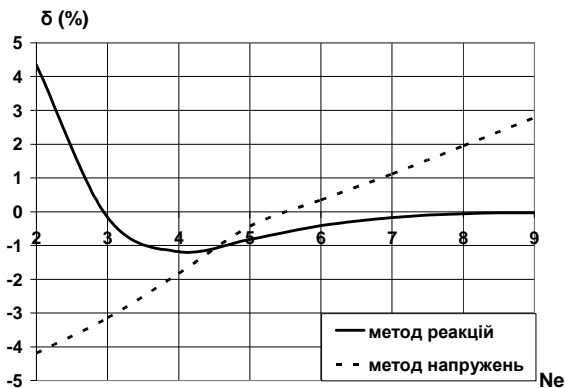
Рис. 5. Збіжність J -інтеграла за розміром контура інтегруванняРис. 6. Похибка J -інтеграла за різних контурів інтегрування

Рис. 7. Розрахункова схема і дискретна модель пластини з боковим надрізом

Рис.8. Збіжність J -інтеграла за розміром контура інтегруванняРис.9. Похибка J -інтеграла за різних контурів інтегрування

Як можна побачити з графіку, в цьому тестовому прикладі збіжність методу реакцій є кращою не лише за кількісними показниками: величини і похибка результатів методу реакцій стабілізуються в межах 1% вже при $Ne=5$, в той час як похибка результатів методу напружень навіть при $Ne=9$ не має тенденції до зменшення.

Необхідно відзначити, що ці результати аналізу збіжності і вірогідності узгоджуються із отриманими авторами в роботі [2], де при аналізі інваріантності результатів обчислення J -інтеграла в задачі про деформування тіла з боковою тріщиною було показано, що метод реакцій на відміну від методу напружень, дозволяє отримувати інваріантні розподілення J -інтеграла.

Таким чином, метод реакцій забезпечує кращу збіжність результатів ніж метод напружень, який, в окремих випадках не дозволяє досягти збіжності результатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Метод реакцій для обчислення J -інтеграла в просторових нелінійних задачах механіки руйнування// Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2006.- Вип. 79.- С. 3-17.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П.* Алгоритм розв'язання просторової задачі термовязкопружнопластичності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості// Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2006.- Вип. 78.- С. 3-17.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкріль А.А.* Метод определения инвариантного J -интеграла в конечно-элементных моделях призматических тел // Прикладная механика. 2008, 44, №12– с.70-82.
5. *Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В.* Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. – 1958. – 22, №1. – с.78-89.
6. *Коротких Ю.Г., Белевич С.М.* Основные уравнения термопластичности при сложном нагружении // Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький, 1969. – с.134-141.
7. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 256 с.
8. *Носиков А.И., Горохов М.Ю., Семенов А.С., Мельников Б.Е.* Инвариантность J -интеграла для трещины в материале с негладкой диаграммой деформирования.// Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: Тр. VI Межд. конф. – С.-Петербург: СПбГТУ, 2005. – С. 350–359.
9. *Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х.* Вычислительная механика разрушения / Пер. с японск. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
10. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640с.
11. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks // J. Appl. Mech. – 1968 P.379-386.
12. *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений. – В кн.: Вычислительные методы в гидротехнике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.

Отримано 14.06.10

Баженов В.А., Пискунов С. О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А., Богдан Д. В.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ J -ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ РЕАКЦИЙ В ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Приведен алгоритм решения задач упругопластичности на основе МКЭ. Рассмотрена методика вычисления J -интеграла методом напряжений и методом реакций. Достоверность решения задач упругопластичности доказана на тестовой задаче про изгиб компактного образца. Проведено исследование выполнения условия инвариантности J -интеграла и доказана вероятность его определения при упругопластическом деформировании на примере двух тестовых задач.

Bazhenov V., Piskunov S., Saharov A., Shkriil' A., Bogdan D.

THE DETERMINE EFFICIENCY OF J -INTEGRAL BY THE REACTIONS METHOD IN ELASTOPLASTIC DEFORMATION PROBLEMS

An algorithm for solving of elastic-plastic problem based on the FEM was presented. The procedure of J -integral calculation applying the methods of stresses and reactions was considered. The reliability of elastic-plastic problem solving was proved by means of the test problem solution concerning a compact specimen under bending. The condition of invariance of J -integral was studied and probability of its determination under elastoplastic deformation was proved through the two worked examples of test problems.

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук**О.А. Киричук**, д-р техн. наук**О.В. Кузько****О.М. Палій**

РОЗРАХУНОК ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОЛОНКИ ПАЛИВНОГО РЕЗЕРВУАРУ

Проведений аналіз впливу статичного тиску рідини на спектр власних частот резервуару для зберігання палива. На першому етапі обчислень в геометрично-нелінійній постановці розрахований напружено-деформований стан оболонки баку при різних рівнях наповненості паливом. Одержано п'ять нижчих власних частот та форм коливань порожнього бака паливного резервуару. Визначені власні частоти та форми коливань баку при різних рівнях наповненості його паливом.

Проблема охорони навколишнього середовища є однією з важливих задач, пов'язаних з сучасним науково-технічним прогресом. Особливого захисту вимагає природа Антарктики – унікального району Земної кулі, який є природним заповідником. Високі міжнародні стандарти збереження довкілля в Антарктиці мають принципове значення в районах розташування наукових антарктичних станцій, де наявний посилений тиск на навколишнє середовище з боку засобів забезпечення життєдіяльності дослідників і технічного персоналу [1]. Зокрема, одним з джерел можливого забруднення довкілля в Антарктиці є резервуари з паливом, оскільки витік палива є суттєвою загрозою забруднення навколишнього середовища, а ліквідація наслідків таких забруднень в умовах Антарктики вимагає великих фінансових і часових затрат.

На українській антарктичній станції Академік Вернадський встановлено зварений із штампованих і вигнутих металевих елементів резервуар циліндричної конструкції з подвійними стінками для дизельного пального ємністю 200 м³. Зовнішня герметична ємність оточує внутрішню герметичну ємність для палива і є додатковим захистом довкілля від можливого витіку пального. Основні розміри елементів резервуару: висота внутрішньої стінки становить 5,96 м, висота зовнішньої – 6,58 м, внутрішній діаметр – 6,63 м, зовнішній – 6,96 м, товщина стінок – 5 мм.

Експлуатація резервуару передбачається протягом 40 років в умовах вітрового навантаження із швидкістю до 45 м/с; наявності помірних землетрусів в районі станції, вологості до 100%; перепаду температур від +10⁰С до -50⁰С; снігового навантаження висотою до 2 м, утворення водного конденсату в просторі між стінками резервуара.

З метою підвищення екологічної безпеки передбачається розробка автоматизованої системи контролю функціонального стану резервуару з подальшим впровадженням її на українській антарктичній станції. В конструкції резервуара планується встановити комплекс вібраційних датчиків та датчиків акустичної емісії, які будуть давати інформацію для моніторингу функціонального стану конструкції паливного баку та для математичного моделювання її динамічних характеристик. Це в першу чергу стосується значень власних частот і форм коливань оболонки внутрішнього баку в залежності від рівня його наповненості рідиною, критичних амплітуд коливань елементів конструкції резервуару під дією періодичних вітрових навантажень та сейсмічних збурень, зміни напружено-деформованого стану конструкції від добових перепадів температур і атмосферних впливів.

В роботі [2] розглянуто задачу про частоти власних коливань повністю заповнених рідиною циліндричних оболонок для граничних умов вільного опирання та жорсткого зацімлення. В роботі [3] розглянуто задачу про вимушені коливання тонких циліндричних оболонок, повністю заповнених ідеальною нестисливою рідиною. В даній роботі для визначення впливу заповненості баку рідиною на спектр власних частот був застосований пакет прикладних програм кінцево-елементного аналізу конструкцій, що застосовуються в авіонавтиці та космічних дослідженнях, – NASTRAN [4]. З його допомогою були обчислені перші п'ять власних частот та форм коливань порожнього баку паливного резервуару, визначені власні частоти та форми коливань баку, заповненого на $\frac{1}{4}$ частину, на половину, на $\frac{3}{4}$ та повністю заповненого дизельним паливом (густина палива $1,0 \text{ т/м}^3$). На першому етапі обчислень був розрахований напружено-деформований стан (НДС) оболонки баку в геометрично-нелінійній постановці при різних рівнях наповненості паливом. Результати обчислень приведені на рис. 1 (*a* – бак повністю заповнений, *б* – бак заповнений на $\frac{3}{4}$ об'єму, *в* – заповнений на $\frac{1}{2}$ об'єму, *г* – заповнений на $\frac{1}{4}$ об'єму).

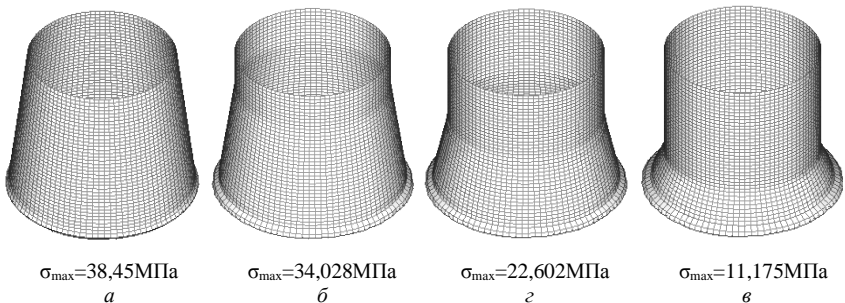


Рис. 1

Форми власних коливань паливного баку, що відповідають спектру нижчих частот, приведені на рис. 2 - 5.

На рис. 2 приведені перші три форми власних коливань порожнього резервуару при відповідних значеннях власних частот $\omega_{i(j)}$. Індекс, що стоїть в дужках, означає кількість хвиль в коловому напрямі деформованої поверхні оболонки.

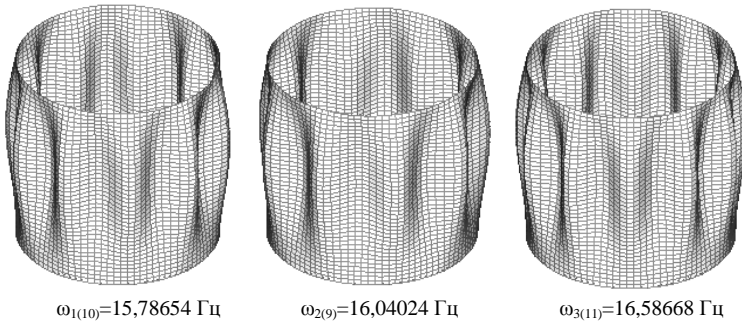


Рис. 2

На рис. 3 зображені циклічно симетричні форми власних коливань паливного баку заповненого на $\frac{1}{4}$ об'єму.

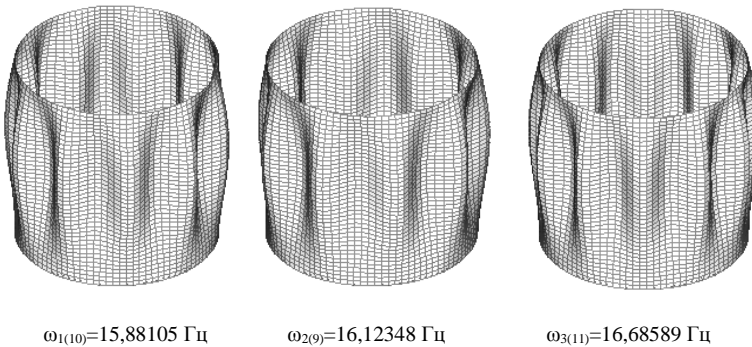
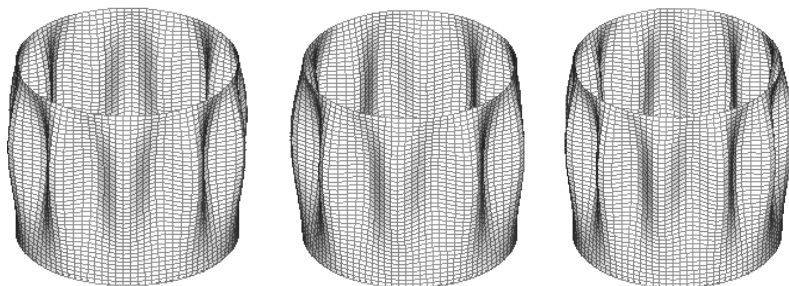


Рис. 3

На рис. 4-6 зображені циклічно симетричні форми власних коливань оболонки паливного резервуару заповненого на $\frac{1}{2}$ об'єму, на $\frac{3}{4}$ об'єму та повністю заповненого рідиною, відповідно.

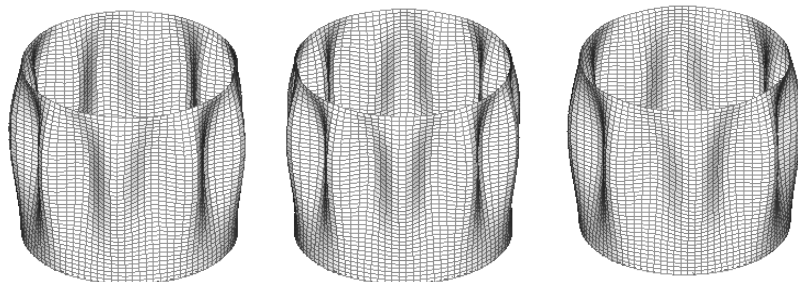


$$\omega_{1(10)}=17,22213 \text{ Гц}$$

$$\omega_{2(9)}=17,27035 \text{ Гц}$$

$$\omega_{3(11)}=18,10919 \text{ Гц}$$

Рис. 4

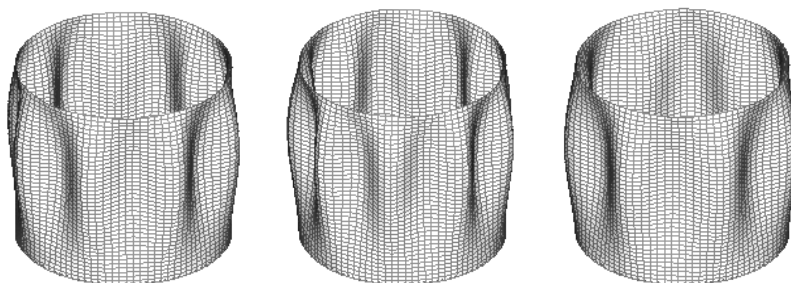


$$\omega_1(9)=20,6395 \text{ Гц}$$

$$\omega_2(10)=21,10619 \text{ Гц}$$

$$\omega_3(8)=21,18055 \text{ Гц}$$

Рис.5



$$\omega_{1(8)}=24,67337 \text{ Гц}$$

$$\omega_{2(9)}=25,06379 \text{ Гц}$$

$$\omega_{3(7)}=25,68818 \text{ Гц}$$

Рис. 6

В таблиці 1 подані значення власних частот паливного баку в залежності від його наповненості рідиною.

Таблиця 1

Наповненість баку	Власні частоти паливного баку				
	ω_1 , Гц	ω_2 , Гц	ω_3 , Гц	ω_4 , Гц	ω_5 , Гц
0	15,78654 (n=10)	16,04024 (n=9)	16,58668 (n=11)	17,59977 (n=8)	18,18681 (n=12)
$\frac{1}{4}$	15,87049 (n=10)	16,10807 (n=9)	16,67885 (n=11)	17,64732 (n=8)	18,28323 (n=12)
$\frac{1}{2}$	17,22213 (n=10)	17,27035 (n=9)	18,10919 (n=11)	18,54195 (n=8)	19,69274 (n=12)
$\frac{3}{4}$	20,6395 (n=9)	21,10619 (n=10)	21,18055 (n=8)	22,23647 (n=11)	23,19035 (n=7)
1	24,67337 (n=8)	25,06379 (n=9)	25,68818 (n=7)	26,32489 (n=10)	28,10056 (n=11)

Наведені на малюнках та в таблиці результати дозволяють зробити наступні висновки: числові значення нижчих власних частот паливного резервуару зростають по мірі наповненості бака рідиною. Форми коливань залишаються незмінними для порожнього баку, заповненого на чверть та наполовину, а при наповненості на $\frac{3}{4}$ об'єму та повністю наповненого кількість хвиль в коловому напрямку в основному зменшується, крім випадку для ω_4 , коли по мірі наповненості резервуару рідиною кількість хвиль в коловому напрямі зростає.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Проток про охорону навколишнього середовища до Договору про Антарктику (Мадрид, 4 жовтня 1991р.) Закон України №2284 – III від 22.02.2001р.
2. П.С. Ковальчук, Л.А. Крук. О спектре собственных частот колебаний круговых цилиндрических оболочек, полностью заполненных жидкостью. – Прикладная механика. – 2006. – 42, №5. – с.42-49.
3. П.С. Ковальчук, Н.П. Подчасов, Г.Н. Пучка. Исследования вынужденных колебаний заполненных жидкостью цилиндрических оболочек с учетом нелинейного взаимодействия различных изгибных форм. – Прикладная механика. – 2006. – 42, №8. – с.97-106.
4. Д.Г. Шимкович. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448с.

Отримано 23.04.10

Гайдайчук В.В., Киричук А.А., Кузько А.В., Палий О.Н.

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОЛОЧКИ ТОПЛИВНОГО РЕЗЕРВУАРА

Проведен анализ влияния статического давления жидкости на спектр собственных частот резервуара для хранения топлива. На первом этапе вычислений в геометрически нелинейной постановке рассчитано напряженно-деформированное состояние оболочки бака при различных уровнях наполнения топливом. Получены пять низших собственных частот и форм колебаний пустого бака топливного резервуара. Определены собственные частоты и формы колебаний бака при различных уровнях наполнения топливом.

Gaydaychuk V.V., Kyrychuk A.A., Kuzko A.V., Paliy O.N.

CALCULATION of DYNAMIC CHARACTERISTICS of the FUEL TANK SHELL

The analysis of influence of static pressure of a liquid on a spectrum of own frequencies of the tank for storage of fuel is lead. At the first stage of calculations in geometrically nonlinear statement the stress-strain state of an tank shell is calculated at various levels of fullness by fuel. Five lowest own frequencies and forms of fluctuations of an empty tank of the fuel tank are received. Own frequencies and forms of fluctuations of the tank at various levels of fullness by fuel are determined.

УДК 539.3

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
 О.О. Лук'яненко, канд. техн. наук
 В.В. Шах

ОЦІНКА РІВНЯ КОНСТРУКЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ НАФТОНАЛИВНОГО РЕЗЕРВУАРА

Визначено рівень конструкційної безпеки нафтоналивного резервуара з урахуванням реальних недосконалостей форми, які виникли після десятирічної експлуатації об'єкта. На основі ймовірнісного підходу Болотіна, методик дослідження стійкості недосконалих оболонки і прогнозування ризику аварії будівельних об'єктів визначені математичне очікування рівня надійності резервуара, фактичний рівень ризику аварії та безпечний ресурс об'єкта.

Конструкційна безпека будівельного об'єкта характеризується його здатністю сприймати перенавантаження в аварійних ситуаціях і трактується як відсутність в об'єкті недопустимого ризику аварії. Статистика показує, що близько 80% випадків аварій об'єктів відбувається за рахунок людських помилок при їх проектуванні, будівництві та експлуатації [1,2]. Будівельний об'єкт, який має достатній запас міцності по відношенню до зовнішніх впливів, може бути ненадійним по відношенню до людських помилок. Тому проблема визначення конструкційної безпеки та ресурсу об'єкта є важливою, особливо це стосується споруд з підвищеною вимогою безпеки.

Конструкційна безпека об'єкта оцінюється на основі теорем теорії ймовірності, підходах нечіткої логіки та методах прийняття рішень в умовах невизначеності [3,4]. Дослідження показують, що до закінчення будівництва за рахунок помилок людей фактична ймовірність аварії P_{Φ} у порівнянні з теоретичною (проектною) P_T збільшується у декілька разів, тобто виникає додаткова ймовірність аварії P_D . Закони розподілу зовнішнього впливу, теоретичної та фактичної реакції об'єкта на цей вплив представлені на рис. 1.

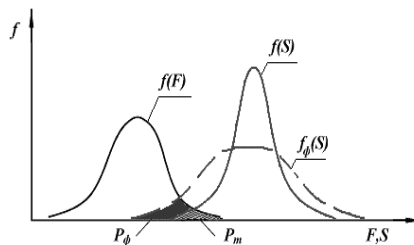


Рис. 1. Закони розподілу зовнішнього навантаження, теоретичної та фактичної реакції об'єкта на цей вплив

Для визначення додаткової ймовірності аварії застосовується формула Байеса:

$$P_D = P_T \cdot P(C/A) / [P_T \cdot P(C/A) + (1 - P_T) \cdot P(C/A^*)]. \quad (1)$$

Тут вводяться дві протилежні події: C – існують помилки при будівництві, C^* – не існують. Ймовірність події C при умові, що аварія відбудеться позначено через $P(C/A)$; через $P(C/A^*)$ – при умові, що аварія не відбудеться.

Ймовірності аварії є малими величинами порядку 10^{-6} ступені. Для їх сприйняття вводиться поняття ризику аварії об'єкта, величина якого визначається за формулою

$$r = P_\Phi / P_T. \quad (2)$$

Ризик аварії показує перевищення фактичною ймовірністю аварії теоретичної, що вноситься за умовчанням при проектуванні будівельного об'єкта. Величина ризику аварії завжди більше за 1. Закон його розподілу відповідає однопараметричному розподілу Релея (рис. 2):

$$f(r) = \frac{(r-1)}{a} \exp\left[-\frac{(r-1)^2}{2a}\right], \quad (3)$$

де параметр $a = \frac{(R-1)}{1,25}$, $R = \frac{1}{M_p} \exp\left[-\frac{(r-1)^2}{2a}\right]$ – середнє значення

ризик аварії, M_p – математичне очікування випадкової величини рівня надійності об'єкту, яке характеризує його відповідність до вимог проекту по забезпеченню міцності, жорсткості та стійкості.

Дослідження показали, що існують порогові значення ризику аварії, які характеризують безпечний, аварійний та граничний стан об'єкту. Вони відповідають стандартним значенням ризику аварії, які є інваріантами і не залежать від виду об'єкта. Нормальне значення R_H регламентує величину ризику аварії після закінчення будівництва. Гранично допустимий ризик аварії $R_{ГД}$ відповідає переходу об'єкта із безпечного стану у аварійний, тобто виникає необхідність проведення



Рис. 2. Закон розподілу ризику аварії об'єкта

капітальних ремонтних робіт. Граничний ризик аварії R_{Γ} відповідає стану об'єкта, при якому його несуча спроможність вичерпана і виникає пряма загроза руйнування об'єкта. Рівень конструкційної безпеки об'єкта вважається достатнім, поки фактичний ризик аварії залишається усередині області прийнятних значень, межами якої є стандартні значення ризику аварії, і також якщо фізичний знос об'єкту менше 50%.

Визначення області прийнятних значень ризику аварії пов'язано з величиною інформаційної ентропії H , яка характеризує ступінь невизначеності технічного стану будівельного об'єкта і є функцією величини ризику аварії

$$H(R) = \log_{2,15} \cdot R. \quad (4)$$

Інформаційна ентропія може бути представлена у вигляді ідеалізованого графіку (рис. 3).

Для його побудови були прийняті гіпотези, які обґрунтовані дослідженнями ресурсу конструкцій в теорії надійності [2,3]: 1 – формою моделі зростання фізичного зносу об'єкту в процесі його експлуатації є експонента; 2 – з моменту початку будівництва фізичний знос об'єкту зростає від нуля до значення, залежного від величини фактичного ризику аварії у фіксований момент часу його експлуатації; при досягненні граничного значення ризику аварії фізичний знос об'єкту стає рівним 0,95 (95%).

Залежність фізичного зносу об'єкта від величини ризику аварії дає можливість отримати важливу характеристику об'єкта – безпечний ресурс, який визначається як проміжок часу з моменту закінчення будівництва до аварійного стану об'єкта.

В роботі дана оцінка рівня конструкційної безпеки нафтоналивного резервуара після 10 років його експлуатації (рис. 4), яка виконана за допомогою розробленої авторами методики визначення надійності циліндричних оболонки з початковими недосконалістями із застосуванням імовірнісного підходу Болотіна [5] та аналітичного підходу до визначення ризику аварії будівельних об'єктів, який представлений в роботі [4].

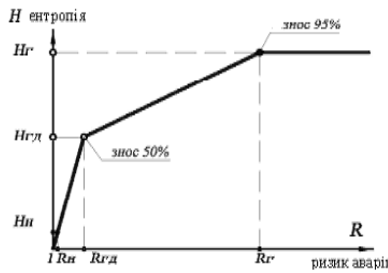


Рис. 3. Інформаційна ентропія будівельного об'єкта

Згідно імовірнісного підходу Болотіна надійність конструкції є ймовірністю того, що вона не втратить стійкість, якщо навантаження буде менше деякої заданої величини і має місце функціональна залежність критичного навантаження від величини початкової недосконалості конструкції. Надійність конструкції визначається за формулою

$$\tilde{R}(\alpha) = \text{Prob}(P_{кр} > \alpha) = \text{Prob}(X < \xi), \quad (5)$$

де $\tilde{R}(\alpha)$ – надійність конструкції при заданому безрозмірному навантаженні α ; $P_{кр}$ – випадкове безрозмірне критичне навантаження; X – випадкова безрозмірна величина початкової недосконалості; ξ – максимально можлива безрозмірна величина початкової недосконалості.

Надійність за стійкістю оболонки з різними законами розподілу функції щільності ймовірності початкової недосконалості представляється в наступному вигляді

$$\tilde{R}(\alpha) = \begin{cases} 0 & (\alpha > 1) \\ f_X(u) & (\alpha^* < \alpha < 1), \\ 1 & (\alpha < \alpha^*) \end{cases}, \quad (6)$$

де $u = \delta/t$ – безрозмірна початкова недосконалість, δ – відхилення стінки оболонки від вертикалі, t – мінімальна товщина стінки оболонки, α^* – критичне безрозмірне навантаження, яке відповідає максимально можливій безрозмірній величині початкової недосконалості оболонки, $f_X(u)$ – функція щільності ймовірності початкової недосконалості.

В роботі [5] представлені результати дослідження надійності за стійкістю оболонки, недосконалість якої моделювалася у вигляді форми втрати стійкості при дії поверхневого тиску. Визначені функціональна залежність надійності оболонки від випадкового навантаження та значення допустимого навантаження, яке забезпечує проектну надійність оболонки. Якщо недосконалість стінок резервуара прийняти у вигляді форми втрати стійкості з максимальною амплітудою $\xi = 2t$ і за допомогою реальних відхилень стінки від вертикалі побудувати її закон розподілу функції щільності ймовірності, то математичне очікування

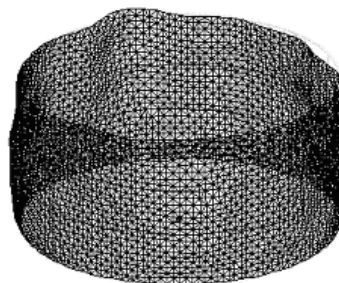


Рис. 4. Скінченноелементна модель нафтоналивного резервуару

випадкової величини рівня надійності резервуара M_p можна прийняти за надійність $\tilde{R}(\alpha_{кр})$, що визначається з графіку надійності оболонки [5].

Статистична обробка реальних недосконалостей оболонки виявила, що функція щільності імовірності початкової недосконалості розподіляється за трикутником (рис. 5, а):

$$f_X(\delta/t) = \int_0^{\delta/t} \frac{2}{\xi} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right) dx. \quad (7)$$

Безрозмірне значення критичного навантаження, яке отримано при дослідженні стійкості резервуару з реальними недосконалостями при дії бокового тиску складає $\alpha_{кр} = 0,679$. Тоді надійність за стійкістю оболонки з реальними недосконалостями $\tilde{R}(\alpha_{кр})$ можна визначити з графіку надійності, який представлений на рис. 5, б і побудований в роботі [5].

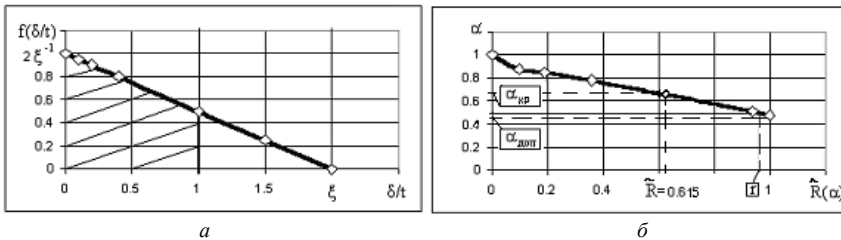


Рис. 5. Надійність за стійкістю оболонки з регулярними недосконалостями:
а) функція щільності імовірності недосконалості, б) графік надійності за стійкістю

Згідно графіку математичне очікування випадкової величини рівня надійності резервуара дорівнює $M_p = \tilde{R}(\alpha_{кр}) = 0,615$. Ця величина є показником відповідності надійності оболонки до вимог проекту по забезпеченню стійкості.

Проектні та фактичні значення величин, які дадуть змогу оцінити рівень конструкційної безпеки резервуара, визначимо згідно аналітичного підходу до визначення ризику аварії будівельних об'єктів [4]. У зв'язку з тим, що відомості про термін і стан резервуара після закінчення його будівництва відсутні, приймаємо фактичний ризик аварії на час закінчення будівництва рівним нормальному значенню $R = R_H = 2$, а

термін будівництва рівним $T_B = 2$ роки. Тоді проектний знос об'єкта до моменту здачі його в експлуатацію складає:

$$J_{\text{пр}}^B = 1 - \exp\{-k \cdot (R - 1)\} = 1 - \exp\{-0,0365(2 - 1)\} = 0,0358(3,58\%). \quad (8)$$

Тут коефіцієнт k визначений з гіпотези, що фізичний знос резервуара при $R = R_r = 83$ дорівнює 0,95 (95%).

Інтенсивність фізичного зносу резервуару за кожен рік його можливої подальшої експлуатації знаходимо за формулою

$$i_{\text{пр}} = 0,0365(R - 1)/T_B = 0,0365(2 - 1)/2 = 0,0183(1,83\%). \quad (9)$$

Термін досягнення резервуаром гранично допустимого ризику аварії при 50 %-му фізичному зносі об'єкту складає

$$T_{\text{ГД}} = 0,657 / i = 0,657 / 0,0183 = 36 \text{ років}. \quad (10)$$

Тоді проектний безпечний ресурс резервуара дорівнює

$$T_{\text{БР}} = T_{\text{ГД}} - T_B = 36 - 2 = 34 \text{ роки}. \quad (11)$$

Таким чином, нафтоналивний резервуар можна експлуатувати без проведення капітального ремонту на протязі 34 років.

Для визначення фактичного зносу резервуара після 10 років його експлуатації ($T_E = 10$ років) з урахуванням терміну його будівництва застосовуємо формулу [4]:

$$J_{\text{ф}} = 1 - \exp\left\{-\left[\frac{1 - M_p}{M_p}\right]\right\} = 1 - \exp\left\{-\left[1 - 0,615\right]/0,615\right\} = 0,4653(46,53\%). \quad (12)$$

Фактичний фізичний знос резервуару склав 46,53%, що у 2 рази більше за проектний $J_{\text{пр}} = J_{\text{пр}}^B + i_{\text{пр}} \cdot T_E = 3,58 + 1,83 \cdot 10 = 21,88\%$.

Фактична інтенсивність фізичного зносу резервуару після 10 років його експлуатації

$$i_{\text{ф}} = k \frac{(1/M_p - 1)}{T_B + T_e} = 0,686 \frac{(1/0,615 - 1)}{2 + 10} = 0,0358(3,58\%). \quad (13)$$

Термін досягнення резервуаром гранично допустимого ризику, коли $R = R_{\text{ГД}} = 19$ і фізичний знос об'єкту складає 0,5 (50%) визначається за формулою

$$T_{ГД} = 0,657 / i = 0,657 / 0,0358 = 18 \text{ років.} \quad (14)$$

Тоді безпечний ресурс нафтоналивного резервуару складає

$$T_{БР} = T_{ГД} - T_{Б} - T_{Е} = 18 - 2 - 10 = 6 \text{ років.} \quad (15)$$

Граничний термін служби споруди за умови, що не будуть проведені ремонтно-відновлювальні роботи по зниженню ризику аварії

$$T_{Г} = 0,686 \frac{(1/M_{Р} - 1)}{i} = 0,429 / 0,0358 = 12 \text{ років.} \quad (16)$$

На рис. 6 представлені результати розрахунку конструкційної безпеки нафтоналивного резервуару на стадії проектування та після 10 років його експлуатації. Рівень конструкційної безпеки є достатнім, бо фактичний ризик аварії знаходиться усередині області прийнятних значень.

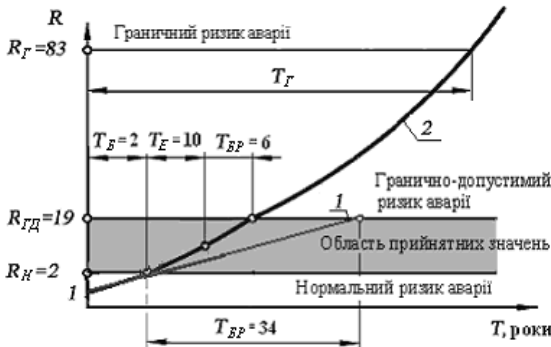


Рис. 6. Конструкційна безпека нафтоналивного резервуару:
1 – проектна, 2- фактична

Висновок: нафтоналивний резервуар знаходиться в безпечному стані. Через 6 років його експлуатації з метою зниження величини ризику аварії повинні бути проведені роботи по посиленню стінок резервуара. Якщо ремонтні роботи не будуть виконані, то через 12 років резервуар буде непридатний для подальшої експлуатації, тобто аварійний стан буде граничним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф. Вероятностные методы в строительном проектировании/ Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1988.-584 с.

2. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. –М.: Стройиздат, 1982.-351 с.
3. *Хенли Э. Дж., Кумamoto Х.* Надежность технических систем и оценка риска/ Пер. с англ. В.С. Сыромятникова, Г. С. Деминой; под общ. ред. В. С. Сыромятникова.–М.: Машиностроение, 1984.
4. *Мельчаков А.П.* Расчет и оценка риска аварии и безопасного ресурса строительных объектов. (Теория, методики и инженерные приложения): Учебное пособие. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2006. – 49 с.
5. *Гоцуляк Е.А., Лукьянченко О.А., Шах В.В.* Об устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины с начальными несовершенствами// Прикладная механика: Междунар. научн. журнал. – 2009. – Т.45. - № 4. – С.103-108.

Отримано 16.07.2010

Дехтярук Е.С., Лукьянченко О.А., Шах В.В.

ОЦЕНКА УРОВНЯ КОНСТРУКЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ НЕФТЕНАЛИВНОГО РЕЗЕРВУАРА

Определен уровень конструкционной безопасности нефтеналивного резервуара с учетом реальных несовершенств формы, которые возникли после десятилетней эксплуатации объекта. На основе вероятностного подхода Болотина, методик исследования устойчивости несовершенных оболочек и прогнозирования риска аварии строительных объектов определены математическое ожидание уровня надежности резервуара, фактический уровень риска аварии и безопасный ресурс объекта.

Dehtiaruk E.S., Lukianchenko O.O., Shah V.V.

ESTIMATION OF LEVEL OF STRUCTIONAL SAFETY OF PETROLEUM RESERVOIR

The level of structional safety of petroleum reservoir with real imperfections of forms which arose up after ten year exploitation of object was determined. On the basis of Bolotin's probabilistic approach and research methods for stability of imperfect shells and prognostication of risk of their accidents the expected value of reliability level, actual level of risk of accidents and safe resource of object were determined.

УДК 539.3

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
І.В. Жупаненко

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИН ОБЕРТАННЯ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Запропоновано методику розв'язання задачі про власні коливання пластин обертання змінної товщини, що реалізує комбінований двох-етапний чисельно-аналітичний підхід. Аналітичний етап розрахунку полягає в зниженні вимірності вихідних співвідношень динамічної задачі теорії пружності шляхом застосування узагальненого методу скінчених інтегральних перетворень по поперечній координаті та методу Фур'є по коловій координаті. Для чисельного розв'язання редукованої одновимірної задачі пропонується два альтернативних підходи, ефективність та збіжність яких перевірена при розв'язанні тестових задач.

Постановка задачі. В якості об'єкта досліджень розглядаються однорідні ізотропні лінійно-пружні просторові тіла вісесиметричної структури, обмежені двома кусково-гладкими бічними поверхнями, що не перетинаються, і торцевою поверхнею. Торцева поверхня складається з двох співвісних циліндричних поверхонь, а площина, ортогональна до твірних торцевої поверхні, називається опорною площиною (рис. 1). Бічні

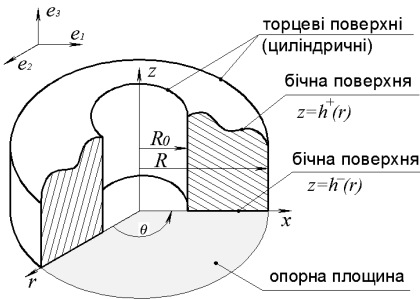


Рис. 1. Товста пластина несиметричної будови

поверхні пластин є геометричним місцем точок, які займають кінці ортогонального до опорної площини відрізка змінної довжини при русі вздовж опорної площини, а торцеві поверхні утворюються даним відрізком як твірною. Твірні бічних поверхонь являють собою плоску кусково-гладку криву, що в загальному випадку складається з m ділянок.

Згідно з прийнятою в [1] термінологією будемо називати такі тіла *товстими пластинами несиметричної будови* (далі – товсті пластини), що поєднують пластини

за класичним розумінням, а також об'єкти, що не мають серединної площини симетрії.

Пластина відноситься до циліндричної системи координат $\{z, \theta, r\}$, нормально пов'язаної з опорною площиною. Координати заданої точки пластини в прийнятій системі координат визначаються наступним чином: z – довжина перпендикуляра від заданої точки до опорної поверхні; r, θ – криволінійні координати ортогональної проекції точки на цю поверхню (рис. 1). Радіальна координата відраховується від внутрішньої торцевої поверхні і пов'язана з циліндричною координатою r співвідношенням

$$r = R_0 + x, \quad x \in [0, L], \quad L = (R - R_0).$$

В обраній системі координат пластина займає область Ω евклідового простору:

$$\Omega = [0 \leq x \leq L] \times [0 \leq \theta \leq 2\pi] \times [h^-(x) \leq z \leq h^+(x)].$$

Рівняння руху пружного середовища, що займає область Ω , задаються співвідношеннями лінійної динамічної теорії пружності [2]. В якості вихідних приймаються тривимірні співвідношення теорії пружності, записані в циліндричних координатах відносно компонент вектора переміщень u_r, u_θ, u_z та тензора напружень $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$.

Граничні умови на бічних поверхнях $z = h^-(x)$, $z = h^+(x)$ та на окремих ділянках торцевої поверхні $x = 0$ та $x = L$ моделюються за допомогою пружних в'язів відомої жорсткості k [1] і записуються у вигляді алгебраїчних співвідношень, наведених в [1].

Побудова редукованої задачі. Для розв'язання задачі про власні коливання пластин обертання застосовується традиційний для об'єктів такого класу двох-етапний підхід, згідно з яким на першому етапі знижується вимірність вихідної динамічної задачі теорії пружності, а на другому – редукована задача розв'язується чисельно. Обидва етапи розв'язання розглядаються як реалізація чисельно-аналітичної методики розрахунку, що є проблемно-орієнтованою, оскільки використовується для розв'язання задач визначеного класу та базується на врахуванні специфіки об'єктів цього класу.

Перший, аналітичний, етап методики розрахунку частот і форм власних коливань пластин полягає в зниженні вимірності вихідної

тривимірної задачі теорії пружності шляхом застосування узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень [1] по поперечній координаті z та розділення змінних методом Фур'є по колівій координаті θ .

Процедура зниження вимірності може бути сформульована в наступному алгоритмі побудови редукованих співвідношень задачі про власні коливання товстих пластин.

На першому кроці алгоритму, слідуючи узагальненому методу скінченних інтегральних перетворень, вихідним співвідношенням теорії пружності, записаним у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку по трьох просторових координатах, ставляться у відповідність редуковані двовимірні рівняння. Ця процедура формалізована до простої заміни невідомих у вихідних співвідношеннях їх проєкційними аналогами за побудованою таблицею відповідностей [1]. Напруження на бічних поверхнях пластини, які входять в отримані рівняння, визначаються з відповідних граничних умов. Таким чином отримується двовимірна замкнена система диференціальних рівнянь, що доповнюється редукованими граничними умовами для розрахункових вектор-функцій. Оскільки за прийнятою формою запису граничні умови на торцевій поверхні мають вигляд алгебраїчних співвідношень, то редуковані граничні умови отримують простою заміною функцій, які входять в ці умови, їхніми моментами відносно системи базисних функцій (ортонормованих поліномів Лежандра).

Другим кроком алгоритму для обраного об'єкту досліджень є розділення змінних в отриманих співвідношеннях шляхом розкладу невідомих вектор-функцій в ряди Фур'є по колівій координаті. В отримані таким чином одновимірні по просторовій координаті співвідношення деякі невідомі входять алгебраїчно і можуть бути виключені, що дозволяє зменшити розмірність розв'язувальних рівнянь.

За часовою координатою для випадку власних коливань шукатимемо розв'язок задачі в наступному вигляді:

$$u_x = u_{x,0} \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad (u_x \Leftrightarrow u_\theta \Leftrightarrow u_z)$$

де амплітудне значення переміщення $u_{i,0}$ є функцією лише просторових координат і не залежить від часу. Вирази для компонент тензора напружень записуються аналогічним чином.

Отримана таким чином редукована крайова задача описується послідовністю окремих для кожної гармоніки систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами з граничними умовами для розрахункових вектор-функцій у вигляді алгебраїчних

співвідношень. Система розв'язувальних рівнянь може бути представлена в нормальній формі Коші в матричному вигляді наступним чином:

$$\frac{d}{dx} \vec{Y}^i = [A(\omega)] \cdot \vec{Y}^j, \quad (1)$$

де \vec{Y}^i – вектор невідомих, $\{Y^i\}^T = \{u_x^{*i}, u_\theta^{*i}, u_z^{*i}, \sigma_x^i, \sigma_{x\theta}^i, \sigma_{xz}^i\}$,
 $u_j^{*i} = \mu \cdot u_j^i$ ($j = x, \theta, z$); $[A(\omega)] = [a_{ij}] \left(i = \overline{1, 6}; j = \overline{1, 6} \right)$ – матриця коефіцієнтів, елементи якої мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij} - r^{ij} \right), \quad a_{12} = -n \cdot \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij}, \\ a_{13} &= -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{2}{h(x)} \cdot m^{ij}, \quad a_{14} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \delta^{ij}, \quad a_{15} = a_{16} = 0, \\ a_{21} &= n \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij}, \quad a_{22} = \left(\frac{1}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij} + r^{ij} \right), \quad a_{23} = a_{24} = 0, \quad a_{25} = \delta^{ij}, \\ a_{26} &= 0, \quad a_{31} = -\frac{2}{h(x)} \cdot m^{ij}, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = r^{ij}, \quad a_{34} = a_{35} = 0, \quad a_{36} = \delta^{ij}, \\ a_{41} &= \left(\frac{4(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{1}{(R_0 + x)^2} - \frac{\rho}{\mu} \cdot \omega^2 \right) \cdot \delta^{ij}, \quad a_{42} = n \cdot \frac{4(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{1}{(R_0 + x)^2} \cdot \delta^{ij}, \\ a_{43} &= \frac{2}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{2}{h(x)} \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot m^{ij}, \quad a_{44} = -\left(\frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij} + r^{ji} \right), \\ a_{45} &= -n \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij}, \quad a_{46} = \frac{2}{h(x)} \cdot m^{ji}, \quad a_{51} = n \cdot \frac{4(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{1}{(R_0 + x)^2} \cdot \delta^{ij}, \\ a_{52} &= \left(n^2 \cdot \frac{4(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{1}{(R_0 + x)^2} \cdot \delta^{ij} + \frac{4}{h^2(x)} \cdot m^{ki} m^{kj} - \frac{\rho}{\mu} \cdot \omega^2 \cdot \delta^{ij} \right), \\ a_{53} &= n \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \frac{2}{h(x)} \cdot \left(\frac{2\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \cdot m^{ij} - m^{ji} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{54} &= n \cdot \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij}, \quad a_{55} = -\left(\frac{2}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij} + r^{ji} \right), \quad a_{56} = 0, \\
 a_{61} &= \frac{2\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \frac{2}{h(x)} \cdot m^{ji}, \\
 a_{62} &= \left(n \cdot \frac{2\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \frac{2}{h(x)} \cdot m^{ji} - n \cdot \frac{1}{R_0 + x} \cdot \frac{2}{h(x)} m^{ij} \right), \\
 a_{63} &= \left(n^2 \cdot \frac{1}{(R_0 + x)^2} \cdot \delta^{ij} + \frac{4(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{4}{h^2(x)} \cdot m^{ki} \cdot m^{kj} - \frac{\rho}{\mu} \cdot \omega^2 \cdot \delta^{ij} \right), \\
 a_{64} &= \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{2}{h(x)} \cdot m^{ji}, \quad a_{65} = 0, \quad a_{66} = -\left(\frac{1}{R_0 + x} \cdot \delta^{ij} + r^{ji} \right).
 \end{aligned}$$

Тут параметр n характеризує форму хвилеутворення по паралелі і дорівнює числу хвиль в цьому напрямку, δ^{ij} – символ Кронеккера.

Матричні коефіцієнти $[r^{ij}]$, $[m^{ij}]$ описані в [1].

Граничні умови для розрахункових вектор-функцій в матричному вигляді записуються наступним чином:

$$[C_0] \cdot \vec{Y}^i(0) = \vec{0}, \quad [C_L] \cdot \vec{Y}^i(L) = \vec{0}, \quad (2)$$

де матриці $[C_0]$ та $[C_L]$ мають вигляд:

$$[C_0] = \begin{bmatrix} C11_0 & 0 & 0 & C14_0 & 0 & 0 \\ 0 & C22_0 & 0 & 0 & C25_0 & 0 \\ 0 & 0 & C33_0 & 0 & 0 & C36_0 \end{bmatrix},$$

$$[C_L] = \begin{bmatrix} C11_L & 0 & 0 & C14_L & 0 & 0 \\ 0 & C22_L & 0 & 0 & C25_L & 0 \\ 0 & 0 & C33_L & 0 & 0 & C36_L \end{bmatrix}.$$

$$C11_0 = \frac{k_{x0}}{\sqrt{1+k_{x0}^2}} \cdot \delta^{ij}, \quad C22_0 = \frac{k_{\theta 0}}{\sqrt{1+k_{\theta 0}^2}} \cdot \delta^{ij}, \quad C33_0 = \frac{k_{z0}}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij},$$

$$\begin{aligned}
 C14_0 &= \frac{-1}{\sqrt{1+k_{x0}^2}} \cdot \delta^{ij}, \quad C25_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+k_{\theta 0}^2}} \cdot \delta^{ij}, \quad C36_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+k_{z0}^2}} \cdot \delta^{ij}. \\
 C11_L &= \frac{k_{xL}}{\sqrt{1+k_{xL}^2}} \cdot \delta^{ij}, \quad C22_L = \frac{k_{\theta L}}{\sqrt{1+k_{\theta L}^2}} \cdot \delta^{ij}, \quad C33_L = \frac{k_{zL}}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij}, \\
 C14_L &= \frac{1}{\sqrt{1+k_{xL}^2}} \cdot \delta^{ij}, \quad C25_L = \frac{1}{\sqrt{1+k_{\theta L}^2}} \cdot \delta^{ij}, \quad C36_L = \frac{1}{\sqrt{1+k_{zL}^2}} \cdot \delta^{ij}.
 \end{aligned}$$

Чисельне розв'язання редукованої задачі. Другим етапом методики, що пропонується, є чисельне розв'язання побудованої редукованої задачі (1) – (2). Редукована задача може бути класифікована як задача на власні значення для систем звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Одним з найбільш поширених методів чисельного розв'язання одновимірних задач на власні значення є покроковий $\Delta(\lambda)$ – метод [3]. Вибір цього методу в якості основного в абсолютній більшості досліджень одновимірних задач про коливання пластин обумовлений його високою точністю при визначенні власних значень та власних функцій задачі та можливістю знаходження власних чисел на будь-якому наперед заданому інтервалі спектру. Описаний в [4] алгоритм реалізації покрокового методу для розрахунку частот і форм власних вісесиметричних коливань товстих пластин без змін переноситься на випадок несиметричних коливань і складає основну частину другого етапу методики, що пропонується.

Накопичений на сьогоднішній день досвід застосування покрокового методу для розв'язання задач про власні коливання пластин виявив, що ефективність його застосування значною мірою залежить від вибору параметрів пошуку: початкового значення λ_0 та кроку $\Delta(\lambda)$. Невдалий вибір цих параметрів може призвести до зниження ефективності розрахунку або до втрати деяких власних значень. Вказаний недолік методу вимагає його застосування спільно з іншими методами, що дають можливість наближеного визначення розподілу власних значень.

Одновимірний характер редукованих рівнянь (1) – (2) дозволяє в якості такого допоміжного методу поширити на клас пластин обертання розвинений в будівельній механіці стрижневих систем алгоритм, який дозволяє для одновимірних об'єктів наближено зводити динамічну задачу, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних (по просторовій та часовій координатах), до динамічної задачі,

що описується системою звичайних диференціальних рівнянь (по часовій координаті).

Відповідно до алгоритму, динамічний розрахунок ведеться для континуальної за жорсткісними та дискретної за інерційними властивостями моделі. Дискретно-континуальна модель будується шляхом розбиття об'єкта на ділянки та зосередження мас цих ділянок в окремих точках континуальної безінерційної системи. Таким чином можна перейти від континуальної моделі з нескінченною кількістю степенів вільності до дискретно-континуальної, кількість степенів вільності якої відповідає добутку кількості зосереджених мас на кількість степенів вільності однієї маси.

В роботі [5] такий алгоритм розроблений для тонкої кільцевої пластини і виявлено особливості побудови дискретно-континуальної моделі пластини та рівнянь руху системи. Як показано в [5], задача про власні коливання пластин зводиться до алгебраїчної задачі на власні значення:

$$[\Pi] \cdot [R] \cdot [T] \cdot \vec{Y} = \lambda \cdot \vec{Y}, \quad (3)$$

де $\lambda = 1/\omega^2$ – власне число, матриці $[R]$, $[T]$ описані в [5], а елементи матриці впливу $[\Pi] = [\delta_{jk}] (j, k = \overline{1, n})$ (n – кількість зосереджених мас) визначаються як переміщення від зосередженої (по x !) одиничної статичної сили F_{ik} по напрямку сили інерції F_{ij} .

По суті, кожен одиничний стан визначається як розв'язок статичної неоднорідної крайової задачі

$$\frac{d}{dx} \vec{Y}^i = [A] \cdot \vec{Y}^j + \vec{F}^i \quad (4)$$

з граничними умовами (2), де компоненти вектора \vec{F}^i задаються одиничним зосередженим силовим впливом, що відповідає конкретному одиничному стану, і визначаються з неоднорідних граничних умов на бічних поверхнях пластини.

Прийнятий варіант запису граничних умов дозволяє врахувати розподілене по бічних поверхнях навантаження, в той час як одиничний стан визначається зосередженим по координаті x навантаженням. Перехід від поверхневого до зосередженого навантаження здійснюється за допомогою дельта-функції Дірака:

$$q_i^\pm(x) = q_i^\pm \cdot \delta(x - x_k), \left(k = \overline{1, n}; i = x, \theta, z \right). \quad (5)$$

Підстановка неоднорідних граничних умов на бічних поверхнях в редуковані рівняння товстих пластин дозволяє визначити компоненти вектора навантажень F^i наступним чином:

$$F_\alpha^i = \frac{1}{\sqrt{h(x)}} \cdot \left[B^- q_\alpha^-(x) \left(e_1^{ij} - e_2^{ij} \right) + B^+ q_\alpha^+(x) \delta^{ij} \right] \cdot p^j \quad (\alpha = x, \theta, z),$$

де $q_\alpha^\pm(x)$ визначається співвідношенням (5), $B^\pm = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h^\pm(x)}{\partial x} \right)^2}$,

матриці $[e_1^{ij}]$, $[e_2^{ij}]$ та вектор $[p^j]$ визначені в [1].

Оскільки дискретизація системи виконується на рівні вихідної тривимірної моделі пластини, то степенями вільності нової розрахункової схеми є компоненти вектора переміщень $U\{u_x, u_\theta, u_z\}$. При цьому прийнятий варіант побудови теорії пластин дозволяє врахувати шість степенів вільності однієї маси: три степені вільності, яким відповідає одиничне навантаження, порівну розподілене по обох бічних поверхнях: $q_i^+ = 0,5$, $q_i^- = 0,5$ ($i = x, \theta, z$), і три степені вільності, яким відповідає одиничне навантаження, прикладене до бічних поверхонь з різним знаком: $q_i^+ = 0,5$, $q_i^- = -0,5$ ($i = x, \theta, z$). Перші три степені вільності характеризують коливання стиску-розтягу, згину та обертання, а решта три – відповідні самоврівноважені по товщині пластини коливання зсуву. Така кількість степенів вільності відповідає врахуванню двох поліномів

Лежандра $P_0(\xi), P_1(\xi)$, $\xi = \frac{2z - (h^+(x) + h^-(x))}{h^+(x) - h^-(x)}$ при апроксимації

інерційних властивостей розрахункової моделі. При цьому жорсткісні властивості моделі при статичному розрахунку одиничних станів апроксимуються більшою кількістю поліномів, що визначається практично виправданою точністю розрахунку елементів матриці впливу.

Загалом алгоритм розрахунку частот і форм власних коливань дискретно-континуальної моделі пластини наступний.

На першому кроці розрахунку здійснюється дискретизація інерційних властивостей пластини шляхом розбиття її на окремі концентричні ділянки і зосередження мас цих ділянок в певних точках (по координаті x) континуальної безінерційної системи. На основі здійсненої дискретизації формуються матриця радіусів мас $[R]$ та матриця інерції $[T]$.

Далі будуються одиничні стани для визначення матриці піддатливості $[\Pi]$. Як зазначалося вище, кожна зосереджена маса загалом може мати шість степенів вільності, з-поміж яких обираються ті, що будуть враховані в даному конкретному випадку. Таким чином призначаються способи прикладення одиничного зосередженого навантаження – одиничні стани. Для кожного одиничного стану редукована задача (4), (2) розв'язується методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова.

Оскільки степенями вільності системи є компоненти вектора переміщень $U\{u_x, u_\theta, u_z\}$ то на останньому етапі розрахунку одиничних станів виконується зворотній перехід узагальненого методу скінчених інтегральних перетворень від отриманого розв'язку в зображеннях (відносно моментів невідомих) до оригіналу (шуканих переміщень). З останніх вибираються компоненти δ_{jk} матриці піддатливості $[\Pi]$ як переміщення по напрямку j -ї степені вільності від одиничної сили по напрямку k -ї степені вільності.

Задача визначення частот і форм власних коливань зводиться до визначення власних чисел та власних векторів симетризованої матриці $[\sqrt{T}] \cdot [\Pi] \cdot [R] \cdot [\sqrt{T}]$. Як зазначалося вище, частота власних коливань пов'язана з відповідним власним числом наступним співвідношенням:

$$\omega_k = \sqrt{1/\lambda_k},$$

а континуальна форма коливань будується на основі знайдених при побудові одиничних станів переміщень.

Розв'язання тестових задач. Розроблена методика розрахунку частот та форм власних коливань пластин обертання змінної товщини реалізована в комплексі програм для ПЕОМ, написаних алгоритмічною мовою FORTRAN. Можливості методики та достовірність результатів, отриманих за допомогою програмного комплексу, тестувалися на розв'язанні задач, для яких відомий розв'язок в рамках прикладних теорій (класичної та теорії типу Тимошенка).

В якості першого прикладу розглянуто задачу про визначення частот власних коливань заземленої по контуру круглої пластини радіусом $a = 1$ м і товщиною $h = 0,05$ м. В табл. 1 наведено значення частотного параметра k , пораховані за класичною теорією [6] і по запропонованій методиці (при реалізації покрового методу та розрахунку дискретно-континуальної моделі).

Таблиця 1

Число вузлових кіл s		Число вузлових діаметрів n				
		0	1	2	3	4
0	Класична теорія [6]	3,196	4,611	5,906	7,144	8,347
	Покровий метод	<u>3,409</u> 3,185	<u>4,618</u> 4,421	<u>5,865</u> 5,858	<u>7,120</u> 7,045	<u>8,365</u> 8,190
	Дискретно-континуальна модель	3,451	<u>4,603</u> 4,600	5,652	6,662	7,644
1	Класична теорія [6]	6,306	7,799	9,197	10,536	11,837
	Покровий метод	<u>6,667</u> 6,234	<u>8,431</u> 7,522	<u>9,151</u> 9,002	<u>10,474</u> 10,244	<u>11,769</u> 11,432
	Дискретно-континуальна модель	<u>6,593</u> 6,591	<u>7,935</u> 7,932	9,070	<u>10,131</u> 10,134	11,157
2	Класична теорія [6]	9,440	10,958	12,402	13,795	15,15
	Покровий метод	<u>9,849</u> 9,222	<u>12,027</u> 10,490	<u>12,281</u> 11,952	<u>13,598</u> 13,191	<u>14,483</u> 14,374
	Дискретно-континуальна модель	<u>9,753</u> 9,750	<u>11,285</u> 11,279	<u>12,384</u> 12,381	<u>13,417</u> 13,413	<u>14,423</u> 14,421
3	Класична теорія [6]	12,577	14,109	15,579	17,005	18,396
	Покровий метод	<u>12,908</u> 12,107	<u>14,119</u> 13,333	<u>15,253</u> 14,750	<u>16,541</u> 15,962	<u>17,788</u> 17,119
	Дискретно-континуальна модель	<u>12,843</u> 12,838	<u>14,662</u> 14,652	<u>15,649</u> 15,639	<u>16,603</u> 16,595	<u>17,563</u> 17,554

Значення над ризикою отримані при $N=2$ для покрового методу і $N=4$ для дискретно-континуальної моделі, а значення під ризикою при $N=4$ та $N=6$ відповідно (N – ступінь поліноміальної апроксимації). При

розрахунку прийнято коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$. Частотний параметр пов'язаний з коловою частотою наступним співвідношенням:

$$k^4 = \rho \cdot h \cdot a^4 \omega^2 / D,$$

де ρ і D – щільність та циліндрична жорсткість відповідно.

Аналізуючи отримані результати, слід зазначити, що розбіжність нижчих частот, отриманих покровоковим методом, порівняно з класичною теорією складає до 4% і зростає із збільшенням номеру частоти до 8%. Така закономірність добре узгоджується з відомим обмеженням класичної теорії при визначенні вищих частот коливань. Частоти, отримані при розрахунку дискретно-континуальної моделі, відрізняються від отриманих по класичній теорії до 8,5%, а зазначена вище закономірність не спостерігається.

Для тестування можливостей методики у випадку пластини змінної товщини розв'язана задача про коливання кільцевої пластини, радіальний переріз якої показано на рис. 2.

В табл. 2 наведені значення перших п'яти безрозмірних частот такої пластини при трьох вузлових діаметрах. При розрахунках коефіцієнт Пуассона прийнято $\nu = 0,3$.

Безрозмірні частоти пов'язані з відповідними коловими частотами наступним співвідношенням:

$$\lambda_j = \omega_j R / c,$$

де $c = \sqrt{E/\rho}$ – швидкість звуку в матеріалі пластини (ρ , E – щільність та модуль пружності матеріалу відповідно); R – характерний лінійний розмір пластини в плані.

Частоти визначені для трьох варіантів граничних умов на внутрішній граничній поверхні пластини при вільній від закріплень зовнішній. Для кожного з варіантів граничних умов в першому рядку табл. 2 наведено значення частот, отримані по запропонованій методиці, в другому – значення, взяті з роботи [7]. Останні отримані при реалізації підходу, що базується на апроксимації пластини набором з чотирьох пластин

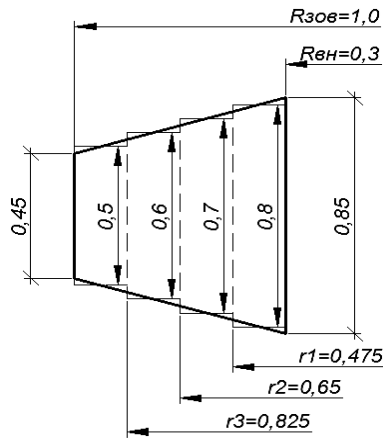


Рис. 2

Тимошенка постійної товщини (на рис. 2 показані пунктирними лініями). Пластина, що розглядається, може бути віднесена до пластин середньої товщини, для яких теорія типу Тимошенка забезпечує надійні розв'язки, а тому взяті з роботи [7] можна вважати певною мірою еталонними. Отримані по запропонованій методиці значення частот для пластини ступінчато-змінної товщини наведено в третьому рядку табл. 2.

Таблиця 2

Умови закріплення	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
Вільний край	1,756	3,549	4,356	4,844	5,723
	1,558	3,571	4,355	5,022	5,765
	1,493	3,340	4,455	4,922	5,660
Шарнірне спірання	1,817	3,643	4,758	5,258	6,121
	1,634	3,843	4,795	5,411	6,401
	1,529	3,511	4,858	5,315	6,507
Жорстке закріплення	1,859	3,830	5,031	5,883	6,669
	1,654	3,848	4,966	5,509	6,500
	1,540	3,523	4,910	5,396	6,647

Аналізуючи дані табл. 2, можна сказати про збіжність результатів, отриманих по запропонованій методиці (перший рядок) та по теорії пластин Тимошенка (другий рядок). Найбільша розбіжність значень (до 12 %) спостерігається для першої та четвертої частот, що може бути віднесено на рахунок апроксимації пластинами постійної товщини. Так, порівняння значень другого та третього рядків табл. 2 (для пластини ступінчато-змінної товщини), показує, що в цьому випадку розбіжність значно менша (до 4 – 7 % для першої частоти та 2 % для четвертої).

Варто також зауважити, що найкраща збіжність результатів спостерігається для випадку вільних від закріплень граничних поверхонь. Це пояснюється тим, що в теорії Тимошенка приймається закріплення лише граничного контуру серединної площини, в той час як в теорії

пластин, що розглядається в даній роботі, граничні умови моделюються на всій торцевій поверхні пластини.

В цілому, розв'язані вище тестові задачі показали високу точність визначення частот власних коливань по запропонованій методиці, а також її ширші, порівняно з відомими прикладними теоріями, можливості.

Модельна задача. Для ілюстрації можливостей розробленої методики при розрахунку частот і форм власних коливань об'єктів складної геометрії розв'язана модельна задача про власні коливання розрахункової моделі турбінного диску авіаційного газотурбінного двигуна.

Турбінний диск в якості об'єкта розрахунку обраний з наступних міркувань. З практичної точки зору, максимальна точність розрахунку частот власних коливань турбінних дисків дозволяє на стадії проектування забезпечити відстроювання їх власних частот від частот робочого циклового навантаження турбінного двигуна. Це дозволяє знизити матеріальні і часові затрати на відстроювання експериментальними методами при доведенні таких конструкцій. З теоретичної точки зору, розрахунок турбінного диску, що має складну геометричну форму і не має серединної площини симетрії, дозволяє повною мірою дослідити можливості запропонованої методики та перевірити її достовірність шляхом порівняння з експериментальними даними.

Конструктивна схема радіального перерізу диску прийнята відповідно до роботи [8] і показана на рис. 3 тонкими суцільними лініями, а його розрахункова схема показана жирними лініями. На рисунку наведено відносні розміри, віднесені до зовнішнього радіусу диску.

Лінії, що обмежують переріз диска, апроксимуються (рис. 3) поліномами нульової (постійна товщина), першої (лінійно-змінна товщина) та другої степені. Штриховими лініями на рис. 3 відмежовано ділянки, в межах яких задається закон зміни товщини. Як і в роботі [8], виступаючі елементи при апроксимації відкидаються, в тому числі й циліндричні фланці, що примикають до масивної маточини.

Отримані по запропонованій методиці (при реалізації покрового методу) безрозмірні частоти власних коливань диску, зображеного на рис. 3, а також відповідні експериментальні та розрахункові значення, взяті з роботи [8], наведено в табл. 3. Безрозмірні частоти $\lambda_{j,m}$ пов'язані з коловими частотами $\omega_{j,m}$ наступною залежністю:

$$\lambda_{j,m} = \omega_{j,m} R \cdot \sqrt{\rho/E},$$

де m – число вузлових площин (діаметрів); j – порядковий номер частоти при фіксованому m ; R – зовнішній радіус тіла обертання; ρ , E – відповідно щільність та модуль пружності матеріалу.

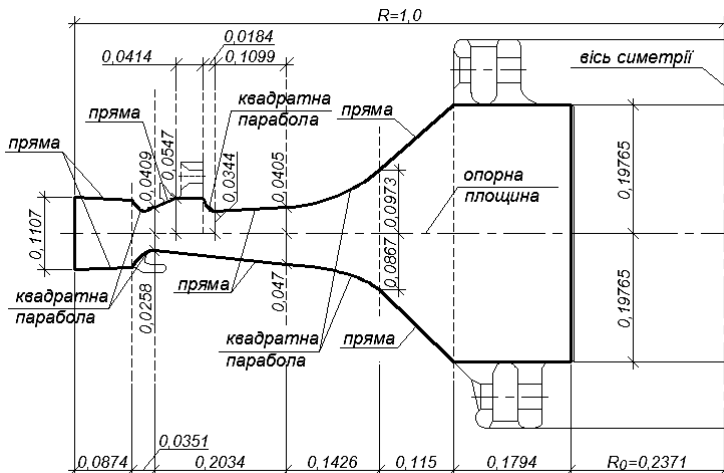


Рис. 3. Радіальний переріз турбінного диску.

При визначенні розрахункових значень частот в роботі [8] реалізується підхід, що базується на розбитті складної конструкції на тіла канонічної форми (структурні елементи). Такий підхід є чи не єдиним (за виключенням загальних чисельних методів) з відомих на сьогоднішній день методів визначення частот і форм власних коливань пластин змінної товщини.

Для диску, що розглядається, структурними елементами є циліндричні тіла, для яких в роботі [8] реалізовано два алгоритми визначення частот і форм власних коливань. Перший з них базується на розв'язках динамічної задачі теорії пружності для скінченного циліндра, в другому – структурний елемент розглядається з позиції теорії коливань пластин по моделі Тимошенка. При цьому в силу гіпотез теорії пластин при розрахунку диску за другим алгоритмом (шоста колонка табл. 3) приймається, що апроксимуючі циліндри розташовані так, що їх серединні площини утворюють площину симетрії диску. Асиметричність реального диску враховується лише при розрахунку методом теорії пружності (п'ята колонка табл. 3). Значення безрозмірних частот,

отримані при експериментальному дослідженні, методика якого докладно описана в [8] наведені в третій колонці табл. 3.

Таблиця 3

m	j	Експеримент [8]	Розрахункові значення		
			Запропонована методика	Теорія пружності [8]	Модель Тимошенка [8]
2	1	0,4293	0,4253	0,4233	0,3842
3	1	0,5719	0,5650	0,5520	0,5717
4	1	0,7266	0,7510	0,7784	0,7823
5	1	0,9517	1,0059	1,0845	1,0605
6	1	1,2083	1,3231	1,4508	1,4174
7	1	1,503	1,6931	1,8614	1,8222
8	1	1,807	2,1082	2,3158	2,1338
3	2	1,925	2,039	1,958	2,029

Як видно з табл. 3, запропонована методика розрахунку дає найбільш близькі до експериментальних значення частот. Так при $m \leq 4$ похибка запропонованої методики по відношенню до експериментальних частот складає 0,9 – 3,4 %, в той час як методу теорії пружності 1,4 – 7,1 %, а методу моделі Тимошенка до 10,5 %. При $m \geq 5$ відмінність зростає до 12,6 %, 24 % та 21 % відповідно.

Стосовно оцінок розбіжності значень, отриманих по запропонованій методиці, то їх можна вважати певною мірою орієнтовними з наступних як суб'єктивних, так і об'єктивних причин. Суб'єктивними причинами, усунувши які можна було б підвищити точність розрахунку, є такі:

- по-перше, фактичні розміри диску в роботі [8] не наведені, а тому точність апроксимації перерізу диска визначається точністю графічного зображення в заданій роботі. Таким чином розрахункова схема не повторює на 100 % геометрію досліджуваного зразка, хоча вочевидь є більш близькою до нього порівняно з запропонованим розбиттям на циліндри;

- по-друге, не наводяться також фізико-механічні характеристики реального диску, які очевидно для конкретного зразка не визначались, а тому при розрахунку орієнтовно прийнято значення коефіцієнту Пуассона $\nu = 0,3$, що може дещо відрізнятись від реального.

До об'єктивних причин розбіжності розрахункових значень (отриманих як в роботі [8], так і в даній роботі) з експериментальними, відносяться наступні:

- при розрахунках граничні поверхні пластини прийняті вільними від закріплення, що не зовсім відповідає умовам виконання експерименту. Експериментальний зразок вільно встановлювався на столі, контактуючи з його поверхнею через товстий шар гуми. Оскільки спірання здійснювалось не по всій поверхні маточини, а лише через циліндричні фланці, що до неї примикають, то можна вважати похибку, внесену граничними умовами, незначною;

- більш істотну похибку в розрахунок вносить наявність похилих до осі турбінного диску пазів під замки лопаток, внаслідок чого диск не є тілом обертання. Проте в облопаченому диску ці пази заповнюються лопатковим замком і відмінність диску від тіла обертання зменшується.

Таким чином можна зробити висновок, що запропонована в даній роботі методика визначення параметрів власних коливань пластин обертання змінної товщини порівняно з відомими підходами дає можливість суттєво підвищити точність розрахунку частот. Крім того, отримані кількісні оцінки свідчать про забезпечення необхідної з практичної точки зору точності визначення частот власних коливань в широкому діапазоні спектру, в тому числі й височастотних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Чибіряков В.К.*, Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
2. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Лен.: Судпромгиз, 1958. – 372 с.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
4. *Жупаненко І.В.* Власні коливання товстої кільцевої пластини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. – Вип. 83. – К.: КНУБА, 2009. – С. 165 – 172.
5. *Чибіряков В.К.*, *Жупаненко І.В.* Про один алгоритм розрахунку віссиметричних коливань круглої пластини // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн. – Вип. 81. – К.: КНУБА, 2007 – С. 43 – 50.
6. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек: справочник / Под ред. Филиппова А.П. – Киев: Наук. думка. – 1964. – 288 с.
7. *Моргачев К.С.* Динамика пластин (модель Тимошенко) постоянной и переменной толщины: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.23.17 / Самарский гос. арх.-строит. ун-т. – Самара, 2007. – 20 с.: ил.
8. *Кузнецов Н.Д.*, *Фридрих Л.И.*, *Колотников М.Е.* Расчетные методы определения собственных частот элементов конструкций в форме тел вращения и близких к ним // Проблемы машиностроения и надежности машин. М.: Наука. – 1993. – № 3. – С. 98 – 106.

Отримано 27.08.10

Чибиряков В.К., Жупаненко И.В.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Предложено методику решения задачи о собственных колебаниях пластин вращения переменной толщины, реализующая комбинированный двухэтапный численно-аналитический подход. Аналитический этап расчета состоит в понижении размерности исходных соотношений динамической задачи теории упругости путем применения обобщенного метода конечных интегральных преобразований по поперечной координате пластины и метода Фурье по окружной координате. Для численного решения редуцированной одномерной задачи предложено два альтернативных подхода, эффективность и достоверность которых проверена решением тестовых задач.

Chybyrakov V.K., Zhupanenko I.V.

THE METHOD FOR SOLUTION OF THE PROBLEM ON FREE VIBRATIONS OF AXI-SYMMETRIC PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

The method is proposed for solution of the problem on free vibrations of axi-symmetric plates with variable thickness. The method realizes combined the numerically-analytical approach. At the analytical stage of calculation is applied the extended method of finite integral transforms on plate's thicknesses and the Fourier method with respect to the circumferential coordinate for reduction of three-dimensional equations of the dynamic theory of elasticity. The reduced one-dimensional problem are solved numerically by two alternative approaches, which efficiency and reliability has been checked by solving of test problems.

УДК 539.3

І.І. Солодей, канд. техн. наук,

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

М.О. Вабіщевич

А.Ю. Приходько

Б.І. Сизевич

УЗАГАЛЬНЕНА МАТРИЦЯ МАС НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

В рамках напіваналітичного метода скінченних елементів побудовано узагальнену матрицю мас неоднорідних скінченних елементів в задачах дослідження стаціонарних та нестаціонарних коливань призматичних прямокутних тіл та тіл обертання із складною формою та структурою поперечного перерізу, що знаходяться під дією навантажень різної інтенсивності та тривалості у часі.

Вступ.

Широкі коло реальних будівельних конструкцій являють собою неоднорідні тіла обертання та призматичні тіла складної форми. До них відносяться градирні, водонапірні башти, захисні оболонки АЕС, покриття, перекриття, фундаменти промислових і цивільних будівель та споруд і т.і. В процесі експлуатації такі об'єкти знаходяться під дією динамічних навантажень, довільно орієнтованих у просторі та часі. Для визначення найбільш небезпечних з погляду міцності конструкцій значень параметрів напружено-деформованого стану необхідно простежити весь процес деформування, що призводить до необхідності розв'язання нестационарних просторових задач. Важливими ознаками перелічених об'єктів, що ускладнюють аналіз їх поведінки, є складна структура та конфігурація поперечного перерізу, а також неоднорідність властивостей матеріалу в усіх трьох напрямках, яка може визначатися найрізноманітнішими причинами: технологією виготовлення, впливом зовнішніх полів (температури, радіаційного опромінення і т.і.) та конструктивною неоднорідністю. Це зумовлює не тільки змінність характеристик жорсткості, але і щільності матеріалу, як в поперечному перерізі так і вздовж направляючої конструкції. При цьому зміна фізико-механічних характеристик може носити як континуальний, так і дискретний характер, а їх кількісна відмінність знаходиться в широкому діапазоні значень постійних матеріалу, що може включати граничний випадок, коли тіло має вирізи, які порушують суцільність об'єкта.

Зважаючи на складність поставленої задачі, її розв'язання потребує застосування чисельних методів. В наш час найбільш універсальним чисельним методом, що застосовується в наукових дослідженнях, особливо для розрахунку складних об'єктів, є метод скінченних елементів (МСЕ). Застосування традиційного варіанта методу скінченних елементів для розв'язання просторових задач динаміки проблематично, у зв'язку із значними обчислювальними труднощами. Істотно підвищити ефективність МСЕ дозволяє його поєднання з методом розділу невідомих. Цей підхід одержав назву напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ). НМСЕ був запропонований в роботі [7] як ефективний метод розв'язання просторових задач теорії пружності для невісесиметрично навантажених тіл обертання. Висока ефективність напіваналітичного варіанта у порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних.

Не дивлячись на те, що дослідження просторового динамічного напружено-деформованого стану методом скінченних елементів є одним із найважливіших напрямків сучасної будівельної механіки та механіки деформованого твердого тіла, залишаються суттєві труднощі, які зумовлені високою розмірністю математичної моделі МСЕ та великим об'ємом інформації, що звужують область його використання для розв'язання складних просторових задач динаміки. Об'єктами, що розглядаються, як правило у двовимірній постановці, залишаються пружні вісесиметричні тіла та оболонки обертання.

Розробка ефективних методів розв'язання задач з великою кількістю невідомих, що виникають при використанні метода скінченних елементів до розрахунку конструкцій споруд та об'ємних тіл складної форми суттєво розширює можливості МСЕ програм, що орієнтовані на доступні рядовому користувачу комп'ютери класу ПК, значно зменшують час аналізу, що в свою чергу веде до зменшення термінів виконання проекту і як слідство - його кошторису.

1. Основні співвідношення просторової задачі теорії пружності для неоднорідних призматичних тіл та тіл обертання при динамічному навантаженні.

Розглядаються системи неоднорідних ізотропних тіл обертання та призматичних тіл, що знаходяться під дією довільного динамічного навантаження на інтервалі часу $T \in [t_0, t_1]$. Опис геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в ортогональній круговій циліндричній або декартовій системі координат Z^i , що в подальшому називається базисною. Для подання напружено-деформованого стану тіла

із складною формою поперечного перетину запроваджується місцева криволінійна система координат x^i , яка пов'язана з геометрією тіла.

Переміщення будь-якої точки тіла визначається компонентами в базисній системі координат u_{γ} . Компоненти тензору деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [2]:

Тіла обертання	Призматичні тіла
$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,\beta} + z_{,\beta}^{\gamma} u_{\gamma,\alpha})$	$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,\beta} + z_{,\beta}^{\gamma} u_{\gamma,\alpha})$
$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3} - \frac{2z_{,\alpha}^{\gamma} u_{3'}}{Z^{2'}} \right)$	$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (a u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3})$
$\varepsilon_{33} = u_{3',3} + Z^{2'} u_{2'}$	$\varepsilon_{33} = a u_{3',3}$

(1)

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2)$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних сталих d^{ijkl} пов'язані з коефіцієнтами Ламе λ і μ співвідношеннями [8]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (3)$$

де $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$; $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $E = E(Z^{i'})$, $\nu = \nu(Z^{i'})$ - значення

модуля пружності і коефіцієнта Пуасона в точці тіла, що розглядається.

Рух неоднорідного ізотропного тіла, об'ємом V , обмеженого поверхнею S описується рівнянням, що є наслідком принципу Даламбера, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд [2, 8]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} z_{,k}^{j'} \sigma^{ki} \right) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'}. \quad (4)$$

Однозначність розв'язання (4) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщення та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0 , який приймається за початок часової координати:

$$u(Z^{i'}, t_0) = u_0(Z^{i'}), \dot{u}(Z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(Z^{i'}), Z^{i'} \in V. \quad (5)$$

При цьому припускається, що на частині поверхні S_u задані кінематичні граничні умови:

$$u(Z^{i'}, t) = \tilde{u}(Z^{i'}, t), Z^{i'} \in S_u, \quad (6)$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\bar{n} = n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_{,i}^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(Z^{k'}, t), Z^{k'} \in S_p. \quad (7)$$

Диференційне рівняння (4) з граничними умовами (7) еквівалентно варіаційному принципу Гамільтона [3, 6]:

$$\int_V \rho \dot{u}^{i'} \delta u_{i'} dV + \int_V \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} dV - \int_V f^{i'} \delta u_{i'} dV - \int_{S_p} p^{i'} \delta u_{i'} dS = 0, \quad (8)$$

де $\tilde{\sigma}^{ij}$, $\tilde{\epsilon}_{ij}$ - фізичні компоненти тензорів напружень і деформацій відповідно.

2. Неоднорідні скінченні елементи НМСЕ для задачі динаміки.

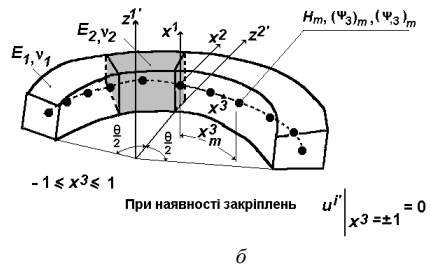
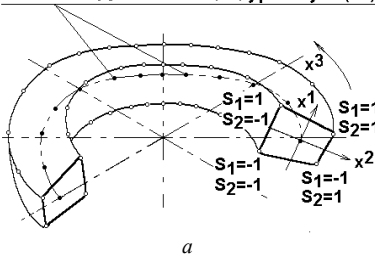
Для дискретизації неоднорідних просторових тіл при динамічному навантаженні застосовуються кільцевий та призматичний скінченні елементи [1, 2, 5] (рис. 1).

Щільність матеріала, компоненти тензора пружних постійних і метричного тензора в області поперечного перерізу елемента вважаються незмінними. Напротивагу цьому постійні матеріала і напруження довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування.

В площині перетину елемента прийнято білінійне розподілення переміщень, швидкостей та прискорень:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} \prod_{n=1}^2 \left(S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

Точки інтегрування $d^{ijkl}(x^3), \rho(x^3), \sigma^{ij}(x^3)$



Точки інтегрування $d^{ijkl}(x^3), \rho(x^3), \sigma^{ij}(x^3)$

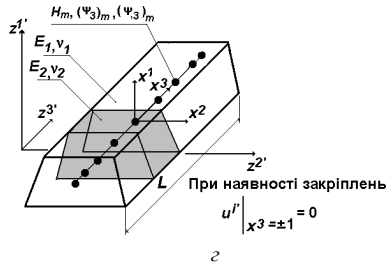
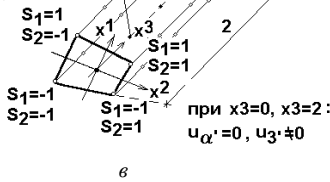


Рис. 1. Неоднорідні скінченні елементи НМСЕ:

- а) замкнений кільцевий; б) незамкнений кільцевий; в) шарірно опертий призматичний;
- г) призматичний із довільними граничними умовами на торцях

Для обчислення компонент тензора деформацій використовується моментна схема скінченного елемента (МССЕ) [4].

Для апроксимації переміщень, швидкостей та прискорень в напрямку утворюючої використовується система координатних функцій $\Psi_{k'}^l$:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u: \dot{u}: \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \Psi_{k'}^l, \quad (10)$$

де для кільцевого замкнутого СЕ на основі рядів Фур'є:

$$\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \Psi_{3'}^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi \quad (11)$$

призматичного СЕ на основі рядів Фур'є:

$$\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \Psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2 \quad (12)$$

кільцевого незамкненого та призматичного СЕ із довільними граничними умовами на торцях (Ψ^l – поліноми Лагранжа при $l = 0, 1$ і Міхліна при $l = 2, \dots, L$):

$$\begin{aligned} \Psi_{k'}^0 &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \Psi_{k'}^1 = \frac{1}{2}(1+x^3), \quad -1 \leq x^3 \leq 1, \\ \Psi_{k'}^l &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{s=0}^l \frac{(-1)^s (l+s)!}{(l-s)! (s!)^2 2^{s+1}} \left[(1-x^3)^s + (-1)^l (1+x^3)^s \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ способом.

3. Узагальнена матриця мас НМСЕ в задачах стаціонарних та нестаціонарних коливань просторових тіл.

Специфіка напіваналітичного варіанта методу скінченних елементів така, що за невідомі приймаються амплітудні компоненти векторів переміщень, швидкостей та прискорень. При цьому задача їх визначення зводиться до розв'язання системи звичайних диференційних рівнянь 2-го порядку для моменту часу τ , яка записується у формі:

$$[M]_{lm} \{\ddot{U}\}^m + [K]_{lm} \{U\}^m = \{Q\}_l. \quad (14)$$

Матрична форма (14) є традиційним записом розрахункової системи рівнянь, яка отримана після просторової дискретизації внаслідок підстановки (9)–(13) до (8). Матриці $[M]_{lm}$, $[K]_{lm}$ та вектор $\{Q\}_l$ отримані внаслідок обходу скінченно-елементної області та процедури асамблювання відповідних компонент матриць $[m]_{lm}$, $[k]_{lm}$ та вектору $\{q\}_l$ елементів відповідно. Вектори $\{U\}^m$ та $\{\ddot{U}\}^m$ зкомпоновані з переміщень і прискорень вузлів повної скінченноелементної моделі.

У загальному випадку варіація кінетичної енергії скінченного елемента в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta K = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \ddot{u}^{k'} \delta u_{k'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (15)$$

з якого, виходячи з відомих припущень, можна отримати вирази для частних випадків:

- періодичні коливання

$$\delta K = -\omega_p^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho u_p^i \delta u_i^p \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \quad (16)$$

- рухоме навантаження

$$\delta K = V^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \frac{\partial u^i}{\partial y^3} \frac{\partial \delta u_i^r}{\partial y^3} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3; \quad (17)$$

- вимушені коливання

$$\delta K = -\theta_r^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho u_r^i \delta u_i^r \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (18)$$

Виразивши переміщення вузлів елемента вздовж окружної координати у вигляді (9) - (13), отримаємо:

$$\delta K = \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \{ \{ u_{k'} \}_{(S_1, S_2)}^l \}^T [m]_{lm} \{ \{ u_{k'} \}_{(S_1, S_2)}^m \}, \quad (19)$$

де $[m]_{lm}$ - амплітудна матриця мас неоднорідного вздовж x^3 елемента, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \hbar A \sqrt{g} \rho_{lm}^{k'} \left[g^{k'(k')} \right]_{(S_1, S_2)} \mathbf{H}_M^l \mathbf{H}_l, \quad (20)$$

де

$$\rho_{lm}^{k'} = \int_{x^3} \rho (x^3) \psi_{(k')}^m \psi_{(k')}^l dx^3, \quad (21)$$

$\rho(x^3)$ - щільність матеріалу, обчислена в центрі поперечного перерізу. Для однорідних тіл інтегрування (21) можна виконати в замкнутій формі:

$$\rho_{lm}^{k'} = \rho \times \begin{cases} 1, l=m \\ 0, l \neq m \end{cases}. \quad (22)$$

Значення параметра \hbar залежить від вибору скінченних елементів для апроксимації конструкції і дорівнює π при використанні замкнених кільцевих скінченних елементів на основі рядів Фур'є (рис.1а), для інших СЕ - $\hbar = 1$.

В загальному випадку при обчисленні інтеграла по площині поперечного перерізу СЕ:

$$H_I = \prod_{n=1}^2 [(S_n P_n + 3)/144]. \quad (23)$$

Таблиця 1

Параметри узагальненої матриці мас

Задача	A	H_M^I
Періодичні коливання	$-\omega_p^2$	1
Рухоме навантаження	V^2	$-\left(\frac{\partial x^3}{\partial y^3} \frac{l\pi}{2}\right)^2$
Вимушені коливання	$-\theta_r^2$	1
Імпульсне навантаження	1	1

Так як при формуванні коефіцієнтів матриці жорсткості беруть участь поліноми більш низького ступеня (перші похідні), ніж при формуванні коефіцієнтів матриці мас і, отже, збіжність чисельного рішення визначається збіжністю потенційної енергії деформації, тоді доцільно зменшити ступінь поліномів, які використовуються при обчисленні коефіцієнтів матриці мас. В цьому випадку, отримаємо вираз для коефіцієнтів "неузгодженої" матриці мас. Використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, та враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині маси елементів, які примикають до даного вузла, множник H_I можна записати як:

$$H_I = 1/4. \quad (24)$$

Висновки.

На основі моментної схеми скінченного елемента представлено узагальнену матрицю мас неоднорідних скінченних елементів НМСЕ в задачах дослідження стаціонарних та нестаціонарних коливань неоднорідних призматичних прямолінійних тіл та тіл обертання із складною формою та структурою поперечного перерізу, що знаходяться під дією навантажень різної інтенсивності та тривалості у часі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.С., Солодей І.І.* “Чотиривимірна скінченноелементна апроксимація простору та часу в нестационарних задачах динаміки на основі НМСЕ” // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.72, 2003. –с.119-134
2. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
3. *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т.* Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. –М.: Машиностроение, 1989. – 248с.
4. *Гуляр О.І., Топор О.Г., Солодей І.І.* “Просторова задача динаміки для пружнопластичних неоднорідних тіл обертання в схемі напіваналітичного методу скінченних елементів”, Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.66, 1999. –с.56-57.
5. *Гуляр О.І., Сізевич Б.І., Сніжко Н.А., Овсянніков О.С., Солодей І.І.* “ Аналіз власних форм і частот просторових тіл в схемі напіваналітичного методу скінченних елементів ” // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. – К.:КНУБА, Вип.73, 2003. –с.100-115
6. *Друккер Д.* Вариационные принципы в математическом теории пластичности // Механика.- М.: ИП, 1959.- № 6.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
8. *Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.

Отримано 08.09.10

Солодей І.І., Гуляр А.І., Вабищевич М.О., Прыходько А.Ю., Сізевич Б.І.

Обобщенная матрица масс полуаналитического метода конечных элементов в задачах динамики пространственных конструкций

В рамках полуаналитического метода конечных элементов построена обобщенная матрица масс неоднородных конечных элементов в задачах исследования стационарных и нестационарных колебаний призматических прямолинейных тел и тел вращения со сложной формой и структурой поперечного сечения, которые находятся под действием нагрузок различной интенсивности и продолжительности во времени.

Solodei I.I., Gulyar A.I., Vabischevich M.O., Pryhodko A.Y., Sizevich B.I.

Generalized element mass matrix of semi-analytical finite element method for dynamical 3D problems

Generalized element mass matrix for different types of dynamical problems is considered in range of semi-analytical finite element method. Library of special finite elements to model 3D solids of revolution and prismatic solid are presented.

УДК 539.3

І.О. Охтень

Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ З РІЗНИМИ ВАРІАНТАМИ РОЗКРІПЛЕННЯ

На прикладі сталевого каркасу будівлі торговельного комплексу у м. Миколаїв досліджено роботу тонкостінних прогонів покриття з урахуванням особливостей їх розкріплення до рам каркасу. Зроблено висновок про вплив способу розкріплення багатопрольотних прогонів (балок) до крокв'яних конструкцій.

Причиною до початку дослідження елементів покриття торговельного комплексу стала понаднормова деформація і втрата стійкості елементів покриття під дією снігового навантаження (рис. 1).



а



б

Рис. 1. Технічний стан конструкцій покриття
а) вигляд з даху будівлі; б) вигляд з середини будівлі

Основними пошкодженнями несучих конструкцій покрівлі, які відносять до категорії А по ДБН [7], що становлять безпосередню небезпеку для руйнування будівлі, є: деформації прогонів покрівлі, що свідчать про вичерпання їх несучої здатності внаслідок втрати загальної стійкості за згинально-крутильною формою і виникнення прогину величиною до 926 мм (що складає 1/13 від прольоту, при допустимих 1/200) у крайньому прольоті; пластичні деформації прогонів покрівлі у перерізах на кінці з'єднань з напуском; локальні пластичні деформації прогонів покрівлі у перерізах на кінці напустки, а також у місцях

примикання підкосів. Дані дефекти пов'язані з загальною чи місцевою втратою стійкості тонкостінного прогону покриття.

Основними несучими конструкціями блоку В будівлі є трьохрольотні двоскатні сталеві рами з ухилом покрівлі рівним 6%. Прольоти рам складають 24,0 м, крок поперечних рам 12,0 м (рис. 2). Висота будівлі складає: 9,18 м – на рівні карнизного вузла поперечних рам, та 11,34 м – на рівні гребеневого. Несучі елементи поперечних рам каркасу запроєктовані зі зварних двотаврів перемінного перерізу. Висота перерізу колон змінюється в межах 400-740 мм, ригелів – 500-740.

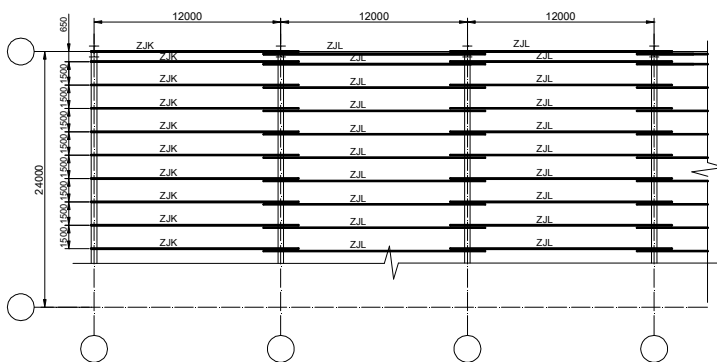


Рис. 2. Фрагмент схеми розташування покрівельних прогонів

Основними елементами дослідження є прогони покрівлі, які виконані із Z-подібних холоднодеформованих оцинкованих профілів висотою 254 мм: ZJL у середніх прольотах (рис. 3, а) і ZJK у крайніх прольотах (рис. 3, б). Матеріал прогонів - сталь з межею текучості 355 МПа. Прогони розміщені з кроком 1500 мм і запроєктовані за нерозрізною схемою. В околі парапету крок прогонів прийнятий меншим (близько 600 мм), що відповідає більшому накопиченню снігового покриву у цій зоні покрівлі. Прогони з'єднуються по довжині внапусток і прикручуються до несучих конструкцій покриття за допомогою самонарізних гвинтів.

Перевірні розрахунки по діючим державним нормам [4], а також по EuroCod [5,6], показали достатню несучу здатність елементів покриття по міцності і стійкості. При аналізі можливої причини руйнування, виявлена особливість конструкції покриття, яка полягає у наявності прокладки з утеплювача і пароізоляції (товщина шару у стиснутому стані 110 мм) між профільованим листом і верхньою полицею прогону (рис. 4). Така конструктивна особливість може негативно впливати на стійкість

прогонів покриття по згинально-крутильній формі, оскільки зменшує жорсткість розкріплення верхньої полицки прогону з площини. Виходячи з цього, проведено дослідження роботи прогонів з закріпленням максимально наближеним до реального, тобто розкріпленням прогонів покриття профільованим листом через пружні в'язі і виконане порівняння його роботи з класичними видами розкріплення.

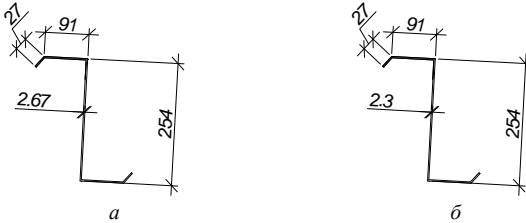


Рис. 3. Поперечні перерізи прогону

Для перевірних розрахунків взятий нерозрізний п'ятипрольотний прогон (величина прольотів – 12 м) з відповідними до проекту поперечними перерізами: ZJL у середніх прольотах і ZJK – у крайніх. Навантаження задане згідно проекту – 150 кг/мп (сумарне граничне розрахункове навантаження на покрівлю). При розрахунках диск покриття, враховуючи наявність системи в'язей по каркасу, вважається жорстким, а прокладка між прогоном і профільованим листом такою, що не заважає переміщенню і деформації самонарізного гвинта.

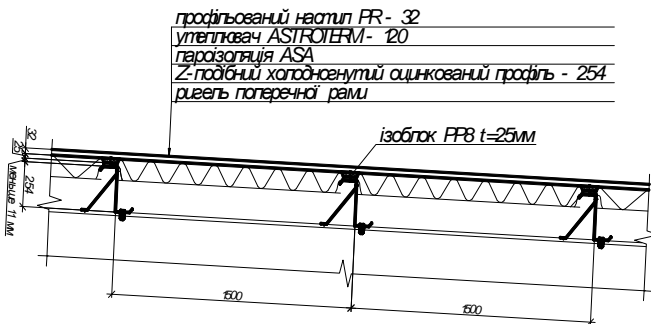


Рис. 4. Конструкція покрівлі

Серія розрахунків виконана з чотирма варіантами закріплення прогонів. Перші три відрізнялися способом закріплення верхньої полицки при шарнірно-рухомому закріпленні на опорах: варіант №1 - не розкріплена верхня полицка (рис. 5, а), варіант №2 - розкріплена за

допомогою пружній в'язей (рис. 5, б), варіант №3 - розкріплена повністю (рис. 5, в). Для забезпечення геометричної незмінюваності системи одна крайня опора у вище наведених варіантах залишалась шарнірно-нерухомою. Четвертий варіант розкріплення прогону - шарнірно-нерухомі опори і повне розкріплення полицки з площини (рис. 10, г).

Шарнірно-рухомі опори (рис. 5, а, б, в) задавалися шляхом обмеження переміщень трьох вузлів нижньої полицки математичної моделі прогону у місцях його примикання до ригеля рами по напрямкам x , y і z з звільненням переміщень вздовж власної осі стержня z . Відповідно, у шарнірно-нерухомих опорах обмежувались переміщення по всім трьом напрямкам x , y і z (рис. 5, г). Для моделювання розкріплена за допомогою пружній в'язей у математичну модель введені стержневі елементи, які за жорсткістю, геометрією та розташуванням відповідають реальній конструкції (рис. 5, б). Повне розкріплення верхньої полицки досягалося введенням обмеження переміщень вузлів верхньої полицки по осі x (рис. 5, в, г); таке розкріплення класифікується за п. 5.16 [10] як повне.

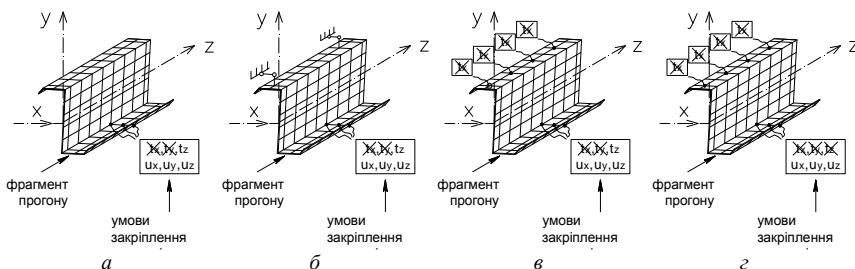


Рис. 5. Варіанти розкріплення прогону

а – варіант №1; б – варіант №2; в – варіант №3; г – варіант №4; tx , ty , tz – переміщення вздовж осей x, y, z , відповідно; ux, uy, uz – поворот відносно осей x, y, z , відповідно.

Перекреслене переміщення/поворот означає закріплення від даного переміщення/повороту

Скінченноелементна (математична) модель стержня сформована за допомогою обчислювального комплексу NASTRAN. Полички, стінки і відгини стержня моделювалися плоскими скінченними чотирикутними елементами розмірами 5x5 см, всього у моделі 13200 елементів і 14440 вузлів. Як матеріал закладено сталь з наступними механічними характеристиками: $E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=0.3$, $R_y=355$ МПа.

Результати розрахунків (табл. 1) показали, що пружне розкріплення, у даному випадку, не значно зменшує критичну силу по відношенню до варіанта з повним розкріпленням. Однак, знайдена інша залежність, а саме вплив закріплення на опорах на стійкість стержня. Як видно з табл. 1, критична сила при шарнірно-нерухомих опорах в тричі вища (1,792

проти 0,536) ніж при шарнірно-рухомих, при інших рівних умовах. Це вказує на необхідність детального дослідження даної особливості, оскільки норми по конструюванню і розрахунку таких елементів не вказують на можливість зменшення критичної сили при зміні способу розкріплення на опорах.

Таблиця 1

Коефіцієнти втрати стійкості

Форми втрати стійкості	Варіанти розкріплення			
	№1 Рис. 5, а	№2 Рис. 5, б	№3 Рис. 5, в	№4 Рис. 5, г
Перша	0,15	0,557	0,536	1,792
Друга	0,171	0,624	0,75	1,793
Третя	0,225	0,708	0,75	2,037

З цією метою проведена серія тестових розрахунків у яких виконане порівняння втрати стійкості прогону при шарнірно-рухомому (рис. 6, а) та шарнірно-нерухомому розкріпленнях (рис. 6, б). При цьому верхня полицка в обох випадках повністю розкріплена.

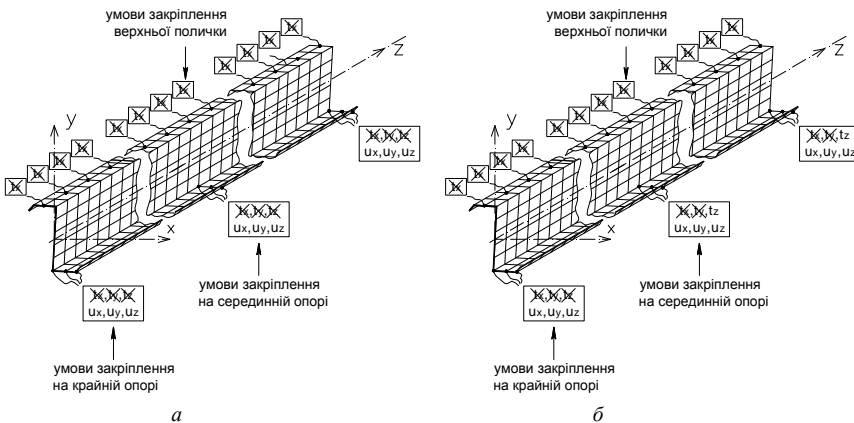


Рис. 6. Схема розкріплення прогонів.

а) шарнірно-нерухоме закріплення; б) шарнірно-рухоме закріплення; t_x, t_y, t_z – переміщення вздовж осей x, y, z , відповідно; u_x, u_y, u_z – поворот відносно осей x, y, z , відповідно. Перекреслене переміщення/поворот означає закріплення від даного переміщення/повороту

Серія розрахунків складається з сорока обчислень, які відрізняються кількістю прольотів та товщиною елементів. Таким чином були проведені

порівняльні розрахунки прогонів за різними конструктивними схемами (одно- і багатопрольотних) і різною геометрією, яка досягалась зміною товщини елемента. За основу для розрахунків вибрано той же прогон з попереднього етапу робіт у якому було змінено кількість прольотів і товщину листа, при цьому навантаження, орієнтація прогону в просторі, спосіб задання математичної моделі і граничних умов в ній залишені незмінними. Результати розрахунків зведені у табл. 2, 3.

Розрахунки підтвердили, що спосіб обпирання тонкостінного прогону має суттєвий вплив на його стійкість. Так, в багатопрольотних схемах при шарнірно-нерухомому обпиранні критична сила (коефіцієнт втрати стійкості) в 2..3 рази вища ніж при шарнірно-нерухомому (див. табл. 2). При однопрольотній схемі вплив закріплення суттєво менший.

Таблиця 2

Коефіцієнти втрати стійкості

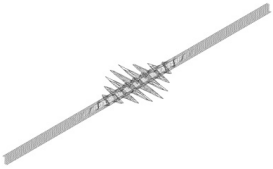
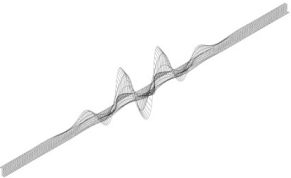
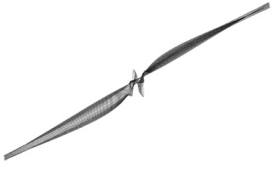





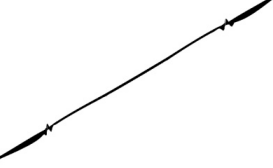
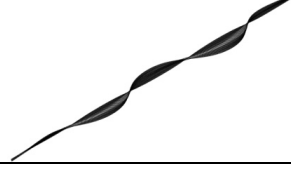
Товщина листа, мм	Спосіб закріплення серединних опор	Кількість прольотів				
		1	2	3	4	5
2,3	рухомі	1,0787	0,5713	0,4621	0,4473	0,43149
	шарнірно-нерухомі	0,966	1,0536	1,2166	1,2196	1,2207
2,9	рухомі	1,771	0,7728	0,6358	0,6205	0,6012
	шарнірно-нерухомі	1,8865	1,6784	1,937	1,9442	1,946
3,5	рухомі	2,6636	1,0032	0,8417	0,8278	0,8059
	шарнірно-нерухомі	2,8482	2,4259	2,7837	2,7973	2,8001
4,1	рухомі	3,7722	1,267	1,085	1,0746	1,0509
	шарнірно-нерухомі	3,8753	3,2406	3,6441	3,6599	3,6626

У табл. 3 наведені перші форми втрати стійкості, відповідно, при одно-, дво-, трьох-, чотирьох- і п'ятипрольотній схемах. З рисунків наведених у табл. 3 можна побачити принципову різницю між формами втрати стійкості для шарнірно-нерухомих і шарнірно-рухомих випадків для багатопрольотних схем. Втрата стійкості у першому випадку проходить у вигляді зминання нижньої полицки у місці виникнення

максимального згинального моменту. У другому випадку зминання на опорах не відбувається, натомість прогон втрачає стійкість за загальною формою при значно вищих критичних силах. Форми втрати стійкості при однопрольотних схемах суттєво відрізняються від багатопрольотних.

Таблиця 3

Форми втрати стійкості

Розрахункова схема	Шарнірно-нерухоме закріплення	Шарнірно-рухоме закріплення
Однопрольотна		
Двохпрольотна		
Трьохпрольотна		
Чотирьохпрольотна		
П'ятипрольотна		

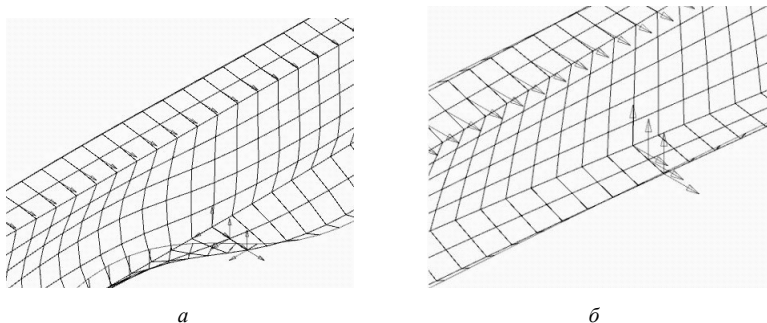


Рис. 7. Деформації прогонів поблизу крайньої опори (фрагмент прогону)

На основі розрахунків можна зробити висновок, що для тонкостінних багатопрольотних прогонів (балок) суттєвий вплив на стійкість має спосіб їх закріплення до ригелів, що не зазначено у нормативних документах до розрахунку та конструювання таких прогонів. Цей висновок має дуже важливий практичний зміст, оскільки у практиці будівництва використовується як шарнірно-рухомі так і шарнірно-нерухомі прогони.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ракиа С.В.* Связная потеря устойчивости и весовая оптимизация тонкостенных стержней открытого профиля. Дисертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Днепропетровск – 2003.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
3. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807с.
4. СНиП II-23-81*. Стальные конструкции/Госстрой СССР. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990. –96с.
5. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1.3: General rules-Supplementary rules for cold formed thin gauge members and sheeting.
6. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1.1: General rules and rules for buildings.
7. ДБН 362-92. Оцінка технічного стану сталевих конструкцій виробничих будівель і споруд, що знаходяться в експлуатації-К.: Держкомітет України буд-ва і архіт., 2003.- 82 с.

Отримано 25.05.10

Охтенъ И.А., Гоцуляк Е.А.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОЙКОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ С РАЗНЫМИ ВАРИАНТАМИ РАСКРЕПЛЕНИЯ

На примере стального каркаса здания торгового комплекса в г. Николаев исследовано работу тонкостенных прогонов покрытия с учетом особенностей их раскрепления к рамам каркаса. Сделан вывод о влиянии способа раскрепления многопролетных прогонов (балок) к стропильным конструкциям.

Okhten I.O., Gotsuliak E.O.

THE RESEARCH OF FIRMNES IN OPEN PROFILE THIN-WALLED ELEMENTS WITH DIFFERENT VARIANTS OF JOINING

On an example of trading complex building steel framework in Nikolaev was researched the work of thin-walled beams of coverage with the account of their features in joining to the frames of framework. It was made a conclusion about influence the way of joining multiflight beams to the bearing frames.

УДК 725

Г.В. Гетун, канд. техн. наук

М.Г. Кушніренко, канд. техн. наук

ОСОБЛИВОСТІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ РОЗРАХУНКОВИХ СХЕМ БАГАТОПОВЕРХОВИХ КАРКАСНО- МОНОЛІТНИХ ЖИТЛОВИХ БУДИНКІВ

Розглядаються особливості дослідження та проектування каркасно-монолітних багатоповерхових житлових будинків із стінами підвищеного теплозбереження з урахуванням діючих будівельних норм.

Будівельні системи каркасно-монолітних житлових будинків підвищеної поверховості складають: несучі безригельні каркаси з плитними перекриттями із монолітного залізобетону; монолітні або збірні залізобетонні стрічкові, плитні або пальові фундаменти; монолітні або частково цегляні внутрішні стіни сходово-ліфтових вузлів із збірними або монолітними залізобетонними сходовими маршами та площадками; не несучі зовнішні цегляні багат шарові стіни фахверкового типу з ефективним утеплювачем, які спираються на міжповерхові перекриття.

Для сучасних житлових будинків підвищеної поверховості раціональною конструктивною системою є монолітний залізобетонний безригельний каркас з монолітними дисками перекриттів та покриття, у якого обмежена кількість вертикальних несучих опор (колон, пілонів, коротких і довгих стін, тощо) забезпечує вільне планування квартир покращеного планування.

Розрахункова схема каркасно-монолітної будівлі включає встановлення об'ємно-планувальних параметрів умовного багатоповерхового рамного каркаса та визначення розмірів його несучих елементів, які сприймають вертикальні та горизонтальні навантаження. При складанні розрахункових схем таких будівель приймають до уваги, що наявність безригельних залізобетонних перекриттів забезпечує розподіл горизонтальних навантажень між умовними рамами, розташованих у взаємно перпендикулярних напрямках.

Каркасно-монолітні багатоповерхові будівлі проектують за жорсткими конструктивними схемами. В монолітних дисках перекриттів безригельного каркаса виділяються міжколонні полоси з відповідно більшим їх армуванням робочою поздовжньою та поперечною розподільчою арматурою, що враховує нерівномірний розподіл зусиль у товщі плити. При виготовленні плоскої залізобетонної монолітної плити

перекриття створюються також жорсткі вузли з'єднання її з вертикальними несучими опорами. У цих місцях плита підсилюється додатковими поздовжніми та поперечними стрижнями, які сприймають значні зусилля, що передаються від плити на опори, та перешкоджають її місцевому продавлюванню.

Каркасно-монолітні житлові будинки висотою більше 73,5 м відносяться до висотних будівель [3, 10]. Важливим поняттям, яке характеризує вимоги до конкретних будівель при їх проектуванні, є клас будівлі за відповідальністю [8]. Багатоповерхові каркасно-монолітні житлові будинки з невеликими розмірами планів, при відношенні висоти до ширини більше або дорівнює 5 відносяться до I класу будівель за відповідальністю. А тому при розрахунках ґрунтових основ, фундаментів і несучих конструкцій висотних каркасно-монолітних житлових будинків за першою та другою групами граничних станів необхідно вводити коефіцієнти надійності за відповідальністю $\gamma_n = 1,4 \dots 1,2$. Не рекомендується будувати такі будинки в районах проявів карстової безпеки, зсувних явищ, наявності пливунів, просідаючих ґрунтах груп складності 2-А, 2-Б, 2-В і 1-А та інших небезпечних процесів [3].

Зважаючи на те, що 68% території України знаходиться на просідаючих ґрунтах, а будівельні майданчики у Києві ускладнюються ще й пагорбкуватим і розчленованим рельєфом та необхідністю враховувати при проектуванні будівель I класу відповідальності сейсмічних навантажень, при проектуванні багатоповерхових каркасно-монолітних будівель передбачають впровадження комплексу заходів для покращення умов роботи їх несучих остовів.

Відомо, що псевдо симетрія або асиметрична компоновка несучих елементів у будівлях приводить до концентрації напруг біля елементів із більшою жорсткістю та закручуванню будівлі навколо них. Концентрація напруг – це різке збільшення напруг, яке виникає в місцях різкої зміни форми будівлі або споруди: біля країв прорізів, у вхідних кутах, при неоднорідній структурі матеріалу тощо. Зони концентрації напруг найбільше перевантажені, а тому саме в них починаються пластичні деформації та руйнування.

Виходячи з цього проектування будівель за жорсткою конструктивною схемою передбачає об'єднання її несучих елементів у єдину просторову систему з виключенням можливостей взаємного переміщення окремих елементів несучих конструкцій при деформаціях основи. Для цього необхідно: надавати будівлям компактної у плані конфігурації, симетрично та рівномірно розташовувати внутрішні вертикальні несучі конструкції із нормуванням відстаней між ними; розчленовувати будівлі з великою площею забудови за допомогою

деформаційних швів на окремі відсіки, що працюють незалежно; підвищувати загальну просторову жорсткість будівель за допомогою встановлення вертикальних діафрагм та блоків жорсткості; підсилувати окремі елементи несучих конструкцій та зв'язків між ними (додатково армувати); підсилувати фундаментно-підвальну частину будівель шляхом влаштування фундаментів у вигляді монолітних суцільних плит, перехресних балок, балок-стінок, пальових фундаментів тощо.

Конструкції каркасно-монолітних багатоповерхових будівель проектують як елементи єдиної просторової системи для сприйняття зусиль від навантажень, що діють на них, та нерівномірних деформацій ґрунтових основ. Вертикальна стійкість багатоповерхових каркасно-монолітних будівель у поперечному та поздовжньому напрямках забезпечується: надійним з'єднанням вертикальних несучих конструкцій (колон, пілонів, коротких та довгих стін) з фундаментами; жорстким з'єднанням міжповерхових перекриттів та покриття з вертикальними несучими конструкціями; влаштуванням при необхідності між колонами вертикальних зв'язків у вигляді довгих монолітних стін (діафрагм жорсткості). Вертикальні зв'язки, що забезпечують просторову стійкість багатоповерхової будівлі або його деформаційного відсіку, групують у середній частині будівлі або відсіку у вигляді просторових блоків жорсткості, в яких розміщують сходові клітки та ліфтові шахти. Для забезпечення спільної роботи каркаса та просторових блоків жорсткості підсилюють вузли з'єднання їх з перекриттями, що забезпечує більшу жорсткість всієї конструктивної системи в горизонтальній площині.

Граничні розміри довжини і ширини відсіків каркасної багатоповерхової будівлі визначають у залежності від розрахункових величин деформацій ґрунтових основ. Конструктивно максимальні відстані між температурними швами, які допускаються при зовнішній температурі не нижче -40°C не повинні перевищувати 50...60 м.

Осадочні шви передбачають у тих випадках, коли очікують нерівномірні осідання суміжних частин будівлі: при різних за величиною та характером навантажень на ґрунтові основи; при значній різниці висот суміжних частин будівлі; на межі різнорідних ґрунтів основ під фундаментами тощо.

Осадочні шви між відсіками проектують у виді спарених рам із колон, пілонів, коротких або довгих стін, на які жорстко спираються безригельні конструкції міжповерхових плит перекриттів та плити покриття. Утворені зазори швів перекривають металевими компенсаторами із закладанням у шви еластичних заповнювачів.

Осадочні шви ділять по вертикалі всі конструкції будівель, включаючи фундаменти, і допускають самостійне осідання окремих її

об'ємів. Впливи від нерівномірних деформацій просідаючих ґрунтових основ сприймаються жорсткою фундаментом-підвальною частиною, яку в місцях розташування осадочних швів розділяють на самостійно працюючі об'єми з використанням елементів із оцинкованого сталевих листа Pentaflex KB німецьких виробників.

У наземних конструкціях каркасно-монолітних багатоповерхових будівель прийняття та перерозподіл вертикальних та горизонтальних навантажень здійснюється монолітними залізобетонними безригельними плитами перекриття та покриття, які жорстко з'єднані з вертикальними несучими конструкціями будівлі рамної конструктивної системи. Відстані між серединами поперечних умовних ригелів в одному напрямі та між осями жорстко з'єднаних з ними вертикальних опор у другому напрямі є розрахунковими взаємно перпендикулярними прогонами.

Розрахунок безригельних каркасів з монолітними плоскими перекриттями здійснюють методом замічних рам, утворених у поздовжньому та поперечному напрямках рядами вертикальних опор і умовними ригелями плит. Визначення зусиль в елементах замічної рами здійснюють із умов розрахунку рами в пружній стадії роботи. При цьому враховують нерівномірний розподіл згинаючих моментів за шириною умовного ригеля, який працює як нерозрізна багатопрогонова конструкція з моментами на опорах значно більшими ніж у прогонах. Розрахунок вузлового з'єднання умовного ригеля плоскої плити з вертикальними опорами здійснюють на згин та зріз (за контуром критичного перерізу) від дії моменту та поздовжньої сили, які передаються від вертикальної опори на плиту.

Залізобетонний каркас багатоповерхової будівлі розраховують за критеріями I та II груп граничних станів. Такий каркас є багатократно статично невизначеною системою, тому точний розрахунок його виконують з допомогою персональних обчислювальних машин із використанням стандартних програм. Це дозволяє відмовитись від спрощених передумов та в повній мірі враховувати в розрахунках ефект просторової роботи каркаса будівлі. В Києві в науково-дослідному інституті НДІАБ розроблений комплекс програм "Ліра", в основу якого покладений метод скінчених елементів, який використовують для виконання таких розрахунків.

При розрахунках та конструюванні будівель висотою більше 72,5м необхідно виконувати вимоги забезпечення необхідної жорсткості будівель від вітрових горизонтальних навантажень, а саме: горизонтальні переміщення верху будівлі не повинні бути більше $1/500$ її висоти, а прискорення коливань перекриттів його верхніх поверхів не більше $0,08$ м/с². При проектуванні таких багатоповерхових будівель виконується

розрахунок будівлі на безпеку від прогресуючого обвалення в умовах надзвичайних ситуацій не тільки в сталому, але й в аварійному режимах, коли, наприклад, одна із колон та прилегла до неї ділянка перекриття або стіни зруйновані.

Проектування несучих конструкцій багатоповерхових каркасно-монолітних будівель виконують за наступною схемою:

- на основі аналізу проектів-аналогів будівель, які за своїми параметрами відповідають технічному завданню на проектування, вибирають конструктивну схему будівлі, призначають матеріали несучих та огорожувальних конструкцій;

- виконують компоновку конструктивної схеми, призначають типи перерізів основних несучих елементів каркаса, визначаються з вузлами і монтажними з'єднаннями;

- призначають розрахункову схему, визначають навантаження та впливи, задаються в першому наближенні перерізами елементів каркаса та їх жорсткостями. Розміри перерізів та їх жорсткості призначають на основі орієнтовних розрахунків;

- виконують статичні розрахунки на всі навантаження, знаходять розрахункові сполучення зусиль і визначають внутрішні зусилля в елементах каркаса, а також знаходять переміщення від нормативних навантажень та оцінюють роботу будівлі за другою групою граничних станів;

- розрахунком на сприйняття зусиль від зовнішніх навантажень знаходять площу перерізу робочої поздовжньої розтягнутої та стиснутої арматури. У відповідності з конструктивними та технологічними міркуваннями призначають поперечну, розподільчу, монтажну та непряму арматуру;

- підбирають розміри перерізів елементів несучих конструкцій, перевіряють їх міцність та стійкість, перевіряють відповідність жорсткостей елементів заданим у першому наближенні. Якщо вони відрізняються від розрахункових більше ніж на 30%, всі розрахунки повторюють, прийнявши у другому наближенні знайдені значення жорсткостей;

- виконують конструювання та розрахунки вузлів, з'єднань та приступають до розробки робочих креслень.

Монолітні залізобетонні рами багатоповерхових будівель складаються із вертикальних несучих елементів (колон, коротких та довгих стін), які працюють на стиск, і елементів перекриття, які працюють на згин. Ці елементи конструюють у відповідності з правилами конструювання колон, балок та плит. Відмінна особливість рам у конструктивному відношенні – це наявність жорстких вузлів, які є відповідальною

частиною багатопверхових монолітних рам. Їх конструкція повинна створювати передбачену розрахунком жорсткість, безпечно сприйняття діючих зусиль і, крім того, вона повинна бути технологічною та зручною для зведення будівлі.

Розміри поперечних перерізів вертикальних та горизонтальних несучих елементів каркасно-монолітних будівель визначають за їх розрахунковою здатністю. Вони залежать від висоти будівлі, розмірів прогонів, класу бетону тощо. У певній мірі на остаточне призначення цих розмірів впливають модульні розміри інвентарних опалубок, які використовуються для виготовлення цих монолітних конструкцій.

У каркасно-монолітних житлових будинках товщина монолітної залізобетонної плоскої плити перекриття при прогонах між опорами 6...8 м складає 160...200 мм (приблизно 1/35 прогону). До речі стандартні збірні плити перекриттів суцільного перерізу, що спираються по контуру, мають теж товщину 160 мм. У житлових будинках доцільно використовувати такі важкі міжповерхові перекриття, тому що вони покращують звукоізоляцію, перешкоджають розповсюдженню повітряного шуму.

Таким чином, будівельні системи багатопверхових каркасно-монолітних житлових будинків складають: несучі безригельні каркаси з перекриттями із монолітного залізобетону; монолітні стрічкові, пальові або плитні фундаменти; зовнішні цегляні ефективно утеплені стіни фахверкового типу, несучі або самонесучі стіни тієї ж конструкції.

Просторова жорсткість сучасних багатопверхових житлових будинків з повним безригельним каркасом забезпечується монолітним з'єднанням залізобетонних перекриттів, що виконують роль горизонтальних діафрагм, з вертикальними несучими опорами залізобетонного каркаса (колонами і короткими стінами) та з жорсткими стіновими просторовими структурами сходово-ліфтових вузлів. Кам'яні зовнішні стіни, ослаблені віконними та балконними прорізами, які спираються на перекриття, несуттєво впливають на просторову жорсткість таких будинків, а тому в розрахункових схемах рам враховується лише вертикальна складова від їх власної ваги.

Сучасні каркасно-монолітні житлові будинки порівняно з будинками традиційних конструктивних та будівельних систем мають суттєві переваги:

- підвищена міцність та просторова жорсткість несучих остовів каркасно-монолітних будинків дозволяє зводити їх висотою до 30-ти і більше поверхів не тільки в звичайних, а і в сейсмічних районах та на просідаючих ґрунтах;

– підвищена поверховість та компактність планів каркасно-монолітних будинків баштового типу дозволяє раціонально використовувати для забудови невеликі за площею та високі за собівартістю ділянки в привабливих районах міста, створюючи містобудівельні акценти в міській забудові;

– особливості конструктивно-просторового рішення безригельного каркаса з рідким розташуванням вертикальних несучих опор дозволяє реалізувати в каркасно-монолітних житлових будинках принцип вільного планування квартир з метою поліпшення їх якості;

– ефективні теплозахисні рішення зовнішніх стін в каркасно-монолітних будинках відповідають сучасним підвищеним вимогам теплозбереження;

– підвищена поверховість каркасно-монолітних будинків та різноманітність пластичного та фактурно-кольорового рішення їх фасадів сприяє покращенню естетичних якостей міської забудови.

Сучасні каркасно-монолітні житлові будинки порівняно з будинками традиційних конструктивних та будівельних систем мають суттєві переваги:

– підвищена міцність та просторова жорсткість несучих остовів каркасно-монолітних будинків дозволяє зводити їх висотою до 30-ти і більше поверхів не тільки в звичайних, а і в сейсмічних районах та на просідаючих ґрунтах;

– підвищена поверховість та компактність планів каркасно-монолітних будинків баштового типу дозволяє раціонально використовувати для забудови невеликі за площею та високі за собівартістю ділянки в привабливих районах міста, створюючи містобудівельні акценти в міській забудові;

– особливості конструктивно-просторового рішення безригельного каркаса з рідким розташуванням вертикальних несучих опор дозволяє реалізувати в каркасно-монолітних житлових будинках принцип вільного планування квартир з метою поліпшення їх якості;

– ефективні теплозахисні рішення зовнішніх стін в каркасно-монолітних будинках відповідають сучасним підвищеним вимогам теплозбереження;

– підвищена поверховість каркасно-монолітних будинків та різноманітність пластичного та фактурно-кольорового рішення їх фасадів сприяє покращенню естетичних якостей міської забудови.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гетун Г.В. Основи проектування промислових будівель. – К.: КОНДОР, 2003, 208 с.

2. ДБН В.1.1-5-2000. Будинки і споруди на підроблюваних територіях і просідаючих ґрунтах. – К., 2000.
3. ДБН В.1.1-7-2002. Пожежна безпека об'єктів будівництва. – К., 2003.
4. ДБН В.2.2-15-2005. Житлові будинки. Основні положення. – К.: Держбуд України, 2005. – 36 с.
5. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. – К.: Мінбуд України, 2006. – 60 с.
6. ДБН В.2.6-31:2006. Теплова ізоляція будівель. – К.: Мінбуд України, 2006. – 65 с.
7. ДБН В.1.1-12:2006. Будівництво у сейсмічних районах України. – К.: Мінбуд України, 2006. – 82 с.
8. ДБН В.1.2-14-2009. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ. К.: Мінрегіонбуд України, 2009. – 37 с.
9. ДБН В.2.1-10-2009. Основи та фундаменти споруд. Основні положення проектування. К.: Мінрегіонбуд України, 2009. – 104 с.
10. ДБН В.2.2-24:2009. Проектування висотних житлових і громадських будинків. К.: Мінрегіонбуд України, 2009. – 103 с.
11. *Иванов М.А., Козак А.Л., Кушниренко М.Г., Русаков О.В.* Численное исследование напряженно - деформированного состояния и несущей способности системы «бетонный массив – конический анкер»// Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1991, вып.59. – С. 80-83.

Отримано 30.03.10

Гетун Г.В., Кушниренко Н.Г.

ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ КАРКАСНО-МОНОЛИТНЫХ МНОГОЭТАЖНЫХ ЖИЛЫХ ЗДАНИЙ

Рассматриваются вопросы исследования и поиска конструктивных решений каркасно - монолитных многоэтажных жилых зданий со стенами повышенного теплосбережения с учетом действующих в Украине государственных строительных норм.

Getun G., Kushnirenko M.

PECULIARITIES OF THE DESIGN SCHEME RESEARCH OF THE FRAMEWORK-MONOLITHIC MANY-STOUREYED DWELLING HOUSES

Peculiarities of the design scheme research of the framework-monolithic many-storeyed dwelling houses have been considered.

УДК 539.3

В.О. Бараненко, д-р техн. наук
І.П. Дуліца

БАЗОВІ КОНСТРУКЦІЇ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН В ЗАДАЧАХ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Розглянуто застосування базових понять теорії нечітких множин – нечітких чисел, відношень, α -рівнів, принципу розширення (узагальнення) до задач аналізу і регулювання в проектуванні конструкцій.

В кінці минулого сторіччя інтенсивно відпрацьовувались методи розрахунку споруд і конструкцій на витривалість, стійкість, надійність, довговічність, а також оптимального проектування, впровадження нових матеріалів, застосування засобів і технологій з використанням сучасної обчислювальної техніки тощо. В теорії проектування конструкцій, в тому числі й оптимального, поряд з детермінованими постановками, коли інформація про вихідні дані, поведінку середовища, цілях вважалась повною, викликає інтерес розгляд більш загальних задач проектування, в яких були б ураховані інформаційні ситуації, що мають ту чи іншу ступінь невизначеності. Для формулювання і розв'язання їх потрібен такий математичний апарат, який містив би в себе можливість появи невизначеності. Таким апаратом при урахуванні факторів та дій випадкової природи в будівельній механіці стала теорія ймовірностей [4]. Основна ідея цього запровадження полягає в наступному: величини, що входять в рівняння міцності, жорсткості, коливань та інше, а саме: навантаження, характеристики властивостей матеріалу, геометричні характеристики форми елементів і самої конструкції та інше розглядаються не як величини детерміновані, а як величини, що мають мінливість і часом достатньо значну, а також невизначеність випадкового, розмитого, неточного виду. З точки зору інформації ці величини відносять до типу даних з неповною, або невизначеною інформацією.

Довгий час вважалось: все, що треба для роботи з невизначеністю – це теорія ймовірностей. Однак, з часом змінювалося сприйняття людиною зовнішнього середовища, і адекватність цієї теорії стала породжувати сумніви. В результаті в математиці виникло новий напрям досліджень – теорія нечітких множин і на основі її розроблена теорія можливостей[6].

В науці виникали такі інформаційні ситуації, коли якість дослідження породжувало величезний потік праць, захоплюючи при цьому інші області

застосування. Так склалось, наприклад, з широко відомим в будівельній механіці методом скінченних елементів. Американському математику Лотфі А. Заде ми забор'язані виникненню аналогічної ситуації. Каталізатором інформаційного вибуху стала його праця "Fuzzy sets" (1965) в журналі "Information and Control". Новаторські праці цього математика – фундатора теорії нечітких множин і нечіткого виведення призвели до зміни концептуальних підходів, методів дослідження в багатьох областях науки. Вони зробили значний вплив на розвиток математики, природничих та інженерних наук. За двадцять років (1989 - 1999) індекс цитування наукових праць, де ключовим словом було "fuzzy" досяг майже 23000 (за даними бази INSPEC). У світі зараз видається більш десяти спеціалізованих журналів, які друкують дослідження в області теорії нечітких множин. В Японії (північ о. Кюсю) було створено дослідницький центр нечітких технологій.

Якщо публікацій щодо використання теорії ймовірностей в механіці конструкцій достатньо багато, то праць із застосуванням теорії нечітких множин дуже мало [3, 8]. Тому метою цієї роботи є спроба адаптувати основні ідеї і поняття теорії нечітких множин до деяких задач механіки конструкцій. Розгляд проблем розрахунку і проектування надійних споруд і конструкцій в умовах невизначеності, на наш погляд, є новим та актуальним напрямком сучасної інженерії.

Теорія нечітких множин (ТНМ) через уведення дій математичного моделювання, а саме: *фузифікації*, нечіткого аналізу, *дефузифікації* дає можливість проаналізувати вплив заданої нечіткої інформації на показники напружено-деформованого стану конструкції, значення критеріїв якості в оптимізаційних задачах та інших.

Сутність операції фузифікації полягає в нечіткому опису вихідної інформації про характеристики механічної системи і перетворенні її в кількісну форму за допомогою функції належності. Нечіткий аналіз установлює відповідності між вихідними нечіткими даними з простором відображення результатів, які є також нечіткими. Цей етап виконується на основі α -рівнів, принципу розширення та розрахункових і чисельних методів механіки. Операція дефузифікації здійснює трансформацію результатів етапу аналізу до чітких даних на основі EVM-підходу (expected value model) [9].

За час встановлення ТНМ з'явилися такі конструкції: лінгвістичні змінні, нечіткі числа, відношення, правила нечіткого виведення та інші.

Означення 1. Нечіткою множиною A в універсумі X називають множину упорядкованих пар

$$A = \{(x, \mu(x)); x \in X\},$$

де $\mu(x) : X \rightarrow [0,1]$ є функція належності. Вона ставить у відповідність кожному елементу $x \in X$ дійсне число $\mu(x)$ з інтервалу $[0,1]$, тобто кількісно градує належність елементів x до універсуму X .

Означення 2. Нечітким числом називається нечітка множина A , яка визначена в універсумі – множині дійсних чисел, тобто $A \subseteq X = R$, функція належності якої є $\mu_A(x) : R[0,1]$. Ця функція відповідає таким умовам:

- 1) $\sup_{x \in R} \mu_A(x) = 1$ (умова нормальності);
- 2) $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1); \mu_A(x_2))$ (умова опуклості);
 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_C^+ \\ x \rightarrow x_C^-}} \mu_A(x)$ існує для $\forall x_C \in [x_1; x_2]$ (умова неперервності).

Найбільш розповсюджені нечіткі числа з трикутнковою, трапецієподібною, гаусовою, дзвіноподібною функцією належності [6, 9]. Функція належності не є продуктом ТНМ. Вона отримується в результаті проведення відповідних експертиз.

Означення 3. Нехай:

- 1) A – задана нечітка множина $A \subseteq X$;
- 2) φ – деяке задане чітке відображення елементів множини X в елементи множини Y $\varphi : X \rightarrow Y$.

Припускається, що перетворення φ є взаємне однозначним, тобто

$$y = \varphi(x) \text{ і } x = \varphi^{-1}(y). \quad (1)$$

Перетворення φ може бути подано в аналітичному вигляді, комп'ютерною програмою або пакетом розрахункових програм.

Сутність принципу розширення полягає в наступному [6, 9]

$$B = \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{\varphi(x_i)} = \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{y_i}, \quad (2)$$

де B – нечітка множина, яка сгенерована і визначена в множині Y .

Означення 4. Множиною α -рівня називають чітку множину A_α із універсуму X , для якої виконується умова

$$A_\alpha = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ для } \alpha \in [0,1].$$

Означення 5. Процес дефузифікації полягає у зведенні нечітких величин до чітких за допомогою моделі очікуваного результату (EVM). Основою цієї моделі є оператор, визначений як $E = \sum_{j=1}^m w_j f(x_j)$; $\sum_{j=1}^m w_j = 1$ - для дискретних значень $\mu_A(x)$; $E = \int w(x) \mu_A(x) \varphi(x) dx$; $\int w(x) dx = 1$ - для неперервних $\mu_A(x)$.

Функція w визначається як $w_j = \frac{\mu_A(x_j)}{\sum_{j=1}^m \mu_A(x_j)}$ або $w(x) = \frac{\mu_A(x)}{\int \mu_A(x) dx}$. Є інші

прийоми визначення вагових коефіцієнтів w_j [9].

Зауваження. В теорії ймовірностей оператор E називають математичним очікуванням.

Приклади застосування нечітких множин

На модельних задачах будівельної механіки нижче буде показана методика застосування нечітких чисел.

Нечітке місце прикладання навантаження

Приклад 1. Розглядується згин пружної статично невизначувальної балки (рис. 1).

Нехай зосереджене навантаження F прикладене в точку B , координата x_B якої має нечітке значення та описується мовним кваліфікатором "приблизно".

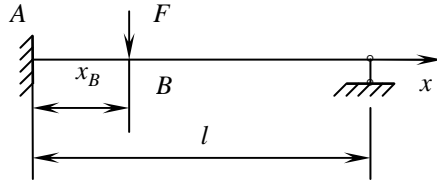


Рис. 1 Схема балки та навантаження

Треба визначити величини згинальних моментів в точках A і B . Висловлювання "приблизно" в ТНМ моделюється найчастіше нечітким трикутним числом $x_B(a, b, c)$ з функцією належності

$$\mu_{x_B}(x) = \begin{cases} 1, & x = b \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{для інших } x \end{cases}$$

Для визначення M_A^{fuzzy} , M_B^{fuzzy} за допомогою принципу розширення, треба скористатися відповідними формулами опору матеріалів

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_B) &= M_A(x_B) = Fx_B \left[\frac{x_B}{2l^2} (3l - x_B) - 1 \right] \\ \varphi_2(x_B) &= M_B(x_B) = \frac{Fx_B^2 (3l - x_B)}{2l^3} (l - x_B).\end{aligned}\quad (3)$$

Для значень $l = 6$ м; $F = 180$ Н і $x_B =$ "приблизно 5 м". Нехай x_B описано таким нечітким числом $x_B(4.5, 5, 5.5)$. За формулами (1), (2) відповідно маємо нечіткі трикутникові числа

$$\begin{aligned}M_A(-126.56, -87.5, -44.69) &\quad (\text{Нм}); \\ M_B(170.86, 135.42, 78.78) &\quad (\text{Нм}).\end{aligned}$$

Етап дефuzzифікації за EVM підходом і роботою [9] здійснюється за формулою

$$M_{\det} = \frac{1}{4}(a + 2b + c).\quad (4)$$

В результаті маємо

$$M_A^{\det} = -86.56 \text{ Нм}; M_B^{\det} = 130.12 \text{ Нм}.\quad (5)$$

Відповідні значення моментів за детермінованим підходом є

$$M_A^{\text{exact}} = -87.5 \text{ Нм}; M_B^{\text{exact}} = 135.42 \text{ Нм}.\quad (6)$$

Якщо порівняти результати (5) з (6), маємо по модулю зменшення значень величини згинальних моментів M^{\det} по відношенню до M^{exact} , що і очікувалось.

Приклад 2. Розглядається задача визначення згинального моменту в Г-образній рамі в точці під навантаженням F , яке прикладене на стояк на відстані "приблизно a " від точки B (рис. 2).

Розрахункова формула для шуканого моменту за роботою [5] буде такою:

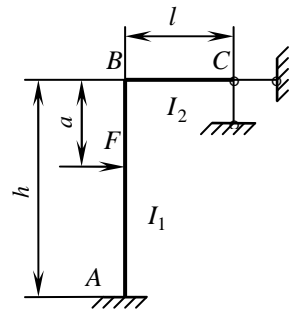


Рис. 2. Г-образна рама

$$M_F = \varphi(a) = \lambda(1-\lambda)^2(\lambda + 2 + 3\mu\lambda)KFh,$$

$$\text{де } \lambda = a/h; \mu = \frac{I_2 h}{I_1 l}; K = \frac{1}{2 + 1.5\mu}.$$

Нехай величина a описується нечітким трикутниковим числом $a(1.9, 2, 2.1)$. При $F = 10^4$ Н; $l = 4$ м; $h = 6$ м; $I_1 = I_2$ за принципом розширення маємо таке нечітке трикутникове число

$$M_F^{fuzzy} (7052, 7293, 7507) \text{ Нм.}$$

Етап дефузифікації до отриманого числа дає таке чітке значення згинального моменту

$$M_F^{det} = \frac{1}{4}(7052 + 2 \cdot 7293 + 7507) = 7286.3 \text{ Нм.}$$

При точному завданні величини $a = 2$ м маємо $M_F^{exact} = 7293$ Нм. Таким чином, розмитість в завданні місце прикладання навантаження момент M_F зменшує своє значення в порівнянні з точним підходом на 0.1%. Якщо збільшити розмитість в завданні a , наприклад при $a = (1.5, 2, 2.1)$ маємо $M_F^{fuzzy} (5841, 7293, 7507)$, із якого йде $M_F^{det} = 6984$ Нм, що на 4.2% менш, чим при точному завданні величини $a = 2$.

Регулювання зусиль шляхом осідання опори

В наступному прикладі розглядається застосування ТНМ до задачі регулювання з умовою, яка описана нечіткою рівністю: за допомогою вимушеного осідання опори двох прогонної балки (рис. 3а) досягти приблизної рівності максимальних значень згинальних моментів, відповідно, в прогині і на опорі, тобто

$$M_{np} \approx |M_{on}|. \quad (7)$$

Коли $M_{np} = |M_{on}|$ маємо детермінований варіант задачі, розв'язання якої подано в роботі [1]. Епюри згинальних моментів в заданій системі від дії навантаження P та осідання Δ середньої опори подано на рис. 3б, в).

На основі принципу накладення [7] і моментів M_{np}^P , M_{np}^Δ , M_{on}^P , M_{on}^Δ в прогинах і на опорі статично невизначувальної балки умову (7) запишемо як

$$M_{np}^P + M_{np}^\Delta \approx |M_{on}^P - M_{on}^\Delta|. \quad (8)$$

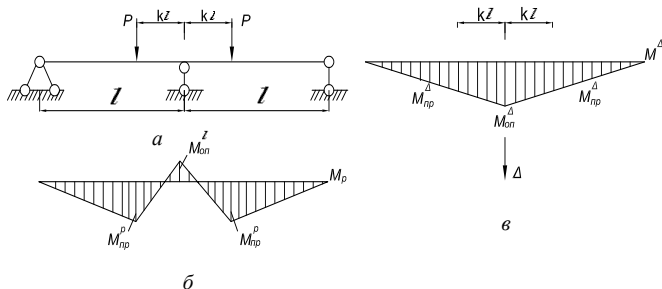


Рис. 3. Двох прогонна балка та навантаження

З урахування означень M_{np}^p , M_{np}^Δ , M_{on}^p , M_{on}^Δ [1]

$$M_{np}^p = \frac{Pl}{2}(k^4 - 4k^3 + 3k^2); \quad M_{on}^p = -\frac{Pl}{2}(k^3 - 3k^2 + 2k);$$

$$M_{np}^\Delta = (1-k)\frac{3EI}{l^2}\Delta; \quad M_{on}^\Delta = \frac{3EI}{l^2}\Delta \quad (9)$$

вираз (8) перепишемо у вигляді

$$\frac{|X - Y|}{u} \approx \varepsilon, \quad (10)$$

де

$$X = \frac{Pl}{2}(k^4 - 4k^3 + 3k) + (1-k)\frac{3EI}{l^2}\Delta;$$

$$Y = \frac{Pl}{2}(k^3 - 3k^2 + 2k) - \frac{3EI}{l^2}\Delta;$$

$u = \max\{|X|, |Y|\}$; ε - задана оцінка нечіткого висловлювання "приблизна рівність". Із співвідношення (10) після перетворень йде вираз для шуканого нечіткого значення осідання

$$\Delta = \psi(\Delta) = \frac{Pl^3(k^4 - 5k^3 + 6k^2 - 2k) - \varepsilon u}{6EI(k-2)}. \quad (11)$$

Вираз (11) є рекурентною формулою для застосування техніки послідовних наближень. Наприклад, якщо задати ε нечітким трикутниковим числом $\varepsilon(a, b, c)$, то в результаті виконання (11) і принципу розширення, отримаємо $\Delta^{fuzzy}(a_1, b_1, c_1)$, де $a_1 = \Delta(a)$;

$b_1 = \Delta(b)$; $c_1 = \Delta(c)$. Дефузифікація дає нарешті $\Delta^{\det} = \frac{1}{4}(a_1 + 2b_1 + c_1)$.

При точному завданні відношення (7), тобто при $\varepsilon = 0$ маємо

$$\Delta^{\text{exact}} = \frac{Pl^3(k^4 - 5k^3 + 6k^2 - 2k)}{6EI(k-2)}.$$

Для числової ілюстрації запропонованого підходу при $l = 6$ м, $P = 3 \cdot 10^4$ Н, $k = 0.5$ для металевої балки №18 ($I_x = 0.166 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$, $E = 2.06 \cdot 10^{11}$ Па) отримано результати, які подані в таблиці 1. Початкове значення Δ для ітераційного процесу бралось $\Delta^{(0)} = 0.1$ м. Кількість ітерацій при заданій точності 10^{-6} м складає 3 – 4.

Таблиця 1

Результати розрахунку осідання опори

ε	Δ^{fuzzy} , м	Δ^{det} , мм	%
(0.05, 0.1, 0.15)	(0.01331787, 0.01347638, 0.01363496)	13.4764	2.4
(0.05, 0.2, 0.3)	(0.01331787, 0.0137936, 0.01411116)	13.7541	4.5
(0, 0, 0)		$\Delta^{\text{exact}} =$ 13.1594	

Таким чином, отримані результати показують «вартість» нечіткого висловлювання умови регулювання, яке призводить до збільшення величини осідання при збільшенні розмитості в початковій інформації про величину ε .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абовский Н.П., Енджиевский Л.В., Савченков В.И., Деруга А.П., Рейтман М.И. Избранные задачи по строительной механике и теории упругости (регулирование, синтез, оптимизация). М.: Стройиздат, 1978. – 189 с.
2. Аугустини Г., Баратта А., Каинати Ф. Вероятностные методы в строительной механике. – М.: Стройиздат, 1988. – 544 с.
3. Бараненко В., Войнаков А. Оптимальне проектування конструкцій при випадковій та нечіткій інформації про навантаження/Theoretical Foundations of civil Engineering. – XV Warsaw. – 2007. – P.25-32
4. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.

5. *Бычков Д.В.* Формулы и графики для расчета рам. – М.: Гос. изд-во мет. по строительству и архитектуре. – 1957. – 194 с.
6. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения. /Под ред. Р.Р.Ягера, М.: Радио и связь, 1986. - 408 с.
7. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. - М.: Высш. школа, 1982. – 400 с.
8. *Baranenko V.A., Vojnakov A.Yu.* The use of the theory of fuzzy sets in design minimum volume trusses. – Lightweight structures in civil engineering. – Local seminarXII LSCE 2006, Warsaw P.22-24.
9. *Baoding Liu.* Theory and Practice of Uncertain Programming. – Physice-Verlag Heidelberg Springer – Verlag. – 2002. – 416p.

Отримано 29.07.10

Бараненко В.О., Дулиця И.П.

БАЗОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧАХ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Рассмотрено два вида задач: анализ и регулирование. Анализ выполнен при нечёткой информации о месте приложения сосредоточенной нагрузки на балку и раму. Регулирование осуществлено по критерию нечеткого равенства максимальных изгибающих моментов в двухпролётной балке.

Baranenko V.O., Dulitsa I.P.

BASIC THEORY CONSTRUCTIONS OF FUZZY SETS AT STRUCTURAL MECHANICS PROBLEMS

Considered two types of problems: analysis and regulation. Analysis is fulfill at fuzzy information about the application concentrated loading place at truss and frame. Regulation realized criteria fuzzy equality of maximal moments in double-span truss.

УДК 621.7

В.В. Леонтьєв, канд. техн. наук

В.Г. Хромов, д-р техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПРОЦЕСУ НАГРІВАННЯ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЗАГОТІВЛІ ПРИ ВОЛОЧІННІ СТАЛЕВОГО ДРОТУ

Розроблено скінчено-елементну модель процесу волочіння сталевго дроту, що дозволяє враховувати нагрівання заготовки в зоні її взаємодії з інструментом. На основі чисельних експериментів виконана оцінка впливу температури на напружений стан матеріалу

Вступ. Дослідження напруженого стану дроту при волочінні пов'язане з розв'язанням задачі пластичної течії металу в кінчній матриці – волоки. Відомі аналітичні розв'язки задачі зводилися в основному до визначення зусилля витяжки, але не давали повної картини напружено-деформованого стану дроту [1]-[3]. Для більш докладного чисельного аналізу процесу волочіння в цей час ефективно застосовується метод скінчених елементів. Один з варіантів подібної методики моделювання з використанням програмного пакета ANSYS наведений у роботі [5]. Задача розв'язувалася в припущенні, що процес протікає при нормальній температурі. У реальному процесі волочіння, як показують експерименти [2], відбувається значний розігрів (до 700 С) зони контакту дроту з матрицею. При цьому можуть мінятися механічні характеристики матеріалу заготовки, зокрема, границі текучості. Крім того, виникають температурні деформації й напруження. У зв'язку із цим залишається актуальним завдання чисельного моделювання напружено-деформованого стану металу в процесі волочіння з урахуванням температурних змін.

Метою даної роботи є дослідження впливу нагрівання заготовки на напружений стан матеріалу в зоні волочіння.

Методика дослідження. Моделювання виконували на основі методу скінчених елементів (МСЕ). Задача розв'язується в статичній постановці при наступних гіпотезах: 1) напружений стан заготовки вісесиметричний; 2) між матрицею й дротом виникає сухе тертя з коефіцієнтом 0,005; 3) матеріал дроту ізотропний, пружно-пластичний; модель зміцнення - нелінійна кінематична; матеріал матриці - ізотропний, пружний; 4) протитяг дроту відсутній.

Схема процесу волочіння показана на рис. 1. Тут F - зусилля витяжки. При моделюванні використовувалась реальна волока за ДСТ 9453-75 форма 8. Поперечний переріз волоки наведено на рис. 2. Волока виконана з

вольфрамокобальтового сплаву ВК-6 з межею міцності 1500 МПа й модулем повздовжньої пружності 630 ГПа.

Передбачається, що діаграма деформування канатного дроту описується нелінійною апроксимуючою функцією виду[4]:

$$\sigma = \sigma_T + \sigma_0(1 - a^{\gamma(\varepsilon - \varepsilon_T)}),$$

де: σ_T - межа текучості; ε_T , σ_0 , a , γ - константи, що визначаються на основі обробки експериментальної діаграми розтягу для досліджуваного матеріалу.

Врахування впливу температури на межу текучості матеріалу дроту виконувалося на основі наступної залежності:

$$\sigma_T = 1775,8\varepsilon_{\text{ср}}^{0,4001}(\exp(-0,0007739t)),$$

де: $\varepsilon_{\text{ср}}$ - середнє значення інтенсивності деформацій; t - температура.

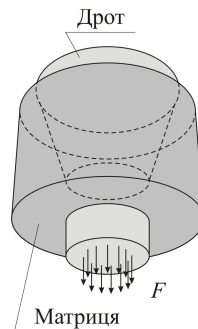


Рис. 1

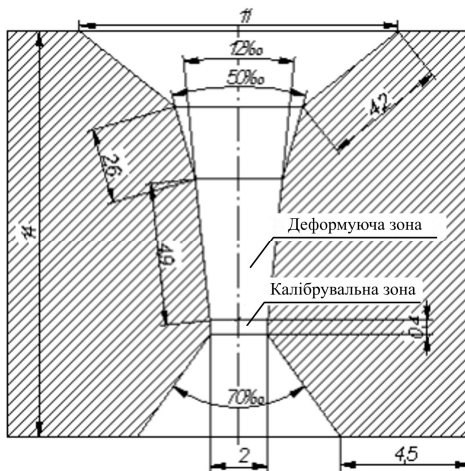


Рис. 2

При прийнятих розмірах волюки середнє значення інтенсивності деформацій, підраховане згідно методики, описаної в [2], становить 0,7554. З формули видно, що з ростом температури межа текучості зменшується й

при температурі 700°C становить 923 МПа проти 1500 МПа для кімнатної температури.

При розв'язанні задачі використовується трикутний вісесиметричний скінчений елемент PLANE2 з 6 вузловими точками (три - у вершинах і по одній - у середині кожної із сторін). Число скінчених елементів сітки - 6017. Скінчено-елементна модель зображена на рис. 3.

Граничні умови формулювалися в такий спосіб: радіальні переміщення точок повздовжньої осі дроту відсутні, що природно для вісесиметричної задачі; волокна нерухома; температура зовнішнього шару дроту в деформуючій зоні приймалася рівній 700°C.

При моделюванні напруженого стану дроту в процесі волочіння необхідно враховувати, що вся її недеформована циліндрична частина проходить через деформуючу й калібрувальну зони. Тому, виходячи з розмірів матриці (сумарна довжина деформуючої й калібрувальної зон близько 8 мм), вертикальне переміщення нижнього (деформованого) кінця дроту прийнято рівним 15 мм. Такий спосіб завдання граничних умов на вихідному кінці дроту відрізняється від традиційного, при якому задається зусилля витяжки (рис. 1).

Як показує аналіз, прийнятий підхід дозволяє точніше описати напружено-деформований стан дроту в процесі його руху усередині матриці.

При виконанні розрахунку початковий діаметр d_0 дроту був прийнятий 2,8 мм, кінцевий d_1 – 2,0 мм; таким чином, обтиснення d_0 / d_1 становить 1,4. Таке обтиснення звичайно виникає на останньому етапі маршруту волочіння. Механічні характеристики дроту в цьому випадку істотно перевищують відповідні параметри вихідної катанки й відповідають прийнятим при розрахунку.

Аналіз результатів. В отриманому чисельному розв'язку основний інтерес представляють напруження в радіальному й вісьовому напрямку в порівнянні з результатами, отриманими без урахування впливу температури [5]. На рис. 4 показаний розподіл радіальних напружень σ_x для дроту, що пройшов крізь волоку, а на рис. 5 – розподіл вісьових напружень σ_y .

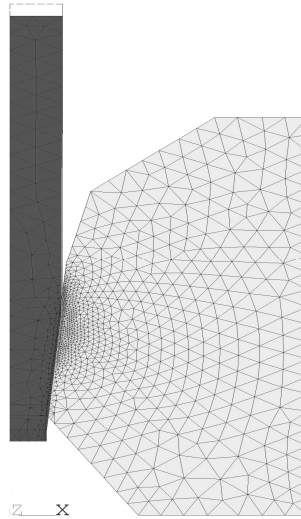


Рис. 3



Рис. 4

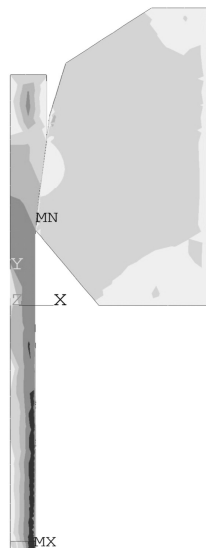


Рис. 5

Аналіз цих епюр показує, що при врахуванні температури найбільші радіальні напруження виникають на початку деформуючої зони, досягаючи 910 МПа проти 1440 МПа без врахування температури, і зменшуються при її кінці до 360 МПа проти 612 МПа. Вісьові ж напруження зростають до кінця деформуючої зони, досягаючи 920 МПа проти 1460 МПа, отриманих без врахування розігріву дроту. Такий розподіл вісьових напружень, можливо, пов'язаний зі зменшенням діаметра дроту при його русі крізь волоку. По поперечному перерізі дроту вісьові напруження розподіляються в цілому рівномірно. Такий розподіл напружень цілком відповідає фізичному змісту задачі й підтверджує адекватність моделі реальної конструкції.

Висновки.

1. Врахування розігріву дроту при волочінні показує, що напруження в ньому виявляються істотно (на 40-50%) менше, ніж ті що отримують без врахування розігріву. Це пов'язано, можливо, зі зменшенням межі текучості матеріалу з ростом температури.
2. Аналіз результатів скінчено-елементного моделювання виявив найбільш напружені зони дроту й дозволив одержати адекватне уявлення про його поведінку в процесі волочіння з урахуванням розігріву.

Отримані результати дозволяють дати рекомендації з удосконалювання процесу волочіння з метою зменшення числа проміжних етапів деформування при збільшенні обтиснення на кожному з них. Крім того, представляється можливим зменшити зусилля витяжки. Основним же завданням є вивчення напружено-деформованого стану дроту на всьому маршруті волочіння (від вихідної катанки до готового дроту) з урахуванням зміни його механічних характеристик на кожному з етапів. Це дасть можливість оптимізувати процес волочіння й запропонувати нові конструкції волок і способи змащення, що знижують зношування й збільшують термін служби цього інструмента.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
2. Колмогоров В. Л. Гидродинамическая подача смазки / В. Л. Колмогоров, С. И. Орлов, Г. Л. Колмогоров. – М.: Metallurgy, 1975. – 256 с.
3. Шилц Р. Пластическое движение в сходящемся коническом канале / Р. Шилц // Механика - М.: Изд-во АН СССР, 1960. – С. 183-191.
4. Хромов В. Г. Выбор аппроксимирующей функции для диаграммы растяжения материала в задачах технологической механики стержня / В. Г. Хромов, И. В. Хромов // Вестник СевНТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: сб. науч. тр. – Севастополь, 2007. – Вып. 80. – С. 20 – 22.
5. Леонтьев В. В. Моделирование процесса волочения стальной канатной проволоки методом конечных элементов с помощью ANSYS / В. В. Леонтьев // Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем и элементов их конструкций: материалы междунар. науч.-техн. конф., 8-11 сентября 2009 г. – Севастополь, 2009. – С. 160-163.

Отримано 09.09.10

Леонтьев В.В., Хромов В.Г.

ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ПРОЦЕССА НАГРЕВА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗАГОТОВКИ ПРИ ВОЛОЧЕНИИ СТАЛЬНОЙ ПРОВОЛОКИ

Разработана конечно-элементная модель процесса волочения стальной проволоки, позволяющая учитывать нагрев заготовки в зоне ее взаимодействия с инструментом. На основе численных экспериментов выполнена оценка влияния температуры на напряженное состояние материала.

Leontyev V. V., Khromov V. G.

RESEARCHES OF INFLUENCE OF PROCESS OF HEAT ON THE PREFORM TENSION AT DRAWING OF THE STEEL WIRE

The finite-element model of process of drawing of the steel wire is developed, allowing to consider preform heat in a zone of its interaction with the instrument. On the basis of numerical experiments the estimation of influence of temperature on a material tension is executed.

УДК 539.3

О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИХ СПОСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ УДАРУ В ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМАХ З ТВЕРДИМ ТА М'ЯКИМ ОБМЕЖНИКАМИ

Аналізується можливість моделювання удару граничними умовами з використанням коефіцієнта відновлення і нелінійною силою контактної взаємодії у віброударних системах із твердим і м'яким обмежниками коливань. Показано, що в системах із твердим обмежником можуть бути застосовані обидва способи моделювання удару, у той час як у системах з м'яким обмежником удар варто моделювати нелінійною силою контактної взаємодії й описувати її відповідно до закону Герца.

Питання моделювання удару в віброударних системах є одним з визначальних. Існують різні способи такого моделювання. Найбільш розповсюдженим є спосіб, в якому удар моделюється граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення. Виявляється, що такий підхід не завжди дає якісні результати [1]. Другий спосіб полягає у введенні нелінійної сили контактної взаємодії, яка діє лише під час удару і, взагалі кажучи, може бути описана різними законами [1]. В [1] виконаний аналіз застосування цих способів для однієї віброударної системи. Подивимось тепер, як ці два способи можуть бути використані для віброударних систем різних типів.

В літературі пропонуються принципи класифікації віброударних систем за різними аспектами [2], одним із яких є тип обмежника коливань. Саме цей аспект пов'язаний з можливими способами моделювання удару. Розглядалося два типи віброударних систем – системи з твердим та з м'яким обмежником коливань. Взагалі кажучи, чіткого критерію визначення, який обмежник можна вважати твердим, а який м'яким, немає. Вирішальним тут є коефіцієнт жорсткості; швидкоплинність удару та його сила обумовлюються жорсткістю тіл, які контактують. Вважається, що в системах з твердим обмежником тривалість удару є безмежно малою і коефіцієнт відновлення має постійне значення, тому удар може бути змодельований граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення.

В системах з м'яким обмежником, навпаки, припущення про миттєвість удару не відповідає дійсності. В своїх попередніх роботах ми

довели, що в таких системах моделювання удару граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення не відтворює реальну картину руху віброударної системи, удар слід моделювати лише нелінійною силою контактної взаємодії [1].

В статті порівнюються ці два способи моделювання удару для двомасових віброударних систем з двома ступнями вільності з твердим та м'яким обмежником. Її твердження базуються на результатах, що були отримані раніше [1,3-7]. Але в цій статті проблема висвітлюється з дещо іншого боку, і її висновки в якійсь мірі є підсумком попередніх досліджень.

На рис. 1 приведені схеми моделей віброударних систем. На основне тіло з масою m_1 першої системи і на нижнє тіло другої діє періодична збурююча сила $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

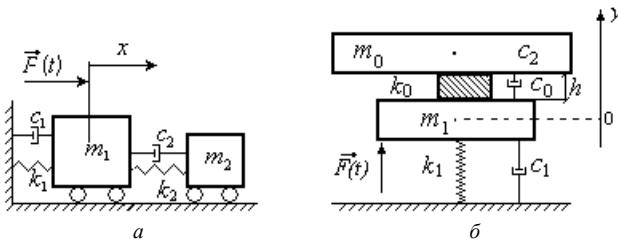


Рис. 1

Перша модель з твердим обмежником відповідає схемі тіла з ударним гасителем коливань, друга модель з м'яким обмежником – віброударному майданчику для формовання бетонних виробів та ущільнення бетонних сумішей. Докладно ці моделі описані в [7], там же приведені рівняння їхнього руху.

При моделюванні удару 1-им способом усталений одноударний режим коливань визначається такими граничними умовами: вважається, що удар одного тіла о друге відбувається в момент часу $t=0$, тобто

$$x_1(0) = x_2(0).$$

Швидкість першого тіла в момент до удару позначається \dot{x}_{1-} , у цей момент друге тіло має швидкість \dot{x}_{2-} .

Швидкість першого тіла \dot{x}_{1+} та другого тіла \dot{x}_{2+} після удару зв'язані зі швидкостями цих тіл до удару співвідношеннями [2]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1+} &= \frac{(1-R\chi)\dot{x}_{1-} + \chi(1+R)x_{2-}}{1+\chi}, \\ \dot{x}_{2+} &= \frac{(1+R)\dot{x}_{1-} + (\chi-R)\dot{x}_{2-}}{1+\chi},\end{aligned}\quad (1)$$

де $\chi = \frac{m_2}{m_1}$, R – коефіцієнт відновлення, що може приймати значення в діапазоні від 0 до 1: $0 \leq R \leq 1$. При $R=1$ має місце абсолютно пружний удар, значення $R=0$ відповідає пластичному ударові.

Моделюючи удар таким чином, прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху отримуємо для першої моделі з твердим обмежником картину руху, яка представлена на рис. 2 – переміщення обох тіл системи та їхні фазові траєкторії. Бачимо, що режим коливань усталений одноударний, швидкість тіл під час удару змінюється стрибком, на графіку переміщень добре видно, як друге (приєднане) тіло під час удару відскакує від першого (основного) тіла.

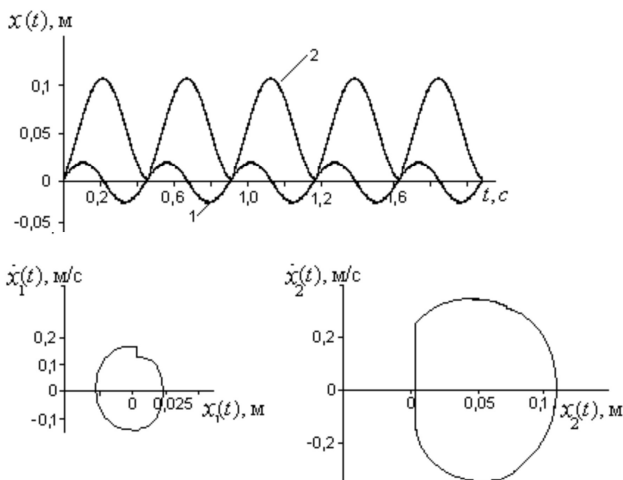


Рис. 2

Моделюючи удар цим способом для другої моделі з м'яким обмежником, одержуємо інший результат. На рис. 3 представлені переміщення форми і стола майданчика при $R=1$. Після проходження перехідного періоду режим коливань близький до усталеного, але він все ж не усталений, про що свідчать фазові траєкторії, які побудовані для процесу без перехідного періоду (рис. 3).

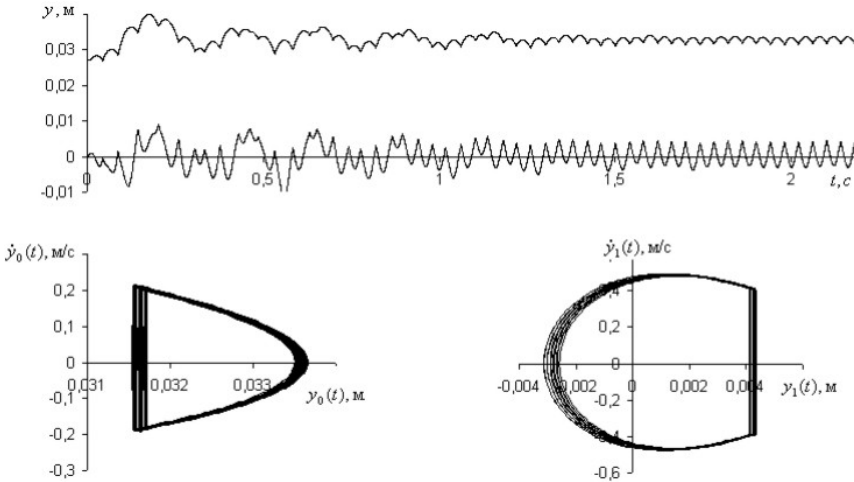


Рис. 3

Значення максимальних напіврозмахів коливань без врахування перехідного періоду відповідно дорівнюють 1,057 мм та 3,733 мм, що більше реальних величин (2–2,5 мм) [8,9]. Використання коефіцієнта відновлення, який менше 1 ($R=0,9$ і менше) не дозволяє отримати реалістичну картину руху стола майданчика та форми.

Таким чином, в системі з м'яким обмежником моделювання удару граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення не дає картини руху, що відповідає дійсності.

При моделюванні удару 2-им способом до розгляду вводиться нелінійна сила контактної взаємодії, яка діє лише під час удару, вона змінюється відповідно закону Герца [10]:

$$F_{\text{кон}}(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (2)$$

де $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$ – відносне зближення тіл,

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0\pi}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad (3)$$

μ_i і E_i – коефіцієнти Пуасона та модулі Юнга для обох тіл, A , B і q – константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту.

Моделюючи удар цим способом, прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху отримуємо для першої моделі з твердим обмежником

картину руху, яка представлена на рис. 4 – переміщення обох тіл системи, їхні фазові траєкторії та контактну силу.

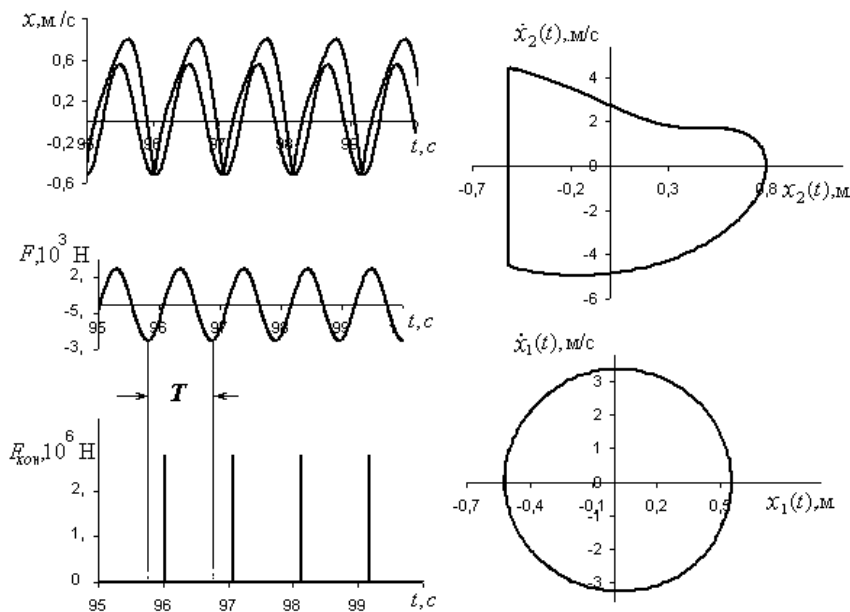


Рис. 4

Для другої моделі з м'яким обмежником картина руху представлена на рис. 5. Для обох моделей одержуємо усталений одноударний T -періодичний режим коливаль. Графіки контактної сили наочно демонструють миттєвість удару для моделі з твердим обмежником і достатню тривалість удару для моделі з м'яким. Для обох моделей отримуємо результат, який відображає дійсну картину руху.

Висновки

Моделювання удару нелінійною силою контактної взаємодії має ряд переваг в порівнянні з моделюванням граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення. По-перше, цей метод дозволяє отримати повну картину руху тіл віброударної системи на всій часовій осі включаючи період удару. По-друге, він не потребує окремого розглядання задач про зовнішній і внутрішній удари. По-третє, він дозволяє одержати закон зміни контактної сили та її максимальну

величину. По-четверте, користування цим методом дає можливість докладніше врахувати механічні властивості контактуючих тіл: в формулу контактної сили (2,3) входять модулі Юнга, коефіцієнти Пуасона обох тіл та константи, що характеризують місцеву геометрію зони контакту.

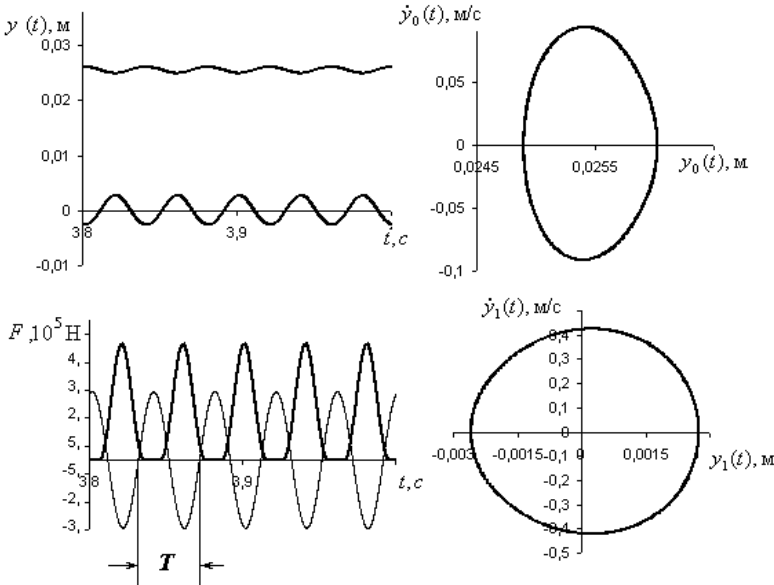


Рис. 5

В віброударних системах з твердим обмежником можуть бути застосовані обидва способи моделювання удару. Як один, так і другий дають результат, який відповідає дійсній картині руху системи. В віброударних системах з м'яким обмежником удар слід моделювати нелінійною силою контактної взаємодії. Застосування моделювання граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення в таких системах не дає реальної картини її руху.

Певного критерію твердості чи м'якості обмежника коливачів не існує. Цей критерій визначається тривалістю удару, наскільки миттєвим можна його вважати. Тому здається доцільним в віброударних системах з будь-яким обмежником застосовувати моделювання удару нелінійною силою контактної взаємодії та описувати її законом Герца.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – С. 69-77.
2. *Barbara Blazejczyk-Okolewska, Krzysztof Czolczynski, Tomasz Kapitaniak* Classification principles of types of mechanical systems with impacts – fundamental assumptions and rules// European Journal of Mechanics. - 2004. № 23 - P.517-537.
3. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
4. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.М.* Чисельні дослідження режимів коливань віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2006.-Вип.78.- С.14-23.
5. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Влияние конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику //Пробл. прочности. - 2009. –(здана до друку).
6. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Вплив параметра зовнішнього навантаження на динамічну поведінку виброударної системи з ударом о м'який обмежник // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2009.-Вип.84 – С. 77-88.
7. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Порівняння динамічної поведінки виброударних систем різних типів // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2010.–(здана до друку)..
8. Гусев Б.В., Зазимко В.Г. Вибрационная технология бетона. – Киев: Будівельник, 1991. – 160 с.
9. Рекомендации по вибрационному формованию железобетонных изделий//НИИЖБ. – М., 1986. – 78 с.
10. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.

Отримано 29.06.10

Погорелова О.С., Постникова Т.Г.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ УДАРА В ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ С ТВЕРДЫМ И МЯГКИМ ОГРАНИЧИТЕЛЯМИ

Анализируется возможность моделирования удара граничными условиями с использованием коэффициента восстановления и нелинейной силой контактного взаимодействия в виброударных системах с твердым и мягким ограничителями колебаний. Показано, что в системах с твердым ограничителем могут быть применены оба способа моделирования удара, в то время как в системах с мягким ограничителем удар следует моделировать нелинейной силой контактного взаимодействия и описывать ее в соответствии с законом Герца.

Pogorelova O.S. Postnikova T.G.

DIFFERENT METHODS OF IMPACT SIMULATION IN VIBROIMPACT SYSTEMS WITH HARD AND SOFT LIMITING STOPS

The possibility of impact simulation by the limiting conditions with the use of restitution coefficient and by the nonlinear contact interaction force in the vibroimpact systems with hard and soft limiting stops is analysed. It is shown that in the systems with a hard limiting stop both methods of impact modelling can be applied, while in the systems with a soft limiting stop it is necessary to simulate the impact by the nonlinear contact interaction force and to describe it by Hertz law.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук
Н.А. Гречух
О.О. Яковенко

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ МСЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПЛАСТИНЧАТО-ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Створення скінченноелементних моделей пластинчато-оболонкових конструкцій передбачає їх опис за допомогою точкового каркасу. Рационально вважається дискретна модель регулярної структури. Задача ускладнюється, коли потрібно побудувати сітку для конструкцій нерегулярної структури у якій є ділянки ступінчастої зміни товщини, дискретні ребра, вирізи і включення чужорідного матеріалу, тобто області з особливостями.

В роботі запропоновано вписати названі нерегулярності в сіткову область дискретної моделі і присвоїти їм відповідний статус.

Викладений алгоритм щодо побудови точкових каркасів континуальних об'єктів для круглої пластини та сферичної оболонки з використанням специфічних підходів.

Аналіз результатів розрахунку пластини на власні коливання з дійсним і топологічним ребром підтвердив правомірність моделі з останнім.

Це стало підґрунтям для використання такої моделі ребра для круглої пластини і сферичної оболонки. Виконано аналіз форм і частот власних коливань останніх.

Перший етап створення дискретної моделі МСЕ пов'язаний з розбивкою області пластини чи оболонки на скінченні елементи. При цьому слід задовольнити умовам регулярності скінченно-елементної моделі (СЕМ), тобто мати можливість в доступній формі обчислювати номери вузлів сітки, номери скінченних елементів (СЕ) і простими засобами обчислювати геометричні і фізико-механічні характеристики СЕ. Задача ускладнюється, якщо конструкція має ступінчато-змінювану товщину, дискретні ребра, вирізи і ділянки із стороннього матеріалу.

Опис СЕМ конструкції з особливостями суттєво спрощується, якщо лінії сітки СЕ розташувати таким чином, щоб вони проходили по границях ребер, вирізів, включень стороннього матеріалу та лініями ступінчатої зміни товщини.

Областям з особливостями призначається статус: «ребро», «виріз», «включення». Границі таких областей визначаються сітковими координатами вузлів в локальній системі координат.

Ребро характеризується двома параметрами:

- 1) товщина – відношення висоти СЕ області ребра до висоти рядового СЕ;
- 2) ексцентриситет – відношення відстані між центрами ваги СЕ ребра і рядового СЕ до висоти рядового СЕ.

Скінченному елементу в межах вирізу, надається статус «пустий елемент» і при побудові математичної моделі дискретного об'єкта коефіцієнти матриці жорсткості таких елементів не враховуються. Для області «включення» співвідношення МСЕ обчислюються для відповідних фізико-механічних характеристик чужорідного матеріалу. Введення області «включення» дає змогу досить просто врахувати наявність приєднаних мас при обчисленні матриць інерції в задачах динаміки якщо задати відповідне значення щільності чужорідного матеріалу при збереженні інших його характеристик.

Для перевірки достовірності результатів в задачах про власні коливання пластин з ребром розглянута модель з дійсним (рис. 1, а) і топологічним ребром (рис. 1, б).

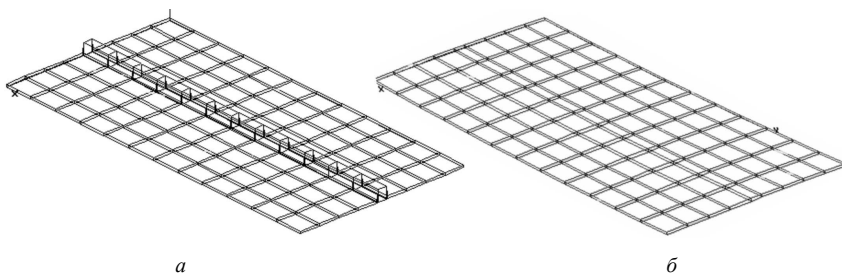


Рис. 1

Декілька частот і форм власних коливань для пластини з дійсним ребром показані на рис. 2, а для пластини з топологічним ребром на рис. 3.

Приведені результати підтверджують правомірність моделі з топологічним ребром – результати розрахунку для обох варіантів моделі ребра практично співпали.

Стосовно побудови сіткової області СЕМ конструкцій можна сказати, що алгоритми реалізації цієї задачі, особливо для неканонічних поверхонь бувають досить громіздкими.

Без проблем виконується побудова точкового каркасу поверхонь квадратних і прямокутних пластин за допомогою генератора сітки, створеного на основі інтерполяційних алгоритмів з використанням незначного числа опорних вузлів.

Пропонується прийом побудови регулярної сітки СЕ для круглої пластини, що у якійсь мірі проблематично. Спочатку створюємо сітку для квадратної пластини. Наступним кроком є статичний розрахунок цієї пластини на змушені переміщення вузлів на її контурі, таким чином, щоб вони вписалися в границі круглої пластини (рис. 4).

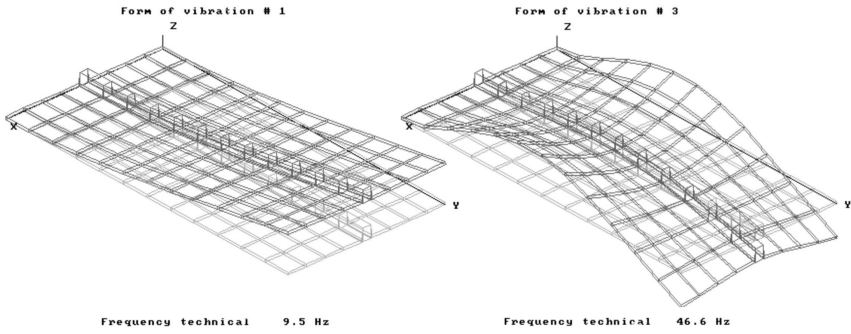


Рис. 2

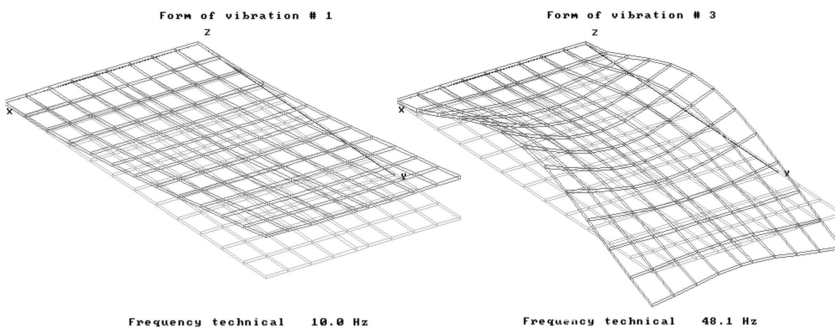


Рис.3

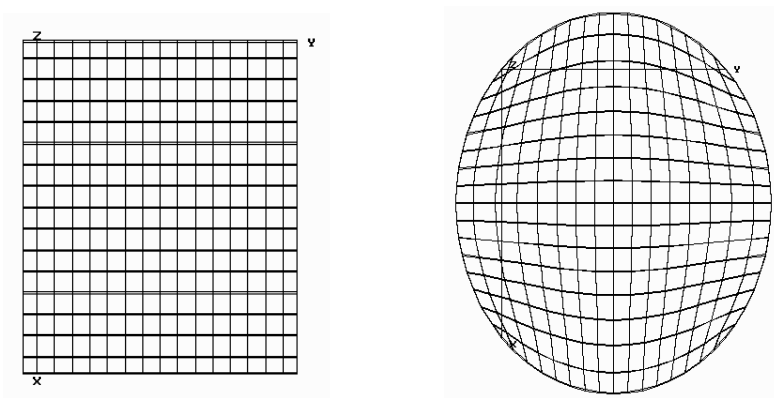


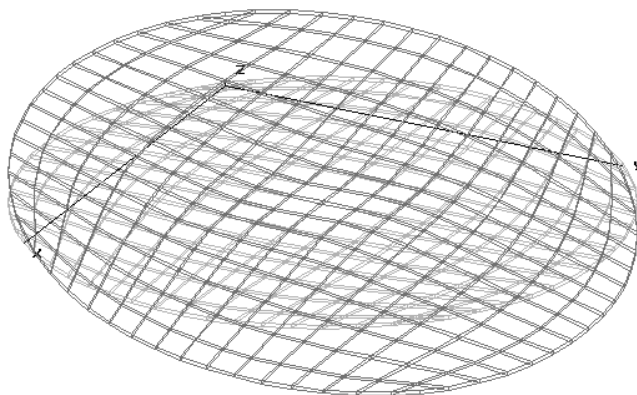
Рис. 4

Проведено розрахунок частот і форм власних коливань круглої пластини без ребра і з ребром. Ребро розташоване по контуру пластини.

Прив'язка його виконується за допомогою сіткових координат, що визначають «початок ребра» і «кінець ребра». Модель ребра, яке вписується в лінії сітки СЕМ характеризується параметрами: висота ребра і ексцентриситет ребра. Топологія сіткової області відповідає умовам її регулярності.

Власні коливання круглої пластини, що має три точкові опори без контурного ребра наведені на рис. 5. а, б.

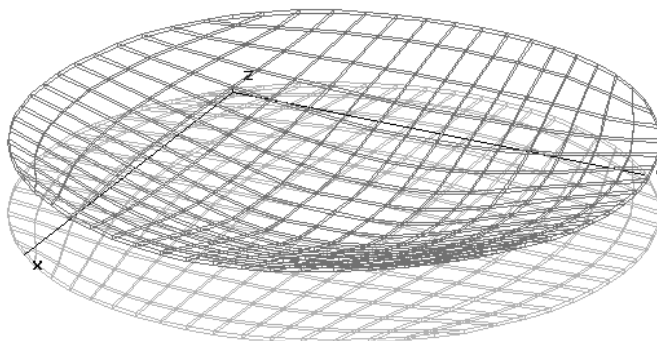
Form of vibration # 2



Frequency technical 11.8 Hz

a

Form of vibration # 3



Frequency technical 13.5 Hz

б

Рис. 5

Результати розрахунку власних коливань пластини з ребром по контуру наведені на рис.6, а, б.

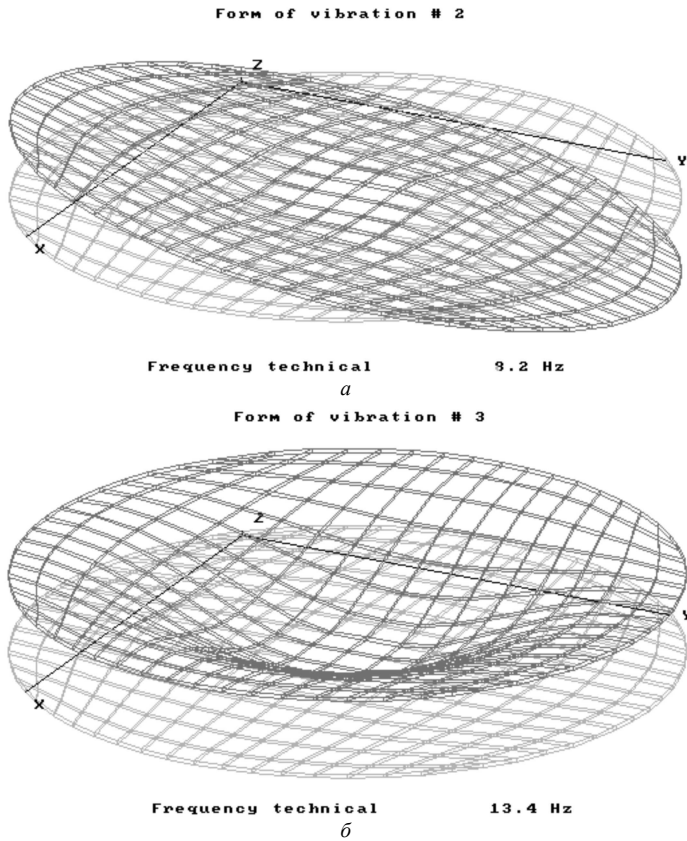


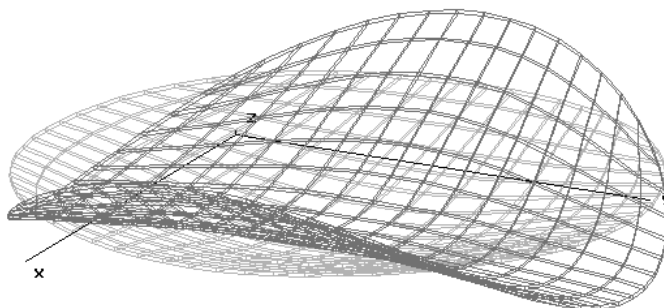
Рис. 6

Зменшення першої частоти власних коливань пластини з ребром у порівнянні з результатом розрахунку без ребра є наслідком збільшення її маси за рахунок ребра.

Аналіз форм власних коливань круглої пластини підказав використати стоячу хвилю, що відповідає третій формі коливань, у якості точкового каркасу оболонки-парасольки, яка схожа за формою на тарілчасту антену супутникового TV.

Частоти і форми власних коливань оболонки без ребра наведені на рис. 7, а, б, а для оболонки з ребром – на рис. 8, а, б.

Form of vibration # 1

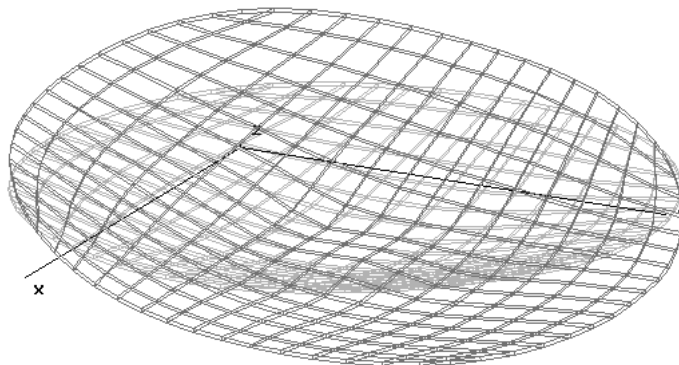


Frequency technical

20.8 Hz

a

Form of vibration # 3



Frequency technical

42.3 Hz

б

Рис. 7

Наведенні результати розрахунку оболонки з ребром і без ребра показують, що частоти власних коливань для оболонки з ребром більші ніж частоти оболонки без ребра. Таким чином збільшення маси оболонки за рахунок ребра менш суттєво впливає на частоти власних коливань ніж збільшення її жорсткості.

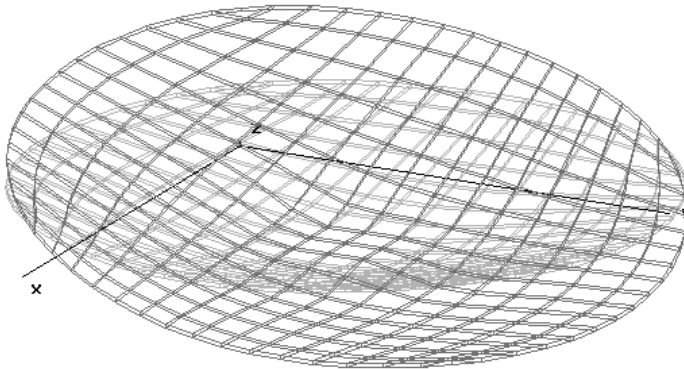
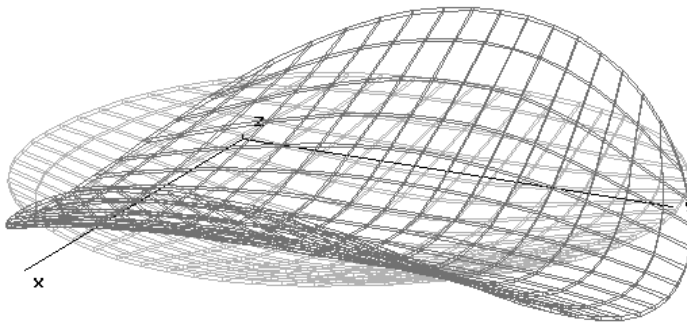
Form of vibration # 1**Frequency technical** **27.7 Hz***a***Form of vibration # 3****Frequency technical** **46.6 Hz***b*

Рис. 8

Розв'язок наведених задач виконано в середовищі ДІСТОС (динаміка і статика оболонкових систем) створеному в НДІ будівельної механіки КНУБА. Співвідношення МСЕ побудовані на основі положень тривимірної теорії пружності. Алгоритм задачі про власні коливання континуальних об'єктів реалізує ітераційний процес в підпросторі скінченноелементної моделі конструкції [1].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. Пер.с англ.- М.: Стройиздат, 1979. -320с.

Отримано 23.08.10

Легостаев А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МСЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПЛАСТИНЧАТО-ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Построение конечноэлементных моделей пластинчато-оболочечных конструкций предусматривает описание их поверхностей точечным каркасом. Рациональной считается дискретная модель регулярной структуры. Задача усложняется, когда конструкция имеет дискретные ребра, вырезы и включения инородного материала – т.е. области с особенностями. В работе предлагается вписать названные нерегулярности в сеточную область, проводя линии сетки по контуру ребер, вырезов и включений и присваивая им соответствующий статус.

Изложен алгоритм построения сетки конечных элементов для круглой пластины и сферической оболочки с использованием специфических подходов.

Приведен анализ результатов расчета пластины на собственные колебания для моделей с действительным и топологическим ребром, который подтвердил правомерность динамичной модели с последним. Это стало основанием использовать такую модель ребра в задачах динамики круглой пластины и оболочки. Приведен анализ вычисленных частот и форм собственных колебаний.

Legostaev A.D., Grechukh N.A., Yakovenko O.O.

SOME FEATURES OF CONSTRUCTION OF DISCRETE MODELS OF FEM IN TASKS OF DYNAMICS OF PLATE-SHELL STRUCTURES

Creation of finite elements models of plate-shell structures foresees their description by means of point framework. Rational the discrete model of regular structure is considered.

A task becomes complicated, when it is needed to build a net for the constructions of irregular structure, which have areas of step change of thickness, discrete ribs, cuts and includings of foreign material, id est areas with features. In this article is suggested to enter mentioned irregularities in the net area of discrete model and to appropriate corresponding status to them.

Algorithm in relation to the construction of point frameworks of continual objects for a round plate and spherical shell using specific approaches is expounded.

The analysis of results of calculation of plate on own vibrations with an actual and topological rib confirmed model legitimacy with the last. It became soil for the use of such model of rib for a round plate and spherical shell. An analysis is executed for forms and frequencies of own vibrations of last above-mentioned.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук
О.С. Русанова**АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО КОЛИВАННЯ
МАСИВІВ З ТРИЩИНАМИ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ**

На основі співвідношень методу потенціалу побудовані граничні інтегральні рівняння та чисельний алгоритм для розв'язання задачі про антиплоскі гармонічні коливання пружних масивів, послаблених плоскими тріщинами. Розв'язана тестова задача про динамічний напружений стан пружного простору поблизу тріщини поздовжнього зсуву.

В деяких практичних випадках напружено-деформований стан масивного об'єкту можна вважати двовимірним, причому, якщо пружний елемент конструкції являє собою достатньо довге циліндричне тіло, навантажене по боковій поверхні зусиллями, що орієнтовані і рівномірно розподілені вздовж твірних, то в такому елементі реалізується стан антиплоскої деформації. При цьому відмінними від нуля є тільки переміщення в осьовому напрямку $u=u(x_1, x_2)$, а серед компонент тензора напружень відмінними від нуля є компоненти $\sigma_{j3}, \sigma_{3j}, j=1,2$.

Розглянемо з позицій методу потенціалу усталені гармонічні антиплоскі коливання циліндричного масиву з поздовжньою плоскою тріщиною. Переміщення у внутрішніх точках двовимірної розрахункової області V знаходяться за формулою Соміліани

$$u(\vec{x}) = \int_{\Gamma} \tau(\vec{y}) U(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u(\vec{y}) T(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y, \quad (1)$$

де $\vec{x}\{x_1, x_2\} \in V$; $\vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$; Γ - контур перерізу циліндру; τ - дотичне напруження на площинці границі з нормаллю $\vec{n}\{n_1, n_2\}$:

$$\tau(\vec{y}) = \sigma_{3j}(\vec{y}) n_j(\vec{y}) = \mu \frac{\partial u(\vec{y})}{\partial y_j} n_j(\vec{y}); \quad (2)$$

$U(\vec{x}, \vec{y})$ - фундаментальний розв'язок задачі, що задається виразом [1]

$$U(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{iH_0^{(1)}(\varphi)}{4\mu}; \quad (3)$$

$\varphi = k_2 r$; $k_2 = \frac{\omega}{C_2}$; $C_2^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; ρ - щільність матеріалу; ω - кругова частота

коливань; μ - модуль зсуву матеріалу; $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$;

$$T(\bar{x}, \bar{y}) = \mu \frac{\partial U(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n} = -\frac{iH_1^{(1)}(\varphi)k_2}{4} \frac{\partial r}{\partial n}; \quad (4)$$

$H_k^{(1)}$ - функція Ганкеля 1-го роду порядку k .

Формула Соміліани для визначення напружень у внутрішніх точках розрахункової області має наступний вигляд:

$$\sigma_{j3}(\bar{x}) = \int_{\Gamma} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad \bar{x} \in V, \quad \bar{y} \in \Gamma, \quad (5)$$

де

$$D_j(\bar{x}, \bar{y}) = \mu \frac{\partial U(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_j} = \frac{iH_1^{(1)}(\varphi)k_2}{4} r_{,j}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r}; \quad j=1,2;$$

$$S_j(\bar{x}, \bar{y}) = \mu \frac{\partial T(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_j} = \frac{i\mu k_2}{4} \left[\frac{n_j}{r} H_1^{(1)}(\varphi) - k_2 r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} H_2^{(1)}(\varphi) \right]. \quad (6)$$

Спрямовуючи точку \bar{x} до гладкої ділянки контуру Γ та здійснюючи граничний перехід, отримуємо з виразу (1) граничне інтегральне рівняння (ГІР) відносно незаданих граничними умовами переміщень і напружень у точках поверхні [2]:

$$\frac{1}{2} u(\bar{x}_0) = \int_{\Gamma} \tau(\bar{y}) U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u(\bar{y}) T(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad \bar{x}_0, \bar{y} \in \Gamma, \quad (7)$$

де інтеграли у правій частині є невласними і розуміються за Коші.

Нажаль, системи, які базуються на використанні (7) для масивів, послаблених тріщинами, є виродженими [3], тому для таких об'єктів застосовують ГІР на основі інтегрального подання напружень (5). Щоб отримати таке ГІР, зробимо наступне [4, 5]. За допомогою виключення з розрахункової області V малого кругового сектору радіусу ε з центром в полюсі \bar{x}_0 утворимо допоміжну розрахункову підобласть V_0 (рис.1).

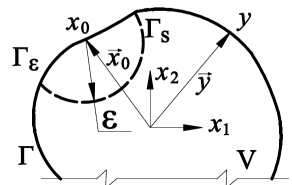


Рис. 1. Утворення допоміжної підобласті

По відношенню до області V_0 точка \vec{x}_0 є зовнішньою, тому формула Соміліани для напружень набуває вигляду

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u(\vec{y}) S_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y = 0, j=1,2. \quad (8)$$

Зауважимо, що яким би малим не був радіус сектору ε , полюс \vec{x}_0 лежить поза межами V_0 , і тому тотожність (8) лишається справедливою:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u(\vec{y}) S_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (9)$$

Частина контуру Γ_ε вважається настільки гладкою, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ границю сектору Γ_s можна вважати півколом. Припустимо, що переміщення $u(\vec{y})$ поблизу точки \vec{x}_0 можна представити у вигляді

$$u(\vec{y}) = u(\vec{x}_0) + \frac{\partial u(\vec{x}_0)}{\partial x_m} (y_m - x_{0m}) + O(r^{1+\alpha}). \quad (10)$$

В свою чергу

$$\sigma_{3j}(\vec{y}) = \sigma_{3j}(\vec{x}_0) + O(r^\alpha). \quad (11)$$

Розглянемо границю першого з інтегралів, що входять до (9):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y + \right. \\ &+ \left. \int_{\Gamma_s} [\sigma_{3m}(\vec{x}_0) n_m(\vec{y}) + O(r^\alpha)] D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ &= \int_{\Gamma} \tau(\vec{y}) D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y + \\ &+ \sigma_{3m}(\vec{x}_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} [\sigma_{3m}(\vec{x}_0) n_m(\vec{y}) + O(r^\alpha)] D_j(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y. \end{aligned} \quad (12)$$

В місцевій полярній системі координат елемент контуру Γ_s може бути поданий у вигляді $d\Gamma = r d\theta$, а крім того

$$r_{,j}(\vec{x}_0, \vec{y}) = n_j(\vec{x}_0) \sin \theta + s_j(\vec{x}_0) \cos \theta, \quad (13)$$

з урахуванням чого пряме інтегрування по півколу дає:

$$\int_{\Gamma_s} r_{,m} r_{,j} d\Gamma_y = r \frac{\pi}{2} \delta_{mj}. \quad (14)$$

Зважимо на те, що при $r \rightarrow 0$

$$D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{r_{,j}(\bar{x}_0, \bar{y})}{2\pi r(\bar{x}_0, \bar{y})} + O(r), \quad (15)$$

а для точок на контурі Γ_s справедливо:

$$r = \varepsilon; \quad r_{,j}(\bar{x}_0, \bar{y}) = -n_j(\bar{y}); \quad \frac{\partial r}{\partial n} = -1. \quad (16)$$

З урахуванням наведених залежностей (14-16) можемо записати:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} n_m(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = -\frac{\delta_{mj}}{4}, \quad (17)$$

і далі

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \int_{\Gamma} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \frac{1}{4} \sigma_{3j}(\bar{x}_0), \quad (18)$$

де інтеграл в правій частині розуміється за Коші.

Звернемось тепер до визначення границі другого з інтегралів, що входять до складу (9). Враховуючи (10), запишемо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\ &\left. + u(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{\partial u(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Розглянемо третій доданок з правої частини рівності (19). Враховуючи (14), (16) та зважаючи на те, що при $r \rightarrow 0$

$$(y_m - x_{0m}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{\mu r_{,m}(\bar{x}_0, \bar{y})}{2\pi r(\bar{x}_0, \bar{y})} \left[n_j(\bar{y}) - 2r_{,m}(\bar{x}_0, \bar{y}) \frac{\partial r}{\partial n} \right] + O(r), \quad (20)$$

отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \mu \frac{\delta_{mj}}{4}, \quad (21)$$

після чого

$$\frac{\partial u(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \frac{\partial u(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \mu \frac{\delta_{mj}}{4} = \frac{\sigma_{3j}(\bar{x}_0)}{4}. \quad (22)$$

Тепер розглянемо другий інтеграл з тих, що містяться в правій частині виразу (19). Перш за все за допомогою (13), інтегруючи по півколу, одержимо:

$$\int_{\Gamma_s} r_{,j} d\Gamma_y = -2rn_j(\bar{x}_0). \quad (23)$$

Далі, помітимо, що при $r \rightarrow 0$

$$r(\bar{x}_0, \bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{\mu}{2\pi r(\bar{x}_0, \bar{y})} \left[n_j(\bar{y}) - 2r_{,m}(\bar{x}_0, \bar{y}) \frac{\partial r}{\partial n} \right] + O(r), \quad (24)$$

тому при малому радіусі ε справедливо

$$u(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = -\mu u(\bar{x}_0) \frac{n_j(\bar{x}_0)}{\pi\varepsilon} + O(r). \quad (25)$$

Підставимо (22) і (25) в (19) і отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \oint_{\Gamma} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{1}{4} \sigma_{3j}(\bar{x}_0), \quad (26)$$

де

$$\oint_{\Gamma} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \mu u(\bar{x}_0) \frac{n_j(\bar{x}_0)}{\pi\varepsilon} \right\}, \quad (27)$$

тобто це – скінченна за Адамаром [6] частина гіперсингулярного інтеграла з ядром S_j .

За допомогою (18) і (26) рівність (9) перетворюється на граничний аналог формули Соміліани для напружень:

$$\frac{1}{2} \sigma_{3j}(\bar{x}_0) = \oint_{\Gamma} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad j=1,2, \quad (28)$$

який можна використовувати в якості ГР відносно незаданих граничними умовами переміщень і напружень.

Розглянемо як приклад коливання нескінченного простору, послабленого тріщиною поздовжнього зсуву, до різних берегів якої в різні боки в напрямку твірної прикладене дотичне рівномірно розподілене навантаження з амплітудою q . Нехай тріщина лежить в площині $x_1 \theta x_3$ (рис. 2). При цьому внаслідок симетрії рівняння (28) спрощується і набуває вигляду:

$$2 \int_{\Gamma^+} u(\bar{y}) S_2(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = q, \quad \bar{x}_0, \bar{y} \in \Gamma^+, \quad q = \text{const}, \quad (29)$$

де Γ^+ – це верхній берег тріщини,

$$S_2(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{i\mu k_2}{4} \frac{H_1^{(1)}(\varphi)}{r}, \quad r = |y_1 - x_1|. \quad (30)$$

Для чисельного визначення розподілу невідомих амплітуд переміщень контур Γ^+ розбивається на граничні елементи (ГЕ), і на кожному з них приймається кусково квадратична апроксимація шуканих функцій. За колокаційною схемою на границі обирається сукупність полюсів \bar{x}_{0i} , в яких повинна виконуватись рівність (29), що дозволяє звести систему ГР до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень $u(\bar{x}_{0i})$. Найбільш складною при такому алгоритмі є процедура обчислення інтегралів по тому ГЕ, на якому розташований полюс.

Перенесемо початок координат в полюс \bar{x}_{0i} та подамо шукану функцію переміщень на ГЕ, якому належить полюс, у вигляді:

$$u(y_1) = u(\bar{x}_{0i}) + \frac{\partial u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} y_1^2. \quad (31)$$

Тепер скінченна за Адамаром частина гіперсингулярного інтегралу по симетричному відрізьку Γ_c довжиною $2c$ може бути записана так:

$$\int_{\Gamma_c} u(\bar{y}) S_2(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-c}^{-\varepsilon} u(y_1) S_2(0, y_1) dy_1 + \int_{\varepsilon}^c u(y_1) S_2(0, y_1) dy_1 + \mu \frac{u(\bar{x}_{0i})}{\pi\varepsilon} \right\} =$$

$$= -\frac{i\mu k_2}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2u(\bar{x}_{0i}) \int_{\varepsilon}^c \frac{H_1^{(1)}(\varphi)}{y_1} dy_1 - \frac{4}{ik_2} \frac{u(\bar{x}_{0i})}{\pi\varepsilon} + \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \int_{\varepsilon}^c y_1 H_1^{(1)}(\varphi) dy_1 \right\}. \quad (32)$$

Інтеграли в правій частині рівності (32) можуть бути визначені в замкненому вигляді [7]:

$$\int \frac{H_1^{(1)}(t)}{t} dt = tH_0^{(1)}(t) - H_1^{(1)}(t) + \Phi(t), \quad \int tH_1^{(1)}(t) dt = \Phi(t), \quad (33)$$

де $\Phi(t) = \frac{\pi t}{2} [H_1^1 L_0(t) - H_0^1 L_1(t)]$, $L_n(t)$ – функція Струве n -го порядку [7].

Крім того необхідно зауважити, що при малих t

$$H_1^{(1)}(t) = -\frac{2i}{\pi t} + O(t), \quad tH_0^{(1)}(t) = t \frac{\pi + 2i[\ln(0.5t) + \gamma]}{\pi} + O(t^3),$$

$$\Phi(t) = -\frac{2it}{\pi} + O(t^3). \quad (34)$$

З урахуванням (33) і (34) вираз (32) набуває вигляду:

$$\oint_{\Gamma_c} u(\bar{y}) S_2(\bar{x}_{0i}, \bar{y}) d\Gamma_y =$$

$$= \frac{i\mu}{2} \left\{ k_2 u(\bar{x}_{0i}) [H_1^{(1)}(k_2 c) - k_2 c H_0^{(1)}(k_2 c) - \Phi(k_2 c)] - \frac{1}{2k_2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \Phi(k_2 c) \right\}. \quad (35)$$

Отже, отримано замкнений компактний вираз (35) для обчислення скінченної за Адамаром частини гіперсингулярного ГР. Оскільки інтегрування по решті границі не викликає труднощів, можна вважати питання регуляризації розрахункових співвідношень та алгебраїзації системи ГР вирішеним. Зауважимо, що отримати рівність (35) вдалося тільки після того, як було прийнято гіпотезу про кусково квадратичний характер поведінки шуканих функцій $u(\bar{y})$.

Існує також інший підхід, який виходить з припущення, що переміщення поблизу точки \bar{x}_0 є диференційованими функціями. Інтегрування частинами в цьому випадку дозволяє надати другому інтегралу у правій частині формули (8) наступного вигляду [8]:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u(\bar{y}) S_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \rho \omega^2 \mu u(\bar{y}) n_j(\bar{y}) U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y +$$

$$+ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad j, k = 1, 2, \quad (36)$$

де e_{jk} – альтернуючий символ; $\bar{t} \{-n_2, n_1\}$ – одиничний вектор напрямку дотичної в точці \bar{y} контуру Γ .

Значимо, що перший з інтегралів в правій частині виразу (36) має слабку сингулярність, внаслідок чого при зменшенні радіусу ε дуги Γ_s

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} n_j(\bar{y}) U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0, \quad (37)$$

і тому з урахуванням (10) маємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \rho \omega^2 \mu u(\bar{y}) n_j U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \rho \omega^2 \mu \int_{\Gamma} u(\bar{y}) n_j U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (38)$$

причому інтеграл в правій частині розуміється за Коші.

Другий інтеграл в правій частині виразу (36) має сингулярність типу r^{-1} . Враховуючи залежності (14)-(17), а також той факт, що

$$\frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} = -n_2(\bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} + n_1(\bar{y}) \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_2},$$

отримуємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \frac{\mu}{4} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_j} = \frac{1}{4} \sigma_{3j}(\bar{x}_0), \quad (39)$$

і отже

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ = \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{1}{4} \sigma_{3j}(\bar{x}_0), \end{aligned} \quad (40)$$

де інтеграл в правій частині розуміється за Коші.

Підставляючи (38) і (40) в (36), а останнє – в (9), отримуємо альтернативну форму ГІР для напружень:

$$\frac{1}{2} \sigma_{3j}(\bar{x}_0) = \int_{\Gamma} \tau(\bar{y}) D_j(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial t} e_{jk} D_k(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y -$$

$$-\rho\omega^2\mu \int_{\Gamma} u(\bar{y})n_j U(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y, \quad (41)$$

причому всі інтеграли в правій частині ГІР (41) слід розуміти за Коші.

Рівність (41) так само, як і (28) може використовуватись в якості алгоритмічної основи чисельної методики, спрямованої на розв'язання за методом потенціалу задачі про коливання масивного пружного об'єкту, що знаходиться в стані антиплоскої деформації. Якщо знову розглядається симетричний напружений стан в нескінченному циліндрі, послабленому тріщиною поздовжнього зсуву, то рівняння (41) спрощується і набуває вигляду:

$$2\mu \left[\rho\omega^2 \int_{\Gamma^+} u(\bar{y})U(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y + \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y \right] = -q. \quad (42)$$

Знову для чисельного визначення розподілу невідомих амплітуд переміщень розіб'ємо контур Γ^+ на граничні елементи (ГЕ) і вважатимемо, що на кожному з них шукана функція $u(\bar{y})$ змінюється за квадратичним законом. Дослідимо процедуру обчислення інтегралів по тому ГЕ, на якому розташована точка колокації \bar{x}_{0i} . За умови перенесення початку координат в полюс \bar{x}_{0i} та використання для функції переміщень виразу (31) головні за Коші значення сингулярних інтегралів з лівої частини рівняння (42) можуть бути записані в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} u(\bar{y})U(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-c}^{-\varepsilon} u(y_1)U(0, y_1)dy_1 + \int_{\varepsilon}^c u(y_1)U(0, y_1)dy_1 \right\} = \\ &= \frac{i}{4\mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2u(\bar{x}_{0i}) \int_{\varepsilon}^c H_0^{(1)}(\varphi)dy_1 + \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \int_{\varepsilon}^c y_1^2 H_0^{(1)}(\varphi)dy_1 \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

причому згідно [7]:

$$\int H_0^{(1)}(t)dt = tH_0^{(1)}(t) + \Phi(t), \quad \int t^2 H_0^{(1)}(t)dt = t^2 H_1^{(1)}(t) - \Phi(t). \quad (44)$$

З урахуванням (34) і (44) вираз (43) набуває вигляду:

$$\rho\omega^2\mu \int_{\Gamma_c} u(\bar{y})U(\bar{x}_0, \bar{y})d\Gamma_y = \frac{i\mu}{2} k_2 u(\bar{x}_{0i}) \left[k_2 c H_0^{(1)}(k_2 c) + \Phi(k_2 c) \right] +$$

$$+ \frac{i\mu}{4} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \left[k_2 c^2 H_1^{(1)}(k_2 c) - \frac{1}{k_2} \Phi(k_2 c) \right]. \quad (45)$$

Далі

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^+} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-c}^{-\varepsilon} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(0, y_1) dy_1 + \int_{\varepsilon}^c \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(0, y_1) dy_1 \right\} = \\ &= \frac{ik_2}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \int_{\varepsilon}^c y_1 H_1^{(1)}(\varphi) dy_1 \right\} = \frac{i}{2k_2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \Phi(k_2 c). \quad (46) \end{aligned}$$

Нарешті, за допомогою (45) і (46) отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} -\mu \left[\rho \omega^2 \oint_{\Gamma_c} u(\bar{y}) U(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial u(\bar{y})}{\partial x_1} D_1(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - u(\bar{y}) D_1(\bar{x}_0, \bar{y}) \Big|_{\Gamma_c} \right] = \\ = \frac{i\mu}{2} \left\{ k_2 u(\bar{x}_{0i}) \left[H_1^{(1)}(k_2 c) - k_2 c H_0^{(1)}(k_2 c) - \Phi(k_2 c) \right] - \frac{1}{2k_2} \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \Phi(k_2 c) \right\}, \quad (47) \end{aligned}$$

яке повністю співпадає з виразом (35) для визначення скінченної за Адамаром частини відповідного гіперсингулярного інтеграла. Крім того, чисельні експерименти показали, що наближене розв'язання задачі як за допомогою системи гіперсингулярних ГІР (28), так і на основі системи регуляризованих ГІР (41) дає практично однакові результати при майже ідентичних комп'ютерних витратах. Це свідчить про еквівалентність застосованих в роботі підходів до регуляризації ГІР на основі формули Соміліани для напружень в разі дослідження антиплоского напруженого стану біля тріщини поздовжнього зсуву.

Необхідно також зазначити, що наявність останнього третього доданку в лівій частині рівності (47) є наслідком інтегрування частинами. Його відсутність у рівняннях (41) і (42) пояснюється тим, що контур Γ на відміну від Γ_c є замкненим, тоді як амплітуда переміщень $u(\bar{y})$ є неперервною функцією.

Співвідношення (29) і (35) були застосовані в якості алгоритмічної основи для розв'язання за методом граничних елементів задачі про антиплоскі гармонічні коливання пружного простору, послабленого плоскою тріщиною, до берегів якої прикладене рівномірно розподілене дотичне навантаження. Результати розв'язку у вигляді амплітуд переміщень $u(\bar{x}_{0i})$ в точках колокації використовувались для визначення коефіцієнту

інтенсивності напружень (КІН). Графіки залежності нормованого КІН K_{III} від безрозмірного параметру частоти коливань наведені на рисунку 2. Лінія, позначена трикутниками, відповідає значенням, взятим з довідкової літератури [9]. Лінією, позначеною ромбами, з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму на досить розрідженій сітці граничних елементів (8 елементів на контурі тріщини). Лінія, позначена прямокутниками, побудована за результатами, знайденими на більш густій сітці (20 ГЕ вздовж контуру).

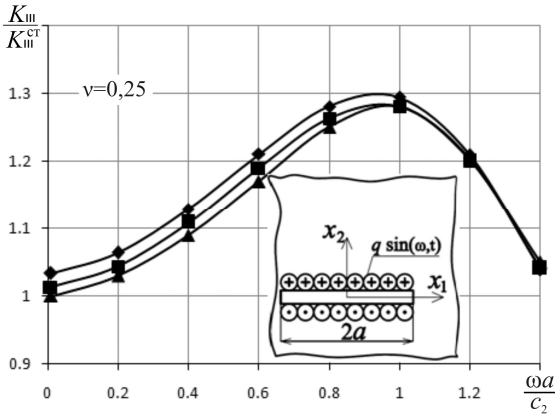


Рис. 2

Наведені результати наочно свідчать про досить швидку збіжність розрахункових даних до точних значень. Так, при $\omega a C_2^{-1} = 1$ (величина параметру частоти, близько якої K_{III} досягає максимуму) похибка визначення КІН на розрідженій сітці становила 3,3 %, а на більш густій – 2,1 %. Так само приблизно в півтора рази зменшується похибка і в інших точках частотного діапазону, що характеризує роботоспроможність розробленої методики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2008. – 400 с.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. *Cruse T.A.* Recent advances in boundary element analysis methods // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62 (1987), pp. 227-244

4. *Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J.* A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *ASME J.of Applied Mechanics*, 59 (1992), pp. 604-614
5. *Ворона Ю.В., Геращенко О.В.* Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81.– С.119–134
6. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
7. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М: Наука, 1979. – 830 с.
8. *Ворона Ю.В., Чан Дик Тинь.* Динаміка пружних хвиль в анізотропному середовищі з порожнинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2001. – Вип. 69.– С.147–154
9. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ./Под ред. Ю.Мураками. – М: Мир, 1990. – 1016 с.

Отримано 20.08.10

Ворона Ю.В., Русанова Е.С.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ МАССИВОВ С ТРЕЩИНАМИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

На основе соотношений метода потенциала построены граничные интегральные уравнения и численный алгоритм для решения задачи про антиплоские гармонические колебания упругих массивов, ослабленных трещинами. Решена тестовая задача о динамическом напряженном состоянии упруго пространства вблизи трещины продольного сдвига.

Vorona Yu.V., Rusanova O.S.

THE PROCEDURE FOR NUMERICAL ANALYSIS OF SOLIDS WITH LONGITUDINAL SHEAR CRACKS VIBRATIONS

The boundary integral equations and numerical technique for analysis of out-of-plane shearing harmonic vibration of elastic solids with cracks are developed. The numerical dynamic analysis of elastic medium with tearing shear crack is presented to illustrate the technique.

УДК 531.31

М.В. Гончаренко, канд. техн. наук

АНАЛІЗ ВПЛИВУ СТОХАСТИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ ПАРАМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ЗОНИ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Розглядаються питання, пов'язані з впливом стохастичної складової в параметричному навантаженні на структуру областей динамічної стійкості пружних систем. Межі областей динамічної стійкості будуються, виходячи з означення стійкості відносно моментних функцій. Розглядаються випадки, коли параметричне навантаження зображується гармонічним, стаціонарним або періодично нестационарним процесом. На прикладі задачі про динамічну стійкість плоскої форми згину балки побудовані області стійкості, що дозволяє оцінити вплив стохастичної складової параметричного збудження на структуру областей динамічної стійкості.

Вступ. Проблеми теоретичного моделювання динаміки пружних систем постають у різних галузях техніки: будівництві, машинобудуванні, авіаційній і космічній техніці, у нафтовій і газовій промисловості. У більшості випадків саме динамічні процеси визначають надійність і довговічність конструкцій та їх елементів. Значна тривалість експлуатації конструкцій, їх ефективне використання та безаварійна робота потребує наявності даних про реакцію системи на різні види навантаження. Складний характер і визначальна роль динамічних процесів змушують вдосконалювати методи розрахунку, більш повно враховувати вхідні фактори, що впливають на поведінку систем.

Серед багатьох видів динамічного навантаження, що часто зустрічається на практиці, досить значним класом є параметричне навантаження. При певних характеристиках параметричного навантаження має місце втрата динамічної стійкості основного стану. Проводяться дослідження зон динамічної стійкості при різних типах параметричного навантаження, а саме при гармонічному, стаціонарному та періодично нестационарному параметричних навантаженнях.

Параметричні коливання пружних систем при періодичному навантаженні. Розглядаються коливання, що виникають у лінійних системах з параметричним збудженням. Рух відповідної дискретної моделі системи можна описати матричним рівнянням виду

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku + \varphi(t)K_G u = 0, \quad (1)$$

де $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ – n -вимірний вектор динамічних змінних; M, C, K, K_G – $n \times n$ матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості відповідно; $\varphi(t)$ – випадковий процес, який має структуру

$$\varphi(t) = \mu_0 + \mu_1 \varphi_1(vt) + \mu_2 \psi(t), \quad (2)$$

де $\varphi_1(vt)$ – детерміністична періодична функція; $\psi(t)$ – стаціонарний випадковий процес зі скінченим радіусом кореляції; μ_0, μ_1, μ_2, v – параметри збудження.

Метод усереднення застосовується не безпосередньо до вихідної дискретної моделі пружної системи. Спочатку відбувається перехід до системи рівнянь у нормальних координатах:

$$y_i(t) + 2\xi_i \omega_{0i} \dot{y}_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \varphi(t) \sum_{k=1}^n g_{ik} y_k(t) = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

де y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – вектор узагальнених координат; ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – модальні параметри згасання; ω_{0i} ($i = 1, 2, \dots, n$) – частоти власних коливань системи; $\{g_{ik}\}_{i,k=1}^n$ – компоненти перетвореної матриці геометричної жорсткості.

Перехід до нормальних координат дозволяє проявитись резонансним частотам пружної системи і дає змогу реалізувати метод усереднення більш адекватним чином.

Метод усереднення належить до класу асимптотичних методів. Останні базуються на побудові наближених розв'язків вихідної системи, які при наближенні малого параметра до нуля прямують до розв'язку певної системи, який може бути знайдений [9]. У конкретних розрахунках від нескінченно малих значень параметра переходять до нових, але скінчених значень, за умови, що спектральна щільність збудувального процесу мало змінюється в резонансній області. Метод усереднення можна ефективно застосовувати не тільки до систем, де малий параметр присутній у явній формі, а й у випадках, коли, виходячи з механічних міркувань, можна вважати, що шуканий рух мало відрізняється від певного породжувального руху. При конкретних дослідженнях буде використовуватись саме такий підхід. Але спочатку для чіткого формулювання обчислювальних процедур методу усереднення в систему (3) вводиться малий параметр ε . По-перше, параметр ε вводиться в зображення (2):

$$\varphi(t) = \varepsilon \mu_0 + \varepsilon \mu_1 \sin 2\nu + \varepsilon^{1/2} \mu_2 \psi(t). \quad (4)$$

Множник $\varepsilon^{1/2}$ при випадковій стаціонарній складовій періодично нестационарного процесу $\varphi(t)$ визначається вимогою, щоб спектральна щільність випадкового процесу $\varepsilon^{1/2} \mu_2 \psi(t)$ мала множник того ж порядку малости, що й інші складові зображення (4).

По-друге, параметр ε вводиться у дисипативні складові рівнянь (3). Таким чином, система (3) записується у вигляді:

$$y_i(t) + 2\varepsilon \zeta_i \omega_i y_i(t) + \omega_{0i}^2 y_i(t) + \left[\varepsilon \mu_0 + \varepsilon \mu_1 \sin 2\nu + \varepsilon^{1/2} \mu_2 \psi(t) \right] g_{ii} y_k(t) = 0, \quad (5) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

Якщо серед власних частот ω_i немає таких, з яких величина $\omega_i - \omega_j$ являється величиною такого самого порядку, що і ε , то частина доданків в рівнянні (5) біля резонансних частот, що досліджуються, будуть мати більш високий порядок малости по відношенню до основних “резонансних” доданків. Саме, якщо $\nu \approx \omega_i$, то першому наближенню буде відповідати одне рівняння системи (5) i -го степеня вільності, причому ζ_{ij}, g_{ij} , $i \neq j$ будуть відсутні. Аналогічно у випадку комбінаційного резонансу – при $\nu \approx (\omega_i \pm \omega_j)/2$ в рівняннях першого наближення, отриманих з (5), залишаться тільки два рівняння, що описують коливання по i -ій і j -ій нормальним формам, при цьому g_{ii}, g_{jj} будуть більш високого порядку малости. Ці типи коливань являються основними для системи з періодичним параметричним збудженням.

Параметричні коливання пружних систем при періодичному навантаженні. Якщо в параметричному збудженні відсутня стохастична складова ($\mu_2 = 0$), то, як відомо [4], головні області нестійкості системи (1) розташовані біля значень $\nu \approx \omega_i$ (основні резонанси) або $\nu \approx (\omega_i \pm \omega_j)/2$ (комбінаційні резонанси); $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Якщо серед власних частот ω_i немає близьких до величини $\omega_i - \omega_j$, то частина доданків рівняння (5) біля резонансних частот, що досліджуються, будуть мати більш високий порядок малости по відношенню до основних “резонансних” доданків. В такому випадку при $\nu \approx \omega_i$ втрата стійкості буде відбуватись по i -тій нормальній формі [8].

Межі зон стійкості в зоні головного простого резонансу можна отримати за допомогою виразу [4]:

$$v \approx 2\omega_i \left(1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mu^2 (k_{ii}^g)^2 - 4\xi_i^2} \right). \quad (6)$$

Аналогічно у випадку комбінаційного резонансу – при $v \approx (\omega_i \pm \omega_j)/2$ в рівняннях першого наближення, отриманих з (5), залишаться тільки два рівняння, що описують коливання по i -й і j -й нормальним формам [4]. Динамічний стан при втраті стійкості буде визначатись суперпозицією двох власних форм. Межі зон стійкості визначаються виразом:

$$v \approx \omega_i + \omega_j \pm \frac{\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j}{\sqrt{\xi_i \xi_j}} \sqrt{\mu^2 k_{ij}^g k_{ji}^g - \xi_i \xi_j}. \quad (7)$$

Досліджується система (5) біля цих же частот, при використанні першого наближення асимптотичного методу Крилова-Боголюбова [2] у відповідності з теоремою Стратоновича-Хасьмінського [10].

Умови стійкості пружних систем при стаціонарному параметричному навантаженні. Природним узагальненням періодичного параметричного впливу є модель стаціонарного випадкового впливу, тобто в зображенні (2) $\mu_1 = 0$, $\mu_0, \mu_2 \neq 0$. Вважається, що випадковий процес $\psi(t)$ є достатньо вузькосмуговим відносно пружної системи, яка розглядається. При дослідженні динамічної стійкості використовується визначення стійкості відносно моментних функцій.

Для складання рівнянь методу моментів достатньо вивести стохастичне рівняння Іто відносно змінних стану та їх квадратів, а потім застосувати до цих рівнянь операцію визначення безумовного математичного сподівання. Умова асимптотичної стійкості системи відносно моментних функцій у середньоквадратичному в зоні простого головного резонансу може бути записана наступним чином [9]:

$$\frac{1}{8} \pi \omega_{0i}^2 S(2\omega_{0i}) < \frac{1}{4} \xi_i \omega_{0i}, \quad (8)$$

де $S(\omega)$ – спектральна щільність випадкового параметричного збудження $\mu_2 \psi(t)$.

При дослідженні стійкості в зоні комбінаційного резонансу рівняння визначаються двома частотами ω_i та ω_j , при визначенні операції усереднення вкорочених стохастичних рівнянь постає питання спільного періоду. Вважається, що існують цілі числа n_1 і n_2 , такі, що $n_1\omega_1 \cong n_2\omega_2$. Тоді можна показати, що по коливаннях по двох різних степенях вільності система буде мати спільний період $T = n_1T_2 + n_2T_1$, де $T_i = 2\pi/\omega_i$. Після усереднення за період T записується вкорочені рівняння в розумінні Стратоновича відносно квадратів амплітуд $\langle A_1^2 \rangle$ і $\langle A_2^2 \rangle$ [8]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \langle V_1 \rangle \\ \langle V_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\xi_i\omega_i + \frac{1}{2}g_{ir}^2S(2\omega_i) + \frac{1}{4}g_{ij}g_{jr}S^- & \frac{1}{4}g_{ij}^2S^+ \\ \frac{1}{4}g_{jr}^2S^+ & -2\xi_j\omega_j + \frac{1}{2}g_{jr}^2S(2\omega_j) + \frac{1}{4}g_{ij}g_{jr}S^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle V_1 \rangle \\ \langle V_2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де $S^\pm = S(\omega_{0i} + \omega_{0j}) \pm S(\omega_{0i} - \omega_{0j})$.

Система (9) є автономною. Стійкість тривіального розв'язку цієї системи повністю визначається властивістю коренів її характеристичних рівнянь. Таким чином, задача дослідження стійкості в середньоквадратичному системі (9) зводиться до задачі на власні значення.

Умови стійкості пружних систем при періодично нестаціонарному параметричному навантаженні. На практиці часто до періодичного збудження додається ще стохастична складова. Наприклад, це може бути пов'язано з тим, що на вібрацію конструкції крім періодичності роботи обладнання впливає неврівноваженість певних елементів. Такий характер навантаження можна представити сумою гармонічної та стохастичної складових, тобто в представленні (2) $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \neq 0$, $\varphi_1(v, t) = \sin 2vt$.

При наявності гармонічної складової у параметричному навантаженні простий головний резонанс проявляється, якщо частота гармонічної складової параметричного збудження $2v$ перебуває безпосередньо в районі частоти $2\omega_{0i}$.

Згідно із загальною схемою методу усереднення виконується перехід до системи рівнянь у стандартній формі. Для цього використовується спеціальне перетворення фазових координат системи. [6,11]. До системи рівнянь у стандартній формі застосовується операція усереднення, яка дозволяє звести задачу до аналізу дифузійного марковського процесу.

Операцію усереднення T -періодичної за часом функції $g(\bar{x}, t)$ можна зобразити виразом $\varphi(\bar{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T g(\bar{x}, t) dt$. Отже, система диференціальних

рівнянь будуватиметься методом усереднення, що ґрунтується на теоремі Стратоновича-Хасьмінського. Виконавши такі перетворення, отримуємо диференціальні рівняння для перших і других моментів відповідно [6].

Аналогічно випадку стаціонарного випадкового навантаження задача дослідження стійкості зводиться до задачі на власні значення. Обчислюються власні значення при збільшенні інтенсивності випадкового навантаження. Найменше значення інтенсивності, при якому серед власних значень з'являється хоча б одне з додатною дійсною частиною, вважається межею області стійкості. В координатах несуча частота – інтенсивність випадкового параметричного навантаження, будуватиметься межа стійкості в зоні параметричного резонансу.

Дослідження динамічної стійкості плоскої форми згину. Розглядається задача динамічної стійкості плоскої форми згину балки. Нехай пружна балка, шарнірно оперта по кінцях і навантажена в площині найбільшої жорсткості моментами $M(t)$ (рис. 1), знаходиться в режимі сталих коливань [3]. Вказане навантаження являється параметричним по відношенню до згинно-крутильних деформацій, що відбуваються з цієї площини. У випадку динамічного навантаження дослідження малих відхилень з головної площини балки приводить до задачі динамічної стійкості плоскої форми згину. Поперечний прогин $u(x, t)$ і кут повороту $\varphi(x, t)$ задовольняють рівнянням [4]:

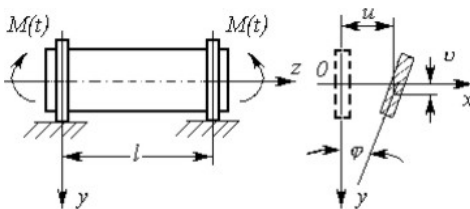


Рис. 1. Плоска форма згину

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + M(t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$M(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - GI_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho F r^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

де GI_k - жорсткість при крутінні; r - радіус інерції перерізу.

Граничні умови мають вигляд:

$$u = \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ і } x = l. \quad (11)$$

Рішення шукається у вигляді

$$u(x, t) = \gamma \cdot q_1(t) \sin(\pi x / l); \quad \varphi(x, t) = q_2(t) \sin(\pi x / l), \quad \gamma = r \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (12)$$

Підставивши (12) в (10) і виконавши перетворення, отримаємо систему (2), в якій $\zeta_{12} = \zeta_{21} = g_{11} = g_{22} = k_{11} = k_{22} = 0$, $g_{12} = g_{21} = -h$, $k_{12} = k_{21} = -1$ [11].

При дослідженні зон стійкості в зоні простого параметричного резонансу отримані графіки, аналогічні наведеним в [5] для стаціонарного параметричного навантаження і наведеним в [1,7] для періодично нестаціонарного навантаження, з мінімальною критичною амплітудою в зонах подвійних власних частот згину і кручення.

В зоні комбінаційного резонансу розглянемо три типи навантаження. Перший випадок – навантаження білим шумом. Результати при $\omega_1 = 0,6 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 2,4 \text{ рад/с}$, $n_1 = 12$, $n_2 = 4$, $I = 0,01 \text{ м}^2/\text{с}^3$, $\zeta = 0,2$, $\varepsilon = 0,1$ зображені на рис.2,а для перших моментів і на рис.2,б для других.

Другий випадок – вважаємо, що $f(t)$ - експоненціально-корельований центрований стаціонарний випадковий процес, такий, що

$$\langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad S(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \Psi(\omega) = \frac{2\sigma^2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (13)$$

При параметрах $\omega_1 = 0,6 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 2,4 \text{ рад/с}$, $n_1 = 12$, $n_2 = 4$, $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$, $\zeta = 0,1$, $\sigma^2 = 2,0$, $\varepsilon = 0,1$, $k = 2$ зони стійкості для перших моментів представлені на рис.2, в, для других – на рис.2, г.

Для третього навантаження кореляційну функцію представимо у вигляді процесу з прихованою періодичністю:

$$\langle f(t)f(t+\tau) \rangle = \left[\cos(\theta_\alpha|\tau|) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha|\tau|) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|), \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2, \\ S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha\theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}; \quad \Psi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \theta^2 + 4\alpha^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (14)$$

При параметрах $\omega_1 = 0,6 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 2,4 \text{ рад/с}$, $n_1 = 12$, $n_2 = 4$, $\alpha = k(\omega_1 + \omega_2)$, $\theta_\alpha = 1$, $\zeta = 0,1$, $\sigma^2 = 2,0$, $\varepsilon = 0,1$, $k = 2$ зони стійкості для перших моментів представлені на рис.2, д, для других – на рис.2, е.

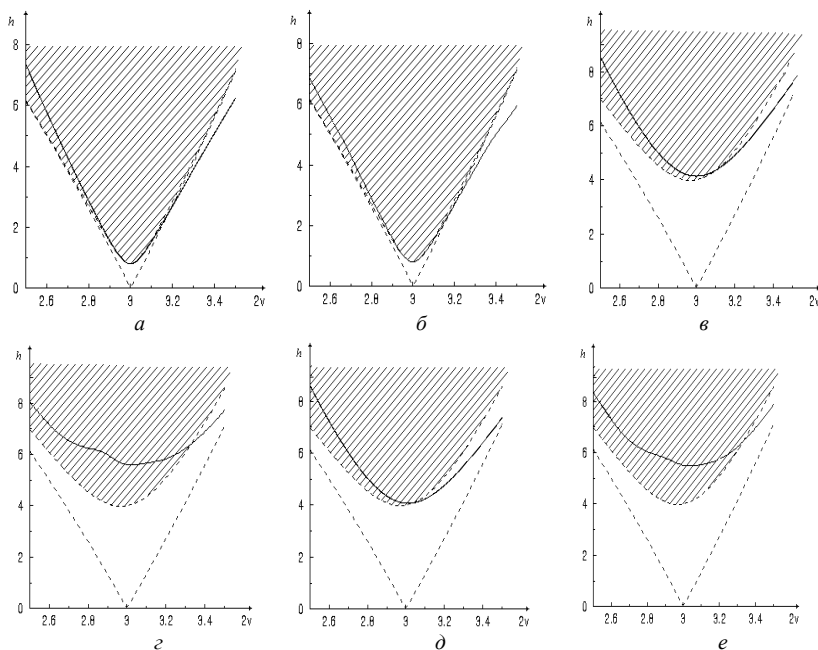


Рис.2. Зони нестійкості балки.

На всіх графіках пунктирною лінією обмежена область нестійкості при детермінованому навантаженні без врахування дисипації енергії, заштрихована область – з врахуванням затухання, суцільною лінією показана межа нестійкості при наявності відповідної стохастичної складової. Як видно з графіків при наявності в параметричному навантаженні стохастичної складової типу білого шуму області майже не змінюються, при експоненціально-корельованому випадковому процесі і процесі з прихованою періодичністю для других моментів спостерігається ефект стабілізації.

Висновки. Проаналізовано вплив стохастичної складової параметричного навантаження на структуру областей динамічної стійкості плоскої форми згину балки. В зоні простого резонансу при

стаціонарному параметричному навантаженні спостерігається ефект стабілізації. При періодично нестаціонарному навантаженні ефект стабілізації спостерігається безпосередньо при частоті гармонічного навантаження, що дорівнює подвійній власній частоті, і ефект дестабілізації поза цією зоною. В зоні комбінаційного резонансу ефект стабілізації або дестабілізації проявляється залежно від параметрів стохастичної складової.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В., Гончаренко М.В.* Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні // *Авиационно-космическая техника и технология*, 2004. – вып.3(11). – с.51-58.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974.
3. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
4. *Вибрации в технике: Справочник.* В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.
5. *Ворчак М.В.* Параметричний резонанс в задачах про коливання труб при випадкових пульсаціях тиску внутрішнього потоку // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.- техн. збірник* – К.: КНУБА, 2002.- Вип. 71.- С. 107-114
6. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Аналіз стійкості пружних систем в зонах простих і комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні // *Опір матеріалів і теорія споруд.* - К.: КНУБА, 2004, Вип. 74. - с.115-123.
7. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Дослідження параметричних резонансів комбінованої пластинчато-стержневої системи // *Опір матеріалів і теорія споруд:* - К.: КНУБА, 2004, Вип. 75. – с.47-56.
8. *Гончаренко М.В., Пошивач Д.В.* Дослідження умов динамічної стійкості пружних систем при стохастичному параметричному впливі // *Вібрації в техніці та технологіях: всеукраїнський науково-технічний журнал.* – Вінниця, 2006. - №2 (44). – с.14-19
9. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
10. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.:Наука,1969
11. *Labou M.* Stochastic stability of parametrically excited random systems // *International applied mechanics.* — Bd. 40 (2004), 10. — Pp. 1175-1183.

Отримано 06.09.10

Гончаренко М.В.

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА ЗОНЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ
УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ**

Рассматриваются вопросы, связанные с влиянием стохастического характера параметрической нагрузки на структуры областей динамической устойчивости упругих систем. Границы областей динамической устойчивости строятся, исходя из определения устойчивости относительно моментных функций. Рассматриваются случаи, когда параметрическая нагрузка представляется гармоническим, стационарным или периодически нестационарным случайным процессом. На примере задачи о динамической устойчивости плоской формы изгиба балки построены области устойчивости, что позволяет оценить влияние стохастической составляющей параметрического возбуждения на структуру областей динамической устойчивости.

Goncharenko M.

**ANALYSIS OF PARAMETRIC ADDITIONAL RANDOM LOAD ON DYNAMIC
STABILITY REGIONS OF ELASTIC SYSTEMS**

The effect of parametric additional random excitation on the dynamic stability regions structures of elastic systems is studied. The boundaries of dynamic regions of stability are constructed with regard to moment functions. Cases is considered when parametric load to represent by harmonic, stationary or periodical non stationary process. Regions of dynamic probability stability is obtained for example of the dynamic stability of a beam uniplanar bending that is allowed to appreciate influence of stochastic parametric load on dynamic stability regions structure.

УДК 539.3

Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
М.В. Корнієнко, канд. техн. наук
А.М. Шельменко, аспірант

РОЗРАХУНОК ОСАДКИ І НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ПАЛЬ ПРИ ЇХ ВЗАЄМОДІЇ В ПЛИТНОМУ ФУНДАМЕНТІ

Виконано дослідження залежності жорсткості та несучої здатності паль від різної їх кількості та відстані між ними. Визначено, що жорсткість паль зростає при збільшенні відстані між ними до певної межі. Тому розташування паль на відстані трьох діаметрів, як прийнято в нормативних документах, не завжди є раціональним і для розрахунку палових фундаментів не зовсім вірно приймати жорсткість, яка отримана при випробуванні одиночної палі.

Згідно норм експериментальне встановлення несучої здатності та жорсткості проводять для однієї палі. Відповідно до отриманих даних розрахунок всього палового фундаменту виконують при умові, що всі палі в такому фундаменті мають однакові характеристики жорсткості. Для з'ясування цього припущення було проведено дослідження напружено-деформованого стану палового фундаменту для різної кількості паль в куці за допомогою скінченно-елементного програмного комплексу і виконано порівняння результатів. Для дослідження використано забивну палю квадратного перерізу 0.35x0.35 м довжиною 9м, яка заглиблювалась в однорідний ґрунт, характеристики якого приведені в табл. 1.

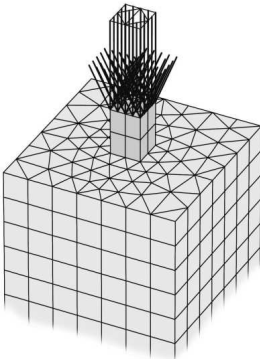


Рис. 1

Навантаження на кожну палю приймалось однаковим і збільшувалось поступово, досягаючи максимального значення. Розв'язано кілька задач, в яких врахована різна кількість паль та відстань між ними.

Розглянута одиночна палія в масиві ґрунту 15x15 м та глибиною 20 м (рис. 1), а також суцільне нескінченне поле паль з різними відстанями між паліями – 1 м, 1.2 м, 1.4 м, 1.6 м, 1.8 м, 2 м, 3 м, 4 м, 10 м. Розрахункова модель була створена з використанням умов симетрії на всіх бічних гранях ґрунтового масиву

глибиною 20м. На графіку (рис. 2) показані криві залежності осідання паль від навантаження, з якого видно, що чим менша відстань між палями, тим більшу осадку вони отримують при одному і тому ж навантаженні на кожну з паль. Тобто однакові за розмірами і характеристиками матеріалу палі однієї і тієї ж довжини мають різну жорсткість в залежності від відстані між центрами паль. При цьому несуча здатність зменшується зі зростанням відстані між палями. Крім того, вже при відстані більше 5м палю умовно можна вважати одиночною, оскільки подальше збільшення відстані майже не призводить до зміни кривої навантаження.

Таблиця 1

Характеристика (позначення)	Од.вим.	Величина
Модуль деформації (E_{ref})	кН/м ²	22000
Коефіцієнт Пуасона (ν)	-	0,35
Зчеплення ґрунту (c_{ref})	кН/м ²	30
Кут внутрішнього тертя (φ)	град	20
Кут делатансії (ψ)	град	0,1
Об'ємна вага ґрунту в природному стані (γ_{sat})	кН/м ³	18
Об'ємна вага ґрунту в сухому стані (γ_{unsat})	кН/м ³	15
Коефіцієнт фільтрації ($k_x=k_y$)	м/добу	0,001

Розглянута одиночна паля в масиві ґрунту 15х15 м та глибиною 20 м (Рис.1), а також суцільне нескінченне поле паль з різними відстанями між палями – 1 м, 1.2 м, 1.4 м, 1.6 м, 1.8 м, 2 м, 3 м, 4 м, 10 м. Розрахункова модель була створена з використанням умов симетрії на всіх бічних гранях ґрунтового масиву глибиною 20м. На графіку (рис. 2) показані криві залежності осідання паль від навантаження, з якого видно, що чим менша відстань між палями, тим більшу осадку вони отримують при одному і тому ж навантаженні на кожну з паль. Тобто однакові за розмірами і характеристиками матеріалу палі однієї і тієї ж довжини мають різну жорсткість в залежності від відстані між центрами паль. При цьому несуча здатність зменшується зі зростанням відстані між палями. Крім того, вже при відстані більше 5м палю умовно можна вважати одиночною, оскільки подальше збільшення відстані майже не призводить до зміни кривої навантаження.

Розглянутий куц з 36 паль з різними відстанями між палями – 1м, 1.5 м, 2 м, 3 м, 4 м. Для цієї задачі розрахункова модель була створена у вигляді четвертинки від всього масиву і використано симетрію відносно середини куща. З графіка, який побудований для кутових паль (рис. 3),

можна побачити аналогічну залежність величини осідання від відстані між палями в куці, але не видно закономірності для несучої здатності, як це було в першій чисто теоретичній задачі.

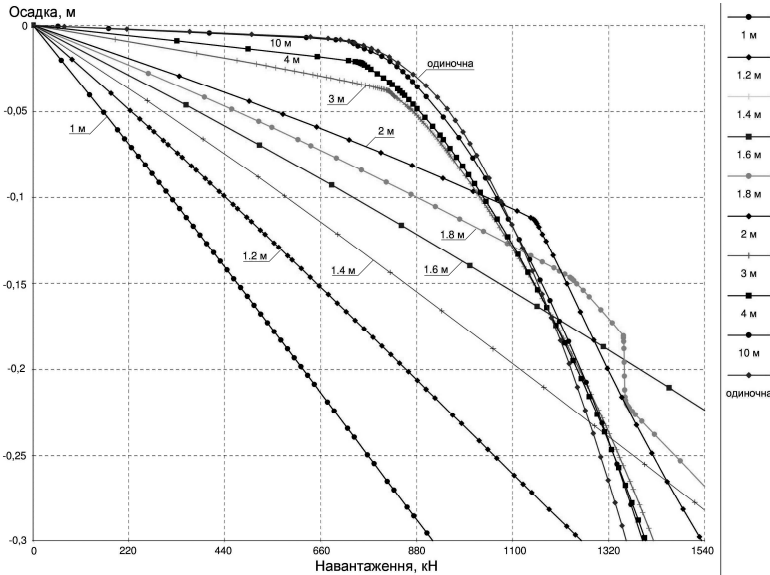


Рис. 2. Нескінченне поле паль. Графіки залежності осідання від навантаження для різної відстані між палями

На іншому графіку показані криві залежності осідання від навантаження для різного розташування паль в куці (від центра до кута пального масиву) при відстанях 1 м та 2 м між палями. З результатів (Рис.4) можна побачити, що для відстані між палями 2 м осадка паль менша, а несуча здатність - більша, ніж при відстані між палями в 1 м.

Розглянутий куц з 4 паль з різними відстанями між палями – 1 м, 1.2 м, 1.4 м, 1.6 м, 1.8 м, 2 м, 3 м, 4 м, 10 м. Для цієї задачі також характерні результати, що показують збільшення осідання паль при зменшенні відстані між ними (рис. 5). Як видно з графіка, найбільшу осадку отримують палі, відстань між якими в куці складає 1 м, а найменшу осадку – палі, відстань між якими 10 м в даному випадку. Але несуча здатність для різних відстаней майже однакова, на відміну від результатів другої задачі.

Крім того помітна менша різниця між кривими осідання ніж для попередньої задачі. Це пояснюється тим, що палі в куці з чотирьох паль мають менший вплив одна на одну ніж палі в масиві з 36 паль.

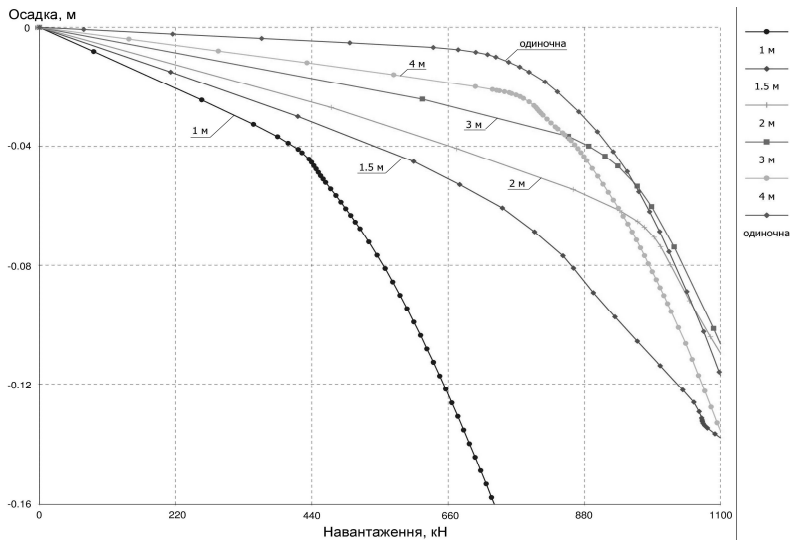


Рис. 3. Поле з 36 палей. Графіки залежності осідання від навантаження для різної відстані між палями

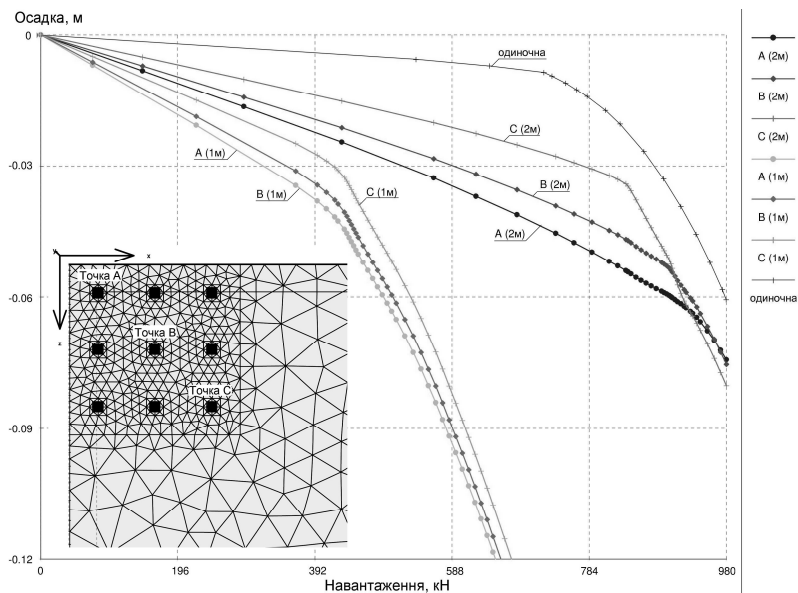


Рис. 4. Поле з 36 палей. Графіки залежності осідання від навантаження для різного розташування палей в полі

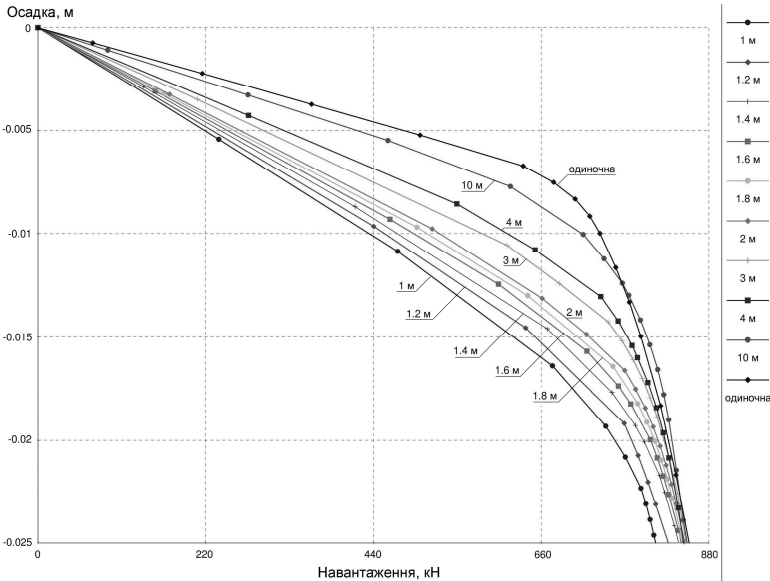


Рис. 5. Палеве поле з 4 палей. Графіки залежності осідання від навантаження для різної відстані між палями

На основі отриманих даних побудовано графік залежності жорсткості палей від відстані між ними в лінійній стадії роботи для задач з нескінченним полем палей, з 36 палями в кущі та з 4 палями в кущі (рис. 6). На ньому можна побачити, що для нескінченного поля палей жорсткість зростає при збільшенні відстані між палями до певної величини, після якої різниця у відстані між палями вже майже не впливає на жорсткість. Для інших задач графіки відрізняються в сторону зменшення загальної різниці величин жорсткості, що можна пояснити аналогічно попередньому порівнянню – чим менше палей в кущі, тим менший взаємний вплив одна на одну вони мають. На основі таких даних можна робити висновки про раціональну відстань між палями.

Розглянутий кущ з 16 палей при відстані між палями 1 м та порівняння результатів з постановками для 4х палей та 36ти палей при відстані між ними в 1 м. Для даної задачі також видно аналогічну залежність осідання палей, але вже від кількості палей у кущі при однаковій відстані між ними. На графіку (рис. 7) також показані криві осідання для тих же постановок, але з ростверком. Видно, що ростверк в даних задачах майже не впливає на результати осідання та несучої здатності.

Тобто чим більше палей в масиві, тим більшу осадку вони отримують

на відміну від масиву з меншою кількістю паль при однаковій відстані між палями в обох масивах. Тобто зменшення кількості паль в куці наближає результати несучої здатності та осадки до результатів, характерних одиночній палі.

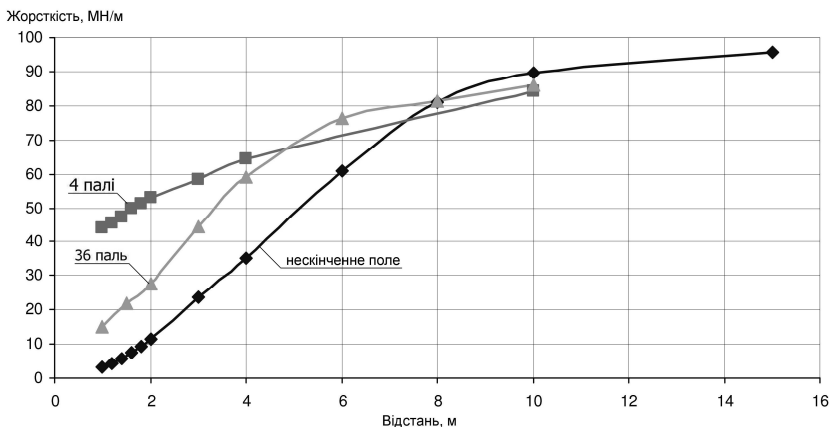


Рис. 6. Графік залежності жорсткості палі від відстані між палями для задач з різною кількістю паль в куці

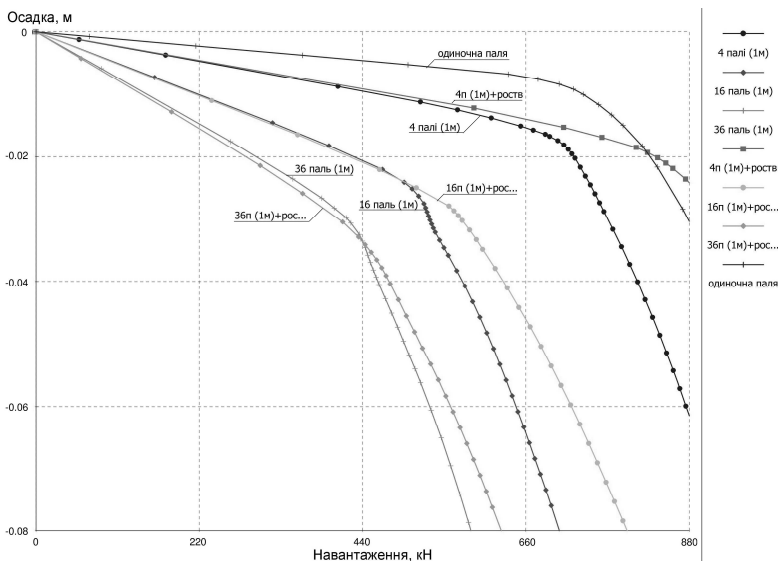


Рис. 7. Відстань між палями 1 м. Графіки залежності осідання від навантаження для різної кількості паль в куці

З отриманих результатів видно, що при збільшенні відстані між палями в куці їх жорсткість та несуча здатність наближається до результатів одиночної палі. При зменшенні кількості паль в куці їх характеристики також наближаються до характеристик одиночної палі.

Головний висновок, який можна зробити з отриманих даних, це те, що жорсткість паль залежить від їх взаємного розташування в пальному фундаменті, що не завжди враховується при розрахунках сучасними програмними комплексами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. СНиП 2.02.03-85 Свайные фундаменты.
2. СНиП 2.02.01-83 Основания зданий и сооружений.
3. Інженерна геологія. Механіка ґрунтів, основи та фундаменти: Підручник/ М.Л.Зоценко, В.І.Коваленко, А.В.Яковлев, О.О.Петраков, В.Б.Швец, О.В.Школа, С.В.Біда, Ю.Л.Винников. – Полтава: ПНТУ, 2004. – 568с.
4. *Цытович Н.А.* Механика грунтов. – М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1963. – 636 с.
5. *Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В., Тер-Мартirosян З.Г., Чернышев С.Н.* Механика грунтов, основания и фундаменты. – М.: АСВ, 1994. – 524 с.

Отримано 31.05.2010

Гоцуляк Е.А., Шельменко А.Н.

РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СВАЙ ПРИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ПЛИТНОМ ФУНДАМЕНТЕ

Выполнено исследование зависимости жесткости и несущей способности свай от разного их количества и расстояния между ними. Определено, что жесткость свай возрастает при увеличении расстояния между ними до некоторого предела. Потому размещение свай на расстоянии трех диаметров, как принято в нормативных документах, не всегда есть рациональным и для расчета свайных фундаментов не совсем верно принимать жесткость, полученную при испытании одиночной сваи.

Gotsuliak E.O., Shelmenko A. M.

CALCULATION OF LOAD BEARING CAPACITY OF THE PILES WHEN THEY INTERACT IN THE SLAB FOUNDATION

Completed calculation of stiffness and the bearing capacity of pile depending on different number of piles and the distance between them. Determined that the pile stiffness increases with increasing distance between them to a certain limit. Therefore, the disposition of piles at a distance of three diameters, as adopted in the regulations, is not always rational. Also for calculation of pile foundations is not quite right to take stiffness, which is obtained when tested a single pile.

УДК 539.3

М.О. Соловей, д.-р техн. наук
О.П. Кривенко, канд. техн. наук
О.О. Міщенко

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТА СТІЙКОСТІ ГРАНОВАНИХ ОБОЛОНОК СТУПІНЧАСТО- ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Порівнюються результати розрахунків, що виконані за моментною схемою скінченних елементів та зі застосуванням програмного комплексу ЛІРА при розв'язанні геометрично нелінійних задач стійкості пружних пологих гранованих панелей ступінчато-змінної товщини.

Задачам стійкості гладких пологих панелей, які є класичними в геометрично нелінійній теорії оболонок, присвячена численна література [1-11]. На цьому типі оболонок, здебільшого сталої товщини, досліджуються методи й алгоритми розв'язання нелінійних задач стійкості. Підвищення загальної жорсткості оболонкової конструкції (і відповідно її несучої спроможності) виконується за рахунок більш раціонального розподілу матеріалу в її об'ємі. Звичайно це досягається заміною сталої товщини оболонки на гладко-змінну [11 - 14] або ступінчато-змінну [11, 15 - 17]. Вплив на стійкість гнучких пологих панелей змінності товщини мало вивчений, що пояснюється складністю розв'язування подібних нелінійних задач.

Робота, яка є продовженням досліджень [18 - 20], присвячена порівнянню результатів розрахунків геометрично нелінійних задач стійкості пологих гранованих панелей ступінчато-змінної товщини, що отримані за моментною схемою скінченних елементів (МССЕ) [21 - 24] та зі застосуванням програмного комплексу (ПК) ЛІРА [25].

Методика [21 - 23] базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, положеннях МССЕ та застосуванні для тонких оболонкових конструкцій універсального просторового скінченного елемента (СЕ) [24]. Нелінійний розв'язок знаходиться комбінованим алгоритмом, який поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром із ітераційною процедурою Ньютона-Канторовича на кроці навантаження [26]. Метод розрахунку апробований на широкому класі тонких пружних оболонок неоднорідної структури при дії різних режимів термосилового навантаження [10, 11].

При розрахунках за ПК ЛПА скінченноелементна модель оболонки (СЕМО) апроксимувалася двома типами нелінійних оболонкових СЕ сталої товщини: у полюсі оболонки – трикутним СЕ № 342, а на інших ділянках – чотирикутним СЕ № 344 [25]. Співвідношення для СЕ оболонки отримані на основі теорії пологих оболонок [27]. Застосовано кроковий нелінійний процесор, який забезпечує розв'язок лінеаризованої системи рівнянь нелінійної задачі на кожному кроці приросту вектора вузлових навантажень із врахуванням зміни геометрії конструкції при її деформуванні.

У нелінійному процесорі ПК ЛПА на кроці навантаження відслідковується вироджуваність матриці лінеаризованої системи розв'язувальних рівнянь. Точка, в якій ця матриця вироджується, приймається за критичну. Подальший розрахунок припиняється, дослідження закритичного стану конструкції та аналіз типу особливих точок (розгалуження та критичних) не виконується.

У роботах [10, 11] були досліджені за МССЕ збіжність і точність розв'язків у задачах нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки пологих сферичних панелей лінійно-змінної товщини та гранованих ступінчасто-змінної товщини. У роботах [18, 19] ці розв'язки зіставлені з результатами розрахунків за ПК ЛПА. У всіх розглянутих задачах отримано гарний збіг розв'язків у докритичній області та незначне розходження в точках розгалуження та верхній критичній.

У даній роботі виконано порівняння розв'язків для гранованих оболонок ступінчасто-змінної товщини, які отримані при заміні криволінійної форми серединної поверхні гладкої осесиметричної сферичної панелі на грановану, а її лінійно-змінної товщини – на ступінчасто-змінну (рис. 1). У дослідженні порівнювалися конструкції, що відповідають гладким панелям з розподілом лінійно-змінної товщини, який, згідно з проведеними за МССЕ дослідженнями [11], є раціональнішим у задачах стійкості пологих сферичних панелей лінійно-змінної товщини. Для цих панелей характерним є потовщення їхньої центральної частини.

Дослідження виконувалися на прикладі панелей, що жорстко затиснуті вздовж контуру та навантажені рівномірним нормальним тиском інтенсивністю q (рис. 1, *a*). Прийняті наступні дані: вихідна (“базова”) товщина $h^* = 0.01$ м, стріла підйому $H = 5h^*$, радіус серединної поверхні $R = 1002.5h^*$, радіус опорного контуру $a = 100h^*$, модуль пружності $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. Результати розрахунків

подані з використанням безрозмірних параметрів $\bar{q} = q/E \cdot (a/h^*)^4$ та $\bar{u}^1 = u^1/h^*$, де u^1 – прогин центра панелі в декартовій системі координат $x^{i'}$.

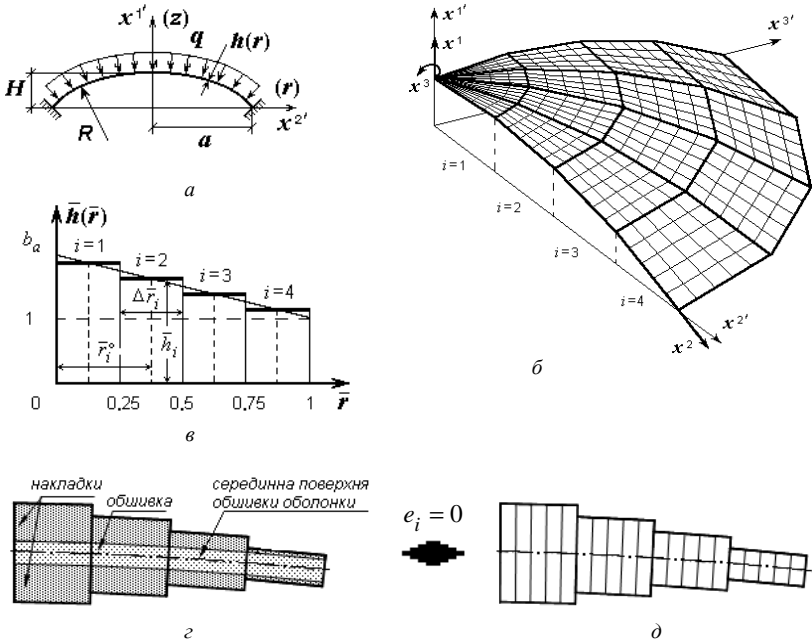


Рис. 1. Скінченноелементна модель гранованої панелі ступінчато-змінної товщини (а, б, в); схема неексцентричного розміщення накладок (г) та скінченних елементів (д) відносно серединної поверхні обшивки гранованої панелі

Розглянемо пологі оболонки з лінійно-змінним розподілом товщини. Спосіб заміни панелей лінійно-змінної товщини на грановані ступінчато-змінної товщини докладно описано в [11]. Суть заміни полягає в наступному. Криволінійна серединна поверхня осесиметричної сферичної панелі (рис. 1, а) замінювалася вписаною в неї гранованою поверхнею (рис. 1, б). Моделювання гранованої поверхні чверті оболонки реалізовано за допомогою 16 плоских граней (при поділі 4×4). Результати досліджень показали, що для забезпечення необхідної точності при апроксимації однієї плоскої грані достатньою є сітка 5×5 СЕ, а для всієї розрахункової СЕМО (чверті панелі) – 20×20 СЕ. Заміна безрозмірної

лінійно-змінної функції товщини $\bar{h}(\bar{r}) = h(\bar{r})/h^*$ наближеною до неї ступінчато-змінною показана на рис. 1, в. Функція розподілу ступінчато-змінної товщини подана на інтервалах $\Delta\bar{r}_i$ так:

$$\bar{h}(\Delta\bar{r}_i) = \bar{h}_i, \text{ при } \frac{1}{4}(i-1) \leq \Delta\bar{r}_i \leq \frac{1}{4}i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (1)$$

Безрозмірні параметри \bar{h}_i визначені як значення лінійно-змінної товщини на середині інтервалу $\Delta\bar{r}_i$ в точці $\bar{r}_i^o = \frac{1}{4}\left(i - \frac{1}{2}\right)$ за двома законами зміни товщини:

$$1) \bar{h}_i = 1 + \bar{r}_i^o(1 - b_o), \quad (2)$$

де $b_o = h_{\bar{r}=1}/h_{\bar{r}=0} \leq 1$, що відповідає потоншенню панелі на контурі $h_{\bar{r}=1}$, при незмінному значенні функції товщини в центрі $h_{\bar{r}=0} = h^*$;

$$2) \bar{h}_i = 1 + (b_a - 1)\left(1 - \bar{r}_i^o\right), \quad (3)$$

де $b_a = h_{\bar{r}=0}/h_{\bar{r}=1} \geq 1$, що відповідає потовщенню панелі в центрі $h_{\bar{r}=0}$, при незмінному значенні функції товщини на контурі $h_{\bar{r}=1} = h^*$.

При $b_o = b_a = 1$ маємо частинний випадок – грановану оболонку сталої товщини $\bar{h}_i = 1$.

У дослідженні розрахункова товщина грані h_i замінювалася на найближчу до неї товщину h_i^c з сортаменту плоского листового прокату [28]. Аналіз вихідних об'ємів V (об'єм вихідної гладкої оболонки лінійно-змінної товщини) та прийнятих V_{2p}^c (об'єм гранованої оболонки ступінчато-змінної товщини) показав, що виконана заміна практично не змінила величину об'єму оболонки. Відмінності між об'ємами перебувають в межах від -4.33% до $+0.22\%$.

На відміну від МССЕ побудова СЕМО ступінчато-змінної товщини за ПК ЛПА можлива лише з неексцентричним з'єднанням граней. Тому порівнювалися розрахунки для схеми СЕМО (рис. 1, д), у якій застосовується поєднання граней без ексцентриситету ($e_i = 0$) з симетричним додаванням накладок різної товщини до обшивки оболонки (рис. 1, з).

Порівняння нелінійних розв'язків МССЕ і ПК ЛІРА проведено для параметрів товщини $b_o = 0.55$, $b_o = b_a = 1$, $b_a = 2$ і 4 (рис. 2 і 3, табл. 1).

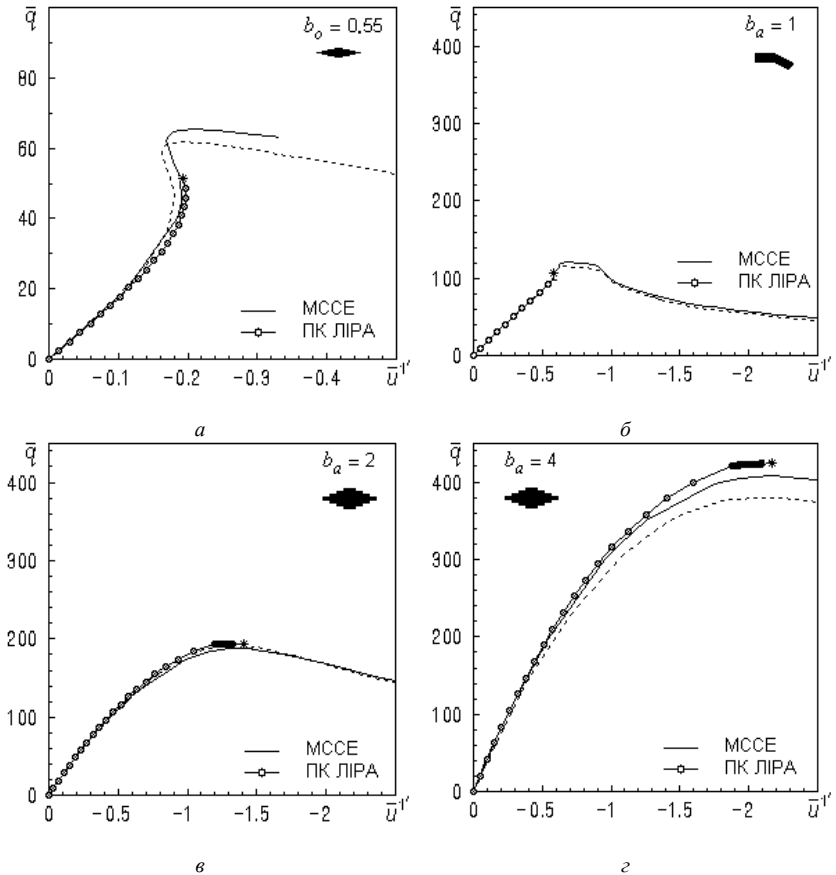


Рис. 2. Діаграми “навантаження-прогин в центрі” для гранованих оболонок ступінчато-змінної товщини

На діаграмах “навантаження–прогин” спостерігається гарний збіг розв'язків у докритичній області (рис. 2). Кінцева точка проведення розрахунку за ПК ЛІРА позначена зірочкою “*”. В точці розгалуження (для панелей з параметрами $b_o = 0.55$ і $b_o = b_a = 1$) розбіжність за величинами навантажень \bar{q}^* становить відповідно -0.18 і $+1.98$ %, за

прогинами \bar{u}^{1*} – +1.01 і +3.5 %. Для панелей з $b_a = 2$ і 4 маємо гарний збіг за величиною верхнього критичного навантаження $\bar{q}_{кр}^6$, для яких розбіжність становить відповідно +4.04 і +4.17 %, за прогинами \bar{u}^{1^6} – +7.53 і –0.78 %. Для порівняння впливу гранованості на рисунках наведено розв'язок, отриманий за МССЕ для гладкої панелі лінійно-змінної товщини, який позначено пунктирною лінією.

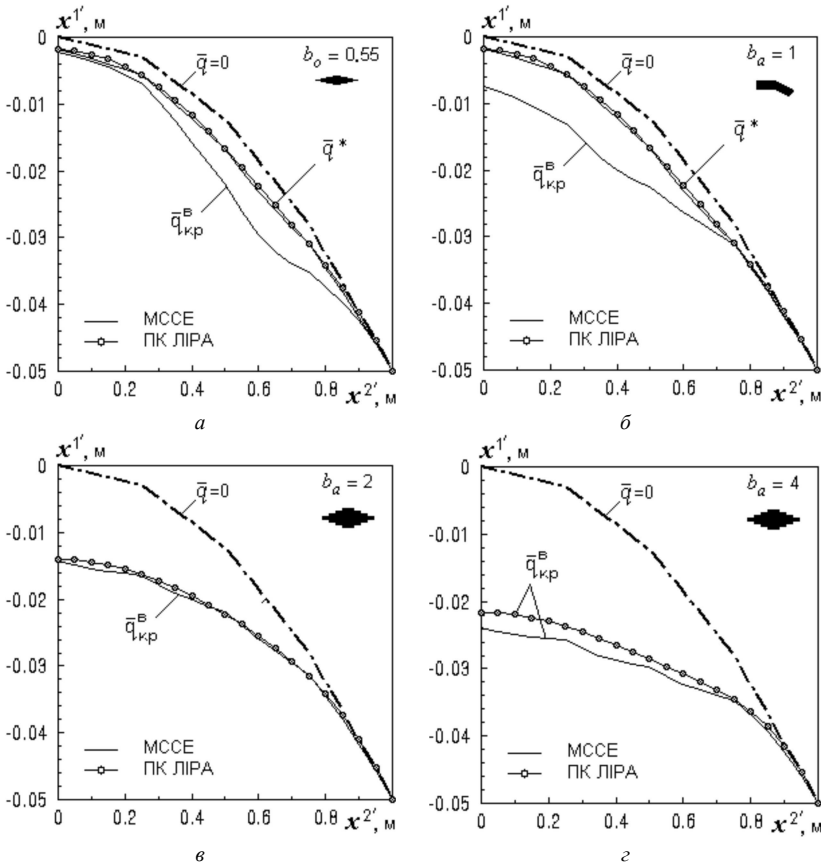


Рис. 3. Форми деформування гранованих оболонок ступінчато-змінної товщини

Гарний збіг отримано при порівнянні форм деформування гранованих панелей ступінчато-змінної товщини (рис. 3).

Таблиця 1

Порівняння розв'язків МССЕ і ПК ЛПА в особливих точках							
$b_o = 0.55$		$b_o = b_a = 1$		$b_a = 2$		$b_a = 4$	
\bar{q}^*	\bar{u}^{1*}	\bar{q}^*	\bar{u}^{1*}	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}_{кр}^{1e}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}_{кр}^{1e}$
МССЕ							
51.29	0.1881	101.0	0.5797	187.9	1.302	407.7	2.177
ПК ЛПА							
51.20	0.1900	103.0	0.6000	195.5	1.400	424.7	2.1600
$\Delta, \%$							
-0.18	1.01	1.98	3.50	4.04	7.53	4.17	-0.78

Таким чином, наведені розв'язки за МССЕ підтверджуються розв'язками за ПК ЛПА. Гарний збіг отриманих за МССЕ та ПК ЛПА результатів розрахунків нелінійного деформування та втрати стійкості гранованих оболонок різної ступінчасто-змінної товщини підтвердив можливість застосування при певних обмеженнях ПК ЛПА для дослідження нелінійної задачі стійкості розглянутого класу пологих оболонок.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Валишвили Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. - М.: Машиностроение, 1976. - 278 с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. - М.: Наука, 1967. - 984 с.
3. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. - М.: Наука, 1978. - 360 с.
4. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. - Львов: Вища школа, 1982. - 255 с.
5. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. - К.: Наукова думка, 1974. - 136 с.
6. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюкий, В.В.Киричевский и др.* - К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. - 480 с.
7. *Срубщик Л.С.* Выпучивание и послекритическое поведение оболочек. - Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1981. - 96 с.
8. *Феодосьев В.И.* Об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего равномерно распределенного давления // Прикл. мат. и мех., 1954. - Т. 18, N 1. - С. 35-42.
9. *Шилькрут Д.И., Вырлан П.М.* Устойчивость нелинейных оболочек. - Кишинев: Штиинца, 1977. 104 с.

10. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Прикладная механика, 2009. – 45, № 9. – С. 3-40.
11. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
12. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив змінної товщини на стійкість пологих панелей при дії рівномірного тиску // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Збірн. наук. праць. – Вип. 4(27).- Дніпропетровськ: "Сист. тех.", 2003. - С. 15-20.
13. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // Авиационно-космическая техника и технология. - 2004. - № 2 (10). - С. 18-20.
14. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість гладких пологих сферичних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 61–74.
15. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2003. - Вип. 72. - С. 83-96.
16. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Вплив нагріву на стійкість гранованих пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 75. – С. 91–97.
17. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Вплив режимів термосилового навантаження на стійкість і позакритичну поведінку оболонок сталюї та ступінчато-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 77. – С. 30–42.
18. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б.* Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості тонких пружних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2009. - Вип. 83. - С. 63-73.
19. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б., Томілко* Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2009. - Вип. 84. - С. 89-96.
20. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Дубина О.С.* Аналіз збіжності та точності розв'язків задачі згину пружної пластини методом скінченних елементів в учбовому комплексі // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2010. - Вип. 85. - С. 118-123.
21. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Нелінійні рівняння деформування тонких багатшарових поребричних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КДТУБА. - 1998. - Вип. 64. - С. 116-127.
22. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 1999. - Вип. 66. - С. 22-25.
23. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Аят Н.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах прочности и устойчивости гибких оболочек при термосиловых воздействиях // Проблемы прочности, 1999. - N 5. - С. 96-102.
24. *Соловей М.О.* Модифікований просторовий скінченний елемент для моделювання тонких неоднорідних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. - К.: КНУБА, 2006. - Вип. 80. - С. 96-113.

25. ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие. / *Е.Б. Стрелец-Стрелецкий, В.Е. Боговис, Ю.В. Гензерский, Ю.Д. Гераймович, Д.В. Марченко, В.П. Титок*. – К.: «Факт», 2008. – 164 с.
26. *Соловей Н.А.* Реализация алгоритма решения систем нелинейных уравнений в задачах устойчивости оболочек в вычислительном комплексе ПРОЧНОСТЬ-75 // Вычислительная и прикладная математика. 1987. - Вып.62. - С. 39-51.
27. *Городецкий А.С., Евзеров И.Д.* Компьютерные модели конструкций. – К.: Факт, 2007. – 394 с.
28. ГОСТ 82-70 (СТ СЭВ 2884-81). Сталь прокатная широкополосная универсальная. Сортамент. – Взамен ГОСТ 82-57; Введ. 01.01.72. – М.: Изд-во стандартов, 1983. – 6 с

Отримано 01.09.10

Соловей Н.А., Кривенко О.П., Мищенко О.А.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ГРАНЕНЫХ ОБОЛОЧЕК СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Сравниваются результаты расчетов, выполненных по моментной схеме конечных элементов и с применением программного комплекса ЛИРА при решении геометрически нелинейных задач устойчивости упругих пологих граненых панелей ступенчато-переменной толщины.

Solovey N.A., Kryvenko O.P., Myschenko O.A.

COMPARATIVE ANALYSIS OF A NONLINEAR DEFORMATION AND STABILITY OF SHALLOW SHELLS WITH THE STEPWISE -VARIABLE THICKNESSES

The outcomes of the analyses of geometrically nonlinear tasks of stability for elastic shallow shells with the stepwise-variable thickness, which are carried out by the moment scheme of finite elements and by the programming complex LIRA, are compared.

УДК 539.3

П.П. Чеверда, канд.техн.наук
О.В. Герашенко, канд.техн.наук
О.О. Міщенко

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ РЕАКЦІЇ ПРОСТОРОВОГО КАРКАСУ ВИСОТНОЇ БУДІВЛІ ПРИ ДІЇ СЕЙСМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Виконано порівняльний аналіз величин динамічної реакції просторового каркасу залізобетонної висотної будівлі при дії основного та аварійного сполучення навантажень. Висотна будівля моделювалась як просторовий скінченно-елементний каркас зі сталими жорсткістними характеристиками її несучих елементів при різних значеннях висоти будівлі. За допомогою програмного комплексу SCAD досліджувався вплив сейсмічного навантаження на максимальні значення зусиль та напружень в несучих елементах будівлі та на величини прогинів верхньої її частини. Аналіз результатів дослідження реакції просторового каркасу висотної будівлі свідчить про те, що дія сейсмічного навантаження суттєво впливає на несучу здатність та жорсткість будівлі в цілому.

Вірогідність результатів дослідження несучої здатності будівель та споруд в значній мірі залежить від точності моделювання розрахункових схем та формулювання рівнянь руху при дії динамічних навантажень. При динамічному впливі маси елементів конструкції отримують прискорення, які зумовлені силами інерції. Внаслідок наявності пружних та інерційних сил елементів розрахункових систем здійснюють коливальний рух, який викликає їх переміщення. Такі переміщення в декілька разів перевищують переміщення елементів конструкції від дії статичного навантаження.

Слід зазначити, що актуальним є дослідження впливу коливального руху на напружено-деформований стан будівлі при дії сейсмічного навантаження. Під час землетрусу відбуваються переміщення та коливання поверхні земної кори, які безпосередньо передаються через фундамент будівлі. Основною характеристикою розрахункової динамічної моделі є кількість незалежних параметрів, що визначають положення системи у будь-який момент часу в процесі руху. Кількість таких параметрів розрахункової динамічної моделі визначається мінімальним числом в'язей, які необхідно накласти на систему, щоб виключити рух усіх матеріальних точок, що мають масу. Перехід від розрахункової схеми до дискретної динамічної моделі з скінченим числом ступенів вільності за допомогою методу скінчених елементів (МСЕ)

базується на побудові функціоналу повної потенціальної енергії [3]. Для його побудови необхідно знайти диференційні оператори, які пов'язують між собою переміщення з напруженнями і деформаціями. При розрахунку стержневих систем розглядається одновимірне ізотропне тіло, для якого всі геометричні, фізичні компоненти напружено - деформованого стану є функціями одного аргументу. Це означає, що за основне припущення при побудові співвідношень теорії пружності прийнята гіпотеза плоских перерізів. Якщо стержнева система, на яку накладені кінематичні в'язі, знаходиться у рівновазі під дією прикладених сил, то згідно з принципом можливих переміщень сума можливих робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють у межах цієї системи, на будь-яких нескінченно малих можливих переміщеннях, які не заперечуються кінематичними в'язями дорівнює нулю. Так згідно з принципом Гамільтона коливання стержневої системи [1, 2] можна записати у наступному вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (1)$$

де T – загальна кінетична енергія системи; U – потенціальна енергія системи, що включає енергію деформації та потенціал будь-яких консервативних зовнішніх сил; A – робота, яку виконано неконсервативними силами, що діють на систему, враховуючи затухання та інші довольні зовнішні навантаження.

При переході від розрахункової схеми до скінченно елементної моделі рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \sum_{e=1}^n T^e - \delta \sum_{e=1}^n U^e \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \sum_{e=1}^n A^e dt = 0, \quad (2)$$

де n – число скінченних елементів моделі, T^e – кінетична енергія, U^e – потенціальна енергія деформації, A^e – робота неконсервативних сил в елементі e . Для прийнятої скінченно-елементної моделі переміщення в межах кожного елемента виражаються за допомогою вектора вузлових переміщень елемента $\bar{\delta}(t)$ та через координатні функції Φ_i . Так після певних перетворень отримаємо відносно вектора вузлових переміщень $\bar{\delta}(t)$ систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{e=1}^n \overline{f_I^e(t)} - \sum_{e=1}^n \overline{f_S^e(t)} + \sum_{e=1}^n \overline{f_D^e(t)} + \sum_{e=1}^n \overline{q^e} = 0, \quad (3)$$

де $f_I^e(t)$, $f_S^e(t)$, $f_D^e(t)$, q^e - доданки, що позначають відповідні елементи e вектори узагальнених сил інерції, узагальнених пружних сил, узагальнених сил опору та узагальнених навантажень.

Система диференціальних рівнянь (3) потребує побудови матриці мас M , матриці жорсткості K , матриці демпфірування C для всієї скінченно-елементної моделі, а також вектора вузлового навантаження \bar{q} . Для цього спочатку формують відповідні матриці M_e, K_e, C_e для кожного скінченного елемента окремо, а потім, підсумовуючи, отримуємо матриці та вектор навантаження для всієї дискретної моделі.

Розрахунок будівель як пружних систем від дії землетрусу базується на статичному і динамічному методах або з використанням спектральної теорії щодо обчислення складових сейсмічного навантаження, які входять до рівняння руху (3). Так за статичною теорією сейсмостійкості [4] споруда коливається з такими ж параметрами, що й основа фундаменту, а величина такого навантаження обчислюється за формулою:

$$S = m \cdot a = K_c \cdot Q, \quad (4)$$

де m, Q – маса і вага споруди; a – максимальне прискорення поверхні ґрунту; $K_c = a/g$ – коефіцієнт сейсмічності; g – прискорення сили тяжіння.

За динамічною теорією сейсмостійкості основа фундаменту будівлі отримує сталі гармонійні коливання, а сейсмічне навантаження визначаються з урахуванням деформації споруди за формулою:

$$S = K_c \cdot \beta \cdot Q, \quad (5)$$

де β – коефіцієнт динамічності.

Спектральна теорія розрахунку складових сейсмічного навантаження передбачає побудову за даними дослідження землетрусу спектральної кривої залежності прискорення будівлі, як системи з однією ступеню вільності, і періодом її власних коливань при переміщенні основи будівлі за законом, що відповідає реальному землетрусу. В роботі [5] для систем з n зосередженими масами закон руху ґрунту виражається як сума затухаючих синусоїд:

$$y_0 = \sum_{j=1}^n a_{0j} e^{-\varepsilon_{0j} t} \sin(\omega_j t + \varphi_j), \quad (6)$$

де y_0 - переміщення ґрунту; a_{0j} - початкова амплітуда; $e^{-\varepsilon_0 j}$ - коефіцієнт затухання коливань руху; ω_j - кутова частота коливань ґрунту; φ_j - кут. Сейсмічна сила, яка виникає в точці k будівлі при коливанні її по i -й формі, після перетворень (6) обчислюється за формулою:

$$S_{ik} = \frac{a_0 \omega^2}{g} \beta_i \frac{X_{ik} \sum_{m=1}^n Q_m X_{im}}{\sum_{m=1}^n Q_m X_{im}^2}, \quad (7)$$

де Q_m - зосереджена вага будівлі в точці m ; X_{ik} - відхилення k -ї точки будівлі при коливанні її по i -й формі; β_i - коефіцієнт динамічності.

В даній роботі визначення величин сейсмічного навантаження виконано за методикою [6], згідно з якою розрахункові значення горизонтального сейсмічного навантаження S_{ki} , прикладеного до точки k і яке відповідає i -й формі власних коливань будівлі або споруди згідно з рис. 1 обчислюються за формулою:

$$S_{ki} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot S_{oki}, \quad (8)$$

де k_1 - коефіцієнт, що враховує не пружні деформації і локальні пошкодження елементів будівлі; k_2 - коефіцієнт відповідальності споруди; k_3 - коефіцієнт, що враховує поверховість будівлі більше 5 поверхів. Коефіцієнт k_3 обчислювався за формулою:

$$k_3 = 1 + 0,06 \cdot (n - 5), \quad (9)$$

де n - кількість поверхів в будівлі; S_{oki} - горизонтальне сейсмічне навантаження за i -ю формою власних коливань споруди, що визначається у припущенні пружного деформування

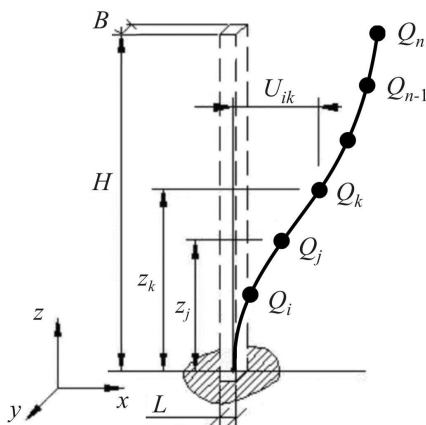


Рис. 1. Розрахункова модель

конструкцій за формулою:

$$S_{oki} = Q_k \cdot a_0 \cdot k_{2p} \cdot \beta_i \cdot \eta_{ki}, \quad (10)$$

де Q_k - навантаження, що відповідає зосередженій масі у точці k ; a_0 - відносне прискорення ґрунту, яке приймається рівним 0,05; 0,1; 0,2 і 0,4 відповідно для районів сейсмічністю 6, 7, 8 і 9 балів; k_{zp} - коефіцієнт, що враховує нелінійне деформування ґрунтів; β_i - спектральний коефіцієнт динамічності, що відповідає i -ій формі власних коливань будівлі; η_{ki} - коефіцієнт, що залежить від форми власних коливань будівлі або споруди. Для жорстко закріпленого в основі стержня (рис. 1) коефіцієнт η_{ki} визначається за формулою:

$$\eta_{ki} = \frac{U_i(z_k) \sum_{j=1}^n Q_j U_i(z_j)}{\sum_{j=1}^n Q_j U_i^2(z_j)}, \quad (11)$$

де $U_i(z_k)$ і $U_i(z_j)$ - переміщення будівлі або споруди при власних коливаннях за i -ю формою; n - число зосереджених навантажень.

Виконано порівняльний аналіз величин динамічної реакції каркасу висотної просторової будівлі при зміні її висоти від 24 до 144 м, а також пружно-деформованого жорстко закріпленого в основі стержня відповідних висот при дії основного та аварійного сполучення навантажень. Так для дослідження просторового каркасу будівлі приймалися наступні вихідні дані: район будівництва - м. Київ, матеріал конструктивних елементів - бетон класу В25, висота h поверху будівлі 3,0 м. Висотна будівля, яка представлена на рис. 2, моделювалась як просторовий залізобетонний монолітний каркас з розмірами в плані по довжині L 24 м, а по ширині B 12 м з сіткою колон 6,0×6,0 м. Колони будівлі з розмірами в плані 0,5×1,0 м розглядаються як стержні постійної жорсткості по висоті, а плити перекриття як скінченно-елементні пластини прямокутної форми з розмірами в плані 1,5×1,5 м та товщиною 0,2 м. Розрахунок виконувався з використанням програмного комплексу SCAD на основне і аварійне сполучення навантажень згідно з [7], яке враховувало постійне навантаження, змінні тривалі та короточасні навантаження. Значення реакцій моделі просторового каркасу висотної будівлі представлені на рис. 3 і рис. 4. Крива 1 на рис. 3 відображає величини максимальних згинальних

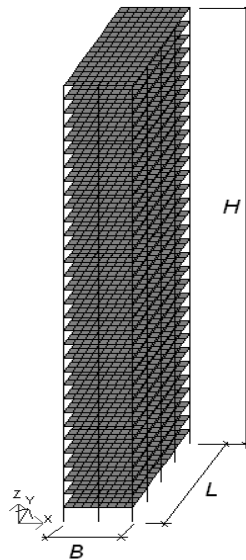


Рис. 2. Розрахункова просторова модель

моментів відносно осі U , які виникають у колонах моделі при дії основного сполучення навантажень, а крива 2 - при дії аварійного сполучення навантажень.

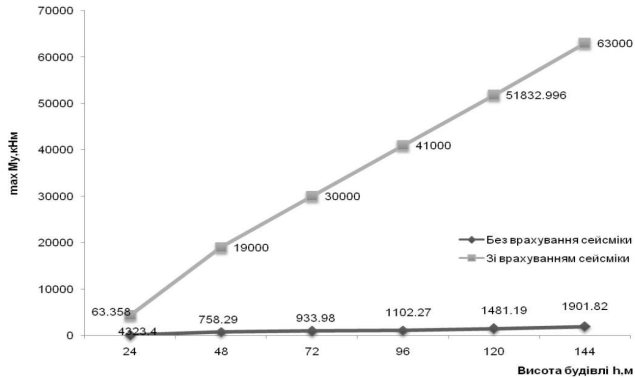


Рис. 3. Графік залежності максимального згинального моменту від зміни висоти будівлі

На рис. 4 крива 3 та крива 4 характеризують величини прогинів верхньої частини просторового каркасу в залежності від зміни висоти H будівлі від 24 до 144 м.

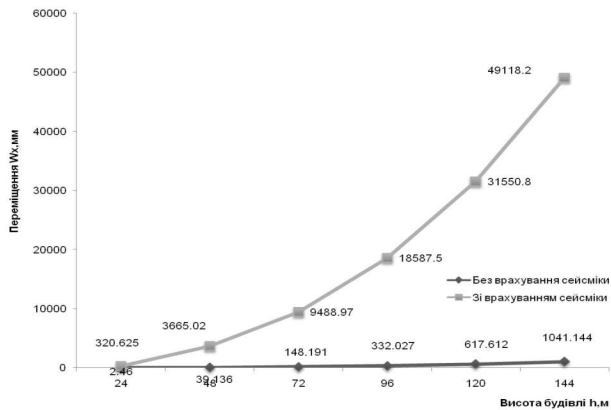


Рис. 4. Графік залежності прогину верхньої частини будівлі від зміни її висоти

Аналіз результатів дослідження реакції просторового каркасу висотної будівлі свідчить про те, що значення зусиль максимальних згинальних

моментів при сталих жорсткісних характеристиках згідно з рис. 3 не суттєво залежать від зміни висоти будівлі при дії основного сполучення навантажень, а при дії аварійного сполучення навантажень значення згинальних моментів збільшились в більш ніж в десять разів. Щодо деформації будівлі, то як показують результати, які зображені на рис. 4, прогини верхньої частини будівлі при дії основного сполучення навантажень збільшуються майже лінійно.

Однак деформації, які виникають в елементах конструкції при дії аварійного сполучення навантажень, в десятки разів перевищують деформації будівлі від дії основного сполучення навантажень.

На рис. 3 представлено графіки залежності висоти будівлі H і максимальних переміщень в напрямку осі X . Крива 1 на даному рисунку характеризує переміщення верхньої точки просторового каркасу будівлі, а крива 2 переміщення верхньої точки жорстко закріпленого стержня. Ізолінії напружень плити перекриття на першому поверсі наведені на рис. 5.

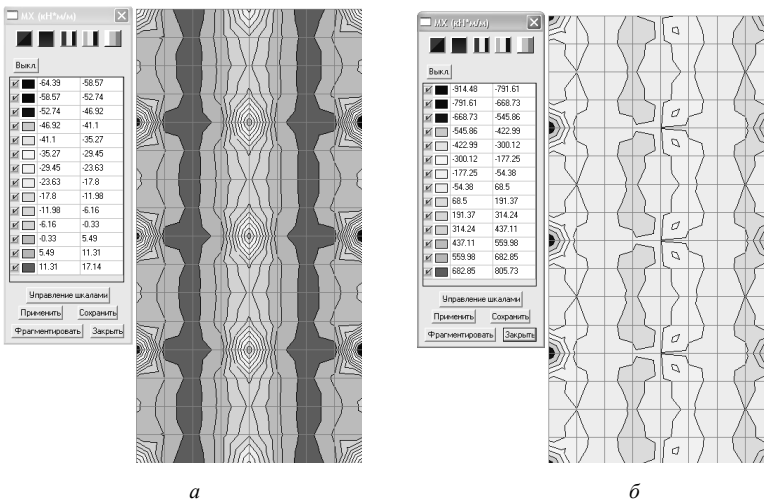


Рис. 5. Ізолінії напружень плити перекриття на першому поверсі:
а) основне сполучення навантажень; б) аварійне сполучення навантажень

В результаті можна зробити висновок, що на сьогодні при висотному будівництві є необхідним врахування сейсмічного навантаження. На прикладі було продемонстровано вплив аварійного сполучення навантажень на внутрішні зусилля. Для зменшення величин напружень необхідно проектувати багатоповерхові будівлі з ядрами жорсткості та з

жорсткою конструктивною схемою, особливо в сейсмічно небезпечних районах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С.* Будівельна механіка. Динаміка споруд. Навч. посібник.- К.: ЗМН, 1998. -208с.
2. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології: Підручник/ За заг. ред. д.т.н., проф. В.А.Баженова.-К.: Каравела, 2009. -696 с.
3. *Легостаєв А.Д.* Метод скінчених елементів. Конспект лекцій.-К.:КНУБА, 2004.-112с.
4. *Biot M.A.* Mechanical Analysis for the Prediction of Earthquake Stresses, Bulletin of the Seis. Sos. of America. Vol.31, No. 2, 1941.
5. *Корчинский И.Я., Шенелев В.Ф.* Расчет высотных зданий на сейсмические воздействия с учетом их протяженности.- Строительное проектирование промышленных зданий, 1965, №2.
6. ДБН В.1.1-12:2006. Будівництво у сейсмічних районах України. Норми проектування. Мінбуд України, 2006.
7. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. Норми проектування. Мінбуд України, 2006.

Отримано 31.05.2010

Чеверда П.П., Міщенко О.А., Геращенко О.В.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КАРКАСА ВЫСОТНОГО ЗДАНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ СЕЙСМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Выполнен сравнительный анализ величин динамической реакции пространственного железобетонного высотного здания при действии основной и аварийной комбинации нагрузок. Высотное здание моделировалось как пространственный конечно-элементный каркас с несущими элементами постоянной жесткости для различных значений высоты здания. С помощью программного комплекса SCAD выполнено исследование влияния сейсмической нагрузки на максимальные значения усилий и напряжений в несущих элементах здания и на значения прогибов верхней ее части. Анализ результатов исследования реакции пространственного каркаса высотного здания свидетельствует о том, что действие сейсмической нагрузки существенно влияет на ее несущую способность и жесткость здания в целом.

Cheverda P.P., Mishchenko O.O., Grashchenko O.V.

RESEARCH OF DYNAMIC REACTION OF SPATIAL FRAMEWORK OF HEIGHT BUILDING AT ACTION OF SEISMIC LOADING

The comparative analysis of sizes of dynamic reaction of a spatial ferro-concrete high-rise building is made at action of the basic and emergency combination of loadings. The high-rise building was modelled as a spatial is final-element skeleton with bearing elements of constant rigidity for various values of height of a building. By means of program complex SCAD research of influence of seismic loading on the maximum values of efforts and pressure in bearing elements of a building and on values of deflections of its top part is executed. The analysis of results of research of reaction of a spatial skeleton of a high-rise building testifies that action of seismic loading essentially influences its bearing ability and rigidity of a building as a whole.

УДК 539.3

І.Г. Гаран

СТІЙКІСТЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ СКЛОПЛАСТИКОВИХ ОБОЛОНОК З ГОФРОВАНИМИ СТІНКАМИ ПРИ ДІЇ ПОВЕРХНЕВОГО ТИСКУ

Досліджена стійкість оболонки при дії поверхневого тиску. Оцінено вплив амплітуд гофрів на значення критичного навантаження для оболонки з різними варіантами армування її стінки. Підтверджено що гофрування циліндричної оболонки у поперечному напрямі позитивно впливає на її стійкість при дії поверхневого тиску.

У сучасній техніці використовуються гофровані оболонкові елементи. Надання оболонкам певної форми є одним із способів впливу на їх жорсткість при проектуванні оболонкових конструкцій, на які діють експлуатаційні навантаження. У випадку дії поверхневого тиску на циліндричні оболонки застосовують гофрування у поперечному напрямі. При належному виборі параметрів хвилястості можна значно збільшити стійкість оболонок, і тим самим задовольнити необхідність максимального використання ресурсів міцності та економії матеріалу [1-3].

В роботі розглянута стійкість склопластикових оболонок при дії поверхневого тиску, утворених обертанням навколо осі Z спряжених дуг кіл, заданих у площині X, Z рівнянням (1), що спираються на базову циліндричну поверхню радіуса R_0

$$X = R_0 + Hf(Z), \quad (1)$$

$$f(z) = 1 - \frac{R_1}{H} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(Z - L/2m)^2}{R_1^2}} \right), \quad (2)$$

$$R_1 = \frac{1}{2H} \left(H^2 + (L/2m)^2 \right), \quad (3)$$

де R_0 – радіус вихідної циліндричної поверхні, $f(z)$ – функція яка визначає профіль хвилі, L – висота циліндра, m – ціле число, H – амплітуда хвилі.

В розрахунку було прийнято такі параметри: радіус циліндричної оболонки $R_0 = 1$ м, товщина стінки $t = 1$ см, висота $L = 2$ м, кількість дуг кола $m = 4$. Амплітуду H варіюємо в межах від 0 до 25см. Необхідні для розрахунку модулі матеріалу $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ і коефіцієнт Пуассона ν_{12} визначено по заданим параметрам скловолокна $E_a = 70$ ГПа, $\nu_a = 0.2$, та

в'язучого $E_s = 3.15 \text{ ГПа}$, $\nu_s = 0.382$. Об'ємний вміст волокон $\xi = 0.7$, кут армування $\theta = 0$ [1].

Скінченноелементна модель оболонки формується в циліндричних координатах [4]. Стінки оболонки моделюються чотирикутними скінченними елементами з такими фізико-механічними характеристиками: $E_1=49.972 \text{ ГПа}$, $E_2=14.102 \text{ ГПа}$, $\nu_{12}=0.24767$, $G_{12}=G_{13}=5.32377$, $G_{23}=4.77733$. У вузлах верхньої кромки моделі оболонки накладаються в'язі, що обмежують переміщення по радіусу та по колу, а у вузлах нижньої кромки - по трьом циліндричним координатам. На рис. 1 зображені скінченноелементні моделі гладкої ($H=0$) та гофрованої ($H=12\text{см}$) циліндричної оболонки.

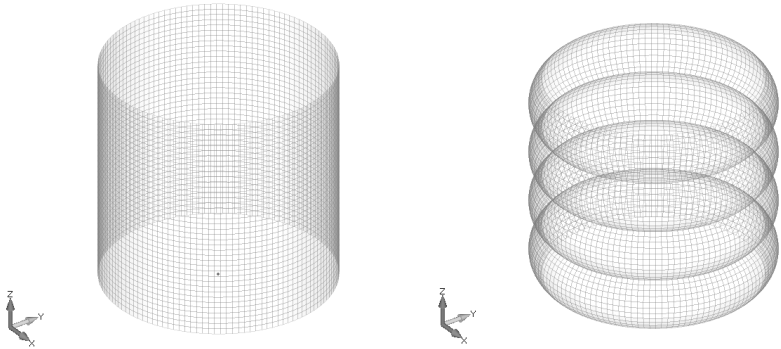


Рис. 1. Скінченноелементна модель гладкої та гофрованої циліндричної оболонки

Досліджено стійкість досконалої циліндричної оболонки ($H=0$) та оболонки з різними амплітудами гофрів. Розглянуто два випадки орієнтації волокон в матеріалі. У першому випадку волокна орієнтовані вздовж твірної оболонки, у другому – по колу. Гладка циліндрична оболонка втрачає стійкість при $q_{кр} = 0.093 \text{ МПа}$ у випадку орієнтації волокон вздовж твірної (рис. 2), і при $q_{кр} = 0.187 \text{ МПа}$ у випадку орієнтації волокон по колу (рис. 3). У першому випадку кількість хвиль по колу $n = 7$, у другому $n = 6$. На рис. 4 та рис. 5 зображені форми втрати стійкості гофрованої оболонки при $H = 12\text{см}$, що армована вздовж твірної та по колу відповідно. Як і у випадку з гладкою циліндричною оболонкою, гофровані оболонки при однакових амплітудах гофрів, але при різній орієнтації матеріалу мають різні значення критичного навантаження та форми втрати стійкості. Результати розрахунків визначення критичного навантаження оболонки з різними значеннями амплітуди H зведені в табл. 1. На рис. 6 наведені графіки залежності критичних навантажень від амплітуди хвилі H та орієнтації скловолокна. По осі абсцис відкладені значення амплітуди H , по осі ординат – значення критичного навантаження $q_{кр}$.

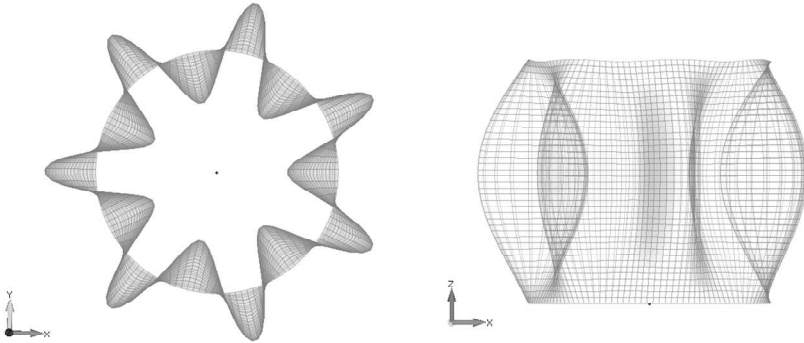


Рис. 2. Форма втрати стійкості циліндричної оболонки армованої вздовж твірної ($H=0$; $q_{кр}=0.093$ МПа)

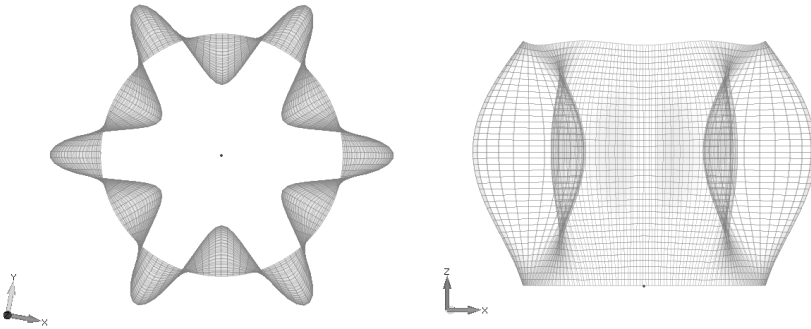


Рис. 3. Форма втрати стійкості циліндричної оболонки армованої по колу ($H=0$; $q_{кр}=0.187$ МПа)

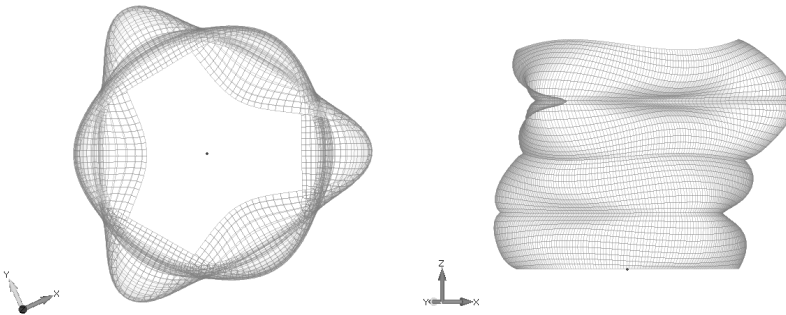


Рис. 4. Форма втрати стійкості гофрованої оболонки армованої вздовж твірної ($H=12$ см; $q_{кр}=0.842$ МПа)

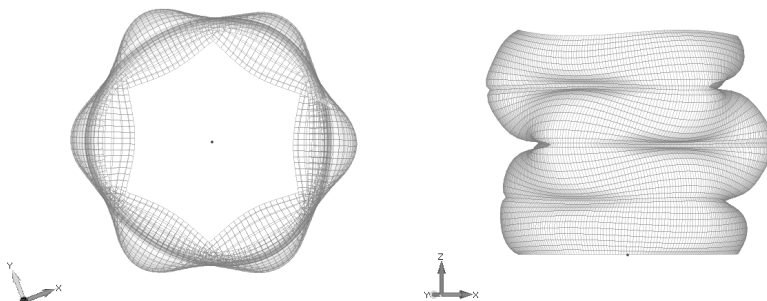


Рис. 5. Форма втрати стійкості гофрованої оболонки армованої по колу ($H=12\text{см}$; $q_{\text{кр}}=1.028\text{ МПа}$)

З графіків видно, що в основному зі збільшенням амплітуди гофри оболонка стає більш стійкою до впливу поверхневого тиску. Значення критичних навантажень при однаковій амплітуді H для оболонки, волокна якої орієнтовані по колу, більші ніж для оболонки з армуванням по твірній, окрім $H = [23 - 25]\text{см}$.

Порівняємо відношення критичних значень навантажень для гофрованих оболонок до відповідних критичних значень навантажень для гладких циліндричних оболонок у точках максимуму для двох кривих. Максимальне значення критичного навантаження для оболонки, що армована по колу, спостерігається при $H = 20\text{см}$ і становить $q_{\text{кр}} = 1.152\text{ МПа}$, для оболонки з армуванням по твірній – $H = 24\text{см}$, $q_{\text{кр}} = 1.161\text{ МПа}$. Критичні навантаження відповідно у 6 та 10 разів більші ніж значення, що отримані для гладких оболонок.

Таблиця 1

H , м	арм. по твірній q_c , Па	арм. по колу q_c , Па	H , м	арм. по твірній q_c , Па	арм. по колу q_c , Па	H , м	арм. по твірній q_c , Па	арм. по колу q_c , Па
1	2	3	1	2	3	1	2	3
0.00	92598	186744	0.09	514867	669946	0.18	866471	1099853
0.01	95085	167883	0.10	616820	760422	0.19	900572	1144202
0.02	125625	189520	0.11	730084	859526	0.20	950266	1151833
0.03	188567	217393	0.12	842391	1028111	0.21	1013567	1142771
0.04	223136	304136	0.13	949271	1046667	0.22	1083759	1139591
0.05	305810	380859	0.14	979757	983822	0.23	1150240	1128627
0.06	373872	402331	0.15	906010	970305	0.24	1161416	1062397
0.07	384608	469311	0.16	863783	992988	0.25	1125051	1022744
0.08	434753	563691	0.17	852853	1042120			

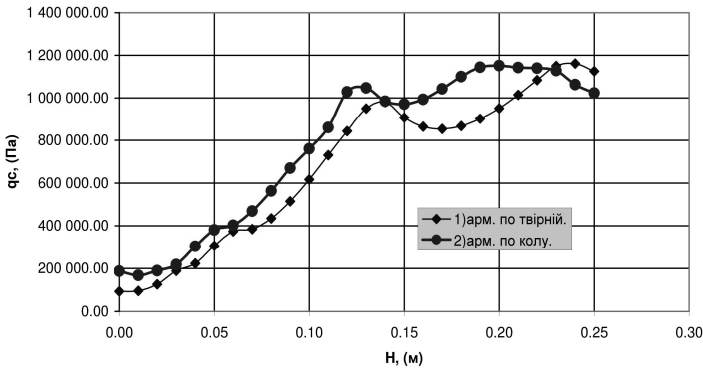


Рис. 6. Залежність критичного навантаження від амплітуди хвилі H

Результати розрахунків підтверджують, що гофрування циліндричної оболонки у поперечному напрямі позитивно впливає на її стійкість від дії поверхневого тиску [3]. Порівнюючи відношення $q_{кр}/q_{кр}^0$ для оболонок з армуванням по твірній та по колу, видно, що на перші у більшій мірі впливає наявність гофрів. Також цікавим є те, що збільшення амплітуди гофрів H неоднозначно впливає на зміну критичного навантаження, що можна пояснити зміною форм втрати стійкості при певних змінах значення H .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ванин Г.А., Семенов Н.П., Смелянов Р.Ф.* Устойчивость оболочек из армированных материалов – К.: Наук. думка, 1978. – 212с.
2. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек – М.: Наука, 1974. – 448с.
3. *Семенов Н. П., Жукова Н. Б., Бабич И. Ю.* Устойчивость поперечно гофрированных цилиндрических оболочек при равномерном поверхностном давлении // Теор. и прикл. механика. – 2009. 45. – С.106–113.
4. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.– 448 с.

Отримано 31.05.2010

Гаран И.Г.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ОБОЛОЧЕК С ГОФРИРОВАННЫМИ СТЕНКАМИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Исследована устойчивость оболочки при действии поверхностного давления. Оценено влияние амплитуд гофр на значение критической нагрузки для оболочки с разными вариантами армирования ее стенки. Подтверждено что гофрирование цилиндрической оболочки в поперечном направлении положительно влияет на ее устойчивость при действии поверхностного давления.

Garan I.G.

STABILITY OF CYLINDRICAL FIBERGLASS SHELLS WITH CORRUGATED WALLS UNDER THE INFLUENCE OF SUPERFICIAL PRESSURE

Performed investigation of stability of the shell under the influence of superficial pressure. Influence of amplitudes of corrugation on the value of critical load for shell with variations of reinforcing its walls is evaluated. Confirmed that the corrugation of the cylindrical shell in the transverse direction has a positive effect on its stability under the influence of superficial pressure.

УДК 624.034

С.Й. Цимбал, канд. техн. наук
 М. Шахмохаммаді

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ГРУНТОВИХ ОСНОВ ФУНДАМЕНТІВ ВІД ГОРИЗОНТАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Наведено вирішення задачі про розподіл напружень в пористому середовищі, яким є ґрунти, від горизонтальної зосередженої сили, прикладеної до поверхні з урахуванням стану ґрунтів; проведено порівняльний аналіз розподілу напружень в суцільному і пористому середовищах; показано вплив пористого ґрунту на формування напружень в основі стрічкових фундаментів.

Підпірні стіни, портали, рампи і позакентрово навантажені фундаменти споруд різного призначення сприймають значні горизонтальні навантаження. Ці споруди знаходяться в досить складних умовах роботи, що залежать від багатьох факторів, одні з яких ще не досить добре вивчені, а інші важко піддаються математичному опису. До недостатньо вивчених відноситься характер розподілу напружень в основі від горизонтального навантаження (рис. 1).

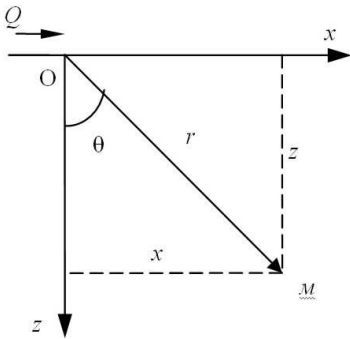


Рис. 1. Схема до визначення напружень від горизонтальної зосередженої сили, яка діє на поверхні

Спочатку розглянемо задачу розподілу напружень в ґрунтах від горизонтальної зосередженої сили, що діє на поверхні з урахуванням стану ґрунтів. В основу рішення прийнята методика розроблена Фламаном, тобто складові напружень визначаються через функцію напружень, в яку додатково нами введено двочлен $(1 + k \cdot \exp^{-\theta^2})$

який враховує стан ґрунту:

$$\varphi = \frac{Qr}{\pi} \cdot (1 + k \cdot \exp^{-\theta^2}) \cdot \theta \cdot \cos \theta, \quad (1)$$

де k - коефіцієнт пористості ґрунту.

Функція напружень (1) задовольняє рівнянням рівноваги і сумісності. Після диференціювання функції напружень отримаємо формули для

визначення нормальних і дотичних напружень в прямокутній системі координат.

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{-2Qke^{-\operatorname{atan}(x/z)^2} z^2}{\pi \cdot (x^2 + z^2)^2} \cdot \left[-x \cdot \left(1 + \frac{1}{ke^{-\operatorname{atan}(x/z)^2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot \operatorname{atan}(x/z) \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}(x/z)^3 \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}(x/z)^2 \cdot x \right], \\ \sigma_x &= \frac{-2Qke^{-\operatorname{atan}(x/z)^2} x^2}{\pi \cdot (x^2 + z^2)^2} \cdot \left[-x \left(1 + \frac{1}{ke^{-\operatorname{atan}(x/z)^2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot \operatorname{atan}(x/z) \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}(x/z)^3 \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}(x/z)^2 \cdot x \right], \quad (2) \\ \tau_{xz} &= \frac{-2Qke^{-\operatorname{atan}(x/z)^2} (x \cdot z)}{\pi \cdot (x^2 + z^2)^2} \cdot \left[-x \left(1 + \frac{1}{ke^{-\operatorname{atan}(x/z)^2}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot \operatorname{atan}(x/z) \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}(x/z)^3 \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}(x/z)^2 \cdot x \right].\end{aligned}$$

Можна упевнитися в тому, що коли значення параметра стану ґрунту прийняти $k = 0$, формули (2) переходять до відомого вирішення задачі для ізотропного середовища.

На рис. 2 наведено порівняння характеру розподілу напружень в пористому у суцільному середовищах по лінії дії горизонтальної зосередженої сили $Q=1$ (по осі x), прикладеної на поверхні, приймаючи пористе середовище – пісок пилюватий з коефіцієнтом пористості $K=0,7$. Напруження σ_z в пористому і суцільному середовищах максимальної величини досягають на відстані $x=0,5$ м, але перші в 1,67 раза більші від останніх але на 1,4 м напруження мають однакову величину. При подальшому віддаленні від зосередженої сили напруження в суцільному середовищі перевищують напруження в пористому середовищі перевищують напруження в пористому середовищі.

Характер розподілу напружень σ_x майже відповідає напруженню σ_z , але при відстані 1 м в суцільному середовищі напруження більші від напружень в пористому середовищі на 44%.

Дотичні напруження в суцільному середовищі в інтервалі від 0...1,4 м перевищують дотичні напруженні в пористому середовищі, максимальна різниця між ними складає 167% при відстані від дії горизонтальної сили на 0,5 м (4).

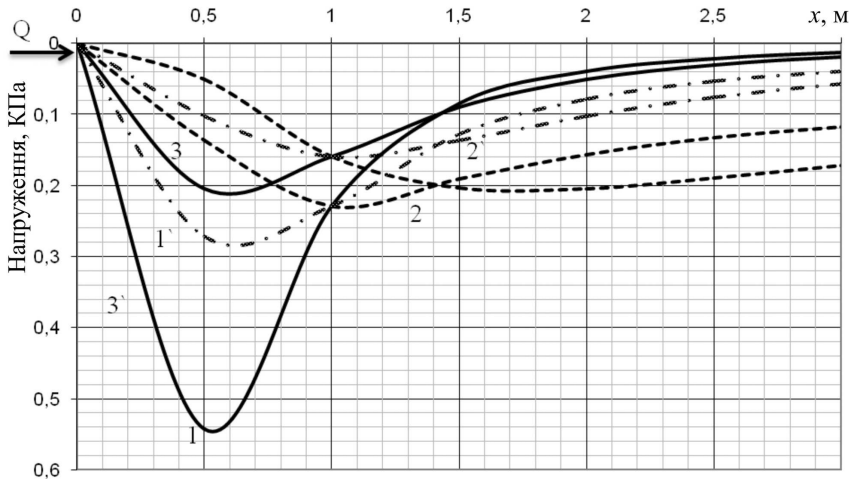


Рис. 2. Епюри напружень відповідно 1, 1' - σ_z ; 2, 2' - σ_x ; 3, 3' - τ_{xz} , зі знаком штрих в суцільному середовищі, а без нього в пористому

Отримані формули для напружень від дії зосередженого навантаження (2) можуть бути використані на випадок полосового навантаження, рівномірно розподіленим по підшві стрічкового фундаменту шириною $2b$ (рис. 3). Вони дозволяють отримати аналітичні вирази тензора напружень у вигляді інтегралів по області, яку займає підшва

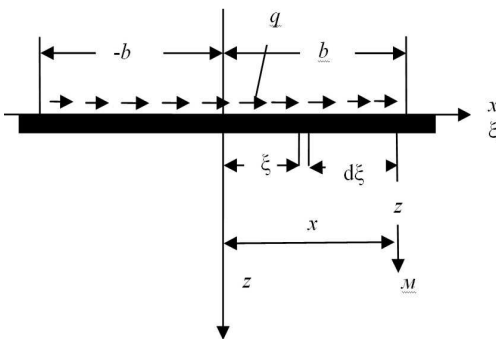


Рис. 3. Схема рівномірно розподіленого горизонтального навантаження, прикладеного до поверхні основи

стрічкового фундаменту. Але безпосереднє визначення цих компонентів пов'язано з великими труднощами. Складність полягає в тому, що підінтегральні вирази виключають можливість визначення їх в аналітичному вигляді і одержання, відповідно, виразів для вище згаданих компонентів. У зв'язку з цим в даній роботі для визначення

інтегралів використовується чисельний підхід, який ґрунтується на адаптивній програмі Mathcad 14. Використання цієї програми дозволяє

визначати величини інтегралів так, щоб отриманий результат задовольняв.

Змінні інтегрування наведені на рис. 3, замінюючи q на $qd\xi$, вирази для σ_z , σ_x , τ_{xz} будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2qk}{\pi} \cdot \left[\int_{-b}^b \left[\frac{e^{-\operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2} z^2}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} \cdot \left[-(x-\xi) \cdot \left(1 + \frac{1}{ke^{-\operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2}} \right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 3 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z) \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z)^3 \cdot z + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + 2 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2 \cdot (x-\xi) \right] \right] d\xi \right], \\ \sigma_x &= \frac{2qk}{\pi} \cdot \left[\int_{-b}^b \left[\frac{e^{-\operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2} (x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} \cdot \left[-(x-\xi) \cdot \left(1 + \frac{1}{ke^{-\operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2}} \right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 3 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z) \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z)^3 \cdot z + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + 2 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2 \cdot (x-\xi) \right] \right] d\xi \right], \quad (3) \\ \tau_{xz} &= \frac{2qk}{\pi} \cdot \left[\int_{-b}^b \left[\frac{e^{-\operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2} (x-\xi)z}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} \cdot \left[-(x-\xi) \cdot \left(1 + \frac{1}{ke^{-\operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2}} \right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 3 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z) \cdot z + 2 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z)^3 \cdot z + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + 2 \cdot \operatorname{atan}((x-\xi)/z)^2 \cdot (x-\xi) \right] \right] d\xi \right], \end{aligned}$$

На рис. 4 показані епюри напружень σ_z , σ_x і τ_{xz} на глибині 0,5 м від поверхні в суцільному і пористому середовищах на випадок плоскої задачі від рівномірно розподіленого одиничного навантаження, яке діє на поверхні. По осі фундаменту напруження $\sigma_z = \sigma_x = 0$ дотичні напруження, що виникають в пористому середовищі майже в два рази перевищують відповідні напруження в пористому середовищі. Вертикальні напруження σ_z максимального значення досягають під кутом стрічкового фундаменту ($x=1$ м). Напруження в пористому середовищі в 1.7 рази перевищують напруження, які виникають в суцільному середовищі. При віддаленні від фундаменту як в пористому так і в суцільному середовищах вони зменшують і на відстані $x=1.5$ м від осі фундаменту мають однакові значення, потім напруження

зменшуються за величиною, більш інтенсивно в пористому середовищі. Напруження σ_z яке в пористому так і в суцільному середовищах максимального значення досягають майже на відстані $x=1.25$ м від осі фундаменту, перші перевищують напруження в суцільному середовищі в 1.3 рази, при подальшому віддаленні вони майже паралельно згасають.

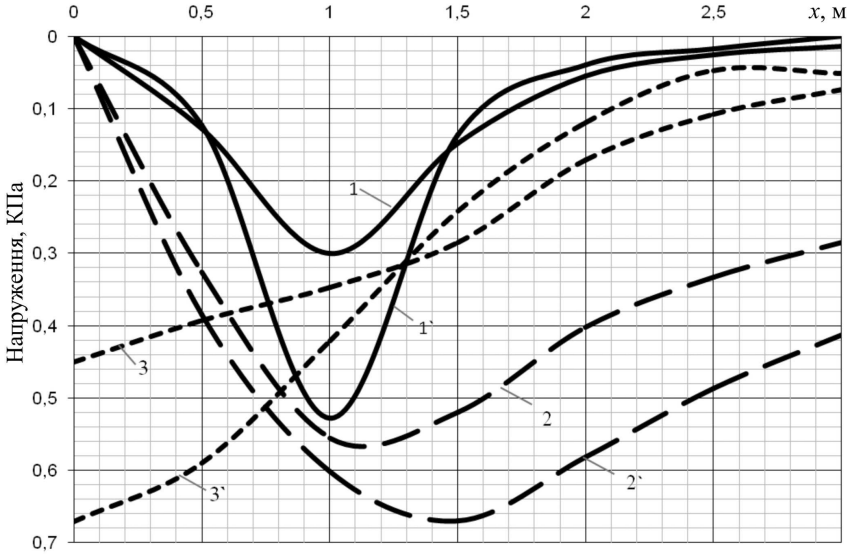


Рис. 4 Епюри напружень: 1, 1' - σ_z ; 2, 2' - σ_x ; 3, 3' - τ_{xz} відповідно для ізотропного і пористого середовища

Наведені епюри напружень показують, що врахування пористості ґрунтів значно впливає на характер розподілу напружень в основі стрічкових фундаментів. Врахування зазначених особливостей розподілу напружень в ґрунтовій основі буде наближати розрахунки за першим і другим граничними станами до більш об'єктивних результатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Флорин В.А. Основы механики грунтов. - Л. - М.: Госстройиздат. 1959. - 359с.

Отримано 23.08.10

Цимбал С.И., Шахмохаммади М.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ ОТ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Приведены решения задачи о распределении напряжений в пористой среде, которой являются грунты, от горизонтальной сосредоточенной силы, приложенной к поверхности с учетом состояния грунтов; проведен сравнительный анализ распределения напряжений в сплошном и пористой средах; показано влияние пористого грунта на формирование напряжений в основе ленточных фундаментов.

Tsybal S.Y., Shahmohammadi M.

STRESS STATE OF SOIL BASES FROM THE HORIZONTAL POINT FORCE

Some solutions to the problem of stress distribution in a porous medium, which are primers, from a horizontal concentrated force applied to the surface, taking into account the state of soil, a comparative analysis of stress distribution in a continuous and porous media, shows the influence of porous soil on the formation of stress on strip foundations.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О., Богдан Д.В.</i> Ефективність визначення J -інтеграла в задачах пружнопластичного деформування	3
<i>Гайдайчук В.В., Киричук О.А., Кузько О.В., Палій О.М.</i> Розрахунок динамічних характеристик оболонки паливного резервуару	16
<i>Дехтярюк Є.С., Лук'яненко О.О., Шах В.В.</i> Оцінка рівня конструкційної безпеки нафтоналивного резервуара	22
<i>Чибіряков В.К., Жупаненко І.В.</i> Методика розв'язання задачі про власні коливання пластин обертання змінної товщини	30
<i>Солодей І.І., Гуляр О.І., Вабищевич М.О., Приходько А.Ю., Сизевич Б.І.</i> Узагальнена матриця мас напіваналітичного метода скінченних елементів в задачах динаміки просторових конструкцій	47
<i>Охтень І.О., Гоцуляк Є.О.</i> Дослідження стійкості тонкостінних елементів відкритого профілю з різними варіантами розкріплення	56
<i>Гетун Г.В., Кушніренко М.Г.</i> Особливості дослідження та проектування розрахункових схем багатопверхових каркасно-монолітних житлових будинків	65
<i>Бараненко В.О., Дуліца І.П.</i> Базові конструкції теорії нечітких множин в задачах будівельної механіки	73
<i>Леонт'єв В.В., Хромов В.Г.</i> Дослідження впливу процесу нагрівання на напружений стан заготівлі при волочинні сталевому дроту	82
<i>Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Застосування різних способів моделювання удару в віброударних системах з твердим та м'яким обмежниками	87

<i>Легостаєв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.</i> Деякі особливості побудови дискретних моделей МСЕ в задачах динаміки пластинчато-оболонкових конструкцій	94
<i>Ворона Ю.В., Русанова О.С.</i> Алгоритм розв'язання задач про коливання масивів з тріщинами поздовжнього зсуву	102
<i>Гончаренко М.В.</i> Аналіз впливу стохастичної складової параметричного навантаження на зони динамічної стійкості пружних систем	114
<i>Гоцуляк Є.О., Корнієнко М.В., Шельменко А.М.</i> Розрахунок осадки і несучої здатності паль при їх взаємодії в плитному фундаменті	124
<i>Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О.</i> Порівняльний аналіз стійкості гладких осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини та гранованих оболонок ступінчасто-змінної товщини	131
<i>Чеверда П.П., Геращенко О.В., Міщенко О.О.</i> Дослідження динамічної реакції просторового каркасу висотної будівлі при дії сейсмічного навантаження	140
<i>Гаран І.Г.</i> Стійкість циліндричних склопластикових оболонок з гофрованими стінками при дії поверхневого тиску	148
<i>Цимбал С.Й., Шахмохаммаді М.</i> Напружений стан ґрунтових основ фундаментів від горизонтального навантаження	154

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 86

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 01.10.10. Формат 60x90 ¹/₁₆. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.
Тираж 100. Зам. №

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

Віддруковано на ЗАТ “ВІПОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.