

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,  
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

---

Випуск 87

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2011

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*Ю.В. Верюжський*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*О.І. Гуляр*, д-р техн. наук

*Г.В. Ісаханов*, д-р техн. наук  
*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*М.О. Шульга*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 28 жовтня 2011 року, протокол № 3.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 87 / Відп. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2011. – 166 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31  
м. Київ, 03680  
тел.: (044) 248-3040

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

© КНУБА, 2011

УДК 539.375

В.А. Баженов, д-р техн. наук

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

С.О. Пискунов, д-р техн. наук

О.О. Шкриль, канд. техн. наук

Д.В. Богдан

## ЕФЕКТИВНІСТЬ МЕТОДУ РЕАКЦІЙ ДЛЯ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З ПОПЕРЕЧНИМИ ТРІЩИНАМИ

Розглянута реалізація методики визначення  $J$ -інтеграла методом реакцій в призматичних тілах з поперечними та поздовжніми тріщинами. Ефективність методики доведена на тестовій задачі про розтяг напівнескінченного тіла з напівеліптичною тріщиною. Проведено розв'язання задачі про визначення тріщиностійкості корпусу ядерного реактора з тріщиною під дією експлуатаційного навантаження.

На сьогоднішній день в енергетиці, транспорті та інших галузях промисловості можуть експлуатуватися елементи конструкцій з тріщинами. Значну частину таких об'єктів можна віднести до класу призматичних тіл. Для розрахунку призматичних тіл з тріщинами раціонально застосовувати напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), ефективність якого доведена в роботах [1-6]. В зв'язку з особливостями побудови дискретних моделей НМСЕ в призматичних тілах відокремлюють поперечні (рис.1,*а*) та поздовжні (рис.1,*б*) тріщини.

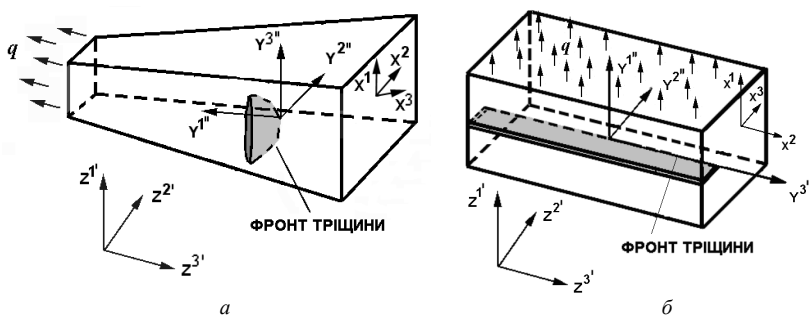


Рис. 1. Призматичні тіла з поперечною (*а*) та поздовжньою (*б*) тріщиною

Оцінка несучої здатності тіл з тріщинами виконується на основі визначення параметрів механіки руйнування. При лінійному деформуванні найчастіше використовується коефіцієнт інтенсивності

напружень (КІН). Серед методів обчислення КІН найбільшого поширення набули прямий та енергетичний методи.

Визначення КІН прямим методом здійснюється за величинами переміщень та напружень в околі вершини тріщини. Для найчастіше розглядуваного випадку тріщин нормального відриву (тип I, рис. 2), КІН можна обчислити за формулами:

$$K_I(\sigma) = \sigma^{1^*} r^* \sqrt{2\pi r} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$K_I(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \frac{u_1^* G}{\sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)}, \quad (1)$$

де  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль зсуву.

Реалізація прямого методу визначення КІН із застосуванням НМСЕ викладена в роботі [1].

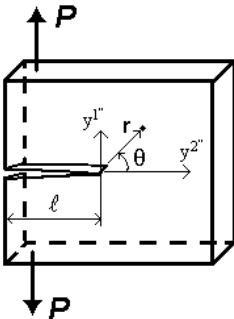


Рис. 2. Тріщина нормального відриву

Серед енергетичних методів визначення КІН значного поширення набув спосіб його обчислення через величини  $J$ -інтеграла:

$$K_I = \sqrt{\frac{JE}{k}}, \quad (2)$$

де  $k=1$  за умов плоского напруженого стану;  $k=1-\nu^2$  - за умов плоскої деформації,  $E$  - модуль Юнга.

Визначення  $J$ -інтеграла найефективніше виконувати методом реакцій, оскільки це дозволяє отримувати інваріантні значення інтеграла незалежно від контуру інтегрування [3-6]. Згідно з методом реакцій обчислення  $J$ -інтеграла за умов лінійного деформування можна виконувати за формулою [5]:

$$J = J_I + J_{II} = \frac{1}{2\Delta l} \left( R_{V_1'} (u_{S_1} - u_{S_1}') + R_{V_2'} (u_{S_2} - u_{S_2}') \right), \quad (3)$$

де  $R_{V_1'}$ ,  $R_{V_2'}$  - вузлові реакції у вершині тріщини;  $u_{S_1}$ ,  $u_{S_1}'$  - вузлові переміщення найближчих до вершини тріщини відкріплених вузлів (рис. 3).

При реалізації формули (3) для тіл з поздовжніми тріщинами, точки визначення вузлових реакцій будуть співпадати з точками інтегрування, розташованими на фронті тріщини. Точки визначення переміщень будуть збігатися з точками інтегрування, розташованими вздовж фронту тріщини

в першому перед фронтом тріщини вузлі (рис.4,*a*). В тілах з поперечними тріщинами точки визначення реакцій здійснюється у найближчій до фронту точці інтегрування для вузлів, розташованих на фронті тріщини. Точки визначення переміщень знаходяться в точці інтегрування вузлів, позначених на рис.4,*б* хрестиками.

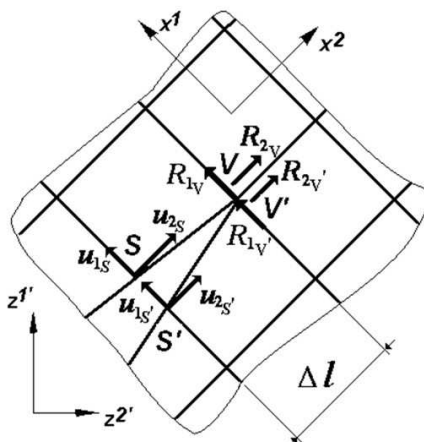


Рис. 3. Компоненти вектора вузлових реакцій та переміщень в околі вершини тріщини

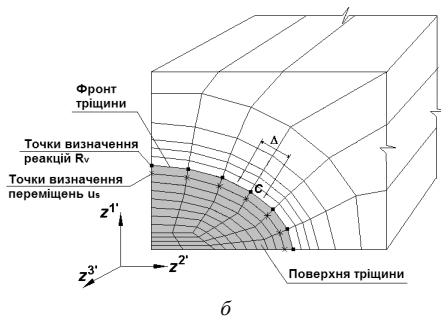
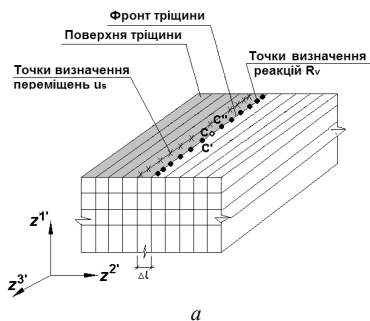


Рис. 4. Точки визначення реакцій та переміщень в тілах з поперечними (*a*), та поздовжніми (*б*) тріщинами

Ефективність методу реакцій для тіл з поздовжніми тріщинами досліджена в роботах [3-6]. Для тіл з поперечними тріщинами такі дослідження не проводились. Для дослідження ефективності наведеного методу реакцій для тіл з поперечними тріщинами була розв'язана задача про розтяг напівнескінченного тіла з напівеліптичною тріщиною (рис. 5). Отримані результати розподілення КІН вздовж фронту тріщини добре узгоджуються (рис. 5).

Наведена методика визначення  $J$ -інтеграла методом реакцій для тіл з поперечними тріщинами була застосована при розв'язанні задачі про визначення тріщиностійкості корпусу реактора від дії експлуатаційного навантаження.

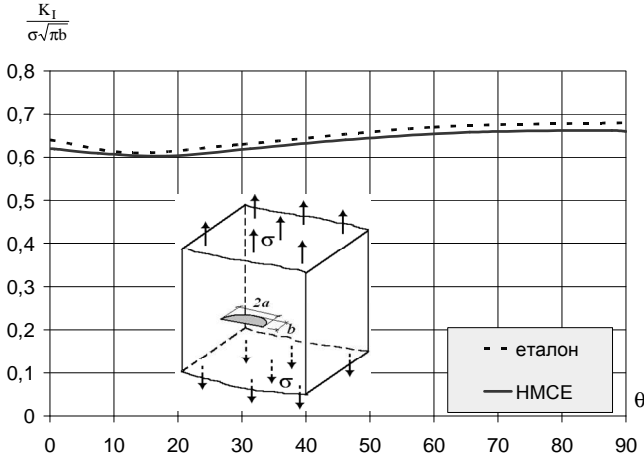


Рис. 5. Розподілення КІН вздовж фронту тріщини

Згідно з вимогами МАГАТЕ [7] в корпусах ядерних реакторів рекомендовано розглядати тріщини глибиною не більше, ніж чверть товщини корпусу, напівеліптичного вигляду із співвідношенням осей еліпсу в діапазоні від 0,3-0,7. Для оцінки несучої здатності пропонується використовувати величини КІН.

В даній роботі проведено визначення тріщиностійкості корпусу ядерного реактора «ВВЕР-1000», який застосовується на Запорізькій та Рівненській АЕС (рис. 6,а). Розглядалися напівеліптичні тріщини глибиною 48 мм із співвідношенням осей еліпса  $a/b=0.33$  та  $a/b=0.67$ . Під час експлуатації реактора стінки корпусу знаходяться в температурному полі 300°C при дії внутрішнього тиску  $Q_2 = 17,5 \text{ МПа}$ . Матеріал корпусу – сталь з модулем пружності  $E=1,995 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\nu=0,3$ .

Розрахункові схеми фрагмента корпусу реактора з тріщинами розроблено із врахуванням симетрії об'єкта та навантаження (рис. 6, б, в).

Площина фрагмента  $z^3 = 0$  та позначена на рис. 6 сірим кольором частина площини  $z^3 = 30$  закріплені вздовж осі  $z^3$ . Розміри фрагмента прийняті такими, щоб відстань від фронту тріщини до його краю була не меншою, ніж потрійний розмір тріщини в цьому напрямку. Дискретні моделі НМСЕ фрагмента реактора із двома типами тріщин показані на рис. 7.

Для обґрунтування вірогідності отримуваних результатів розрахунків також проводився із застосуванням тривимірного МСЕ, реалізованого в програмному комплексі SCAD. Дискретні моделі тривимірного МСЕ для

зазначеного фрагмента реактора із двома типами тріщин показані на рис.8. Для тріщини із співвідношенням  $a/b=0.67$  дискретна модель налічує 7500 вузлів, для тріщини  $a/b=0.33$  - 10700 вузлів.

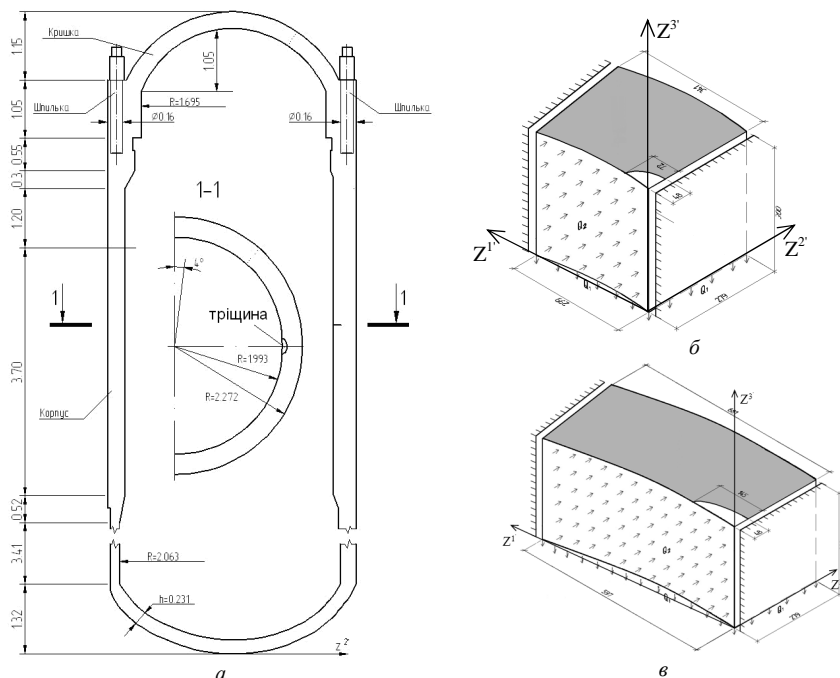


Рис. 6. Схема корпусу реактора (а), розрахункові схеми для тріщин 0.67(б) та 0.33(е)

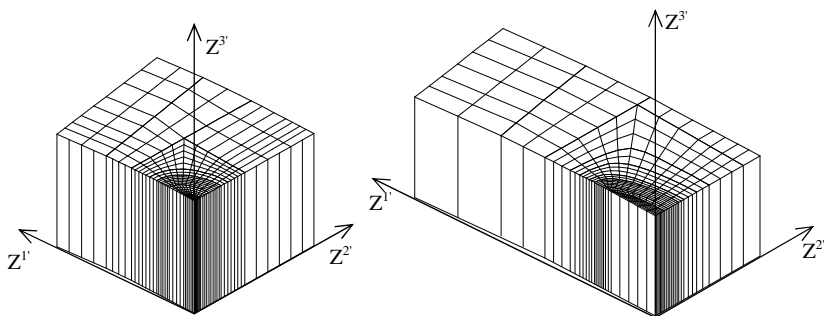


Рис. 7. Дискретна модель НМСЕ

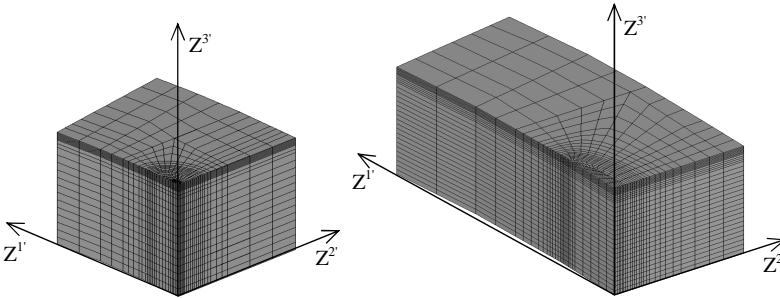


Рис. 8. Дискретна модель тривимірного МСЕ

Результати отримані із дотриманням умов збіжності за кількістю невідомих дискретної моделі. Розподіл переміщень в найближчих до фронту тріщини відкріплених вузлах вздовж кутової координати тріщини показані на рис. 9. Кут відраховувався від осі  $Z^1$  до  $Z^2$  за рухом годинникової стрілки. Розподіл напружень вздовж кутової координати тріщини для елементів, розташованих перед фронтом тріщини (1) та після фронту тріщини (2), показаний на рис. 10. Напруження порівнювались в скінченних елементах, що розташовані по різні боки від фронту тріщини. Наведений на рис. 11 розподіл напружень вздовж осі  $Z^3$  показує, що із наближенням до поверхні тріщини напруження стрімко зростають. Як видно з графіків, отриманий за різними СЕ базами розподіл параметрів НДС збігається, що свідчить про достовірність результатів НМСЕ.

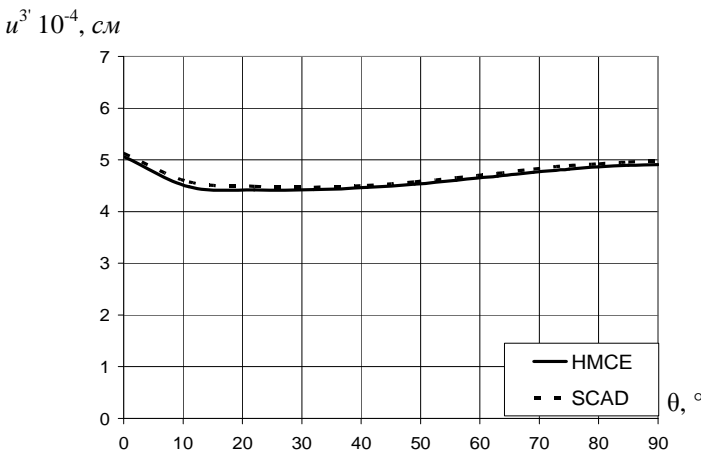


Рис. 9. Розподіл переміщень вздовж фронту тріщини



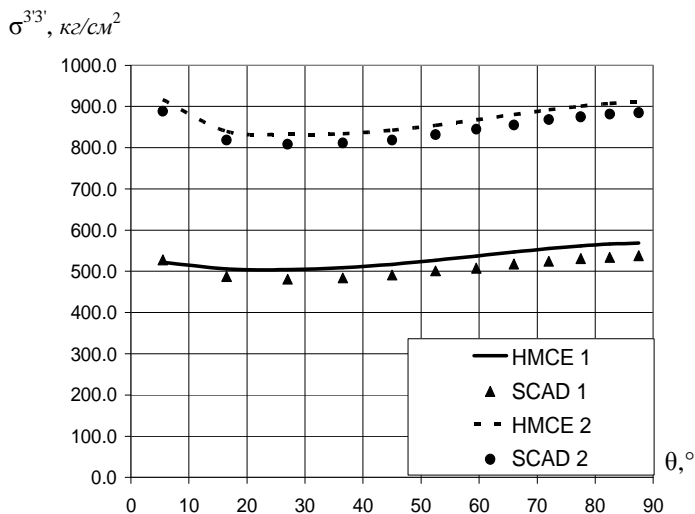
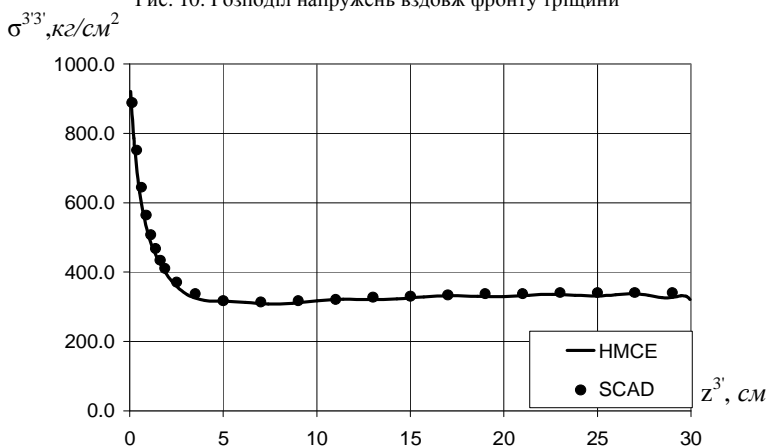


Рис. 10. Розподіл напружень вздовж фронту тріщини

Рис. 11. Розподіл напружень вздовж осі  $Z^2$ 

В подальшому проводилося порівняння значень КІН в тріщинах із співвідношенням  $a/b=0.67$  (рис. 12) та  $a/b=0.33$  (рис. 13). Графіки розподілу КІН вздовж фронту тріщини, отримані із використанням прямого методу  $K(u)$  і методу реакцій на різних СЕ базах добре узгоджуються між собою. Це підтверджує достовірність отримуваних результатів та ефективність розроблених методик обчислення КІН. Результати показують, що із зменшенням співвідношення осей тріщини

стає більшою різниця між значеннями КІН, що обчислені в точках фронту. Значення КІН для тріщини  $a/b=0,33$  є більшими, тому вона є більш небезпечною. Максимальний КІН для двох типів тріщин є приблизно в три рази меншим, ніж допустимий для даного матеріалу.

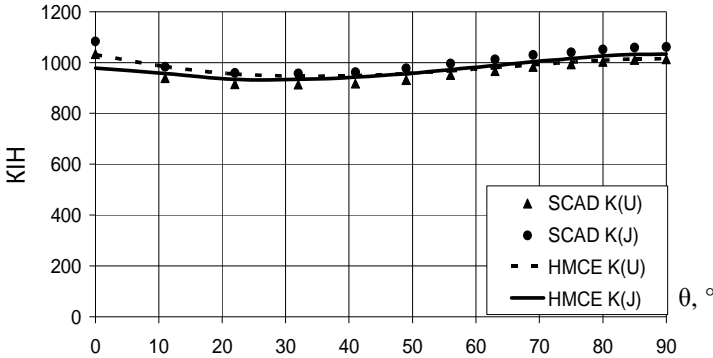


Рис. 12. Розподіл КІН вздовж фронту тріщини  $a/b=0.67$

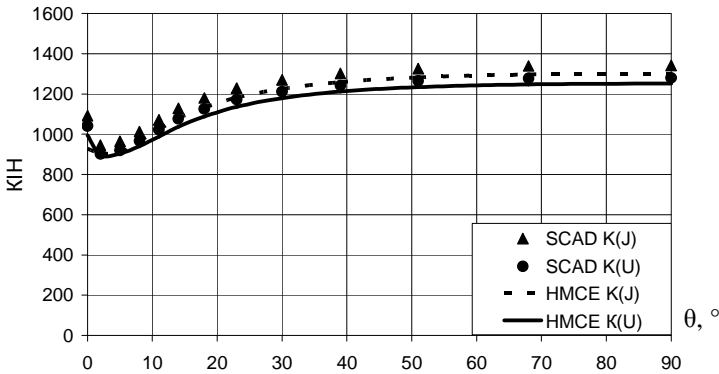


Рис. 13. Розподіл КІН вздовж фронту тріщини  $a/b=0.33$

Таким чином, отримані результати показали ефективність методу реакцій в задачах лінійного деформування призматичних тіл з поперечними тріщинами. Було показано, що ефективність методики не залежить від типу СЕ бази, що робить її універсальною для всіх програмних комплексів.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженов В.А., Шкріль О.О., Пискунов С.О., Богдан Д.В.* Неоднорідний призматичний скінченний елемент зі змінною площею поперечного перерізу та урахуванням змінності компонентів метричного тензору// Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2006.- Вип. 85.- С. 3-17.
3. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О. Богдан Д.В.* Ефективність визначення  $J$ -інтеграла в задачах пружнопластичного деформування// Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2010.- Вип. 86.- С. 3-17.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкріль А.А., Максимюк Ю.В.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 1. Теоретические основы и исследование эффективности конечно-элементной методики решения пространственных задач механики разрушения // Проблемы прочности, 2011. – №1. – С.24–39.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкріль А.А., Максимюк Ю.В.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Методика определения инвариантного  $J$ -интеграла в дискретных моделях МКЭ // Проблемы прочности, 2011. – №2.– С.24–39
6. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Особливості визначення  $J$ -інтеграла для дискретних моделей метода скінчених елементів// Опір матеріалів і теорія споруд, № 77, 2005, С.43–64
7. Guidelines on pressurized thermal shock analysis for WWER nuclear power plants IAEA, Vienna, 2006, IAEA-EBP-WWER-08/Rev. 1, ISSN 1025–2762, p.73.

*Стаття надійшла до редакції 01.07.2011 р.*

*Баженов В.А., Гуляр А.І., Пискунов С. О., Шкріль А.А., Богдан Д.В.*

#### **ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА РЕАКЦИЙ ДЛЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПОПЕРЕЧНЫМИ ТРЕЩИНАМИ**

Рассмотрена реализация методики определения  $J$ -интеграла методом реакций в призматических телах с поперечными и продольными трещинами. Эффективность методики доказана на тестовой задаче о растяжении полубесконечного тела с полуэллиптической трещиной. Решена задача об определении трещиностойкости корпуса ядерного реактора под воздействием эксплуатационной нагрузки.

*Bazhenov V., Gulyar A., Piskunov S., Shkril' A., Bogdan D.*

#### **THE EFFECTIVENESS OF THE REACTIONS METHOD FOR PRISMATIC BODIES WITH TRANSVERSAL CRACKS**

An implementation of the procedure for  $J$ -integral determination by the method of reactions in prismatic bodies with transversal and longitudinal cracks was considered. The effectiveness of procedure is proven in the test problem concerning extension of semi-infinite body with semi-elliptical crack. The solution of the problem for determining the crack resistance in nuclear reactor vessel with a crack under operational load was fulfilled.

УДК 539.3

**В.В. Гайдайчук**, д-р техн. наук  
**С.М. Худолій**, канд. техн. наук  
**О.М. Андрусенко**

## **МОДЕЛЮВАННЯ СИЛ ОПОРУ ПРИ ПІДЙОМІ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ В СВЕРДЛОВИНІ З НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ У ФОРМІ ЗЛАМІВ ОСЬОВОЇ ЛІНІЇ**

На основі теорії гнучких криволінійних стержнів поставлена задача про пружний згин бурильних колон в каналах глибоких криволінійних свердловин з геометричними недосконаlostями їх осьових ліній. Чисельними методами виконаний аналіз залежності сил опору руху колони від радіусів заокруглень, кутів, кроків і місць локалізації ламаних недосконалостей. Обговорюються результати розрахунків.

**1. Вступ.** При розробці шельфових родовищ нафти і газу найбільшого поширення набули три способи проходки свердловин. Перший спосіб мало залежить від глибини морського дна, під яким розташоване родовище, і його віддалення від лінії берега. Для реалізації цього способу використовуються спеціальні океанські судна і з його допомогою пробурена, наприклад, свердловина з глибини 3050 м океанського дна в Мексиканській затоці глибиною понад 4000 м в скельній породі під дном [5]. Менш трудомістким і більш поширеним є буріння свердловин з морських стаціонарних платформ, встановлених у шельфових акваторіях на порівняно невеликих глибинах. Очевидно, що ще більш простим є буріння з наземних установок.

Для двох останніх способів характерним є проходка криволінійних свердловин, що досягають родовища на деякому віддаленні від бурильних установок. Ці відстані вже перевищують 12000 м по горизонталі і плануються свердловини з вилученнями до 15000 м [5].

Важливо відзначити, що створення криволінійних свердловин з великим віддаленням дозволяє не тільки здійснювати прицільне досягнення віддалених підземних вмістищ нафти і газу, а й істотно підвищити дебет свердловини і повноту відбору палива. Так, для вертикальних свердловин вдається витягти всього лише до 37% обсягу палива, для криволінійних свердловин цей показник збільшується до 55%. Проте технології буріння криволінійних свердловин пов'язані з підвищеною аварійністю і, оскільки число безаварійних пробурених в світі свердловин складає тільки 67% [9], проблема практичного впровадження технологій буріння глибоких свердловин різної просторової орієнтації пов'язана з необхідністю теоретичного

моделювання механічних явищ, що супроводжують буріння, з метою попередження аварійних режимів.

Сучасний етап експлуатації більшості легкодоступних родовищ нафти, газу і газового конденсату в Україні характеризується завершальною стадією. У той же час великі запаси вуглеводневих палив виявлені в шельфових зонах Чорного та Азовського морів на глибинах 7 км і нижче. Враховуючи актуальність питань розробки технологій буріння глибоких криволінійних свердловин для енергетики України, можна зробити висновок, що проблема математичного моделювання механіки колон глибокого буріння у свердловинах різних обрисів становить важливу наукову і прикладну проблему.

Задачі дослідження згинальної стійкості вертикальних колон глибокого буріння розглянуті в публікаціях [3,4,6], стаття [2] присвячена аналізу їх згинальних і крутильних коливань, в роботах [8,9] досліджується механічна поведінка бурильної колони (БК) в криволінійних свердловинах на основі моделювання їх абсолютно гнучкими нитками, в [7] це питання вивчається з позицій формулювання прямих і обернених задач згинання криволінійного пружного стрижня. Огляди публікацій з цих проблем дано в [2,4].

У даній роботі поставлена задача про визначення сил опору, що перешкоджають руху бурильної колони (БК) в криволінійній свердловині з геометричними недосконаlostями її осьової лінії у формі локалізованих зламів. Аналізуються випадки, коли з-за наявності недосконалостей рухливість БК різко знижується і має місце ефект її замикання (прихоплення).

**2. Постановка задачі про пружне згинання БК в криволінійній свердловині.** Якщо рівняння осьової лінії свердловини задані в декартовій системі координат  $Oxyz$

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (1)$$

то за допомогою методики, викладеної в [1,2,7], можна підрахувати функції геометричних характеристик БК в деформованому стані. До них відносяться  $R$  – радіус кривини,  $T$  – радіус скруту, а також орти  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  рухомого триедра.

Якщо крива (1) визначена через деякий довільний параметр  $\vartheta$

$$x = x(\vartheta), \quad y = y(\vartheta), \quad z = z(\vartheta), \quad (2)$$

то замість похідної  $d/ds$  використовується похідна  $d/Dd\vartheta$ , де множник  $D(\vartheta)$ , що визначає довжину  $\Delta s$  елемента  $\Delta\vartheta$ , обчислюється так

$$D = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (3)$$

Пружне деформування трубчастої БК в криволінійній свердловині в процесі буріння і виконання спуско-підйомних операцій здійснюється під дією розподілених сил ваги  $\vec{f}^{gr}$ , сил  $\vec{f}^c$  контактної взаємодії між БК і стінкою свердловини, сил  $\vec{f}^{fr}$  та моментів  $\vec{m}^{fr}$  їх фрикційної взаємодії, а також зосереджених крайових сил і моментів, прикладених в точці підвісу БК і в точці її контакту з дном свердловини. У роботах [1,2,7] побудована система рівнянь, яка дозволяє визначати внутрішні сили і моменти, що виникають в БК при її русі, а також зовнішні сили контактної взаємодії, що впливають на сили опору руху. Тому внутрішню осьову силу  $F_w$  та крутний момент  $M_w = Ch_2$ , що виникають у кожному елементі БК, будемо знаходити за допомогою співвідношень [2]

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{d\vartheta} &= h_2, \quad \frac{dh_2}{d\vartheta} = -D \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{T} \right) + \frac{1}{D} \frac{dD}{d\vartheta} h_2 - \frac{D^2}{C} m_w^{fr}, \\ \frac{dF_w}{d\vartheta} &= \frac{D}{R} \cos(h_1) \cdot F_u - \frac{D}{R} \sin(h_1) \cdot F_v - D \cdot f_w^{gr} - D \cdot f_w^{fr}, \\ F_u &= -\frac{A}{D} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \cos(h_1) - \frac{A}{RT} \sin(h_1) + \frac{C}{R} \left( \frac{1}{T} + \frac{h_2}{D} \right) \sin(h_1), \\ F_v &= \frac{A}{D} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \sin(h_1) - \frac{A}{RT} \cos(h_1) + \frac{C}{R} \left( \frac{1}{T} + \frac{h_2}{D} \right) \cos(h_1), \\ f_w^{fr} &= \pm \mu \cdot \sqrt{(f_u^c)^2 + (f_v^c)^2} \frac{\dot{w}}{\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d / 2)^2}}, \\ m_w^{fr} &= \pm \mu \cdot \sqrt{(f_u^c)^2 + (f_v^c)^2} \frac{\omega d^2 / 4}{\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d / 2)^2}}, \\ f_u^c &= -\frac{C \cdot h_2}{D^2} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \sin(h_1) - \frac{1}{R} \cos(h_1) \cdot F_w - \frac{A-C}{RT^2} \cos(h_1) + \frac{C \cdot h_2}{DRT} \cos(h_1) + \\ &+ \frac{A}{D} \frac{d}{d\vartheta} \left[ \frac{d}{Dd\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \right] \cos(h_1) + \frac{A}{TD} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \sin(h_1) + \frac{A}{RD} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{T} \right) \sin(h_1) + \\ &+ \frac{A-C}{TD} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \sin(h_1) + \frac{\sin(h_1)}{R} m_w^{fr} - f_u^{gr}, \\ f_v^c &= -\frac{C \cdot h_2}{D^2} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \cos(h_1) + \frac{1}{R} \sin(h_1) \cdot F_w + \frac{A-C}{RT^2} \sin(h_1) - \frac{C \cdot h_2}{DRT} \sin(h_1) - \\ &- \frac{A}{D} \frac{d}{d\vartheta} \left[ \frac{d}{Dd\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \right] \sin(h_1) + \frac{A}{TD} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \cos(h_1) + \frac{A}{RD} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{T} \right) \cos(h_1) + \\ &+ \frac{A-C}{TD} \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{1}{R} \right) \cos(h_1) + \frac{\cos(h_1)}{R} m_w^{fr} - f_v^{gr}, \end{aligned} \quad (4)$$

які наводимо без виведення.

Компоненти  $f_u^{gr}$ ,  $f_v^{gr}$ ,  $f_w^{gr}$  розподілених сил ваги, що входять до цієї системи рівнянь, відомі і визначаються так

$$\begin{aligned} f_u^{gr} &= -F(\gamma_{st} - \gamma_l)g(n_z \cos(h_1) + b_z \sin(h_1)), \\ f_v^{gr} &= F(\gamma_{st} - \gamma_l)g(n_z \sin(h_1) - b_z \cos(h_1)), \\ f_w^{gr} &= -F(\gamma_{st} - \gamma_l)g\tau_z, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $F$  – площа поперечного перерізу труби БК,  $\gamma_{st}$  – щільність матеріалу труби,  $\gamma_l$  – щільність промивної рідини.

Шукані змінні системи (4) підраховуються чисельно. Для інтегрування перших трьох рівнянь системи (4) використовується метод Рунге-Кутта. На кожному кроці його реалізації спочатку обчислюються функції  $h_1(\vartheta_i)$ ,  $h_2(\vartheta_i)$ ,  $F_w(\vartheta_i)$ , потім по їх знайденим значенням підраховуються інші невідомі  $F_u(\vartheta_i)$ ,  $F_v(\vartheta_i)$ ,  $f_w^{fr}(\vartheta_i)$ ,  $m_w^{fr}(\vartheta_i)$ . Після цього здійснюється наступний крок інтегрування.

**3. Аналіз згинання БК у свердловині з ламаними геометричними недосконалотями.** При бурінні криволінійних свердловин часто виникають ситуації, коли внаслідок різкого порушення однорідності тектонічної структури або технології буріння траєкторія свердловини відхиляється від проектної, і на ній виникають локальні геометричні недосконалоті. Зазвичай вони мають вигляд збурення у формі тривимірної спіралі, плоскої гармоніки або місцевого згладженого плоского або просторового зламу. У даній роботі розглянуто випадок недосконалотей у формі зламів, розташованих у площині кривизни осьової лінії свердловини. Прийнято, що в проектному стані осьова лінія свердловини являє собою частину гіперболи з вершиною в точці  $(L; 0)$ , та цілком лежить у площині  $xOz$

$$x = \frac{L(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon \cos \vartheta} \cdot \cos \vartheta, \quad y = 0, \quad z = \frac{H}{1+\varepsilon \cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta \quad (3\pi/2 \leq \vartheta \leq 2\pi). \quad (6)$$

Для цієї геометрії вирішується поставлена вище задача про визначення внутрішніх і зовнішніх силових факторів, що діють на БК при її русі. Потім в геометрію осьової лінії свердловини вводяться спотворення в формі локалізованих зламів зі згладженими кутами. Злами такого роду можуть бути апроксимовані шляхом накладення вершин гіпербол з різними ексцентриситетами і різними значеннями кутів між їх асимптотами (рис. 1).

Якщо асимптоти лівих гілок двох подібних гіпербол з різними знаками розташовані вздовж від'ємного напрямку осі  $Ox$  (рис.1,а і б), то їх комбінація з невеликим зсувом  $\Delta s$  в площині  $xOz$  дасть злами на прямолінійній лінії з невеликим зсувом  $\Delta z$  і радіусом кривини  $R_h$  у вершині (рис. 1,в).

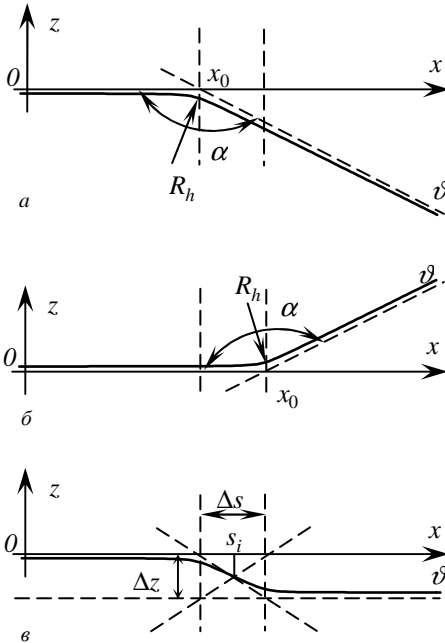


Рис. 1. Моделювання локальних зламів траєкторії свердловини

Якщо накласти цю лінію на початкову траєкторію в чотирьох місцях, як зазначено у формулі (6), то кінцева траєкторія БК досягне конфігурації, показаної на рис. 2.

Аналітичні вирази для гіперболи, зображеної на рис. 1,а, записуються у вигляді

$$z = - \left\{ \frac{\operatorname{tg} \alpha (x - x_0)}{2} + \sqrt{\left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha (x - x_0)}{2} \right]^2 - \varepsilon} \right\}, \quad (7)$$

де  $\alpha$  – кут між асимптотами гіперболи,  $x_0$  – абсциса вершини гіперболи,  $\varepsilon$  – її ексцентриситет.



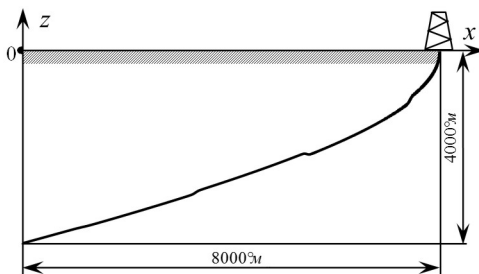


Рис. 2. Траєкторія свердловини з ламаними недосконалотями

Рівняння гіперболи, представленої на рис. 1,б, записується у вигляді

$$z = \left\{ \frac{\operatorname{tg} \alpha (x - x_0)}{2} + \sqrt{\left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha (x - x_0)}{2} \right]^2 - \varepsilon} \right\}. \quad (8)$$

Злами осьової лінії свердловини можуть бути також тривимірними, тоді їх геометрія може бути представлена наступним чином:

$$y = \pm \left\{ \frac{\operatorname{tg} \alpha (x - x_0)}{2} + \sqrt{\left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha (x - x_0)}{2} \right]^2 - \varepsilon} \right\}. \quad (9)$$

У загальному випадку, плоскі і тривимірні недосконалоті можуть бути розташовані в кількох місцях і мати різні кути і радіуси закруглення. Тоді їх геометричне моделювання може бути виконане накладенням на початкову траєкторію (6) різних зламів, які задаються формулами (7), (8) або (9).

За допомогою виразів для осьової лінії свердловини підраховуються радіуси кривини та скруту. Потім за формулою (3) обчислюється його метричний множник  $D$ , що дозволяє перейти до природної параметризації кривої (2), підрахувати орти  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{\tau}$  тригранника Френе і перейти до інтегрування системи (4). Усі ці змінні описуються громіздкими виразами і тут не наводяться.

При виконанні спуско-підйомних операцій із заданим відношенням  $v = 2\dot{w}/\omega d$  (відношення лінійних швидкостей осьового та обертального рухів елемента зовнішньої поверхні труби БК) шукані функції  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $F_w$  при  $\vartheta = 3\pi/2$  дорівнюють нулю, але відмінні від нуля сили тяжіння (5).

Це дозволяє підрахувати в цій точці змінні  $f_u^c$ ,  $f_v^c$ ,  $f_w^{fr}$ ,  $m_w^{fr}$ ,  $F_u$ ,  $F_v$ , і зробити один крок інтегрування перших трьох рівнянь системи (4), а потім за такою ж схемою продовжувати розв'язок системи на наступних кроках до точки  $\vartheta = 2\pi$ . Крок інтегрування  $\Delta\vartheta$  вибирається з умови збіжності обчислень. Якщо розглядається режим буріння, то на краю

$\vartheta = 3\pi/2$  змінним  $h_1, h_2, F_w$  присвоюються відомі, відмінні від нуля, значення і загальний алгоритм розв'язку зберігається.

За розробленою методикою виконано комп'ютерне моделювання пружного згинання БК в гіперболічній свердловині з ламаними недосконаlostями при наступних значеннях характерних параметрів:  $L = 8000 \text{ м}$ ,  $H = 4000 \text{ м}$ ,  $d = 0,1683 \text{ м}$ ,  $\delta = 0,01 \text{ м}$  - товщина труби БК,  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G = 0,8077 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\gamma_{st} = 7850 \text{ кг/м}^3$ ,  $\gamma_l = 1500 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 0,2$ ,  $\nu = 100$ .

Центри зламів  $s_i$  розташовані в точках  $s_1 = S/8$ ,  $s_2 = 3S/8$ ,  $s_3 = 5S/8$ ,  $s_4 = 7S/8$ , а вершини суміжних гіпербол знаходяться в точках  $s_i \pm 50 \text{ м}$ .

Повна довжина БК  $S$  обчислюється за формулою

$$S = \int_{3\pi/2}^{2\pi} D(\vartheta) d\vartheta = 9220 \text{ м}.$$

Розглянуто операцію підйому БК. Деякі результати наведено на рис. 3 та 4.

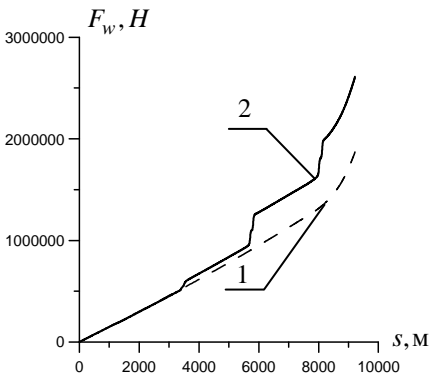


Рис.3. Графіки зміни поздовжньої сили  $F_w(s)$  для ідеальної свердловини (крива 1) та свердловини з недосконаlostями (крива 2)

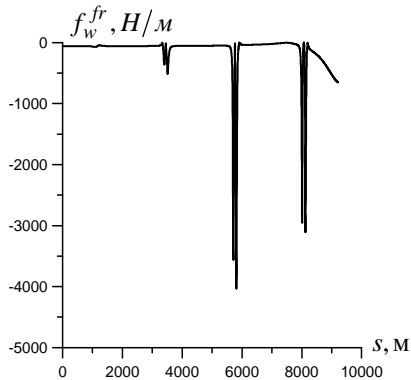


Рис.4. Графіки зміни розподіленої сили тertia  $f_w^{fr}(s)$

На рис. 3 зображені функції поздовжніх сил  $F_w(s)$  для свердловин, осьові лінії яких мають ідеальну геометрію (крива 1) і містять злами (крива 2). Можна бачити, що якщо свердловина не має геометричних недосконаlostей, то функція  $F_w(s)$  є гладкою і має порівняно малі

значення. Однак введення навіть незначних недосконалостей стає причиною виникнення розривів обрису функції.

Рисунок 4 ілюструє характер зміни сили тертя по довжині колони при виконанні операції підйому БК. Можна бачити, що вона має ділянки різких стрибків у зонах зламів осевої лінії свердловини.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайдайчук В.В., Худолій С.М. І.Л., Андрусенко О.М.* Про рухомість бурильної колони в криволінійній свердловині зі спіральними геометричними недосконалостями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010. – № 85. – С.74 – 85.
2. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Худолій С.М., Гловач Л.В.* Сучасні методи теоретичного моделювання стану бурильної колони у похило-скерованих свердловинах // Нафтова та газова промисловість. – 2009. - №1. – С. 26 – 30.
3. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Горбунович И.В.* Квазистатические бифуркационные состояния вертикальных колонн сверхглубокого бурения // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2010. - №5. – С. 57 – 65.
4. *Мислюк М. А., Рибчик І. Й., Яремчук Р.С.* Буріння свердловин. Т. 3. Вертикальне та скероване буріння. – Київ: Інтерпрес Лтд., 2004. – 294 с.
5. *Akgun F.* A finite element model for analyzing horizontal well BHA behavior // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2004. – V. 42, No. 2 – 4. – P. 121 – 132.
6. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V.* The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – V. 67. – P. 140 – 148.
7. *Gulyayev V.I., Hudoly S.N., Glovach L.V.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V. 48. – P. 110 – 118.
8. *Iyoho A.W., Meize R.A., Millheim K.K.* Lessons from integrated analysis of GOM drilling performance // SPE Drilling and Completion. – 2005. – March. – P. 6 – 16.
9. *Sawaryn S. J. and Thorogood J. L.* A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method // SPE Drilling and Completion. – 2005. – March. – P. 24 – 36.

*Стаття надійшла до редакції 08.02.2011 р.*

*Гайдайчук В.В., Худолій С.Н., Андрусенко Е.Н.*

#### **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ПОДЪЕМЕ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В СКВАЖИНЕ С НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ В ФОРМЕ ИЗЛОМОВ ОСЕВОЙ ЛИНИИ**

На основе теории гибких криволинейных стержней поставлена задача об упругом изгибании бурильных колонн в каналах глубоких криволинейных скважин с геометрическими несовершенствами их осевых линий. Численными методами выполнен анализ зависимости сил сопротивления движению колонны от радиусов закругленности, углов, шагов и мест локализации ломаных несовершенств. Обсуждаются результаты расчётов.

*Gaidaichuk V.V., Hudoliy S.N., Andrusenko E.N.*

**SIMULATION OF RESISTANCE FORCES AT ASCENDING DRILL STRINGS IN BORE-HOLES WITH BREAK IMPERFECTIONS**

On the basis of the theory of curvilinear flexible rods the problem of elastic bending of drill strings in curvilinear bore-holes with geometric imperfections is stated. Numerical analysis of resistance force dependence on types of the imperfections, their steps, curvatures and angles is performed. The calculation results are discussed.

УДК 539.3

**М.О. Соловей**, д-р техн. наук  
**О.П. Кривенко**, канд. техн. наук  
**О.С. Дубина**

## **ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ У ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ ГНУЧКИХ СФЕРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ СТАЛОЇ ТОВЩИНИ ПРИ ДІЇ РІВНОМІРНОГО ТИСКУ**

Наведено порівняння результатів розрахунку нелінійного деформування та втрати стійкості сферичних круглих у плані панелей різної сталюї товщини, що отримані за моментною схемою скінченних елементів та за програмним комплексом ЛПРА.

Вивчення властивостей нелінійних скінченноелементних методик, для яких необхідно досліджувати вплив на збіжність і точність розв'язків великої кількості параметрів, що впливають на напружено-деформований стан (НДС) оболонок, звичайно виконується на наборі відповідних тестових задач [1]. Визначення необхідного набору тестів являє собою окрему проблему, яка незважаючи на її практичну важливість, висвітлена у літературі недостатньо. Це пов'язано зі складністю нелінійної задачі: математичними та обчислювальними труднощами її розв'язування, трудомісткістю аналізу нелінійного деформування та втрати стійкості оболонок різноманітної форми при дії різних термосилових навантажень.

Робота присвячена подальшому обґрунтуванню достовірності розв'язків, що отримані за скінченноелементною методикою дослідження нелінійного деформування та стійкості тонких пружних оболонок [1-5]. Методика базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та положеннях моментної схеми скінченних елементів (МССЕ). Завдяки такому підходу на основі єдиної методологічної бази отримана можливість дослідження тонких пружних оболонок з різноманітними геометричними особливостями за товщиною та неоднорідностями матеріалу при термосилових навантаженнях. Моделювання оболонки виконується універсальним просторовим скінченним елементом (СЕ), який дозволяє розглядати тонкі оболонкові конструкції як тривимірні тіла. Нелінійний розв'язок отримується за допомогою комбінованого алгоритму, який поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром із ітераційною процедурою Ньютона–Канторовича на кожному кроці навантаження.

Достовірність методики обґрунтовувалася великою кількістю чисельних досліджень збіжності та точності лінійних і нелінійних

розв'язків для різних класів задач. Наприклад, дослідження [3] присвячені аналізу розв'язків у задачі згину пластини та порівнянню їх з результатами, що були отримані за методиками інших авторів і за багатьма програмними комплексами. В [3–5] наведені системні порівняння розв'язків для пологих панелей. У цих роботах з'ясовані можливості застосування нелінійного процесора програмного комплексу (ПК) ЛІРА при розв'язанні геометрично нелінійних задач стійкості тонких оболонки лінійно- та ступінчасто-змінної товщини.

У даному дослідженні для порівняння та підтвердження достовірності отриманих за МССЕ результатів були виконані розрахунки нелінійного деформування та втрати стійкості пологих сферичних панелей різної сталі товщини із застосуванням ПК ЛІРА [6]. Задачі стійкості для гладких пологих осесиметричних панелей сталі товщини є класичними в геометрично нелінійній теорії оболонки. На цьому типі оболонки внаслідок особливостей їх геометричної форми та НДС досліджуються та тестуються в осесиметричній та неосесиметричній постановках нелінійні задачі, методи й алгоритми їх розв'язання, чому присвячена численна література.

У геометрично нелінійному процесорі ПК ЛІРА застосовується кроковий алгоритм, у якому на кожному кроці навантаження відслідковується вироджуваність матриці лінеаризованої системи розв'язувальних рівнянь. Навантаження, при якому ця матриця вироджується, приймається за критичне. Таким чином, розв'язування задачі нелінійного деформування реалізується лише або до точки розгалуження, або до точки верхнього критичного навантаження. Дослідження закритичного стану конструкції непередбачене. При розрахунку за ПК ЛІРА скінченноелементна модель оболонки (СЕМО) моделювалася двома типами нелінійних оболонкових СЕ сталі товщини: у полюсі використовувався трикутний СЕ № 342, на інших ділянках – чотирикутний СЕ № 344.

Розглядалися пологі сферичні панелі обертання сталі товщини, що жорстко затиснуті вздовж контуру та навантажені рівномірним нормальним тиском інтенсивністю  $q$  (рис. 1). Приймались наступні дані: вихідна (“базова”) товщина  $h^* = 0.01$  м, радіус серединної поверхні  $R = 1002.5h^*$ , радіус опорного контуру  $a = 100h^*$ , модуль пружності  $E = 19.6 \cdot 10^4$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ . Діапазон зміни товщини оболонки визначався з досліджень [1,2,7], де з метою пошуку раціональніших законів розподілу товщини (з точки зору витрати матеріалу) досліджувався вплив на стійкість оболонки різних варіантів сталі та лінійно-змінної за меридіаном товщини. Порівнювалися

оболонки з трьома законами лінійної зміни товщини, що мали однаковий об'єм  $V$ . У першому варіанті “базова” товщина панелі була зафіксована у центрі, а товщина на контурі змінювалася. У другому, навпаки, “базова” товщина була зафіксована на контурі панелі, а товщина у центрі змінювалася. У третьому способі товщина панелі була сталою:

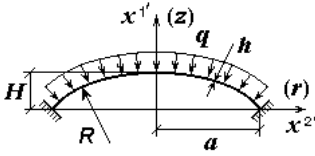


Рис. 1

$$h(\bar{r}) = h^* b_V, \quad (1)$$

де  $b_V = h_V/h^*$  – безрозмірний параметр, що чисельно характеризує відмінність сталої товщини панелі  $h_V$  від “базової”  $h^*$ .

Товщина панелі  $h_V$ , як функція об'єму оболонки  $V$ , визначалася за співвідношенням

$$h_V \approx V/(2\pi HR). \quad (2)$$

Для першого способу в [8] виконано порівняльний аналіз розв'язків з результатами Б.Я. Кантора [9], а в [3] - з результатами, що були отримані в ПК ЛІРА. Для другого способу результати досліджень наведені в [4]. На розглянутих конструкціях порівняння результатів розрахунків продемонструвало гарний збіг нелінійних розв'язків у докритичній області та в момент втрати стійкості.

Порівняння розв'язків для оболонок сталої товщини (1) - (2) за МССЕ та ПК ЛІРА наведено на рис. 2 – рис. 4 та в таблиці з використанням безрозмірних параметрів  $\bar{q} = q/E \cdot (a/h^*)^4$  та  $\bar{u}^1 = u^1/h^*$ , де  $u^1$  – прогин центра панелі в декартовій системі координат  $x^i$ . За розрахункову СЕМО прийнято чверть оболонки з сіткою  $20 \times 20$  СЕ.

На діаграмах “навантаження – прогин центра панелі” спостерігається практично повний збіг розв'язків у докритичній області. Верхня критична точка, що отримана в ПК ЛІРА, позначена зірочкою “\*”. Для панелі при  $b_V = 1$  ПК ЛІРА визначив точку розгалуження розв'язку  $\bar{q} = 94.9$  як критичну. За МССЕ точці розгалуження відповідає величина  $\bar{q} = 94.4$ , а величина верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^6 = 115.3$ . В точці розгалуження розбіжність розв'язків за величинами навантаження  $\bar{q}^*$  і переміщення  $\bar{u}_{кр}^{1*}$  центра панелі становить +0.53 і +1.48% відповідно. В [1] для цієї панелі наведено порівняння результатів, отриманих за МССЕ та Б.Я. Кантором [9]. Відмічено практично повний збіг розв'язків за усією

діаграмою “навантаження – прогин” при незначному розбігу в 3.3% за величиною верхнього критичного навантаження.

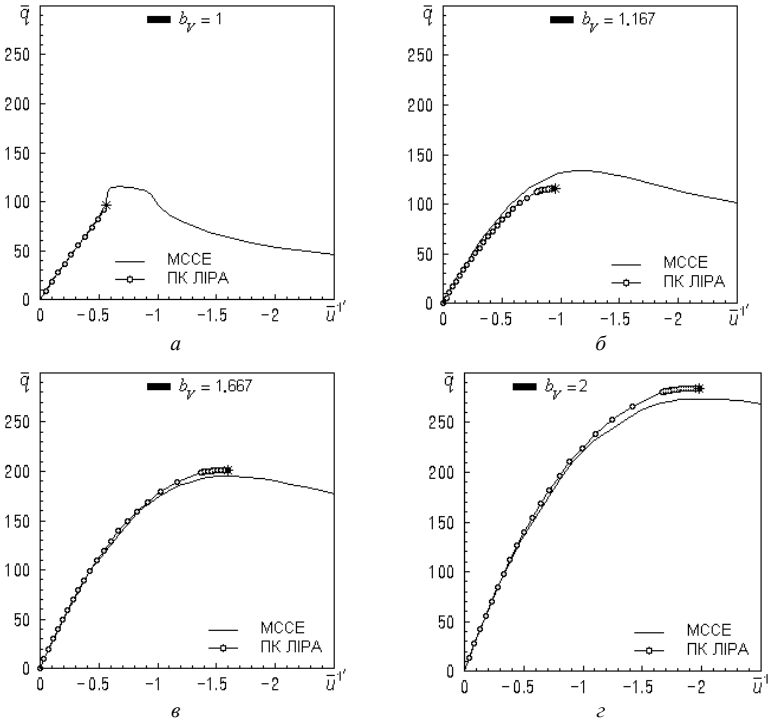


Рис. 2. Діаграми “навантаження – прогин центра панелі”

Виконано порівняння форм деформування оболонок (форм перерізу середньої поверхні вздовж радіусу) в момент, коли навантаження досягає значення  $\bar{q}^*$ , для  $b_V = 1$  (рис. 3, а) та  $\bar{q}_{кр}^6$  для  $b_V = 1.167, 1.667, 2$  (рис. 3, б – г). Вихідна форма панелі зображена штрих пунктирною лінією та має позначку  $\bar{q} = 0$ . Спостерігається повний збіг форм при усіх значеннях параметра  $b_V$ . Для панелей з параметром  $b_V = 1$  на рис 3, а продемонстрована відмінність форм деформування, що отримані за МССЕ в точці розгалуження ( $\bar{q}^*$ ) та у верхній критичній ( $\bar{q}_{кр}^6$ ). Найбільші прогини для цієї панелі при  $\bar{q} = \bar{q}_{кр}^6$  мають місце посередині меридіану з утворенням кільцевої вм'ятини. Зі зростанням товщини



панелі ( $b_V \geq 1.167$ ) найбільш деформована область зміщується у полюс оболонки (рис. 4, б) [1].

Таблиця

Порівняння розв'язків МССЕ і ПК ЛПА в особливих точках								
$b_V = 1$			$b_V = 1.167$		$b_V = 1.667$		$b_V = 2$	
$\bar{q}^*$	$\bar{u}_{кр}^{1*}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}_{кр}^{1e}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}_{кр}^{1e}$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}_{кр}^{1e}$
МССЕ								
94.4	0.539	115.3	134.2	1.151	194.8	1.515	274.0	2.138
ПК ЛПА								
94.9	0.547	—	115.5	0.948	201.2	1.599	284.8	2.025
$\Delta, \%$								
0.53	1.48	—	-13.93	-17.64	3.29	5.54	3.94	5.29

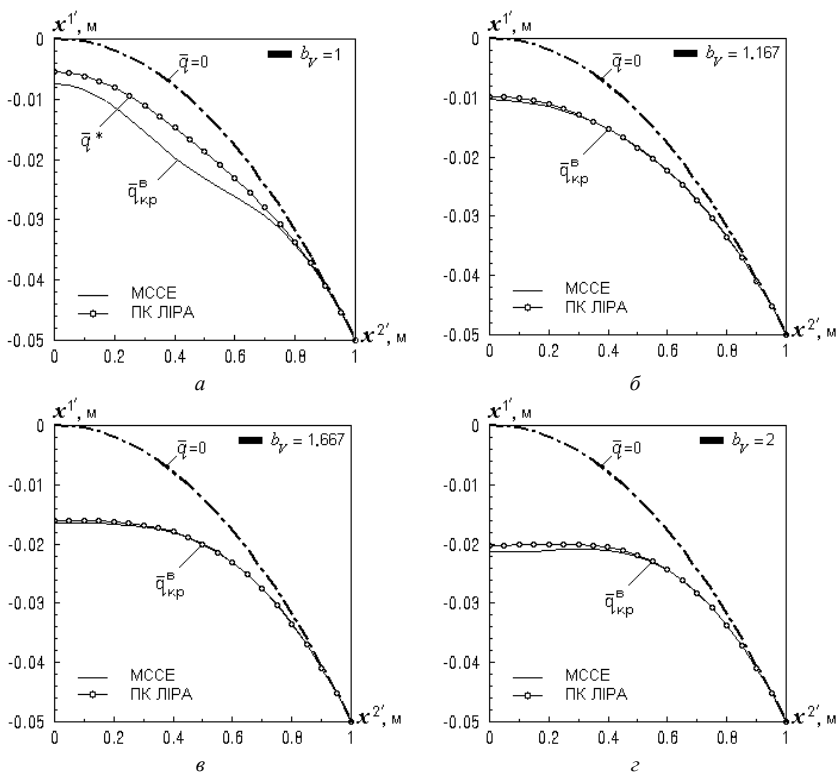


Рис. 3. Порівняння форм деформування

Практично повний збіг розв'язків у докритичній області підтверджує можливість застосування ПК ЛПА при розв'язанні геометрично нелінійної задачі стійкості пологих сферичних оболонок різної сталої товщини. ПК ЛПА може використовуватись як інструмент для зіставлення розв'язків при проведенні подібних досліджень.

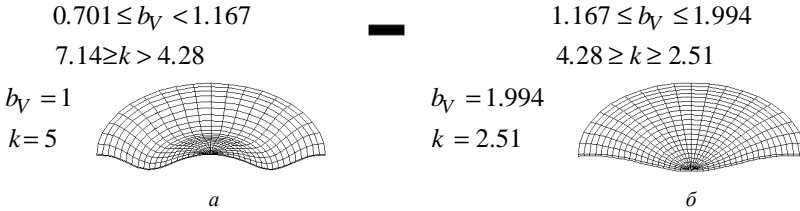


Рис. 4. Форми втрати стійкості оболонок при зміні параметра  $b_V$

Зазначимо існуючі у ПК ЛПА обмеження:

- 1) неможливість розрізнити точку розгалуження та точку верхнього критичного навантаження;
- 2) неможливість дослідження закритичної поведінки оболонок.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ “Віпол”, 2010. – 316 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Прикладная механика, 2009. – Т. 45. – № 9. – С. 3-40.
3. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б.* Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості тонких пружних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 83. – С. 63-73.
4. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б., Тамілко О.А.* Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. – С. 89-95.
5. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О.* Порівняльний аналіз нелінійного деформування та стійкості гранованих оболонок ступінчато-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С. 131-139.
6. ЛПА 9.2. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие. / *Е.Б. Стрелец-Стрелецкий, Ю.В. Гензерский, М.В. Лазнюк, Д.В. Марченко, В.П. Титок.* – К.: «Факт», 2005. – 146 с.
7. *Соловей М.О., Кривенко О.П.* Аналіз стійкості гладких лінійно-змінної та гранованих ступінчато-змінної товщини пологих сферичних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 83-96.

8. *Баженев В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.* Устойчивость пологих оболочек вращения линейно-переменной толщины // *Авиационно-космическая техника и технология.* - 2004. - N 2 (10). - С. 18-25.
9. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. – К.: Наукова думка, 1974. - 136 с.

*Стаття надійшла до редакції 01.07.2011 р.*

*Соловей Н.А., Кривенко О.П., Дубина А.С.*

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ СФЕРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ**

Приведено сравнение результатов расчета нелинейного деформирования и потери устойчивости сферических круглых в плане панелей разной постоянной толщины, полученных по моментной схеме конечных элементов и с помощью программного комплекса ЛИРА.

*Solovey M.O., Kryvenko O.P., Dubyna O.S.*

**COMPARATIVE ANALYSIS OF APPROACHES TO STABILITY OF FLEXIBLE SPHERICAL PANELS WITH CONSTANT THICKNESS AT UNDER ACTION OF UNIFORM PRESSURE**

Comparison of results for problems of nonlinear deformation and the loss of stability by spherical panels with round configuration in plan and different constant thickness has been investigated. These results have been received by the moment scheme of finite elements and by the program complex Lira.

УДК 539.375

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

С.О. Пискунов, д-р техн. наук

С.В. Мицюк

## **ВИЗНАЧЕННЯ РЕСУРСУ ПРИЄДНУВАЛЬНОГО ШТУЦЕРА В УМОВАХ БАГАТОЦИКЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ПОЧАТКОВИХ ДЕФЕКТІВ**

Створено і апробовано нові скінченні елементи, які дозволяють проводити моделювання дефектів у вигляді вихідних відхилень геометричних розмірів та фізико-механічних властивостей матеріалу від номінальних значень, а також утворених областей руйнування. На основі підходів континуальної механіки руйнування проведено визначення величини ресурсу в приєднувальному штуцері при наявності початкових дефектів.

**Вступ.** Обчислення несучої здатності і визначення ресурсу відповідальних елементів конструкцій з дефектами потребує визначення напружено-деформованого стану (НДС) в просторовій постановці. Ці дефекти можуть бути пов'язані із незначним відхиленням площі поперечного перерізу і механічних характеристик від номінальних, а також являти собою початкові тріщини (початкові дефекти). Крім того в процесі експлуатації можуть виникати дефекти, пов'язані зі зміною фізико-механічних характеристик матеріалу внаслідок деформування під дією зовнішніх навантажень (набуті дефекти).

Відомо, що зовнішнє багатоциклове навантаження призводить до накопичення пошкодженості матеріалу. Величина розрахункового ресурсу елемента конструкції при цьому визначається кількістю циклів навантаження до досягнення пошкодженістю критичного значення. Після цього відбувається утворення і розвиток зони континуального руйнування - області із суттєво відмінними від вихідних фізико-механічними властивостями. Моделювання її розвитку до певного критичного розміру, після досягнення якого відбувається майже миттєве руйнування об'єкту, є підґрунтям для визначення залишкового ресурсу. При цьому час до досягнення зоною континуального руйнування розмірів, сумірних із розмірами об'єкту, є граничним ресурсом.

Приєднувальний штуцер являє собою тіло обертання, ефективним засобом для визначення НДС якого є напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ) [1,2].

Метою даної роботи є створення методики визначення напружено-деформованого стану просторових тіл обертання при багатоцикловому навантаженні на основі НМСЕ із використанням підходів континуальної

механіки руйнування і визначення на цій основі розрахункового і залишкового ресурсу приєднувального штуцера. На сьогоднішній день розв'язки подібних задач майже відсутні [2,3,7].

Розв'язання поставленої задачі потребує вибору співвідношень для опису процесу континуального руйнування при багатоцикловому навантаженні, створення ефективної скінченноелементної бази НМСЕ для моделювання початкових і набутих дефектів, розробку алгоритмів, визначення параметрів пошкодженості та моделювання зон континуального руйнування і проведення розв'язання відповідних тестових прикладів для перевірки їх достовірності.

**1. Постановка задачі.** Розглядуваний об'єкт - приєднувальний штуцер швидкодіючого клапану установки «Полімір-50» для синтезу поліетилену під високим тиском - являє собою масивне тіло обертання із ступінчастою змінною геометрією меридіонального перерізу (рис. 1). Штуцер виготовлений із сталі 08X14АН4МДБ, для якої коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ ; модуль пружності  $E = 2.03 \cdot 10^5$  МПа; межа текучості при розтязі  $\sigma_T = 1045$  МПа, межа міцності  $\sigma_B = 1300$  МПа. Приєднувальний штуцер знаходиться під дією циклічного навантаження - внутрішнього тиску величиною  $q = 245.25$  МН/м<sup>2</sup>, частота зміни навантаження становить 50 Гц.

Дуже часто при виготовленні виробів складної форми із суцільного матеріалу особливості технології виготовлення й обробки призводять до певних змін фізико-механічних

властивостей матеріалу, які в більшій частині випадків локалізуються в деякій області

порівняно невеликого розміру. Кількісний опис впливу таких змін на характеристики деформування може здійснюватися шляхом урахування відхилень констант матеріалу, що визначають його фізико-механічні властивості, від їх номінальних значень. Тому становить інтерес визначення впливу таких дефектів на величину ресурсу.

**2. Вихідні співвідношення теорії пружності і континуального руйнування при багатоцикловому навантаженні.**

Під впливом прикладеного навантаження відбувається пружне деформування об'єкта, опис якого здійснюється на основі закону Гука:

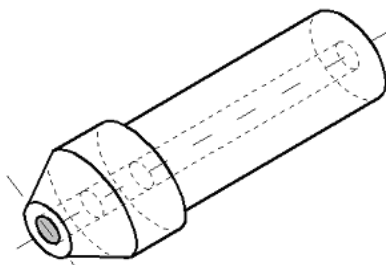


Рис. 1. Загальний вигляд приєднувального штуцера

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (2.1)$$

де  $C^{ijkl}$  - компоненти тензора пружних констант, які визначаються за величинами коефіцієнта Пуассона  $\nu = \nu(z^{i'}, T)$  і модуля пружності матеріалу (модуль Юнга),  $\sigma_{ij}$  - напруження,  $\varepsilon_{ij}$  - деформація.

Загальний вираз для визначення пошкодженості при багатоцикловому навантаженні, що ґрунтується на концепції пошкодженості Ю.Н.Работнова  $D_s < D^* \approx 1$ , має вигляд [10]:

$$\frac{dD}{dN} = A \left( \frac{\sigma}{\sigma_B (1-D)} \right)^n, \quad (2.2)$$

де  $A$  та  $n$  – експериментально визначені константи;  $\sigma_B$  – межа міцності матеріалу,  $\sigma$  - діюче напруження,  $N$  - кількість циклів навантаження.

Розв'язок рівняння (2.2) в замкненому вигляді дозволяє отримати вираз для величини пошкодженості, накопиченої за кількість циклів навантаження  $N$  у вигляді:

$$D = 1 - (n+1) \sqrt[1 - \frac{A}{(n+1) \sigma_B^n} \int_0^N \sigma^n dN], \quad (2.3)$$

де  $N$  - кількість циклів навантаження в даний момент часу ( $0 \leq N \leq N^*$ ),  $N^*$  - кількість циклів навантаження до досягнення параметром пошкодженості критичного значення  $D^*$ .

Константи рівняння (2.2) визначаються із використанням кривої втоми  $N = A \sigma^{-n}$  [4]. Такий підхід не потребує додаткових експериментальних випробувань для визначення констант рівняння накопичення пошкодженості при циклічному навантаженні.

**3. Круговий СЕ для моделювання початкових і набутих дефектів.** Для дискретизації тіл обертання в НМСЕ використовується неоднорідний круговий скінченний елемент, що являє собою криволінійну призму утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж твірної у вигляді дуги кола (рис. 2).

При виведенні розв'язувальних співвідношень кругового неоднорідного СЕ для моделювання початкових і набутих дефектів для геометричних і фізико-механічних параметрів прийнято наступні гіпотези: визначник матриці, складеної з компонент метричного тензора  $g_{ij}$ , і компоненти тензору пружних сталей дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перерізу СЕ:

$$g = \overset{\circ}{g} = g|_{x^\alpha=0}, \quad C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}^{ijkl} = C^{ijkl}|_{x^\alpha=0}.$$

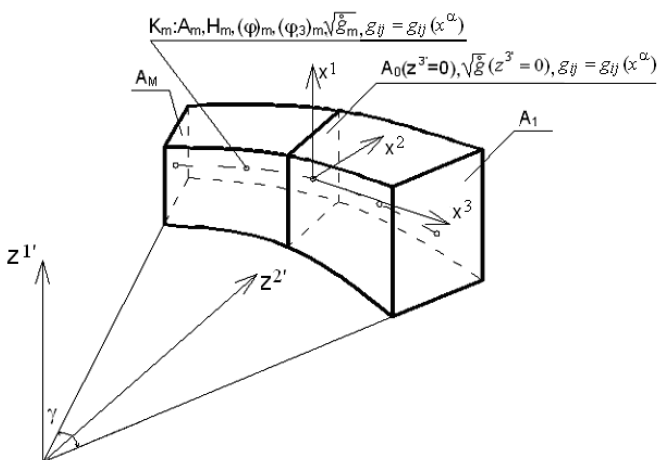


Рис. 2. Круговий скінчений елемент для моделювання дефектів.

Моделювання початкових дефектів у вигляді площі поперечного перерізу тіла передбачає, що конфігурація поперечного перерізу СЕ зберігається незмінною (рис. 2), а площа може змінюватись за законом:

$$A(z^3) = A_0 f(z^3),$$

де  $A_0$  - площа поперечного перерізу при  $z^3 = 0$ ,  $f(z^3)$  – монотонна безперервна функція,  $z^3$  – координатна вісь спрямована вздовж твірної. Для урахування змінності площі поперечного перерізу вважається, що визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора  $g_{ij}$ , є змінним за твірною і обчислюється на основі вихідних даних про геометрію досліджуваного об'єкта – заданого закону змінення площі поперечного перерізу – із використанням співвідношення [6]:

$$\sqrt{g(z^3)} = \frac{A(z^3)}{A_0} \sqrt{g|_{z^3=0}} = f(z^3) \sqrt{g|_{z^3=0}}. \quad (3.1)$$

Вздовж вісі СЕ, згідно до вимог правила інтегрування Гауса, розташовано  $M$  точок інтегрування.

Розподіл переміщень у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right). \quad (3.2)$$

У напрямку твірної переміщення апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій  $\phi^l$  – поліномам Лагранжа ( $l=0,1$ ) і Міхліна ( $l=2,\dots,L$ )

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L \bar{u}_{m'}^l \phi^{(l)}, \quad (3.3)$$

де

$$\phi^{(0)} = \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \phi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3), \quad \phi^{(l)} = f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)},$$

$$f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}},$$

$$p^{(l)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)!(k!)^2 2^{k+1}} \left[ (1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right] -$$

поліноми Лагранжа.

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [1,2,9] компоненти тензора повних фізичних деформацій у поперечному перерізі, що відповідає певній точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\overset{\circ}{\xi}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\xi}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\xi}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\xi}_{12} = \overset{\circ}{\xi}_{12};$$

$$\overset{\circ}{\xi}_{\alpha 3} = \overset{\circ}{\xi}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\xi}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\xi}_{33} = \overset{\circ}{\xi}_{33} + \overset{\circ}{\xi}_{33,\beta} x^\beta, \quad (3.4)$$

де  $\overset{\circ}{\xi}_{ij} = \overset{\circ}{\xi}_{ij}|_{x^\alpha=0}$ ,  $\overset{\circ}{\xi}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\xi}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}$  – значення величин деформацій і їх

похідних в центрі поперечного перерізу СЕ.

В цих формулах  $\overset{\circ}{\xi}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}$  – фізичні компоненти тензора деформацій;  $g_{ij} = g_{ij}(x^\alpha)$  – змінні в межах поперечного перерізу СЕ компоненти метричного тензора,  $g_{ij} = z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}$ ;  $z_i^{m'}$  – компоненти тензора перетворень місцевої  $x^j$  і базисної  $z^j$  систем координат.

Використання фізичних величин деформацій пов'язане з необхідністю ефективного урахування змінності геометричних параметрів в межах поперечного перерізу неортогональних СЕ, які дозволяють будувати раціональні дискретні моделі просторових тіл



складної форми. При цьому інші шляхи підвищення точності результатів при використанні неортогональних дискретних моделей (шляхом ортогоналізації СЕ сітки при її згущенні або із використанням чисельного інтегрування в поперечному перерізі) призводять до збільшення обсягів обчислювальних витрат.

Фізичні компоненти тензорів пружних констант і напружень дорівнюють:

$$\tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{ii} g_{jj} g_{kk} g_{ll}} \quad , \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{ii} g_{jj}} \quad . \quad (3.5)$$

При використанні фізичних величин деформацій кожний із лінійних коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій в (3.4) являє собою добуток нормуючого множника вигляду  $\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii} \overset{\circ}{g}_{jj}}}$  на ненормовану похідну від

деформації  $\left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,k} \right)_h$ , яка, в свою чергу містить два складники. Перший з

них являє собою власне похідні від компонент ненормованих деформацій в місцевій криволінійній системі координат СЕ, що використовуються для опису сталої в межах поперечного перерізу СЕ геометрії. Другий складник – це добуток величин деформацій на похідні від компонент метричного тензора, нормовані за їх значеннями в центрі поперечного

перерізу СЕ  $\overset{\circ}{h}_{ij,\delta}$ , що дозволяють враховувати змінність геометрії в межах поперечного перерізу СЕ. Таким чином, подання кожного із коефіцієнтів може бути виконано у вигляді:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,k} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii} \overset{\circ}{g}_{jj}}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,k} \right)_h = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii} \overset{\circ}{g}_{jj}}} \left[ \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,k} \right)_{const} + \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,k} \right)_{var} \right] .$$

Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи  $N$  СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0 \quad . \quad (3.6)$$

Варіація енергії деформації одного СЕ, може бути записана у вигляді:

$$\delta W_n = \iiint_{V_n} \tilde{\varepsilon}_{kl} \tilde{C}^{ijkl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV_n \quad ,$$

де  $dV_n = \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2 dx^3$  – об'єм  $n$ -го СЕ.

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком  $x^3$  з урахуванням змінності геометричних характеристик вздовж утворюючої, отримаємо вираз для матриці жорсткості СЕ:

$$[K]_{ln} = \left\{ \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta} \right]^T \left[ \overset{\circ}{D} \right] \left[ \overset{\circ}{B}_{\gamma} \right] [g]_{\beta\gamma}^{ln} + \frac{1}{12} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^T \left[ \overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] \left[ \overset{\circ}{B}_{\gamma,\alpha} \right] [g]_{\beta\gamma\alpha}^{ln} \right\},$$

$$[g]_{\beta\gamma}^{ln} = \sum_{m=1}^M \left( \Psi_{\beta}^{(l)} \Psi_{\gamma}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} H \right)_m, \quad [g]_{\beta\gamma\alpha}^{ln} = \sum_{m=1}^M \left( \Psi_{\beta}^{(l)} \Psi_{\gamma}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} H \right)_m, \quad (3.7)$$

$$\beta = 1 \quad \Psi_{\beta}^{(l)} = \varphi_m^{(l)}, \quad \beta = 2 \quad \Psi_{\beta}^{(l)} = \varphi_{3,m}^{(l)}, \quad \gamma = 1 \quad \Psi_{\gamma}^{(n)} = \varphi_m^{(n)}, \quad \gamma = 2 \quad \Psi_{\gamma}^{(n)} = \varphi_{3,m}^{(n)},$$

де  $[\overset{\circ}{D}]$  і  $[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}]$  – матриці пружних характеристик матеріалу:

$$\left[ \overset{\circ}{D} \right] = \begin{bmatrix} c^{1111} & c^{1112} & c^{1122} & c^{1113} & c^{1123} & c^{1133} \\ c^{1211} & c^{1212} & c^{1222} & c^{1213} & c^{1223} & c^{1233} \\ c^{2211} & c^{2212} & c^{2222} & c^{2213} & c^{2223} & c^{2233} \\ c^{1311} & c^{1312} & c^{1322} & c^{1313} & c^{1323} & c^{1333} \\ c^{2311} & c^{2313} & c^{2322} & c^{2313} & c^{2323} & c^{2333} \\ c^{3311} & c^{3312} & c^{3322} & c^{3313} & c^{3323} & c^{3333} \end{bmatrix};$$

$$[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}] = \left[ \overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[ \overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[ \overset{\circ}{C}^{ij33} \right]. \quad (3.8)$$

Для моделювання особливостей НДС в місці розташування набутих дефектів, пов'язаних із досягненням параметром пошкоженості критичного значення і утворення зон руйнування, створено круговий СЕ із змінними фізико-механічними характеристиками (рис. 3), де передбачається виконання умов рівності нулю додатних головних напружень в межах відповідної області. Для реалізації цих умов проводиться відповідна корекція компонент тензора пружних сталей.

Розглянемо область в околі точки  $K_m$ , розміри якої визначені поперечним перерізом СЕ, а в напрямку утворюючої – половиною відстаней до суміжних точок інтегрування  $K_{m-1}$  і  $K_{m+1}$ .

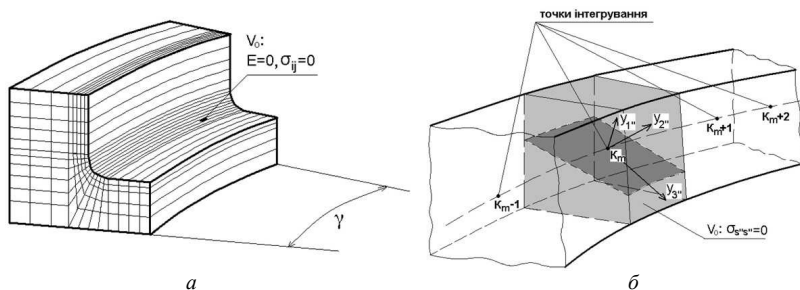


Рис. 3. Моделювання розвитку зони континуального руйнування а – початковий дефект,  $N = N^*$ ; б – характерні розміри об'єму  $V_0$  при скінченноелементній дискретизації НМСЕ

Нехай потрібно задовольнити умови рівності нулю головних напружень, що діють в напрямках вісей координат  $y^i$ .

Розглянемо умову:

$$\sigma^{11} = 0. \quad (3.9)$$

Подамо у формулі (3.9) напруження через деформації на основі закону Гука (2.1):

$$\sigma^{11} = C^{1111} \varepsilon_{11} + C^{1122} \varepsilon_{22} + C^{1133} \varepsilon_{33} = 0,$$

звідки визначимо  $\varepsilon_{11}$ :

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} \frac{C^{1122}}{C^{1111}} - \varepsilon_{33} \frac{C^{1133}}{C^{1111}}. \quad (3.10)$$

Виразимо деякий компонент тензора напружень, наприклад  $\sigma^{22}$ , через деформації з урахуванням виразу (3.10):

$$\begin{aligned} \sigma^{22} = C^{2211} & \left( -\varepsilon_{22} \frac{C^{1122}}{C^{1111}} - \varepsilon_{33} \frac{C^{1133}}{C^{1111}} \right) + \\ & + C^{2222} \varepsilon_{22} + C^{2233} \varepsilon_{33} \end{aligned} \quad (3.11)$$

і зведемо подібні:

$$\sigma^{22} = \left( C^{2222} - \frac{C^{2211} C^{1122}}{C^{1111}} \right) \varepsilon_{22} + \left( C^{2211} - \frac{C^{2211} C^{1133}}{C^{1111}} \right) \varepsilon_{33}.$$

У випадку дотримання умови:

$$\sigma^{22} = 0 \quad (3.12)$$

на основі закону Гука (2.1) отримаємо:

$$\sigma^{22} = C^{2211} \varepsilon_{11} + C^{2222} \varepsilon_{22} + C^{2233} \varepsilon_{33} = 0,$$

звідки визначимо  $\varepsilon_2^{2''}$ :

$$\varepsilon_2^{2''} = -\varepsilon_1^{1''} \frac{C^{2''2''1''1''}}{C^{2''2''2''2''}} - \varepsilon_3^{3''} \frac{C^{2''2''3''3''}}{C^{2''2''2''2''}}. \quad (3.13)$$

Виразимо деякий компонент тензора напружень, наприклад  $\sigma^{1''1''}$ , через деформації з урахуванням виразу (3.13):

$$\begin{aligned} \sigma^{1''1''} = & C^{1''1''1''1''} \varepsilon_1^{1''1''} + C^{1''1''2''2''} \left( -\varepsilon_1^{1''} \frac{C^{2''2''1''1''}}{C^{2''2''2''2''}} - \varepsilon_3^{3''} \frac{C^{2''2''3''3''}}{C^{2''2''2''2''}} \right) + \\ & + C^{1''1''3''3''} \varepsilon_3^{3''3''}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Зведемо подібні:

$$\sigma^{1''1''} = \left( C^{1''1''1''1''} - \frac{C^{1''1''2''2''} C^{2''2''1''1''}}{C^{2''2''2''2''}} \right) \varepsilon_1^{1''1''} + \left( C^{1''1''3''3''} - \frac{C^{1''1''2''2''} C^{2''2''3''3''}}{C^{2''2''2''2''}} \right) \varepsilon_3^{3''3''}.$$

Аналогічно для випадку  $\sigma^{3''3''} = 0$  отримаємо:

$$\sigma^{3''3''} = C^{3''3''1''1''} \varepsilon_1^{1''1''} + C^{3''3''2''2''} \varepsilon_2^{2''2''} + C^{3''3''3''3''} \varepsilon_3^{3''3''} = 0,$$

звідки визначимо  $\varepsilon_3^{3''3''}$ :

$$\varepsilon_3^{3''3''} = -\varepsilon_1^{1''} \frac{C^{3''3''1''1''}}{C^{3''3''3''3''}} - \varepsilon_2^{2''} \frac{C^{3''3''2''2''}}{C^{3''3''3''3''}}. \quad (3.15)$$

Тоді з урахуванням зведення подібних складників:

$$\begin{aligned} \sigma^{1''1''} = & C^{1''1''1''1''} \varepsilon_1^{1''1''} + C^{1''1''2''2''} \varepsilon_2^{2''2''} + C^{1''1''3''3''} \left( -\varepsilon_1^{1''} \frac{C^{3''3''1''1''}}{C^{3''3''3''3''}} - \varepsilon_2^{2''} \frac{C^{3''3''2''2''}}{C^{3''3''3''3''}} \right) = \\ = & \left( C^{1''1''1''1''} - \frac{C^{1''1''3''3''} C^{3''3''1''1''}}{C^{3''3''3''3''}} \right) \varepsilon_1^{1''1''} + \left( C^{1''1''2''2''} - \frac{C^{1''1''3''3''} C^{3''3''2''2''}}{C^{3''3''3''3''}} \right) \varepsilon_2^{2''2''}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Оскільки при обчисленні матриці жорсткості використовується зв'язок між напруженнями і деформаціями, які подані компонентами в місцевій системі координат  $x^k$ , виразимо напруження через їхні значення в системі координат  $y^{i''}$ :

$$\sigma^{mn} = \sigma^{i''j''} x_{i''}^m x_{j''}^n, \quad (3.17)$$

де  $x_{i''}^m$  - компоненти тензора перетворень.

Подаючи напруження через деформації, запишемо:

$$\sigma^{mn} = x_{i''}^m x_{j''}^n C^{i''j''k''l''} \varepsilon_{kl}. \quad (3.18)$$

Виразимо деформації в системі  $y^i$  через їхні значення в місцевій системі координат

$$\varepsilon_{k^i l^j} = \varepsilon_{st} x_{,k^i}^s x_{,l^j}^t, \quad (3.19)$$

та отримаємо вираз закону Гука для спеціальних СЕ:

$$\sigma^{mn} = C_{123}^{*mnst} \varepsilon_{st}. \quad (3.20)$$

Корекція тензора пружних констант матеріалу  $C^{mnst}$ , зображеного компонентами в місцевій системі координат, на поверхні тріщини проводиться згідно з формулою:

$$C_{123}^{*mnst} = C_{123}^{mnst} - C_1^{mnst}, \quad (3.21)$$

де доданки  $C_1^{mnst}$ , що обумовлені відсутністю напружень  $\sigma^{11}$  відповідно, для ізотропного матеріалу визначаються співвідношеннями:

$$C_1^{mnst} = \frac{C^{mn11} C^{11st}}{C^{1111}}. \quad (3.22)$$

Змішані компоненти тензора пружних сталей виражаються через компоненти, які зображені в системі координат  $y^i$ :

$$C^{mn1k} = C^{ij1k} x_{,i^m}^j x_{,i^n}^k, \quad (3.23)$$

де

$$C^{2^2 1^1 1^1} = \lambda g^{1^1 1^1} g^{2^2 2^2}, \quad C^{3^3 1^1 1^1} = \lambda g^{1^1 1^1} g^{3^3 3^3}, \\ C^{1^1 2^1 1^1 2^1} = \mu g^{1^1 1^1} g^{2^2 2^2}, \quad C^{1^1 3^1 1^1 3^1} = \mu g^{1^1 1^1} g^{3^3 3^3},$$

$$x_{,i^m}^m = x_{,k^i}^m z_{,i^n}^{k^i}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} - \text{константи Ламе [5]}.$$

Урахування змінності фізико-механічних характеристик в напрямку утворюючої призводить до необхідності їх інтегрування вздовж напрямку  $x^3$ , що суттєво ускладнює вирази матриці жорсткості і збільшує трудомісткість розв'язання задачі. Отриманий при цьому вираз матриці жорсткості матиме наступний вигляд:

$$[K]_{ln} = \left\{ \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta} \right]^T [D]_{\beta\gamma}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{\gamma} \right] + \frac{1}{12} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^T [D]_{\beta\gamma\alpha}^{ln} \left[ \overset{\circ}{B}_{\gamma,\alpha} \right] \right\}, \\ [D]_{\beta\gamma}^{ln} = \sum_{m=1}^M \left( \Psi_{\beta}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D} \right] \Psi_{\gamma}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g} H} \right)_m, \quad [D]_{\beta\gamma\alpha}^{ln} = \sum_{m=1}^M \left( \Psi_{\beta}^{(l)} \left[ \overset{\circ}{D}, \alpha \right] \Psi_{\gamma}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g} H} \right)_m,$$

$$\begin{aligned} \beta = 1 \quad \Psi_{\beta m}^{(l)} &= \Phi_m^{(l)}, \quad \beta = 2 \quad \Psi_{\beta m}^{(l)} = \Phi_{,3 m}^{(l)}, \\ \gamma = 1 \quad \Psi_{\gamma m}^{(n)} &= \Phi_m^{(n)}, \quad \gamma = 2 \quad \Psi_{\gamma m}^{(n)} = \Phi_{,3 m}^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Важливою перевагою розробленого способу моделювання зон континуального руйнування, що ґрунтується на відповідній корекції механічних характеристик матеріалу за формулами (5.10) – (5.13), є можливість використання при обчисленні коефіцієнтів матриці жорсткості спеціальних СЕ тих самих співвідношень, що і для звичайних СЕ, обмежуючись лише корекцією елементів матриць пружних сталей [D] [2].

**4. Алгоритм визначення напружено-деформованого стану і розв’язання задач континуального руйнування при багаточисловому навантаженні на основі НМСЕ.** В загальному випадку процес циклічного навантаження може здійснюватись із змінними параметрами циклу (середнім значенням напруження і амплітуди). Для моделювання процесу деформування і континуального руйнування процес навантаження необхідно розділити на певну кількість етапів – кроків розв’язання задачі –  $S^*$ , при цьому в межах кожного етапу  $s$  ( $s = 1, 2, \dots, S^*$ ) навантаження відбувається із сталим середнім напруженням  $\sigma_{0s}$  і сталою амплітудою  $\sigma_{as}$  протягом  $N_s$  циклів. При цих параметрах навантаження на кожному кроці виконується визначення напружено-деформованого стану, що потребує розв’язання систем рівнянь НМСЕ з використанням блочно-ітераційних алгоритмів.

На кожній ітерації  $k$  кроку розв’язання задачі (етапу навантаження)  $s$  вектор невідомих амплітудних переміщень системи рівнянь НМСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u\}_k^s = \{u\}_{k-1}^s + \{\Delta u\}_k^s = \{u\}_{k-1}^s + [K]_{\lambda\lambda}^{-1} \left( \{P\}^s - \{R\}_k^s \right), \quad (4.1)$$

де  $\{P\}^s$  – вектор вузлових навантажень на кроці  $s$ ;

$$\left\{ R \right\}_l^{k-1} = \sum_{m=0}^{l-1} [K]_{lm} \{U\}_m^k + \sum_{m=l}^L [K]_{lm} \{U\}_m^{k-1} - \text{вектор вузлових реакцій на}$$

ітерації  $k$ , обчислений за величинами напружень  $\sigma_{ij}$ , що відповідають значенням параметрів циклу навантаження;  $[K]_{lm}$  – матриця жорсткості дискретної моделі.

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L \left( \{ \Delta u \}_l^k \right)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L \left( \{ u \}_l^k \right)^2, \quad (4.2)$$

де  $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$  – параметр точності розв’язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отриманого розв’язку,  $l$  – номер члену у розкладі переміщень в ряд за поліномами при застосуванні НМСЕ [2].

В кінці кожного кроку визначається величина пошкодженості  $D_S$  за всю попередню історію навантаження ( за кількість циклів навантаження  $N_S = \sum_{s=1}^S N_s$  ). З цією метою використовується формула (2.3), яка подана з урахуванням покрової дискретизації процесу навантаження:

$$D_S = 1 - (n+1) \sqrt{1 - \frac{A}{(n+1)\sigma_B^n} \sum_{s=1}^S (\sigma_{as})^n N_s}. \quad (4.3)$$

Після визначення величин  $D_S$  для всіх СЕ тіла проводиться перевірка умови  $D_S < D^* \approx 1$ . Її виконання визначає розрахунковий ресурс об’єкта та момент утворення початкової зони континуального руйнування.

**5. Моделювання зони континуального руйнування при багатоциклового навантаженні.** Для моделювання зони континуального руйнування із використанням НМСЕ при виконанні умови локальної втрати несучої здатності, яка може бути подана у вигляді

$$D(N = N^*, z^{i'} = z^{i'*}) = D^*, \quad (5.1)$$

в відповідній точці з координатами  $z^{i'*} = \{ z^{1'*}, z^{2'*}, z^{3'*} \}$  ( $z^{1'*}, z^{2'*}$  – координати центра ваги поперечного перерізу СЕ,  $z^{3'*}$  – координата певної точки інтегрування  $K_m$ ) вводиться область об’ємом  $V_0$  (рис. 3,а). Величина об’єму  $V_0$  обумовлюється параметрами дискретної моделі: його розміри в площині  $z^1 - z^2$  визначаються розміром поперечного перерізу розглядуваного СЕ, а розмір  $\Delta z^3$  в напрямку вісі  $z^3$  в НМСЕ визначається як сума відстаней від точки інтегрування К до суміжних з нею точок  $K_{m-1}$  і  $K_{m+1}$  (рис. 3,б). Цей об’єм визначає мінімальне прирощення характерних розмірів зони континуального руйнування в процесі його розвитку.

Моделювання зони континуального руйнування здійснюється із використанням СЕ (рис. 3,б) для моделювання зміни фізико-механічних характеристик матеріалу і співвідношень (3.9-3.24) для корекції тензора пружних констант.

На наступних кроках визначення напружено-деформованого стану, параметра пошкодженості і часу до досягнення умови  $D = D^*$  в прилеглих до початкової зони континуального руйнування точках здійснюється для нової розрахункової схеми, що містить зону континуального руйнування за алгоритмом (4.1). При цьому відбувається поступове збільшення розміру зони шляхом приєднання до неї нових об'ємів  $V_n$  за проміжки часу  $N_n$ . Процедура проводиться до досягнення зоною континуального руйнування певного об'єму  $V = \sum_n V_n$  за кількість циклів  $N_V = \sum_n N_n$  (рис. 3,а).

Для перевірки вірогідності даного алгоритму розглянуто тестові задачі про моделювання зони континуального руйнування у товстостінній нескінченній трубці з внутрішнім (рис. 4,а) і зовнішнім (рис. 4,б) циклічно прикладеним тиском інтенсивністю  $q = 245.25 \text{ МН/м}^2$ . Внутрішній і зовнішній радіуси становлять  $r = 19 \text{ мм}$ . та  $R_0 = 59 \text{ мм}$ . відповідно.

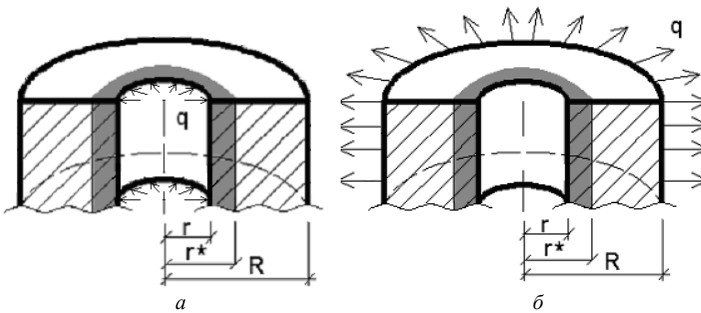


Рис.4. Розрахункова схема товстостінної нескінченної труби

Для отримання еталонного розв'язку, як для випадку зовнішнього так і внутрішнього навантаження використані результати аналітичного обчислення напружень в трубці із різними співвідношеннями зовнішнього і внутрішнього радіусів на основі розв'язку задачі Ламе [5]. За їх значеннями за формулою (4.3) визначають величини параметра пошкоджуваності.



При моделюванні розповсюдження зони континуального руйнування на кожному кроці напруження визначались із застосуванням зазначених аналітичних формул для нових розрахункових схем, що враховують зменшення внутрішнього радіусу на товщину шару зруйнованого матеріалу (рис. 5). Отримані напруження застосовуються для визначення пошкодженості. Ця процедура повторюється до моменту, коли швидкість розповсюдження зони континуального руйнування набуває лавиноподібного характеру, що відповідає повній втраті несучої здатності.

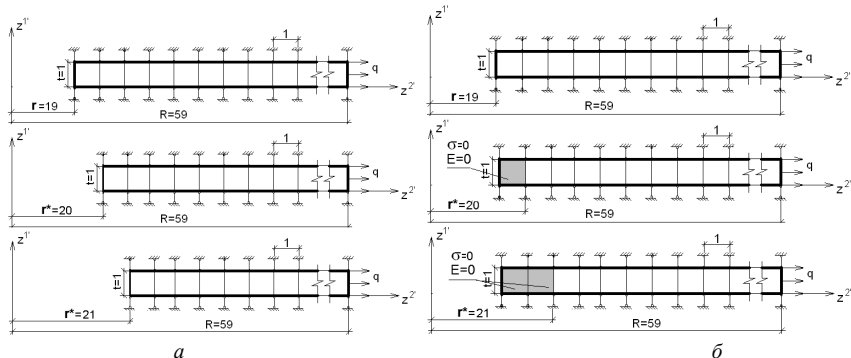


Рис. 5. Моделювання зони континуального руйнування на основі аналітичного розв'язку (а); і МСЕ (б).

В роботі [2] для моделювання зони континуального руйнування був запропонований алгоритм, що ґрунтується на реалізації в правій частині систем рівнянь умови порівнювання нулю напружень і модуля пружності матеріалу. Результати отримані із використанням розроблених СЕ для моделювання дефектів у вигляді зміни фізико-механічних характеристик матеріалу, що передбачає зміну матриці жорсткості об'єкта, для випадку руйнування труби під впливом зовнішнього тиску співпали із результатами отриманими на основі алгоритму, представленого в роботі [2]. Отримане розповсюдження зони руйнування по радіусу труби наведено на рис. 6. Як видно з наведеної на рис. 7 залежності радіусу зони руйнування від кількості циклів навантаження, розв'язання задачі за допомогою МСЕ та аналітичного розв'язку співпали між собою.

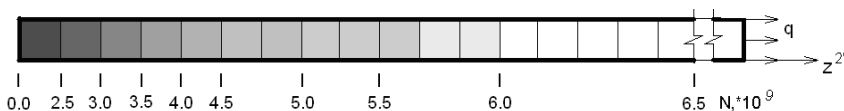


Рис. 6. Розповсюдження зони руйнування по товщині стінки циліндра при вісесиметричному деформуванні

Величина розрахункового ресурсу становить біля  $N = 2.5 \cdot 10^9$  циклів, при цьому процес розвитку зони континуального руйнування має прискорений характер. Залишковий ресурс складає  $N = 4.3 \cdot 10^9$  циклів, що майже в 2 рази більше від розрахункового (рис. 6).

У випадку дії внутрішнього тиску при реалізації умов  $\sigma_{ij} = 0$ ,  $E = 0$  в правій частині системи рівнянь збіжність ітераційного процесу порушується і розв'язок МСЕ отримати неможливо. В зв'язку з цим моделювання розвитку зони континуального руйнування, до меж якої прикладені внутрішні навантаження, може бути здійснено лише із виористанням розробленого СЕ, для моделювання зміни фізико-механічних характеристик матеріалу.

Характер залежності руйнування по товщині від кількості циклів навантаження (для випадку внутрішнього тиску) зображено на рис. 9.

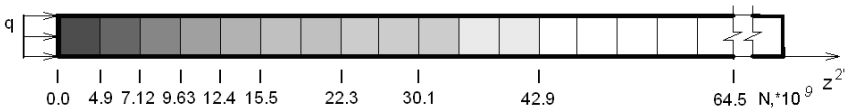


Рис.8 Розповсюдження зони руйнування по товщині стінки циліндра при вісесиметричному деформуванні

Отримані результати розв'язання задачі за МСЕ, НМСЕ та в аналітичній постановці повністю співпали між собою. Крім того як при дії зовнішнього (рис. 8), так і при дії внутрішнього (рис. 9) навантаження можна бачити, що розрахунковий ресурс складає менше 1/10 частини від часу до повної втрати несучої здатності, тому визначення залишкового ресурсу є необхідним.

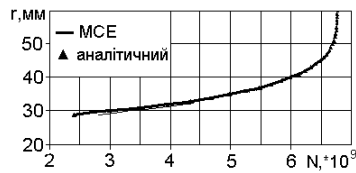


Рис.7. Залежність розвитку зони континуального руйнування по радіусу від кількості циклів навантаження

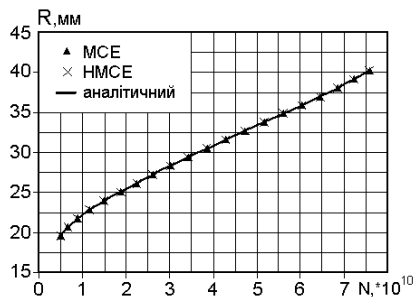


Рис.9. Залежність розвитку зони континуального руйнування по радіусу від кількості циклів навантаження

Таким чином розроблена методика моделювання зони континуального руйнування із використанням кругового СЕ зі змінними фізико-механічними характеристиками дозволяє проводити визначення залишкового ресурсу при багатоцикловою навантаженні.

**6. Визначення НДС і ресурсу приєднувального штуцера.** У випадку відсутності початкових дефектів визначення НДС штуцера може бути проведено у віссиметричній постановці. Для цього використані дискретні моделі з кількістю невідомих у поперечному перерізі  $N=1280$  (рис. 10,а) і  $N=1722$  (рис. 10,б). Отримані розподілення інтенсивності напружень у поперечному перерізі штуцера є ідентичними [3]. Результати визначення НДС подано у вигляді ізоліній розподілення колових напружень  $\sigma_{33}'$  по меридіональному перерізу приєднувального штуцера (рис. 10,в).

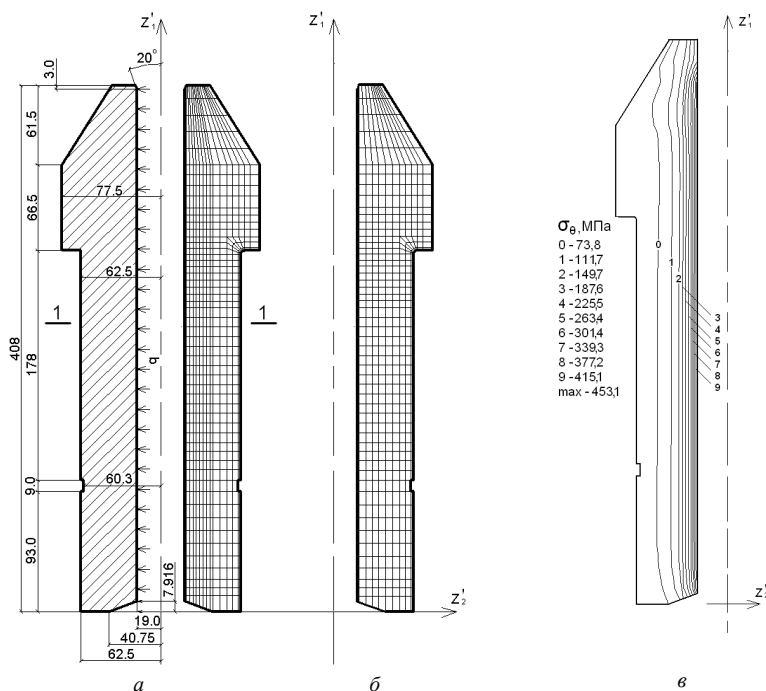


Рис.10. Розрахункова схема приєднувального штуцера (а); дискретні моделі (а,б); ізоліній розподілення колових напружень  $\sigma_{33}$

Розподілення інтенсивності напружень по висоті вздовж внутрішньої поверхні штуцера, де значення напружень є максимальними, наведено на

рис. 11,а. Як видно, в середній частині при  $(100 \leq z^I \leq 270)$ , що становить більше половини довжини штуцера, напруження змінюються несуттєво на відміну від частин при  $z^I \leq 100$  і  $z^I \geq 270$ , що пояснюється відповідною зміною площі поперечного перерізу і наближенням до торців. В цілому зміна параметрів напружено деформованого стану в межах поперечного перерізу відбувається лише за радіусом, незначні збурення наявні в місцях змін геометрії.

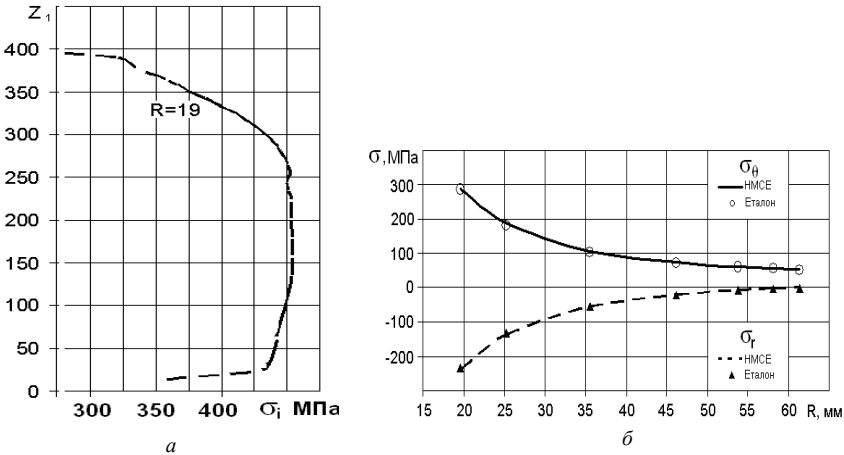


Рис.11. Розподілення колових напружень по висоті (а) та вздовж радіуса (б)

Значення напружень в зазначеній середній по висоті частині штуцера можуть бути отримані із використанням відомих формул розв'язання задачі про деформування товстостінного циліндра [5]. Так, при відсутності вихідного дефекту отримані розподілення колових напружень  $\sigma_{3,3}$  і радіальних напружень  $\sigma_{2,2}$  вздовж радіуса по перерізу 1-1 повністю збігаються (рис. 11,б) із зазначеним аналітичним розв'язком. Оскільки напруження на всій середній частині штуцера сталі, то величини пошкодженості і розрахункового ресурсу також можуть бути визначені аналітично на основі отриманих значень напружень (рис. 12), або на основі чисельного розв'язку у вісесиметричній постановці МСЕ, а також із використанням методики розв'язання просторових задач НМСЕ.

Визначення констант матеріалу рівняння (4.1) було здійснено на основі рівняння кривої втоми  $N = C\sigma^{-m} = 2 * 10^6 \sigma^{-4.267}$  [8]. Результати визначення розрахункового ресурсу подані у вигляді залежності пошкодженості від кількості циклів навантаження. Як видно, результати

МСЕ і НМСЕ повністю збігаються між собою і з аналітичним розв'язком, що розглядається як еталонний (рис. 12). Величина розрахункового ресурсу становить  $4.9 \cdot 10^9$  циклів.

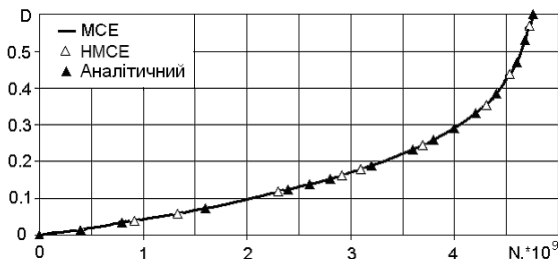


Рис. 12. Розвиток пошкодженості ( $R=19.54\text{мм}$ ) в залежності від кількості циклів навантаження

Для дослідження характеру накопичення пошкодженості в середині стінки штуцера та її величини на момент досягнення на внутрішній поверхні штуцера ( $R=19.54\text{мм}$ ) критичного значення пошкодженості було побудовано графік залежності параметра пошкодженості від кількості циклів при  $R=20.63\text{мм}$  та  $R=21.73\text{мм}$  (рис. 13). Як видно значення величин

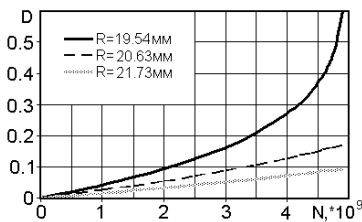


Рис. 13. Характер накопичення пошкодженості по товщині штуцера

пошкодженості по мірі віддалення від внутрішньої поверхні суттєво зменшується і вже на відстані понад 3 мм величина пошкодженості є незначною ( $D < 0.1$ ).

Таким чином, після вичерпання несучої здатності на внутрішній поверхні штуцера стінка залишається майже неушкодженою, отже деталь

зберігає герметичність і може знаходитись в експлуатації. Зважаючи на це становить інтерес моделювання зростання зони континуального руйнування по товщині стінки штуцера.

**7. Дослідження впливу початкових дефектів на величину залишкового ресурсу.** На наступному етапі розв'язання задачі було досліджено вплив початкових дефектів на величину ресурсу.

Досліджено вплив локальної області із погіршеними фізико-механічними властивостями (дефекту) на накопичення пошкодженості та

розрахунковий і залишковий ресурс при різних варіантах його розташування.

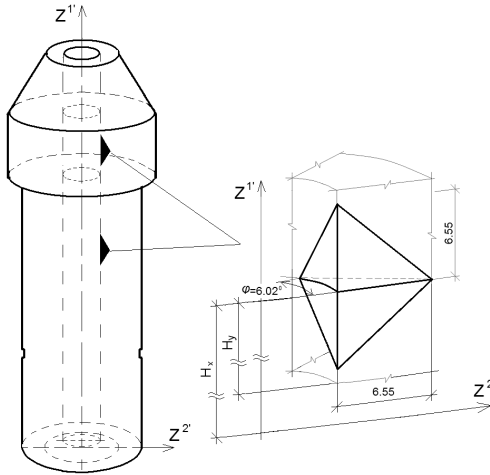


Рис.14. Місця розташування початкових дефектів матеріалу

Область являє собою трикутну призму симетричну відносно площини  $Z^1 - Z^2$ , половину якої зображено на рис.14. В межах цієї області ступеневий показник  $n$  рівняння накопичення пошкодженості (4.2) змінюється за лінійним законом по висоті  $Z^1$ , радіусу  $Z^2$  і коловій координаті  $Z^3$ . Максимальна відмінність від номінального значення становить 3%.

Розглянуто два варіанти розташування дефекту (зміни величини констант в площині поперечного перерізу (по осях  $Z^1$  та  $Z^2$ ,  $Z^3$ ) проілюстровано на рис. 15.) в об'єкті:

- в місці, де значення напружень обчислюються по аналітичним формулам (на висоті  $H_x = 215 \text{ мм}$ , де  $H_x$  – значення координати вздовж вісі  $Z^1$ , що визначає розташування дефекту), рис. 14.

- в місці, де напруження можуть бути визначенні тільки шляхом чисельного розв'язку, а рівень напружень достатньо великий (на висоті  $H_x = 300 \text{ мм}$ ), рис. 14.

Оскільки зміна фізико-механічних властивостей матеріалу має просторовий характер, то точне моделювання розвитку зони континуального руйнування можливе лише при розв'язку задачі в просторовій постановці. Однак, зважаючи на складність розв'язання

просторових задач, проведено дослідження вірогідності розв'язання цієї задачі у вісесиметричній, плоскій та просторових постановках.

Для моделювання зони континуального руйнування в об'єктах на основі МСЕ важливим є достатня точність обчислення напружень в околі зони руйнування, яка являє собою концентратор напружень.

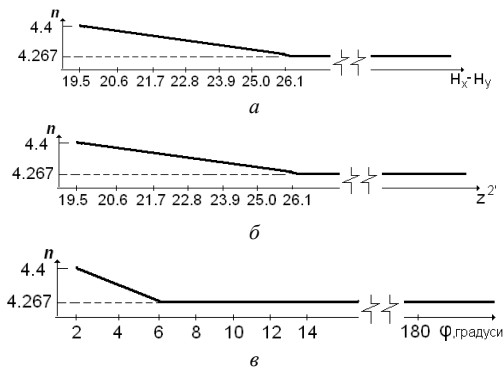


Рис. 15. Графіки зміни константи матеріалу вздовж вісї  $Z^1$

Згущення сітки відбувається в області змін фізико-механічних властивості матеріалу. Фрагмент сітки в цих областях можна бачити на рис.16,б.

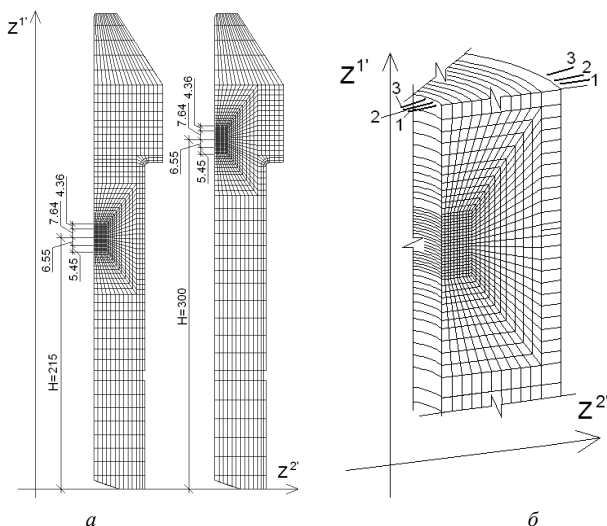


Рис.16. Скінченно-елементні моделі в залежності від розташування дефекту (а) та фрагмент згущення сітки в зоні дефекту (б)

Це призводить до необхідності використання згущеної сітки в області зони континуального руйнування. Поперечний переріз застосованих скінченно-елементних моделей НМСЕ показаний на рис. 16,а.

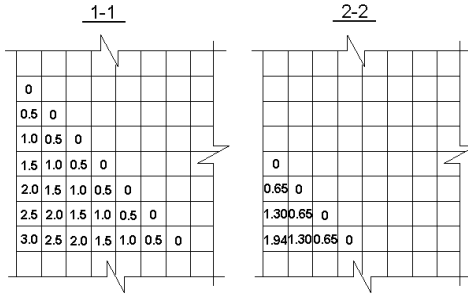


Рис.17. Схеми зміни констант матеріалу (у відсотках від номінального значення) в залежності від перерізу

В перерізах 1-1, 2-2, що відповідають розташуванню точок інтегрування вздовж колової координати  $CE$  (рис.16,б), зміна константи  $n$  в межах області відбувалась відповідно до схем наведених на рис.17. Цифри на схемах відповідають відмінності зазначеної константи матеріалу від номінального значення у відсотках. В перерізу 3-3 (рис.16,б) константи дорівнювали номінальним.

Як свідчать наведені на рис. 18 залежності пошкодженості на внутрішній поверхні штуцера від кількості циклів, як у випадку відсутності дефекта, так і при обох варіантах його розташування характер накопичення пошкодженості на внутрішній поверхні штуцера залишається подібним.

У випадку, коли дефект знаходиться на висоті  $H_x = 215 \text{ мм}$

(рис. 16,а) розрахунковий ресурс становить  $N^* = 3.16 \cdot 10^9$  (рис. 18), у випадку коли на висоті  $H_x = 300 \text{ мм}$  (рис. 16,а), величина ресурсу становить  $N^* = 3.89 \cdot 10^9$  (рис. 18).

Для дослідження процесу руйнування по товщині стінки при різному розташуванні дефекту на момент досягнення на внутрішній поверхні штуцера ( $R=19.54 \text{ мм}$ ) критичного значення пошкодженості, були побудовані графіки розподілення пошкодженості при радіусах  $R=20.63 \text{ мм}$  та  $R=21.73 \text{ мм}$ . На рис.19 наведені результати, отримані для випадку  $H_x = 215 \text{ мм}$ . Для  $H_x = 300 \text{ мм}$  характер графіків є аналогічним. Як бачимо, як і в випадку відсутності дефекту значення величини пошкодженості при віддаленні від

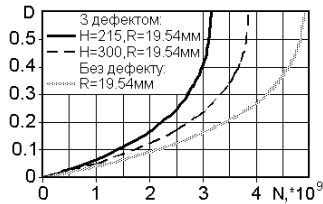


Рис.18. Величина розрахункового ресурсу в залежності від дефекту та без нього



внутрішньої частини суттєво зменшується і вже на відстані понад 3 мм величина пошкодженості наближається до 0.

Отримані результати дозволяють зробити висновок, що характер процесу накопичення пошкодженості у випадку розташування дефектів в різних місцях залишається однаковим.

Розподіл пошкодженості матеріалу по радіусу на момент утворення зони континуального руйнування на внутрішній частині поверхні штуцера ( $R=19.54\text{мм}$ ) у випадках з дефектом і без дефекту відрізняється незначно (рис.19,б).

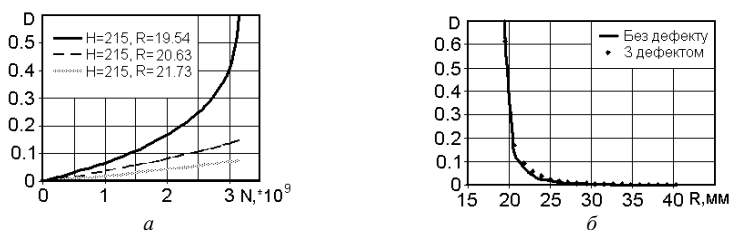


Рис.19. Графік розподілення пошкодженості по товщині стінки при наявності дефекту (а); Розподілення величини пошкодженості по радіусу при руйнуванні внутрішньої частини штуцера ( $R=19.54\text{мм}$ ) (б)

Таким чином, оскільки величина розрахункового ресурсу залежить лише від НДС і значень констант матеріалу в (2.2) на внутрішній поверхні, то розрахунковий ресурс в усіх випадках може визначатися навіть на основі аналітичного розв'язку.

Для дослідження впливу використання спрощених постановок задачі на отримані величини залишкового ресурсу було розглянуто наступні постановки: вісесиметричну, коли константи матеріалу змінюються лише вздовж радіусу (рис.15,б); плоску, тобто коли зміна констант матеріалу враховується по висоті і радіусу; а також просторову постановку, із врахуванням зміни констант в усіх напрямках.

Визначення залишкового ресурсу на першому етапі проведено МСЕ у вісесиметричній постановці з дефектом при  $H_x = 215\text{мм}$ . Результат для цього випадку наведений на рис. 20. Такі ж результати були отримані при розв'язанні задачі за допомогою НМСЕ.

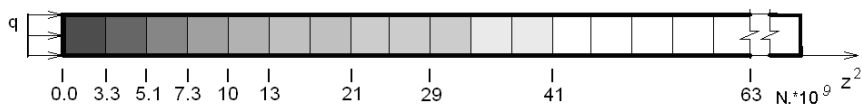


Рис.20. Характер залежності руйнування по товщині при вісесиметричному деформуванні у випадку дефекту ( $H_x = 215\text{мм}$ )

Як бачимо, величина залишкового ресурсу до досягнення зоною руйнування однакового радіусу  $R^*$  при глибині зони 1-5 мм відрізняється від випадку без дефекту майже в 2 рази. Поступово ця різниця зменшується і при глибині зони 12 мм ця відмінність становить лише 4.6% ( $N = 41 \cdot 10^9$  і  $N = 42.9 \cdot 10^9$  відповідно, див. рис. 13 та рис. 20).

У випадку розв'язанні задачі у вісесиметричній і плоскій постановці зростання зони континуального руйнування по радіусу є однаковим. Проте величина ресурсу до досягнення зоною континуального руйнування певного радіусу ( $R^*=32$  мм), отримані в просторовій постановці, є майже вдвічі меншими, ніж в плоскій або вісесиметричній постановках (рис. 21). Зокрема при глибині зони 12 мм відповідні величини ресурсу становлять  $N = 2.1 \cdot 10^{10}$  і  $N = 3.9 \cdot 10^{10}$ .

Для порівняння результатів моделювання перебігу розповсюдження зони континуального руйнування по висоті із використанням різних розрахункових схем були побудовані залежності розміру зони континуального руйнування по висоті від кількості циклів навантаження при різному віддаленні від внутрішньої поверхні рис. 22.

Як бачимо, при розв'язанні задачі в плоскій та у вісесиметричній постановках на відміну від випадку просторового розв'язку задачі (розташування дефекту на  $H_x = 215$  мм),

розповсюдження зони континуального руйнування відбувається по радіусу лише після того, як повністю зруйнується по висоті внутрішня поверхня штуцера ( $R=19.54$  мм). При урахуванні просторового характеру змін констант рівняння визначення пошкодженості розповсюдження зони континуального руйнування по радіусу  $R=20.63$  мм розпочинається після

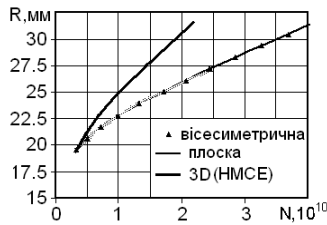


Рис.21. Величини ресурсу в залежності від способу моделювання дефекту

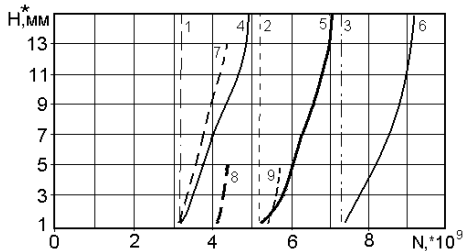


Рис.22. Перебіг зростання зони континуального руйнування по висоті в залежності від способу моделювання дефекту ( $H_x = 215$  мм): 1,2,3 – вісесиметрична постановки; 4,5,6 – плоска постановка; 7,8,9 – просторова постановка

досягнення нею на внутрішній поверхні висоти 10 мм, а по радіусу  $R=21.73$  мм – після досягнення зоною на внутрішній поверхні висоти 20 мм (рис. 22). Вигляд зони руйнування в різні моменти часу при просторових дефектах  $H_x = 215$  мм та  $H_x = 300$  мм наведена на рис. 23.

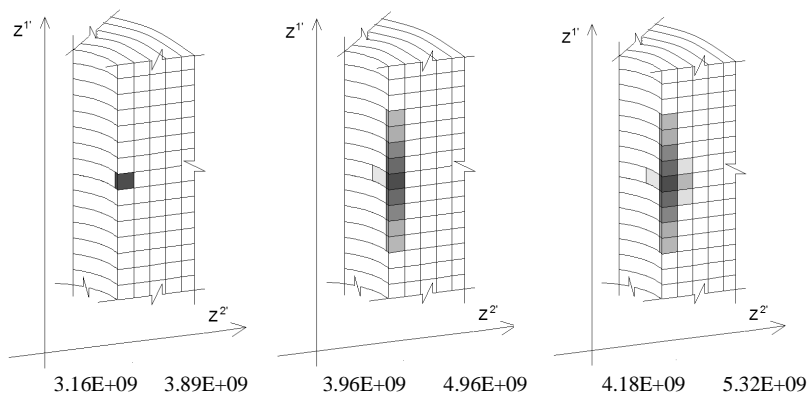


Рис.23. Послідовність руйнування в різні моменти часу ( $H_x = 215$  мм та  $H_x = 300$  мм)

Таким чином розроблена методика визначення розрахункового і залишкового ресурсу на основі НМСЕ дозволяє дослідити вплив початкових і набутих дефектів у вигляді змін фізико-механічних властивостей матеріалу на величину ресурсу.

Розв'язання задачі в просторовій, плоскій та вісесиметричній постановках дозволяє зробити висновок, що розрахунковий ресурс залишається однаковим. Тому визначення розрахункового ресурсу можна здійснювати навіть за допомогою аналітичного розв'язку. Проте розрахунковий ресурс складає лише 1/10 частину від залишкового ресурсу. В той же час визначення залишкового ресурсу, що визначає час до повного руйнування об'єкта, призводить до необхідності розв'язання просторових задач. Крім того просторова постановка дозволяє отримати якісно правильну картину руйнування об'єкта.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикл. механика – 2003. – Т.39. – №4. – С. 34–71.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.Л., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.

3. Гуляр О.І., Пискунов С.О., Мицюк С.В. Визначення ресурсу з використанням параметра пошкоджуваності при багатоцикловому навантаженні. //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2009.- Вип. 84. - С. 20-31.
4. Голуб В.П. Поврежденность и одномерные задачи разрушения в условиях циклического нагружения.// Прикл. механика. – 1987.-23, №10. – С. 19-29.
5. Писаренко Г. С, Яковлев А. П., Матвеев В. В.; Справочник по соаротивлению материалов / Отв. ред. Писаренко Г. С.— 2-е изд., перераб. и доп.— К.: Наук. думка, 1988.— 736 с.
6. Пискунов С. О., Мицюк С.В., Шкриль О.О. Визначення напружено-деформованого стану тіл обертання із використанням кругового скінченого елемента змінної площі поперечного перерізу // Геотехническая механика. – 2007. – Вып. 71. – С. 198-203.
7. Кузьменко В.А. Многоцикловая усталость при переменных амплитудах нагружения – К.:Наук. думка, 1988.
8. Лебедев А.А. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: – К.:Издательский дом «Ин Юре», 2003. – 540 с.
9. Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Кричевский В.В. Метод конечных элементов в механике твердых тел.- К.: Вища школа, 1982.-480с.
10. Сильверстов И.Н. Расчет ресурса и длительной прочности с использованием критерия повреждаемости. – Проблемы машиностроения и надежности машин, 2006, №6. – С. 116-118.

*Стаття надійшла до редакції 02.05.2011 р.*

*Гуляр А.И., Пискунов С.О., Мицюк С.В.*

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА ПРИСОЕДИНИТЕЛЬНОГО ШТУЦЕРА В УСЛОВИЯХ МНОГОЦИКЛИЧНОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ НАЧАЛЬНЫХ ДЕФЕКТОВ.**

Созданы и апробированы новые конечные элементы, которые позволяют проводить моделирование дефектов в виде исходных отклонений геометрических размеров и физико-механических свойств материала от номинальных значений, а также появившихся областей разрушения. На основе подходов континуальной механики разрушения проведено определение величины ресурса в присоединительном штутцере при наличии начальных дефектов.

*Gulyar O.I., Pyskunov S.O., Mytsyuk S.V.*

#### **LIFETIME DETERMINATION OF JOINING CARBINE UNDER MULTICYCLIC LOADING CONDITIONS AT PRESENCE OF INITIAL DEFECTS.**

New finite elements, that allow to conduct the design of defects as initial deviations of geometrical sizes and of mechanical properties of material from basic values, and also appeared areas of fracture, are created and approved. On the basis of approaches of continual fracture mechanic lifetime determination of a joining carbine at presence of initial defects is conducted.

УДК 539.3

**В.К. Чибіряков**, д-р техн. наук  
**А.М. Смоляр**, канд. техн. наук  
**І.В. Мірошкіна**, канд. техн. наук  
**В.О. Чумак**

## **ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ АНАЛІТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОРОТКОГО БРУСА**

В статті запропонована аналітично-чисельна методика визначення напружено-деформованого стану просторового тіла прямокутного поперечного перерізу. По поперечних координатах застосовуються скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є, а по поздовжній – узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень. Алгебраїчні рівняння розв'язуються за методом Гауса. В статті приведені ізолінії напружено-деформованого стану короткого бруса.

Надійність та економічність є основними вимогами, що ставляться сучасною технікою і будівництвом до конструкцій та елементів конструкцій. Задоволення перерахованих вимог залежить від використання сучасних конструктивних форм, застосування нових матеріалів і нових технологій обробки матеріалів задля отримання необхідних змін їхніх фізико-механічних властивостей, а також врахування реальних умов експлуатації конструкцій і реальних змін фізико-механічних властивостей під час виготовлення та експлуатації. Виконання поставлених задач передбачає створення нових більш потужних математичних моделей і використання сучасних чисельних методів для їхньої реалізації. Особливо гостро постають перераховані проблеми в задачах розрахунку масивних конструкцій і їхніх елементів.

Сучасний рівень розвитку методу скінченних елементів, методу скінченних різниць, варіаційно-різницевого методу і їхня практична реалізація на ЕОМ дозволяє розв'язувати ці задачі в найбільш загальній постановці. Основними недоліками прямих чисельних методів є складність їхньої програмної реалізації, значна ресурсоемність, повільна збіжність.

Необхідно також зазначити, що розвиток системного забезпечення загальних чисельних методів до теперішнього часу вичерпав ресурси підвищення їхньої ефективності засобами програмування. У зв'язку з цим з'явилася тенденція – розвиток загальних чисельних методів пов'язувати з використанням комбінованих підходів, основаних на раціональному поєднанні аналітичних і чисельних методів. Основна ідея такого підходу

– це використання аналітичних методів для зниження вимірності просторової задачі теорії пружності з подальшим розв’язуванням редукованих рівнянь, визначених на області меншої вимірності, чисельними методами. Ця ідея лежить в основі відомого методу потенціалу (методу граничних інтегральних рівнянь, методу граничних елементів). До цього напрямку також відноситься побудова ефективних розрахункових моделей масивних тіл на базі поєднання аналітичних методів з методом скінченних елементів[1, 2, 3] та іншими чисельними методами [4, 5, 6, 7].

Пропонуємо аналітично-чисельну методику розрахунку напружено-деформованого стану просторових тіл. Тестування методик проведемо на прикладі короткого бруса. Короткий брус у будівельній механіці є зручною геометричною формою для постановки та розв’язання тестових задач.

Коротким брусом будемо називати прямокутний паралелепіпед (рис. 1). Чотири вертикальні (торцеві) грані бруса оперті шарнірно, горизонтальні (бокові) грані – вільні від зв’язків. Брус по одній з бокових поверхонь знаходиться під дією рівномірно-розподіленого навантаження

$q_z^-$ .

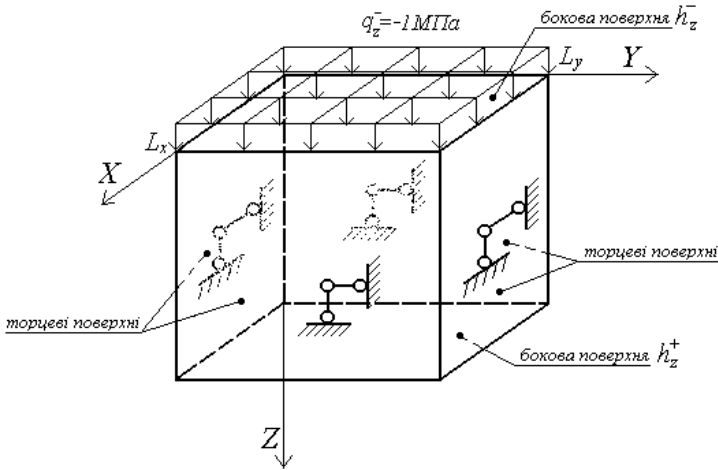


Рис.1. Розрахункова схема короткого бруса

Напружено-деформований стан короткого бруса описується рівняннями просторової задачі теорії пружності:

$$\sum \partial_i \sigma_{ij} + F_i = 0,$$

$$\sigma_{ii} = \sum (\lambda + 2\mu) u_i - \sum_{j \neq i} 2\mu u_j, \quad \sigma_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i, \quad (1)$$

де  $i, j=1, 2, 3$  - осі декартової системи координат  $x, y, z$ ;  $\sigma_{ij}$  - тензор напружень;  $u_i$  - вектор переміщень;  $\lambda, \mu$  - параметри Ламе;  $F_i$  - об'ємні сили.

Краєві умови на торцевих гранях мають вигляд:

$$\begin{aligned} X = 0: \sigma_x = 0, v = 0, w = 0; \\ X = L_x: \sigma_x = 0, v = 0, w = 0; \\ Y = 0: \sigma_y = 0, u = 0, w = 0; \\ Y = L_y: \sigma_y = 0, u = 0, w = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На бокових гранях – задані напруження.

Поставлену крайову задачу (1)-(2) просторової теорії пружності для короткого бруса розв'язуємо, застосовавши по координаті  $z$  проєкційний метод [8], а по координатах  $x$  та  $y$  – перетворення Фур'є [2].

Уздвож координати  $z$  всі функції системи рівнянь (1) розкладаємо в ряд по поліномах Лежандра. Ця процедура проєкційного методу у формі операційного обчислення названа узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень [8]. Згідно з цим методом, всім елементам системи (1) ставляться у відповідність їхні зображення з таблиці проєкційних співвідношень [8].

Рівняння редукованої системи являють собою коефіцієнти розкладів функцій та операторів вихідних рівнянь (1) у ряд по поліномах Лежандра, тому отримані співвідношення залежать лише від двох координат  $x$  та  $y$ . Кількість рівнянь залишилась незмінною. В силу того, що поліноми Лежандра не є власними функціями операторів вихідної задачі (1)-(2), отримані співвідношення зв'язані.

Далі по координатах  $x$  та  $y$  застосовуємо синус- та косинус-перетворення Фур'є [2] на скінченних відрізках  $[0, L_x]$  та  $[0, L_y]$  відповідно. Для заданих крайових умов на торцевих площинах – шарнірне спирання – синуси та косинуси будуть власними функціями операторів вихідної задачі (1)-(2).

Вибір синус- чи косинус-перетворень визначається виглядом граничних умов (2). Так, для однорідних крайових умов  $f(x, y)|_{x=0} = 0$ ,  $f(x, y)|_{x=L_x} = 0$ ,  $f(x, y)|_{y=0} = 0$  та  $f(x, y)|_{y=L_y} = 0$  користуємося скінченим синус-перетворенням Фур'є, в інших випадках - скінченим косинус-перетворенням Фур'є.

Виходячи із заданих граничних умов (2), функції  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, u, w$  на відрізку  $[0, L_y]$  будуть розкладатися в скінченний ряд по синусах:

$$f(x, y) \cong \sum_{m=1}^M f_s^m(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right),$$

де  $f_s^m(x) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \int_0^{L_y} f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy$ , а функції  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, v$  - у скінченний ряд по косинусах:

$$f(x, y) \cong \sum_{m=1}^M f_c^m(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right),$$

де  $f_c^m(x) = \sqrt{\frac{2}{L_y}} \int_0^{L_y} f(x, y) \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy$ .

У приведених формулах  $m = 1, 2, \dots, M_y$  - номер гармоніки, індекс  $s$ , вказує на синус-перетворення Фур'є, а індекс  $c$  - на косинус-перетворення Фур'є.

Для спрощення викладок, визначаємо скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є так:

$$f(x, y) \rightarrow f_s^m(x), \quad (3)$$

$$f(x, y) \rightarrow f_c^m(x), \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

де  $f(x, y)$  - будемо називати оригіналом, а  $f_s^m(x)$  ( $f_c^m(x)$ ) - зображенням по синусах (косинусах). Вираз (3) означає, що функції  $f(x, y)$  ставиться у відповідність скінченний набір коефіцієнтів  $f_s^m(x)$  ( $f_c^m(x)$ ).

Провівши деякі аналітичні перетворення легко встановити, що синус- та косинус-перетворення Фур'є для похідних по  $y$  мають вигляд:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial f_s^m(x)}{\partial y} = -\frac{m\pi}{L_y} f_c^m(x), \quad (4)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial f_c^m(x)}{\partial y} = \frac{m\pi}{L_y} f_s^m(x).$$

Вирази (4) доповнюють співвідношення (3). Аналогічно визначаються скінченні синус- та косинус-перетворення Фур'є уздовж координати  $x$ .

Після формальної підстановки у вихідні рівняння (1) уздовж координат  $x$  та  $y$  замість оригіналів функцій та операторів



диференціювання їхніх зображень згідно (3), (4), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь. Для зручності подальших перетворень, виключаємо з цієї системи рівнянь компоненти напружень - записуємо її рівняння в переміщеннях. Після перетворень розрахункова система алгебраїчних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 & \left( -\left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 (\lambda + 2\mu) - \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 \mu - \frac{4\mu}{h_z^2} m^{ji} m^{jk} \right) u_{s,c}^{i,m,n} + \left( -\frac{m\pi^2}{L_x L_y} \lambda - \frac{m\pi^2}{L_x L_y} \mu \right) v_{c,s}^{i,m,n} + \\
 & + \left( \frac{n\pi}{L_x} \frac{2\lambda}{h_z} m^{ij} - \frac{n\pi}{L_x} \frac{2\mu}{h_z} m^{ji} \right) w_{s,s}^{i,m,n} + \frac{1}{\sqrt{h_z}} \left[ \tau_{xz,s,c}^{+,m,n} - \tau_{xz,s,c}^{-,m,n} (e_1^{ij} - e_2^{ij}) \right] p_0^{ij} + X_{s,c}^{i,m,n} = 0, \\
 & \left( -\frac{m\pi^2}{L_x L_y} \lambda - \frac{m\pi^2}{L_x L_y} \mu \right) u_{s,c}^{i,m,n} + \left( -\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 (\lambda + 2\mu) - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \mu - \frac{4\mu}{h_z^2} m^{ji} m^{jk} \right) v_{c,s}^{i,m,n} + \\
 & + \left( \frac{m\pi}{L_y} \frac{2\lambda}{h_z} m^{ij} - \frac{m\pi}{L_y} \frac{2\mu}{h_z} m^{ji} \right) w_{s,s}^{i,m,n} + \frac{1}{\sqrt{h_z}} \left[ \tau_{yz,c,s}^{+,m,n} - \tau_{yz,c,s}^{-,m,n} (e_1^{ij} - e_2^{ij}) \right] p_0^{ij} + Y_{c,s}^{i,m,n} = 0, \\
 & \left( \frac{n\pi}{L_x} \frac{2\lambda}{h_z} m^{ji} - \frac{n\pi}{L_x} \frac{2\mu}{h_z} m^{ij} \right) u_{s,c}^{i,m,n} + \left( \frac{m\pi}{L_y} \frac{2\lambda}{h_z} m^{ji} - \frac{m\pi}{L_y} \frac{2\mu}{h_z} m^{ij} \right) v_{c,s}^{i,m,n} + \\
 & + \left( -\left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 \mu - \left(\frac{n\pi}{L_x}\right)^2 \mu - \frac{4(\lambda + 2\mu)}{h_z^2} m^{ij} m^{ji} \right) w_{s,s}^{i,m,n} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{h_z}} \left[ \sigma_{z,s,s}^{+,m,n} - \sigma_{z,s,s}^{-,m,n} (e_1^{ij} - e_2^{ij}) \right] p_0^{ij} + Z_{s,s}^{i,m,n} = 0. \tag{5}
 \end{aligned}$$

У приведеній формулі (5)  $n = 1, 2, \dots, M_x$  - номер гармоніки по координаті  $x$ .

Для повної постановки редукованої крайової задачі, систему алгебраїчних рівнянь (5) доповнюємо редукованими граничними умовами. Уздовж осі  $z$  на боковій поверхні  $h_z^-$  бруса діє постійне рівномірно розподілене навантаження  $\sigma_z^- = -1 \text{ МПа}$ . Визначаємо коефіцієнти розкладу цього навантаження уздовж координатних осей  $x$  та  $y$ :

$$\sigma_{z,s,s}^{-,m,n} = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \int_0^{L_x} \left( \sqrt{\frac{2}{L_y}} \int_0^{L_y} (-1) \sin\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) dy \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{2}{L_x}} \int_0^{L_x} \left( \sqrt{\frac{2}{L_y}} \frac{L_y}{m\pi} (\cos(m\pi) - 1) \sin\left(\frac{n\pi}{L_x} x\right) \right) dx = \\
 &= \frac{2L_y}{m\pi} (\cos(m\pi) - 1) \frac{L_x}{n\pi} (-\cos(n\pi) + 1) = \frac{2L_x L_y}{nm\pi^2} (\cos(m\pi) - 1)(-\cos(n\pi) + 1). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Система рівнянь (5), на відміну від вихідної системи (1), складається з алгебраїчних рівнянь, до того ж вона містить лише три невідомі компоненти-зображення елементів напружено-деформованого стану. Рівняння системи (5) зв'язані по поліномах Лежандра і незалежні відносно гармонік  $m$  та  $n$ . Це означає, що кожній гармоніці відповідає своя система алгебраїчних рівнянь (5). Розв'язок такої системи можливо отримати точно за допомогою методу виключення Гауса. Цей метод покладено в основу розробленого алгоритму.

Для кожної пари гармонік  $m$  та  $n$  за методом Гауса розв'язуємо відповідну систему алгебраїчних рівнянь. З отриманих розв'язків (зображень) у кожній точці видачі результатів по координаті  $z = [h_z^-, h_z^+]$  знаходимо скінченні суми розкладів по поліномах Лежандра. В цих точках по координаті  $y = [0, L_y]$  скінченні суми розкладів по поліномах

Лежандра перемножуємо з відповідними значеннями  $\sin\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right)$  чи

$\cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right)$  і складаємо в призначених точках, в яких по координаті

$x = [0, L_x]$  отриманні суми перемножуємо з відповідними значеннями

$\sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right)$  чи  $\cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right)$  і також складаємо в точках видачі результатів

короткого бруса. Таким чином визначаємо компоненти напружено-деформованого стану (оригінали) просторового бруса.

Описаний алгоритм покладений в основу розробленого програмного комплексу «Інтеграл-брус», за допомогою якого отримано чисельні результати для короткого бруса (рис. 1). Деякі компоненти повного тензора напружень та вектора переміщень візуалізовані у вигляді ізоліній для середніх перерізів бруса (рис. 2).

Для розробленого алгоритму на описаній вище тестовій задачі було проведено дослідження збіжності граничних умов у залежності від кількості поліномів та гармонік. При степені поліноміальності

апроксимації  $N=6$  достатня збіжність граничних умов (похибка не перевищує 5%) досягалася при кількості гармонік десять-дванадцять.

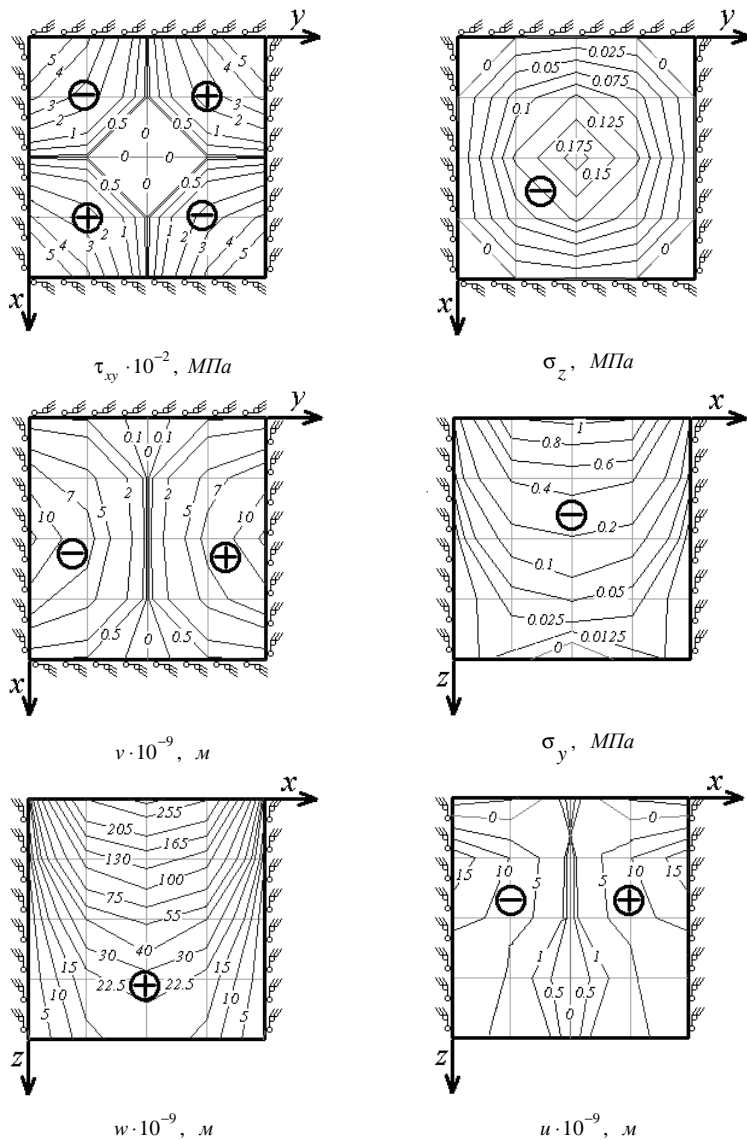


Рис. 2. Ізолінії вектора переміщень та тензора напружень

При степені апроксимації  $N=8$  та кількості гармонік Фур'є тридцять - тридцять п'ять було досягнуто майже точної збіжності граничних умов (похибка не перевищує 1%).

З приведених чисельних результатів (рис. 2) можна зробити висновок про просторовий характер напружено-деформованого стану короткого бруса. При вказаних вище параметрах проведення чисельного процесу спостерігається симетрія результатів для компонент  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, u, w$  відносно координатної осі  $x$ , та  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, v, w$  - відносно осі  $y$ , а також коса симетрія для компонент  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, v$  відносно осі  $x$ , та  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, u$  - відносно осі  $y$ . Красві умови на торцевих поверхнях за розробленою методикою задовольняються точно, незалежно від степенів апроксимації по координатах.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зенкевич О.К.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
2. *Корнеев В.Г., Розин Л.А.* Дифференциальная форма метода конечных элементов применительно к задачам теории упругости // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 297-306.
3. *Гуляев А.И.* Об одном методе расчета пространственных конструкций на основе полуаналитического варианта МКЭ для замкнутых некруговых конечных элементов // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1984. – Вып. 44. – С. 44-46.
4. *Григоренко Я.М. и др.* Статика анизотропных толстостенных оболочек / Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. – Киев: Вища школа, 1985. – 190 с.
5. *Лисицын Б.М.* Об одном методе решения задач теории упругости // Прикл. механика. – 1967. – Т.3. - № 4. – С. 85-92.
6. *Лисицын Б.М., Вериженко В.Е.* Об одном направлении развития метода конечных элементов // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14. - № 4. – С. 33-40.
7. *Леонтьев Н.Н.* К решению плоской задачи теории упругости вариационным методом Власова в матричной формулировке // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1970. - № 1. – С. 68-74.
8. *Чибіряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонок: Монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.

*Стаття надійшла до редакції 16.03.2011 р.*

*Чибиряков В.К., Смоляр А.М., Мирошкина И.В., Чумак В.А.*

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОРОТКОГО БРУСА**

В статье предлагается аналитически-численная методика определения напряженно-деформированного состояния пространственного тела прямоугольного поперечного сечения. По поперечных координатах применяются конечные синус- и косинус-преобразования Фурье, а по продольной - обобщенный метод конечных интегральных преобразований. Алгебраические уравнения решаются методом Гаусса. В статье приведены изолинии напряженно-деформированного состояния короткого бруса.

*Chybiryakov V., Smolyar, A., Miroshkina I., Chumak V.*

**NUMERICAL ANALYSIS OF THE ANALYTICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A SHORT SQUARED BEAM**

In this article we propose an analytic-numerical method of determining the stress-strain state of a spatial body of rectangular cross section. On the transverse coordinates applied finite sine and cosine Fourier transform, and in the longitudinal - a generalized method of integral transforms. Algebraic equations are solved by Gauss method. The article shows the isolines of the stress-strain state of a short squared beam.

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук  
**О.С. Погорелова**, канд. фіз.-мат. наук  
**Т.Г. Постнікова**, канд. техн. наук

## **РОЗВИТОК МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ УДАРУ СИЛОЮ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ**

В статті викладаються теоретичні положення застосування методу продовження розв'язку за параметром для дослідження динаміки віброударних систем під дією періодичного зовнішнього навантаження. Розв'язки рівнянь руху будуються в залежності від параметра його амплітуди. Удар моделюється нелінійною силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца. Теоретичні викладки розроблені для двохмасових систем з двома ступнями вільності. Відмічаються переваги цього методу, які дозволяють суттєво зменшити обчислювальні витрати.

**Вступ.** Метод продовження розв'язку за параметром був застосований та розвинутий в НДІ будівельної механіки КНУБА (тоді ПНДІ тонкостінних просторових конструкцій) колективом авторів для побудови та дослідження періодичних розв'язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь в просторі станів та в амплітудно-частотній області [1]. Плодотворно працювали в цьому напрямку Є.С.Дехтярюк та його учні і послідовники. Зокрема, була розроблена теорія застосування цього методу для дослідження динаміки та стійкості віброударних систем з  $n$  ступнями вільності, якщо удар моделювався граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення [2,3]. Для двомасових віброударних систем з двома ступнями вільності разом з теоретичними розробками був виконаний чисельний аналіз динамічних станів цих систем та досліджена стійкість їхніх коливальних рухів [4].

Відомо, що моделювання удару граничними умовами передбачає удар миттєвим, при цьому швидкості тіл, що співударяються, змінюються в мить удару стрибком. Механічні властивості цих тіл враховуються лише у коефіцієнті відновлення. Але для деяких типів віброударних систем (наприклад, якщо обмежник коливач м'який) тривалість удару може бути порівняна з тривалістю руху між ударами. Такий удар не можна вважати миттєвим, його слід моделювати не граничними умовами, а нелінійною силою контактної взаємодії [5]. В [6] було доведено, що в системах з твердим обмежником коливач моделювання удару контактною силою також дає хороші результати. Тому автори статті вважають доцільним в віброударних системах будь-якого типу удар

модельовати силою контактної взаємодії [7]. Такий підхід до моделювання удару зумовлює необхідність використання методу продовження розв'язку за параметром для віброударних систем, якщо удар моделюється контактною силою.

Застосування методу продовження розв'язку за параметром суттєво спрощує побудови, які пов'язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем, та в разі зменшує витрати обчислювального процесу. Він дозволяє знаходити розв'язки рівнянь руху при усталеному режимі коливань в залежності від того чи іншого параметра, який вибраний ведучим. Для кожного значення параметра крок за кроком отримуємо розв'язки на періоді усталеного режиму, обминаючи при цьому перехідний процес. Використання методу продовження за параметром скорочує час побудови таких розв'язків в десятки разів.

Слід відмітити, що побудови, пов'язані з продовженням розв'язку за параметром у віброударних системах, якщо удар моделюється контактною силою, також спрощуються порівняно з аналогічними побудовами при моделюванні удару граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення.

### 1. Постановка задачі

В статті розвиток методу продовження за параметром здійснюється для двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності, що складається із основного тіла та приєднаного, яке може відігравати роль ударного чи безударного динамічного гасителя коливань. Докладніше ця модель описана в [4,6]. Її розрахункова схема зображена на рис.1.

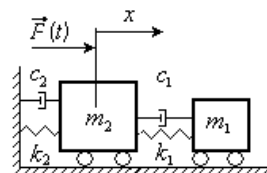


Рис. 1

Нелінійні диференціальні рівняння її руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{\text{кон}}(t), \\ \ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2x_2 - 2\xi_1\omega_1\mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \\ &+ \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{\text{кон}}(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{де } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \quad \xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}, \quad \xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}; \quad \chi = \frac{m_2}{m_1}.$$

Сила контактної взаємодії  $F_{\text{кон}}(t)$ , яка моделює удар, діє лише під час удару и відсутня в інші моменти часу. Контактна сила може бути описана

різними законами, наприклад, законом пружності [5]. В своїх роботах обираємо для її опису контактний закон Герца [8,9]:

$$F_{\text{кон}}(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (2)$$

де  $\alpha(t) = x_2 - x_1$  – відносне зближення тіл ,

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0\pi}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad (3)$$

$\mu_i$  и  $E_i$  – коефіцієнти Пуасона та модулі Юнга для обох тіл,  $A$ ,  $B$  и  $q$  – константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту. Графіки контактної сили в різних масштабах часу зображені на рис.3, в,г.

Розглянемо розвиток методу продовження за параметром для цієї моделі при побудові розв'язків рівнянь (1) на періоді усталеного режиму коливань в залежності від значення амплітуди зовнішнього навантаження. Для цього гармонічне зовнішнє навантаження запишемо у вигляді:

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4)$$

де  $\lambda$  - параметр інтенсивності навантаження, за цим параметром будеється продовження розв'язку. Модифікація методу розробляється для дослідження  $T$ -періодичних усталених режимів коливань.

Головна ідея методу така. Розглядаються усталені періодичні рухи. Це обумовлює можливість отримання розв'язку лише на одному періоді. Отримавши розв'язок рівнянь руху системи (1) для деякого фіксованого  $\lambda$  прямим чисельним інтегруванням, обминаємо перехідний процес і розглядаємо отриманий розв'язок на одному періоді руху. Стан, якому відповідає початок обраного періоду, буде вихідним для побудов на наступному кроці. Суть методу полягає в тому, щоб для нового значення ведучого параметра  $\lambda$  одержати розв'язок одразу на цьому одному періоді, не розглядаючи перехідний процес. Це можна зробити, якщо відомі вихідні умови на цьому періоді. Але після зміни значення параметра  $\lambda$ , який отримав приріст, вихідні значення переміщень та швидкостей, тобто вихідні умови, також змінилися, отримавши прирости. Задача полягає в знаходженні цих приростів. Вони визначають нові вихідні умови, які дадуть можливість отримати розв'язок рівнянь руху одразу на одному періоді. Рухаючись таким чином далі крок за кроком отримуємо розв'язки рівнянь руху системи на періоді усталеного періодичного процесу при зміні параметра  $\lambda$ . Звичайно такі розв'язки можна здобути шляхом прямого чисельного інтегрування рівнянь руху (1) для кожного нового значення  $\lambda$ , але, як вже було відмічено, використання методу продовження за параметром дозволяє обминати перехідний процес і зразу



досліджувати усталений режим коливань, що значно скорочує час обчислень.

## 2. Теоретичні основи модифікованого методу продовження розв'язку за параметром

Подивимось докладніше, як реалізуються такі побудови. Візьмемо деяке фіксоване значення параметру навантаження  $\lambda_{(k)}$  і знайдемо шляхом прямого чисельного інтегрування розв'язок рівнянь руху (1)  $x_{1(k)}(t), x_{2(k)}(t)$ , який зображений на рис. 2.

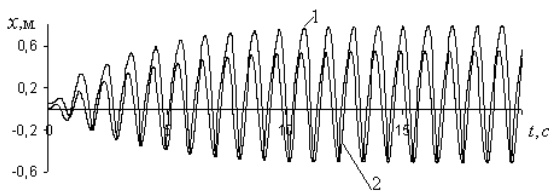


Рис. 2

На всіх рисунках зображені розв'язки рівнянь руху, що отримані для моделі рис. 1 при певних значеннях її параметрів та вихідних умов, які приведені в [6]. Цифрою 1 позначений криві, що відносяться до приєднаного тіла  $m_1$ , цифрою 2 – до основного тіла  $m_2$ .

Обминаємо перехідний процес та обираємо в усталеному режимі коливань стан при деякому  $t=t_0$ , який буде вихідним для подальших побудов. На графіках цьому стану відповідає точка при  $t=t_0$  (рис.3 а, б).

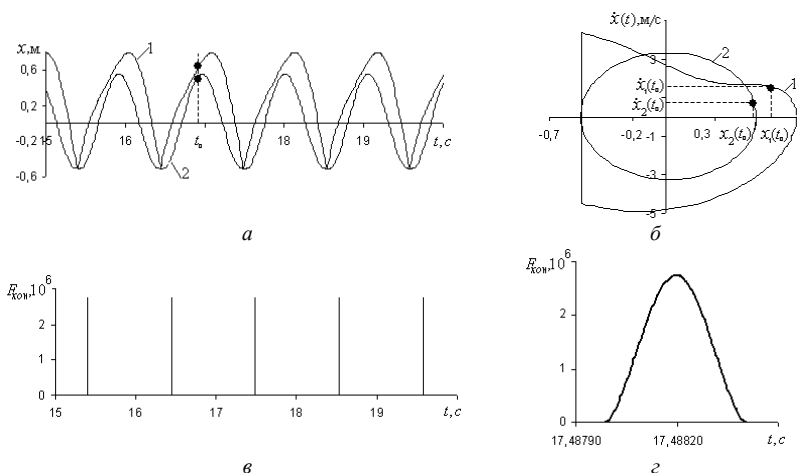


Рис. 3

В цьому стані маємо значення переміщень та швидкостей обох тіл, наприклад:  $t_0 = 16,92 \text{ с}$ ,  $x_{1(k)}(t_0) = 0,64 \text{ м}$ ,  $x_{2(k)}(t_0) = 0,53 \text{ м}$ ,  $\dot{x}_{1(k)}(t_0) = 1,57 \text{ м/с}$ ,  $\dot{x}_{2(k)}(t_0) = 0,78 \text{ м/с}$ .

Розв'язок рівнянь руху (1) на одному періоді при таких вихідних даних зображений на рис.4

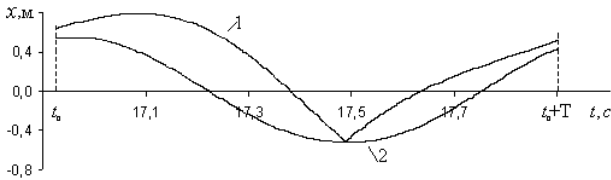


Рис.4.

Переходячи до наступного кроку, надамо параметрові  $\lambda_{(k)}$  приріст

$$\lambda_{(k+1)} = \lambda_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}. \quad (5)$$

Очевидно, що при новому значенні амплітуди навантаження процес коливань зміниться і, зокрема, при  $t = t_0$  значення переміщень та швидкостей будуть іншими, що наочно видно на рис. 5.

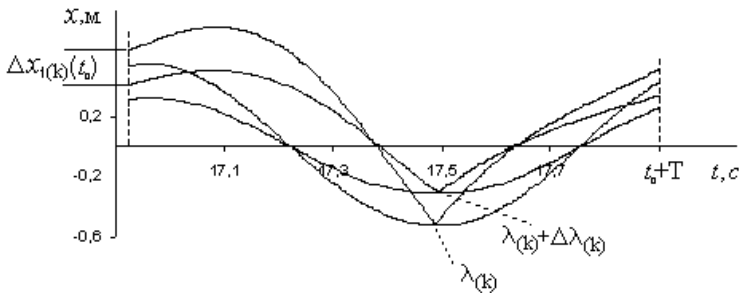


Рис.5

Природно, що розв'язок рівнянь руху взагалі залежить від вихідних умов, тобто

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \lambda), \\ \dot{x}_i(t) &= \dot{x}_i(t, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \lambda), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6)$$

а розв'язок рівнянь руху на періоді залежить від вихідних умов на цьому періоді, тобто від значень переміщень та швидкостей при  $t = t_0$ . Таким чином залежності типу (6) існують на кожному  $k$ -му кроці. Отже, щоб

знайти розв'язок рівнянь руху на періоді при кожному новому значенні  $\lambda_{(k+1)}$  (5), необхідно знайти нові вихідні умови для переміщень та швидкостей при  $t = t_0$ , а для цього треба знайти їхні прирости:

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)}(t_0) &= x_{i(k)}(t_0) + \Delta x_{i(k)}(t_0), \\ \dot{x}_{i(k+1)}(t_0) &= \dot{x}_{i(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Для знаходження цих приростів скористуємось умовами періодичності, що виконуються на кожному кроці для  $T$ -періодичних усталених режимів коливань, які розглядаються. На  $(k+1)$ -му кроці маємо:

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)}(t_0+T, x_{1(k+1)}(t_0), x_{2(k+1)}(t_0), \dot{x}_{1(k+1)}(t_0), \dot{x}_{2(k+1)}(t_0), \lambda_{(k+1)}) &= x_{i(k+1)}(t_0), \\ \dot{x}_{i(k+1)}(t_0+T, x_{1(k+1)}(t_0), x_{2(k+1)}(t_0), \dot{x}_{1(k+1)}(t_0), \dot{x}_{2(k+1)}(t_0), \lambda_{(k+1)}) &= \dot{x}_{i(k+1)}(t_0), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо рівності (7) підставити в (8), то отримуємо систему чотирьох нелінійних рівнянь відносно чотирьох невідомих приростів

$$\Delta x_{1(k)}(t_0), \Delta x_{2(k)}(t_0), \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \quad (9)$$

які відповідають приросту  $\Delta \lambda_{(k)}$  ведучого параметра:

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)}(t_0+T, x_{1(k)}(t_0) + \Delta x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0) + \Delta x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0) + \\ + \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)} + \Delta \lambda_{(k)}) &= x_{i(k)}(t_0) + \Delta x_{i(k)}(t_0), \\ \dot{x}_{i(k+1)}(t_0+T, x_{1(k)}(t_0) + \Delta x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0) + \Delta x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0) + \\ + \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)} + \Delta \lambda_{(k)}) &= \dot{x}_{i(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{i(k)}(t_0), \end{aligned} \quad (10)$$

$i = 1, 2.$

Щоб позбутися нелінійності, тобто лінеаризувати систему (10), розкладемо ліві частини рівнянь в ряд Тейлора відносно приростів (9) і відкидаючи члени вище першого порядку, отримаємо лінійну алгебраїчну систему чотирьох рівнянь (11) з чотирма невідомими (9):

$$\begin{aligned} c_{11} \Delta x_{1(k)}(0) + c_{12} \Delta x_{2(k)}(0) + c_{13} \Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{14} \Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_1 \\ c_{21} \Delta x_{1(k)}(0) + c_{22} \Delta x_{2(k)}(0) + c_{23} \Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{24} \Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_2 \\ c_{31} \Delta x_{1(k)}(0) + c_{32} \Delta x_{2(k)}(0) + c_{33} \Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{34} \Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_3 \\ c_{41} \Delta x_{1(k)}(0) + c_{42} \Delta x_{2(k)}(0) + c_{43} \Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{44} \Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_4 \end{aligned} \quad (11)$$

Тут: діагональні члени

$$c_{ii} = \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}(t_0+T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}) - 1, \quad i = 1, 2,$$

$$c_{ii} = \frac{\partial \dot{x}_{i-2,(k)}}{\partial \dot{x}_{i-2,(k)}(t_0)}(t_0+T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}) - 1, \quad i = 3, 4,$$

недіагональні члени

$$c_{ij} = \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial x_{j(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}),$$

$$i, j = 1, 2, i \neq j,$$

$$c_{ij} = \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \dot{x}_{j-2,(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}),$$

$$i = 1, 2, j = 3, 4,$$

$$c_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_{i-2,(k)}}{\partial x_{j(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}),$$

$$i = 3, 4, j = 1, 2,$$

$$c_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_{i-2,(k)}}{\partial \dot{x}_{j-2,(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}),$$

$$i, j = 3, 4, i \neq j,$$

праві частини

$$b_i = -\frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \lambda_{(k)}}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)})\Delta\lambda_{(k)} - r_{i(k)},$$

$$i = 1, 2, \quad (12)$$

$$b_i = -\frac{\partial \dot{x}_{i(k)}}{\partial \lambda_{(k)}}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)})\Delta\lambda_{(k)} - \dot{r}_{i(k)},$$

$$i = 3, 4.$$

В рівностях (12) запроваджені нев'язки  $k$ -го кроку методу продовження за параметром:

$$r_{i(k)} = x_{i(k)}(t_0 + T) - x_{i(k)}(t_0), i = 1, 2, \quad (13)$$

$$\dot{r}_{i(k)} = \dot{x}_{i(k)}(t_0 + T) - \dot{x}_{i(k)}(t_0), i = 1, 2. \quad (14)$$

Наявність нев'язки обумовлена чисельним методом розв'язання задачі. Їхні значення  $r_{1(k)}, r_{2(k)}, \dot{r}_{1(k)}, \dot{r}_{2(k)}$  характеризують похибку виконання умов періодичності та регулюються величиною кроку ведучого параметра.

Таким чином, розв'язуючи лінійну алгебраїчну систему (11), знайдемо прирости вихідних умов (9), які розшуковуються. Але перш, ніж розв'язувати цю систему, необхідно обчислити її коефіцієнти та праві частини. Для цього знайдемо частинні похідні за вихідними значеннями змінних від обох частин рівнянь (1). Будемо мати на увазі, що

$$\frac{\partial}{\partial x_{i(k)}(t_0)}(\dot{x}_{j(k)}) = \frac{\partial}{\partial x_{i(k)}(t_0)}\left(\frac{dx_{i(k)}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_{j(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}\right), i = 1, 2, j = 1, 2. \quad (15)$$

Отримуємо для змінних  $x_{1(k)}(t)$ ,  $x_{2(k)}(t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} \right) &= -2\xi_{11}\omega_1 \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} \right) - \\ &\quad - \omega_1^2 \left( \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} \right) + \frac{1}{m_1} \frac{\partial F_{кон}(t)}{\partial x_{i(k)}(t_0)}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} \right) &= -2\xi_{22}\omega_2 \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \omega_2^2 \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \\ &\quad - 2\xi_{21}\omega_1 \chi \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} \right) - \\ &\quad - \omega_1^2 \left( \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} \right) - \frac{1}{m_2} \frac{\partial F_{кон}(t)}{\partial x_{i(k)}(t_0)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$i = 1, 2.$

Частинна похідна контактної сили, що представлена формулами (2),(3), має вигляд:

$$\frac{\partial F_{кон}(t)}{\partial x_{i(k)}(t_0)} = \frac{3}{2} K (x_{2(k)} - x_{1(k)})^2 \left( \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} \right), \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Таким чином при  $i=1$  (16) визначає систему двох диференціальних рівнянь 2-го порядку, розв'язуючи яку з певними вихідними умовами, одержимо коефіцієнти 1-го стовпця алгебраїчної системи (11)  $c_{i1}, i=1,2,3,4$ . При  $i=2$  за рівняннями (16) одержимо систему двох диференціальних рівнянь, розв'язуючи яку з певними вихідними умовами визначимо коефіцієнти 2-го стовпця алгебраїчної системи (11)  $c_{i2}, i=1,2,3,4$ . Аналогічно визначаються коефіцієнти 3-го та 4-го стовпців алгебраїчної системи (11). Підкреслимо, що вигляд цих 4-х систем диференціальних рівнянь (16) однаковий, але вони мають різні вихідні умови (про що буде сказано далі) і різний сенс мають їхні змінні. Якщо ввести прості позначення:

$$\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} = y_1, \quad \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} = y_2, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

тоді ці системи приймуть звичний вигляд:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - \omega_1^2(y_1 - y_2) + \frac{1}{m_1} \frac{3}{2} K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1), \\ \ddot{y}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{y}_2 - \omega_2^2 y_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \omega_1^2\chi(y_2 - y_1) - \\ &\quad - \frac{1}{m_2} \left( \frac{3}{2} K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1) \right).\end{aligned}\quad (19)$$

Для знаходження правих частин системи (11) знайдемо частинні похідні за змінним параметром  $\lambda_{(k)}$  від обох частин рівнянь (1)

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} \right) &= -2_1\xi_2\omega_1 \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} \right) - \omega_1^2 \left( \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} - \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{m_1} \frac{3}{2} K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2} \left( \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} - \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} \right), \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} \right) &= -2_2\omega_2 \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} - \omega_2^2 \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} - 2\xi_1\omega_1\chi \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} \right) - \\ &\quad - \omega_1^2\chi \left( \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} - \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{m_2} \left( F_0 \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{3}{2} K(x_{1(k)} - x_{2(k)})^{1/2} \left( \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} - \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} \right) \right).\end{aligned}\quad (20)$$

Якщо ввести прості позначення:

$$\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} = y_1, \quad \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial \lambda_{(k)}} = y_2, \quad (21)$$

тоді цю систему можна записати у звичному вигляді:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - \omega_1^2(y_1 - y_2) + \frac{1}{m_1} \frac{3}{2} K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1), \\ \ddot{y}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{y}_2 - \omega_2^2 y_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \omega_1^2\chi(y_2 - y_1) + \\ &\quad + \frac{1}{m_2} \left( F_0 \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{3}{2} K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1) \right).\end{aligned}\quad (22)$$

Таким чином, маємо п'ять систем диференціальних рівнянь 2-го порядку, розв'язки яких являються коефіцієнтами лінійної алгебраїчної системи (11). Розв'язуючи ці системи с певними вихідними умовами, тобто розв'язуючи п'ять задач Коші, отримуємо коефіцієнти системи (11). Раніше [3,4] відмічалось, що згідно з теорією диференціальних рівнянь

перші чотири задачі Коші, які визначаються системами (19) мають такі вихідні умови:

$$y_1(t_0) = \delta_{1i}, y_2(t_0) = \delta_{2i}, \dot{y}_1(t_0) = \delta_{3i}, \dot{y}_2(t_0) = \delta_{4i}, i = 1, 2, 3, 4, \quad (23)$$

де  $\delta_{ji}$  – символ Кронекера,  $i$  – номер відповідної задачі Коші.

Коефіцієнти  $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$  ( $i=1,2,3,4$ ) системи (11) обчислюються, виходячи з розв'язку цих задач Коші в момент часу  $t = t_0 + T$ :

$$c_{1i} = y_1(t_0 + T), c_{2i} = y_2(t_0 + T), c_{3i} = \dot{y}_1(t_0 + T), c_{4i} = \dot{y}_2(t_0 + T), i = 1, 2, 3, 4.$$

Праві частини системи (11) визначаються шляхом розв'язання 5-ої задачі Коші (22) з нульовими вихідними умовами:

$$y_1(t_0) = 0, y_2(t_0) = 0, \dot{y}_1(t_0) = 0, \dot{y}_2(t_0) = 0. \quad (24)$$

На цьому побудова розв'язку вихідних рівнянь (1) на періоді в усталеному режимові коливач при зміні параметра інтенсивності зовнішнього навантаження закінчується. Розв'язання п'яти задач Коші (19) та (22) з певними вихідними умовами (23) та (24) дозволяє отримати значення коефіцієнтів лінійної алгебраїчної системи (11). Розв'язки цієї системи являються приростами вихідних значень переміщень та швидкостей (9) тіл віброударної системи для нового значення амплітуди зовнішнього навантаження (5). Значення вихідних переміщень та швидкостей при  $t = t_0$  (7) обумовлюють розв'язок вихідних рівнянь (1) для нового значення амплітуди зовнішнього навантаження.

**Висновок.** Для побудови періодичних розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь руху віброударної системи пропонується синтез процедури продовження розв'язку за параметром та моделювання удару нелінійною силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца. Перевагою модифікованого методу є суттєве спрощення побудов, пов'язаних з аналізом усталених віброударних режимів коливач пружних систем, значне зменшення витрат обчислювального процесу та скорочення часу досліджень.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П. Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах // Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
2. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Стійкість сталих режимів коливач віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10-18.
3. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливач віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА, вип. 70. 2002. - С. 69-81.

4. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.
5. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.Н. Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – С. 69-77.
6. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Лукьянченко О.А. Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
7. Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Застосування різних способів моделювання удару в віброударних системах з твердим та м'яким обмежниками. Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2010 р. Вип. 86.– С.87-93.
8. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.
9. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.

*Стаття надійшла до редакції 26.04.2011 р.*

*Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.*

#### **РАЗВИТИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УДАРА СИЛОЙ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

В статье излагаются теоретические положения применения метода продолжения решения по параметру для исследования динамики виброударных систем под действием периодической внешней нагрузки. Решения уравнений движения строятся в зависимости от параметра ее амплитуды. Удар моделируется нелинейной силой контактного взаимодействия, которая описывается законом Герца. Теоретические выкладки приведены для двухмассовых систем с двумя степенями свободы. Отмечаются преимущества метода, позволяющего существенно уменьшить вычислительные затраты.

*Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

#### **THE DEVELOPMENT OF CONTINUATION AFTER PARAMETER METHOD FOR VIBROIMPACT SYSTEMS PROVIDED THE IMPACT IS SIMULATED BY CONTACT INTERACTION FORCE**

The theoretical positions of continuation after parameter method applying for research of vibroimpact systems dynamic under periodical external loading are given in this article. The solutions of movement equations are obtained depending of external loading amplitude. The impact is simulated by the nonlinear contact interaction force describing by Hertz law. The theoretical manipulations are given for two-mass vibroimpact systems with two degrees of freedom. The advantages of method allowing to reduce essentially the calculating expenditures are marked.



УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук

Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук

О.О. Лук'яненко, канд. техн. наук

О.В. Костіна, канд. техн. наук

## **ЧИСЕЛЬНА ПОБУДОВА РЕДУКОВАНИХ МОДЕЛЕЙ СТОХАСТИЧНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК**

Розроблений чисельний підхід до побудови редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок із застосуванням методів скінченних елементів, узагальнених координат та асимптотичного методу, що заснований на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром. Задача стійкості формулюється як задача стійкості відносно моментних функцій. За рахунок розщеплення кореляції зовнішніх впливів на пружну систему з відповідними динамічними станами отримана система лінійних автономних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Серед динамічних задач теорії пластин і оболонок значне місце займають задачі про динамічну стійкість параметричних коливань, що виникають при періодичній або стохастичній зміні вібраційних навантажень [1 - 7]. В основні диференціальні рівняння динамічної задачі величини, що характеризують такі навантаження, входять в якості параметрів. Поведінка стохастичних систем описується за допомогою диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, зміна значень яких має випадковий характер. Стійкість стохастичних систем розглядається як стійкість за ймовірністю, стійкість у середньому або по сукупності моментних функцій різних порядків [4]. Типовою проблемою для цих задач є редукція нескінченної системи до скінченної. Для цього використовується функціональний або класичний підхід. Важливою є задача створення редукованих моделей стохастичних параметричних коливань оболонок. Її розв'язання за допомогою аналітичних методів є складним і містить деякі припущення, тому все частіше застосовуються чисельні методи. Завдяки наочності, високій алгоритмічності та легкості у використанні для побудови дискретних моделей конструкцій широке застосування отримав метод скінченних елементів [8].

В роботі для побудови редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок застосовується чисельна методика [7], розроблена на основі методу скінченних елементів [8], програмного комплексу NASTRAN [9] і створеної авторами програми; та асимптотичний метод, заснований на розкладанні статистичних

характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром, який є відношенням часу кореляції випадкового впливу до характерних часових масштабів задачі [4]. Проблема стійкості зводиться до дослідження стійкості тривіальних розв'язків диференціальних рівнянь, змінні коефіцієнти яких являють собою випадкові функції. Задача стійкості формулюється як задача стійкості відносно моментних функцій другого порядку. За рахунок розщеплення кореляції зовнішніх впливів на пружну систему з відповідними динамічними станами отримана система лінійних автономних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Дискретна скінченноелементна модель стохастичних параметричних коливань пологої оболонки записується у вигляді системи лінеаризованих звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + C\dot{\bar{u}}(t) + K\bar{u}(t) + z(t)K_G\bar{u}(t) = 0, \quad (1)$$

де  $M$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $K_G$  – матриці розмірності  $n \times n$ ,  $\bar{u}(t)$  –  $n$ -вимірний вектор вузлових переміщень,  $z(t)$  – випадковий процес, який характеризує інтенсивність параметричного впливу.

Наближені розв'язки системи (1) будуються методом редукції. Для цього вектор  $\bar{u}(t)$  шукається у вигляді  $\bar{u}(t) = U\bar{y}(t)$ , де  $U = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_m)$  – деяка підмножина базисних векторів. Кількість застосованих векторів  $m$  може бути прийнята значно меншою розмірності  $n$ .

Тоді система (1) зводиться до виду

$$M^*\ddot{\bar{y}}(t) + C^*\dot{\bar{y}}(t) + K^*\bar{y}(t) + z(t)K_G^*\bar{y}(t) = 0, \quad (2)$$

де  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $K^*$  та  $K_G^*$  – редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, що обчислюються за методикою [7].

Якщо ввести  $2m$ -вимірний вектор фазових змінних

$$\bar{\zeta}(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_{2m}(t))^T = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_m(t))^T,$$

то систему (2) можна переписати в нормальній формі

$$\frac{d}{dt}\bar{\zeta}(t) = A\bar{\zeta}(t) + z(t)B\bar{\zeta}(t). \quad (3)$$

Матриці  $A$  і  $B$  обчислюються за формулами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -(M^*)^{-1}K^* & -(M^*)^{-1}C^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(M^*)^{-1}K_G^* & 0 \end{bmatrix},$$

де  $\mathbf{E}$  – одинична матриця розмірності  $m \times m$ .

Для системи (3) розглядається задача Коші з початковими умовами  $\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}_0$ , де вектор  $\bar{\zeta}_0 = (\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{02m})^T$  вважається детермінованим.

Питання про втрату динамічної стійкості оболонки еквівалентне питанню про стійкість тривіальних розв'язків рівнянь (3). Внаслідок того, що коефіцієнти рівнянь – випадкові величини, стійкість розглядається у стохастичному розумінні. У роботі питання стійкості досліджується у середньому на основі моментних функцій фазових координат другого порядку, для отримання яких застосовується функціональний підхід [4]. При усередненні за ансамблем реалізацій системи (3) рівняння набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \rangle = A \langle \bar{\zeta}(t) \rangle + B \langle z(t) \bar{\zeta}(t) \rangle, \quad \langle \bar{\zeta}(0) \rangle = \bar{\zeta}_0. \quad (4)$$

Система (4) незамкнена відносно змінних  $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$ , бо містить нові невідомі функції  $\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \rangle = (\langle z(t) \zeta_1(t) \rangle, \langle z(t) \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle z(t) \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$ , які є кореляціями в момент часу  $t$  випадкового процесу  $z(t)$  з розв'язком  $\bar{\zeta}(t)$  системи (3), компоненти якого є функціоналами від випадкового процесу  $z(t)$  в інтервалі  $[0, t]$ . При розгляданні системи (4) застосовується підхід розщеплення середнього добутку двох функціоналів. Якщо  $R[z(\tau)]$  – деякий функціонал від гаусового центрованого процесу, то для середнього добутку  $\langle z(t) R[z(t)] \rangle$  має місце формула Фурутцу-Новікова [5]

$$\langle z(t) R[z(t)] \rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle. \quad (5)$$

Тут  $K(t)$  – кореляційна функція процесу  $z(t)$ ,  $\left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle$  – середнє варіаційної похідної від функціонала  $R[z]$  по  $z$  в точці  $\tau$ .

Для середнього  $\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \rangle$  формула (5) запишеться у вигляді

$$\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m. \quad (6)$$

З урахуванням (6) система (4) переписеться наступним чином:

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \rangle = A \langle \bar{\zeta}(t) \rangle + B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \quad \langle \bar{\zeta}(0) \rangle = \bar{\zeta}_0. \quad (7)$$

За допомогою розщеплення функціоналів  $\langle z(t) \zeta[z(\tau)] \rangle$  ( $k = 1, 2, \dots, 2m$ ) зроблено перехід від незамкненої системи диференціальних рівнянь (4) відносно вектор-функцій  $\langle \bar{\zeta} \rangle$  та  $\langle z \bar{\zeta} \rangle$  до незамкненої системи інтегрально-диференціальних рівнянь відносно вектор-функцій  $\langle \bar{\zeta} \rangle$  та  $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle$ . Для вектор-функцій  $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle$  запишемо нову систему інтегрально-диференціальних рівнянь. Варіюючи (3) по  $z(\tau)$  ( $\tau < t$ ), маємо систему

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} = A \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} + z(t) B \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)}, \quad (8)$$

з початковими умовами  $\frac{\delta \bar{\zeta}(\tau)}{\delta z(\tau)} = B \bar{\zeta}(\tau), \quad \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} = 0$ .

Після усереднення (8) отримуємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + B \langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle. \quad (9)$$

з початковими умовами

$$\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = B \langle \bar{\zeta}(\tau) \rangle, \quad \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = 0 \quad (t < \tau). \quad (10)$$

Система рівнянь (7), (9) та (10) незамкнена відносно змінних  $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$  та

$\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \left( \langle \frac{\delta \zeta_1(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \langle \frac{\delta \zeta_2(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \dots, \langle \frac{\delta \zeta_{2m}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle \right)^T$ . Вона містить нові невідомі

функції

$$\langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \left( \langle z(t) \frac{\delta \zeta_1(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \langle z(t) \frac{\delta \zeta_2(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \dots, \langle z(t) \frac{\delta \zeta_{2m}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle \right)^T.$$

Знову застосовуємо формулу Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \int_0^t d\tau_1 K(t - \tau_1) \langle \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m, \quad (11)$$

де  $\langle \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle$  – друга варіаційна похідна функціонала  $\bar{\zeta}[z(\tau)]$  по  $z(\tau)$  в момент часу  $(\tau < t)$   $(\tau_1 < t)$ .

Аналогічно отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t - \tau_1) \langle z(t) \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle. \quad (12)$$

Якщо продовжити цей процес, то можна отримати нескінченну послідовність рівнянь відносно моментних функцій другого порядку. В силу (3) для матриці  $(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))$  запишемо матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} (\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t)) = (A + z(t)B) (\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t)) + (\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t)) (A^T + z(t)B^T) \quad (13)$$

з початковими умовами  $(\bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0)) = (\bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0^T)$ .

При усередненні за ансамблем реалізацій системи (13) рівняння набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle &= A \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + B \langle z(t) \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \\ &+ \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle A^T + \langle z(t) \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T \end{aligned} \quad (14)$$

з початковими умовами  $\langle \bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0) \rangle = (\bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0^T)$ . Система незамкнена

відносно змінних  $\langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \zeta_1^T(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \zeta_2^T(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \zeta_{2m}^T(t) \rangle)^T$ ,

бо містить нові функції

$\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = (\langle z(t) \zeta_1(t) \zeta_1^T(t) \rangle, \langle z(t) \zeta_2(t) \zeta_2^T(t) \rangle, \dots, \langle z(t) \zeta_{2m}(t) \zeta_{2m}^T(t) \rangle)^T$ .

Застосуємо підхід розщеплення добутку двох функціоналів за формулою Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t) \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = \int_0^t d\tau K(t - \tau) \langle \frac{\delta (\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle \quad (k = 1, 2, \dots, 2m). \quad (15)$$

Система (14) запишеться у вигляді

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = A \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle A^T + \\ + B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle B^T. \quad (16)$$

Для вектор-функції  $\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))$  отримаємо нову систему інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} = A \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} + z(t) B \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} + \\ + \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} A^T + z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} B^T. \quad (17)$$

При усередненні за ансамблем реалізацій системи (17) рівняння набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle = A \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle + \\ + \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle A^T + \langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle B^T \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle = B \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T, \\ \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle = 0, \quad t < \tau. \quad (19)$$

Знову застосуємо формулу Фурутцу-Новікова

$$\left\langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle = \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \right\rangle, \quad (20)$$

де  $\left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \right\rangle$  – друга варіаційна похідна функціонала.

В результаті наведеного вище підходу система (3) набуває вигляду зв'язаної нескінченної послідовності рівнянь для моментних функцій другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle = & A \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) + \left\langle \frac{\delta^2(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle + \\ & + \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle A^T + \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle B^T \end{aligned} \quad (21)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta^2(\zeta(\tau_1)\zeta^T(\tau_1))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle = & B \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle B^T \\ \left\langle \frac{\delta^2(\zeta(t)\zeta^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle = & 0, \quad t < \tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Питання про стохастичну стійкість системи (3) зводиться до дослідження стійкості тривіальних розв'язків інтегрально-диференціальних рівнянь (21). Для подальших досліджень необхідно виконати редукцію нескінченної системи до скінченної. Для цього випадковий процес приймаємо дельта-корельованим процесом з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau} \left( \cos \theta_\alpha \tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau \right), \quad (23)$$

та скінченим часом кореляції

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \int K(\tau) d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}, \quad (24)$$

де  $\sigma_0^2$  – дисперсія впливу;  $\alpha$  – параметр кореляції,  $\theta_\alpha$  – частота прихованої періодичності.

Матричне диференціальне рівняння для моментів другого порядку (21) стає замкненим, а інші рівняння нескінченної системи виявляються зайвими. Отримана система рівнянь (22) представляє собою рівняння першого марковського наближення для других моментів

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle = & (A + DB^2) \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle (A + DB^2)^T + \\ & + 2\sqrt{DB} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T, \end{aligned} \quad (25)$$

з початковими умовами  $\langle \bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0) \rangle = (\bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}_0^T)$ .

Для побудови редукованої моделі стохастичних параметричних коливань пологої оболонки застосуємо викладений вище підхід та чисельну методику [7], що дозволяє отримати редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості системи (2). Розглянемо пологу квадратну оболонку зі сторонами  $a = b = 0,480 \text{ м}$ , товщиною  $0,004 \text{ м}$ . Головні кривизни серединної поверхні оболонки вздовж утворюючих осей  $Ox$  і  $Oy$  приймаємо сталими  $k_x = k_y = \text{const}$  (модель 1) і змінними (модель 2). Максимальний підйом в середині оболонки для двох моделей складає  $f \leq \frac{1}{5}a = 0,096 \text{ м}$ , для моделі 2 підйом в середині кромки оболонки дорівнює  $0,066 \text{ м}$ . Матеріал – дюралюміній з наступними механічними характеристиками:  $E = 7,2 \times 10^7 \text{ кПа}$ ;  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ ;  $\mu = 0,3$ .

Застосуємо програмний комплекс NASTRAN [9] для побудови скінченноелементних моделей оболонки. Поверхню моделюємо у вигляді сукупності трикутних плоских скінченних елементів з шістьма ступенями свободи у вузлах (рис. 1).

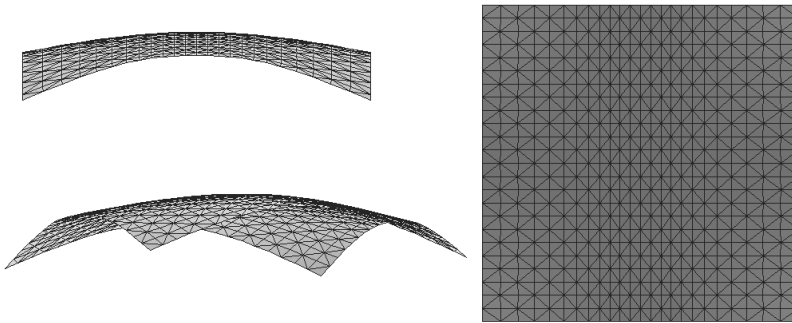


Рис. 1. Скінченноелементна модель пологої оболонки (модель 2)

Зі сторони опуклості оболонки прикладаємо випадкове поверхнєве навантаження  $z(t)$  і обмежуємо згинальні і мембранні переміщення вузлів усіх чотирьох сторін оболонки.

За базисні вектори в системі (2) приймаємо вектори форм власних коливань оболонки  $U = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m)$ , де  $m$  – кількість утриманих форм,



які нормовані по матриці мас. Редуковані матриці мас  $M^*$ , демпфірування  $C^*$  і жорсткості  $K^*$  мають вигляд

$$\begin{aligned} M^* &= U^T M U = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1), \\ C^* &= U^T C U = \text{diag}(2\varepsilon_1 \omega_1, 2\varepsilon_2 \omega_2, \dots, 2\varepsilon_m \omega_m), \\ K^* &= U^T K U = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2), \end{aligned} \quad (26)$$

де  $\omega_i$  – частоти власних коливань,  $\varepsilon_i$  – коефіцієнт конструкційного демпфірування оболонки.

Форми і частоти гармонічних коливань оболонки визначаємо при розв'язанні задачі на власні коливання за допомогою методу Ланцоша

$$(K - \omega_i^2 M) \bar{\phi}_i = 0. \quad (27)$$

На рис. 2 представлені п'ять форм власних коливань оболонки зі сталою (модель 1) та змінною кривизною (модель 2). У таблиці 1 наведені їх значення.

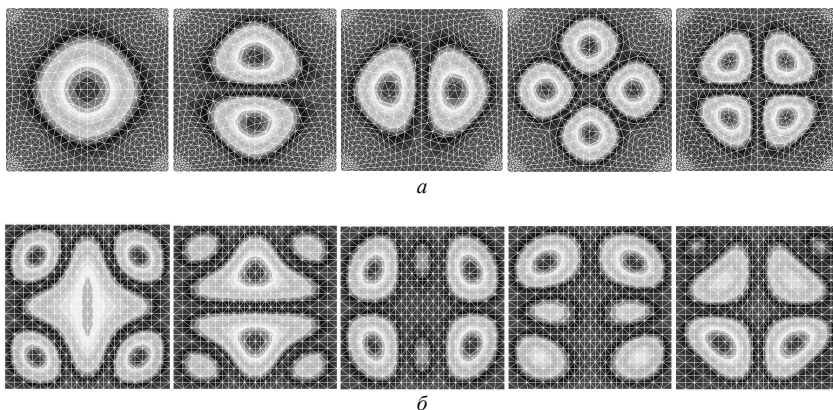


Рис. 2. Форми власних коливань пологої оболонки: а) модель 1; б) модель 2

Таблиця 1

Модель	Частоти власних коливань $\nu_i$ , Гц									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	198	396	397	622	701	738	945	945	1082	1083
2	982	1016	1070	1071	1072	1082	1165	1194	1285	1337

Квадрати частот власних коливань оболонки  $\omega_i^2 = (2\pi\nu_i)^2$  при умові нормування форм власних коливань по матриці мас є членами редукованої матриці жорсткості  $K^* = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_5^2)$ :

– модель 1

$$K^* = \begin{vmatrix} 1551782 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6201128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6214818 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15264842 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19402363 \end{vmatrix} \quad (28)$$

– модель 2

$$K^* = \begin{vmatrix} 38054389 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40778786 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45221482 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45365681 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45383289 \end{vmatrix}$$

Редуковану матрицю жорсткості для двох моделей (28) можна отримати за методикою [7]. Надамо початкове переміщення вузлам оболонки у вигляді форм її власних коливань  $U$  і розв'яжемо обернену задачу статки. Отримаємо реакцію оболонки  $KU$  на початкове переміщення, яку помножимо зліва на транспоновану матрицю форм власних коливань  $U^T$ . Тоді редукована матриця жорсткості набуває вигляду  $K^* = U^T KU$ :

– модель 1

$$K^* = \begin{vmatrix} 1551782 & 0.087 & 0.057 & -3.376 & -3.376 \\ 0.218 & 6201128 & 6201128 & -2.211 & -2.211 \\ -1.852 & -4.104 & -4.104 & -5.203 & -5.203 \\ 0.982 & 5.827 & 5.827 & 15264840 & 15264848 \\ 0.059 & -2.844 & -2.844 & -3.172 & -3.172 \end{vmatrix}$$

– модель 2

$$K^* = \begin{vmatrix} 38054386 & -51503 & 36389 & 36389 & 36389 \\ -35712 & 40777847 & -4292 & -4292 & -4292 \\ 43975 & 7845 & 45221513 & 45221513 & 45221513 \\ 21599 & -24714 & -5199 & -5199 & -5199 \\ 14410 & -2224 & 24214 & 24214 & 24214 \end{vmatrix} \quad (29)$$

Отримані результати свідчать про те, що для моделі 1 реакція оболонки однакова на другу і третю, а також на четверту і п'яту форми коливань, для моделі 2 – на третю, четверту та п'яту форми коливань. Видно, що значення членів матриць (28) та (29) збігаються або мають значення, які відрізняються не більше ніж на 3%.

Редуковану матрицю геометричної жорсткості визначаємо згідно розробленої авторами методики [7], яка дозволяє врахувати суттєву нелінійність задачі. За допомогою послідовного розв'язання прямої задачі статички при дії на оболонку сталої складової поверхневого тиску та оберненої нелінійної задачі статички з урахуванням початкового переміщення вузлів оболонки у вигляді форм власних коливань отримуємо суму редукованих матриць жорсткості та нелінійної матриці жорсткості:

– модель 1

$$K^* + K_G^* = \begin{vmatrix} 1662509 & -958 & -958 & -291 & -291 \\ 295484 & 7608054 & 7608054 & -536435 & -536435 \\ -204524 & 1027 & 1027 & 517887 & 517887 \\ -124629 & -2616 & -2616 & 18203218 & 18203218 \\ -50131 & -2720 & -2720 & -23779 & -23779 \end{vmatrix} \quad (30)$$

– модель 2

$$K^* + K_G^* = \begin{vmatrix} 42066174 & -5482 & 273 & 273 & 273 \\ -2179713 & 42710629 & 347347 & 347347 & 347347 \\ 4972109 & 272511 & 46916974 & 46916974 & 46916974 \\ 4911961 & 144446 & -1872505 & -1872505 & -1872505 \\ 1598274 & -220292 & 1923605 & 1923605 & 1923605 \end{vmatrix}$$

Тоді геометрична матриця жорсткості має вигляд:

– модель 1

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -110727 & 958 & 958 & 288 & 288 \\ -295484 & -1406926 & -1406926 & 536437 & 536437 \\ 204522 & -1031 & -1031 & -517892 & -517892 \\ 124630 & 2622 & 2622 & -2938378 & -2938370 \\ 50131 & 2717 & 2717 & 23776 & 23776 \end{vmatrix} \quad (31)$$

– модель 2

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -4011788 & -46021 & 36116 & 36116 & 36116 \\ 2144001 & -1932782 & -351639 & -351639 & -351639 \\ -4928134 & -264666 & -1695461 & -1695461 & -1695461 \\ -4933560 & -169160 & 1867306 & 1867306 & 1867306 \\ -1583864 & 218068 & -1899391 & -1899391 & -1899391 \end{vmatrix}$$

Враховуючи співпадіння реакцій оболонки на початкові переміщення в матрицях  $K_G^*$ , перепишемо їх у вигляді:

– модель 1

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -110727 & 958 & 288 \\ -295484 & -1406926 & 536437 \\ 204522 & -1031 & -517892 \end{vmatrix} \quad (32)$$

– модель 2

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -4011788 & -46021 & 36116 \\ 2144001 & -1932782 & -351639 \\ -4928134 & -264666 & -1695461 \end{vmatrix}$$

Якщо члени редукованої матриці геометричної жорсткості  $k_{gii}^*$ , які розташовані на головній діагоналі, мають значення значно більші за інші члени відповідного ряду, при побудові редукованої моделі стохастичних параметричних коливань оболонки (2) вплив інших базисних форм можна не враховувати. Тобто її можна прийняти у вигляді системи, що розпадається на окремі рівняння типу Матьє–Хілла [1]:

$$\ddot{y}_i(t) + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 [1 + a_i z(t)] y_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (33)$$

де  $a_i = a_{ik}$  при  $k = i$  – коефіцієнти, які характеризують вплив сталої складової стохастичного параметричного навантаження на жорсткісні характеристики оболонки і визначаються як результат ділення елементів редукованих матриць геометричної жорсткості  $k_{gii}^*$  на відповідні квадрати власних частот коливань  $\omega_i^2$ .

Якщо коефіцієнти  $k_{gii}$  не є максимальними і мають значення одного порядку з іншими коефіцієнтами матриці геометричної жорсткості, то система (2) не розпадається і має вигляд системи зв'язаних рівнянь

$$\ddot{y}_i(t) + 2\varepsilon_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) + z(t) \sum_{k=1}^m a_{ik} y_k(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (34)$$

Визначимо коефіцієнти  $a_{ik}$  і запишемо їх в таблицю 2.

Для моделі 1 коефіцієнти  $a_{ii}$  мають значення значно більші за інші коефіцієнти відповідного ряду. Тому для оболонки зі сталою кривизною редуковану модель стохастичних параметричних коливань можна прийняти у вигляді системи (33), яку згідно наведеного вище підходу можна представити у вигляді рівнянь першого марковського наближення для других моментів у фазових змінних  $\zeta_1(t) = y_1(t)$ ,  $\zeta_2(t) = \dot{y}_1(t)$ :

Таблиця 2

Модель	Коефіцієнт $a_{ik}$		
	1	-0,071	0,001
-0,048		-0,227	0,087
0,003		0	-0,192
2	-0,105	-0,001	0,001
	0,053	-0,047	-0,009
	-0,109	-0,006	-0,037

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \zeta_1^2(t) \rangle &= 2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle &= \langle \zeta_2^2(t) \rangle - \omega_i^2 \langle \zeta_1^2(t) \rangle - 2\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_2^2(t) \rangle &= -4\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_2^2(t) \rangle - 2\omega_i^2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle + a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 \langle \zeta_2^2(t) \rangle, \end{aligned} \quad (35)$$

з початковими умовами  $\zeta_1(t) = y(t)$ ,  $\zeta_2(t) = \dot{y}(t)$ ,  $\zeta_1(0) = y_0$ ,  $\zeta_2(0) = \dot{y}_0$ . У цій системі  $\tau_0$  є скінченним часом кореляції, який визначається за формулою (24),  $\sigma_0^2$  – дисперсія стохастичного впливу.

Для оболонки зі змінною кривизною (модель 2) значення коефіцієнта  $a_{ii}$  є максимальним лише при  $i=1$ . При  $i=2$  та  $i=3$  бачимо значний вплив першої базисної форми на інші форми. В даному випадку можна зробити висновок про те, що для пологої оболонки зі змінною кривизною система (2) не розпадається і має вигляд системи зв'язаних рівнянь (34).

Відомо, якщо форми коливань співпадають з формами втрати стійкості, редукована модель параметричних коливань представляє систему незв'язаних рівнянь (33), якщо форми не співпадають – систему зв'язаних рівнянь (34).

Розв'яжемо задачу стійкості за формулою:

$$\left( K^* + \lambda_i K_G^* \right) \bar{\psi}_i = 0. \quad (36)$$

де  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  – матриця критичних значень статичної складової навантаження;  $\Psi = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_m)$  – матриця форм втрати стійкості (рис. 3).

В таблиці 3 наведені критичні значення сталої складової поверхневого тиску для двох моделей оболонки, що отримані за допомогою програмного комплексу NASTRAN.

Таблиця 3

Модель	Критичні значення сталої складової поверхневого тиску $\lambda$ , кПа									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	155	274	276	429	457	518	637	638	748	754
2	1530	1576	1586	1590	1681	1708	1750	1812	2081	2178

На рис. 3 представлені п'ять форм втрати стійкості оболонки.

Порівнюючи рисунки 2 і 3 можна пересвідчитись, що форми власних коливань та форми втрати стійкості у випадку сталої кривизни оболонки (модель 1) співпадають, для оболонки зі змінною кривизною (модель 2) –

не співпадають. Це підтверджує той висновок, що для пологої оболонки зі сталою кривизною редукована модель стохастичних параметричних коливань може бути представлена у вигляді рівнянь типу Мат'є–Хілла (33), для пологої оболонки зі змінною кривизною – у вигляді системи (34).

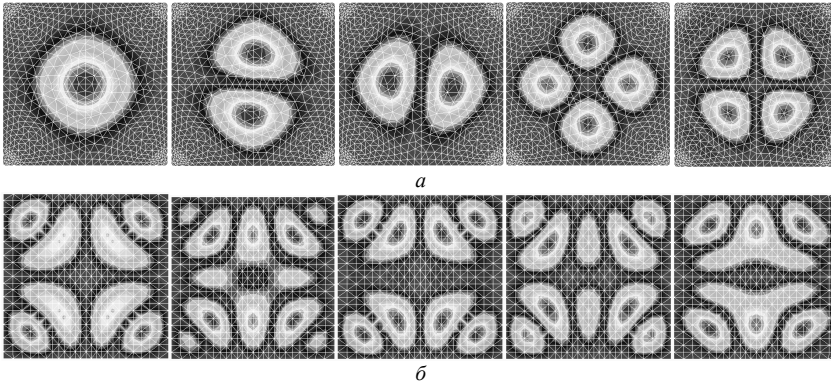


Рис. 3. Форми втрати стійкості пологої оболонки: а) модель 1; б) модель 2

**Висновок:** розроблений чисельний підхід дозволяє будувати редуковані моделі стохастичних параметричних коливань пологих оболонок з різними кривизнами їх серединних поверхонь з урахуванням усіх складових параметричних навантажень і суттєвої нелінійності задачі; отримати за рахунок розщеплення кореляції зовнішніх впливів на пружну систему з відповідними динамічними станами систему лінійних автономних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. - 600 с.
2. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979. - 335 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1982. - 432 с.
4. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения в случайно однородных средах. М., Наука, 1980. - 336 с.
5. Баженов В.А., Бусетта М., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В. Динамічна стійкість пружних систем при стохастичному параметричному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2000. – Вип.67. – С.51 – 59.
6. Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В. Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С.51 – 59.

7. Гоцуляк С.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г. Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: К.: КНУБА, 2005. – Вип.77. – С.65 – 77.
8. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. Х.: Изд-во «Основа» при Харьк. Ун-те, 1991. – 272 с.
9. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

*Стаття надійшла до редакції 24.06.2011 р.*

*Дехтярюк Е.С., Лукьянченко О.А., Костина Е.В.*

#### **ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК**

Разработан численный подход к построению редуцированных моделей стохастических параметрических колебаний пологих оболочек с применением методов конечных элементов, обобщенных координат и асимптотического метода, основанного на разложении статистических характеристик решений динамической задачи по малому параметру. Задача устойчивости формулируется как задача устойчивости относительно моментных функций. За счет расщепления корреляции внешних воздействий на упругую систему с соответствующими динамическими состояниями получена система линейных автономных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

*Dehtyaryuk E.S., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.*

#### **NUMERICAL CONSTRUCTION OF REDUCED MODELS OF STOCHASTIC PARAMETRIC VIBRATIONS OF SHALLOW SHELLS**

A numerical approach to the construction of reduced models of stochastic parametric oscillations of shallow shells is developed using finite element method, method of generalized coordinates and the asymptotic method based on the decomposition of the statistical characteristics of the dynamic problem solution by a small parameter. The stability problem is formulated as a problem of stability in reference to momentum functions. A system of linear autonomous differential equations with constant coefficients is obtained due to the splitting of the correlation of external influences on the elastic system with the corresponding dynamic states.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук

Н.А. Гречух

О.О. Яковенко

## **ПОБУДОВА РОЗРАХУНКОВИХ МОДЕЛЕЙ МСЕ РІЗНОМАНІТНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ЇХ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК І НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ВІД ДІЇ СТАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Приведені результати розв'язання задач на власні коливання комбінованих конструкцій, отриманих методом скінченних елементів. Викладена суть алгоритму розв'язання задач динаміки, який побудований на основі методу підконструкцій і редукованих моделей фрагментів. Використовується універсальний тривимірний скінченний елемент, співвідношення для якого отримані в переміщеннях. Редукована дискретна модель фрагмента будується шляхом переходу до нових узагальнених координат – переміщень базисних вузлів, призначених з числа повного набору вузлів скінченноелементної моделі фрагмента.

Пропонуються прийоми побудови розрахункових моделей МСЕ різноманітних конструкцій, які мають застосування в якості несучих елементів будівель і машин.

Розвиток методів розв'язання задач механіки зорієнтований у напрямку більш глибокого вивчення окремих важливих для практики класів задач з метою отримання наближених, але прийнятливих результатів.

Актуальною є задача визначення динамічних характеристик перехресно балочних систем, які часто застосовуються в промислових і транспортних спорудах. Розглянемо розв'язання задачі про визначення динамічних характеристик системи з трьох поздовжніх балок, опертих на кінцях на жорсткі опори, і однієї поперечної балки, яка об'єднує поздовжні балки в просторову систему (рис. 1). Вважаємо, що нейтральні осі балок лежать в одній горизонтальній площині  $Z_1OZ_2$ .

Розв'язання задачі виконаємо методом підконструкцій. Розглянемо розрахункову модель складену з чотирьох фрагментів – балок із забезпеченням умов нерозривності переміщень в областях сполучення поперечної балки з поздовжніми. В межах кожної балки будемо регулярну сітку скінченних елементів таким чином, щоб вузли сіток СЕ балок, що сполучаються, співпадали.



Регулярною вважається сітка скінченних елементів якщо є прості засоби обчислення номерів вузлів сітки та їх координати. Вузли СЕ моделі

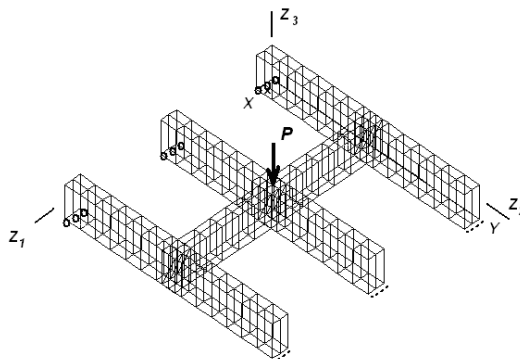


Рис. 1. Загальний вигляд балкової конструкції

фрагмента нумеруються в лагранжевій (локальній) системі координат  $x_1x_2x_3$ , пов'язаній з фрагментом. Така система не змінюється в процесі руху фрагмента. Кожному вузлу сітки відповідає трійка значень  $Z_1Z_2Z_3$  глобальної декартової системи координат, введеної для всієї конструкції, яка визначає положення вузла СЕ моделі фрагмента у просторі.

Рівняння руху дискретної моделі кожного фрагмента формується у відповідності з варіаційним принципом можливих переміщень і має вигляд:

$$\{\delta u\}^T ([K]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\}) - \{Q\}(t) = 0, \quad (1)$$

де  $\{u\}, \{\ddot{u}\}$  – вектори переміщень і прискорень вузлів;  $[K], [M]$  – матриці жорсткості і мас;  $\{Q(t)\}$  – вектор зведених до вузлів навантажень дискретної моделі фрагмента. Розміри матриць відповідають числу ступенів вільності дискретної скінченноелементної моделі фрагмента, тобто числу переміщень вузлів у базисній декартовій системі координат.

Співвідношення МСЕ побудовані в переміщеннях з використанням положень тривимірної теорії пружності і моментної схеми скінченних елементів [1], що дає змогу автоматично враховувати деформації зсуву і переміщення СЕ як жорсткого цілого. Для моделювання інерційних властивостей конструкції використовується узгоджена матриця мас СЕ, співвідношення для якої будуються за умов розподіленої маси в межах СЕ. Значення мас, зведених до вузлів СЕ, обчислюються з використанням функцій форми, тобто, за такою ж схемою, як і обчислення коефіцієнтів

матриці жорсткості. Узгоджена матриця мас СЕ повністю заповнена і моделює інерційні характеристики, що відповідають поступальним переміщенням і кутам повороту, а тому вона більш повно описує інерційні властивості системи.

Використання методу підконструкцій передбачає побудову редукованих моделей фрагментів, рівняння руху яких записується для переміщень деякої сукупності вузлів дискретної моделі фрагмента, так званих базисних вузлів. До числа цих вузлів необхідно обов'язково включати співпадаючі сіткові вузли на границях суміжних фрагментів.

Переміщення базисних вузлів вважаються новими узагальненими координатами. Їх число значно менше ніж число ступенів вільності вихідної дискретної моделі.

У базисних вузлах, що розташовані на границях суміжних фрагментів (стикувальних вузлах) необхідно враховувати всі ступені вільності для забезпечення умов нерозривності переміщень на границі.

Призначаючи нові узагальнені координати для внутрішньої області, рекомендується зберігати тільки ті переміщення базисних вузлів, що орієнтовані у напрямку меншої жорсткості конструкції. Наприклад, для балки – за нормаллю до осі балки, тобто ті, що відповідають згину. Призначення таких базисних вузлів виконується за умови, щоб вони рівномірно (не скупчено) розміщувалися в сітковій області.

Зв'язок між узагальненими координатами вихідної та редукованої моделі визначається за формулою

$$\{u\} = [U]\{q\}, \quad (2)$$

де  $\{q\}$  – вектор нових узагальнених координат – переміщень базисних вузлів.

Для забезпечення незалежності нових узагальнених координат, у напрямку переміщень базисних вузлів необхідно поставити абсолютно жорсткі в'язі. Перетворена таким чином вихідна модель МСЕ фрагмента аналогічна основній системі методу переміщень будівельної механіки. Елементи матриці перетворень  $[U]$  в (2) визначаються шляхом розрахунку основної системи на змушені одиничні зміщення накладених в'язей. Таким чином, кількість стовпців в  $[U]$  відповідає числу нових узагальнених координат редукованої моделі фрагмента, а кількість рядків – числу ступенів вільності вихідної дискретної моделі фрагмента. Це дає змогу стверджувати, що перехід до редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації переміщень вихідної дискретної моделі.

Рівняння руху такої моделі отримуємо шляхом підстановки (2) в (1). Воно набуває вигляду

$$[A]\{q\} + [B]\{\ddot{q}\} - \{f(t)\} = 0, \quad (3)$$

де  $[A]=[U]^T[K][U]$ ,  $[B]=[U]^T[M][U]$ ,  $\{f(t)\}=[U]^T\{Q(t)\}$ , відповідно, матриці жорсткості, мас та вектори узагальнених сил редукованої моделі фрагмента.

Призначається послідовність побудови редукованих моделей фрагментів та виконується наскрізна нумерація узагальнених координат їх редукованих моделей в межах усієї конструкції. Введено поняття “глобальний номер узагальненої координати редукованої моделі”, що суттєво спрощує процедуру побудови редукованих матриць жорсткості і мас, які характеризують всю конструкцію. Матриці будуються шляхом підсумовування коефіцієнтів відповідних редукованих матриць фрагментів, що мають однакові глобальні номери узагальнених координат. Зшивка матриць виконується по глобальним номерам узагальнених координат стикувальних вузлів на границях фрагментів. А тому сумісність всієї дискретної моделі конструкції забезпечується тільки в граничних точках. Базисні вузли внутрішньої сіткової області також фігурують в загальній матриці, але характеризують тільки той фрагмент, до якого віднесені.

Процедура побудови матриць всієї моделі досить трудомістка, оскільки вимагає ретельного призначення базисних вузлів редукованих моделей фрагментів, визначення глобальних номерів узагальнених координат (перемішень базисних вузлів) із забезпеченням їх відповідності на границях суміжних фрагментів.

Всяка розрахункова модель є тільки більш або менш вдалою ідеалізацією реальної структури, в якій намагаються зберегти найсуттєвіші властивості конструкції.

Створена на її основі математична модель вимагає перевірки відповідності моделей різного рівня, а також перевіркою адекватності моделі і реальної структури, що виконується шляхом порівняння значень енергії деформацій моделі вихідного і редукованого рівнів.

Вихідними умовами для побудови рівнянь, що визначають редуковані матриці жорсткості і мас, є умова рівності потенціальної енергії деформації редукованого і вихідного фрагмента.

Інший шлях перевірки надійності розрахункової моделі, яка використовується для розв'язання задачі є альтернативний варіант розрахункової моделі. Для задачі про балочну клітку використана модель, що є менш трудомісткою щодо підготовки вхідної інформації для побудови її редукованої моделі. Суть цієї моделі полягає в тому, що на першому кроці використовується пластина, для якої формується сітка МСЕ так, щоб балки вписувались в лінії сітки. Далі вводяться порожнини сіткової області, де відсутній матеріал пластини (рис. 2).

Для перевірки достовірності результатів, що будуть отримані за допомогою запропонованих моделей, розв'язана задача статички від дії зосередженої сили  $P$ .

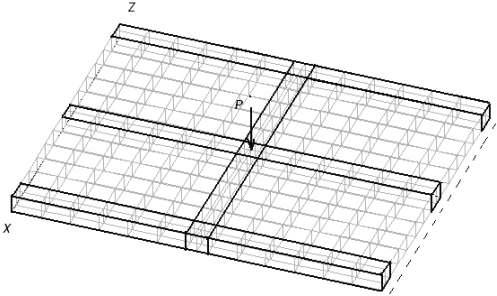


Рис. 2. Скінченноелементна модель пластини

Аналіз результатів розв'язку задачі з використанням наведених моделей показав, що в обох випадках розв'язки практично співпадають щодо значення прогину балочної клітки в точці, де прикладена зосереджена сила, так і за виглядом деформованої конструкції (рис. 3, табл. 1, табл. 2).

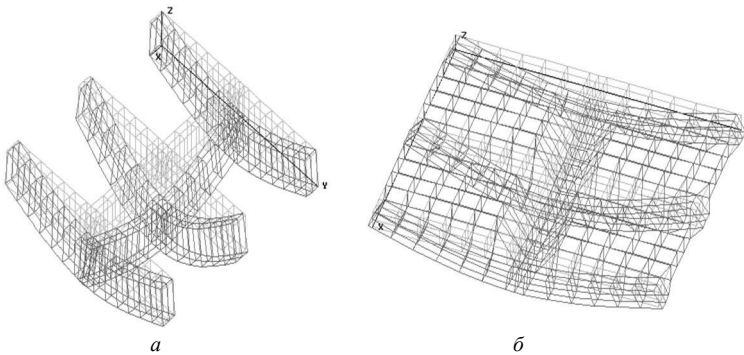


Рис. 3. Деформовані конструкції: *a* – балочна клітка; *б* – пластина

Таблиця 1

Переміщення в пластині від зосередженої сили у вузлі № 221

№ вуз.	z 1	z 2	z 3
219	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.984950D+00
221	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.988118D+00
223	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.984950D+00

Таблиця 2

Переміщення в балковій клітині від зосередженої сили у вузлі № 45

№ вуз.	z 1	z 2	z 3
43	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.100918D+01
45	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.101136D+01
47	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.100918D+01

Задача про власні коливання цієї ж конструкції розв'язана також з використанням обох моделей.

Форми власних коливань стосовно першої і другої частоти зображені на рис. 4 і рис. 5.

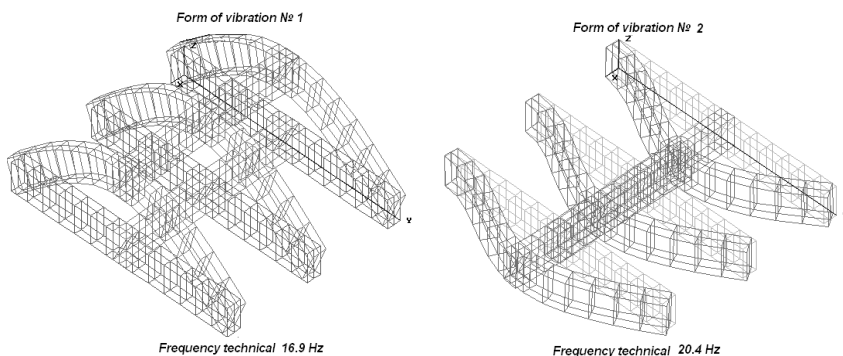


Рис. 4. Форми коливань балкової конструкції

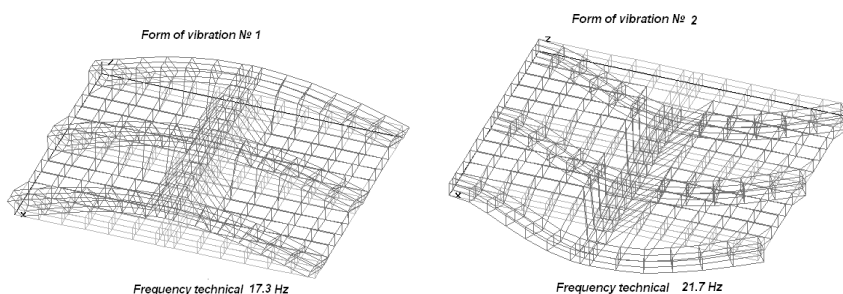


Рис. 5. Форми коливань пластини

За викладеною методикою розв'язана задача про власні коливання ділянки монолітно-каркасної будівлі (рис. 6).

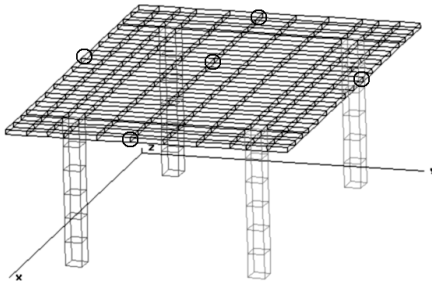


Рис. 6. Фрагмент монолітно-каркасної будівлі

Модель складається з п'яти фрагментів: чотирьох колон і плити перекриття. Стиківка колон з плитою моделюється як жорстке з'єднання. Для кожного стику колони з плитою введено сім узагальнених координат, у якості яких призначені п'ять поступальних і два кутових переміщення, що забезпечують нерозривність переміщень в зоні контакту.

Додатково до зазначених вузлів в межах плити призначені ще п'ять базисних вузлів (рис. 6). У кожному з них враховується одна ступінь вільності – переміщення по нормалі до поверхні пластини, тобто в напрямку її мінімальної жорсткості. Включення до числа базисних вузлів, ще й тих, що належать внутрішній області, дає можливість більш повно описувати інерційні властивості фрагмента, що важливо при розв'язанні задач динаміки. Форми коливань і значення відповідних їм власних частот показані на рис. 7.

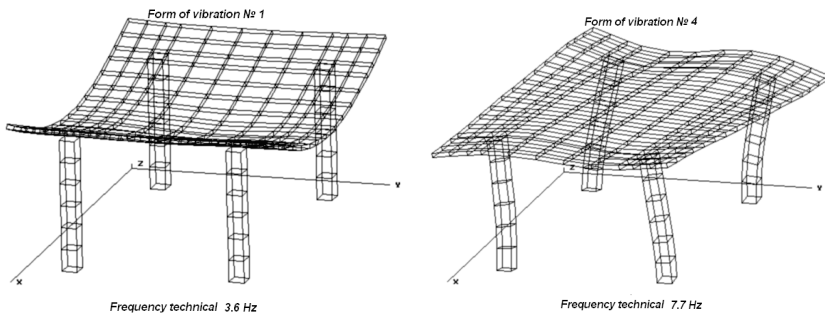


Рис. 7. Форми коливань фрагмента монолітно-каркасної будівлі

Розглянута також більш складна ділянка монолітно-каркасної будівлі, що утворена з трьох елементарних ділянок (рис. 8). Стиківка

елементарних ділянок виконуються тільки на рівні перерізів колон. Для кожної елементарної ділянки будується редукована модель другого рівня редукації, для якої узагальненими координатами є переміщення оголовка колони. Таким чином, до узагальнених координат елементарного фрагмента будівлі, які забезпечують стик колон і пластини перекриття, додалися ступені вільності моделі на рівні перерізів колон. Для кожного такого фрагмента побудовані редуковані матриці жорсткості і мас, та призначені глобальні номери узагальнених координат. Частина узагальнених координат з повного набору забезпечує стиковку колон з плитою перекриття фрагмента будівлі. Узагальнені координати, які віднесені до обмежуючих перерізів колон, забезпечують стиковку фрагментів.

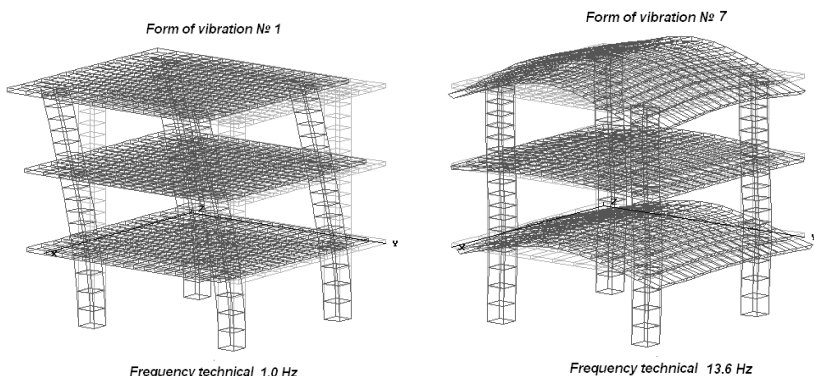


Рис. 8. Форми коливань багатофрагментної ділянки будівлі

Так можна побудувати редуковану розрахункову модель цілої будівлі шляхом складання матриць жорсткості і мас моделі з редукованих матриць окремих фрагментів. Зшивка повної матриці виконується по узагальненим координатам, які пов'язані з переміщеннями перерізів колон.

Розглянута задача, яка стосується визначення коливань робочого колеса компресора (рис. 9). Побудова розрахункової моделі колеса виконується з урахуванням умов його циклічної симетрії. Робоче колесо утворено із системи чарунк, які циклічно повторюються (рис.10). Елементами чарунки є континуальні тонкостінні об'єкти (фрагменти), розрахункові дискретні моделі яких будуються на основі МСЕ. Розрахункова модель колеса створюється на основі багаторівневих редукованих моделей складових фрагментів. На першому етапі

виконується побудова редукованої моделі чарунки колеса, яка циклічно повторюється.

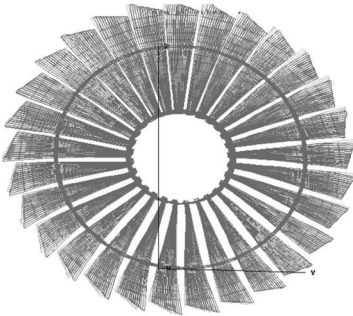


Рис. 9. Загальний вигляд ротора

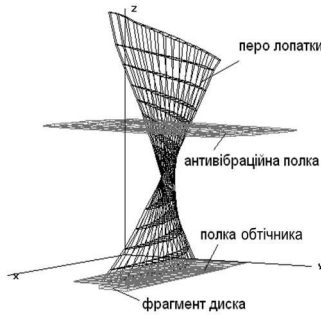


Рис. 10. Циклічна чарунка колеса

Чарунка являє собою багатофрагментне утворення, редукована модель якої будується за вже викладеною схемою. Тобто в межах кожного фрагмента чарунки будується регулярна сітка скінченних елементів так, щоб на границях фрагментів вузли сіток співпадали, і використовується метод базисних вузлів для багатофрагментної моделі. Всі перетворення, що пов'язані з побудовою редукованої моделі чарунки виконуються в єдиній для всіх фрагментів системи декартових координат.

В той же час, такий підхід ускладнює опис граничних умов для фрагментів, довільно орієнтованих у просторі.

Побудова редукованої моделі цілого колеса виконується шляхом переходу до полярної системи координат, пов'язаною з віссю колеса. Перехід до полярної системи координат передбачає перетворення редукованих матриць чарунки до переміщень у полярній системі координат, у відповідності з формулою, що встановлює зв'язок переміщень вузлів дискретної моделі в декартовій і полярній системах координат

$$q_i = C_i^k v_k, \quad (4)$$

де  $q_i$  - переміщення вузлів в декартовій системі,  $v_k$  - переміщення в полярній системі.

Матриця перетворення  $C_i^k$  – має вигляд:



$$C_i^k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\rho \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Переміщення базисних вузлів, що розглядаються як узагальнені координати всієї конструкції, повинні задаватися в напрямку осей полярної системи. Оскільки співвідношення МСЕ побудовані в глобальній декартовій системі координат, ці переміщення також слід віднести до декартової системи координат. Тобто редуковані матриці, що побудовані для переміщень базисних вузлів в декартовій системі координат, перетворюються остаточно до матриць, які відповідають переміщенням базисних вузлів у полярній системі, з використанням формули перетворень (4).

У відповідності до формули для обчислення варіації енергії пружної деформації елементарної чарунки

$$\delta W = K_{m(n)}^{ij} q_j^{(n)} \quad (6)$$

коефіцієнти матриці жорсткості для переміщень в полярній системі координат елементарної чарунки (циклічно повторюваного елемента колеса) обчислюється за формулою:

$$K_{mn}^{kl} = K_{(mn)}^{i'j'} \cdot C_i^{(m)n} C_j^{(n)l} \quad (7)$$

і є не змінюваним для кожної чарунки, що суттєво спрощує побудову редукованої матриці жорсткості усього колеса. Аналогічні перетворення виконуються для побудови редукованої матриці мас.

На рис. 11 показані форми власних коливань робочого колеса компресора.

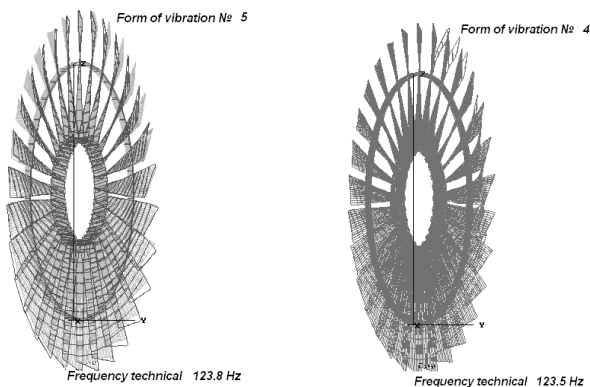


Рис. 11. Форми коливань ротора компресора

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел/ под общ. редакцией А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. –К. : Вища школа. Головное изд-во. 1982. –480 с.
2. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений. – Соппротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1974, вып. 24. - С. 147–156.

*Стаття надійшла до редакції 01.07.2011 р.*

*Legostaev A.D., Grechukh N.A., Iakovenko O.O.*

**ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МКЭ РАЗНООБОРАЗНЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОТ ДЕЙСТВИЯ СТАТИЧЕСКИХ I  
ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК**

Приведены результаты решения задач на собственные колебания комбинированных конструкций, полученные методом конечных элементов. Изложена суть алгоритма решения задач динамики, построенного на основе метода подконструкций и редуцированных моделей фрагментов. Используется универсальный трехмерный конечный элемент, соотношения для которого получены в перемещениях. Редуцированная дискретная модель фрагмента строится путем перехода к новым обобщенным координатам – перемещениям базисных узлов, назначенных из полного набора узлов конечноэлементной модели фрагмента.

*Legostaev A.D., Grechukh N.A., Iakovenko O.O.*

**CONSTRUCTION OF DESIGN MODELS MFE OF DIFFERENT STRUCTURES AT  
DEFINITION OF THEIR DYNAMIC CHARACTERISTICS AND STRESS STATE DUE  
TO STATIC AND DYNAMIC LOADING**

There are given results of solution of tasks of own vibration of the combined constructions got by finite elements method. The expounded essence of algorithm of dynamic tasks is built on the basis of method of substructures and reduced models of fragments. An universal three-dimensional finite element is used, correlations for which are built in motion. The reduced discrete model of fragment is built by passing to the new generalized coordinates – motion of base knots, appointed from complete set of knots of finite element model of fragment.

УДК 624.154

С.Й. Цимбал, канд. техн. наук  
О.В. Малишев

## ОСОБЛИВОСТІ УТВОРЕННЯ УЩІЛЬНЕНИХ ЗОН ҐРУНТУ НАВКОЛО БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ВДАВЛЮВАНИХ ПАЛЬ

Проведено порівняння аналітичних методів розрахунку радіуса зони ущільнення ґрунту навколо бічної поверхні вдавлюваних палей з практичними результатами. Запропоновано методику побудови ущільненої зони навколо бічної поверхні квадратної та таврової палі.

З досвіду будівництва відомо, що влаштування фундаментів без виймання ґрунту супроводжується утворенням ущільнених зон, в межах яких відбувається зміна природних фізико-механічних характеристик ґрунту. Утворення таких зон дозволяє покращити основу фундаментів, підвищити їх несучу здатність та збільшити ефективність.

При польових дослідженнях несучої здатності палей таврового та квадратного поперечного перерізу вдалося визначити та зафіксувати зони переміщення та ущільнення ґрунту навколо їх бічної поверхні, що необхідно враховувати при розробці аналітичних методів визначення несучої здатності палей таврового поперечного перерізу. Тому дуже важливим етапом дослідження є побудова ущільненої зони аналітичним методом та її порівняння з практичними результатами.

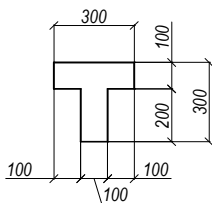


Рис. 1. Форма та розміри поперечного перерізу таврової палі

Експериментальні дослідження проводились з використанням палей квадратного (30x30см) та таврового (рис. 1) поперечного перерізу, занурених на глибину 4м в піски дрібної середньої щільності, малого ступеню водонасичення з наступними характеристиками:  $\rho=16.28 \text{ кН/м}^3$ ,  $\rho_d=15.6 \text{ кН/м}^3$ ,  $\rho_s=26.1 \text{ кН/м}^3$ ,  $e=0.671$ ,  $W=0.043$ ,  $\rho_w=1 \text{ т/м}^3$ . Зони ущільнення і переміщення у бічній поверхні палей визначались за допомогою динамічного зондування, відбором проб ґрунту у різке кільце, методом пенетрації та візуально при відкопуванні. Це дозволило побудувати зони переміщення та ущільнення ґрунту навколо стовбура таврової та квадратної палі (рис. 2).

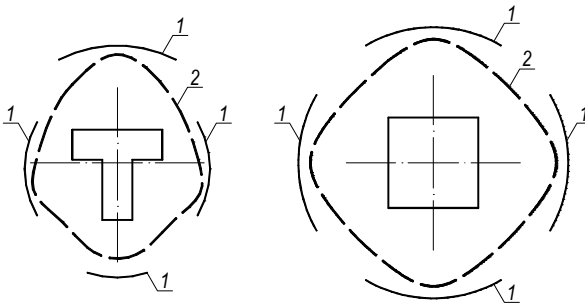


Рис.2. Зони ущільнення (1) та переміщення (2) ґрунту навколо дослідних паль, визначені в польових умовах

Для порівняння експериментальних даних з теоретичними, використовуються формули для визначення радіуса ущільненої зони, що наведені в роботах [1–3]

$$R_1 = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \sqrt{\frac{3(4+3e)}{e}}, \quad (1)$$

$$R_2 = r \left( \sqrt{4 + 6 \frac{m}{n}} - 1 \right), \quad (2)$$

$$R_3 = \sqrt{\frac{2\pi r^2 \left( \frac{w\rho_d}{\rho_w} + \frac{\rho_d}{\rho_s} + V_{c.a} \right)}{1 - \left( \frac{w\rho_d}{\rho_w} + \frac{\rho_d}{\rho_s} + V_{c.a} \right)}} \cdot \frac{1}{\pi} + r^2, \quad (3)$$

де  $V_{c.a}$  – об'єм затисненого повітря між агрегатами твердих частинок та водою, приймаємо  $V_{c.a} \approx 0$ ;  $r$  – приведений радіус палі;  $e$  – коефіцієнт пористості ґрунту;  $m$  – відносний вміст твердих часток;  $n$  – пористість ґрунту.

Дані формули дають можливість визначити радіус ущільнення навколо зануреного у ґрунт циліндра. Форма поперечного перерізу дослідних паль не є круглою, і тому просте застосування даних формул не є коректним. З метою досягнення результатів, подібних до експериментальних, запропоновано дві методики побудови ущільненої зони навколо паль квадратного та таврового поперечного перерізу.

Вводимо умовні позначення:  $R_{i,j}$  – радіуси ущільненої зони, напрямки яких відповідають формі ущільненої зони, отриманої експериментально (рис. 2), визначені по приведеному радіусу  $r_i$  ( $i = I, II, III, \dots, n$ ), за формулою  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Для побудови ущільнених зон навколо стовбуру дослідних паль використовується наступний алгоритм.

1. В поперечному перерізі кожної палі виділяються окремі розрахункові елементи.

2. Для кожного елемента визначається приведений радіус  $r_i$ .

2.1. За першою методикою радіус  $r_i$  знаходиться як середнє арифметичне між описаним та вписаним радіусом кола окремого розрахункового елемента.

2.2. За другою методикою, прирівнявши площу кола до площі поперечного перерізу кожного окремого елемента ( $A_i$ ), приведений радіус  $r_i$  знаходиться за формулою:

$$r_i = \sqrt{\frac{A_i}{\pi}}, \quad (4)$$

3. По приведеному радіусу  $r_i$  за формулами (1), (2), (3) визначаються радіуси ущільнення  $R_{i,j}$ .

4. Відкладаються значення  $R_{i,j}$ .

4.1. За першою методикою - з центра ваги кожного елемента.

4.2. За другою методикою - з центра ваги поперечного перерізу палі.

5. Вершини радіусів  $R_{i,j}$  з'єднуються. В результаті цих дій отримується зона ущільненого ґрунту навколо стовбура паль.

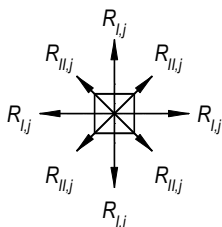


Рис. 3. Напрямки радіусів зони ущільнення навколо палі квадратного перерізу

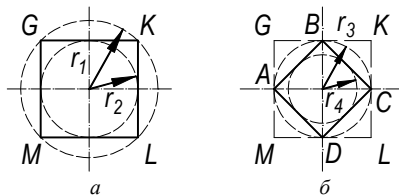


Рис. 4. Розрахункові елементи для визначення приведенного радіуса  $r_1(a)$  та  $r_{II}(b)$

Використовуючи даний алгоритм, виконаємо побудову ущільненої зони навколо дослідних паль за першою методикою. Визначаються радіуси ущільненої зони навколо квадратної палі по напрямкам, показаним на рис. 3. В поперечному перерізі палі виділяються два розрахункові елементи. Перший являє собою квадрат  $GKLM$  (рис. 4.а) зі стороною 30см. Другий – квадрат  $ABCD$  (рис. 4.б), вершини якого співпадають з центрами кожної сторони квадрата  $GKLM$ . Для першого елемента визначається приведений радіус  $r_1$ , як середнє арифметичне значення між описаним та вписаним радіусом кола ( $r_1$ ,  $r_2$ ) навколо квадрата  $GKLM$  (рис.4.а):

$$r_1 = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(21,2 + 15,0)}{2} = 18,1 \text{ см}$$

За формулами (1), (2), (3) обчислюються величини радіусів ущільненої зони:

$$R_{I,1} = \frac{18,1}{2} + \frac{18,1}{2} \sqrt{\frac{3(4 + 3 \cdot 0,671)}{0,671}} = 56 \text{ см}; \quad R_{I,2} = 18,1 \left( \sqrt{4 + 6 \frac{0,6}{0,4}} - 1 \right) = 47 \text{ см};$$

$$R_{I,3} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 18,1^2 \cdot \left( \frac{0,043 \cdot 15,6}{10} + \frac{15,6}{26,1} \right)}{1 - \left( \frac{0,043 \cdot 15,6}{10} + \frac{15,6}{26,1} \right)}} \cdot \frac{1}{\pi} + 18,1^2 = 40,4 \text{ см}.$$

Так само визначається приведений радіус  $r_{II}$ , як середнє арифметичне між описаним та вписаним радіусом кола ( $r_3$ ,  $r_4$ ) елемента ABCD, приведенного на рис. 4.б:

$$r_{II} = \frac{r_3 + r_4}{2} = \frac{(15,0 + 10,6)}{2} = 12,8 \text{ м}.$$

Радіуси зон ущільнення за формулами (1), (2), (3) складають:  $R_{II,1}=39,6 \text{ см}$ ,  $R_{II,2}=33,3 \text{ см}$ ,  $R_{II,3}=28,6 \text{ см}$ . Отримані дані зводимо до табл. 1.

Аналогічним чином визначаються радіуси ущільненої зони навколо таврової палі за напрямками, зображеними на рис. 5.

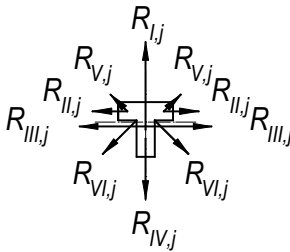


Рис. 5. Напрямки радіусів зони ущільнення навколо таврової палі за першою методикою

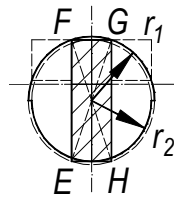


Рис. 6. Розрахунковий елемент для визначення приведенного радіусу  $r_1$

Виділяються п'ять розрахункових елементів в поперечному перерізі таврової палі (рис. 6,7,8). Знаходиться приведений радіус  $r_1$  елемента EFGH (рис.6), як середнє значення між описаним та вписаним радіусом кола  $r_1$  та  $r_2$ .

$$r_1 = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{15,8 + 15}{2} = 15,4 \text{ м}.$$

Радіуси ущільнення складають:  $R_{I,1}=47,6 \text{ см}$ ,  $R_{I,2}=40,0 \text{ см}$ ,  $R_{I,3}=34,4 \text{ см}$ . За цією методикою визначаються приведені радіуси  $r_{II}$ ,  $r_{IV}$ ,  $r_V$ ,  $r_{VI}$ , для

елементів, що зображені на рис. 7, та відповідні їм значення радіусів ущільнення: а)  $R_{II,j}$ ,  $R_{V,j}$ ; б)  $R_{IV,j}$ ; в)  $R_{VI,j}$  (див. табл. 1).

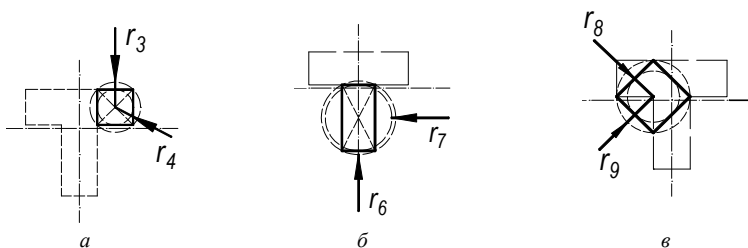


Рис.7. Розрахункові елементи для визначення приведеного радіуса: а -  $r_{II}$ ,  $r_V$ ; б -  $r_{IV}$ ; в -  $r_{VI}$ .

$$r_{II} = r_V = \frac{r_3 + r_4}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6 \text{ см}; \quad r_{IV} = \frac{r_6 + r_7}{2} = \frac{10 + 11,2}{2} = 10,6 \text{ м};$$

$$r_{VI} = \frac{r_8 + r_9}{2} = \frac{7 + 10}{2} = 8,5 \text{ см}.$$

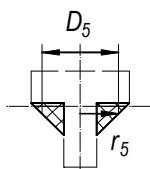


Рис.8. Розрахунковий елемент для визначення приведеного радіусу  $r_{III}$

Встановлено, що навколо бічної поверхні таврової палі при її заглибленні утворюється «приєднана маса ґрунту» у вигляді трикутників, що приймає участь у її роботі. Тому приведений радіус  $r_{III}$  дорівнює половині відрізка  $D_5$ , що проходить через центр ваги цих трикутників до перетину з їх гіпотенузами (рис.8):

$$r_{III} = r_5 = \frac{D_5}{2} = \frac{23,3}{2} = 11,7 \text{ м}.$$

Визначається радіус ущільнення  $R_{III,j}$ , а всі результати зводяться до табл.1. За даними табл.1 виконується побудова ущільненої зони ґрунту навколо паль квадратного та таврового поперечного перерізу (рис.9), визначеної за першою методикою.

Виконаємо побудову зони ущільнення за другою методикою.

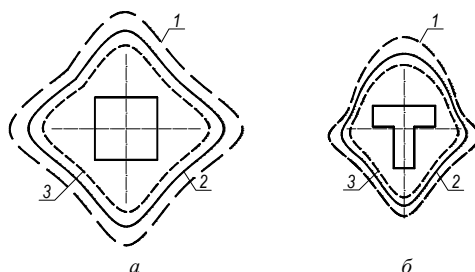


Рис. 9. Зони ущільнення ґрунту навколо паль квадратного (а) та таврового (б) перерізу, побудовані за першою методикою: 1 – за формулою (1); 2 – за формулою (2); 3 – за формулою (3)

Напрямки радіусів ущільнення квадратної палі зображено на рис. 3. В поперечному перерізі палі виділяються два розрахункові елементи. Перший являє собою квадрат  $ABCD$  (рис. 10.а) зі стороною 30см, площа якого дорівнює  $A_1=900 \text{ см}^2$ . Другий – трикутник  $ABC$  (рис. 10.б), з площею  $A_2=450 \text{ см}^2$ . За формулою (4) визначаються приведені радіуси  $r_I$  та  $r_{II}$ :

$$r_I = \sqrt{\frac{900}{3,14}} = 16,9 \text{ см}; \quad r_{II} = \sqrt{\frac{450}{3,14}} = 12,0 \text{ см}.$$

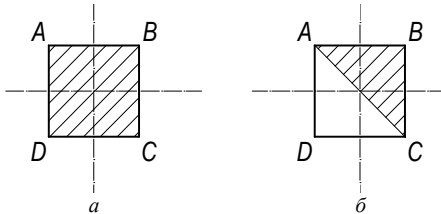


Рис. 10. Розрахункові елементи для визначення приведеного радіуса  $r_I$  (а) та  $r_{II}$  (б)

За формулами (1), (2), (3) по приведеному радіусу  $r_I$  обчислюються величини радіусів ущільненої зони:

$$R_{I,1} = \frac{16,9}{2} + \frac{16,9}{2} \sqrt{\frac{3(4+3 \cdot 0,671)}{0,671}} = 52,3 \text{ см};$$

$$R_{I,2} = 16,9 \left( \sqrt{4+6 \frac{0,6}{0,4}} - 1 \right) = 43,9 \text{ см};$$

$$R_{I,3} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 16,9^2 \cdot \left( \frac{0,043 \cdot 15,6}{10} + \frac{15,6}{26,1} \right)}{1 - \left( \frac{0,043 \cdot 15,6}{10} + \frac{15,6}{26,1} \right)}} \cdot \frac{1}{3,14} + 16,9^2 = 37,8 \text{ см}.$$

Радіуси зон ущільнення при  $r_{II}$  становлять:  $R_{II,1}=37,1 \text{ см}$ ,  $R_{II,2}=31,2 \text{ см}$ ,  $R_{II,3}=26,8 \text{ см}$ . Отримані дані зводимо до табл. 1.

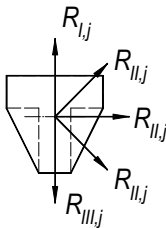


Рис. 11. Напрямки радіусів зони ущільнення навколо таврової палі за другою методикою

Аналогічним чином визначаються радіуси ущільненої зони навколо таврової палі за напрямками, показаними на рис. 11. Поперечний переріз палі приймається у вигляді шестикутника  $EFGHJK$  (рис. 12.а), з урахуванням ущільнених зон.

Виділяються три розрахункові елементи (рис. 12): а)  $EFGHJK$ ; б)  $EFLM$ ; в)  $EFJK$ . Площа окремого елемента та приведені радіуси складають: а)  $A_1=700 \text{ см}^2$ ,  $r_I=15,0 \text{ см}$ ;



б)  $A_2=350 \text{ см}^2$ ,  $r_{II}=10.6 \text{ см}$ ; в)  $A_3=400 \text{ см}^2$ ,  $r_{III}=11.3 \text{ см}$ . Відповідні радіуси ущільнення  $R_{i,j}$  приведені в табл. 1.

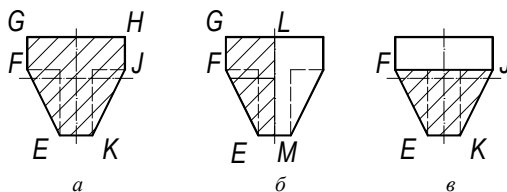


Рис. 12. Розрахункові елементи для визначення: а -  $A_1$ ,  $r_i$ ; б -  $A_2$ ,  $r_{ii}$ ; в -  $A_3$ ,  $r_{iii}$ .

За даними табл. 1 виконується побудова ущільненої зони ґрунту навколо паль квадратного та таврового поперечного перерізу за другою методикою (рис. 13).

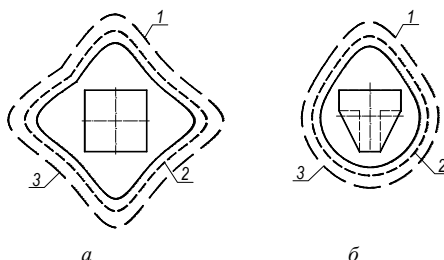


Рис. 13. Зони ущільнення ґрунту навколо паль квадратного (а) та таврового (б) перерізу, побудовані за другою методикою: 1 – за формулою (1); 2 – за формулою (2); 3 – за формулою (3)

Значення радіусів ущільнення та переміщення ґрунту навколо стовбура дослідних паль, що отримані при польових дослідженнях та наведені в табл. 1, представлені для точок, з яких відкладаються відповідні радіуси, визначені аналітично. Відсутність певних даних пояснюється тим, що по цим напрямкам розміри зон не визначалися.

Для порівняння аналітичних розрахунків з експериментальними накладаються зони ущільнення, побудовані теоретично (рис. 9, рис. 13), на зони переміщення та ущільнення ґрунту, побудовані за результатами польових досліджень (рис. 2). Результати накладання представлено на рис. 14.

Аналізуючи рис. 14, можливо відзначити, що характер зон ущільнення ґрунту, побудованих за різними методиками, є подібним до характеру зон переміщень, які отримані за натурними даними, а значення, отримані за формулою (2), майже співпадають з експериментальними. Проте реальна величина ущільненої зони (табл. 1) на 5 - 26% менша ніж визначена за формулою (1), на 9 - 24% більша ніж за формулою (3), а

різниця значень, отриманих за формулою (2), становить 2 - 12%. На даному етапі досліджень отримані результати підтверджують можливість використання всіх формул та методик по визначенню ущільненої зони. Однак вони мають бути додатково перевірені та за необхідності уточнені при розрахунку несучої здатності паль.

Таблиця 1

Розміри зон ущільнення ґрунту навколо дослідних паль  
за аналітичними та експериментальними даними

Форма поперечного перерізу палі		Тавр						Квадрат	
Значення і		I	II	III	IV	V	VI	I	II
Значення приведених радіусів та радіусів зон ущільнення, визначені за першою методикою									
Приведений радіус $r_i$ , см		15.4	6.0	11.7	10.6	6.0	8.5	18.1	12.8
Радіус зони ущільнення, визначений аналітичним методом	$R_{i,1}$ , см	47.6	18.6	36.2	32.8	18.6	26.3	56	39.6
	$R_{i,2}$ , см	40.0	15.6	30.4	27.5	15.6	22.1	47	33.3
	$R_{i,3}$ , см	34.4	13.4	26.1	23.7	13.4	19	40.4	28.6
Радіуси зон переміщення, визначені в польових умовах, см		4.0	15.5	28.0	23.0	-	-	41.0	-
Радіуси зон ущільнення, визначені в польових умовах $R_{п}$ , см		43.0	-	30.8	26.0	-	-	48.0	-
Відношення радіуса зони ущільнення, визначеного аналітичним методом до радіуса, визначеного в польових умовах	$R_{i,1}/R_{п}$	1.11	-	1.18	1.26	-	-	1.17	-
	$R_{i,2}/R_{п}$	0.93	-	0.99	1.06	-	-	0.98	-
	$R_{i,3}/R_{п}$	0.80	-	0.85	0.91	-	-	0.84	-
Значення приведених радіусів та радіусів зон ущільнення, визначені за другою методикою									
Приведений радіус $r_i$ , см		15.0	10.6	11.3	-	-	-	16.9	12.0
Радіус зони ущільнення, визначений аналітичним методом	$R_{i,1}$ , см	46.4	32.8	35.0	-	-	-	52.3	37.1
	$R_{i,2}$ , см	39.0	27.5	29.4	-	-	-	43.9	31.2
	$R_{i,3}$ , см	33.5	23.7	25.2	-	-	-	37.8	26.8
Радіуси зон переміщення, визначені в польових умовах, см		37.6	27.7	30.1	-	-	-	41.0	-
Радіуси зон ущільнення, визначені в польових умовах $R_{п}$ , см		40.5	30.9	33.3	-	-	-	48.0	-
Відношення радіуса зони ущільнення, визначеного аналітичним методом до радіуса, визначеного в польових умовах	$R_{i,1}/R_{п}$	1,15	1.06	1.05		-	-	1.09	-
	$R_{i,2}/R_{п}$	0.96	0.89	0.88		-	-	0.91	-
	$R_{i,3}/R_{п}$	0.83	0.77	0.76		-	-	0.79	-

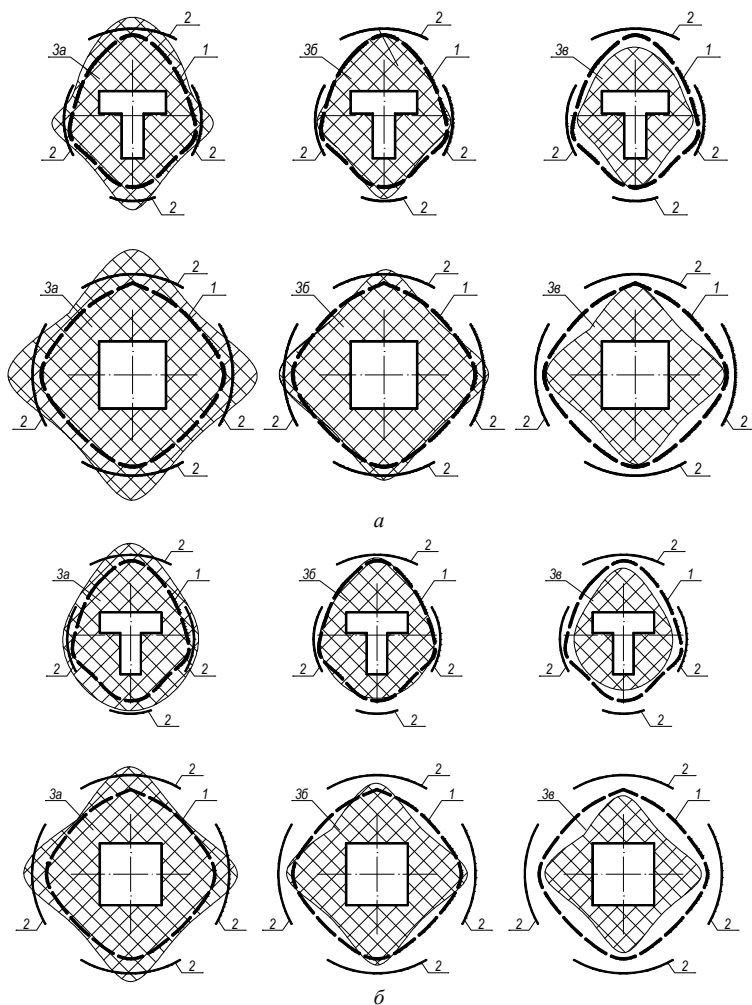


Рис. 14. Порівняння аналітичних розрахунків та експериментальних даних: *a* - за першою методикою; *б* - за другою методикою; 1 - зона переміщення та 2 - зона ущільнення ґрунту, визначені в польових умовах; 3а, 3б, 3в - зони ущільнення ґрунту, побудовані аналітичним методом за формулами (1), (2), (3) відповідно.

#### Висновки:

1. Розроблені аналітичні підходи до визначення ущільнених зон ґрунту навколо бічної поверхні палів квадратного і таврового поперечного перерізу.

2. Порівняння розрахункових значень радіусів зони ущільнення навколо бічної поверхні паль з практичними результатами вказують на їх задовільну відповідність.

3. Співставлення існуючих аналітичних методів з експериментальними даними вказує на можливість їх застосування для теоретичного визначення ущільненої зони біля бічної поверхні таврових паль, та використання її в розрахунках несучої здатності.

4. Побудова зон ущільнення в ґрунтах з різними коефіцієнтами пористості дозволить більш ефективно розміщувати палі у складі пальового фундаменту.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зоценко М.Л., Коваленко В.І.* Інженерна геологія. Механіка ґрунтів, основи і фундаменти. Підручник. Полтава: ПНТУ, 2003 – 446 с.
2. *Цымбал С.Й.* К определению сопротивления грунта по боковой поверхности забивной сваи. Основания и фундаменты. - К.: «Будівельник», 1979, вип.12.
3. *Цымбал С.Й., Куценко Г.В.* Врахування пористості ґрунтів при визначенні розмірів зони їх ущільнення. Основи і фундаменти. - К.: «Будівельник», 2008, вип.31.

*Стаття надійшла до редакції 06.07.2011 р.*

*Цымбал С.И., Мальшев О.В.*

#### **ОСОБЕННОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ УПЛОТНЕННЫХ ЗОН ГРУНТА ВОКРУГ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВДАВЛИВАЕМЫХ СВАЙ**

Проведено сравнение аналитических методов расчета радиуса уплотнения грунта вокруг боковой поверхности вдавливаемых свай с практическими результатами. Предложена методика построения уплотненной зоны вокруг боковой поверхности квадратной и тавровой свай.

*Tsymbal S.Y., Malyshev O.V.*

#### **FEATURES OF FORMATION OF THE CONSOLIDATION ZONES OF AROUND THE LATERAL SURFACE OF DRIVEN PILES**

A comparison of analytical methods for the calculation of radius of soilconsolidation around lateral surface of driven piles with practical results is spent. A method is proposed for construction of consolidation zone around the side of square and T-cross section piles.

УДК 624.011

В.З. Кліменко, канд. техн. наук

## РОЗРАХУНОК ДЕРЕВ'ЯНИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА СТИСК ЗІ ЗГИНОМ

Пропонується заміна нормативного приблизного метода розрахунку стиснено-зігнутих елементів, до якого є серйозна методологічна претензія, на точний розрахунок по міцності, вільний від методологічної претензії.

Історія розрахунку дерев'яних елементів, що працюють на стиск зі згином, стиснено-зігнутих – почалася в тридцять роки минулого століття. З наміром зменшення трудомісткості виготовлення ферм збільшувалася довжина панелей верхніх поясів, - відповідно зменшувалась кількість вузлів. Це призвело до розташування прогонів покриття між вузлами. Панелі верхніх поясів ферм почали працювати за схемою стиснено-зігнутого елемента. Для їх розрахунку професором Заврієвим К.С. була розроблена теорія крайових напружень, відповідно до якої вичерпання несучої здатності відбувається тоді, коли напруження від сумісної дії стику і згину в деформованій схемі елемента дорівнюють розрахунковому опору деревини на стиск. В цій теорії формула складного опору набула вигляду:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{N}{F_{\text{розр}}} + \frac{M_q}{W_{\text{розр}}} + \frac{N \cdot f_d}{W_{\text{розр}}} = R_c, \quad (1)$$

в якій:  $M_q$  – згинальний момент від поперечного навантаження;  $f_d$  – прогин елемента в деформованій схемі, що складається з прогину від поперечного навантаження  $f_q$  і додаткового прогину в стійкому стані деформованого елемента  $f_N$  від додаткового згинального моменту  $M_{\text{дод}} = N \cdot f_q$ .

Замість точного розрахунку з виконанням інтегрування диференціального рівняння осі стиснено-зігнутого елемента для визначення прогину  $f_d$  в теорії крайових напружень використано приблизний розв'язок

$$f_d = \frac{M_q}{N_E - N}, \quad (2)$$

де  $N_E$  – критична сила по Ейлеру для центрально стиснутого стержня, який має такі ж геометричні характеристики поперечного перерізу і умови закріплення на опорах, як і стиснено-зігнутий елемент.

Після підстановки  $f_d$  по (2) в формулу (1) і перетворень отримано вираз для крайових напружень

$$\sigma_{кр} = \frac{N}{F_{розр}} + \frac{M_q}{\left(1 - \frac{N}{N_E}\right) \cdot W_{розр}} = \frac{N}{F_{розр}} + \frac{M_q}{\xi \cdot W_{розр}}, \quad (3)$$

по якому виконується перевірка міцності стиснено-зігнутого елемента, починаючи з першого нормативного документа по проектуванню дерев'яних конструкцій ОСТ 90001-38 до чинних СНиП II-25-80. Використовується формула (3) і в навчально-методичній літературі до курсу «Дерев'яні конструкції». Коефіцієнт  $\xi$  в формулі (3) формально збільшує згинальний момент від поперечного навантаження і дає  $M_{розр} = M_q / \xi$ . В дійсності  $M_{розр} = M_q + N \cdot f_d$ . Таким чином відбувалася підміна фізичного стану, що виникає в стиснено-зігнутому елементі; і на зміну точного розв'язку за формулою (1) використовується приблизний розв'язок за формулою (3). Здається тут доречно згадати вислів видатного натураліста і філософа Гекслі: «Математика, подібно жерну, перемолотить те, що під нього засипати, і як засипавши полу, ви не отримаєте пшеничного борошна, так заповнивши цілі сторінки формулами, ви не отримаєте істини з хибних припущень». Коефіцієнт  $\xi$  в нормах проектування знаходиться за формулою

$$\xi = 1 - \frac{N}{\varphi \cdot F \cdot R_c}, \quad (4)$$

де  $\varphi$  – коефіцієнт повздожнього згину для Ейлерова стержня, який для умовної деревини з границею міцності на стиск  $R_c^{ГМ}$  знаходиться за співвідношенням

$$\varphi = \frac{N_{кр}}{N} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2 \cdot b \cdot h \cdot R_c^{ГМ}}, \quad (5)$$

з якого при  $R_c^{ГМ} \approx 33 \text{ МПа}$  і  $E = 10^4 \text{ МПа}$  із заміною  $l^2 = (0,289 \cdot h)^2 \cdot \lambda^2$  отримане значення

$$\varphi \approx 3000 / \lambda^2, \quad (6)$$

яке використовується в нормативному методі розрахунку.

При  $\lambda \leq 54,75$  коефіцієнт повздожнього згину за (6) стає більшим за одиницю. Попри це, норми проектування розповсюджують використання формули (6) на розрахунок стиснено-зігнутих елементів при будь-якій

їхній гнучкості. В цьому автор бачить серйозну методологічну претензію до нормативного методу розрахунку.

У дрібнопанельних фермах з довжиною панелей верхніх поясів до 3 м, для розрахунку яких була розроблена теорія крайових напружень, при гнучкостях панелей  $\lambda > 60$  коефіцієнт  $\varphi$  ніколи не перевершував одиницю. Приводу до методологічної претензії не з'являлося, хоча логічно вірним було б, з точки зору фізичного змісту формули (6), обмежити її застосування. Ситуація змінилася при проектуванні великопанельних ферм з клеєної деревини, в яких панелі верхніх поясів мають довжину більш ніж п'ять метрів, а в трикутних розпірних системах сягають значно більшої довжини. Коефіцієнт  $\varphi$  стає не просто більше одиниці, а навіть набагато більше одиниці. Тут автор свідомо не називає його коефіцієнтом повздовжнього згину і не погоджується з нормативним положенням щодо визначення його по формулі (6). Здається, що факт появи випадків, коли  $\varphi > 1$ , заслуговує того, щоб на нього звернути увагу і чи змінити метод розрахунку нових реальних стиснено-зігнутих елементів, чи дати логічне, об'єктивне пояснення можливості продовження використання нормативного методу розрахунку. Неможна вважати поясненням те, що коефіцієнт  $\varphi$  по формулі (6) може бути більше одиниці, як це зроблено в Посібнику [1] до норм проектування дерев'яних конструкцій [2]. Тут же в [1] формула для коефіцієнта  $\xi$  має такий запис

$$\xi = 1 - N_c / (\varphi_E \cdot R_c \cdot F). \quad (7)$$

При зовнішній схожості формул (4) та (7) вони відображають фізичні явища в різних стиснено-зігнутих елементах: формула (4) в реальній панелі верхнього поясу конструкції; формула (7) в Ейлеровому стержні, що працює на стиск зі згином. Докладніше про різницю фізичних явищ в цих елементах в статті нижче.

Поява при проектуванні великопанельних ферм і трикутних розпірних систем несподіваних випадків у вигляді того, що  $\varphi \gg 1$ , спонукало автора в [3] на намагання знайти пояснення з історичної і фізичної позицій можливості використання формули (3) з визначенням коефіцієнта  $\xi$  по формулі (4) при коефіцієнті  $\varphi > 1$ . Пояснення знайти не вдалося. Але нормативний метод розрахунку нового виду стиснено-зігнутих елементів продовжує успішно існувати, маючи на увазі кінцевий результат розрахунків по формулі (3).

Пояснення, яке автор отримав в [3], знаходиться в структурі формули (4) для коефіцієнта  $\xi$ . В ній нівелюється величина  $\xi$  в широкому діапазоні

значень коефіцієнта  $\varphi$ . Розглянемо, наприклад, розрахунок двох стиснено-зігнутих елементів з наступними вихідними даними:

1-й елемент:  $N = 200 \text{ кН}$ ,  $R_c = 15 \text{ МПа}$ ,  $l = 400 \text{ см}$ ,  $b \times h = 12 \times 50 \text{ см}$ ,  
 $\lambda = 26,6$ .

Коефіцієнти  $\varphi_1 = 4,3$ , коефіцієнт  $\xi_1 = 0,95$ .

2-й елемент:  $N = 150 \text{ кН}$ ,  $R_c = 15 \text{ МПа}$ ,  $l = 400 \text{ см}$ ,  $b \times h = 12 \times 30 \text{ см}$ ,  
 $\lambda = 44,4$ .

Коефіцієнти  $\varphi_2 = 1,6$ , коефіцієнт  $\xi_2 = 0,72$ .

При різниці  $\varphi$  в 2,7 рази, різниця в  $\xi$  становить лише 1,32 рази.

Пояснення вдалою математичною структурою формули не може бути науковим обґрунтуванням фізичного явища, що відбувається в стиснено-зігнутому елементі з гнучкістю  $\lambda < 55$ . Дослідження і пояснення фізичного явища повинні вестись не з позиції його історичного розвитку, а виходячи від ставлення до нього з феноменологічного підходу до фізичного явища.

Саме другий підхід обрав автор для дослідження розрахунку дерев'яних стиснено-зігнутих елементів з гнучкістю  $\lambda < 55$ . Треба змінити метод розрахунку, який вже на протязі сімдесяти років міститься в нормативних документах і навчальній літературі, і став настільки звичним, що апріорі приймається беззастережно. Автор впевнений в тому, що далеко не всі правила проектування конструкцій з деревини цільної, які склалися протягом минулих десятиліть, можна механічно переносити на проектування конструкцій з деревини клеєної. В разі, коли «старий» підхід дає нібито позитивний результат при його неадекватності фізичному явищу, а завдяки вдалому випадку, не може бути принципом наукового досягнення. Такий підхід не повинен бути визнаним і присутнім ні в нормативній, ні в навчальній літературі, тим більше тоді, коли до отриманого з нього результату є серйозне зауваження з методологічної і феноменологічної позицій. Фізичним феноменом розглянутого в статті питання є те, що коефіцієнт повздожнього згину  $0 < \varphi \leq 1$ . «Феномен» в перекладі означає явище або інакше факт. Феноменологічний підхід до інтерпретації явища аналітичним засобом вимагає повного збігу фізичного явища з детермінованим математичним рівнянням. Останнього немає в нормативному методі розрахунку стиснено-зігнутого елемента з  $\lambda \leq 55$ . Збігу немає, оскільки його об'єктивно не існує.

В теорії крайових напружень коефіцієнт



$$\xi = 1 - \frac{N}{N_E}. \quad (8)$$

Для стиснено-зігнутого елемента з  $\lambda > 55$  зусилля  $N$  і критична сила по Ейлеру  $N_E$  відносяться до одного елемента. На графіку  $\varphi$ - $\lambda$  коефіцієнт  $\varphi_E$  в формулі (7) для центрально стиснутого елемента знаходиться на ділянці гіперболи Ейлера в межах  $55 < \lambda \leq [\lambda]$ . Фізичне явище стійкості стиснутого стержня накладається на такий самий, але стиснено-зігнутий елемент. Виправдано визначення коефіцієнта повздовжнього згину в цьому випадку по формулі (5), а отже адекватними фізичному явищу виявляються формули (8), (7) та (3), і нормативний метод розрахунку стиснено-зігнутого елемента.

При гнучкості  $\lambda < 55$  гіпербола Ейлера різко зростає, і коефіцієнт  $\varphi$  на ній стає більше одиниці. Ця ділянка гіперболи Ейлера відноситься до віртуального стержня фізично не існуючого в природі. Для розрахунку стійкості центрально стиснутих стержнів користуються ділянкою графіка  $\varphi$ - $\lambda$ , запропонованого Енгессером-Карманом, на якій коефіцієнт  $\varphi$  завжди менше одиниці, а при  $\lambda = 0$   $\varphi = 1$ . Теорія крайових напружень для стиснено-зігнутого елемента при  $\lambda < 55$  з коефіцієнтом  $\varphi$  у формулі (4) по кривій Енгессера-Кармана чи по рівнянню Кочеткова, яке добре апроксимує цю криву, дає незадовільні результати. Це логічно, оскільки формули (8), (4) та (3) не мають відношення до фізичного явища в стисно-згинальному елементі з  $\lambda < 55$ . Однак, як вже відмічалось вище, нормативний розрахунок розповсюджується на такі елементи. Сприяло цьому те, що нормативний розрахунок для цих елементів дає деякий запас міцності. Але, чому стиснено-зігнуті елементи з  $\lambda > 55$  можна розраховувати без запасу міцності, а інші з  $\lambda \leq 55$  з зайвим запасом міцності. Норми проектування гарантують необхідний рівень міцності для будь яких конструкцій. Автор вважає, що цей зайвий запас міцності не може бути виправданням легітимності методу розрахунку при наявності до нього серйозної методологічної претензії. Виправданням могло бути бажання зберегти один метод розрахунку стиснено-зігнутих елементів на всьому діапазоні їхньої гнучкості. Це зрозуміти можна, але при цьому треба усунути претензію методологічного характеру в розрахунок стиснено-зігнутого елемента з  $\lambda \leq 55$  так, як це запропоновано автором в [4].

Повернемося до початку статті. До моменту розробки теорії крайових напружень вже було відомо точний розв'язок для елементів, що працюють на стиск зі згином, отриманий шляхом інтегрування

диференціального рівняння викривленої осі елемента в деформованій схемі

$$E \cdot I \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{q \cdot l}{2} \cdot x + N \cdot y = 0. \quad (9)$$

Для розрахункового згинального моменту отримана формула

$$M = \frac{q \cdot l^2}{U^2} \left( \frac{1}{\cos \frac{U}{2}} - 1 \right), \quad (10)$$


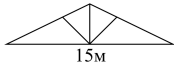
в якій  $U = \sqrt{N/E \cdot I \cdot l}$ .

Важко відповісти, чому не знайшов застосування точний метод, а віддали перевагу наближеному методу [5]. До того, що сказано вище з цього приводу, додамо таке. Теорія крайових напружень дала результат для розрахункового згинального моменту у формулі (3) у вигляді  $M_{\text{розр}} = M_q / \xi \cdot W_{\text{розр}}$ , який простіше порівняно з формулою (10). І головне. Новий метод прийшов на заміну розрахунку на нерівномірне стискання по формулі Ф.С. Ясинського  $\sigma = N/\phi \cdot F + M/W$ . Однотипність формул могла вплинути на вибір метода розрахунку.

Порівняння нормативного і точного методів розрахунку стиснено-зігнутих елементів проведено шляхом зіставлення значень розрахункових згинальних моментів, що наведені в таблиці 1. Розрахунки по нормативному методу взяті з прикладів, виконаних автором в навчальних посібниках: для конструкцій за схемою 1 з [6]; за схемою 2 з [7].

Обрано два приклади з гнучкостями панелей верхніх поясів більше і менше 55 і відповідно коефіцієнтами  $\phi$  менше і більше одиниці. Нормативний метод розрахунку дає запас по величині розрахункового згинального моменту тим більше, чим менше гнучкість елемента при приблизно рівних коефіцієнтах  $\xi$ . В цьому порівнянні двох верхніх поясів так само, як в наведеному вище порівнянні двох елементів, видно нівелювання величини  $\xi$  при значній різниці в величинах  $\phi$ . Напруження від згину в складному опорі складають 75÷80% крайового напруження  $\sigma_{\text{кр}}$ , і це забезпечує запас міцності стиснено-зігнутому елементу. Як вже відмічалось, цей запас зовсім необов'язковий. Заради «чистоти» методу розрахунку, в нормах проектування повинен бути метод вільний від претензії до нього з методологічної позиції.

Таблиця 1

№	Схема конструкції	Коефіцієнти			Згинальні моменти		$\frac{M_d - M_T}{M_T}$ , %
		$\lambda$	$\varphi$	$\xi$	$M_d = \frac{M_q}{\xi}$	$M_T$ по (10)	
1		78	0,443	0,890	49,21	46,5	6
2		40,7	1,81	0,869	44,37	37,04	17,1

Слід повернутися до визначення коефіцієнта  $\varphi$  по формулі (5). Чинні норми проектування дерев'яних конструкцій розглядають не умовну деревину, для якої значення  $\varphi$  по формулі (6) є сталим, а три сорти цільної і три сорти клеєної деревини, для яких границя міцності  $R_c^{FM}$  має інтервал від 20 МПа до 34,5 МПа. Додамо до виконаного вище чисельного дослідження двох стиснено-зігнутих елементів наступне дослідження з різними величинами  $R_c^{FM}$ .

1-й елемент. Виконується з деревини 3-го сорту з  $R_c^{FM}=20$  МПа,  $R_c = 11$  МПа.

$$\varphi_1 = \frac{4919}{\lambda^2} = \frac{4919}{26,6^2} = 6,95; \xi_1 = 0,957.$$

2-й елемент. Виконується з деревини 1-го сорту з  $R_c^{FM}=34,5$  МПа,  $R_c = 16$  МПа.

$$\varphi_2 = \frac{2851}{\lambda^2} = \frac{2851}{44,4^2} = 1,45; \xi_2 = 0,92.$$

Різниця між коефіцієнтами  $\varphi$  умовної деревини і для деревини різних сортів велика. Це відбивається на коефіцієнтах  $\xi$ . Так, для 2-го елемента співвідношення величин  $\xi_2$  становить  $(0,92/0,72) \cdot 100 = 28\%$ . На такий відсоток зменшується величина розрахункового згинального моменту в деформованій схемі елемента. Це перевершує запас, який дає нормативний розрахунок з  $\varphi$  по формулі (6). Ведеться до того, що навіть з фізичного погляду на нормативний метод розрахунку, він перестає бути таким, що забезпечує однаковий запас для реальних стиснено-зігнутих

елементів. Остання обставина укріплює автора в міркуванні замінити нормативний метод розрахунку стиснено-зігнутих елементів на точний з визначенням у формулі складного опору розрахункового згинального моменту по формулі (10).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Пособие по проектированию деревянных конструкций (к СНиП II-25-80) / ЦНИИСК им. Кучеренко. – М. : Стройиздат, 1986. – 216 с.
2. СНиП II-25-80. Нормы проектирования. Деревянные конструкции.– М. : Стройиздат – Госстрой СССР, 1982. – 66 с.
3. *Клименко В.З.* Развитие методики расчета сжато-изогнутых элементов в историческом аспекте / 36. наукових праць УкрНДПСК ім. В. М. Шимановського. Вип. 5. – К. – 2010. – С. 130-139.
4. *Клименко В.З.* Устранение методологического десонанса в расчете деревянных элементов, работающих на изгиб со сжатием / Часопис «Промислове будівництво та інженерні споруди» №2 – К. 2010. – С. 41-44.
5. *Г.Г. Карлсен и др.* Курс деревянных конструкций. Ч. II. – М-Л.: СИ. – 1942. – 348с.
6. *Кліменко В.З.* Проектування дерев'яних конструкцій. Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1998. – 430 с.
7. *Иванов В. А., Клименко В. З., Кормаков Л. И. и др.* Конструкции из дерева и пластмасс. Примеры расчета и конструирования: Учеб. пособие для вузов / под ред. проф. Иванова В. А. – 3-е изд., перераб. и доп. – К. : Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 392 с.

*Стаття надійшла до редакції 03.12.2010 р.*

*Клименко В.З.*

#### **РАСЧЕТ ДЕРЕВЯННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, РАБОТАЮЩИХ НА СЖАТИЕ С ИЗГИБОМ**

Предлагается заменить нормативный приблизительный метод расчета сжато-изгибаемых элементов, к которому имеется методологическая претензия, на точный расчет, свободный от методологической претензии.

*Klimenko V.Z.*

#### **CALCULATION OF THE WOODEN ELEMENTS, WORKING IN COMPRESSION WITH BENDING**

Proposed to replace the standard method of calculating approximate compressed-bent elements, to which there is a methodological claim, the exact calculation, free from the methodological claim.

УДК 539.3

**В.К. Чибіряков**, д-р техн. наук  
**І.В. Жупаненко**

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ТОВСТИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ МОДЕЛІ

Для визначення частот власних коливань нетонких пластин реалізовано алгоритм розрахунку дискретно-континуальної розрахункової моделі, що враховує інерційні властивості об'єкта дискретно, а жорсткісні – континуально.

Розглядаються однорідні ізотропні лінійно-пружні просторові тіла вісесиметричної структури, об'єднані за термінологією узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень [1] в клас *товстих пластин несиметричної будови*.

Для динамічного аналізу таких елементів існує два підходи. Перший з них передбачає врахування континуальних властивостей мас і пружних характеристик системи, внаслідок чого рівняння руху розрахункової моделі записуються у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних. З огляду на складність розв'язання таких рівнянь, континуальна розрахункова модель використовується переважно при дослідженні хвильових процесів в тілах, а в задачах про динамічну реакцію системи застосовується той чи інший спосіб дискретизації. Зокрема, найпростіший прийом дискретизації полягає в зосередженні мас в окремих точках континуальної безінерційної системи. Рівняння руху континуальної системи із зосередженими масами (дискретно-континуальної моделі) складаються на основі принципу Д'Аламбера і утворюють систему звичайних диференціальних рівнянь за часом, яка при застосуванні методу сил в матричній формі в загальному вигляді записується в такому вигляді:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \mathbf{Y}}{dt^2} + \mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}, \quad (1)$$

де  $\mathbf{Y} = \{y_i\}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) - матриця-стовпчик ступенів вільності зосереджених мас,  $n$  - кількість динамічних ступенів вільності,  $\mathbf{T}$  - матриця мас,  $\mathbf{P} = [\delta_{ij}]$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) - матриця впливу сил інерції (матриця

піддатливості),  $\mathbf{P} = \{P_k(t)\}$  ( $k = \overline{1, m}$ ) - матриця-стовпчик зосереджених зовнішніх сил,  $\mathbf{B} = [\delta'_{kl}]$  ( $k, l = \overline{1, m}$ ) - матриця впливу зосереджених зовнішніх сил.

В статті [2] досліджено особливості побудови матриці мас та матриці піддатливості для тонкої кільцевої пластини. Дана робота присвячена узагальненню отриманих результатів на клас нетонких пластин обертання, а також, як частинний випадок, прямокутних пластин (балк-стінки).

Розглядається задача про власні коливання пластин, що описується однорідною системою (1):

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \mathbf{Y}}{dt^2} + \mathbf{Y} = 0, \quad (2)$$

розв'язок якої шукатимемо у вигляді  $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ . В результаті підстановки виразу  $\mathbf{Y}(t)$  у рівняння (2) та нескладних перетворень, отримаємо:

$$-\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_0 = 0,$$

або

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}_0 = \lambda \cdot \mathbf{Y}_0, \quad (3)$$

де  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ .

Елементи матриці впливу  $\mathbf{P}$  визначаються як реакції континуальної системи на зосереджені статичні впливи, що відповідають динамічним ступеням вільності системи. По суті, кожен одиничний стан визначається як розв'язок статичної неоднорідної крайової задачі

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dr} = [A(r)]\mathbf{Y} + \mathbf{F}, \quad 0 \leq r \leq L \quad (4)$$

з однорідними граничними умовами

$$[C_0] \cdot \mathbf{Y}(0) = \mathbf{0}, \quad [C_L] \cdot \mathbf{Y}(L) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Особливістю побудови дискретно-континуальної моделі нетонких вісесиметричних пластин (порівняно з тонкими) є дискретизація мас по двох просторових координатах  $r$  і  $z$ . Компоненти вектора  $\mathbf{F}$  в системі (4) визначаються одиничним зосередженим по координатах  $r$  і  $z$  силовим впливом, що відповідає конкретному одиничному стану. Відповідно до цього, компоненти вектора  $\mathbf{F}$  задається за допомогою дельта-функції Дірака в такому вигляді:

$$F(r, z) = F \cdot \delta(r - r_k) \cdot \delta(z - z_m), \quad k = \overline{1, n_r}; m = \overline{1, n_z},$$

де  $n_r, n_z$  – кількість точок зосередження мас по координаті  $r$  та  $z$  відповідно.

Розв'язувальна одновимірна система диференціальних рівнянь (4) отримана шляхом редукції вихідних співвідношень лінійної теорії пружності узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень по поперечній координаті (циліндрична координата  $z$ ) та методом Фур'є по коловій координаті  $\theta$ . Процедура зниження вимірності та матриці  $[A(r)], [C_0], [C_L]$  для вісесиметричного випадку докладно описані в [3]. В редукованій системі рівнянь (4) навантаження, що визначає конкретний одиничний стан, задається вектором  $\mathbf{F}^i = \{f_r^i, f_z^i\}$ , компоненти якого нульові окрім тих, що відповідають напряму розглядуваної сили інерції. Ненульові компоненти вектора  $\mathbf{F}$  після редукції узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень мають вигляд:

$$f^i(r) = \frac{1}{r_k^*} \cdot \delta(r - r_k^*) \cdot P_i^H(\xi_m), \quad k = \overline{1, n_r}; m = \overline{1, n_z},$$

де  $r_k^*$  – радіус зосередження  $k$ -ї маси, визначений в [3],  $P_i^H(\xi_m)$  – нормовані поліноми Лежандра [1].

Крайова задача (4), (5) розв'язується чисельно методом дискретної ортогоналізації. Розв'язок неоднорідної задачі в будь-якій точці ортогоналізації  $r_s$  шукається у вигляді суми загальних розв'язків однорідної задачі  $\mathbf{Z}_j$  і часткового розв'язку неоднорідної задачі  $\mathbf{Z}_0$ :

$$\mathbf{Y}(x_s^1) = \sum_{j=1}^{n/2} B_j^s \cdot \mathbf{Z}_j(r_s) + \mathbf{Z}_0(r_s), \quad (6)$$

де  $B_j^s$  – вектор сталих інтегрування, елементи якого в останній точці інтервалу визначаються з граничних умов на правому кінці:

$$B_j^L = -[C_L \cdot Z(L)]^{-1} \times [C_L \cdot \mathbf{Z}_0(L)],$$

а в решті точок – в процесі виконання зворотного ходу прогонки.

Оскільки граничні умови однорідні і при визначенні вектора  $\mathbf{Z}_0$  компоненти початкового вектора теж приймаються рівними нулю, то сам розв'язок  $\mathbf{Z}_0$  від початкової до точки прикладення навантаження тотожно рівний нулю. При переході через точку прикладення

зосередженого навантаження всі компоненти вектора  $\mathbf{Z}_0$  неперервні, за виключенням узагальненої сили  $\sigma_{rr}^i$  чи  $\sigma_{rz}^i$ , яка змінюється стрибком. Оскільки в інших точках навантаження відсутнє, частковий розв'язок  $\mathbf{Z}_0$  неоднорідної задачі визначається при розв'язанні однорідної системи

$$\frac{d\mathbf{Y}_0}{dr} = [A(r)]\mathbf{Y}_0, \quad r_k \leq r \leq L \quad (7)$$

з неоднорідними початковими умовами в точці прикладення зосередженої сили

$$\mathbf{Y}_0(r_k) = \mathbf{F} . \quad (8)$$

Загалом алгоритм побудови дискретно-континуальної розрахункової моделі наступний.

На першому кроці розрахунку здійснюється дискретизація інерційних властивостей об'єкта шляхом розбиття на окремі ділянки і зосередження мас цих ділянок в певних точках континуальної безінерційної системи. На основі здійсненої дискретизації формуються матриця радіусів мас  $\mathbf{R}$  та матриця мас  $\mathbf{T}$ . Інтервал інтегрування розбивається на ділянки точками зосередження мас, які є точками ортогоналізації. Для забезпечення стійкості розрахунку в межах кожної такої ділянки можуть призначатися додаткові точки ортогоналізації.

Далі будуються одиничні стани для визначення матриці піддатливості  $\mathbf{P}$ . Кожна зосереджена маса може мати два ступені вільності, з-поміж яких обираються ті, що будуть враховані в даному конкретному випадку. Таким чином призначаються способи прикладення одиничного зосередженого навантаження – одиничні стани. Далі розрахунок кожного одиничного стану складається з чотирьох основних етапів.

На першому етапі виконується прямий хід методу ортогональної прогонки для однорідної крайової задачі (4), (5) і визначається матриця фундаментальних розв'язків  $\mathbf{Z}$ .

На другому етапі послідовно для кожного ступеня вільності системи будеється частковий розв'язок  $\mathbf{Z}_0$  неоднорідної системи (7) – (8) від точки прикладення відповідного зосередженого навантаження до правого кінця відрізка інтегрування. При цьому вектор  $\mathbf{Z}_0$  ортогоналізується до знайдених векторів фундаментальної системи розв'язків  $\mathbf{Z}_j$ . Для кожного одиничного стану з граничних умов на правому кінці визначаються невідомі сталі інтегрування.

Третім етапом розрахунку одиничних станів є зворотний хід ортогональної прогонки для визначення сталих інтегрування в точках



ортогоналізації і побудови загального розв'язку задачі відповідно до співвідношення (6).

Оскільки ступенями вільності системи є компоненти вектора переміщень  $U\{u_z, u_r\}$ , то на останньому етапі розрахунку виконується зворотний перехід узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень від отриманого розв'язку в зображеннях (відносно моментів невідомих) до оригіналу (шуканих переміщень). З останніх вибираються компоненти  $\delta_{jk}$  матриці піддатливості  $\Pi$  як переміщення по напрямку  $j$ -ї ступені вільності від зосередженої сили по напрямку  $k$ -ї ступені вільності.

Варто зазначити, що визначення елементів матриці впливу на основі редукованих узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень рівнянь теорії товстих пластин має порівняно з іншими теоріями певні переваги. Зокрема, дискретизація по товщині пластини дозволяє розраховувати з єдиних позицій пластини та оболонки при будь-якому значенні відносної товщини, в тому числі й товсті, а також досліджувати планарні режими коливань.

Алгоритм визначення частот і форм власних коливань дискретно-континуальної моделі описано в [2].

Для якісної і кількісної оцінки достовірності запропонованого алгоритму розв'язано тестові задачі, розв'язки яких порівняно з результатами, отриманими при реалізації покрокового методу [3], а також з відомими в літературі.

Для тестування алгоритму у випадку вісесиметричних об'єктів розглянуто задачу про власні коливання защемленої по зовнішньому контуру кільцевої пластини товщиною  $H = 0,5$  м, зовнішній і внутрішній радіуси якої  $R = 1$  м і  $R = 0,5$  м відповідно. В табл. 1 наведено значення

перших чотирьох частот  $\Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho \cdot l^2}{E}$  вісесиметричних власних

коливань, отриманих при значенні коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0,3$ . В першій колонці таблиці наведено результати, отримані в роботі [4] на основі дискретизації вихідної моделі просторової лінійної теорії пружності за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів. В останній колонці визначено похибку розв'язків на основі дискретно-континуальної моделі по відношенню до розрахунку покроковим методом.

За наведеними в табл. 1 результатами можна сказати, що у випадку вісесиметричних товстих пластин (при умові дискретизації в радіальному і в поперечному напрямку) запропонований варіант дискретизації

інерційних властивостей забезпечує достатню точність динамічного розрахунку.

Таблиця 1

## Частоти власних коливань кільцевої пластини

Чисельний розв'язок динамічної задачі теорії пружності [4]	Покроковий метод	Дискретно-континуальна модель при кількості мас		$\Delta$ , %
		10×2	10×5	
0,2577	0,2588	0,2591	0,2580	0,3
0,5487	0,6169	0,6092	0,6127	0,7
0,7656	0,6423	0,6478	0,6428	0,1
0,9958	0,9861	0,9882	0,9887	0,3

Враховуючи, що рівняння (4) при умові  $R_0 \rightarrow \infty$  описують плоский напружений стан прямокутних пластин (балки-стілки), в якості другого прикладу розглянуто задачу про власні коливання балки-стілки довжиною  $l = 1 \text{ м}$  і висотою  $h = 0,4 \text{ м}$  з граничними умовами, що відповідають типу шарнірного обпирання в класичній теорії. В табл. 2

наведені значення власних частот  $\Omega^2 = \omega^2 \frac{\rho \cdot l^2}{E}$  для різних значень

параметра відносної довжини півхвилі  $\mu = \frac{l}{n \cdot h}$  ( $n$  – число півхвиль

деформації) при значенні коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0,25$ . В колонках 2 і 6 табл. 2 наведено значення, отримані в роботі [5] на основі «теорії третього порядку» (за термінологією автора), що базується на розкладі функцій переміщень в ряди по поліномах Лежандра по висоті пластини при чотирьохмодовій апроксимації. В колонках 3 і 7 та 4, 8 наведено значення, отримані при реалізації покрокового методу та при розрахунку дискретно-континуальної моделі відповідно, а в колонках 5 і 9 визначено похибку розрахункових значень для дискретно-континуальної моделі.

Дискретно-континуальна розрахункова модель побудована при 80 точках зосередження мас (4 по висоті і 20 по довжині). Як видно з таблиці, розрахунок дискретно-континуальної моделі забезпечує добру збіжність для нижчих частот, яка з ростом номера частоти погіршується, проте для найвищої з наведених частот не перевищує 8%. Варто

зазначити, що в табл. 2 наведено частоти лише для відповідних значень параметру  $\mu$ , в той час як загалом згадана частота є вісімнадцятою власною частотою пластини, що розглядається.

Таблиця 2

## Частоти власних коливань балки-стінки

$\mu$	Поздовжні коливання			$\Delta$ , %	Поперечні коливання			$\Delta$ , %
	2	3	4		6	7	8	
1				5				9
5	9,774	9,772	9,728	0,5	0,879	0,879	0,881	0,2
	62,919	63,027	58,514	7,2	36,475	36,409	35,336	2,1
2,5	36,501	36,506	35,689	2,2	7,753	7,573	7,587	0,2
	64,246	64,240	60,864	5,3	67,164	67,158	62,933	6,3
1,667	57,595	57,593	55,772	3,2	22,394	22,392	22,173	1,0
	99,686	99,640	92,937	6,7	113,386	113,422	104,701	7,7

На прикладі розв'язаних тестових задач підтверджено достовірність запропонованої методики побудови дискретно-континуальної розрахункової моделі. Зокрема, похибка власних частот дискретно-континуальної моделі товстих пластин порівняно з розрахунковими значеннями для континуальної моделі (покроковий метод) складає до 8 %, що дозволяє говорити про достовірність прийнятого способу дискретизації інерційних властивостей об'єкта та алгоритму побудови матриці впливу сил інерції.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Чибіряков В.К. Теорія товстих пластин та оболонки: монографія / В. К. Чибіряков, А. М. Смоляр. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.
2. Чибіряков В.К. Про один алгоритм розрахунку віссиметричних коливань круглої пластини / В.К. Чибіряков, І.В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Вип. 81. – К.: КНУБА, 2007. – С. 43 – 50.
3. Жупаненко І.В. Власні коливання товстої кільцевої пластини / І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Вип. 83. – К.: КНУБА, 2009. – С. 165 – 172.
4. Григоренко А.Я. Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел / А. Я. Григоренко, И. И. Дьяк, В. М. Макар // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 5. – С. 24 – 31.

5. Амосов А.А. Применение метода ортогональной прогонки к расчету толстостенных оболочек вращения / А. А. Амосов, С. С. Ирискулов // Вопросы вычисл. и прикл. математики. – 1985. – Вып. 78. – С. 77 – 87.

*Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.*

*Чибиряков В.К., Жупаненко И.В.*

**ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТЫХ ПЛАСТИН НА  
ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ**

Для определения частот собственных колебаний нетонких пластин реализован алгоритм расчета дискретно-континуальной расчетной модели, учитывающей инерционные свойства объекта дискретно, а жесткостные – континуально.

*Chybiryakov V.K., Zhupanenko I.V.*

**ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF THICK PLATES BASED ON DISCRETE-  
CONTINUUM COMPUTATION MODEL**

The procedure of determination of natural frequencies of thick plates is based on the calculation of discrete-continuum computation model. The discrete-continuum model is examined as continuum description of severity properties as well as discontinuous description of inertial characteristics.

УДК 539.3

Є.О.Гоцуляк д-р техн. наук  
А.М. Шельменко

## ДО РОЗРАХУНКУ НЕСУЧОЇ СПРОМОЖНОСТІ ПАЛЬОВОГО ФУНДАМЕНТУ МОНОЛІТНОЇ КАРКАСНОЇ БУДІВЛІ

Виконано дослідження залежності жорсткості та несучої здатності пальового поля від кількості та кроку паль. Визначено, що жорсткість палових полів загалом майже однакова при різній кількості регулярно розташованих паль. Створена власна програма розрахунку пального поля в лінійній стадії роботи паль. Розраховано реальний паливий фундамент і встановлено, що палі мають різні жорсткості в залежності від їх взаємного розташування і навантаження. Тому для розрахунку палових фундаментів не зовсім вірно приймати жорсткість, яка отримана при випробуванні одиночної палі.

Зазвичай, розрахунки фундаментів з великою кількістю паль виконують на основі результатів експериментальних випробувань одиночної палі. Але відомо, що палі в кущі, порівняно з одиночною палею, мають меншу несучу здатність і більшу осадку. Тому в розрахунках фундаментів з великою кількістю паль потрібно враховувати їх взаємний вплив. Для дослідження поведінки фундаменту зі значною кількістю паль було прийнято подовжений в одному напрямку фундамент

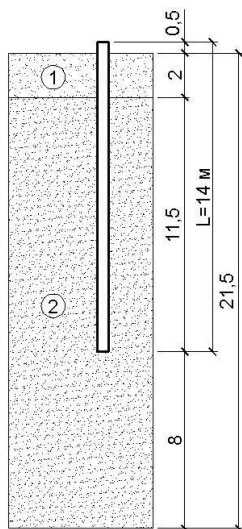


Рис. 1. Розрахункова схема палі

шириною 16 м. Для нього було прийнято три варіанти розташування паль – з кроком 1.6 м, 2.0 м, 2.66 м та у кількості 10, 8 та 6 паль по ширині фундаменту відповідно. Палі прийнято буро-ін'єкційні діаметром 520 мм та довжиною 14 м (рис. 1). Розрахунки виконані на вертикальне навантаження без урахування взаємної роботи фундаменту з каркасом будівлі. Для розв'язання поставлених задач було використано програму PLAXIS 3D Foundation. Оскільки розв'язання задачі в повному об'ємі потребує значних комп'ютерних ресурсів і часу, було використано умови симетрії, за допомогою яких вдалося створити модель фундаменту шириною в 16 м та необмеженої довжини (рис. 2).

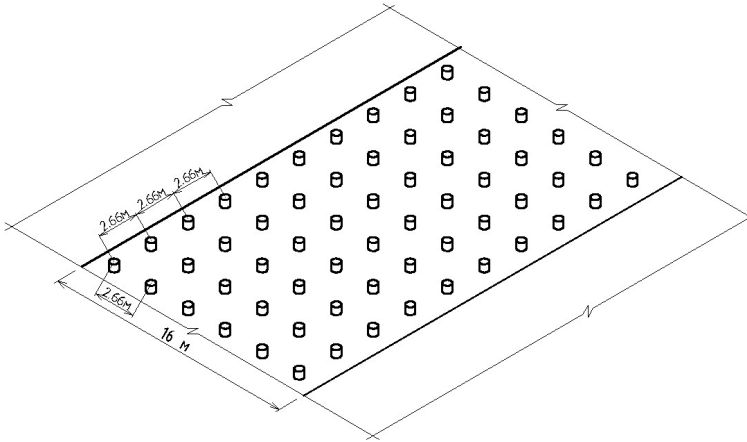


Рис.2 Схема пального поля

При розрахунку фундаментів у кожному з варіантів були прикладені різні значення навантаження, величина яких підбиралась так, щоб в результаті палі втратили несучу здатність. Також, для порівняння, було розраховано аналогічну по характеристикам одиночну палю. Для кожного з фундаментів побудовано графіки залежності осідання від рівномірно розподіленого по площі навантаження (рис. 3), з яких видно, що в усіх трьох варіантах величина осідання палей при урахуванні взаємного впливу більше ніж величина осідання палей у варіантах без урахування їх взаємного впливу. Але при цьому для всіх варіантів жорсткість палей в лінійній стадії їх роботи майже однакова, відрізняється лише несуча здатність, яка є меншою там, де менше палей.

Виходячи з отриманих результатів, можна зробити висновок: в лінійній стадії роботи палей загальна жорсткість паливних полів майже однакова при тому, що кількість палей на одиницю площі відрізняється майже втричі. Пояснити це можна тим, що несуча здатність великого поля палей в основному визначається так званим умовним фундаментом, який є однаковим для всіх варіантів. Крім того, порівняно з одиночною паллю, при згущенні поля палей їх несуча здатність стає більшою, тому що більш рівномірно зростає нормальне напруження під умовним фундаментом, яке визначає граничний опір зсуву.

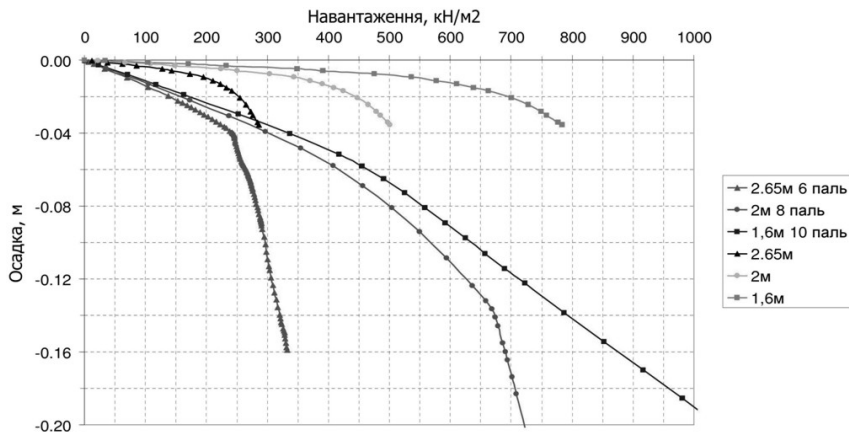


Рис. 3. Графік залежності осідання від навантаження

Як вже було вказано вище, розрахунок великих моделей реальних будинків в PLAXIS потребує значних затрат часу та ресурсів, тому була створена власна програма для розрахунку великих палевих полів в лінійній постановці. В основу програми було закладено взаємний вплив паль. Спочатку за допомогою PLAXIS було отримано результати для одиночної палі у вигляді значень переміщень самої палі та точок ґрунту в радіусі 7,5 м від палі з інтервалом 0,5 м (рис. 4).

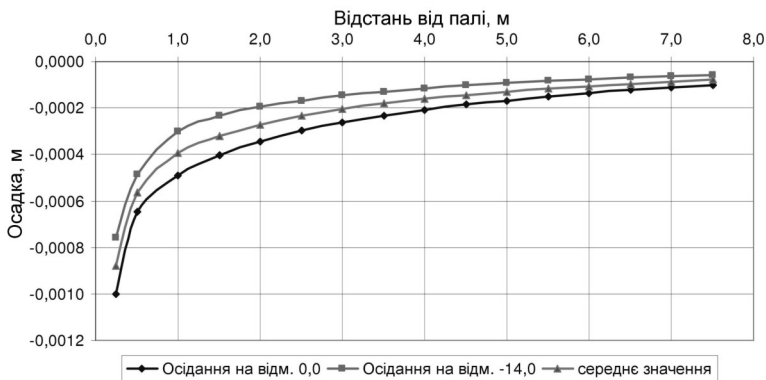


Рис. 4. Графік осідання точок ґрунту навколо палі

З використанням цих значень було виконано перевірочний розрахунок для куща з 9 паль за власною програмою та за допомогою PLAXIS (рис.

5). Переконавшись, що збіжність результатів на належному рівні (таблиця 1), було виконано розрахунок реального поля паль для житлового будинку на основі результатів, отриманих для відповідної одиночної палі. Розрахунок виконано на умовне „одиничне” навантаження. Тобто було задане поле паль, з одиничним навантаженням на кожну палю. В результаті були отримані значення жорсткостей паль, які відрізнялись між собою в залежності від взаємного розташування паль у фундаменті.

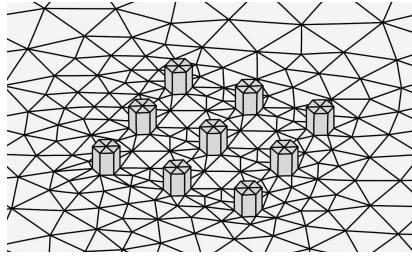


Рис. 5. Розрахункова модель куща з 9 паль

Таблиця 1

Власна програма			Plaxis		
-0,00272	-0,00294	-0,00272	-0,00267	-0,00288	-0,00267
-0,00294	-0,00320	-0,00294	-0,00288	-0,00312	-0,00288
-0,00272	-0,00294	-0,00272	-0,00267	-0,00288	-0,00267

Отримані різні жорсткості для різних паль використано для розрахунку моделі будинку в програмі „Мономах”. Також було розраховано модель будинку шляхом присвоєння палям однакової жорсткості, як при звичайних розрахунках. За отриманими даними побудовані мозаїки реакцій паль в фундаментній плиті, що наведені на рисунках 6, 7. З рисунків видно, що при різній жорсткості паль максимальні значення реакцій паль збільшились. Крім того, збільшилась різниця між мінімально та максимально навантаженими палями. Видно, що крайні палі більш жорсткі ніж внутрішні, за рахунок цього збільшились моменти в плиті і, відповідно, розрахункові площі армування. Ізополя значень необхідної арматури в плиті отримано за допомогою SCAD та деякі з них наведені на рисунках 8, 9.



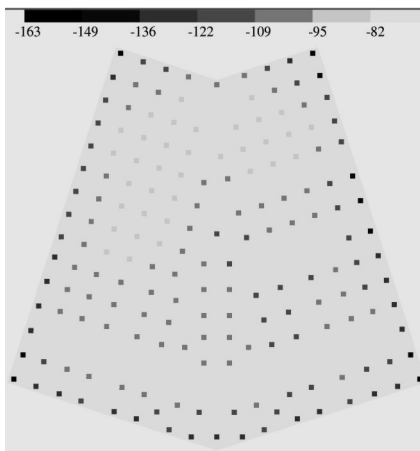


Рис. 6. Мозаїка зусиль в пальях при різній жорсткості паль

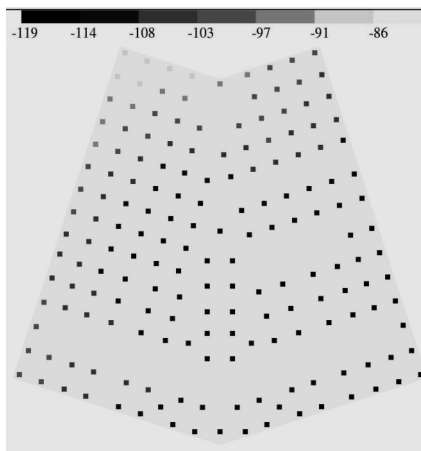


Рис. 7. Мозаїка зусиль в пальях при однаковій жорсткості паль

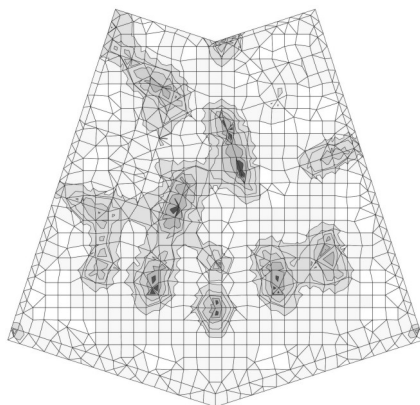


Рис. 8. Нижня арматура по осі  $x$  при різній жорсткості паль

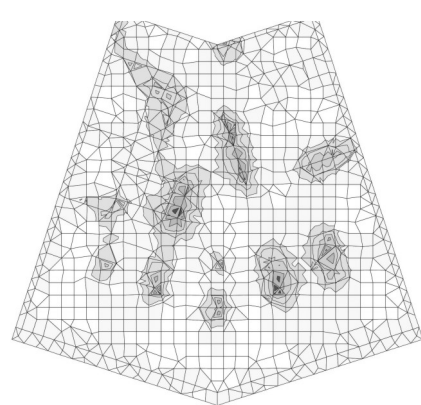


Рис. 9. Нижня арматура по осі  $x$  при однаковій жорсткості паль

Отже, можна зробити висновок про те, що взаємне розташування паль впливає на їх жорсткість в пальному полі, зміну якої необхідно враховувати при розрахунках та проектуванні палових фундаментів.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. СНиП 2.02.03-85. Свайные фундаменты.
2. СНиП 2.02.01-83 Основания зданий и сооружений.
3. Грутман М.С. Свайные фундаменты. – К.: Будівельник, 1969.
4. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В., Тер-Мартirosян З.Г., Чернышев С.Н. Механика грунтов, основания и фундаменты. – М.: АСВ, 1994. – 524 с.
5. Гоцуляк Е.О., Шельменко А.М. Розрахунок одиної палі з урахуванням нелінійної залежності жорсткісних характеристик основи // Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. Вип. 84. – К.: КНУБА, 2009. – С. 142-146.
6. Гоцуляк Е.О., Корнієнко М.В., Шельменко А.М. Розрахунок осадки і несучої здатності паль при їх взаємодії в плитному фундаменті // Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. Вип. 86. – К.: КНУБА, 2010. – С. 124-130.

*Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.*

*Гоцуляк Е.А., Шельменко А.Н.*

#### **К РАСЧЕТУ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СВАЙНОГО ФУНДАМЕНТА МОНОЛИТНОГО КАРКАСНОГО ЗДАНИЯ**

Выполнено исследование зависимости жесткости и несущей способности свайного поля от количества и шага свай. Определено, что общая жесткость свайных полей практически одинакова при разном количестве регулярно размещенных свай. Создана собственная программа расчета свайного поля в линейной стадии работы свай. Рассчитан реальный свайный фундамент и определено, что сваи имеют разные жесткости в зависимости от их взаимного расположения и нагрузки. Поэтому для расчета свайных фундаментов не совсем верно принимать жесткость, полученную при испытании одиночной сваи.

*Gotsuliak E.O., Shelmenko A.M.*

#### **CALCULATION OF LOAD BEARING CAPACITY OF THE PILE FOUNDATION OF MONOLITHIC FRAME BUILDING**

Completed calculation of stiffness and the bearing capacity of the pile field depending on different number of piles and the distance between them. Determined that the general stiffness of pile fields is almost the same for different quantity of regularly placed piles. Created its own program for calculating pile fields in the linear working stage of the pile. Calculated the real pile foundation and determined that the piles have different stiffness depending on their relative position and loads. Therefore for calculation of pile foundations is not quite right to take stiffness, which obtained when tested a single pile.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук  
 М.В. Гончаренко, канд. техн. наук  
 А.А. Козак  
 О.С. Черненко

## КОЛИВАННЯ ДВОВИМІРНИХ МАСИВНИХ ТІЛ, ПОСЛАБЛЕНИХ ТРІЩИНАМИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ

Досліджуються коливання пружних масивних елементів конструкцій, послаблених тріщинами. Отримане граничне інтегральне представлення для напружень, до складу якого входять сингулярний і гіперсингулярний інтегралі. За допомогою інтегрування частинами проведена регуляризація другого з інтегралів. Розв'язані тестові задачі про динамічне навантаження двовимірних масивів з плоскими тріщинами.

Будемо розглядати гармонічні коливання двовимірних об'єктів, послаблених тріщиною. Для розв'язання задачі застосовуватимемо співвідношення методу потенціалу, зокрема, формулу Соміліани для знаходження переміщень у внутрішніх точках розрахункової області  $V$ :

$$u_j(\vec{x}) = \int_{\Gamma} \tau_k(\vec{y}) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k(\vec{y}) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y, \quad (1)$$

де  $\vec{x}\{x_1, x_2\} \in V$ ;  $\vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$ ;  $\Gamma$  - границя області;  $\tau_j$  - напруження на площинці границі з нормаллю  $\vec{n}\{n_1, n_2\}$ :

$$\tau_j(\vec{y}) = \sigma_{jk}(\vec{y}) n_k(\vec{y}) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial u_m(\vec{y})}{\partial x_m} + \mu \left( \frac{\partial u_j(\vec{y})}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial y_j} \right) n_k(\vec{y}); \quad (2)$$

$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$  - фундаментальний розв'язок задачі, що задається виразом [1]:

$$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{i}{4\mu} \left\{ \delta_{jk} \left[ H_0^{(1)}(\varphi_1) - \frac{H_1^{(1)}(\varphi_2)}{\varphi_2} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(\varphi_1)}{\varphi_1} \right] + r_{,j} r_{,k} \left[ H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] \right\}; \quad (3)$$

$\varphi_j = k_j r$ ;  $k_j = \frac{\omega}{C_j}$ ;  $C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ;  $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ;  $\alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}$ ;  $\rho$  - щільність

матеріалу;  $\omega$  - кругова частота коливань;  $\lambda$  і  $\mu$  - константи Ламе;

$r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r}$ ;  $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$ ;  $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$  - узагальнена

похідна фундаментального розв'язку  $U_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$ , тобто напруження на

площинках з компонентами нормалі  $n_j(\bar{y})$ , які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили:

$$T_{kj}(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda n_j(\bar{y}) \frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_m} + \mu n_m(\bar{y}) \left[ \frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_m} \right] =$$

$$= \frac{i}{4} \left[ r_{,k} n_j T_1 + \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k \right) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right]; \quad (4)$$

$$T_1 = \frac{2}{r} \left[ H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi_1}{r} H_1^{(1)}(\varphi_1);$$

$$T_2 = \frac{1}{r} \left[ 2H_2^{(1)}(\varphi_2) - \varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 2\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right];$$

$$T_3 = \frac{2}{r} \left[ \varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 4H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha \varphi_1 H_1^{(1)}(\varphi_1) + 4\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right]; \quad (5)$$

$H_k^{(1)}$  - функція Ганкеля 1-го роду порядку  $k$ .

Для того, щоб отримати граничне інтегральне рівняння (ГІР) відносно незаданих граничними умовами амплітуд переміщень і напружень, зробимо наступне [2, 3]. За допомогою виключення з розрахункової області  $V$  малого кругового сектору радіусу  $\varepsilon$  з центром в полюсі  $\bar{x}_0$  утворимо допоміжну розрахункову підобласть  $V_0$  (рис. 1). Границею цієї підобласті буде поверхня  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s$ , причому  $\Gamma_s$  - це частина кола радіусу  $\varepsilon$ .

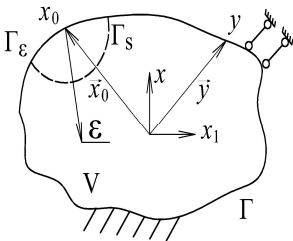


Рис. 1. Утворення допоміжної підобласті

По відношенню до області  $V_0$  точка

$\bar{x}_0$  є зовнішньою, тому формула Соміліани набуває вигляду

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0, \quad j=1,2. \quad (6)$$

Зауважимо, що яким би малим не був радіус сектору  $\varepsilon$ , полюс  $\bar{x}_0$  лежить поза межами  $V_0$ , і тому тотожність (6) лишається справедливою:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (7)$$

Будемо розташовувати т.  $\bar{x}_0$  на гладкій частині контуру  $\Gamma$ . Тоді при  $\varepsilon \rightarrow 0$  границю сектору  $\Gamma_s$  можна вважати півколом. Далі, припустимо, що переміщення  $u(\bar{y})$  поблизу точки  $\bar{x}_0$  можна представити у вигляді:

$$u_j(\bar{y}) = u_j(\bar{x}_0) + \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} (y_m - x_{0m}) + O(r^{1+\alpha}). \quad (8)$$

В свою чергу

$$\sigma_{kj}(\bar{y}) = \sigma_{kj}(\bar{x}_0) + O(r^\alpha) \text{ та } \tau_k(\bar{y}) = \sigma_{kj}(\bar{y})n_j(\bar{y}) = \sigma_{kj}(\bar{x}_0)n_j(\bar{y}) + O(r^\alpha). \quad (9)$$

Розглянемо границю першого з інтегралів, що входять до (7):

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_s} [\sigma_{km}(\bar{x}_0)n_m(\bar{y}) + O(r^\alpha)] U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ & = \oint_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \sigma_{km}(\bar{x}_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} [n_m(\bar{y}) + O(r^\alpha)] U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (10) \end{aligned}$$

де символ  $\oint_{\Gamma}$  відповідає значенню поверхневого інтеграла за Коші.

В місцевій полярній системі координат елемент контуру  $\Gamma_s$  може бути поданий у вигляді  $d\Gamma = r d\theta$ , а крім того при  $r \rightarrow 0$

$$U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} [r_{,j} r_{,k} - (3-4\nu)\delta_{jk} \ln r] + C + O(r), \quad (11)$$

де  $C$  – деяка константа, а для точок на контурі  $\Gamma_s$  справедливо

$$r = \varepsilon; \quad r_{,j}(\bar{x}_0, \bar{y}) = -n_j(\bar{y}). \quad (12)$$

З урахуванням залежностей (9), (11), (12) можемо записати:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0 \quad (13)$$

і далі

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (14)$$

Звернемось тепер до визначення границі другого з інтегралів, що входять до складу (7). Враховуючи (8), запишемо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\ \left. + u_k(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{\partial u_k(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \quad (15)$$

Оскільки при  $r \rightarrow 0$

$$T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,j} n_k - r_{,k} n_j) - \left( \frac{2r_{,j} r_{,k}}{1-2} + \delta_{jk} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \right], \quad (16)$$

то, враховуючи (12), а також те, що

$$\int_{\Gamma_s} \frac{r_{,m} r_{,j}}{r} d\Gamma_y = \frac{\pi}{2} \delta_{mj}, \quad (17)$$

і крім того

$$\frac{\partial r(\bar{x}_0, y)}{\partial n} = -1, \quad y \in \Gamma_s, \quad (18)$$

отримаємо

$$\int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0, \quad \int_{\Gamma_s} T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0.5 \delta_{jk}, \quad (19)$$

внаслідок чого

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0.5 u_j(\bar{x}_0) + \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (20)$$

Тепер, виходячи з (14) і (20), ГІР (7) набуває вигляду

$$0.5 u_j(\bar{x}_0) + \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (21)$$

де обидва інтеграли є невласними і розуміються за Коші.

Відомо, що ГІР (21) у випадку масивів, послаблених тріщинами, є виродженими [4]. Для таких об'єктів варто застосовувати ГІР на основі інтегрального подання напружень. Наведемо, спершу, формулу Соміліани для визначення напружень у внутрішніх точках розрахункової області:

$$\sigma_{jk}(\bar{x}) = \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad \bar{x} \in V, \quad \bar{y} \in \Gamma, \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned}
D_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda \delta_{jk} \frac{\partial U_{ml}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_m} + \mu \frac{\partial U_{jl}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial U_{kl}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_j} = \\
&= -\frac{i}{4} \left[ r_{,l} \delta_{kj} T_1 + (\delta_{lk} r_{,j} + \delta_{lj} r_{,k}) T_2 + r_{,k} r_{,j} T_3 \right]; \quad j = 1, 2; \\
S_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda \delta_{jk} \frac{\partial T_{ml}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_m} + \mu \frac{\partial T_{jl}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial T_{kl}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_j} = \\
&= -\frac{i\mu}{4} \left[ (n_l r_{,k} r_{,j} + r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{kj}) S_1 + [\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j}) + \right. \\
&\left. + r_{,l} (n_j r_{,k} + n_k r_{,j}) \right] S_2 + r_{,k} r_{,j} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} S_3 + (\delta_{jl} n_k + \delta_{kl} n_j) 2 \frac{T_2}{r} + n_l \delta_{jk} S_4 \Big]; \quad (23) \\
S_1 &= 2 \left[ \frac{T_3}{r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\Phi_1^2}{r^2} H_2(\Phi_1) \right]; \quad S_2 = \frac{2T_3}{r} + \frac{\Phi_2^2}{r^2} H_2(\Phi_2); \\
S_3 &= 2 \left[ -\frac{6T_3}{r} - 2 \frac{\Phi_2^2}{r^2} H_2(\Phi_2) + 2\alpha \frac{\Phi_1^2}{r^2} H_2(\Phi_1) \right]; \\
S_4 &= \frac{4}{r^2} [H_2(\Phi_2) - \alpha H_2(\Phi_1)] - \frac{2\lambda}{\mu} \frac{\Phi_1 H_1(\Phi_1)}{r^2} + \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\Phi_1^2 H_2(\Phi_1)}{r^2}.
\end{aligned}$$

Щоб отримати на основі (22) ГР, знову звернемося до допоміжної розрахункової підобласті  $V_0$  (рис.1), по відношенню до якої точка  $\bar{x}_0$  є зовнішньою незалежно від величини радіусу  $\varepsilon$ . На підставі цього можемо записати:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (24)$$

Розглянемо границю першого з інтегралів, що входять до (24):

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\
&\left. + \int_{\Gamma_s} [\sigma_{lm}(\bar{x}_0) n_m(\bar{y}) + O(r^\alpha)] D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \sigma_{3m}(\bar{x}_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} n_m(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (25)$$

Зважимо на те, що при  $r \rightarrow 0$

$$D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{1-2\nu}{4\pi r} \left[ \delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j} - \delta_{jk} r_{,l} + \frac{2}{1-2\nu} r_{,k} r_{,j} r_{,l} \right] + O(r), \quad (26)$$

і крім того,

$$\int_{\Gamma_s} r_{,m} r_{,j} r_{,k} r_{,l} d\Gamma_y = r \frac{\pi}{8} (\delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{mk} \delta_{jl} + \delta_{ml} \delta_{kj}). \quad (27)$$

З урахуванням наведених залежностей (14-16) можемо записати:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} n_m(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\ & = -\frac{1}{16(1-\nu)} [(3-4\nu)(\delta_{mk} \delta_{lj} + \delta_{mj} \delta_{lk}) - (1-4\nu) \delta_{jk} \delta_{lm}], \end{aligned} \quad (28)$$

і нарешті,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right] = \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \beta_{kj}^D(\bar{x}_0), \quad (29)$$

де інтеграл в правій частині розуміється за Коші, а

$$\beta_{kj}^D(\bar{x}_0) = -\frac{1}{16(1-\nu)} [2(3-4\nu) \sigma_{jk}(\bar{x}_0) - (1-4\nu) \delta_{jk} \sigma_{ll}(\bar{x}_0)]. \quad (30)$$

Звернемось тепер до визначення границі другого з інтегралів, що входять до складу (24). Враховуючи (8), запишемо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\ & \left. + u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{\partial u(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Розглянемо третій доданок з правої частини рівності (31). Враховуючи (17), (27) та зважаючи на те, що при  $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \\ & = \frac{\mu r_{,m}}{2\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ 2(1-2\nu) \delta_{jk} r_{,l} + 2\nu (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{lk} r_{,j}) - 8r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right] + \right. \end{aligned}$$



$$+n_j[2\nu r_{,k} r_{,l} + (1-2\nu)\delta_{kl}] + n_k[2\nu r_{,j} r_{,l} + (1-2\nu)\delta_{jl}] + n_l[2(1-2\nu)r_{,j} r_{,k} - (1-4\nu)\delta_{jk}] + O(r)\}, \quad (32)$$

отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \frac{\mu}{8(1-\nu)} [\delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{ml} \delta_{kj} + \delta_{mk} \delta_{jl}], \quad (33)$$

після чого

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \frac{\mu}{8(1-\nu)} \left[ \delta_{jk} \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\bar{x}_0)}{\partial x_j} \right] = \\ &= \frac{1}{8(1-\nu)} \left[ \lambda \delta_{jk} \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\bar{x}_0)}{\partial x_j} \right) - (\lambda - \mu) \delta_{jk} \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_l} \right] = \\ &= \frac{1}{16(1-\nu)} \left[ 2\sigma_{jk}(\bar{x}_0) + (1-4\nu)\delta_{jk} \sigma_{ll}(\bar{x}_0) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

оскільки

$$\lambda - \mu = -\mu \frac{1-4\nu}{1-2\nu}, \quad \sigma_{ll} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}.$$

Тепер розглянемо другий інтеграл з тих, що містяться в правій частині виразу (31). Перш за все, інтегруючи по півколу, одержимо:

$$\int_{\Gamma_s} r_{,j} d\Gamma_y = -2r_{,j}(\bar{x}_0),$$

$$\int_{\Gamma_s} r_{,j} r_{,k} r_{,l} d\Gamma_y = \frac{2}{3} r(n_j \delta_{lk} + n_k \delta_{lj} + n_l \delta_{jk} - n_j n_k n_l). \quad (35)$$

Далі, помітимо, що при  $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &r(\bar{x}_0, \bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \\ &= \frac{\mu}{2\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ 2(1-2\nu)\delta_{jk} r_{,l} + 2\nu(\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{lk} r_{,j}) - 8r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right] + \right. \\ &\quad + n_j[2\nu r_{,k} r_{,l} + (1-2\nu)\delta_{kl}] + n_k[2\nu r_{,j} r_{,l} + (1-2\nu)\delta_{jl}] + \\ &\quad \left. + n_l[2(1-2\nu)r_{,j} r_{,k} - (1-4\nu)\delta_{jk}] + O(r) \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

тому при малому радіусі  $\varepsilon$  справедливо

$$u(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \frac{\mu u(\bar{x}_0)}{\pi(1-\nu)\epsilon} [2n_j n_k n_l - \delta_{jk} n_l - \delta_{jl} n_k - \delta_{lk} n_j] + O(\epsilon). \quad (37)$$

Підставимо (34) і (37) в (31) і отримаємо:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right] = \oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \beta_{jk}^S(\bar{x}_0), \quad (38)$$

де

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\ &\left. + \frac{\mu u(\bar{x}_0)}{\pi(1-\nu)\epsilon} (2n_j n_k n_l - \delta_{jk} n_l - \delta_{jl} n_k - \delta_{lk} n_j) \right], \quad (39) \end{aligned}$$

тобто це – скінченна за Адамаром [5] частина гіперсингулярного інтеграла з ядром  $S_{jkl}$ , тоді як

$$\beta_{kj}^S(\bar{x}_0) = \frac{1}{16(1-\nu)} [2\sigma_{jk}(\bar{x}_0) + (1-4\nu)\delta_{jk}\sigma_{ll}(\bar{x}_0)]. \quad (40)$$

За допомогою (29), (30), (38) і (40) рівність (24) перетворюється на граничний аналог формули Сомліані для напружень:

$$\frac{1}{2} \sigma_{kj}(\bar{x}_0) = \oint_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad j, k, l=1, 2, \quad (41)$$

який можна використовувати в якості ГР відносно незаданих граничними умовами переміщень і напружень.

Як приклад розглянемо коливання нескінченного простору, послабленого тріщиною, до різних берегів якої в різні боки по нормалі прикладені рівномірно розподілені навантаження з амплітудою  $q$ . Нехай тріщина лежить в площині  $x_1 O x_3$ . Внаслідок симетрії рівняння (30) спрощується і набуває вигляду:

$$2 \oint_{\Gamma^+} u_2(\bar{y}) S_{222}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = q, \quad \bar{x}_0, \bar{y} \in \Gamma^+, \quad q = const, \quad (42)$$

де  $\Gamma^+$  – це верхній берег тріщини, на якому виконуються рівності

$$n_1 = 0, \quad n_2 = -1; \quad r = |y_1 - x_1|; \quad r_{,2} = 0; \quad (r_{,1})^2 = 1; \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0; \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 S_{222}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{i\mu}{4r^2} \left[ -S4(r) - 4 \frac{T2(r)}{r} \right] = \\
 &= \frac{i\mu}{4r^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \kappa_1 H_1^{(1)}(\varphi_1) + 12H_2^{(1)}(\varphi_2) - \right. \\
 &\quad \left. -12\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) - 4\varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 2 \frac{\lambda}{\mu} \varphi_1 H_1^{(1)}(\varphi_1) \right]. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Для чисельного визначення розподілу невідомих амплітуд переміщень контур  $\Gamma^+$  розбивається на граничні елементи (ГЕ), і на кожному з них приймається кусково квадратична апроксимація шуканих функцій. За колокаційною схемою на границі обирається сукупність полюсів  $\bar{x}_{0i}$ , в яких повинна виконуватись рівність (42), що дозволяє звести систему ГПР до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень  $u(\bar{x}_{0i})$ . Найбільш складною при такому алгоритмі є процедура обчислення інтегралів по тому ГЕ, на якому розташований полюс.

Перенесемо початок координат в полюс  $\bar{x}_{0i}$  та подамо шукану функцію переміщень на ГЕ, якому належить полюс, у вигляді:

$$u_2(y_1) = u_2(\bar{x}_{0i}) + \frac{\partial u_2(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} y_1^2. \quad (45)$$

Скінченну за Адамаром частину гіперсингулярного інтегралу по симетричному відрізьку  $\Gamma_c$  довжиною  $2c$  запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned}
 &\oint_{\Gamma_c} u_2(\bar{y}) S_{222}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-c}^{-\varepsilon} u_2(y_1) S_{222}(0, y_1) dy_1 + \int_{\varepsilon}^c u_2(y_1) S_{222}(0, y_1) dy_1 + \mu \frac{u(\bar{x}_{0i})}{\pi\varepsilon(1-\nu)} \right\} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2u(\bar{x}_{0i}) \int_{\varepsilon}^c S_{222}(0, y_1) dy_1 + \mu \frac{u(\bar{x}_{0i})}{\pi\varepsilon(1-\nu)} + \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \int_{\varepsilon}^c y_1^2 S_{222}(0, y_1) dy_1 \right\}. \quad (46)
 \end{aligned}$$

Інтеграли в правій частині рівності (46) можуть бути визначені в замкненому вигляді за допомогою співвідношень [6]:

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{H_1^{(1)}(t)}{t} dt = tH_0^{(1)}(t) - H_1^{(1)}(t) + \Phi(t), \quad \int tH_1^{(1)}(t) dt = \Phi(t), \\
 &\int \frac{H_1^{(1)}(t) - tH_2^{(1)}(t)}{t} dt = H_1^{(1)}(t), \quad \int \frac{3H_2^{(1)}(t) - tH_1^{(1)}(t)}{t^2} dt = -\frac{H_2^{(1)}(t)}{t}, \quad (47)
 \end{aligned}$$

де  $\Phi(t) = \frac{\pi t}{2} \left[ H_1^1 L_0(t) - H_0^1 L_1(t) \right]$ ,  $L_n(t)$  – функція Струве  $n$ -го порядку [6].

Крім того необхідно зауважити, що при малих  $r$  в описаній вище місцевій системі координат

$$S_{222}(0, y_1) = -\frac{\mu}{2\pi y_1^2(1-\nu)} + O(y_1), \quad (48)$$

з урахуванням (47) отримаємо:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_c} u_2(\bar{y}) S_{222}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y &= \frac{i\mu}{2c} \left\{ 4\alpha H_2^{(1)}(k_1 c) - 4H_2^{(1)}(k_2 c) + \right. \\ &+ 4 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} k_1 c H_1^{(1)}(k_1 c) - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} k_1 c \left[ k_1 c H_0^{(1)}(k_1 c) + \Phi(k_1 c) \right] \left. \right\} u(\bar{x}_{0i}) + \\ &+ \frac{i\mu c}{4} \left[ 12\alpha H_2^{(1)}(k_1 c) - 12H_2^{(1)}(k_2 c) - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \alpha(k_1 c) H_1^{(1)}(k_1 c) \right. \\ &\left. + \frac{\lambda - 6\mu}{\mu} \frac{1}{k_1 c} \Phi(k_1 c) + \frac{8}{k_2 c} \Phi(k_2 c) \right] \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2}. \quad (49) \end{aligned}$$

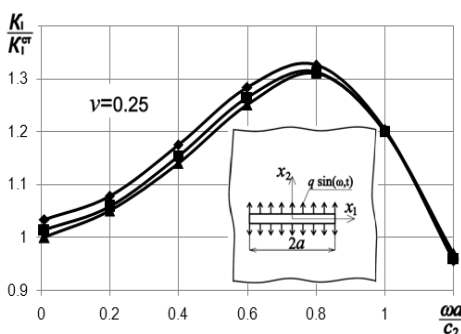
Отже, отримано замкнений компактний вираз (49) для обчислення скінченної за Адамаром частини гіперсингулярного ГР. Оскільки інтегрування по решті границі не викликає труднощів, можна вважати питання регуляризації розрахункових співвідношень та алгебраїзації системи ГР вирішеним. Зауважимо, що отримати рівність (49) вдалося тільки після того, як було прийнято гіпотезу про кусково квадратичний характер поведінки шуканих функцій  $u_2(\bar{y})$ .

Результати розв'язку задачі у вигляді амплітуд переміщень  $u_2(\bar{x}_{0i})$  в точках колокації були використані для визначення коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН). Порівняння довідкових значень [7] із розрахунковими, отриманими при різній густоті ГЕ-сітки і коефіцієнту Пуассона  $\nu = 0,25$ , містяться в таблиці 1.

На рис. 2 наведені графіки залежності нормованого КІН  $K_1$  від безрозмірного параметру частоти коливань. Лінія, позначена трикутниками, відповідає значенням, взятим з довідкової літератури [7]. Лінією, позначеною ромбами, з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму на досить розрідженій сітці граничних елементів (8 елементів на контурі тріщини). Лінія, позначена прямокутниками, побудована за результатами, знайденими на більш густій сітці (40 ГЕ вздовж контуру).

Таблиця 1

$\omega RC_1^{-1}$		0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
Точне значення $K_1$		1	1.05	1.14	1.25	1.31	1.2	0.97
$N=8$	Розрах.знач.	1.034	1.079	1.174	1.284	1.327	1.204	0.956
	похибка,%	3.4	2.8	3.0	2.7	1.3	0.3	1.4
$N=20$	Розрах.знач.	1.014	1.058	1.154	1.265	1.313	1.2	0.96
	похибка,%	1.4	0.8	1.2	1.2	0.2	0	0.9
$N=40$	Розрах.знач.	1.007	1.052	1.147	1.259	1.31	1.2	0.965
	похибка,%	0.7	0.1	0.6	0.7	0.03	0.02	0.6



Наведені результати наочно свідчать про досить швидку збіжність розрахункових даних до точних значень. Так, при  $\omega a C_2^{-1} = 0.8$  (значення параметру частоти, поблизу якого  $K_1$  досягає максимуму) похибка визначення КІН на розрідженій сітці не перевищувала 1,5 %, а на густій – 0,2 %. Так само

приблизно в два рази зменшується похибка і в інших точках частотного діапазону, що позитивно характеризує можливості розробленої методики.

Розглянемо далі коливання скінченної пластини, послабленої тріщиною, до торців якої нормально прикладені рівномірно розподілені навантаження з амплітудою  $q$ . Знову для визначення КІН використовуємо результати розв'язку задачі у вигляді амплітуд переміщень  $u(\bar{x}_{0i})$  в точках колокації. Оскільки точного розв'язку цієї задачі не існує, порівнюємо результати розробленої методики за методом граничних елементів з результатами, отриманими за допомогою учбової версії програми ANSYS, в якій реалізовано метод скінченних елементів.

Графіки залежності нормованого КІН  $K_1$  від безрозмірного параметру частоти коливань наведені на рисунку 3. Штрих пунктирна лінія, відповідає значенням, отриманим за методом скінченних елементів. Суцільною лінією, з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму на сітці граничних елементів (16 та 32 елементів на контурі тріщини).

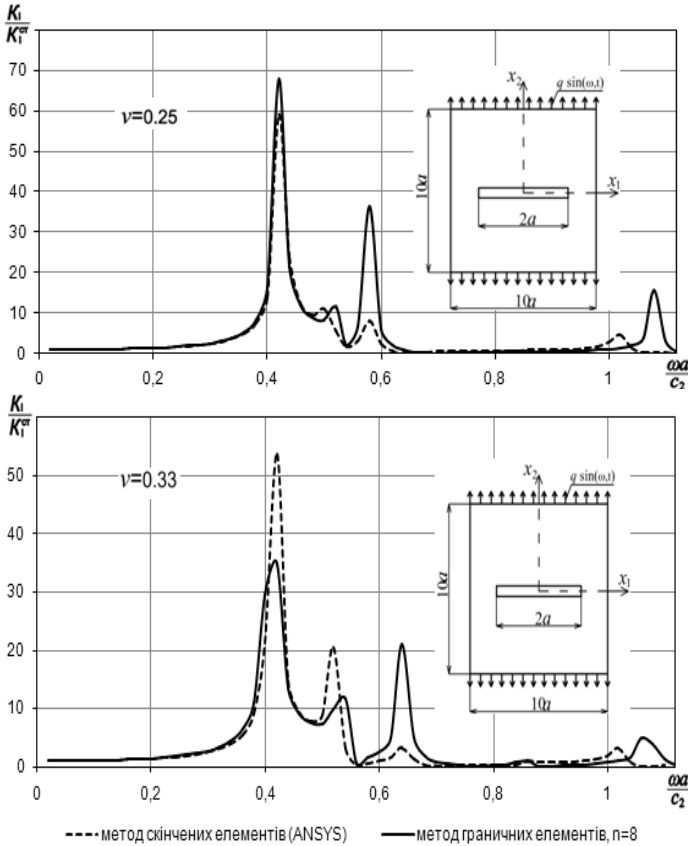


Рис. 3

Як бачимо, цей приклад демонструє задовільну узгодженість розрахункових даних, отриманих за методами граничних та скінченних елементів. Розбіжність результатів при частотах коливань, віддалених від власних, не перевищує 6%. При коливаннях з частотами, близькими до власних, спостерігається досить істотна розбіжність значень, але характер амплітудно-частотної характеристики КІН нормального відриву в обох випадках є схожим. Наведені дані співставлення свідчать про достовірність результатів, отриманих за розробленою методикою.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. *Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J.* A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, *ASME J.of Applied Mechanics*, 59 (1992), pp. 604-614
3. *Ворона Ю.В., Геращенко О.В.* Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81.– С.119–134
4. *Cruse T.A.* BIE fracture mechanics analysis: 25 years of developments // *Computational Mechanics*, 18 (1996), pp. 1-11
5. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
6. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М: Наука, 1979. – 830 с.
7. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ./Под ред. Ю.Мураками. – М: Мир, 1990. – 1016 с.

*Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.*

*Ворона Ю.В., Гончаренко М.В., Козак А.А., Черненко Е.С.*

#### **КОЛЕБАНИЯ ДВУМЕРНЫХ МАССИВНЫХ ТЕЛ, ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНАМИ НОРМАЛЬНОГО ОТРИВА**

Исследуются колебания упругих массивных элементов конструкций, ослабленных трещинами. Получено граничное интегральное представление для напряжений, в состав которого входят сингулярный и гиперсингулярный интегралы. С помощью интегрирования по частям проведена регуляризация второго из интегралов. Решены тестовые задачи про динамическое нагружение двумерных массивов с плоскими трещинами.

*Vorona Yu.V., Goncharenko M.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.*

#### **VIBRATIONS OF 2-D SOLIDS WITH OPENING-MODE CRACKS**

Vibrations of elastic solids with cracks are investigated. Boundary integral equation for stresses is received. This expression consists of strongly singular and hypersingular integrals. The latter is regularized using integration by parts. Numerical examples which illustrate abilities of derived technique are presented.

УДК 539.3

**О.П. Кривенко**, канд. техн. наук  
**М.О. Соловей**, д-р техн. наук

## **ВПЛИВ НАГРІВУ НА ВТРАТУ СТІЙКОСТІ ПОЛОГИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ЗМІНІ УМОВ ЗАКРІПЛЕННЯ КОНТУРУ**

Вивчається вплив попереднього нагріву на втрату стійкості пружних пологих осесиметричних сферичних панелей при послідовній зміні умов комбінованого закріплення контуру: частковій заміні жорсткого затиснення на шарнірне спирання.

Стійкість і форми нелінійного деформування пологих панелей істотно залежать від граничних умов. У роботах [1, 2], де досліджувалися кругла та квадратна в плані сферичні панелі при навантаженні їх тиском, виявлено нелінійну залежність величини верхнього критичного навантаження від поступової зміни граничних умов. У реальних умовах несучі конструкції перебувають під дією як силових, так і температурних полів. Зазвичай дія нагріву приводить до появи додаткових температурних деформацій, які можуть істотно вплинути на жорсткість тонкої оболонки. Врахування температурного навантаження дозволяє підвищити достовірність визначення напружено-деформованого стану та стійкості гнучких оболонкових конструкцій при їх експлуатації. Ця проблема є мало дослідженою в зв'язку із підвищеною складністю розв'язання подібних задач нелінійного деформування та втрати стійкості [3], і тому важливим представляється проведення досліджень щодо виявлення впливу попереднього нагріву на втрату стійкості пологих панелей при зміні граничних умов.

У даній роботі, яка є продовженням досліджень [1], розглянуті питання впливу попереднього нагріву на стійкість тонких пологих осесиметричних сферичних панелей, що навантажені тиском, при зміні параметрів комбінованого закріплення контуру. Дослідження виконані за методикою [3 – 5], яка спирається на співвідношення тривимірної теорії термопружності, скінченноелементне формулювання задачі у приростах і використання моментної схеми скінченних елементів. Достовірність методики обґрунтована чисельними дослідженнями збіжності та точності скінченноелементних розв'язків для різних класів пружних неоднорідних оболонок.

Розглянуто попередньо нагріту пологу круглу в плані сферичну панель сталої товщини, що навантажується зовнішнім рівномірним



тиском інтенсивністю  $q$  (рис. 1, *a*). Матеріал оболонки – ізотропний. Прийнято наступні вихідні данні: модуль пружності  $E = 19.6 \cdot 10^4$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ , коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha = 0.125 \cdot 10^{-4}$  град $^{-1}$ , радіус опорного контуру  $a = 1$  м, радіус серединної поверхні  $R = 12.52$  м, товщина  $h = 0.01$  м, стріла підйому  $H = 0.04$  м. Результати досліджень подані з використанням наступних безрозмірних параметрів:

$$\bar{q} = a^4 q / (E h^4), \quad \bar{u}^1 = u^1 / h, \quad k = H / h,$$

де  $u^1$  – прогин панелі вздовж осі  $x^1$ ;  $k$  – параметр, що характеризує пологість панелі.

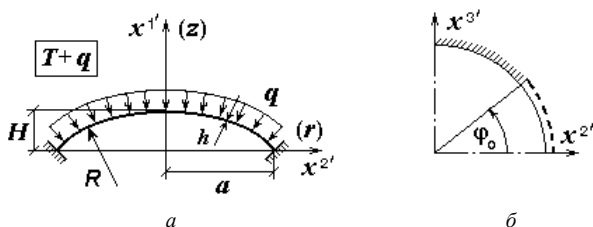


Рис. 1. Сферична панель з комбінованим спіранням по контуру

За розрахункову скінченноелементну модель було прийнято чверть панелі з рівномірним розподілом СЕ вздовж радіуса та за колом. Дослідження збіжності розв'язків для аналогічного комбінованого закріплення контуру панелі при дії лише тиску [1] довело, що достатньою є сітка  $18 \times 18$  СЕ.

Дія на оболонку нагріву та тиску (яка на рис. 1, *a* позначена як  $T + q$ ) реалізовувалась у такий спосіб: спочатку панель поступово нагрівалась рівномірно за об'ємом на величину  $T$  °С, а потім при зафіксованому температурному полі навантажувалась тиском інтенсивністю  $q$ . Було розглянуто три варіанти попереднього нагріву: на  $T = 20^\circ$ ,  $25^\circ$  і  $40^\circ$  С.

Комбіноване закріплення контуру визначалось за наступною схемою. У панелі та частина контуру, що має шарнірне спірання (---), задавалась кутом  $\phi_0$  (рис. 1, *b*). Послідовна зміна граничних умов, починаючи з умови жорсткого затиснення контуру (///), відбувалась у напрямку зростання кута  $\phi_0$  у межах  $0^\circ \leq \phi_0 \leq 90^\circ$  (між осями симетрії  $x^2$  і  $x^3$ ).

Результати досліджень на рис. 2 *a, б* демонструють еволюцію діаграми “навантаження-прогин  $\bar{q} - \bar{u}^1$ ” центра панелі при зміні граничних умов для двох варіантів нагріву. Характер зміни вигляду цієї діаграми від параметра комбінованого закріплення контуру  $\varphi_0$  істотно залежить від величини попереднього нагріву оболонки.

Так, при нагріві на  $20^\circ\text{C}$  (рис. 2, *a*) еволюція діаграми має складний характер. При жорсткому затисненні усього контуру ( $\varphi_0 = 0^\circ$ ) і частковій заміні його на шарнірне спирання ( $\varphi_0 < 30^\circ$ ) діаграми мають простий вигляд. Подальше збільшення зони шарнірного спирання  $30^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$  приводить до ускладнення вигляду діаграм – наявності в них петлі. При подальшому зростанні величини попереднього нагріву всі діаграми приймають простий вигляд. На рис. 2, *б* наведені діаграми для випадку  $T = 40^\circ\text{C}$ . При  $T = 25^\circ\text{C}$  вони мають подібний вигляд.

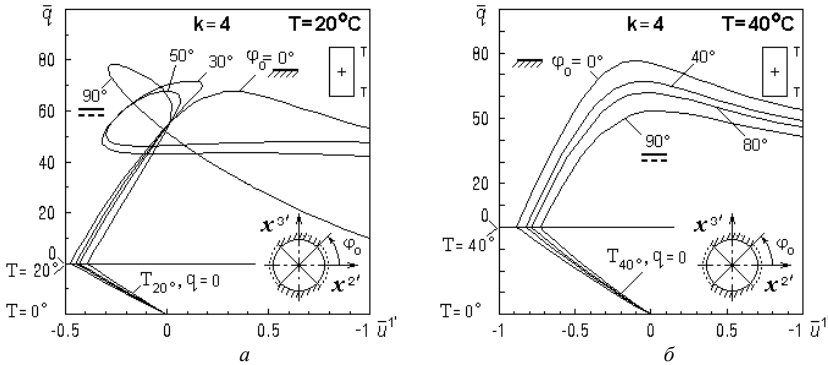


Рис. 2. Еволюція діаграми “навантаження-прогин” в центрі панелі

(*a*) при попередньому нагріві на  $T = 20^\circ\text{C}$ ; (*б*) при попередньому нагріві на  $T = 40^\circ\text{C}$

Аналіз форм деформування показав наступне. Після нагріву на  $20^\circ\text{C}$ ,  $25^\circ\text{C}$  і на  $40^\circ\text{C}$  характер деформування панелей залежить лише від способу закріплення контуру (тобто від величини параметра  $\varphi_0$ ) (рис. 3). При нагріві на  $40^\circ\text{C}$  переміщення полюса панелі приблизно в два рази більші ніж при нагріві на  $20^\circ\text{C}$ .

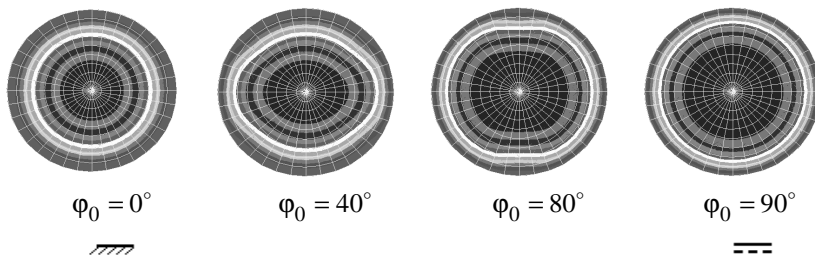


Рис. 3. Форми деформування панелей після нагріву

Еволюція форми втрати стійкості панелі від зміни граничних умов для двох варіантів нагріву приведена на рис. 4 (для  $T = 20^\circ\text{C}$ ) і на рис. 5 (для  $T = 40^\circ\text{C}$ ).

При попередньому нагріві на  $T = 20^\circ\text{C}$  (рис. 4) при жорсткому затисненні усього контуру ( $\varphi_0 = 0^\circ$ ) і частковій заміні його на шарнірне спирання ( $\varphi_0 < 30^\circ$ ) форма втрати стійкості характеризується проклацуванням центральної частини панелі. При подальшому збільшенні зони шарнірного спирання ( $30^\circ \leq \varphi_0 < 90^\circ$ ) форми деформування панелі мають дві вм'ятини, що розміщені зі сторони шарнірного спирання. При шарнірному спиранні вздовж усього опорного контуру ( $\varphi_0 = 90^\circ$ ) ці вм'ятини трансформуються в одну кільцеву осесиметричну вм'ятину, що розташована посередині меридіану.

При попередньому нагріві на  $T = 40^\circ\text{C}$  втрата стійкості панелі для всіх варіантів закріплення контуру відбувається через проклацування центральної частини оболонки (рис. 5). Після часткової заміни жорсткого затиснення на шарнірне спирання ( $20^\circ \leq \varphi_0 \leq 80^\circ$ ) на периферійній частині панелі утворюються дві невеликі хвилі, що можна спостерігати на відповідній картині муарових смуг.

Аналіз результатів демонструє нелінійну залежність величини верхнього критичного навантаження  $\bar{q}_{кр}^e$  від зміни кута  $\varphi_0$  для варіантів  $T = 0^\circ\text{C}$  та  $T = 20^\circ\text{C}$  (рис. 6, табл.). Для порівняння пунктирною лінією наведений розв'язок задачі, отриманий в [1], при дії лише тиску (на рис. 6 цей розв'язок позначений  $T = 0^\circ\text{C}$ ). При  $T = 20^\circ\text{C}$  характер залежності  $\bar{q}_{кр}^e$  від  $\varphi_0$  подібний до варіанта  $T = 0^\circ\text{C}$ , а величина верхнього

критичного навантаження при цьому зростає в середньому в межах 20% (порівняно з дією лише тиску). При зростанні області шарнірного спирання до  $\varphi_0 = 30^\circ$  значення  $\bar{q}_{кр}^e$  збільшується на 5.65% у порівнянні з жорстко затиснутою панеллю. Далі спостерігається падіння цієї величини до вихідного значення, після чого  $\bar{q}_{кр}^e$  знову зростає. Для повністю шарнірно опертої панелі величина  $\bar{q}_{кр}^e$  більша на 15.53%, ніж для повністю жорстко затиснутої. При дії лише тиску ця різниця становить 10.08% [1]. Виявлена нелінійна залежність величини  $\bar{q}_{кр}^e$  від параметра  $\varphi_0$  пов'язана зі зміною форми деформування панелі.

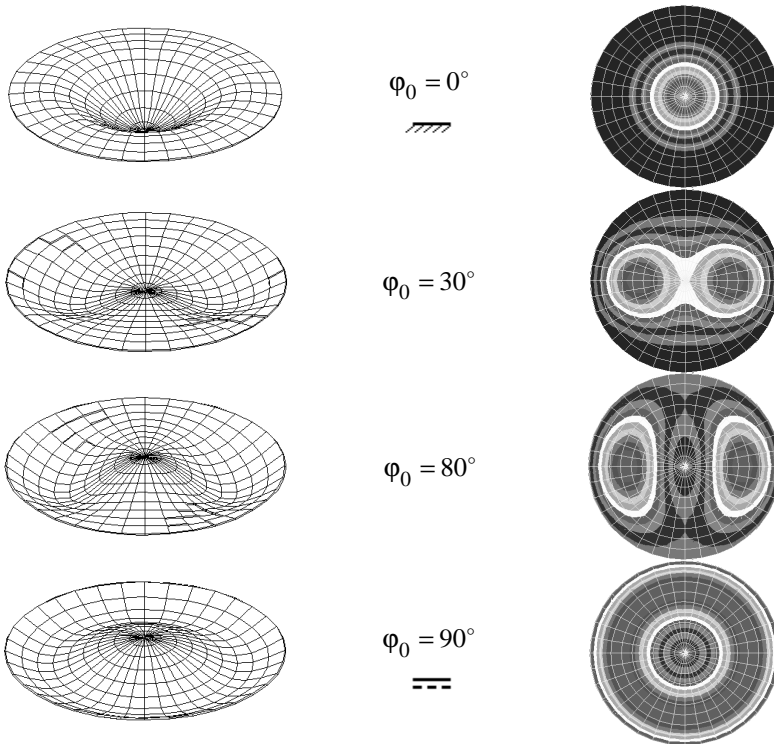


Рис. 4. Форми втрати стійкості панелей при зміні граничних умов при попередньому нагріві на  $T = 20^\circ \text{C}$

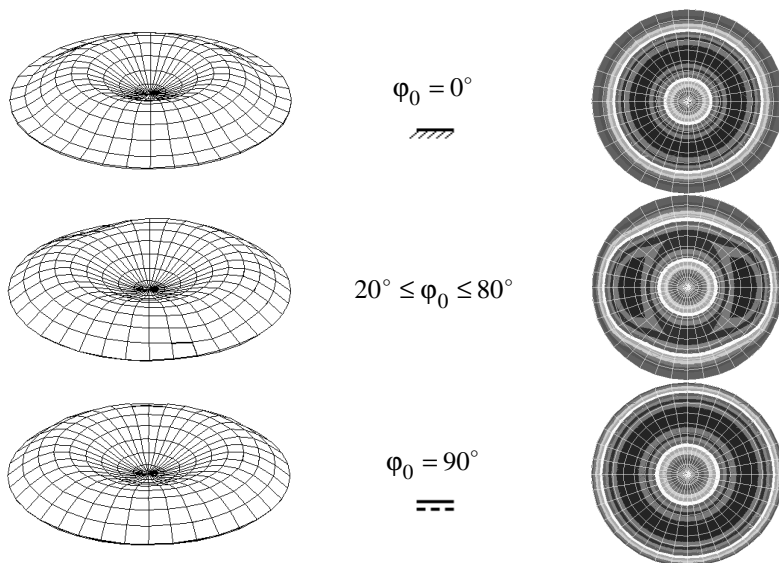


Рис. 5. Форми втрати стійкості панелей при зміні граничних умов при попередньому нагріві на  $T = 40^\circ\text{C}$

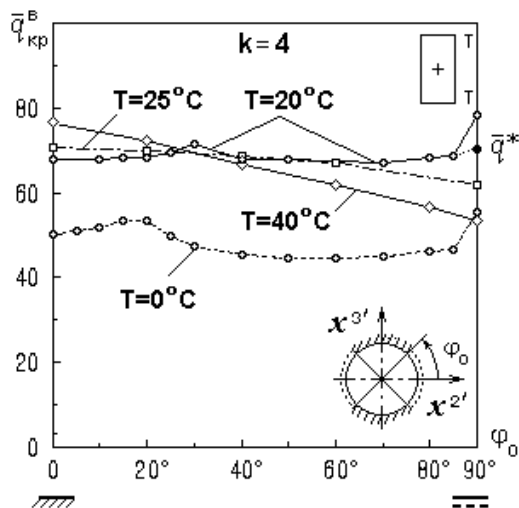


Рис. 6. Зміна величини  $\bar{q}_{кр}^B$  при зростанні ділянки шарнірного спирання

При зростанні попереднього нагріву до  $T = 25^\circ\text{C}$  та  $T = 40^\circ\text{C}$  залежність  $\bar{q}_{кр}^g$  від  $\varphi_0$  набуває лінійного характеру. При цьому різниця величини  $\bar{q}_{кр}^g$  для варіантів однорідних граничних умов (шарнірного спирання та жорсткого затиснення) становить 11.81 і 29.97% відповідно для  $T = 25^\circ\text{C}$  і  $T = 40^\circ\text{C}$ .

Згідно з розрахунками для всіх варіантів граничних умов і нагріву на діаграмах “ $\bar{q} - \bar{u}^1$ ” до верхньої критичної точки  $\bar{q}_{кр}^g$  відсутні точки розгалуження (окрім випадку  $\varphi_0 = 90^\circ$ ,  $T = 20^\circ\text{C}$ ). Точки розгалуження та сходження гілок розв’язків розміщуються лише у закритичній області на нестійких ділянках діаграми “навантаження–прогин”. При аналізі розв’язку, який відповідає варіанту  $\varphi_0 = 90^\circ$ ,  $T = 20^\circ\text{C}$ , виявлено, що в околі точки  $\bar{q} = \bar{q}^* = 70.64$  діаграми “ $\bar{q} - \bar{u}^1$ ” можливе виникнення двох суміжних гілок розв’язку з розгалуженням форми рівноваги: перша відповідає осесиметричній формі деформування, друга – неосесиметричній. При уточненому визначенні точки розгалуження  $\bar{q}^*$  за методикою [3, 5] (через внесення збурення у вихідну форму оболонки), отримано  $\bar{q} = \bar{q}^* = 69.82$ , що зменшує величину  $\bar{q}^*$  на 1.16%. При цьому точка розгалуження  $\bar{q}^*$  перетворюється на критичну. На рис. 6 цьому значенню  $\bar{q}^*$  відповідає точка з позначкою “•”. Відповідна форма деформування приведена на рис. 7.

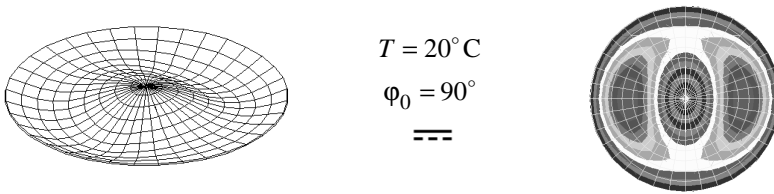


Рис. 7. Форма деформування панелі в точці  $\bar{q}^*$

Проведені дослідження дозволили виявити нелінійні закономірності втрати стійкості пологих сферичних панелей від величини попереднього нагріву при послідовній зміні областей комбінованого закріплення контуру. Отримані нові результати можуть бути використані при проектуванні елементів несучих оболонкових конструкцій.

Таблиця

## Вплив нагріву на величину критичного навантаження при зміні граничних умов

$\Phi_0$ , град	$T = 0^\circ \text{C}$		$T = 20^\circ \text{C}$		$T = 25^\circ \text{C}$		$T = 40^\circ \text{C}$	
	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e)$ , %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e)$ , %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e)$ , %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e)$ , %
0	50.40	0.00	67.82	–	76.40	–	70.87	–
10	51.75	2.68	67.91	0.13				
15	53.44	6.03	68.28	0.68				
20	53.50	6.15	68.39	0.84	72.15	-5.56	69.99	-1.24
25	49.91	-0.97	69.46	2.42				
30	47.62	-5.51	71.65	5.65				
40	45.23	-10.26	67.98	0.24	66.82	-12.54	68.85	-2.85
50	44.54	-11.63	67.79	-0.04				
60	44.65	-11.41			61.74	-19.19	67.05	-5.39
70	45.18	-10.36	66.94	-1.30				
80	46.09	-8.55	68.28	0.68	56.82	-25.63		
85	50.40	0.00	68.75	1.37				
90	51.75	2.68	78.35 $\bar{q}^* = 69.82$	15.53	53.50	-29.97	62.50	-11.81

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кривенко О.П.* Вплив комбінованих граничних умов на стійкість пологих оболонок обертання // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 81. – С. 84-90.
2. *Кривенко О.П.* Вплив комбінованого закріплення контуру на стійкість пологих квадратних у плані панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 82. – С. 65-70.
3. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
4. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 1999. – Вип. 66. – С. 22-25.
5. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Прикладная механика, 2009. – Том 45, №9. – С. 3-40.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.

*Кривенко О.П., Соловей М.О.*

**ВЛИЯНИЕ НАГРЕВА НА ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНТУРА**

Изучается влияние предварительного нагрева на потерю устойчивости упругих пологих осесимметричных сферических панелей при последовательном изменении условий комбинированного закрепления контура: частичной замены защемления на шарнирное опирание.

*Kryvenko O.P., Solovey N.A.*

**INFLUENCE OF HEATING ON LOSS OF STABILITY OF SHALLOW PANELS AT CHANGE OF CONDITIONS OF FIXATING OF THE BOUNDARY**

The influence to loss of a stability of elastic shallow spherical panels of preliminary heating at consecutive change of conditions of combined fixating of the boundary is studied: partial replacement lengthways of the panel's contour the clamped boundary at the hinged boundary.



УДК 624.044:624.012.45

**Є.О. Гоцуляк**, д-р техн. наук  
**П.В. Войтенко**

## РОЗРАХУНОК ФУНДАМЕНТНОЇ ПЛИТИ НА ОСНОВІ ТРИВИМІРНОЇ МОДЕЛІ

Розрахована фундаментна плита в тривимірній постановці з врахуванням зміни характеристик бетону та дискретно розміщених арматурних стержнів. На основі просторової розрахункової схеми отримані дані напружено-деформованого стану, які значно відрізняються від результатів розрахунку плити по теорії Кіргофа-Ляфа. Просторова модель, крім уточнення результатів розрахунку в цілому, дозволяє отримати збурення напружено-деформованого стану біля колон та зусилля в арматурних стержнях.

З розвитком висотного будівництва збільшуються навантаження на фундаментні плити, що призводить до збільшення їх товщин. В більшості будівель несучими елементами є колони або пілони, які передають на плиту зосереджені сили. Для спрощення розрахунку використовують гіпотези Кіргофа та більш точні теорії: Тимошенка, який отримав диференційне рівняння гіперболічного типу, що описує НДС плити з врахуванням впливу поперечних деформацій зсуву [1,3]; Рейснера-Нагди, які запропонували теорію, що враховує поперечну деформацію зсуву і задовольняє трьома граничним умовам у вигляді системи рівнянь шостого порядку [3]; Амбарцумяна, який встановив, що гіпотеза недеформованих нормалей для анізотропних пластин вносить недопустимі похибки, які усуваються використанням уточнюючих теорій [2,3], та інші. Перераховані вище теорії дають похибку розрахунку для пластин значної товщини, особливо, при дії зосереджених навантажень. В таких випадках слід використовувати теорію товстих плит, в якій ця задача розглядається як просторова задача теорії пружності.

Розрахунок фундаментних плит багатьма дослідниками виконується за допомогою програмних комплексів «Мономах», «Лири» та «Scad office», з використанням теорії тонких плит, яка не враховує зсувні деформації та зминання в зонах концентрації вертикальних зусиль і потребує додаткового розрахунку на продавливання. Звісно, що такий розрахунок дає похибки. Задача по вирішенню напружено-деформованого стану товстої плити в просторовій постановці з врахуванням усіх умов роботи плити підвищує точність її розв'язання. У програмних комплексах можливість тривимірного моделювання не викликає великих труднощів, тому такий розрахунок є можливим і необхідним.

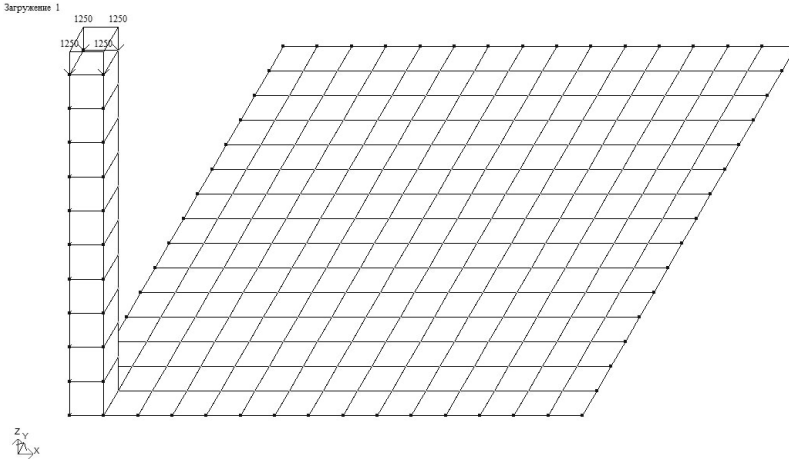


Рис. 1 Плошка скінченно-елементна схема фундаментної плити

Розв'язана нескінченна в плані фундаментна плита з сіткою скінчених елементів  $0,2 \times 0,2$  м товщиною  $0,6$  м, з кроком колон  $6 \times 6$  м та їх перерізом  $0,4 \times 0,4$  м. По граням плити та колони задані умови симетрії, що дозволяє врахувати нескінченний в плані масив плити, розглянувши фрагмент розміром  $3 \times 3$  м. Перший варіант розрахункової схеми представлено у вигляді плити, що моделюється плоскими скінченими елементами (рис. 1). Пластини виконано з бетону класу В30 ( $E=19,6$  ГПа,  $R_0=25$  кН/м<sup>3</sup>,  $h=0,6$  м).

Другий варіант розрахункової схеми створений на основі тривимірної моделі (рис. 2). Залізобетон моделюється у вигляді просторових скінчених елементів з урахуванням сітки арматурного каркасу.

Арматура задається окремо стержнями просторового каркасу, вузли якого співпадають з вузлами скінченно-елементної сітки просторового бетонного масиву, що дає можливість задовольнити сумісність деформацій бетону та арматури.

Бетон описується реальними фізичними характеристиками: в стиснутому напрямі – опором  $R_b$  та в розтягнутому –  $R_{bt}$ . Арматура описується нормативними опорамі на розтяг  $R_s$  та стиск  $R_{sc}$ . Такий підхід дозволяє, крім побудови ізополів напружень в бетоні визначити зусилля в арматурних стержнях і більш точно підібрати потрібне армування. На колону прикладається розподілена сила  $12260$  кН/м<sup>2</sup>, враховується також власна вага всієї конструкції. Грунтова основа задається у вигляді пружних елементів в вузли сітки опором  $196,2$  кН/м. Розрахунок виконується для двох варіантів розрахункової схеми фундаментної плити

в нелінійній постановці, що дозволяє врахувати роботу арматурних стержнів у розтягнутій зоні і звести до мінімуму роботу бетону.

Завантаження 1

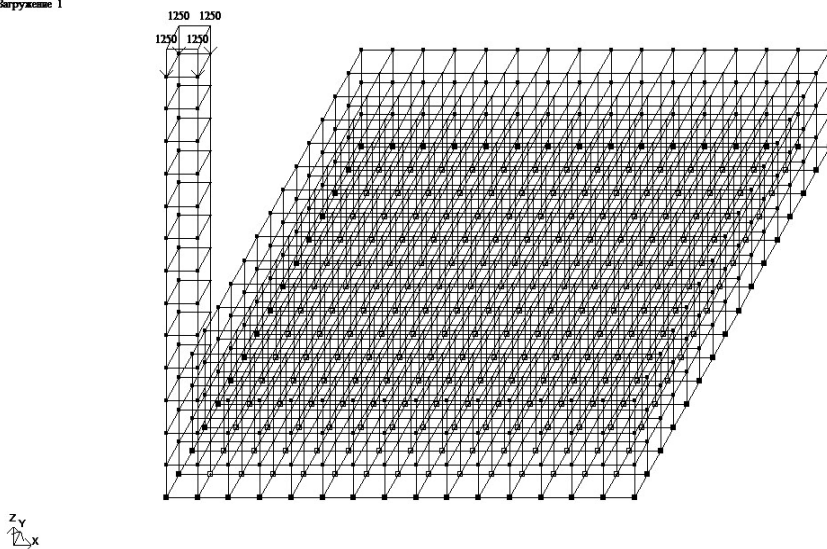


Рис. 2 Тривимірна скінченно-елементна схема фундаментної плити

На рис. 3 представлені ізополі розподілу напружень, які виникають в фундаментній плиті для двох варіантів розрахункових схем. Видно, що тривимірна модель дає більш детальну картину розподілу напружень в місцях концентрації вертикальних зусиль, тобто під колонами, ніж плоска модель.

У тривимірній моделі нормальні напруження стиску та розтягу складають  $\sigma_x = \sigma_y = 3350 \text{ кН/м}^2$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = 25 \text{ кН/м}^2$  відповідно; дотичні напруження -  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 580 \text{ кН/м}^2$ . В плоскій плиті нормальні напруження стиску та розтягу складають  $\sigma_x = \sigma_y = 6350 \text{ кН/м}^2$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = 1700 \text{ кН/м}^2$  відповідно, дотичні напруження -  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 530 \text{ кН/м}^2$ . Потрібно зазначити, що в тривимірній моделі напруження стискання розподіляються по товщині плити і складають  $\sigma_z = 5400 \text{ кН/м}^2$ . Тобто значна частина навантажень сприймається товщиною плити.

Дискретне розташування арматурних стержнів дає можливість побачити реальні напруження в арматурі, зрозуміти як вона включається в роботу та визначити в ній місця концентрації напружень. В свою чергу це дає змогу ефективно розмістити арматуру в масиві бетону. За результатами розрахунку плоскої плити проектне армування складає  $\phi 32$

з кроком 200 мм. У тривимірній моделі розтягуюче зусилля в стержнях під колоною складає 2,11 т, що відповідно з врахуванням коефіцієнтів запасу відповідає арматурі  $\varnothing 10$  з кроком 200 мм.

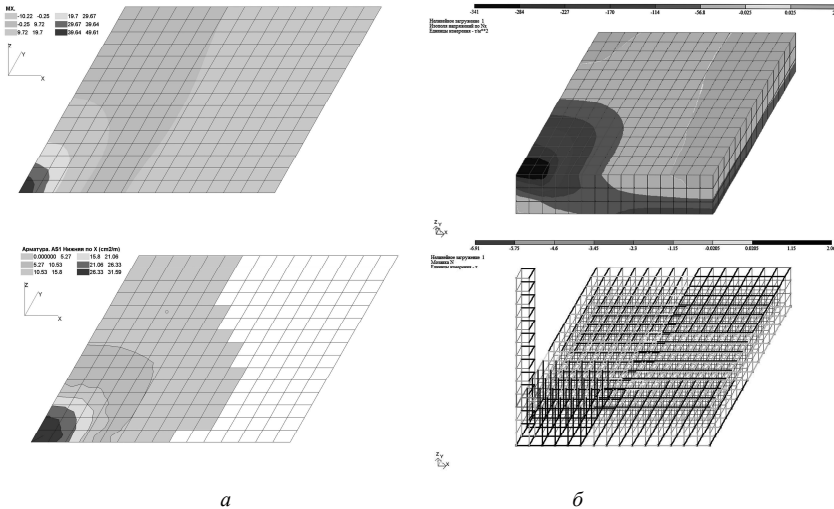


Рис. 3 Напруження та армування фундаментної плити:  
а) плоска постановка; б) тривимірній постановка

Створення тривимірних нелінійних розрахункових моделей фундаментних плит дозволяє більш точно аналізувати їх напружено-деформований стан, досліджувати еволюцію напружень як в плані, так і по товщині плит; по ізоплям напружень з використанням стержневих елементів можна більш ефективно проектувати армування фундаментних плит.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., 1963. с.636
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М., 1961. с. 576
3. Галишын А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. Исследования по теории пластин и оболочек, 1967, Сб.V. с.27
4. С.В.Юсипенко, Л.Г.Батрак, Д.А.Городецкий, А.А.Лазарев, М.В.Лазнюк, А.А.Рассказов, МОНОМАХ 4.2 Примеры расчета и проектирования. Учебное пособие, Киев: издательство "Факт", 2007. - 292 с.
5. Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Гераймович Ю.Д., Марченко Д.В., Титок В.П., ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. ОСНОВЫ. Учебное пособие. Киев: издательство «ФАКТ», 2008. – 164 с.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.

*Гоцуляк Е.О., П.В.Войтенко*

**РАССЧЕТ ФУНДАМЕНТНОЙ ПЛИТЫ НА ОСНОВАНИИ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ**

Расчитана фундаментная плита в трехмерной постановке с учетом изменения характеристик бетона и дискретно размещенных арматурных стержней. На основе пространственной расчетной схемы полученные данные напряженно-деформированного состояния, которые значительно отличаются от результатов расчета плиты по теории Киргофа-Ляфа. Пространственная модель, кроме уточненных результатов расчета в целом, позволяет получить концентрацию напряжонно деформированого состояния возле колонн и усилия в арматурных стержнях.

*Gotsuliak E.O., Voitenko P.V.*

**CALCULATION THE BASE PLATE BASIS ON THE THREE-DIMENSIONAL MODEL**

Calculated a base plate in three-dimensional statement taking into account change of characteristics of concrete and discretely placed reinforcing rods. Based on the spatial design scheme the obtained data of the intense-deformed states, which significantly differ from the results of calculation of a plate on the theory of Kirhof-Lyaf. The spatial model, except for refining the results of the calculation in general, gives the concentration of stress deformation at the column and efforts in reinforcing rods.

УДК 539.3

М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук  
О.М. Тробюк

## ПРО ЗМІШАНУ СИСТЕМУ РІВНЯНЬ ТИПУ ТИМОШЕНКА КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН

Змішана система рівнянь типа Тимошенка коливань неоднорідних за своїми механічними властивостями пластин змінної товщини представлена в гамільтоновій формі по просторових координатах.

Для конструктивних елементів будівельних споруд (несучих об'єктів, пластинчатих або оболонкових перекриттів та ін.) притаманна природна чи технологічна неоднорідність їх структури. Розмаїття неоднорідностей вимагає постійного вдосконалення методів моделювання, вибору теоретичних розрахункових схем і методів розрахунку несучої здатності при статичних і динамічних навантаженнях експлуатаційного та природного походження. Складність практичних задач обумовлює застосування, як правило, єдино можливих чисельних методів, що ґрунтуються на різноманітних сіткових апроксимаціях континуальних моделей (методу скінчених елементів в його різних варіантах, варіаційно-різницеви методи, методи прямих (методи проектування) для зменшення розмірності задач та ін.).

Найбільш широке застосування, при виборі розрахункових схем, належить прикладним теоріям стержнів, пластин і оболонок. В монографії [2] вперше в світовій науковій літературі було запропоновано представлення рівнянь теорії пружності в гамільтоновій формі по просторовій координаті. Подальшому розвитку такого підходу присвячені чисельні роботи, аналіз яких проведено в оглядах [5-7] та в інших публікаціях [3,4,8]. Користуючись цими ідеями в даній статті пропонується застосування гамільтонового формалізму по просторових координатах в теорії типу Тимошенка коливань неоднорідних за своїми механічними властивостями пластин змінної товщини.

Серединну відлікову площину  $z = 0$  пластини, віднесемо до прямокутної декартової системи координат  $x_1, x_2, z$ . Нехай механічні властивості пластини (густина матеріалу  $\rho(x_1, x_2)$ , модулі першого  $E(x_1, x_2)$  і другого  $G(x_1, x_2), G_{13}(x_1, x_2), G_{23}(x_1, x_2)$  роду, коефіцієнт Пуассона  $\nu(x_1, x_2)$ ) залежать від планарних координат  $x_1, x_2$ . Лицеві поверхні  $z = \pm h(x_1, x_2)/2$ , причому змінна товщина  $h(x_1, x_2)$  пластини є

достатньо гладкою функцією координат  $x_1, x_2$ , що дозволяє користуватися теорією типу Тимошенка згинання пластин. Таким чином згинальна жорсткість  $D = I_1 E / (1 - \nu^2)$ , зсувна жорсткість  $B_3 = k_G G_{13} h = k_G G_{23} h$ , де  $k_G$  – коефіцієнт зсуву, момент інерції поперечного перерізу на одиницю довжини  $I_1 = h^3 / 12$  також залежать від координат  $x_1, x_2$ .

В теорії типу Тимошенка коливань пластин згинальні  $M_{11}, M_{22}$  та крутильні  $M_{12}, M_{21}$  моменти, перерізуючі сили  $Q_1, Q_2$ , прогин  $w$  і функції зсуву  $\psi_1, \psi_2$  зв'язані рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

та матеріальними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right), \quad M_{22} = -D \left( \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right), \\ M_{12} &= -\frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right), \\ Q_1 &= B_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 \right), \quad Q_2 = B_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Систему рівнянь (1), (2) запишемо в змішаній нормальній операторній формі Коші відносно функцій  $M_{22}, \psi_1, w, \psi_2, M_{21}, Q_2$ , які при досконалому механічному контакті залишаться неперервними на перерізах  $x_2 = const$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + Q_2; \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{2}{(1-\nu)D} M_{21}; \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} &= \psi_2 + \frac{Q_2}{B_3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{D} M_{22} - \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}; \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} &= -\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + Q_1; \\ \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= -\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

З системи (3) потрібно виключити  $M_{11}$  та  $Q_1$ , замінивши їх на  $M_{22}$ ,  $\psi_1$ ,  $w$  користуючись залежностями (1), (2). Маємо

$$Q_1 = B_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 \right), \quad M_{11} = \nu M_{22} - (1 - \nu^2) D \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}. \quad (4)$$

В результаті систему (3) запишемо так

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} + Q_2; \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{2}{(1 - \nu) D} M_{21}; \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} &= \psi_2 + \frac{Q_2}{B_3}; \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{D} M_{22} - \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}; \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} &= -\nu \frac{\partial M_{22}}{\partial x_1} - \left[ B_3 + (1 - \nu^2) D \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi_1 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}; \\ \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= B_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \left[ \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} - B_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right] w.\end{aligned}\quad (5)$$

При перетворенні рівнянь (1), (2) до систем (3) і (5) вважаємо, що механічні і геометричні параметри або слабо залежать від координати  $x_1$  або зовсім не залежать від неї. В той же час коефіцієнти системи (3) і (4), а значить і рівнянь (1), (2), можуть бути довільними функціями координати  $x_2$  з розривами першого роду.

Покажемо, що система (5) є операторною гамільтоновою системою [1] по просторовій координаті  $x_2$ , тобто

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{F}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{Q}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

З цією метою операторну функцію Гамільтона візьмемо у вигляді



$$\mathbf{F}^{\epsilon} = \frac{1}{2} P_{ij}^{\epsilon} q_i q_j + \frac{1}{2} Q_{ij}^{\epsilon} p_i p_j, \quad (7)$$

де симетричні операторні матриці  $\mathbf{F}^{\epsilon}$  і  $\mathbf{Q}^{\epsilon}$  мають наступні ненульові елементи:

$$\begin{aligned} -F_{11}^{\epsilon} &= -\frac{1}{D}, \quad -P_{12}^{\epsilon} = -P_{21}^{\epsilon} = -v \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ -F_{22}^{\epsilon} &= -B_3 + (1-v^2) D \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad -P_{23}^{\epsilon} = -P_{32}^{\epsilon} = B_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ -F_{33}^{\epsilon} &= \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} - B_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad Q_{11}^{\epsilon} = -\rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad Q_{12}^{\epsilon} = Q_{21}^{\epsilon} = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \\ Q_{13}^{\epsilon} &= Q_{31}^{\epsilon} = 1, \quad Q_{22}^{\epsilon} = -\frac{2}{(1-v)D}, \quad Q_{33}^{\epsilon} = \frac{1}{B_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Канонічні змінні визначимо так:

$$[\mathcal{q}_1, \mathcal{q}_2, \mathcal{q}_3] = [M_{22}, \Psi_1, w], \quad [p_1, p_2, p_3] \in [\Psi_2, M_{21}, Q_2]. \quad (9)$$

Очевидно, що система (6) з урахуванням (7) і (8) співпадає з системою (5), тобто система (5) є операторною гамільтоновою системою.

Тепер систему рівнянь (1), (2) запишемо в змішаній нормальній операторній формі Коші відносно функцій  $M_{11}, \Psi_2, w, \Psi_1, M_{12}, Q_1$ , які при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на перерізах  $x_1 = const$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_2} + Q_1, \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} - \frac{2}{(1-v)D} M_{12}, \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} &= \Psi_1 + \frac{Q_1}{B_3}, \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} &= -\frac{M_{11}}{D} - v \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} &= -v \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + (1-v^2) D \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_2^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} - B_3 \Psi_2 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} &= B_3 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} - B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

По двом іншим рівнянням системи (1), (2) визначаються згинальний момент  $M_{22}$  і поперечна сила  $Q_2$ , які не ввійшли в систему (10):

$$M_{22} = \nu M_{11} - (1 - \nu^2) D \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}, \quad Q_2 = B_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Psi_2 \right). \quad (11)$$

Система (10) записана у вигляді операторної нормальної форми Коші по просторовій координаті  $x_1$ , коли за розв'язки взяті функції  $M_{11}, \Psi_2, w, \Psi_1, M_{12}, Q_1$ , які при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на перерізах  $x_1 = const$

При перетворенні рівнянь (1), (2) до системи (10) приймалося, що механічні і геометричні параметри або слабо залежать від координати  $x_2$  або зовсім не залежать від неї. В той же час коефіцієнти системи (10), а значить і рівнянь (1), (2), можуть бути довільними функціями координати  $x_1$  з розривами першого роду.

Покажемо, що система (10) є операторною гамільтоновою системою [1] по просторовій координаті  $x_1$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

З цією метою операторну функцію Гамільтона візьмемо у вигляді:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} P_{ij}^{\mathcal{E}} q_i q_j + \frac{1}{2} Q_{ij}^{\mathcal{E}} p_i p_j, \quad (13)$$

де симетричні операторні матриці  $P^{\mathcal{E}}$  і  $Q^{\mathcal{E}}$  мають наступні ненульові елементи:

$$\begin{aligned} -P_{11}^{\mathcal{E}} &= -\frac{1}{D}, \quad -P_{12}^{\mathcal{E}} = -P_{21}^{\mathcal{E}} = -\nu \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ -P_{22}^{\mathcal{E}} &= -B_3 + (1 - \nu^2) D \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad -P_{23}^{\mathcal{E}} = -P_{32}^{\mathcal{E}} = B_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ -P_{33}^{\mathcal{E}} &= \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} - B_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad Q_{11}^{\mathcal{E}} = -\rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad Q_{12}^{\mathcal{E}} = Q_{21}^{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ Q_{13}^{\mathcal{E}} &= Q_{31}^{\mathcal{E}} = 1, \quad Q_{22}^{\mathcal{E}} = -\frac{2}{(1 - \nu) D}, \quad Q_{33}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{B_2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Канонічні змінні визначимо так:

$$[q_1, q_2, q_3]^{\mathcal{E}} = [M_{11}, \Psi_2, w], \quad [p_1, p_2, p_3]^{\mathcal{E}} = [\Psi_1, M_{12}, Q_1]. \quad (15)$$

Таким чином в даній статті системи рівнянь теорії типу Тимошенка коливань пластин для двох випадків неоднорідності механічних властивостей і товщини пластини зведено до рівнянь гамільтонового типу (5) і (10) по просторовій координаті неоднорідності. Такий підхід доцільно застосувати в проєкційних методах розрахунку динамічних характеристиках реальних об'єктів.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
3. *Шульга О.М.* Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – с. 105 – 111.
4. *Шульга М.О.* О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин. – Теор. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – с. 3 – 7.
5. *Shul'ga N.A.* Propagation of Elastic Waves in Periodically Inhomogeneous Media // Int. Appl. Mech. – 2003. 39, N 7. – P. 763-796.
6. *Shul'ga N.A.* Propagation of Coupled Waves in Layered-Periodic Continua for Interaction with an Electromagnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2003. 39, N 10. – P. 1146-1172.
7. *Shul'ga N.A.* Theory of Dynamical Processes in Mechanical Systems and Materials of Regular Structures // Int. Appl. Mech. – 2009. 45, N 12. – P. 1301-1330.
8. *Shul'ga N.A.* On Certain Mixed System of Equations of Theory of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. 46, N 3. – P. 247-251.

*Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.*

*Шульга М.О., Тробюк О.М.*

**О СМЕШАННОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ТИПА ТИМОШЕНКО КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН**

Смешанная система уравнений типа Тимошенко колебаний неоднородных за своими механическими свойствами пластин переменной толщины представлена в гамильтоновой форме по пространственным координатам.

*Shul'ga N.A., Trobiuk O.M.*

**ABOUT A MIXED SYSTEM OF EQUATIONS OF TIMOSHENKO'S TYPE VIBRATIONS OF HETEROGENEOUS PLATES**

Mixed system of equations of Timoshenko's type vibrations of heterogeneous by its mechanical properties plates of a variable thickness is presented in the Hamiltonian form of spatial coordinates.

## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О., Богдан Д.В.</i> Ефективність методу реакцій для призматичних тіл з поперечними тріщинами . . . . .	3
<i>Гайдайчук В.В., Худолій С.М., Андрусенко О.М.</i> Моделювання сил опору при підйомі бурильної колони в свердловині з недосконаlostями у формі зламів осьової лінії . . . . .	12
<i>Соловей М.О., Кривенко О.П., Дубина О.С.</i> Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості гнучких сферичних панелей сталого товщини при дії рівномірного тиску . . . . .	21
<i>Гуляр О.І., Пискунов С.О., Мицюк С.В.</i> Визначення ресурсу приєднувального штуцера в умовах багаточиклового навантаження при наявності початкових дефектів . . . . .	28
<i>Чибіряков В.К., Смоляр А.М., Мірошкіна І.В., Чумак В.О.</i> Чисельний аналіз аналітичної моделі напружено-деформованого стану короткого бруса . . . . .	53
<i>Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії . . . . .	62
<i>Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.</i> Чисельна побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок . . . . .	73
<i>Легостаєв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.</i> Побудова розрахункових моделей МСЕ різноманітних конструкцій при визначенні їх динамічних характеристик і напруженого стану від дії статичних і динамічних навантажень . . . . .	88
<i>Цимбал С.Й., Малишев О.В.</i> Особливості утворення ущільнених зон ґрунту навколо бічної поверхні вдавлюваних паль . . . . .	99
<i>Кліменко В.З.</i> Розрахунок дерев'яних елементів, що працюють на стиск зі згином . . . . .	109

---

<i>Чибіряков В.К., Жупаненко І.В.</i> Дослідження власних коливань товстих пластин на основі дискретно-континуальної розрахункової моделі . . . . .	117
<i>Гоцуляк Є.О., Шельменко А.М.</i> До розрахунку несучої спроможності пальового фундаменту монолітної каркасної будівлі . . . . .	125
<i>Ворона Ю.В., Гончаренко М.В., Козак А.А., Черненко О.С.</i> Колівання двовимірних масивних тіл, послаблених тріщинами нормального відриву . . . . .	131
<i>Кривенко О.П., Соловей М.О.</i> Вплив нагріву на втрату стійкості пологих панелей при зміні умов закріплення контуру . . . . .	144
<i>Гоцуляк Є.О., Войтенко П.В.</i> Розрахунок фундаментної плити на основі тривимірної моделі . . . . .	153
<i>Шульга М.О., Тробюк О.М.</i> Про змішану систему рівнянь типу Тимошенка коливань неоднорідних пластин . . . . .	158

Наукове видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

Випуск 87

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 01.11.11. Формат 60x90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір друк №1.  
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10,5.  
Тираж 100. Зам. № 12-549К

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

---

Віддруковано на ПАТ “ВІПОЛ”  
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.