

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 88

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2011

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 28 жовтня 2011 року, протокол № 3.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 88 / Відп. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2011. – 159 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31
м. Київ, 03680
тел.: (044) 248-3040

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2011

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук**І.І. Солодей**, канд. техн. наук**М.О. Вабіщевич****О.І. Гуляр**, д-р техн. наук

ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНОГО КОЕФІЦІЄНТА ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ЗАДАЧАХ ЗМІШАНОГО РУЙНУВАННЯ НА БАЗІ НАПІВАНALІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В рамках напіваналітичного метода скінченних елементів розроблена і апробована методика роздільного обчислення параметрів механіки руйнування при змішаному руйнуванні в умовах динамічного деформування досліджуваних об'єктів.

Вступ.

Відомо, що на сьогоднішній день метод скінченних елементів (МСЕ) є найбільш потужним інструментом для аналізу проблем будівельної механіки. Його застосування дозволяє згущувати сітку в місцях очікуваної концентрації напружень для більш точного визначення НДС, задавати довільні граничні умови на границях тіла, що значно підвищує ефективність метода. Переваги МСЕ полягають в слабкій чутливості метода до ускладнення геометрії та механічних властивостей тіла, а також в стрічковій структурі отримуваної матриці системи рівнянь, що спрощує процедуру її обернення і дозволяє знизити об'єм необхідної пам'яті та машинного часу.

Особливе місце серед розмаїття задач, що розглядаються за допомогою МСЕ, займають задачі механіки руйнування. Для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) використовуються прямі (асимптотичні) і енергетичні методи. Прямі методи передбачають визначення КІН за величинами напружень або переміщень отриманих в околі вершини тріщини [2, 4]. Одним із шляхів підвищення точності визначення КІН є використання поблизу фронту тріщини елементів, що містять спеціальним чином обрані асимптотичні розподілення переміщень [9]. Використання спеціальних СЕ у низці випадків дозволяє досягти задовільної точності визначення КІН при достатньо грубій розбивці тіла на СЕ. Підвищення точності визначення КІН може бути досягнуто також шляхом його обчислення по привершинній області [1, 2, 7]. Найбільш популярні енергетичні методи обчислення КІН пов'язані з використанням J -інтеграла Черепанова–Райса. Питанню визначення J -інтеграла в задачах механіки руйнування присвячена значна кількість

публікацій [2,3,5,8]. Отримане значення енергії за умов лінійного деформування виражається через КІН.

Застосування напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ) для розв'язання задач лінійної механіки руйнування знайшло відображення в роботах [2,4,5]. В них приведені результати обчислення КІН в просторових задачах статички. Показана висока точність отримуваних результатів у порівнянні з аналітичними розв'язками та результатами із застосуванням традиційного МСЕ. Обчислення параметрів механіки руйнування НМСЕ для тріщин нормального відриву при імпульсному навантаженні розглянуто в роботах [1,6,7,8]. На практиці при довільному розподіленні зовнішніх навантажень в околі вершини тріщини виникає складний напружено-деформований стан, який призводить до одночасної реалізації декількох типів руйнування. В цьому випадку виникає потреба роздільного визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень, що відповідають кожному з типів.

1. Методика обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень в рамках задачі динаміки.

Визначення динамічного КІН з використанням асимптотичних формул по результатам скінченно-елементного аналізу є одним із найпростіших та практично придатних способів, але при цьому немає повної ясності з вибором точки в області вершини тріщини, для якої обчислюються компоненти напружень і переміщень, а також з питанням переважного вибору однієї з компонент для розрахунку КІН.

Підвищення точності може бути досягнуто шляхом обчислення динамічного КІН по деякій привершинній області [1,9] (рис. 1).

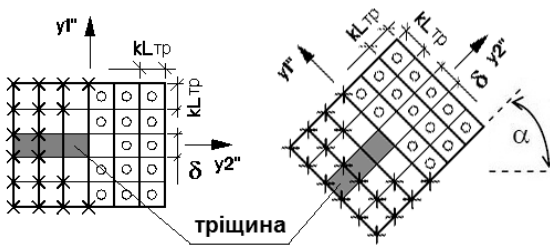


Рис. 1. Схема обчислення ДКІН по привершинній області

В частині області, що розташована над тріщиною, КІН визначаються за переміщеннями у вузлах дискретної моделі (позначено хрестиками). В іншій частині області обчислення КІН виконується за напруженнями в центрах СЕ (позначено кружками).

Отримавши амплітудні переміщення та напруження згідно розроблених в роботах [1,5,7] алгоритмів, формули для обчислення амплітудних значень динамічного КІН для кожної з підсистем НМСЕ можемо записати у вигляді:

$$\overset{\circ}{K}_{\zeta}^l(t) = \frac{\overset{\circ}{\sigma}_l^{i''j''} \Psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\sigma}_l^{i''j''} \Psi_{3'}^l}{H_{\zeta}^{i''j''}(r, \theta)}, \quad K_{\zeta}^l(t) = \frac{u_{1'}^l \Psi_{1'}^l}{H_{\zeta}^{i''j''}(r, \theta)}. \quad (1)$$

Координатні величини визначаються за формулами:

$$\overset{\circ}{K}_{\zeta}(t) = \sum_{l=0}^L \overset{\circ}{K}_{\zeta}^l(t), \quad K_{\zeta}(t) = \sum_{l=0}^L K_{\zeta}^l(t), \quad \zeta = I, II, III, \quad (2)$$

при цьому кінцеве розрахункове значення КІН обчислюється усередненням по області бхб елементів.

$$K_{\zeta}^l(t) = \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{K}_{\zeta}^l(t) + K_{\zeta}^l(t) \right), \quad K_{\zeta}(t) = \sum_{l=0}^L K_{\zeta}^l(t). \quad (3)$$

Зазначена методика дозволяє з високою точністю отримувати значення КІН при використанні в околі вершини тріщини СЕ із лінійним розподіленням переміщень, характерний розмір яких становить 1/10 довжини тріщини (для задач статки) та 1/20 (для задач динаміки), тобто є на порядок меншим, ніж при використанні локальних підходів.

Більш точними та ефективними для визначення КІН є енергетичні методи, що ґрунтуються на обчисленні КІН за величинами J -інтеграла J_k ($k = I, II, III$). Крім того, як показано в роботі [3], подання контурного J -інтеграла через вузлові реакції і переміщення (метод реакцій) дозволяє зменшити похибки обчислення КІН майже в два рази.

В рамках лінійної механіки руйнування амплітудні значення J -інтеграла можуть бути подані через амплітудні вузлові реакції та переміщення для кожної утриманої гармоніки:

$$J(t) = \sum_{l=0}^L J^l(t). \quad (4)$$

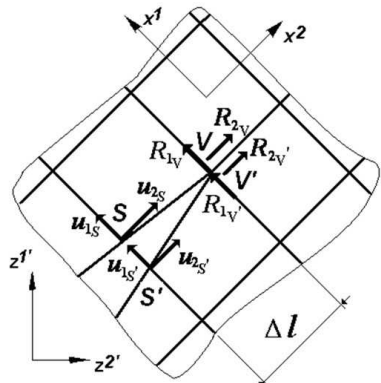


Рис. 2. Схема обчислення J -інтеграла

Для визначення складників J_I , J_{II} , та J_{III} , пов'язаних з тріщинами нормального відриву, поперечного та поздовжнього зсуву, J -інтеграл, що охоплює тріщину, може бути поданий як сума J -інтегралів.

$$J^I = J_I^I + J_{II}^I + J_{III}^I = \frac{1}{2\Delta l} \left(R_{1V'}^I (u_{1S}^I - u_{1S'}^I) + R_{2V'}^I (u_{2S}^I - u_{2S'}^I) + R_{3V'}^I (u_{3S}^I - u_{3S'}^I) \right). \quad (5)$$

Формули для обчислення амплітудних значень вузлових реакцій залежать від алгоритму апроксимації рівнянь руху за часом та наведені у роботі [5].

Зв'язок величин J -інтеграла (величини питомої енергії, що необхідна для утворення одиниці поверхні тріщини) з відповідними значеннями КІН за умов лінійного деформування визначається за формулами:

$$K_I = \sqrt{J_I E/k}, \quad K_{II} = \sqrt{J_{II} E/k}, \quad K_{III} = \sqrt{2\mu J_{III}}, \quad (6)$$

де $k=1$ за умови плоского напруженого стану; $k=1-\nu^2$ за умови плоскої деформації.

2. Вірогідність та ефективність запропонованого підходу в задачах змішаного руйнування при динамічному навантаженні.

На прикладі простих пластин з різним розташуванням тріщин, для яких відомі аналітичні вирази КІН або опубліковані дані в літературі, проводилося співставлення значень КІН та ДКІН, обчислених за допомогою запропонованої методики.

Аналітичні формули для визначення КІН в представлених на рис. 3 моделях [10] мають вигляд:

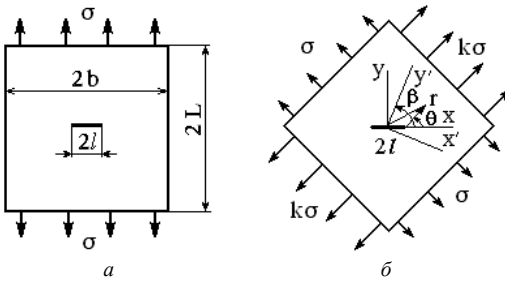


Рис. 3. Моделі: *a* – прямокутна пластина з центральною тріщиною, що знаходиться в умовах одноосного розтягу; *б* – прямокутна пластина з прямолінійною тріщиною, похилою під деяким кутом до розтягуючих зусиль, що знаходиться в умовах двохосного розтягу

Модель (*a*):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \left(1 + 0.256 [l/2b] - 1.152 [l/2b]^2 + 12.2 [l/2b]^3 \right) \quad (\text{Ісіда});$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l \sec [\pi l / (2b)]} \quad (\text{Феддерсен}); \quad (K_{II} = 0). \quad (7)$$

Модель (б):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} \frac{1+k-(1-k)\cos 2\beta}{2}; \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi l} \frac{1-k}{2} \sin 2\beta. \quad (8)$$

Проведено розрахунок пластин з центральною та похилою тріщинами, що знаходяться під дією рівномірно розподіленого розтягуючого тиску (рис. 4). Дослідження проводилися в умовах плоскої деформації. Фізико-механічні та геометричні параметри приймалися у наступному вигляді: $\sigma = 1.0 \text{ МПа}$; $E = 200 \text{ ГПа}$; $\nu = 0.3$.

Модель 1: $a = 2.4 \text{ мм}$; $W = 20 \text{ мм}$; $L = 40 \text{ мм}$.

Модель 2: $a = 7.07 \text{ мм}$; $W = 30 \text{ мм}$; $L = 60 \text{ мм}$; $\alpha = 45^\circ$.

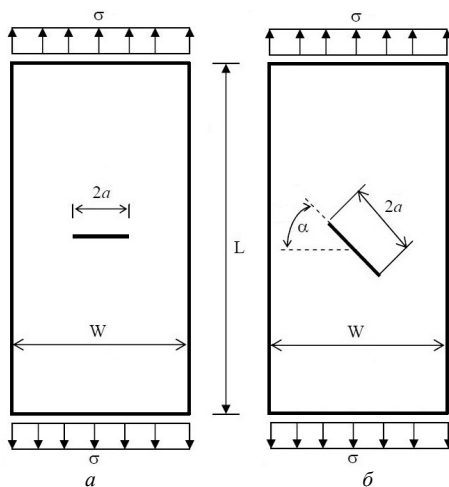


Рис. 4. Пластини з центральною (а) та похилою (б) тріщинами

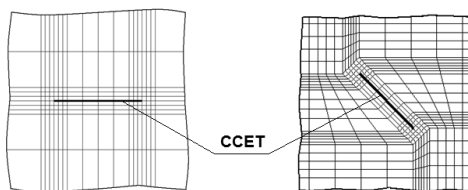


Рис. 5. Скінченно-елементна апроксимація

На першому етапі проведено статичний аналіз деформування тіл з тріщинами. Скінченно-елементна дискретизація базується на основі спеціальних скінченних елементів з тріщиною (ССЕТ) [9] у відповідності

до запропонованої методики та схематично представлена на рис. 5. Таблиці 1 та 2 представляють отриманий результат та похибки у порівнянні з аналітичним розв'язком.

Таблиця 1

Пластина з центральною тріщиною, КІН ($H \cdot m^{-3/2}$)

	K_I
Аналітичний Ісіда / Феддерсен	0.089889754 / 0.09005157
НМСЕ	0.09009840
Похибка	2.3% / 0.05%

Таблиця 2

Пластина з похилою тріщиною, КІН ($H \cdot m^{-3/2}$)

	K_I	K_{II}
Аналітичний	0.074516877	0.074516877
НМСЕ	0.073174385	0.074971548
Похибка	1.8%	0.6%

Другий етап – визначення динамічного КІН. Щільність матеріалу приймалась $\rho = 5000 \text{ кг/м}^3$, навантаження $\sigma = 1.0 \text{ МПа}$ миттєво прикладалося в момент часу $t = 0 \text{ с}$.

На рис. 6 представлено еволюцію нормованого динамічного K_{Id} (суцільна лінія) для пластини з центральною тріщиною у порівнянні з іншими відомими з літератури рішеннями: [11] – кружки, [12] – трикутники. Нормовані значення обчислюються по відношенню до параметра $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$.

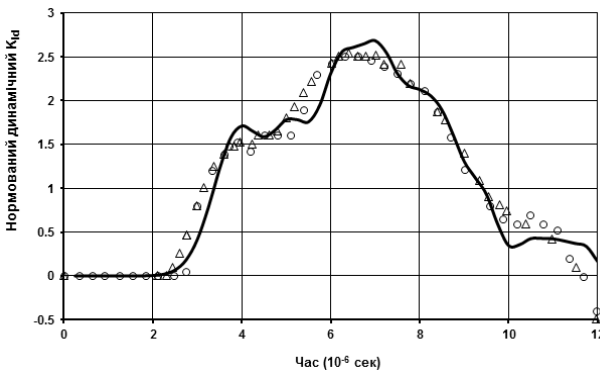


Рис. 6. Динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень K_{Id} для пластини з центральною тріщиною

Аналогічні дослідження проведені для пластини з похилою тріщиною. На рис.7 та 8 представлено графіки зміни динамічних K_{Id} та K_{IId} у часі.

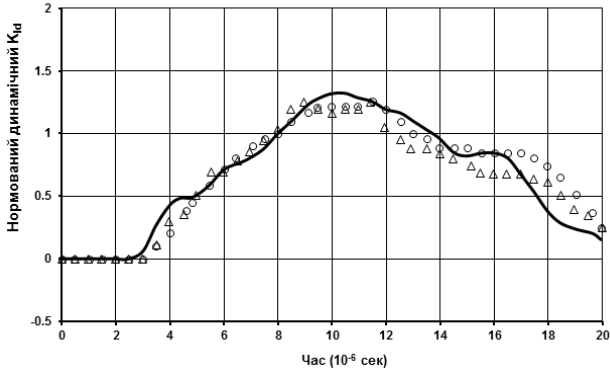


Рис. 7. Динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень K_{Id} для пластини з похилою тріщиною

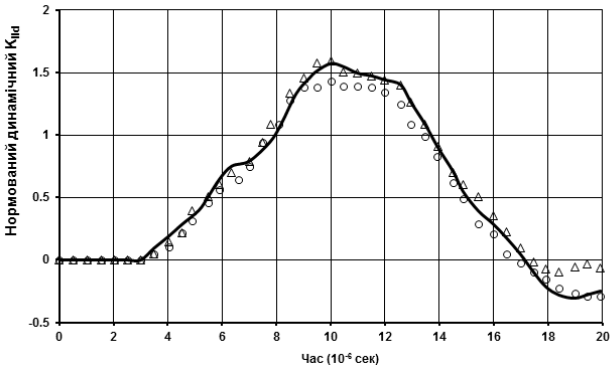


Рис. 8. Динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень K_{IId} для пластини з похилою тріщиною

У всіх випадках помітна добра збіжність представлених результатів не тільки за амплітудою K_{Id} і K_{IId} але і за періодом коливаль.

Аналізуючи отримані результати, можна помітити наявність від'ємних значень динамічних КІН, що суперечить дійсності. Інші дослідники даної моделі [11-14] також відзначають появу від'ємних значень, що пов'язано з традиційним використанням алгоритмів обчислення КІН без будь-якого аналізу миттєвої конфігурації (в момент

часу t) берегів тріщини. Для даного дослідження глобальний максимум ДКІН реалізується вже на першому періоді, що робить недоцільним подальший аналіз і від'ємні значення вже не впливають на загальний результат. З іншого боку, автори усвідомлюють необхідність такого аналізу для коректного дослідження деформування тіл з тріщинами не тільки в задачах динаміки, але і при статичному аналізі просторових тіл, що є темою подальшої наукової роботи.

Висновки.

Таким чином, на основі напіваналітичного метода скінченних елементів розроблено ефективний підхід моделювання пошкоджень типу тріщин та визначення на цій основі параметрів тріщиностійкості в задачах змішаного руйнування тіл під дією нестационарних навантажень.

В процесі роботи розроблено нові алгоритми визначення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень на основі прямого та енергетичного методів; створена методика обчислення складників J -інтеграла J_I , J_{II} , та J_{III} , пов'язаних з тріщинами нормального відриву, поперечного та поздовжнього зсуву в задачах змішаного руйнування; вірогідність отриманих результатів і ефективність методики підтвержені розв'язанням контрольних прикладів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень при динамічному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.39-47.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл // КНУБА, 2005, 298с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Особливості визначення J -інтеграла в дискретних моделях метода скінченних елементів. – Опір матеріалів і теорія споруд. – № 76, 2005. – с.86-97.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376с.
5. *Баженов В.А., Солодей І.І., Вабіщевич М.О.* Визначення параметрів механіки руйнування для тіл обертання в нестационарних задачах динаміки // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна / Дніпропетровськ. ДНУЗТ, Вип.39, 2011.-с.7-12.
6. *Гуляр О.І., Солодей І.І., Вабіщевич М.О.* Дослідження вимушених коливань просторових неоднорідних призматичних тіл з тріщинами // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць / Ін-т геотехнічної механіки ім. М.С.Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип.71.-с.170-177
7. *Вабіщевич М.О., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень призматичних тіл з тріщинами при дії динамічного навантаження // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.78, 2006.-с.61-76.
8. *Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І., Сахаров О.С.* Обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень в нестационарних задачах динаміки просторових тіл на основі

- енергетичного підходу // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.83, 2009.-с.93-109.
9. *Solodei I.I., Vabitshevich M.O., Gulyar O.I.* Використання спеціальних скінченних елементів з тріщиною в задачах механіки руйнування при нестационарних динамічних навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.84, 2009.-с.49-64.
 10. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974, 640 с.
 11. *Domínguez, J.; Gallego, R.* Time boundary element method for dynamic stress intensity factor computations. Int. J. Num. Meth. Engn., v.33, n.3, 1992, p.635-647.
 12. *Fedelinski, P; Aliabadi, M.H.; Rooke, D.P.* Boundary element formulation for the dynamic analysis of cracked structures. In: Aliabadi, M. H. (Ed.). Dynamic Fracture Mechanics. Computational Mechanics Publications, 1995.
 13. *Fedelinski P, Aliabadi M.H., Rooke D.P.* A single-region time-domain BEM for dynamic crack problems. Int J Solids Struct 1995;32:3555–71.
 14. *Lin X, Ballmann J.* Re-consideration of Chen's problem by finite difference method. Engng Fract Mech 1993;44(5):735–9.

Стаття надійшла до редакції 14.07.2011 р.

Баженов В.А., Солодей И.И., Вабищевич М.О., Гуляр А.И.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СМЕШАННОГО РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В рамках полуаналитического метода конечных элементов разработана и апробирована методика раздельного вычисления параметров механики разрушения при смешанном разрушении в условиях динамического деформирования исследуемых объектов.

Bazhenov V.A.,

Solodei I.I., Vabitshevich M.O., Gulyar A.I.

DYNAMIC STRESS INTENSITY FACTOR FOR INTERMEDIATE FRACTURE IN THE RANGE OF SEMI-ANALYTICAL FEM

Effective methodology of dynamic stress intensity factor evaluation for intermediate fracture based on semi-analytical FEM is developed. Reliability of computational intelligence and efficiency of mentioned approach are corroborated with the help of test solutions.

УДК 539.375

О.І. Гулярь, д-р техн. наук**О.С. Сахаров**, д-р техн. наук**О.О. Шкриль**, канд. техн. наук**Ю.В. Максим'юк**

МОДИФІКОВАНИЙ ВАРІАНТ МЕТОДА РЕАКЦІЙ В ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

Виконане чисельне обґрунтування можливостей розв'язання двовимірних задач механіки руйнування при фізично та геометрично нелінійному деформуванні та для тіл обертання при використанні модифікованого методу реакцій.

Вступ. В роботі [1] було показано ефективність обчислення J -інтеграла на основі використання вузлових реакцій та переміщень (метод реакцій). В цьому випадку було теоретично доведено його рівність нулю по замкненому контуру, що є фундаментальною властивістю J -інтеграла. В подальшому в роботі [2] було розроблено модифікований варіант методу реакцій, який базується на перемноженні відповідних компонентів реакцій на різницю переміщень в двох вузлах скінчених елементів, що безпосередньо примикають до вершини тріщини. Обчислений таким чином J -інтеграл, який в подальшому буде позначатися як $J(1/2uR)$, для плоских задач при пружному деформуванні тотожно дорівнює результату обчислення методом реакцій по контуру, який позначається $J(PuR)$.

Важливо дослідити можливість використання модифікованого методу реакцій для фізично та геометрично нелінійних задач для тіл обертання, для яких теоретично не доведено його рівність інтегралу, обчисленому по контуру.

Мета даної роботи полягає в чисельному обґрунтуванні достовірності результатів розв'язання вказаного класу двовимірних задач механіки руйнування при використанні модифікованого методу реакцій.

Дослідження ефективності використання модифікованого методу реакцій до вирішення вісесиметричних задач механіки руйнування було проведено на прикладі задачі про розтяг суцільного циліндра діаметром $D=2\text{ см}$ і висотою $3D=6\text{ см}$ з кільцевою тріщиною глибиною $L=0,1; 0,3; 0,5\text{ см}$ (рис. 1). Коефіцієнт Пуассона $\nu=0$, модуль пружності $E=0,1\text{ МПа}$. Ефективність модифікованого методу реакцій порівнювалася з традиційним методом при використанні напружень та градієнтів переміщень (метод напружень, $J(P\sigma\xi)$), як в роботі [2].

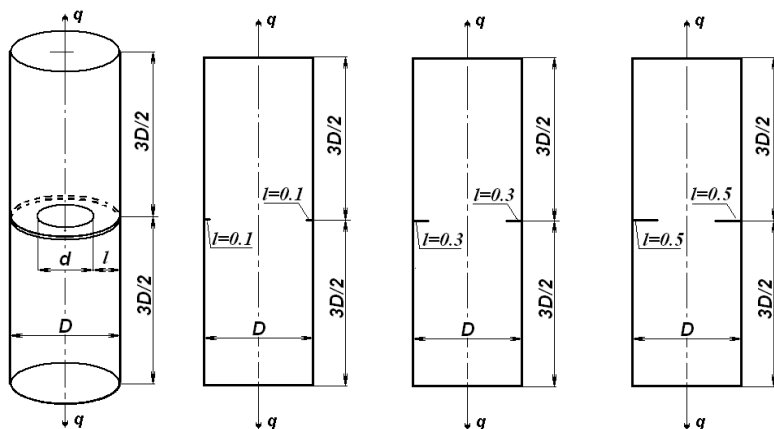


Рис. 1

Як правило, при розв'язанні задач тріщинистості виникає необхідність обчислювати параметри механіки руйнування для однієї тієї ж конструкції з тріщинами різної довжини. Тому необхідним є визначити, який вплив на точність обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН), вносить довжина тріщини. Було, розглянуто довжини тріщини 0.1 см, 0.3 см та 0.5 см. Дослідження збіжності результатів проведено із застосуванням скінченоелементних моделей із кількістю невідомих: 1512 і 2376 (рис. 2).

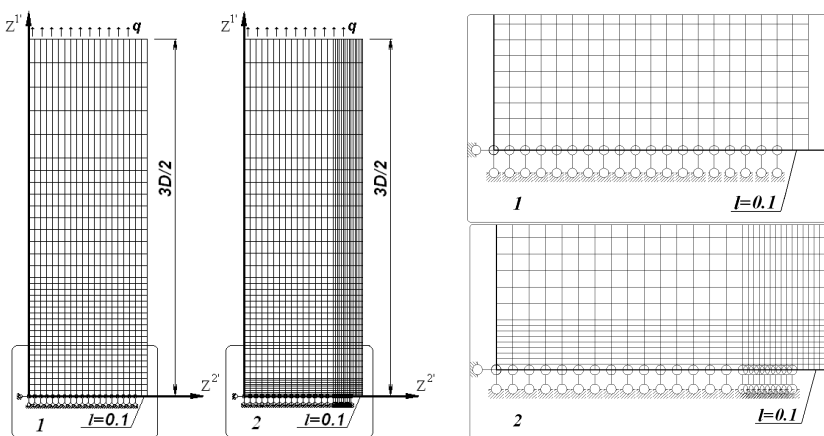


Рис. 2

Аналогічні за структурою і кількістю невідомих скінченоеlementні моделі використовувалися і для тріщин довжиною 0,3 і 0,5 см.

Порівнювалися результати визначення коефіцієнта інтенсивності напружень K модифікованим методом реакцій і методом напружень. В якості еталонного прийнято метод піддатливості результати якого в подальшому будуть позначатися $J\left(\frac{W_2 - W_1}{\Delta l}\right)$. Зв'язок між J - інтегралом і коефіцієнтом інтенсивності напружень K визначається за формулою (1):

$$J = \frac{K^2}{E} (1 - \nu^2). \quad (1)$$

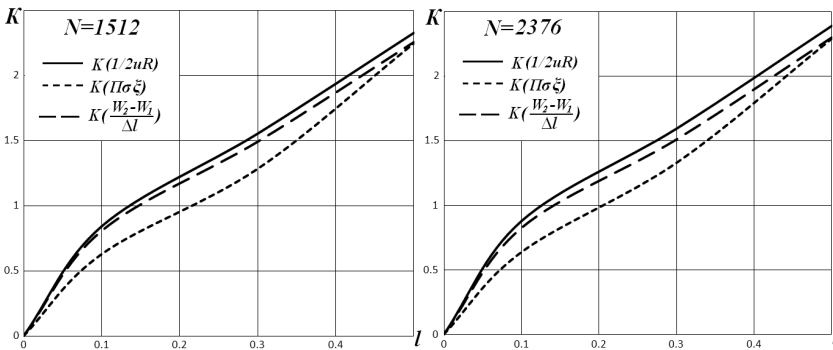


Рис. 3

Наведені на рис. 3 графіки залежності коефіцієнта інтенсивності K від довжини тріщини свідчать, що при обох варіантах скінченоеlementної моделі з істотно різною кількістю невідомих модифікований метод реакцій краще збігається з еталонним.

Таким чином, визначення КІН із використанням методу реакцій дозволяє достовірно обчислювати даний параметр механіки руйнування не тільки для плоских тіл, а й для тіл обертання.

З метою обґрунтування ефективності та достовірності використання модифікованого методу реакцій для обчислення J -інтеграла, в умовах плоскої деформації з урахуванням геометричної нелінійності, було розглянуто тестовий приклад про розтяг нескінченної пластини з тріщиною скінченної довжини $2l=2$ см (рис. 4), дискретна модель якої наведена на рис. 5.

Вихідні дані: розтягуюче зусилля $q = 100$ кг / см²; модуль пружності $E = 10^n$ кг / см² змінюється в інтервалі значень показника ступеня n від 3 до 4, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.333$.

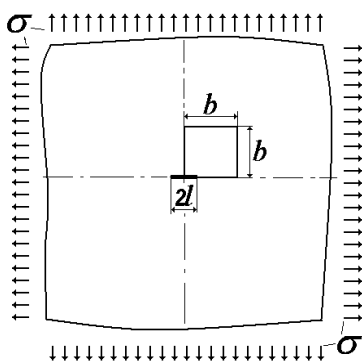


Рис. 4

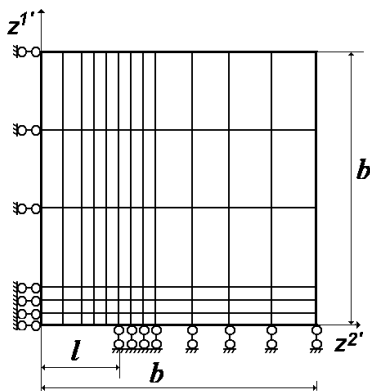


Рис. 5

Наведені на рис. 6 графіки дозволяють зробити висновок, що модифікований і основний варіанти методу реакцій практично співпадають.

Для доведення високої ефективності модифікованого варіанту методу реакцій при розв'язанні задач з урахуванням фізичного та геометрично нелінійного деформування, було розглянуто тестовий приклад про

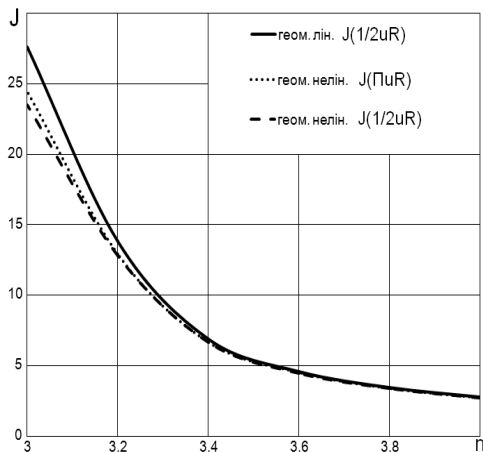


Рис. 6

деформування прямокутної пластини з боковою тріщиною (рис. 7).

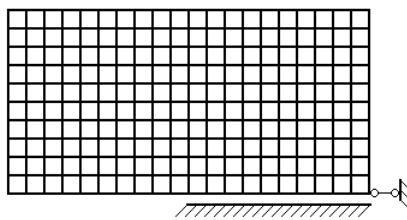
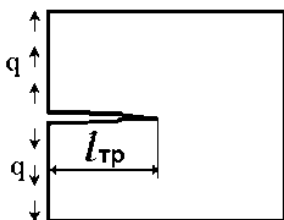


Рис. 7

Матеріал об'єктів – сталь 12Х2МФА, фізико-механічні характеристики якої $E = 2.05 \times 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$ [3]. Закон пластичного деформування має наступний вигляд :

$$\bar{\sigma}/\sigma_m = 1 + 0.645(\bar{\epsilon}_p)^{0.388},$$

де $\sigma_m = 637 \text{ МПа}$ - межа текучості; $\bar{\sigma}$ - інтенсивність нормальних напружень; $\bar{\epsilon}_p$ - інтенсивність деформацій.

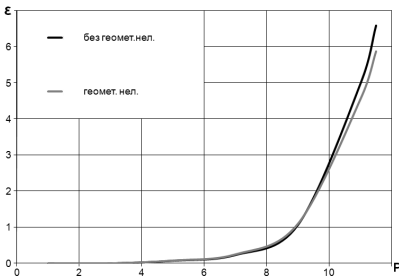


Рис. 8

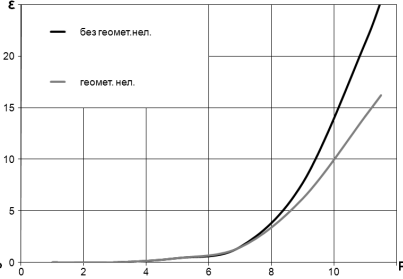


Рис. 9

Розвиток деформацій пластичності при збільшенні навантаження показаний на рис. 8 для плоскої деформації та на рис. 9 для плоско напруженого стану. Графіки залежності J-інтеграла від рівня навантаження показані на рис. 10,11 відповідно для плоскої деформації та для плоско напруженого стану.

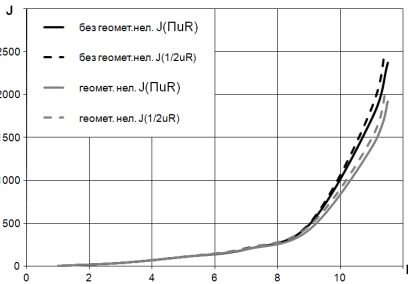


Рис. 10

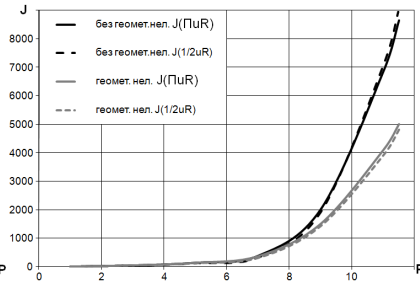


Рис. 11

Наведені результати показують, що як для плоско деформованого так і для плоско напруженого станів розв'язки задач в пружнопластичній постановці отримані модифікованим $J(1/2uR)$ і основним $J(PuR)$ методом

реакцій практично збігаються між собою. Аналогічні результати отримані у випадку врахування геометричної нелінійності.

Таким чином, можна зробити висновок, що модифікований метод реакцій може бути застосований для визначення параметрів механіки руйнування в тілах обертання та в геометрично і фізично нелінійних задачах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Особливості визначення J -інтеграла в дискретних моделях метода скінченних елементів. – Опір матеріалів і теорія споруд. 2005. № 76. – С. 86-97.
2. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Максим'юк Ю.В.* Визначення J -інтеграла при скінченноелементному розв'язанні задач змішаного руйнування // Опір матеріалів і теорія споруд. 2008. № 82 – С.109-123.
3. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 1980. – 256 с.

Стаття надійшла до редакції 06.07.2011 р.

Гуляр А.И., Сахаров А.С., Шкріль А.А. Максимюк Ю.В.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА РЕАКЦИЙ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Выполнено численное обоснование возможностей решения двумерных задач механики разрушения при физически и геометрически нелинейном деформировании и для тел вращения при использовании модифицированного метода реакций.

Guliar A.I., Sakharov O.O., Shkryl' O.O., Maksymiuk Y.V

MODIFIED VARIANT OF REACTIONS METHOD FOR TWO-DIMENSIONAL FRACTURE MECHANICS PROBLEMS

The numeral ground of possibilities of decision two-dimensional fracture mechanics problems for physically and geometrically nonlinear deformation and bodies of rotation using of the modified reactions method has been made.

УДК 539.375

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук
С.О. Пискунов, д-р техн. наук
О.О. Шкріль, канд. техн. наук
Д.В. Богдан

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД РЕАКЦІЙ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ J-ІНТЕГРАЛА В ЗАДАЧАХ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ

Розглянута реалізація на основі напіваналітичного методу скінченних елементів методики визначення J-інтеграла модифікованим методом реакцій в призматичних тілах з поперечними та поздовжніми тріщинами. Ефективність методики підтверджено розв'язанням тестових задач.

Розв'язання задач механіки руйнування потребує обчислення параметрів механіки руйнування. Найбільшого застосування з них здобув J-інтеграл Черепанова-Райса. Обчислення J-інтеграла в дискретних моделях методу скінченних елементів (МСЕ) доцільно виконувати методом реакцій [2-5].

Ефективність реалізації методу реакцій в двовимірних задачах тіл з поздовжніми тріщинами в умовах пружнопластичного деформування, та для просторових тіл з поперечними тріщинами в умовах пружного деформування досліджена в роботах [2-5]. Тому актуальним є продовження дослідження ефективності методу реакцій в просторових задачах тіл з поперечними і поздовжніми тріщинами в умовах пружнопластичного деформування.

Згідно методу реакцій, формула обчислення контурного J-інтеграла в дискретній моделі МСЕ за умов пружного деформування може бути зведена до більш спрощеного вигляду [4,5], де поняття контуру відсутнє:

$$J = J_I + J_{II} = \frac{1}{2\Delta l} \left(R_{V_1} \cdot (u_{S_1} - u_{S_1}') + R_{V_2} \cdot (u_{S_2} - u_{S_2}') \right), \quad (1)$$

де R_{V_1} , R_{V_2} - вузлові реакції у вершині тріщини V_i' ; u_{S_1} , u_{S_1}' - вузлові переміщення найближчих до вершини тріщини вузлів S та S' на поверхні тріщини (індекси 1,2 позначають напрямки вісей місцевої системи координат CE , рис. 1).

В подальшому обчислення J-інтеграла за формулою (1) будемо називати модифікованим методом реакцій. Реалізація модифікованого методу реакцій порівняно з процедурою обчислення методом реакцій за

контуром, потребує значно менших обчислювальних витрат. В задачах пружного деформування тіл з тріщинами, значення J-інтеграла обчислені модифікованим та звичайним методами реакцій співпадають. Становить інтерес наскільки будуть відрізнятися результати застосування двох варіантів реалізації методу реакцій з появою та розвитком пружнопластичних деформацій.

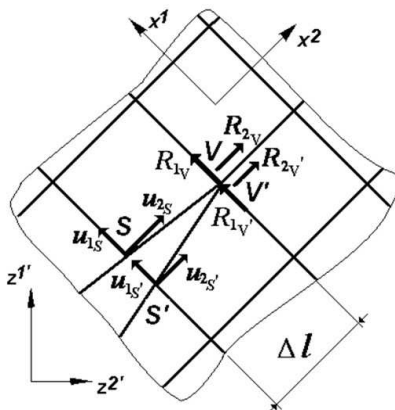


Рис. 1. Компоненти вектора вузлових реакцій та переміщень в околі вершини тріщини для обчислення J-інтеграла за (1)

Скінченноелементне моделювання напружено-деформованого стану призматичних тіл здійснено на основі напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) [1]. Чисельне моделювання процесу пружнопластичного деформування здійснюється на основі крокового блочно-ітераційного алгоритму [1,2].

Апробація розробленої методики визначення J-інтеграла методом реакцій виконувалась на задачах про розтяг призматичного тіла з центральною тріщиною та згин призматичного тіла з боковим надрізом.

Матеріал розглядуваних об'єктів - сталь 12Х2МФА, для якої $E = 2,05 \times 10^{11} \text{ Па}$; $\nu = 0,3$. Закон пружнопластичного деформування прийнятий у вигляді:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_m} = 1 + 0.645(\bar{\epsilon}_p)^{0.388},$$

де $\sigma_m = 637 \text{ МПа}$ – межа текучості; $\bar{\sigma}$ – інтенсивність нормальних напружень; $\bar{\epsilon}_p$ – інтенсивність деформацій [6].

Для призматичного тіла з центральною тріщиною (рис. 2,a), враховуючи симетрію, розрахункова схема складена для його чверті(рис.

2,б). Почергово розглядалися варіанти дискретних моделей з повздовжнім та поперечним розташуванням тріщини (рис. 3). Зовнішнє навантаження на рис. 3,а орієнтовано вздовж осі $z^{1'}$, на рис. 3,б - вздовж осі $z^{3'}$.

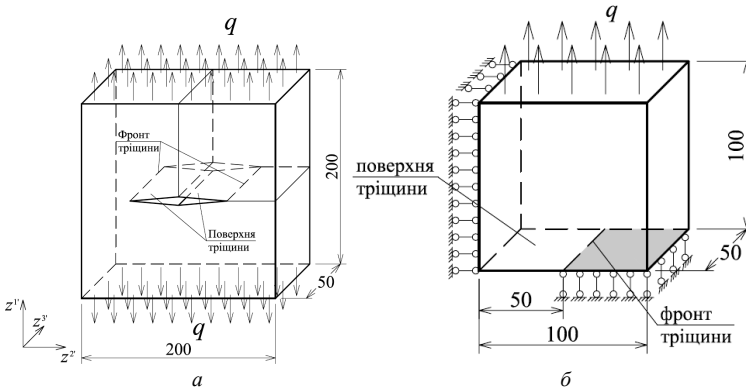


Рис. 2. Призматичне тіло з центральною тріщиною (а) і його розрахункова схема (б)

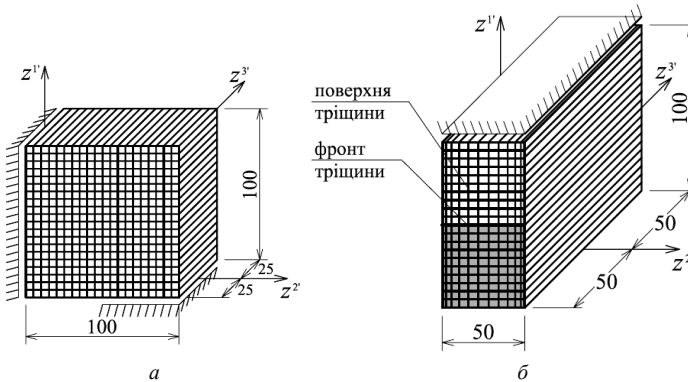


Рис. 3. Дискретні моделі призматичного тіла з поздовжньою (а) та поперечною (б) тріщиною

Розв'язання задачі проводилось до моменту появи в околі фронту тріщини пластичних деформацій на рівні 7%. Результати у вигляді залежності величини J -інтеграла від прикладеного навантаження отримані звичайним (J -пUR) та модифікованим (J -1/2UR) показані на рис. 4. Як видно, із збільшенням рівня пластичних деформацій, збільшується різниця між значеннями J -інтеграла обчисленими в центрі ($z^{3'} = 0$ на рис. 3,а) та на краю ($z^{3'} = \pm 25$ на рис. 3,а) фронту тріщини (рис. 4). Значення

J-інтеграла, отримані при поданні тріщини як поздовжньої так і поперечної збігаються між собою.

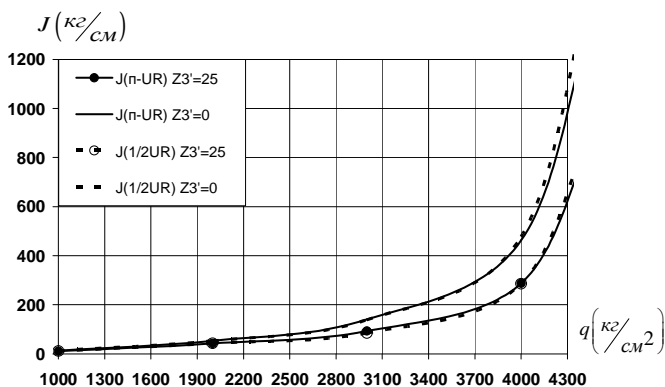


Рис. 4. Залежність J-інтеграла від рівня навантаження

Аналогічні дослідження були проведені на задачі про згин призматичного тіла з боковим надрізом в умовах пружнопластичного деформування (рис. 5,а). Із врахуванням симетрії розрахункова схема складена для половини тіла (рис. 5,б) Дискретні моделі для випадків поздовжньої та поперечної тріщин показані на рис. 6.

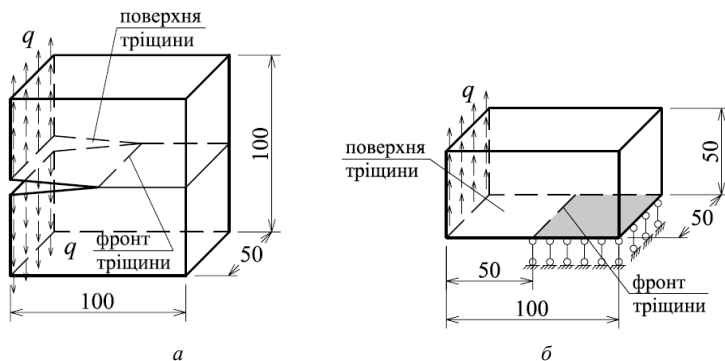


Рис. 5. Призматичне тіло з боковим надрізом (а) і його розрахункова схема (б)

Розв'язання задачі проводилось до моменту появи в в околі фронту тріщини пружнопластичних деформацій на рівні 6%. Результати показали, що із збільшенням рівня навантаження, порівняно з попереднім прикладом, різниця між значеннями J-інтеграла, обчисленими в центрі

($z^{3'} = 0$ на рис. 6,а) та на краю ($z^{3'} = \pm 25$ на рис. 6,а) фронту тріщини є більш суттєвою (рис. 7). Значення J-інтеграла, отримані при розгляданні тріщини як поздовжньої так і поперечної збігаються між собою.

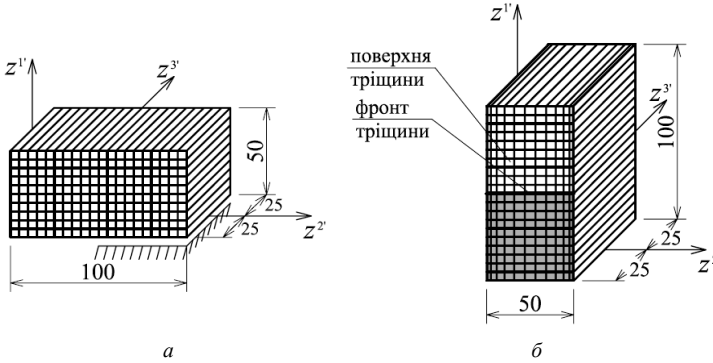


Рис. 6. Дискретні моделі призматичного тіла з поздовжньою (а) та поперечною (б) тріщиною

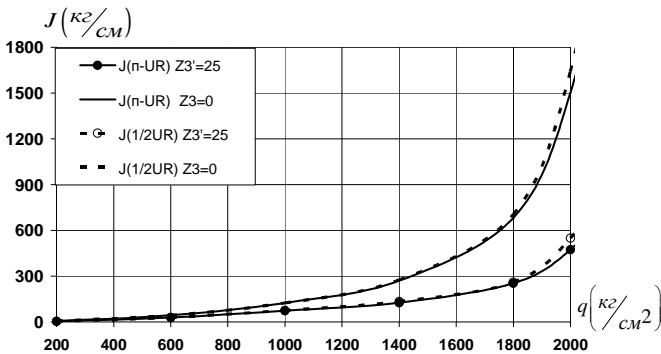


Рис. 7. Залежність J-інтеграла від рівня навантаження

Таким чином застосування методу реакцій дозволяє отримувати вірогідні значення J-інтеграла в призматичних тілах як з поперечними, так і поздовжніми тріщинами в умовах як пружного, так і пружнопластичного деформування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О. Богдан Д.В.* Ефективність визначення J-інтеграла в задачах пружнопластичного деформування// Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2010.- Вип. 86.- С. 3-17.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О.* Особливості визначення J-інтеграла для дискретних моделей метода скінчених елементів// Опір матеріалів і теорія споруд, № 77, 2005, С.43–64
4. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкріль О.О., Богдан Д.В.* Ефективність методу реакцій для призматичних тіл з поперечними тріщинами// Опір матеріалів і теорія споруд, № 87, 2011, С.3–12
5. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкріль А.А., Максимюк Ю.В.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Методика определения инвариантного J-интеграла в дискретных моделях МКЭ // Проблемы прочности, 2011. – №2.– С.24–39
6. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука. – 1980. – 256 с.

Стаття надійшла до редакції 14.03.2011 р.

Баженов В.А., Гуляр А.І., Пискунов С. О., Шкріль А.А., Богдан Д.В.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕАКЦИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ J-ИНТЕГРАЛА В ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Рассмотрена реализация на основе полуаналитического метода конечных элементов методики вычисления J-интеграла модифицированным методом реакций в призматических телах с поперечными и продольными трещинами. Эффективность методики подтверждена решением тестовых задач.

Bazhenov V., Gulyar A., Piskunov S., Shkril' A., Bogdan D.

THE MODIFIED REACTIONS METHOD FOR DETERMINING OF J-INTEGRAL IN ELASTOPLASTIC DEFORMATION PROBLEMS OF THE PRISMATIC SPACE BODIES

Realization on the basis of a semi-analytical finite elements method a technique of J-integral calculation by the modified method of reactions in prismatic bodies with cross-section and longitudinal cracks is considered. Efficiency of a technique is confirmed with the solution of test tasks.

УДК 539.3

А.М. Станкевич, канд. техн. наук

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук

Л.Т. Шкельов, канд. техн. наук

МЕТОД ПРЯМИХ У ПРОСТОРОВІЙ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Методика зниження вимірності рівнянь плоскої задачі теорії пружності з подальшим розв'язанням одновимірної граничної задачі методом С.К. Годунова, запропонована в роботі [1], поширюється на тривимірну задачу. Всі перетворення суттєво використовують індексну форму запису, термінологію та основні формальні принципи тензорного числення. Отримано систему розв'язувальних одновимірних рівнянь та граничні умови загального вигляду. Поставлена гранична задача розв'язується високоефективним чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Розглядається брус прямокутного поперечного перерізу, що є прямокутним паралелепіпедом, три характерні розміри якого співрозмірні. Брус віднесений до декартової системи координат і займає область тривимірного простору $\Omega = [0, l] \times [0, h_y] \times [0, h_z]$. Напружено-деформований стан бруса описується рівняннями просторової задачі теорії пружності, які можна записати у формі системи диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку відносно компонентів вектора переміщень U, V, W і тензора напружень $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}, \sigma_{zz}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial x} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial V^*}{\partial y} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial W^*}{\partial z}; \\ \frac{\partial V^*}{\partial x} &= \tau_{xy} - \frac{\partial V^*}{\partial y}; \quad \frac{\partial W^*}{\partial x} = \tau_{xz} - \frac{\partial W^*}{\partial z}; \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - X; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - Y; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - Z, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial V^*}{\partial y} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial W^*}{\partial z}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial V^*}{\partial y} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial W^*}{\partial z};$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial W^*}{\partial y} + \frac{\partial V^*}{\partial z}. \quad (2)$$

Тут $U^* = \mu U$, $V^* = \mu V$, $W^* = \mu W$; λ, μ - коефіцієнти Ламе, X, Y, Z - об'ємні сили, в рівняннях враховується закон парності дотичних напружень.

На кожній з шести граничних площин розглядаються граничні умови загального вигляду (рис. 1), які дозволяють розглядати кінематичні, статичні та мішані умови. Кожна точка зовнішніх граней бруса прикріплена до відповідної точки оточуючого середовища трьома пружними стержнями заданої жорсткості r . Ця точка оточуючого середовища може зміщуватися на задані переміщення Δ у трьох координатних напрямках. До точки зовнішньої грані бруса може бути прикладене розподілене навантаження \vec{q} . Для всіх величин, що увійдуть до граничних умов, прийнято позначення за допомогою трьох індексів, які ідентифікують грань бруса, в точках якої ці величини розглядаються.

Перший нижній індекс визначає вісь, якою визначається ця величина; другий нижній індекс визначає нормаль до відповідної грані, верхній індекс для торцевих граней 0 або l визначає грань за її координатою по осі OX , для бокових граней + або - відповідає знаку зовнішньої нормалі на цій грані. На всіх гранях додатні напрямки навантажень та осадок співпадають з додатними напрямками відповідних осей.

Відповідні граничні умови впливають з рівнянь рівноваги (рис. 2) і тому є природними граничними умовами. Вони мають вигляд:
при $x = 0$

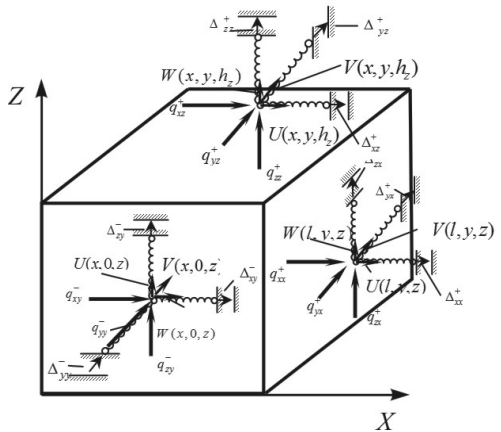


Рис. 1. Умови закріплення та навантаження бруса

$$\begin{aligned}r_{xx}^0 U(0, y, z) - \sigma_{xx}(0, y, z) &= r_{xx}^0 \Delta_{xx}^0(y, z) + q_{xx}^0(y, z), \\r_{yx}^0 V(0, y, z) - \tau_{yx}(0, y, z) &= r_{yx}^0 \Delta_{yx}^0(y, z) + q_{yx}^0(y, z), \\r_{zx}^0 W(0, y, z) - \tau_{zx}(0, y, z) &= r_{zx}^0 \Delta_{zx}^0(y, z) + q_{zx}^0(y, z),\end{aligned}$$

при $x = l$

$$\begin{aligned}r_{xx}^l U(l, y, z) + \sigma_{xx}(l, y, z) &= r_{xx}^l \Delta_{xx}^l(y, z) + q_{xx}^l(y, z), \\r_{yx}^l V(l, y, z) + \tau_{yx}(l, y, z) &= r_{yx}^l \Delta_{yx}^l(y, z) + q_{yx}^l(y, z), \\r_{zx}^l W(l, y, z) + \tau_{zx}(l, y, z) &= r_{zx}^l \Delta_{zx}^l(y, z) + q_{zx}^l(y, z),\end{aligned} \quad (3)$$

На бокових гранях:

при $y = 0$

$$\begin{aligned}r_{xy}^- U(x, 0, z) - \tau_{xy}(x, 0, z) &= r_{xy}^- \Delta_{xy}^-(x, z) + q_{xy}^-(x, z), \\r_{yy}^- V(x, 0, z) - \sigma_{yy}(x, 0, z) &= r_{yy}^- \Delta_{yy}^-(x, z) + q_{yy}^-(x, z), \\r_{zy}^- W(x, 0, z) - \tau_{zy}(x, 0, z) &= r_{zy}^- \Delta_{zy}^-(x, z) + q_{zy}^-(x, z),\end{aligned}$$

при $y = h_y$

$$\begin{aligned}r_{xy}^+ U(x, h_y, z) + \tau_{xy}(x, h_y, z) &= r_{xy}^+ \Delta_{xy}^+(x, z) + q_{xy}^+(x, z), \\r_{yy}^+ V(x, h_y, z) + \sigma_{yy}(x, h_y, z) &= r_{yy}^+ \Delta_{yy}^+(x, z) + q_{yy}^+(x, z), \\r_{zy}^+ W(x, h_y, z) + \tau_{zy}(x, h_y, z) &= r_{zy}^+ \Delta_{zy}^+(x, z) + q_{zy}^+(x, z),\end{aligned}$$

при $z = 0$

$$\begin{aligned}r_{xz}^- U(x, y, 0) - \tau_{xz}(x, y, 0) &= r_{xz}^- \Delta_{xz}^-(x, y) + q_{xz}^-(x, y), \\r_{yz}^- V(x, y, 0) - \tau_{yz}(x, y, 0) &= r_{yz}^- \Delta_{yz}^-(x, y) + q_{yz}^-(x, y), \\r_{zz}^- W(x, y, 0) - \sigma_{zz}(x, y, 0) &= r_{zz}^- \Delta_{zz}^-(x, y) + q_{zz}^-(x, y),\end{aligned}$$

при $z = h_z$

$$\begin{aligned}r_{xz}^+ U(x, y, h_z) + \tau_{xz}(x, y, h_z) &= r_{xz}^+ \Delta_{xz}^+(x, y) + q_{xz}^+(x, y), \\r_{yz}^+ V(x, y, h_z) + \tau_{yz}(x, y, h_z) &= r_{yz}^+ \Delta_{yz}^+(x, y) + q_{yz}^+(x, y), \\r_{zz}^+ W(x, y, h_z) + \sigma_{zz}(x, y, h_z) &= r_{zz}^+ \Delta_{zz}^+(x, y) + q_{zz}^+(x, y).\end{aligned} \quad (4)$$

Якщо в якомусь із співвідношень (3), (4) покласти $r = 0$, то отримаємо статичну граничну умову, а при $r \rightarrow \infty$ умова буде кінематичною, якщо ж $r \neq 0$, то це буде мішана гранична умова. При чисельній реалізації граничних умов на торцях граничні умови необхідно перетворити, поділивши кожне із співвідношень (3) на $\sqrt{1+r^2}$, де r розглядається із відповідними індексами, наприклад (5):

$$\frac{r_{xx}^0}{\sqrt{1+(r_{xx}^0)^2}} U(0, y, z) - \frac{1}{\sqrt{1+(r_{xx}^0)^2}} \sigma_{xx}(0, y, z) = \frac{r_{xx}^0}{\sqrt{1+(r_{xx}^0)^2}} \Delta_{xx}^0 + \frac{1}{\sqrt{1+(r_{xx}^0)^2}} q_{xx}^0.$$

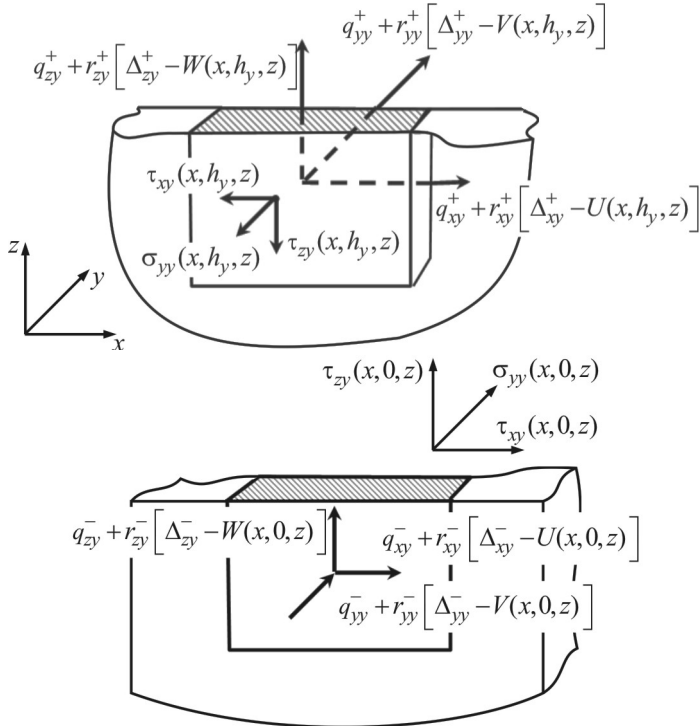


Рис.2. До умов рівноваги на гранях

Саме для граничних умов у такому вигляді не виникає ускладнень при граничному переході $r_{xx}^0 \rightarrow \infty$.

Для розв'язання граничної задачі (1) – (4) пропонується скористатися комбінованим підходом: на першому етапі знижується вимірність граничної задачі по двох координатах, а на другому - редуковану задачу, яка буде граничною задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь, розв'язувати чисельно за допомогою ефективного чисельно стійкого методу дискретної ортогоналізації С.К.Годунова. Для зниження вимірності вихідних рівнянь по двох координатах, а саме по y та z , скористаємося ідеєю методу прямих, узагальненого в роботі [1].

Розбиваючи відрізок $[0, h_y]$ на $(m-1)$ однакових ділянок, отримуємо m точок, включно з двома граничними і через кожну таку точку проведемо m площин, паралельних координатній площині XOZ . Аналогічно через n точок на відрізку $[0, h_z]$ проведемо n площин, паралельних координатній площині XOZ . У перетині цих площин утворюється сукупність $m \times n$ прямих, паралельних осі OX .

У кожному поперечному перерізі бруса маємо сітку з $m \times n$ точок. Це дає змогу визначити $m \times n$ базисних функцій, кожна з яких є добутком $\Psi_{ik}(y, z) = \varphi_i(y) \cdot \varphi_k(z)$, де функції $\varphi_i(y)$ визначені в роботі [1], а функції $\varphi_k(z)$ - аналогічні функції, тільки залежні від координати z . Оскільки функції $\Psi_{ik}(y, z)$ визначені на прямокутнику $[0, h_y] \times [0, h_z]$ і є добутками двох функцій однієї змінної, то розглядаючи подвійні інтеграли з цими функціями, як добутками двох множників у підінтегральних виразах, необхідно зазначити, що ці подвійні інтеграли обчислюються як двократні – спочатку по одній змінній (наприклад y), а потім по іншій. Оскільки застосування методики зниження вимірності, розвиненої в роботі [1] пов'язане з індексною формою запису, а тут зниження вимірності буде по двох змінних, то для індексів, пов'язаних з базисними функціями по координаті y , будемо використовувати індекси $i, j, \alpha, \beta, \gamma$, які змінюються від 1 до m , а для індексів, пов'язаних з базисними функціями по координаті z – індекси $k, l, \varepsilon, \eta, \theta$, що змінюються від 1 до n . Оскільки базисні функції не ортогональні, то необхідно використовувати метричні тензори, причому це можна робити по координатам y та z окремо. Тому визначимо ці тензори:

двічі коваріантний метричний тензор

$$g_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y)) = \int_0^{h_y} \varphi_i(y) \cdot \varphi_j(y) dy,$$

та двічі контраваріантний метричний тензор g^{ij} , що визначається співвідношенням

$$(g^{ij} \cdot g_{j\alpha}) = \delta^i_{\alpha},$$

де δ^i_{α} - символ Кронекера, або мішаний метричний тензор. Аналогічно:

$$g_{kl} = (\varphi_k(z), \varphi_l(z)) = \int_0^{h_z} \varphi_k(z) \cdot \varphi_l(z) dz, \quad g^{kl} : (g^{kl} \cdot g_{l\varepsilon}) = \delta^k_{\varepsilon}.$$

Тут і далі по індексах, що повторюються, передбачається підсумування. Будемо також використовувати матриці:

$$\{b_{ij}\} = (\varphi_i(y), \varphi_j'(z)), \{b_{kl}\} = (\varphi_k(z), \varphi_l'(z)),$$

де штрихом позначено похідну по відповідній координаті.

Використовуючи далі поняття коефіцієнтів та моментів відносно вибраних базисних функцій будемо розрізняти їх по координаті y та координаті z і позначати відповідно розташованими індексами – коефіцієнти (контраваріантні компоненти) позначаємо індексами вгорі, моменти (коваріантні компоненти) позначаємо індексами унизу і так окремо по координаті y та координаті z .

Помноживши скалярно перше рівняння системи (1) на базисну функцію $\psi_{ik}(y, z)$ за правилом:

$$(f(x, y, z), \psi_{ik}(y, z)) = \int_0^{h_z} \left(\int_0^{h_y} f(x, y, z) \cdot \varphi_i(y) \right) \varphi_k(z) dz = f^{ik}(x),$$

помічаємо, що ці викладки еквівалентні послідовному застосуванню перетворень по одній координаті, які досліджені в [1]. У результаті отримуємо:

$$\frac{dU_{ik}^*}{dx} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xik} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} V_{\cdot k}^{*j} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{kl} W_{i \cdot}^{*l}. \quad (6)$$

Оскільки при інтегруванні виразів з похідними по y та z з'являються індекси різного рівня, то необхідно побудувати рівняння з невідомими, які мають однакову структуру. Оскільки ліворуч $U_{ik}^*(x)$ отримане в моментах по y (нижній індекс i) та z (нижній індекс k), то необхідно, щоб усі невідомі були в моментах по обох індексах. З цією метою застосуємо операцію опускання індексів за допомогою двічі контраваріантного метричного тензора. У результаті отримаємо:

$$\frac{dU_{ik}^*}{dx} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xik} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V_{\alpha k}^* - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{kl} g^{l\epsilon} W_{i\epsilon}^*. \quad (7)$$

Аналогічно отримаємо ще два рівняння

$$\frac{dV_{ik}^*}{dx} = \tau_{xyik} - b_{ij} g^{j\alpha} U_{\alpha k}^*, \quad (8)$$

$$\frac{dW_{ik}^*}{dx} = \tau_{xzik} - b_{kl} g^{l\epsilon} U_{i\epsilon}^*. \quad (9)$$

Наступні три рівняння системи (1) статичні. Зниження вимірності цих рівнянь має деякі особливості – до них входять похідні від напружень по

координатах y та z (за якими іде редукування), тому безпосереднє обчислення відповідних інтегралів так, як зроблено для похідних по y та z від переміщень, неприпустиме. Тут необхідно застосувати інтегрування частинами, щоб похідна по y або z під інтегралом бралася від базисної функції, а потім для обчислення інтеграла відповідне напруження можна розкласти по базисних функціях. У результаті таких дій отримаємо:

$$\frac{d\sigma_{xik}}{dx} = -[\tau_{xyk} \varphi_i(y) \Big|_0^{h_y} - b_{ji} \tau_{xy \cdot k}^j] - [\tau_{xzi} \varphi_k(z) \Big|_0^{h_z} - b_{lk} \tau_{xzi \cdot}^l] - X_{ik}. \quad (10)$$

Оскільки:

$$\tau_{xyk}(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^{h_y} = \tau_{xyk}(x, h_y) \cdot \varphi_i(h_y) - \tau_{xyk}(x, 0) \cdot \varphi_i(0),$$

а

$$\varphi_i(h_y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = m \\ 0, & \text{при інших } i \end{cases}, \quad \varphi_i(0) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = 1 \\ 0, & \text{при інших } i \end{cases}$$

і відповідні співвідношення мають місце для $\varphi_k(n)$ та $\varphi_k(0)$, то

$$\tau_{xyk}(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^{h_y} = \begin{bmatrix} -\tau_{xy \cdot k}^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau_{xy \cdot k}^m \end{bmatrix}, \quad \tau_{xzi}(x, z) \cdot \varphi_k(z) \Big|_0^{h_z} = \begin{bmatrix} -\tau_{xzi \cdot}^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau_{xzi \cdot}^m \end{bmatrix},$$

де позначимо $\tau_{xy \cdot k}^1 = \tau_{xyk}(x, 0)$, $\tau_{xy \cdot k}^m = \tau_{xyk}(x, h_y)$, $\tau_{xzi \cdot}^1 = \tau_{xzi}(x, 0)$, $\tau_{xzi \cdot}^m = \tau_{xzi}(x, h_z)$.

З граничних умов (4), домножуючи їх на $\varphi_i(y)$ або $\varphi_k(z)$ та інтегруючи по відповідній координаті, знаходимо:

$$\begin{aligned} \tau_{xy \cdot k}^1(x) &= r_{xy}^- U_{\cdot k}^1(x) - r_{xy}^- \Delta_{xyk}^-(x) - q_{xyk}^-(x), \\ \tau_{xy \cdot k}^m(x) &= -r_{xy}^+ U_{\cdot k}^m(x) + r_{xy}^+ \Delta_{xyk}^+(x) + q_{xyk}^+(x), \\ \tau_{xzi \cdot}^1(x) &= r_{xz}^- U_{i \cdot}^1(x) - r_{xz}^- \Delta_{xzi}^-(x) - q_{xzi}^-(x), \\ \tau_{xzi \cdot}^m(x) &= -r_{xz}^- U_{i \cdot}^m(x) + r_{xz}^+ \Delta_{xzi}^+(x) + q_{xzi}^+(x). \end{aligned}$$

Враховуючи, що $r \cdot U = r^* \cdot U^*$ та $r \cdot \Delta = r^* \cdot \Delta^*$, якщо позначити $r^* = \frac{r}{\mu}$, а $U^* = \mu \cdot U$, $\Delta^* = \Delta \cdot \mu$ аналогічно для всіх переміщень, то

остаточно рівняння (10) буде таким:

$$\frac{d\sigma_{xik}}{dx} = \begin{bmatrix} r_{xy}^{*-} \cdot U_{jk}^{*1} + r_{xz}^{*-} \cdot U_{il}^{*1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{xy}^{*+} \cdot U_{jk}^{*m} + r_{xz}^{*+} \cdot U_{il}^{*n} \end{bmatrix} + b_{ji} \tau_{xyk}^j + b_{lk} \tau_{xzi}^l - X_{ik} - \begin{bmatrix} r_{xy}^{*-} \cdot \Delta_{xyk}^{*-} + r_{xz}^{*-} \cdot \Delta_{xzi}^{*-} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{xy}^{*+} \cdot \Delta_{xyk}^{*+} + r_{xz}^{*+} \cdot \Delta_{xzi}^{*+} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{xyk}^- + q_{xzi}^- \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_{xyk}^+ + q_{xzi}^+ \end{bmatrix}.$$

Опускаючи верхні індекси у всіх невідомих, остаточно отримаємо:

$$\frac{d\sigma_{xik}}{dx} = \begin{bmatrix} r_{xy}^{*-} \cdot g^{1j} \cdot U_{jk}^{*} + r_{xz}^{*-} \cdot g^{1l} \cdot U_{il}^{*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{xy}^{*+} \cdot g^{mj} \cdot U_{jk}^{*} + r_{xz}^{*+} \cdot g^{nl} \cdot U_{il}^{*} \end{bmatrix} + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha k} + b_{lk} g^{l\epsilon} \tau_{xzi\epsilon} - \bar{X}_{ik}, \quad (11)$$

де \bar{X}_{ik} позначено суму вільних членів.

Аналогічно з двох останніх рівнянь системи (1) отримаємо два тензорних рівняння:

$$\frac{d\tau_{xyik}}{dx} = \begin{bmatrix} r_{yy}^{*-} \cdot g^{1j} \cdot V_{jk}^{*} + r_{yz}^{*-} \cdot g^{1l} \cdot V_{il}^{*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{yy}^{*+} \cdot g^{mj} \cdot V_{jk}^{*} + r_{yz}^{*+} \cdot g^{nl} \cdot V_{il}^{*} \end{bmatrix} + b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{y\alpha k} + b_{lk} g^{l\epsilon} \tau_{yzi\epsilon} - \bar{Y}_{ik},$$

$$\frac{d\tau_{xzik}}{dx} = \begin{bmatrix} r_{zy}^{*-} \cdot g^{1j} \cdot W_{jk}^{*} + r_{zz}^{*-} \cdot g^{1l} \cdot W_{il}^{*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{zy}^{*+} \cdot g^{mj} \cdot W_{jk}^{*} + r_{zz}^{*+} \cdot g^{nl} \cdot W_{il}^{*} \end{bmatrix} + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{yz\alpha k} + b_{lk} g^{l\epsilon} \sigma_{z\epsilon i} - \bar{Z}_{ik},$$

де позначено:

$$\bar{Y}_{ik} = Y_{ik} + \begin{bmatrix} r_{yy}^{*-} \cdot \Delta_{yyk}^{*-} + r_{yz}^{*-} \cdot \Delta_{yzi}^{*-} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{yy}^{*+} \cdot \Delta_{yyk}^{*+} + r_{yz}^{*+} \cdot \Delta_{yzi}^{*+} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{yyk}^{-} + q_{yzi}^{-} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_{yyk}^{+} + q_{yzi}^{+} \end{bmatrix},$$

$$\bar{Z}_{ik} = Z_{ik} + \begin{bmatrix} r_{zy}^{*-} \cdot \Delta_{zyk}^{*-} + r_{zz}^{*-} \cdot \Delta_{zzi}^{*-} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{zy}^{*+} \cdot \Delta_{zyk}^{*+} + r_{zz}^{*+} \cdot \Delta_{zzi}^{*+} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{zyk}^{-} + q_{zzi}^{-} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_{zyk}^{+} + q_{zzi}^{+} \end{bmatrix} \dots$$

До цих двох рівнянь алгебраїчно входять моменти напружень σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{yz} , які можна виключити з цих рівнянь і тоді ми отримаємо замкнену систему. З цією метою проінтегруємо перші два співвідношення (2), як це робилось для побудови рівнянь (7), (8), (9):

$$\sigma_{yyik} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{dU_{ik}^*}{dx} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V_{\alpha k}^* + \frac{\lambda}{\mu} b_{kl} g^{l\epsilon} W_{i\epsilon}^*,$$

$$\sigma_{zzik} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{dU_{ik}^*}{dx} + \frac{\lambda}{\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V_{\alpha k}^* + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} b_{kl} g^{l\epsilon} W_{i\epsilon}^*.$$

Виключаючи з цих рівнянь $\frac{dU_{ik}^*}{dx}$, за допомогою рівняння (7) отримаємо алгебраїчні співвідношення:

$$\sigma_{yyik} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xik} + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V_{\alpha k}^* + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{kl} g^{l\epsilon} W_{i\epsilon}^*,$$

$$\sigma_{zzik} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{xik} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} V_{\alpha k}^* + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{kl} g^{l\epsilon} W_{i\epsilon}^*. \quad (a)$$

Відповідне співвідношення для τ_{yz} отримується безпосередньо:

$$\tau_{yzik} = b_{ij} g^{j\alpha} W_{\alpha k}^* + b_{kl} g^{l\epsilon} V_{i\epsilon}^*. \quad (b)$$

Виключаючи σ_{yyik} , σ_{zzik} , τ_{yzik} з останніх двох тензорних диференціальних рівнянь, отримаємо:

$$\frac{d\tau_{xyik}}{dx} = \begin{bmatrix} r_{yy}^{*-} \cdot g^{1j} \cdot V_{jk}^* + r_{yz}^{*-} \cdot g^{1l} \cdot V_{jk}^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{yy}^{*+} \cdot g^{mj} \cdot V_{jk}^* + r_{yz}^{*+} \cdot g^{nl} \cdot V_{il}^* \end{bmatrix} + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} V_{\gamma k}^* +$$

$$+ b_{lk} g^{\eta l} b_{\eta\epsilon} g^{\epsilon\theta} V_{i\theta}^* + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{\alpha j} b_{kl} g^{l\epsilon} W_{\alpha\epsilon}^* +$$

$$+ b_{lk} g^{l\epsilon} b_{ij} g^{j\alpha} W_{\alpha\epsilon}^* + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{\alpha j} \sigma_{x\alpha k} - \bar{Y}_{ik}, \quad (12)$$

$$\frac{d\tau_{xzik}}{dx} = \begin{bmatrix} r_{yy}^{*-} \cdot g^{1j} \cdot W_{jk}^* + r_{yz}^{*-} \cdot g^{1l} \cdot W_{jk}^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_{yy}^{*+} \cdot g^{mj} \cdot W_{jk}^* + r_{yz}^{*+} \cdot g^{nl} \cdot W_{il}^* \end{bmatrix} + b_{ji} g^{j\alpha} b_{kl} g^{l\epsilon} V_{\alpha\epsilon}^* + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{lk} g^{l\epsilon} b_{ij} g^{j\alpha} V_{\alpha\epsilon}^* +$$

$$+ b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} W_{\gamma k}^* + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{lk} g^{l\epsilon} b_{el} g^{l\theta} W_{i\theta}^* + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{lk} g^{l\epsilon} \sigma_{x i \epsilon} - Z_{ik}. \quad (13)$$

Система розрахункових рівнянь (7) – (13) є замкнутою системою $m \times n \times 6$ звичайних диференціальних рівнянь. Вона отримана в загальній формі, що не залежить від вибору конкретної кількості прямих по координаті y та координаті z . Така форма рівнянь дозволяє побудувати ефективний алгоритм побудови їх розв'язків.

Щоб виділити єдиний розв'язок цієї системи, необхідно задати граничні умови. Граничні умови в загальній формі отримаємо з вихідних граничних умов на границях $x=0$, та $x=l$. Оскільки ці умови є алгебраїчними співвідношеннями, то побудова відповідних редукованих умов виконується досить просто. Для цього кожна з граничних умов (3) множиться на $\varphi_i(y)$ та на $\varphi_k(z)$ та інтегрується по області $[0, h_y] \times [0, h_z]$. У результаті отримуємо $m \times n \times 3$ граничні умови на кожному кінці відрізка визначення рівнянь (7) – (13):

при $x=0$

$$\begin{aligned} r_{xx}^0 U_{ik}^*(0) - \sigma_{xxik}(0) &= r_{xx}^{*0} \Delta_{xxik}^{*0} + q_{xxik}^0, \\ r_{yx}^0 V_{ik}^*(0) - \tau_{yxik}(0) &= r_{yx}^{*0} \Delta_{yxik}^{*0} + q_{yxik}^0, \\ r_{zx}^0 W_{ik}^*(0) - \tau_{zxik}(0) &= r_{zx}^{*0} \Delta_{zxik}^{*0} + q_{zxik}^0 \end{aligned} \quad (14)$$

при $x=l$

$$\begin{aligned}
 r_{xx}^l U_{ik}^*(l) + \sigma_{xxik}(l) &= r_{xx}^{*l} \Delta_{xxik}^{*l} + q_{xxik}^l, \\
 r_{yx}^l V_{ik}^*(l) + \tau_{yxik}(l) &= r_{yx}^{*l} \Delta_{yxik}^{*l} + q_{yxik}^l, \\
 r_{zx}^l W_{ik}^*(l) + \tau_{zxik}(l) &= r_{zx}^{*l} \Delta_{zxik}^{*l} + q_{zxik}^l
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Розроблено алгоритм побудови розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь (7) – (13) з граничними умовами (14), (15) за допомогою високоефективного стійкого чисельного методу С.К.Годунова, реалізований у вигляді програми, написаної алгоритмічною мовою FORTRAN для ПЕОМ. Розв'язано тестові задачі, які показали високу точність та ефективність розробленого комбінованого методу. Деякі результати показані на рис. 3 - 6.

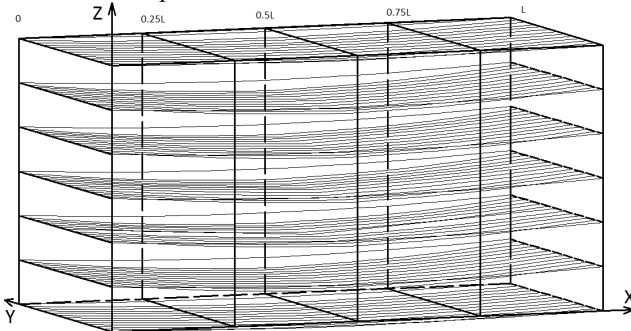


Рис.3. Деформація бруса розміром $1 \times 0.5 \times 0.5$ м

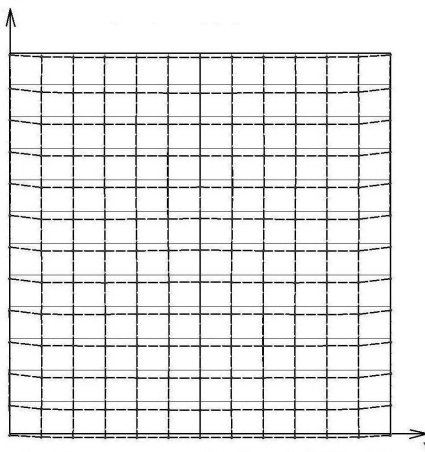


Рис. 4. Переміщення в перерізі $0.25L$ (переміщення в напрямку осі Z , збільшені в 20000 разів)

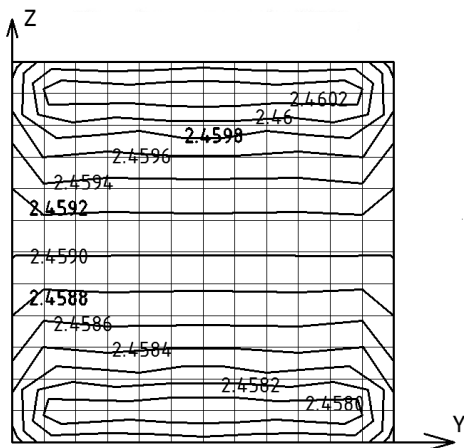


Рис.5. Переміщення в перерізі $0.25L$ (ізолінії переміщення в напрямку осі X)

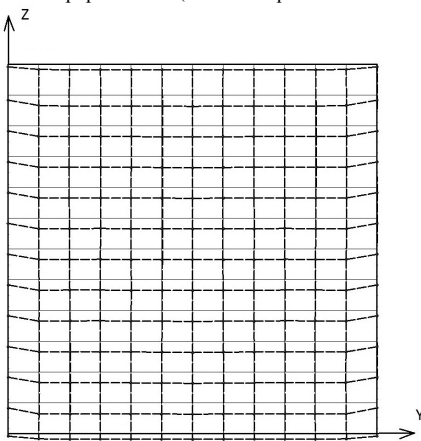


Рис.6. Переміщення в перерізі $0.5L$ (переміщення в напрямку осі Z , збільшені в 20000 разів)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – випуск 36 – с. 413 – 423.
2. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М: «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы, 1979.-392 с.

3. Жуланенко І.В., Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т. Частоти вільних коливань товстої шарнірно-опертої пластини. // Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» - 2010 - випуск №85, - с.109 – 117.
4. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т. Один варіант методу прямих в задачах динаміки товстих пластин // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – випуск 38 – с.399-407.

Стаття надійшла до редакції 09.03.2011 р.

Станкевич А.Н., Чибіряков В.К., Шкелёв Л.Т.

МЕТОД ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Методика понижения размерности уравнений плоской задачи теории упругости с последующим решением одномерной граничной задачи методом С.К. Годунова, предложенная в работе [1], распространяется на трехмерную задачу. Все преобразования существенно используют индексную форму записи, терминологию и основные формальные принципы тензорного исчисления. Получена система решаемых одномерных уравнений и граничные условия общего вида. Поставленная граничная задача решается высокоэффективным численным методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Stankevich A.M. Chybiryakov V.K. Shkelov L.T.

METHOD OF LINES IN SPATIAL PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

Method`s of reducing equations dimensional plane problem of elasticity theory with subsequent one-dimensional solution of the boundary problem by SK Godunov suggested in [1] applies to three-dimensional problem. All conversions essentially use an index entry form, terminology and basic principles of formal tensor calculus. A system of decision-dimensional equations and boundary conditions of general form is obtained. Posed boundary problem is solved with a highly efficient numerical method of discrete orthogonalization SK Godunov.

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
О.І. Борщ

КОЛИВАННЯ КРУЖЛЯННЯ БУРИЛЬНИХ КОЛОН

Розглянута задача про згинні коливання конструкції низу бурильної колони, що обертається, під дією прикладеного до долота моменту сил тертя (різання). Виконано аналіз механізму самозбудження коливань. Показано, що сформований момент являється неконсервативним і є основним джерелом динамічної нестійкості системи. Побудовано форми згинних рухів конструкції низу бурильної колони при різних значеннях характерних параметрів.

Вступ. Освоєння техніки і технології буріння глибоких нафтових і газових свердловин є однією з найбільш важливих задач сучасного гірничого виробництва. Домінуюче становище в цій технології займає роторний спосіб. З його допомогою освоєна технологія промислового буріння свердловин, глибина яких перевищує 6 км і ставиться задача проходки свердловин до 7 км і більше. Режими їх проходки можуть супроводжуватися ефектами генерування згинних вібрацій колон і їх інтенсифікацією у випадках рівності частот власних коливань колони та кутової швидкості її обертання. При цьому важливим виявляється не лише встановлення критичних значень характерних параметрів буріння (швидкостей обертання колони, величин поздовжніх сил, крутних моментів і швидкостей внутрішніх потоків рідини), при яких починаються інтенсивні коливання, але також і визначення форм коливань, знання яких дозволило б знаходити види контактної взаємодії долота і колони зі стінкою свердловини і обчислювати реакції цих взаємодій.

Тому при видобутку палива з великих глибин підвищення ефективності буріння вертикальних свердловин роторним способом тісно пов'язане з проблемами виявлення критичних режимів функціонування бурильних колон і з розробкою заходів щодо зниження їх негативного впливу на технологічний процес. Одним з таких динамічних явищ являється збудження так званих коливань кружляння ("whirling"), викликаних взаємодією долота зі стінкою свердловини, пов'язаних з його перекосами [4,7,8].

Зазначені явища можуть призводити до аварійних ситуацій, що супроводжується обривом труби бурильної колони (БК), прихваткою різального інструменту в зоні різання породи та затиранням ділянок БК в породу, відхиленням осі свердловини від вертикалі і її незапланованим

викривленням [6], а також викривленням кругової форми перерізу свердловини, втрапою стійкості її стінок та їх обваленням.

Одна з основних труднощів, що виникають в процесі буріння, обумовлена можливістю появи нештатних ситуацій, викликаних критичними станами квазістатичної рівноваги і коливань конструкції низу бурильної колони (КНБК). До них відносяться критичні згинні випинання бурильної колони [2,5] і її вібрації, що включають одночасно кілька різних коливальних явищ [1,9], що ускладнює виділення кожного і не дозволяє оцінити та пояснити їх механізми.

Виходячи з напрямку вібраційного руху, можна виділити три основні типи коливань низу БК: осьові, крутильні і згинні. Осьові (поздовжні) коливання БК призводять до багаторазових припинень контакту долота з дном свердловини (відскоку), що чергується з їх ударними контактними взаємодіями. Крутильні коливання виникають в результаті самозбудження при зривній фрикційній взаємодії долота зі стінкою свердловини. Зазвичай в автоколивальних системах з сухим тертям можна виділити дві фази. В одній з них долото прихоплюється стінкою свердловини і знаходиться в нерухомому стані (в теорії автоколивань – у стані "залипання"). В іншій фазі долото відривається від стінки свердловини і зі збільшеною кутовою швидкістю ковзає вздовж неї.

Проте найбільш складний механізм мають згинні коливання низу БК, викликані дією на долото нормальних і дотичних сил контактної та фрикційної взаємодії долота зі стінкою свердловини, які змінюються за часом. У цьому випадку геометричний центр долота починає рухатися навколо осьової лінії свердловини, обганяючи або відстаючи від обертального руху самої колони. Схожі рухи здійснюють під дією гіроскопічних сил інерції гіроскоп або ротор центрифуги пральної машини старої конструкції. У механіці вони отримали назву прецесійних коливань. В роботах [3,4,7,8] зазначається, що описаний вище рух центру долота має іншу природу. Він вивчався на досить спрощених фізичних і математичних моделях та отримав назву "whirling" – кружляння. Оскільки автори даної роботи не знайшли у відповідній україномовної та російськомовної літератури описання цього ефекту і його назви, тому для його визначення використовується термін "коливання кружляння", або просто "кружляння".

Відзначимо, що в теорії валів, що обертаються, для запобігання прецесійних коливань велика увага приділяється питанням їх балансування і самоцентрування. Проте в теорії буріння завданням виключення коливань кружляння відводиться менше уваги. Основна причина цього полягає в тому, що згинні переміщення долота і нижньої частини БК обмежені поверхнею стінки свердловини. З одного боку, це

стабілізує рух системи, з іншого - ускладнює характер коливань і постановку задачі. Як показують експерименти і натурні спостереження, в деяких випадках центр долота починає рухатися по доволі складним траєкторіям, що нагадують багатопелюсткову квітку, з утворенням на поверхні стінки свердловини системи жолобів, неприпустимих за технічними умовами буріння [3,4,7]. Явище збудження згинних коливань кружляння низу бурильної колони є однією з найбільш вагомих причин порушення геометричної точності запланованої траєкторії прямолінійної або криволінійної свердловини і виникнення її геометричних недосконалостей. Цей розділ нашої роботи присвячений проблемі комп'ютерного моделювання цих ефектів та їх теоретичного передбачення.

Питання математичного моделювання безпосередньо коливань кружляння долота на кінці БК, що обертається, вивчалися в роботах [3,4,7,8]. В них долото замінюється плоским круговим диском, що обертається відносно своєї осі, прикріпленої двома пружинами до нерухомих точок. Диск може здійснювати плоскі рухи всередині кругового отвору великого діаметру, вступаючи при цьому в контактну і фрикційну взаємодію з його стінкою. Інтегрування побудованої системи двох звичайних диференціальних рівнянь, що описують рух розглянутого нелінійного осцилятора з двома ступенями свободи, здійснюється чисельно. Причому, коливаннями кружляння називаються лише такі коливання, при яких центр диску (долота) здійснює кругові рухи відносно центру стержня (центру обертання). Показано, що центр диску в цій моделі рухається по досить складним кривим.

Аналізуючи результати досліджень у зазначених публікаціях, можна відзначити, що вони навряд чи відображають реальний механізм виникаючих явищ, оскільки отримані на основі досить абстрактних моделей, які слабо відображають особливості протікаючих динамічних процесів. По-перше, це пов'язано з істотною складністю цих процесів, що ускладнює розробку їх адекватних моделей. По-друге, складною є конструкція низу бурильної колони, що складається з багатоопорної пружної балки, що обертається, з консольною ділянкою, на кінці якої приєднано долото. Воно може мати різну конструкцію залежно від міцності скельної породи і сили його тиску на дно свердловини. По-третє, складність моделі обумовлена складністю діючих на долото навантажень, серед яких слід виділити неконсервативний крутний момент (момент різання чи фрикційний момент), осьову силу тиску долота на дно свердловини, нормальні і дотичні сили контактної взаємодії при перекосах долота і відхиленнях осі долота від осі свердловини, а також,

хоча і порівняно малі, але здатні здійснювати певний вплив, відцентрові і коріолісові сили обертального руху системи.

Зазначені фактори призводять до складних динамічних ефектів, які можуть супроводжуватися порушенням згинних коливань нижньої консольної ділянки колони і перекосами долота, що приводять до розширення свердловинного отвору, виникнення кільцевого зазору між поверхнями долота і стінки свердловини.

Постановка задачі про коливання кружляння і розв'язні співвідношення. При постановці задачі про моделювання початкового етапу збудження коливань кружляння долота представимо конструктивну схему бурильної колони у вигляді багатопрольотної нерозрізаної трубчастої балки довжиною L , що обертається з кутовою швидкістю ω . Роль додаткових опор у нижній частині БК грають центруючі пристрої, що встановлюються для забезпечення необхідної жорсткості конструкції в зоні буріння, яка піддається дії поздовжньої сили стискування \bar{R} від

реакції взаємодії долота і дна свердловини (рис. 1, а). На нижньому кінці БК має консольну ділянку довжиною e , до якої приєднано долото. Оскільки найбільш інтенсивні згинні коливання системи мають місце в нижньому прольоті БК і в її консольній частині, для спрощення задачі (як і в більш спрощеній постановці) будемо нехтувати впливом верхньої частини БК на динамічний процес, умовно відділимо нижній проліт AB з консоллю BC від решти частини (рис. 1, б) і прийемо, що в точці A реалізуються граничні умови шарнірного обпирання, в точці C – умови контактної взаємодії долота і дна свердловини. Для постановки задачі і виведення розв'язних рівнянь введемо

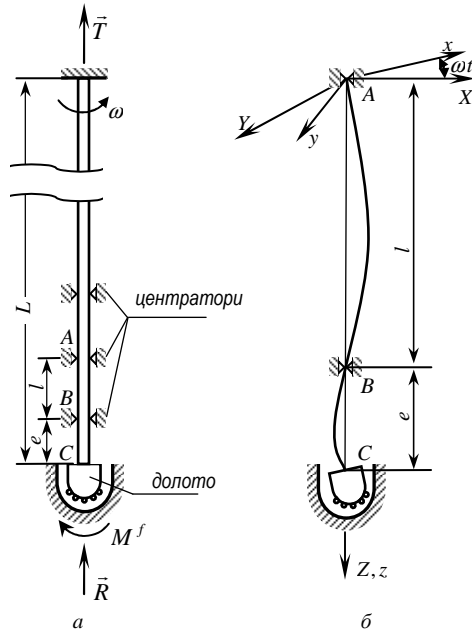


Рис. 1. Схема пружного згинання нижніх прольотів бурильної колони

нерухому систему координат $OXYZ$ і пов'язану з БК, що обертається,

систему $Oxyz$ з осями $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Початки обох систем співпадають і знаходяться в точці A . Осі OZ і Oz спрямовані вздовж осі труби БК. Введемо також жорстко пов'язану з тілом долота систему координат $Cx_1y_1z_1$, осі якої Cx_1, Cy_1, Cz_1 в недеформованому стані паралельні осям Ox, Oy, Oz , відповідно, а при пружному згинанні консолі повертаються разом з долотом.

Вважаємо, що всі пружні переміщення та кути поворотів малі, тому задача розглядається в лінеаризованій постановці.

Двопрольотна балка ABC , що обертається, попередньо напружена крутним моментом $M_z = -M^f$ і поздовжньою стискаючою силою $T = -R$. Всередині труби БК міститься промивна рідина, яку будемо враховувати як приєднану масу. Коливання балки будемо вивчати в системі $Oxyz$, що обертається. Відносно цієї системи рух кожного елемента БК являється складним, тому при коливаннях на нього діють сили інерції відносного і переносного рухів, а також коріолісові сили інерції.

Рівняння динамічного згинання БК при наявності зазначених факторів мають вид [1-3]

$$\begin{aligned}
 EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega^2 u - \\
 - 2(\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
 EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega^2 v - \\
 + 2(\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

З урахуванням прийнятих припущень крайові умови на опорі A ($z=0$) представимо у вигляді

$$u_A = v_A = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_A = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_A = 0. \tag{2}$$

На опорі B ($z=l$) маємо умови рівності нулю прогинів

$$u_B = v_B = 0. \tag{3}$$

Для виведення граничних умов на краю $z=l+e$, як зазначено вище, будемо вважати, що процес збудження коливань кружляння лише починається, зазор між долотом і стінкою свердловини ще не утворився, тому прогини дорівнюють нулю

$$u_C = v_C = 0. \tag{4}$$

Другу групу граничних рівнянь сформулюємо, використовуючи рівняння Ейлера руху долота як твердого тіла відносно жорстко пов'язаних з ним осей Cx_1 , Cy_1 , Cz_1 . Для цього умовно відділимо долото від БК і випишемо рівняння його руху навколо нерухомої точки C під дією всіх доданих до нього моментів [10]:

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{K}_C = \vec{M}_C^{ex}, \quad (5)$$

де $\vec{K}_C = K_{x_1} \vec{i}_1 + K_{y_1} \vec{j}_1 + K_{z_1} \vec{k}_1$ – вектор моменту кількостей руху долота відносно точки C ; $\vec{\Omega}$ – вектор кутової швидкості рухомої системи координат $Cx_1y_1z_1$; \vec{M}_C^{ex} – момент всіх зовнішніх сил, прикладених до долота; знак \sim над d позначає символ локального диференціювання в рухомій системі $Cx_1y_1z_1$.

Слід мати на увазі, що, як зазначено вище, кути пружних поворотів осей Cx_1 , Cy_1 малі і тому становлять відповідно, u'_C і v'_C . Нагадаємо також, що кути поворотів, кутові швидкості і моменти вважаються додатними, коли вони представляються направленими проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця відповідної осі. Тоді вектор $\vec{\Omega}$ можна представити у вигляді

$$\vec{\Omega} = \omega_{x_1} \vec{i}_1 + \omega_{y_1} \vec{j}_1 + \omega_{z_1} \vec{k}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z} \vec{i}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} \vec{j}_1 + \omega \vec{k}_1. \quad (6)$$

В результаті маємо

$$K_{x_1} = -J_{x_1} v'_C, \quad K_{y_1} = J_{y_1} u'_C, \quad K_{z_1} = J_{z_1} \omega. \quad (7)$$

Підставивши праві частини рівності (6), (7) у векторне рівняння (5) і виконавши операції його проектування на осі Cx_1 , Cy_1 , Cz_1 , отримаємо систему трьох скалярних динамічних рівнянь Ейлера, що описують динаміку твердого тіла. Нас цікавлять два перших рівняння цієї системи

$$\begin{aligned} -J_{x_1} \ddot{v}'_C + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega \dot{u}'_C &= M_{x_1}^{ex}, \\ J_{y_1} \ddot{u}'_C - (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega \dot{v}'_C &= M_{y_1}^{ex}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для їх замикання необхідно знати компоненти $M_{x_1}^{ex}$, $M_{y_1}^{ex}$ моменту \vec{M}_C^{ex} зовнішніх сил. Він складається з моменту сил пружності \vec{M}^{el} ; моменту сил різання \vec{M}^f ; моменту \vec{M}^R від зміщення точки прикладання реакції \vec{R} на дні свердловини вздовж осей Cx_1 , Cy_1 при перекосах долота; моменту дисипативних сил \vec{M}^d .

$$\vec{M}^{el} = EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_C \vec{i}_1 - EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_C \vec{j}_1. \quad (9)$$

Моменти M_x^f , M_y^f , викликані дією моменту різання \vec{M}^f при перекосі долота, визначаються в першу чергу, його конструкцією. У стані, коли пружна вісь БК суворо вертикальна і вісь Cz_1 співпадає з віссю Cz , момент \vec{M}^f колінеарний з ортом \vec{k} і $M_{x_1}^f = M_{y_1}^f = 0$. Проте при згинанні БК долото повертається відносно осей Cx_1 , Cy_1 і, залежно від його форми і конструкції, момент \vec{M}^f при малих кутах повороту може змінюватися або залишатися постійним в інерціальній системі $Oxyz$. Розглянемо більш простий випадок, коли $\vec{M}^f = -M^f \vec{k} = \overline{const}$. Тоді при перекосах долота його можна представити в системі $Cx_1y_1z_1$ у вигляді

$$\vec{M}^f \approx -M_z u'_C \vec{i}_1 - M_z v'_C \vec{j}_1 + M_z \vec{k}_1 = M^f u'_C \vec{i}_1 + M^f v'_C \vec{j}_1 - M^f \vec{k}_1. \quad (10)$$

Момент \vec{M}^R , викликаний зміщенням точки прикладання реакції \vec{R} на дні свердловини при перекосах долота, залежить від його конструкції. Так, можуть бути випадки, коли при повороті долота на один і той же кут точка прикладання сили \vec{R} по відношенню до її вихідного положення, може залишитися незмінною (рис. 2, а) або переміститися в одну (рис. 2, б) або в іншу сторону. У зв'язку з цим і

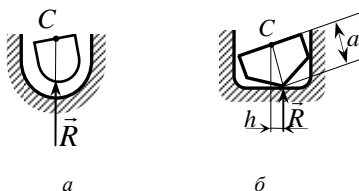


Рис. 2. Схеми можливих контактів долота з дном свердловини

момент \vec{M}^R відносно точки C , викликаний реакцією \vec{R} може бути рівний нулю (рис. 2, а) або напрямлений в тому чи іншому напрямках (рис. 2, б), сприяючи подальшому перекиданню долота, або повертаючи його у вихідне положення. Тому, наприклад, для конструкції, представленої на рис. 2, б, складові моменту \vec{M}^R виявляються рівними

$$M_{x_1}^R = -Rh = -Rav'_C, \quad M_{y_1}^R = Rh = Rau'_C, \quad (11)$$

де h і a – характерні геометричні параметри долота.

У розглянутій системі складною структурою володіють діючі на долото моменти $M_{x_1}^d$, $M_{y_1}^d$ від дисипативних сил, які сприяють гасінню коливань кружляння. В теорії лінійних коливань вважається, що

узагальнена сила дисипації пропорційна відповідній узагальненій швидкості і напрямлена в протилежну сторону. Тому можна прийняти

$$M_{x_1}^d = -k\omega_{x_1} = k \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad M_{y_1}^d = -k\omega_{y_1} = -k \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (12)$$

де k – коефіцієнт дисипації, який залежить від конструкції долота, фізичних властивостей скельної породи і промивної рідини, а також від величини реакції \vec{R} . На практиці він може бути визначений експериментально.

Підставивши отримані вирази для моментів (9) – (12) в рівняння (8) і виконавши деякі перестановки, отримаємо граничні рівняння на краю $z = l + e$

$$J_{y_1} \ddot{u}'_C + (J_{z_1} - J_{x_1}) \omega \dot{v}'_C + Elu''_C - M^f v'_C \mp Rau'_C + k \frac{\dot{u}'_C}{\sqrt{(\dot{u}'_C)^2 + (\dot{v}'_C)^2}} = 0, \quad (13)$$

$$J_{x_1} \ddot{v}'_C - (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega \dot{u}'_C + Elv''_C + M^f u'_C \mp Rav'_C + k \frac{\dot{v}'_C}{\sqrt{(\dot{u}'_C)^2 + (\dot{v}'_C)^2}} = 0.$$

В них знаки \mp перед доданками Rau'_C і Rav'_C відповідають випадкам контакту долота з дном свердловини, представленим на схемах рис. 2, б.

Система розв'язних рівнянь (1) разом з додатковими рівняннями (2), (3), (13) в точках A , B , C складає триточкову крайову задачу динаміки трьохопорної балки, що обертається, з твердим тілом на опорі C . Вона повинна доповнюватися початковими умовами при $t = 0$, які визначають деякі початкові збурення.

Вид розв'язку системи (1), (2), (3), (13) значною мірою визначається структурою рівнянь (13). Умовно можна вважати, що перше з них служить для визначення змінної $u(z, t)$, друге – для $v(z, t)$. Проте ці рівняння пов'язані і разом з похідними від змінної $u_C(z, t)$ в перше рівняння входять також похідні від $v_C(z, t)$, а в друге – похідні від $u_C(z, t)$. Завдяки зв'язку рівнянь, рухи вздовж осей Cx_1 і Cy_1 також виявляються залежними і їх форма набуває складного виду. Так, другі доданки $(J_{z_1} - J_{x_1})\omega \dot{v}'_C$, $-(J_{z_1} - J_{y_1})\omega \dot{u}'_C$, що входять з різними знаками, обумовлені гіроскопічною взаємодією обертань долота відносно осей Cx_1 , Cy_1 , що призводить до його прецесійних (обертальних) коливань. Оскільки гіроскопічні сили консервативні [1], вони сприяють перекачуванню енергії від одного елемента до іншого і її перерозподілу, не збільшуючи її повної кількості. Тому з цими силами пов'язане лише ускладнення форми коливань без зростання їх амплітуди. Четверті

складові $-M^f v'_C$, $M^f u'_C$ (що також входять з різними знаками) викликані неконсервативним характером "підкачки" енергії згинних коливань за рахунок заданого фрикційного моменту \bar{M}^f , вони сприяють порушенню коливань кружляння зі зростаючими амплітудами.

Якщо при деяких обраних початкових збуреннях і значеннях характерних параметрів низу бурильної клони розв'язки побудованої системи маю вигляд спадних функцій, то розглядуваний стан балки є стійким і коливання кружляння не порушується. Якщо амплітуди коливань зростають, то має місце їх самозбудження.

У даній роботі перевірка цього припущення робиться методом комп'ютерного моделювання.

Результати комп'ютерного моделювання коливань кружляння.

Комп'ютерне моделювання коливань кружляння долота в уточненій постановці, основане на застосуванні двопрольотної моделі, проводилося шляхом розв'язування побудованих систем рівнянь (1), (2), (3), (13) за допомогою явної скінченно-різницевої схеми за часом. Крок інтегрування прийнятий рівним $\Delta t = 2 \cdot 10^{-7} c$. Відрізки AB і BC розбивалися на 41 і 4 скінченно-різницеві ділянки, відповідно. Інтегрування проводилося в проміжках часу від $t=0$ до $t=100 c$. В результаті інтегрування обчислювалися значення переміщень $u(t)$, $v(t)$ для всіх скінченно-різницевих вузлів і центру долота. Результати розрахунків наведені рис. 3–4.

Значення геометричних і механічних параметрів прольоту AB (рис. 1, б): $l = 8 m$, $r_1 = 0,09 m$, $r_2 = 0,08 m$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} Па$. Довжина меншого прольоту BC вибрана рівною $e = 1 m$. Досліджувані в системі 8 значення інерційних параметрів склали $J_{x_1} = J_{y_1} = 5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $J_z = 3,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Коефіцієнт k , який визначає момент сил тертя в системі (13), вибирався рівним $k = \mu \cdot R \cdot r$, де $\mu = 0,2$ – коефіцієнт тертя, R – сила нормального тиску долота на дно свердловини, $r = 0,2 m$ – радіус долота; величина $a = 0,3 m$ визначає відстань від точки C до точки дотику поверхні долота з дном свердловини (рис. 2, б).

Обчислення показали, що процес порушення коливань кружляння бурильної колони з відстанню e від центру опори до центру долота визначається сукупністю значень параметрів ω , M^f , $T = -R$ по відношенню до їх критичних величин. Так, якщо значення параметрів ω , M^f , $T = -R$ вибирати із закритичної області їх значень, то центр долота починає рухатися по спіральним траєкторіям з швидкою зміною значень переміщень $u(t)$ та $v(t)$. В рамках нелінійної постановки такі

переміщення прямують до нескінченності, тому такі коливання можна вважати нестійкими, а форми їх руху представлені на рис. 3.

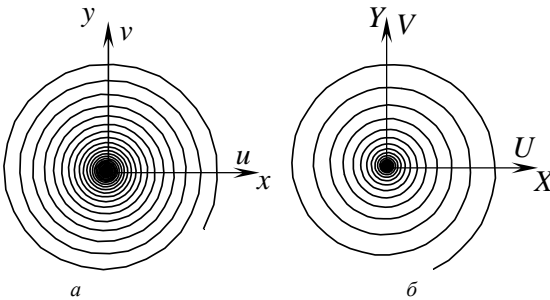


Рис. 3. Траєкторії руху центра долота в рухомій Oxy

(а) та нерухомій OXY (б) системах координат

$$(M^f = 1 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}, R = 1 \cdot 10^5 \text{ Н}, \omega = 15 \text{ с}^{-1})$$

Якщо поєднання їх величин не перевищують критичної комбінації, то вихідні збурення нав'язані системі у вигляді початкових прогинів приводять до просторових коливань центру долота із складними траєкторіями, які потім, в результаті

дії сил дисипації, гасяться і відхилення $u(t)$ та $v(t)$ прямують до нуля. Відповідні цим станам форми руху центра долота в системах координат Oxy , що обертається разом з БК, та нерухомій OXY наведені на рис. 4.

Підкреслимо, що всі наведені розрахунки отримані на основі лінеаризованої постановки задачі і в нестійких станах відображають лише тенденцію зростання амплітуд коливань. Для аналізу руху системи при розвинених коливаннях необхідно використовувати нелінійні рівняння. Така задача, однак, в дисертації не ставилася.

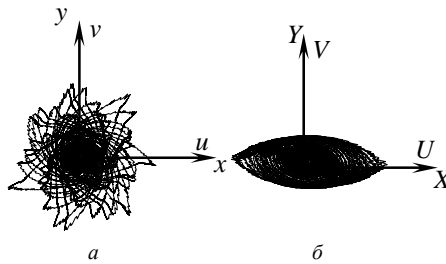


Рис. 4. Траєкторії руху центра долота в рухомій Oxy

(а) та нерухомій OXY (б) системах координат

$$(M^f = 5 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}, R = 1 \cdot 10^6 \text{ Н}, \omega = 5 \text{ с}^{-1})$$

В підсумку відмітимо, що в роботі розглянута задача про якісний аналіз згинних коливань кружляння (whirling vibration) конструкції низу бурильної колони, яка обертається, під дією прикладеного до долота моменту сил тертя (різання). Виконано моделювання процесу самозбудження коливань. Показано, що сформований момент контактної взаємодії долота з дном свердловини являється неконсервативним. Підтверджено відомий в науковій літературі факт, що він є основним джерелом динамічної нестійкості системи. Встановлено, що при самозбудженні коливань кружляння, центр долота може рухатися по

гладким спіральним траєкторіям або траєкторіям типу «багатопелюсткових квіток», які представляють собою, на думку спеціалістів, найбільшу небезпеку в практиці буріння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Борц Е.И., Ваццилина Е.В., Гуляев В.И.* Спиральные бегущие волны в упругих стержнях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – №2. – С.143 – 149.
2. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Горбунович И.В.* Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения // Проблемы прочности. – 2006. – №5. – С.109 – 119.
3. *Гуляев В. И., Худолый С. Н., Борц Е. И.* Колебания кружения конструкции низа бурильной колонны // Проблемы прочности. – 2010. – №6. – С.13 – 25.
4. *Christoforou A.P., Yigit A.S.* Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – 206(2). – P.243 – 260.
5. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V.* The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – V.67. – P.140–148.
6. *Gulyayev V.I., Hudoly S.N., Glovach L.V.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.
7. *Jansen J.D.* Whirl and chaotic motion of stabilized drill collars // SPE Drilling Engineering. – 1992. – 7(2). – P.107 – 114.
8. *Leine R.L., Van Campen D.H., Keultjes W.J.G.* Stick-slip whirl interaction in drillstring dynamics // Journal of Vibration and Acoustics. – 2002. – V.124, April. – P.209 – 220.
9. *Michael J. Jellison, R. Brett Chandler, Mike L. Payne, Jeff S. Shepard.* Ultradeep drilling pushes drillingstring technology innovations // SPE Middle East Oil and Gas Show and Conference, 11-14 March 2007, Kingdom of Bahrain. – P.38 – 46.

Стаття надійшла до редакції 10.02.2011 р.

Гайдайчук В.В., Борц Е.И.

КОЛЕБАНИЯ КРУЖЕНИЯ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН

Рассмотрена задача об изгибных колебаниях конструкции низа вращающейся бурильной колонны под действием приложенного к долоту момента сил трения (резания). Выполнен анализ механизма самовозбуждения колебаний. Показано, что формируемый момент является неконсервативным и представляет собой основной источник динамической неустойчивости системы. Построены формы изгибных движений конструкции низа бурильной колонны при различных значениях характерных параметров.

Gaydaychuk V.V., Borshch E.I.

WHIRL VIBRATIONS OF DRILLSTRINGS

The problem about bending vibrations of bottom hole assembly under action of a friction moment applied to the bit is considered. The analysis of vibration self-excitation mechanism is performed. It is shown that the generated moment is not conservative and it is the main reason of the system dynamic instability. The modes of bottom hole assembly whirling are constructed for different values of characteristic parameters.

УДК 539.3

В.І. Гуляєв, д-р техн. наук

Л.В. Гловач, канд. техн. наук

СТІЙКІСТЬ КОЛИВАНЬ ЛОПАТЕЙ РОТОРИВ ВІТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК ПРИ СКЛАДНОМУ ОБЕРТАННІ

Досліджуються нелінійні коливання лопатей вітроенергетичних установок, обумовлених силами інерції, які виникають при складному русі. Побудовані рівняння руху лопатей. Методами теорії стійкості періодичних процесів виконано аналіз біфуркаційних станів коливань.

Вступ. Останнім часом у світі все актуальнішою стає проблема енергетичного забезпечення. Вона тісно переплітається з питаннями екології та ощадливого використання наявних ресурсів. Серед альтернативних джерел енергії особливе місце належить енергії повітряних мас, яка є доволі поширеною у світовій практиці. В індустріальних країнах вітроенергетика розвивається здебільшого в напрямі створення вітроенергетичних установок великої і середньої потужності. В Україні цей напрям також дістав суттєвого розвитку і впровадження. Однак специфікою повітряних потоків України є їхня мала питома потужність, що не дає змоги широко використовувати досвід світової практики будівництва вітроенергетичних установок (ВЕУ). Саме через це актуально розробляти дешеві вітряки малої одиничної потужності, які працюють при слабких середньорічних вітрах. Перспективність і актуальність створення ВЕУ малої потужності посилюється в Україні у даний час через неякісне і нестабільне енергозабезпечення населення наявним енергокомплексом, особливо у сільській місцевості, а також розвитком дачного будівництва, фермерських господарств і наявністю великої кількості інших дрібних споживачів. Проведені маркетингові дослідження ринку вітроенергетичного обладнання в Україні свідчать, що потенційні споживачі розраховують використовувати вітроустановки для таких основних потреб, як забезпечення живлення виробничого та побутового обладнання електричним струмом, водопостачання, помел зерна та подрібнення кормів, освітлення, нагрівання води та опалення, зарядження акумуляторів, аерація водосховищ та ін. Тому достатньо велика увага нині приділяється розробці різних типів ВЕУ, одним з яких є горизонтально-пропелерна вітроенергетична установка [1,2]. Характерним режимом її роботи є переорієнтація робочого колеса, що

обертається, вздовж напрямку повітряного потоку. При цьому лопаті вітроколеса (ротора) здійснюють складне обертання. Різні динамічні ефекти, що виникають при складному обертанні таких конструкцій [3–5], здійснюють суттєвий вплив на забезпечення їх міцності та надійності, тому проблема аналізу їх динаміки при складному обертанні є актуальною.

Постановка задачі про коливання лопатей роторів вітроенергетичних установок. Розглянемо ротор ВЕУ, який складається з лопатей, шарнірно прикріплених до втулки валу (рис. 1). Ротор

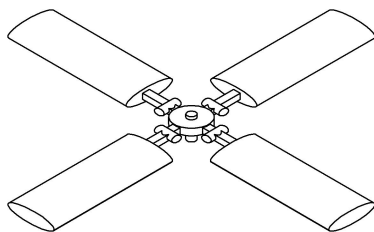


Рис. 1. Схема багатолопатевого ротора

обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо своєї осі симетрії, перпендикулярної площині валу. При цьому вісь власного обертання ротора здійснює плоский поворот з постійною кутовою швидкістю ω_0 навколо нерухокої прямої, яка проходить через центр ротора перпендикулярно осі власного обертання. Кріплення лопатей до ротора у загальному випадку дозволяє

їм відхилятися з площини обертання ротора на кут ψ , а в площині обертання лопаті можуть відхилятися від радіального напрямку на кут φ (рис. 2).

Для побудови рівнянь руху лопатей при складному обертанні ротора визначимо сили інерції, які діють на елемент лопаті, і отримаємо вирази для моментів всіх сил інерції, які діють на лопать, відносно осей шарніру. Для цього введемо наступні праві прямокутні системи координат: $OXYZ$ – інерціальна система координат з початком у центрі ротора; $Oxyz$ – система координат, жорстко зв'язана з ротором. Зорієнтуємо системи координат таким чином,

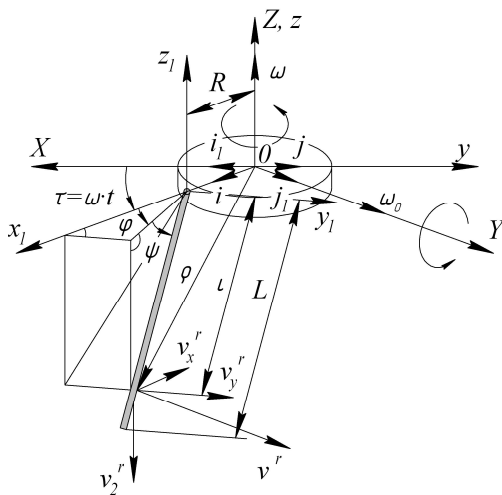


Рис. 2. Розрахункова схема лопаті з шарнірним кріпленням

щоб осі OZ та Oz співпадали з віссю власного обертання ротора. Вісь Ox сумістимо з поздовжньою віссю однієї з лопатей ротора щоб кути її повороту у площині обертання φ і з площини обертання ψ дорівнювали нулю. Систему координат $OXYZ$ визначає базис $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$, а систему $Oxyz$ – базис $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Вектор абсолютного прискорення елемента лопаті ротора ВЕУ при складному обертанні визначається теоремою Коріоліса [6, 7]

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^e + \mathbf{a}^r + \mathbf{a}^c, \quad (1)$$

де $\mathbf{a}^e, \mathbf{a}^r, \mathbf{a}^c$ – вектори переносного, відносного та коріолісового прискорення елемента лопаті відповідно.

Вектор переносного прискорення \mathbf{a}^e обчислюється за формулою

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}). \quad (2)$$

Тут $\mathbf{a}_0 = 0$ – прискорення точки O (рис. 2); $\boldsymbol{\Omega}$ та $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектори абсолютної кутової швидкості та кутового прискорення рухомої системи координат $Oxyz$; $\boldsymbol{\rho}$ – радіус-вектор елемента лопаті у системі координат $Oxyz$.

В системі координат $OXYZ$

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{i}_1 + \omega_0 \mathbf{j}_1 + \omega \mathbf{k}_1. \quad (3)$$

У цій же системі координат вектор кутового прискорення

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \mathbf{i}_1 + \frac{d\omega_0}{dt} \mathbf{j}_1 = \omega_0 \omega \mathbf{i}_1. \quad (4)$$

Радіус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ елемента лопаті в системі координат $Oxyz$ визначається наступним чином

$$\boldsymbol{\rho} = (R + l \cos \psi \cos \varphi) \mathbf{i} + l \cos \psi \sin \varphi \mathbf{j} - l \sin \psi \mathbf{k}, \quad (5)$$

де R, l – радіус втулки валу та відстань від центру шарніра до елемента лопаті відповідно.

Введемо фазову координату $\tau = \omega t$, яка визначає положення рухомої системи координат $Oxyz$ відносно нерухомої $OXYZ$ при власному обертанні. Тоді вектор $\boldsymbol{\rho}$ у системі координат $OXYZ$ набуде вигляду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} = & [(R + l \cos \psi \cos \varphi) \cos \tau - l \cos \psi \sin \varphi \sin \tau] \mathbf{i}_1 + \\ & + [(R + l \cos \psi \cos \varphi) \sin \tau + l \cos \psi \sin \varphi \cos \tau] \mathbf{j}_1 - l \sin \psi \mathbf{k}_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Виконавши операцію проектування, отримаємо компоненти вектора переносного прискорення \mathbf{a}^e в системі координат $OXYZ$

$$a_x^e = -(\omega_0^2 + \omega^2) [R \cos \tau + l \cos \psi \cos(\varphi + \tau)],$$

$$a_Y^e = -\omega^2 [R \sin \tau + l \cos \psi \sin(\varphi + \tau)],$$

$$a_Z^e = \omega_0^2 l \sin \psi + 2\omega\omega_0 [R \sin \tau + l \cos \psi \sin(\varphi + \tau)]. \quad (6)$$

У рухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$ складові вектора \mathbf{a}^e визначаються співвідношеннями

$$a_x^e = a_X^e \cos \tau + a_Y^e \sin \tau,$$

$$a_y^e = -a_X^e \sin \tau + a_Y^e \cos \tau,$$

$$a_z^e = a_Z^e. \quad (7)$$

З допомогою рівностей (6), (7) отримуємо проєкції вектора \mathbf{a}^e на осі системи координат $Ox_1y_1z_1$

$$a_x^e = -(R + l \cos \psi \cos \varphi) (\omega^2 + \omega_0^2 \cos^2 \tau) + \frac{\omega_0^2}{2} l \cos \psi \sin \varphi \sin 2\tau,$$

$$a_y^e = -\omega_0^2 l \cos \psi \sin \tau \cos(\varphi + \tau) + \frac{\omega_0^2}{2} R \sin 2\tau - \omega^2 l \cos \psi \sin \varphi,$$

$$a_z^e = \omega_0^2 l \sin \psi + 2\omega\omega_0 [R \sin \tau + l \cos \psi \sin(\varphi + \tau)]. \quad (8)$$

Визначимо вектор відносного прискорення елемента лопаті

$$\mathbf{a}^r = \frac{d\mathbf{v}^r}{dt}, \quad (9)$$

де \mathbf{v}^r – вектор відносної швидкості елемента лопаті.

Відносний рух лопаті в даній постановці задачі представляє собою сукупність двох рухів: поворот навколо шарніра у площині Oxz з кутовою швидкістю $\frac{d\psi}{dt}$, і поворот у площині втулки валу $Ox_1y_1z_1$ з кутовою швидкістю $\frac{d\varphi}{dt}$. З урахуванням вищесказаного проєкції вектора \mathbf{v}^r на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ набувають виду

$$v_x^r = -\frac{d\psi}{dt} l \sin \psi \cos \varphi - \frac{d\varphi}{dt} l \cos \psi \sin \varphi,$$

$$v_y^r = -\frac{d\varphi}{dt} l \cos \psi \cos \varphi - \frac{d\psi}{dt} l \sin \psi \sin \varphi,$$

$$v_z^r = -\frac{d\psi}{dt} l \cos \psi. \quad (10)$$

Диференціюючи співвідношення (10) по змінній t , отримуємо компоненти вектора \mathbf{a}^r

$$\begin{aligned} a_x^r &= -l \left\{ \frac{d^2\psi}{dt^2} \sin \psi \cos \varphi + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos \psi \sin \varphi + \right. \\ &+ \left[\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \cos \psi \cos \varphi - 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin \psi \sin \varphi \left. \right\}, \\ a_y^r &= \left\{ \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cos \psi \cos \varphi - \frac{d^2\psi}{dt^2} \sin \psi \sin \varphi - \right. \\ &- \left[\left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \cos \psi \sin \varphi - 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \sin \psi \cos \varphi \left. \right\}, \\ a_z^r &= -l \left[\frac{d^2\psi}{dt^2} \cos \psi - \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \sin \psi \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Визначимо в цій же системі координат вектор коріолісового прискорення елемента лопаті

$$\mathbf{a}^c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^r. \quad (12)$$

Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ у базисі $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ має вигляд

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_0 \sin \tau \mathbf{i} + \omega_0 \cos \tau \mathbf{j} + \omega \mathbf{k}. \quad (13)$$

Підставляючи рівності (10) та (13) у (12), отримуємо складові вектора \mathbf{a}^c в системі $Oxyz$

$$\begin{aligned} a_x^c &= -2l \left\{ \frac{d\psi}{dt} (\omega_0 \cos \psi \cos \tau - \omega \sin \psi \sin \varphi) + \frac{d\varphi}{dt} \omega \cos \psi \cos \varphi \right\}, \\ a_y^c &= 2l \left\{ \frac{d\psi}{dt} (\omega_0 \cos \psi \sin \tau - \omega \sin \psi \cos \varphi) - \frac{d\varphi}{dt} \omega \cos \psi \sin \varphi \right\}, \\ a_z^c &= 2l \left[\frac{d\psi}{dt} \omega_0 \sin \psi \cos (\varphi + \tau) + \frac{d\varphi}{dt} \omega_0 \cos \psi \sin (\varphi + \tau) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

З допомогою співвідношень

$$\frac{d}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$$

у виразах (8), (11) та (14) можна перейти до фазової координати τ . Тоді враховуючи теорему Коріоліса, отримаємо проекції a_x , a_y , a_z вектора

абсолютного прискорення елемента лопаті на осі рухомої системи координат $Oxyz$.

Знаючи компоненти вектора \mathbf{a} , визначимо відповідні складові сил інерції, що діють на елемент лопаті

$$dF'_x = -\gamma S a_x dl, \quad dF'_y = -\gamma S a_y dl, \quad dF'_z = -\gamma S a_z dl, \quad (15)$$

де γ – густина матеріалу; S – площа поперечного перерізу лопаті.

Моменти сил інерції, що діють на елемент лопаті, відносно горизонтальної y' та вертикальної z' осей шарніра:

$$\begin{aligned} M_{y'}(dF') &= -dF'_x l \sin \psi - dF'_z l \cos \psi \cos \varphi = \gamma S (a_x \sin \psi + a_z \cos \psi \cos \varphi) dl, \\ M_{z'}(dF') &= -dF'_y l \cos \psi \cos \varphi - dF'_x l \cos \psi \sin \varphi = \\ &= \gamma S (a_x \cos \psi \sin \varphi - a_y \cos \psi \cos \varphi) dl. \end{aligned} \quad (16)$$

Щоб отримати вирази для моментів сил інерції, що діють на всю лопать, підставимо вирази для компонент вектора \mathbf{a} у співвідношення (16) і проінтегруємо у межах від 0 до L . Оскільки лопать БЕУ прикріплена до втулки шарнірно, то $M_{y'} = 0$ та $M_{z'} = 0$. Отримані в результаті інтегрування вирази прирівнюємо до нуля. Після деяких перетворень і введення позначень $\lambda = \omega_0/\omega$, $e = R/L$, маємо рівняння руху лопаті у кінцевому вигляді:

$$\begin{aligned} & 3e(1 + \lambda^2 \cos^2 \tau) \sin \psi + \left[1 - \lambda^2 \sin^2 \tau + \frac{d\varphi}{d\tau} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} + 2 \right) \right] \sin 2\psi \cos \varphi + \\ & + \left(\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} - \frac{\lambda^2}{2} \sin 2\tau \right) \sin 2\psi \sin \varphi + 2 \frac{d^2\psi}{d\tau^2} \cos \varphi - 4 \frac{d\psi}{d\tau} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} + 1 \right) \sin^2 \psi \sin \varphi + \\ & + 2 \frac{d\psi}{d\tau} \lambda \sin 2\psi \cos \tau - 6\lambda \cos \psi \cos \varphi \sin \tau - \\ & - 4 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} + 1 \right) \lambda \cos^2 \psi \cos \varphi \sin(\varphi + \tau) - 2\lambda \frac{d\psi}{d\tau} \sin 2\psi \cos \varphi \cos(\varphi + \tau) = 0, \quad (17) \\ & \frac{3}{2} \lambda^2 e \cos \psi \cos \varphi \sin 2\tau + \lambda^2 \cos^2 \psi \sin [2(\varphi + \tau)] + 2 \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \cos^2 \psi - \\ & - 2 \frac{d\psi}{d\tau} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} + 1 \right) \sin 2\psi + 4 \frac{d\psi}{d\tau} \lambda \cos^2 \psi \sin(\varphi + \tau) + 3e(1 + \lambda^2 \cos^2 \tau) \cos \psi \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Система (17) нелінійних диференціальних рівнянь описує взаємозв'язані коливання лопаті валу в площині змаху і площині втулки, обумовлені поворотом осі обертання валу з кутовою швидкістю ω_0 .

Результати комп'ютерного моделювання коливань лопатей роторів ВЕУ при складному обертанні. Побудована система рівнянь (17) залежить від параметрів λ та e . Для її розв'язання використовувався метод продовження рішень по параметру λ , задаючи при цьому фіксовані значення параметру e .

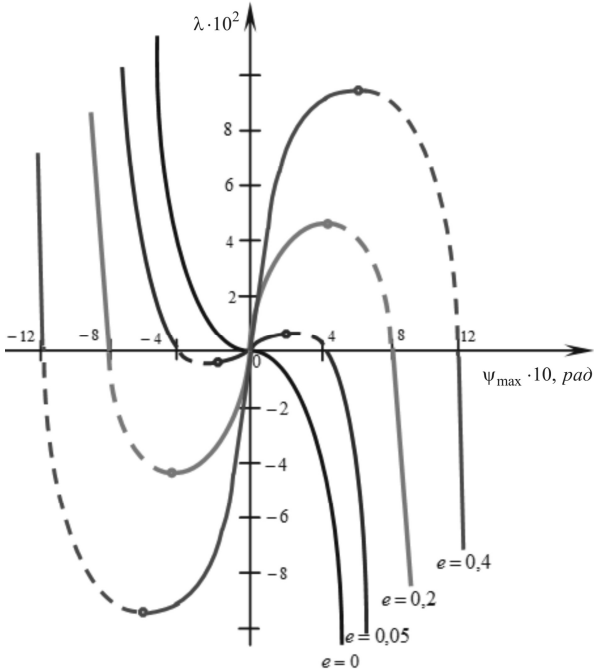


Рис. 3. Залежність амплітуди ψ_{\max} махових коливань лопаті ротора ВЕУ від параметра λ при різних значеннях e .

На рис. 3 показана залежність амплітуди ψ_{\max} махових коливань лопаті ротора ВЕУ від параметра λ при різних значеннях e (суцільні криві – стійкі ділянки рішень, пунктирні – нестійкі). При $e=0$, тобто коли точка кріплення лопатей (шарнір) лежить на осі обертання валу, розв'язки є стійкими на всьому діапазоні зміни параметра λ . При $e > 0$, коли шарнір і вісь обертання валу рознесені на відстань R , характер еволюції періодичних режимів змінюється – на кривих навантаження з'являються граничні точки втрати стійкості і ділянки нестійких рішень. Після зміни знака λ розв'язки знову стають стійкими. Підкреслимо, що ці ефекти спостерігались навіть при досить малих значеннях λ ($\lambda < 0,05$).

При дослідженні стійкості махових рухів лопаті ротора ВЕУ при складному обертанні на кривих $\Psi_{\max}(\lambda)$ були також виявлені біфуркаційні точки, в яких спостерігалась втрата стійкості конструкції ВЕУ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайдайчук В.В., Носенко В.П.* Компьютерное моделирование динамического поведения и прочности конструкций ветроэнергетических установок. // Промышленное строительство та інженерні споруди. – 2009. – №3. – С. 22 – 26.
2. *Перельмутер А.В., Микитаренко М.А.* Башни для ветроэнергетических установок: тенденции развития. // Вісник Донбаської державної академії будівництва і архітектури. Будівельні конструкції. Будівлі та споруди. – 2001. – Вип. 5 (30). – С. 8 – 13.
3. *Гловач Л.В., Носенко В.П.* Комп'ютерне моделювання динаміки лопатей вітроенергетичних установок. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010. – №85. – С. 143 – 152.
4. *Гуляев В.И., Худой С.Н.* Колебания криволинейных закрученных лопастей при сложном вращении. // Проблемы прочности. – 2005. – 41, №4. – С. 126 – 132.
5. *Харитонов В.П.* Автономные ветроэлектрические установки. – Москва, ГНУ ВИЭСХ, 2006. – 273 с.
6. *Миль М.Л.* и др. Вертолеты (расчет и проектирование). Кн. 4. Аэродинамика. М.: Машиностроение, 1966. – 456 с.
7. *Михеев Р.А.* Прочность вертолетов. – Москва, Машиностроение, 1984. – 280 с.

Стаття надійшла до редакції 01.03.2011 р.

Гуляев В.И., Гловач Л.В.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТЕЙ РОТОРОВ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК ПРИ СЛОЖНОМ ВРАЩЕНИИ

Исследуются нелинейные колебания лопастей роторов ветроэнергетических установок, обусловленных возникающими при сложном движении силами инерции. Методами теории устойчивости периодических процессов выполнен анализ бифуркационных состояний колебаний.

Gulyayev V.I., Glovach L.V.

VIBRATION STABILITY OF WIND POWER STATION ROTOR BLADES IN COMPOUND ROTATION

A non-linear vibration of wind power station blades conditioned by inertia forces of compound movement is investigated. The blade motion equations are constructed. Through the use of the methods of periodic processes stability the analysis of the vibration bifurcation states is performed.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ ПРИ ПОБУДОВІ КРИВИХ НАВАНТАЖЕННЯ

В статті розглядаються порядок реалізації та результати чисельних досліджень динаміки двомасових віброударних систем з двома ступнями вільності під дією періодичного зовнішнього навантаження, що були отримані методом продовження розв'язку за параметром. Розв'язки рівнянь руху знаходяться в залежності від амплітуди зовнішнього навантаження, будуються криві навантаження та графіки контактної сили. Удар моделюється нелінійною силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца. Доводиться достовірність отриманих результатів.

Вступ. В статті представлені результати застосування методу продовження розв'язку за параметром для дослідження динаміки віброударних систем під дією періодичного зовнішнього навантаження. Робота є продовженням статті [1], в якій був описаний розвиток цього методу для таких систем та приведені усі теоретичні положення, що необхідні для його використання. В цій статті, як і в попередній, модифікований метод реалізується на прикладі двомасової віброударної системи, для якої будуються розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь руху на періоді усталеного періодичного режиму коливань в залежності від параметру інтенсивності зовнішнього навантаження, зокрема, криві навантаження та графіки контактної сили.

Раніше [2] був виконаний чисельний аналіз динамічних станів двомасових віброударних систем з двома ступнями вільності, якщо удар моделювався граничними умовами в момент удару з використанням коефіцієнту відновлення. В цій роботі розглядається застосування методу продовження за параметром для дослідження коливань саме такої системи, якщо удар моделюється силою контактної взаємодії.

1. Постановка задачі

Віброударна система складається із основного тіла та приєднаного, яке може відігравати роль ударного гасителя коливань. Докладніше ця модель була описана в [2,3]. Її розрахункова схема

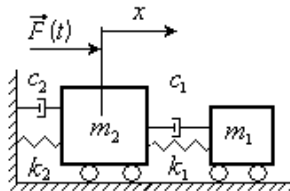


Рис. 1

зображена на рис.1.

Параметри вібростеми, яка досліджується в цій роботі, приведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Назва характеристики	Основне тіло	Придане тіло
Маса m_i , кг	1000,0	100,0
Парціальна частота коливань ω_i , рад/с	6,283	4,727
Коефіцієнт демпфірування ξ_i	0,036	0,20
Модуль Юнга E_i , Н/м ²	$2,099 \cdot 10^{11}$	$2,099 \cdot 10^{11}$
Коефіцієнт Пуассона μ_i	0,3	0,3
Вихідна відстань між тілами D , м	0,05	
Константи A, B , 1/м, q	$A=0,5; B=0,5; q=0,319$	
Амплітуда навантаження F_0 , Н	400,0	
Частота навантаження ω , рад/с	6,0	
Початкова фаза навантаження φ_0 , рад	0,0	

Рівняння руху системи мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 = -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{\text{кон}}(t), \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 = -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2x_2 - 2\xi_1\omega_1\mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{\text{кон}}(t)],$$

де $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi = \frac{m_2}{m_1}$.

Зовнішнє гармонічне навантаження запишемо у вигляді:

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

де λ - параметр інтенсивності навантаження, $T = 2\pi/\omega$ - його період. Продовження розв'язку будуватимемо за параметром λ .

Вихідні умови задачі такі:

$$x_1(0) = 0.05 \text{ м}, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0. \quad (3)$$

Сила контактної взаємодії $F_{\text{кон}}(t)$, яка моделює удар, діє лише під час удару і відсутня в інші моменти часу. Контактна сила може бути описана різними законами, наприклад, законом пружності [4]. В своїх роботах обираємо для її опису контактний закон Герца [5,6]:

$$F_{\text{кон}}(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (4)$$

де $\alpha(t) = x_2 - x_1$ – відносне зближення тіл,

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad \delta_2 = \frac{1-\mu_2^2}{E_2\pi}, \quad (5)$$

μ_i и E_i – коефіцієнти Пуасона та модулі Юнга для обох тіл, A , B та q – константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту.

Модифікація методу продовження розв'язку за параметром застосовується для дослідження T -періодичного усталеного режиму коливань віброударної системи.

2. Реалізація методу

Згідно з теоретичними положеннями застосування методу продовження розв'язку за параметром для дослідження віброударних систем під дією періодичного зовнішнього навантаження, які описані в [1], побудова розв'язків рівнянь руху (1) на періоді усталеного T -періодичного процесу, реалізується відповідно до наступної послідовності дій.

1. На першому кроці обчислень надамо параметру інтенсивності навантаження λ деяке початкове значення, наприклад $\lambda = \lambda_{(k)} = \lambda_{(1)} = 1$.

2. Знаходимо розв'язок вихідної нелінійної системи (1) із заданими вихідними умовами (3) прямим чисельним інтегруванням при значенні параметра інтенсивності $\lambda_{(1)} = 1$, який був обраний в п.1. Графік цього розв'язку приведений на рис. 2.

На рисунках товстою лінією позначені графіки коливань основного тіла m_2 , а тонкою – приєднаного тіла m_1 .

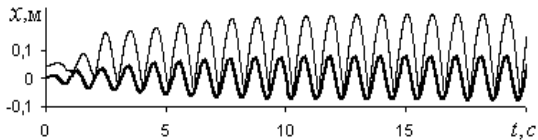


Рис. 2

3. Після закінчення перехідного процесу і встановлення усталеного T -періодичного режиму коливань обираємо стан при деякому $t = t_0$, який буде вихідним для наступного кроку обчислень (рис. 3).

На графіках маркерами помічені точки, які відповідають зазначеному стану. Вихідні значення

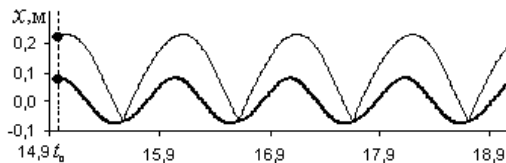


Рис. 3

змінних такі:

$$t_0 = 14,93 \text{ с}, \quad x_{1(k)}(t_0) = 0,2067 \text{ м}, \quad x_{2(k)}(t_0) = 0,0758 \text{ м}, \quad (6)$$

$$\dot{x}_{1(k)}(t_0) = 0,3139 \text{ м/с}, \quad \dot{x}_{2(k)}(t_0) = 0,1837 \text{ м/с}.$$

4. Розв'язок рівнянь руху (1) на одному періоді T зовнішнього навантаження при таких вихідних даних зображений на рис. 4.

Для побудови кривої навантаження (кривої залежності напіврозмахів коливань від амплітуди зовнішнього навантаження) знаходимо напіврозмах за формулою

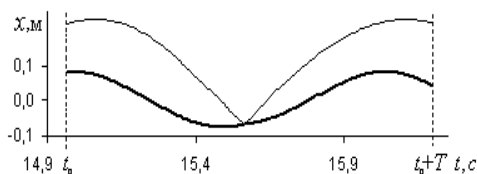


Рис. 4

$$A_{\max} = \frac{|x_{\max}| + |x_{\min}|}{2} \quad (7)$$

і отримуємо першу точку на цій кривій при $\lambda = 1$.

5. На наступному кроці надамо параметрові навантаження приріст $\Delta\lambda_{(k)}$: $\lambda_{(k+1)} = \lambda_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}$. Обираємо, наприклад, $\Delta\lambda_{(k)} = 0,1$. При новому значенні амплітуди зовнішнього навантаження коливальний процес змінюється, значення переміщень та швидкостей при $t = t_0$ стають іншими – вихідні значення змінних (6) отримують прирости. Значення цих приростів є розв'язками лінійної алгебраїчної системи чотирьох рівнянь з чотирма невідомими [1].

6. Для обчислення чотирьох стовпців коефіцієнтів алгебраїчної системи розв'язуємо чотири системи диференціальних рівнянь 2-го порядку з певними вихідними умовами – розв'язуємо чотири задачі Коші. Розв'язки цих систем при $t = t_0 + T$ визначають коефіцієнти лінійної алгебраїчної системи.

7. Для обчислення правих частин цієї системи розв'язуємо п'яту систему диференціальних рівнянь 2-го порядку з нульовими вихідними умовами – розв'язуємо п'яту задачу Коші. Значення розв'язку при $t = t_0 + T$ визначають праві частини лінійної алгебраїчної системи.

8. Розв'язуємо лінійну алгебраїчну систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими. Розв'язок цієї системи дає прирости вихідних умов, що розшуковуються:

$$\Delta x_{1(1)}(t_0) = 0,0189 \text{ м}, \quad \Delta x_{2(1)}(t_0) = 0,0130 \text{ м},$$

$$\Delta \dot{x}_{1(1)}(t_0) = 0,0188 \text{ м/с}, \quad \Delta \dot{x}_{2(1)}(t_0) = 0,0101 \text{ м/с}.$$

9. Знаходимо нові вихідні значення змінних для виконання наступного кроку методу продовження за параметром. Вони відповідають ustalеному T -періодичному режиму коливань при значенні параметра $\lambda_{(2)}$ на 2-му кроці (взагалі $\lambda_{(k+1)}$ на $(k+1)$ -му кроці):

$$\begin{aligned}x_{1(2)}(t_0) &= x_{1(1)}(t_0) + \Delta x_{1(1)}(t_0) = 0,2067_m + 0,0189_m = 0,2256_m, \\x_{2(2)}(t_0) &= x_{2(1)}(t_0) + \Delta x_{2(1)}(t_0) = 0,0758_m + 0,0130_m = 0,0887_m, \\\dot{x}_{1(2)}(t_0) &= \dot{x}_{1(1)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{1(1)}(t_0) = 0,3139_m/c + 0,0188_m/c = 0,3327_m/c, \\\dot{x}_{2(2)}(t_0) &= \dot{x}_{2(1)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{2(1)}(t_0) = 0,1837_m/c + 0,0101_m/c = 0,1937_m/c.\end{aligned}$$

10. На наступному $(k+1)$ -му кроці із залученням отриманих в п. 9 вихідних даних та при новому значенні параметра $\lambda_{(k+1)}$ розв'язуємо вихідну нелінійну систему (1) прямим чисельним інтегруванням на періоді T , при цьому очевидно, що перехідний процес обминається.

11. Знаходимо нев'язки $r_{1(k+1)}, r_{2(k+1)}, \dot{r}_{1(k+1)}, \dot{r}_{2(k+1)}, r_{0(k+1)}$ $(k+1)$ -го кроку, перевіряючи тим самим виконання умов періодичності:

$$\begin{aligned}r_{1(k+1)} &= x_{1(k+1)}(t_0 + T) - x_{1(k+1)}(t_0) = 3,37 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \\r_{2(k+1)} &= x_{2(k+1)}(t_0 + T) - x_{2(k+1)}(t_0) = 8,44 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \\\dot{r}_{1(k+1)} &= \dot{x}_{1(k+1)}(t_0 + T) - \dot{x}_{1(k+1)}(t_0) = -1,30 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\\dot{r}_{2(k+1)} &= \dot{x}_{2(k+1)}(t_0 + T) - \dot{x}_{2(k+1)}(t_0) = 9,64 \cdot 10^{-4} \text{ м}.\end{aligned} \quad (8)$$

Якщо нев'язки малі (менше заданого критерію), отримуємо чергову $(k+1)$ -у точку на кривій навантаження після обчислення напіврозмаху за формулою (7) і переходимо до наступного $(k+2)$ -го кроку – повторюємо обчислювальний процес, починаючи с п. 5. Якщо нев'язки великі, то зменшуємо приріст параметра $\Delta \lambda_{(k)}$ і також знов повторюємо обчислювальний процес, починаючи з п. 5.

Побудови розв'язків необхідно доповнити аналізом стійкості отриманих періодичних режимів, тому що в дійсності реалізуються тільки стійкі коливання. Це можна зробити за допомогою методу Флоке, який був застосований в [2] для дослідження стійкості періодичних віброударних режимів, якщо удар був змодельований граничними умовами.

3. Обговорення результатів

Розв'язки рівнянь руху (1), які визначають переміщення обох тіл віброударної системи, що були одержані за два кроки обчислювального процесу для значень амплітуди зовнішнього навантаження $\lambda_{(1)} = 1,0$, $\lambda_{(2)} = 1,1$, $\Delta \lambda_{(1)} = 0,1$ приведені на рис. 5. Маркерами на рисунку виділені

значення переміщень тіл на початку при $t = t_0$ та в кінці періоду при $t = t_0 + T$.

Фазові траєкторії для обох тіл при цих значеннях параметру навантаження зображені на рис.6.

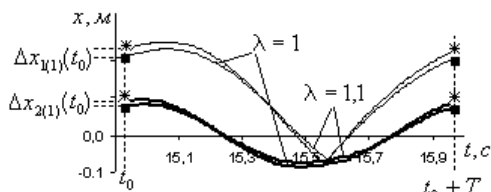


Рис.5

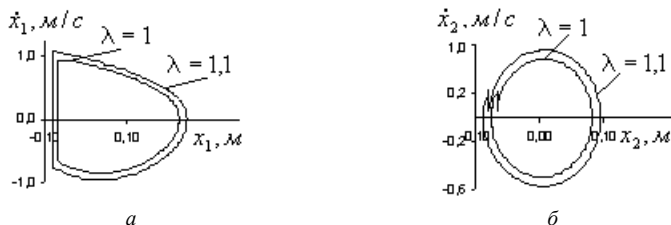


Рис.6

На рис. 7 зображені переміщення тіл на періоді усталеного T -періодичного режиму коливаний та їхні фазові траєкторії для п'ятьох значень параметру навантаження. Ці рисунки наочно демонструють зміну характеристик динамічних режимів в залежності від амплітуди зовнішнього навантаження.

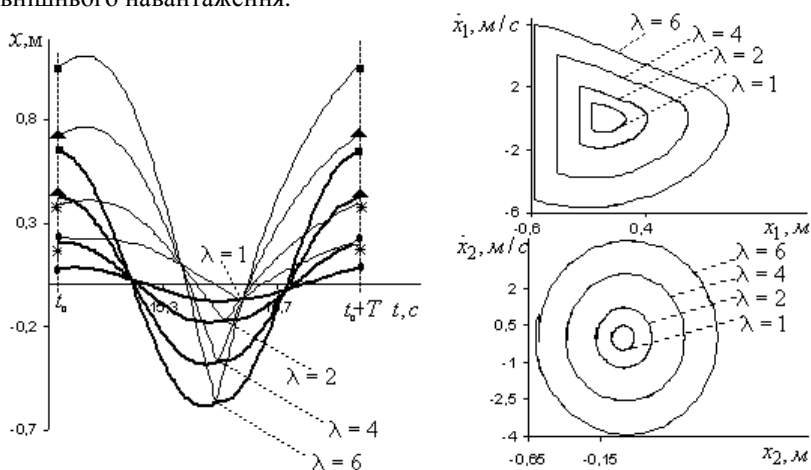


Рис. 7

Криві навантаження, що були побудовані за приведеною схемою обчислень, приведені на рис. 8.

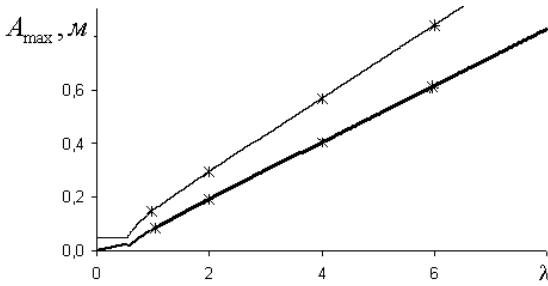


Рис. 8

Ділянки кривих навантаження, що відповідають малим значенням λ ($\lambda \leq 0,55$), показують що при таких величинах зовнішнього навантаження напіврозмахи коливань приєднаного тіла не змінюються. Пояснюється це тим, що при невеликому зовнішньому навантаженні удар між тілами не відбувається, що добре видно на рис. 9, де представлені переміщення тіл віброударної системи, які були отримані прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху (1) при $\lambda = 0,5$.

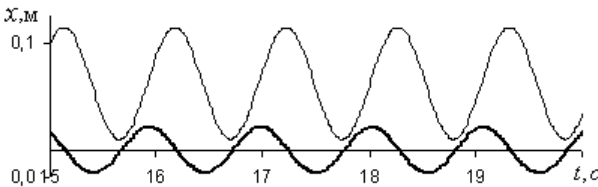


Рис.9

На рис. 10 представлені залежності значень контактної сили від параметра інтенсивності навантаження.

Для перевірки достовірності результатів, отриманих при побудові кривих навантаження та графіків контактної сили, виконаємо пряме чисельне інтегрування рівнянь (1) при декількох значеннях λ . На рис.11 зображені переміщення тіл при $\lambda=2$ (рис.11,а) та при $\lambda=4$ (рис.11,б), які включають перехідний процес.

Значення напіврозмахів та максимумів контактної сили, які отримані для усталених режимів коливань, відмічені маркерами на графіках рис. 8 та рис.10,а. Спостерігаємо добрий збіг результатів, що були одержані

методом продовження за параметром та прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху (1).

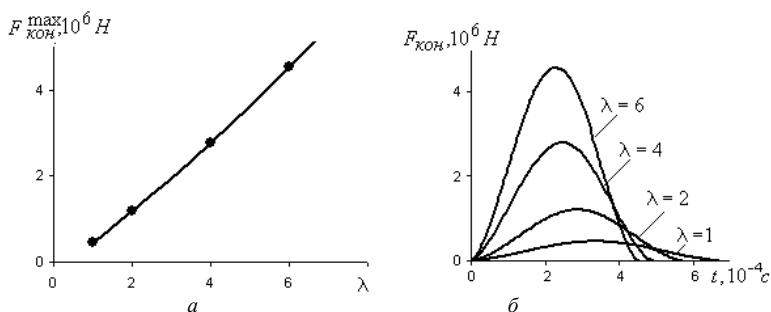


Рис.10

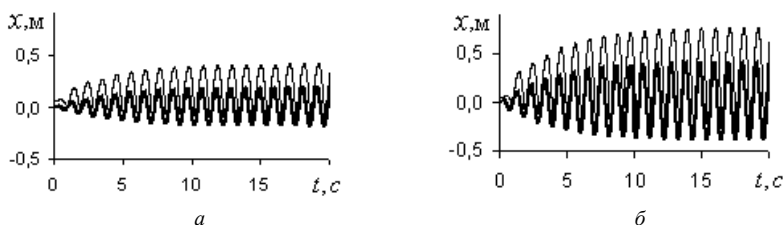


Рис.11

Висновки. Отже, обчислення та побудови, які були виконані в цій роботі, наочно демонструють, як за суттєво спрощеною процедурою, обминаючи перехідний процес, крок за кроком здобуваються розв'язки системи нелінійних диференціальних рівнянь руху віброударної системи на періоді в усталеному T -періодичному режимі коливань. Грунтуючись на отриманих розв'язках, будуються графіки різних динамічних характеристик коливань віброударної системи в залежності від амплітуди періодичного зовнішнього навантаження, достовірність яких підтверджуються збіжністю зі значеннями, що одержані прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА, вип. 87. 2011. - С. 63-73.
2. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.

3. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
4. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – С. 69-77.
5. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.
6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.

Стаття надійшла до редакції 19.10.2011 р.

Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПОСТРОЕНИИ КРИВЫХ НАГРУЖЕНИЯ

В статье рассматривается порядок реализации и результаты числовых исследований динамики двухмассовых виброударных систем с двумя степенями свободы под действием периодической внешней нагрузки, полученные методом продолжения решения по параметру. Решения уравнений движения получены в зависимости от параметра амплитуды внешней нагрузки, строятся кривые нагружения и графики контактной силы. Удар моделируется нелинейной силой контактного взаимодействия, которая описывается законом Герца. Проверена достоверность полученных результатов.

Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.

THE REALIZATION OF CONTINUATION AFTER PARAMETER METHOD FOR VIBROIMPACT SYSTEMS AT LOADING CURVES CONSTRUCTION

The realization order and the numerical research results for two-mass vibroimpact systems with two degrees of freedom are examined in this article. These systems are under periodic external loading. The numerical researches are fulfilled by continuation after parameter method. The solutions of movement equations are obtained depending of external loading amplitude, the loading curves and the contact force graphes are constructed. The impact is simulated by the nonlinear contact interaction force describing by Hertz law. Reliability of the received results is controlled.

УДК 624.011

В.З. Кліменко, канд. техн. наук

АНАЛІЗ ПРИБЛИЗНИХ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ ДЕРЕВ'ЯНИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА СКЛАДНИЙ ОПІР

Висловлюється методологічна претензія до методів розрахунку і сумнів у доцільності їхнього використання як нормативних.

В [1] автор з методологічної позиції дав оцінку неадекватності розрахунку елементів, що працюють на складний опір за нормами проектування при різній їх гнучкості у площині згину. В цій статті виконано порівняння нормативного методу розрахунку з більш точними, але так само приблизними. В розрахункових формулах складного опору цих методів для перевірки крайових напружень складові від поздовжнього зусилля $\sigma_c = N / F_{розр}$ однакові. Відрізняються вирази для обчислення розрахункового згинального моменту $M_{розр}$ в деформованій схемі елемента. Тому в статті розглядається формування тільки цієї складової у формулі $\sigma_{кр} = N / F_{розр} + M_{розр} / W_{розр}$.

Нормативний метод розрахунку 1

Розрахунковий момент знаходиться за формулою

$$M_D = \frac{M_q}{\xi}, \quad (1)$$

де M_q - згинальний момент від поперечного навантаження, а коефіцієнт ξ знаходиться за формулою

$$\xi = 1 - \frac{N}{\phi \cdot R_c \cdot F_{\text{бр}}}, \quad (2)$$

де $\phi = A / \lambda^2$ (A - const, яка залежить від міцності цільної чи клеєної деревини); R_c - розрахунковий опір на стиск; $F_{\text{бр}}$ - площа поперечного перерізу елемента.

В формулі (2) коефіцієнт ϕ за своєю природною суттю є коефіцієнтом поздовжнього згину Ейлера стержня $\phi_E = N_E / N = (\pi^2 EI / l^2) / R_c^{M.M} \cdot F_{\text{бр}}$. При $E=10^4$ МПа і межі міцності на

стиск вздовж волокон деревини $R_c^{M.M} = 33 \text{ МПа}$ величина $\varphi_E \approx 3000 / \lambda^2$. Цей відступ за контекстом статті не зайвий, оскільки в формулі (2) N - це внутрішнє зусилля в елементі, що працює на згин із стиском, наприклад, верхній пояс ферми, а φ залишається коефіцієнтом для Ейлерова стержня. При $\lambda < 55$ такий стержень не може існувати в природі, а такі гнучкості звичайні для верхніх поясів великопанельних ферм з клеєної деревини. Таким чином у формулі (2) об'єднані два різних фізичних явища: робота реального елемента на стиск при його одночасному згинанні і стійкість віртуального стиснутого стержня, для якого коефіцієнт φ стає більше одиниці. На ділянці гіперболи Ейлера з $\lambda < 55$ φ для елемента, що працює на стиск зі згином, є деякий параметр, а не коефіцієнт повздовжнього згину і, як параметр, він може бути більше одиниці. Так φ і треба визначати. В цьому автор бачить суттєву претензію до нормативного методу розрахунку з методологічної позиції при застосуванні його для окремої групи елементів, які працюють на складний опір.

Метод розрахунку 2

Розрахунковий згинальний момент в деформованій схемі елемента

$$M_{\text{розр}} = M_q + N \cdot f_D, \quad (3)$$

де f_D - прогин елемента в деформованому стані в момент встановлення рівноваги системи.

З методологічної точки зору на метод розрахунку вираз (3) для згинального моменту значно більш логічний ніж за формулою (1). Якби прогин елемента f_D знаходився в результаті інтегрування диференціального рівняння викривленої осі стиснено-зігнутого елемента, рішення за формулою (3) було б абсолютно адекватно фізичному явищу в такому елементі. Однак прогин в деформованій схемі елемента знаходиться за приблизною формулою

$$f_D = f_q / \left(1 - \frac{N}{N_E} \right), \quad (4)$$

в якій f_q - прогин тільки від поперечного навантаження.

З огляду на те, що при симетричному згині шарнірно закріпленого на кінцях елемента справедлива, з деякою похибкою, формула $f_q = M_q / N_E$, слідує, що

$$f_D = \frac{M_q}{N_E \cdot \left(1 - \frac{N}{N_E} \right)} = \frac{M_q}{N_E - N}. \quad (5)$$

Тоді

$$M_{розр} = M_q + \frac{N \cdot M_q}{N_E - N},$$

а після перетворень маємо

$$M_{розр} = \frac{M_q}{1 - \frac{N}{N_E}}, \quad (6)$$

де N_E - критична стискаюча сила по Ейлеру.

Зараз неможливо відповісти на те, чому для нормативного розрахунку не прийнято визначення згинального моменту в деформованій схемі по формулі (6), в якій відсутній в явному виді коефіцієнт φ , а прийнята формула (2). Можливо тому, що в той час не було конструкцій з елементами при $\lambda < 55$, але у виразі $\varphi = 3000/\lambda^2$, який за фізичним змістом не повинен перевершувати одиницю, накладається обмеження на величину λ , що мало бути відображено в методі розрахунку елементів на складний опір.

Задовільні результати розрахунків за обома методами 1 і 2 забезпечуються математичною структурою формули (2) і знаменнику у формулі (6), в якій

$$1 - \frac{N}{N_E} = \xi. \quad (7)$$

Але це не може бути науковим поясненням методів. В методі 2 принаймні немає приводу для «звинувачення» його з методологічної позиції. За фізичною суттю ці методи ідентичні, але по-різному формалізовані і не є адекватними фізичному явищу в елементах, які працюють на одночасну дію стиску і згину.

Метод розрахунку 3

Цей метод розрахунку приведено в [2]. Формально він однотипний з методом 2, але його інтерпретація робить його привабливішим з позиції викладача вищої школи для виконання студентами науково-дослідної роботи.

Максимальний згинальний момент всередині прольоту балки, шарнірно обпертої на опорах, дорівнює

$$M_{\max} = M_q + N \cdot f_{\max} \quad (8)$$

в якій прогин всередині прольоту становить

$$f_{\max} = f_q \cdot \frac{\chi_E}{\chi_E - 1}, \quad (9)$$

де $\chi_E = N_E/N$.

В [2] відмічається те, що формула (9) точна тільки для рівномірно розподіленого навантаження, а для всіх інших навантажень є приблизною. Ось який вид мають формули для максимального згинального моменту, для деяких розрахункових схем елементів після математичних перетворень:

- для рівномірно розподіленого навантаження

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + N \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} \cdot \frac{\chi_E}{\chi_E - 1} = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{\chi_E + 0,028}{\chi_E - 1}; \quad (10)$$

- для зосередженої сили всередині прольоту

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{\chi_E + 0,177}{\chi_E - 1}; \quad (11)$$

- для чистого згину

$$M_{\max} = M \frac{\chi_E + 0,234}{\chi_E - 1}. \quad (12)$$

З точки зору формалізму структура формул (10), (11), (12) логічна порівняно з формулами (1) і (6). Присутність величини $(\chi_E + n)/(\chi_E - 1)$ «відчутно» демонструє зміну згинального моменту в деформованій схемі. З позиції викладача запис формул типу (10)...(12) в навчально-методичній літературі також краще ніж формули (1) і (6), в яких деформована схема елементів децю забувальована. В цьому методі відсутній в явному виді параметр ϕ , і не треба пояснювати неметодологічність метода, а логічного пояснення, як слідує з розглянутих вище методів, цьому немає.

Порівняння методів розрахунку

В табл. 1 дані вихідні дані для обчислення розрахункового згинального моменту в деформованій схемі верхніх поясів конструкцій, показаних в графі 1. Верхні пояси виконані з клееної деревини, геометричні характеристики їх дані в графах 2, 3, 4. Вихідні дані взято із прикладів проектування [3, 4], обов'язковою умовою для яких було максимальне наближення крайових напружень по формулі складного опору до розрахункового опору клееної деревини стисканню вздовж волокон, відповідно до норм проектування. Приклади вибрані таким чином, щоб гнучкості верхніх поясів (графа 5) в площині згину були більше і менше 55, і відповідно коефіцієнт ϕ для прикладів 1 і 2 менше одиниці, а параметр ϕ для прикладів 3 і 4 більше одиниці (графа 6).

Різниця між $N_{кр}$ в формулі (2) і N_E в формулі (7) викликає різницю у величинах розрахункових моментів (графа 2, 3, 4 табл. 2). Розрахунок по методам 2 і 3 (графи 3 і 4) дає менший запас ніж розрахунок за нормативним методом (графа 2). Ця обставина не робить методи 2 і 3 більш привабливими. Зайвий запас всіх трьох приблизних методів розрахунку,

Таблиця 1

Вихідні дані для розрахунку стиснуто-згинальних елементів

№	Геометричні схеми конструкцій	Геометричні характеристики перерізу верхнього поясу				Розрахункові характеристики				Зусилля, кН			
		1	2	3	4	λ	$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}$	по (2)	по (7)	$N_{sp} = \varphi R_c F_{sp}$	N_E по формулі Ейлера	$N_{max} = R_c \cdot F_{sp}$	
		$b \times h, \text{ см}$	$F_{об}, \text{ см}^2$	$I, \text{ см}^4$	λ	$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}$	по (2)	по (7)	Розрахункові коеф. γ_N	10	11	12	
1		14×42,9	600,6	92112	78	0,493	0,890	0,946	52,4	441	965	1982	
2		13,5×31,5	420,5	34004	58,6	0,874	0,780	0,898	122,6	551	1205	1383	
3		14,5×38,5	558,3	68955	40,7	1,81	0,869	0,940	198,9	1516	3313	1842 2456*	
4		14×52,8	739,2	171731	39,5	1,99	0,877	0,942	263,0	2206	4566	2439 3252*	

* Значення N_{max} , отримані з заміною R_c^i на R_c^{br} .

порівняно з розрахунками по точному методу, про який мова йшла в [1], зовсім не обов'язковий. А коли він досягається за рахунок серйозної методологічної претензії до методів розрахунку, то краще від цих методів відмовитись. В [1] автор цю власну позицію обґрунтовував тим, що не можна приймати за нормативний, такий метод, в якому чи в явному вигляді, чи завуальовано допускається коефіцієнт повздовжнього згину більше одиниці. Неметодологічність метода можна приховати записавши у формулі (2) замість φ його значення A/λ^2 . Так і було у всіх попередніх нормах проектування дерев'яних конструкцій аж до чинних. Чи правильно це? А як приховати чи пояснити той факт, що в реальних стиснено-зігнутих елементах при малій їхній гнучкості (строки 3 і 4 табл. 1) максимально можливі зусилля стискання у них (графі 12 табл. 1) менше сили Ейлера (графі 11 табл. 1). Пояснення є – таке можливо в Ейлеровому стержні при $\lambda < 55$. Але він не має ніякого відношення до верхнього пояса ферм. В нормативному документі повинен бути точний, адекватний фізичному явищу у верхніх поясах ферм метод розрахунку.

Таблиця 2

Розрахункові згинальні моменти у стиснуто-згинальних елементах

№	Згинальні моменти, κHm				M_i/M_q		
	M_q	Розрахункові згинальні моменти за методом					
		1 по (1)	2 по (6)	3 по (10)	M_1/M_q	M_2/M_q	M_3/M_q
	1	2	3	4	5	6	7
1	43,8	49,21	46,3	46,43	1,123	1,057	1,06
2	29,2	37,44	32,52	32,59	1,282	1,114	1,116
3	39,1	44,29	41,59	41,66	1,151	1,064	1,065
4	63,4	72,29	67,31	67,39	1,140	1,062	1,063

На завершення

Відчуваючи відповідальність заяви про нелегітимність нормативного методу розрахунку деякої групи стиснуто-згинальних елементів, автор удається до допомоги знаних авторитетів і вважає доречним навести два висловлювання.

Перше належить видатному вченому – математику і суднобудівельнику академіку О.М. Крилову [5]: "... долголетней практикой я убедился, что если какая-нибудь нелепость стала рутиной, то чем эта нелепость абсурднее, тем труднее её уничтожить".

Друге – провідному російському фахівцю з теорії розрахунків дерев'яних конструкцій проф. Е.М. Серову і міститься наприкінці

змістовної трилогії, присвяченої сучасним конструкціям з клеєної деревини [6]: “Однако устоявшиеся тенденции сильны, а оппоненты иногда не только амбициозны, но и агрессивны: приходится длительное время отстаивать и доказывать очевидные вещи. Конструкциям от этого “легче не становится”. Це висловлювання вмотивоване його впевненістю у помилковості механічного перенесення деяких положень розрахунку конструкцій із цільної деревини на конструкції із клеєної деревини. Автор цієї статті повністю поділяє цю впевненість.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Клименко В.З.* Розрахунок дерев'яних елементів, що працюють на стиск зі згином. // Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2011.- Вип. 87.- С. 110-117.
2. Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический. Под ред. *А.А. Уманского*. ГСИ. М.: 1960. – 791 с.
3. Конструкция из дерева и пластмасс. Примеры расчета и конструирования. Учеб. пособие для вузов / *Иванов В.А., Клименко В.З.* и др. – Киев: Вища школа. 1981. – 392 с.
4. *Клименко В.З.* Проектирование деревянных конструкций: Учеб. пособие. – Киев: ИСМО. 1998. – 432 с.
5. *Крылов А.Н.* Мои воспоминания. – Л.: Судостроение. 1984. – 480 с.
6. *Серов Е.Н., Санников Ю.Д.* Проектирование клееных деревянных конструкций Ч. III. Проектирование гнутоклееных рам. – СПб. 1999. – 140 с.

Стаття надійшла до редакції 31.03.2011 р.

Клименко В.З.

АНАЛИЗ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ДЕРЕВЯННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, РАБОТАЮЩИХ НА СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Высказывается методологическая претензия к методам расчета и сомнение в целесообразности их использования в качестве нормативных.

Klimenko V.Z.

ANALYSIS OF APPROXIMATE METHODS FOR CALCULATING THE WOODEN ELEMENTS THAT ARE DIFFICULT TO RESIST

The views expressed methodological claim to the methods of calculation and questioned the appropriateness of their use as normative.

УДК 539.3

Д.Г. Чернописький, канд. фіз.-мат. наук

ЗБІЖНІСТЬ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ВАРІАНТІВ МЕТОДУ ЗБУРЕННЯ ФОРМИ ГРАНИЦІ В ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ, ОБМЕЖЕНИХ НЕКАНОНІЧНИМИ ПОВЕРХНЯМИ

Отримано розклад точного розв'язку осесиметричної задачі пружності про рівномірний розтяг-стиск середовища з еліпсоїдальною порожниною по степенях параметра, що характеризує її ексцентриситет. При цьому коефіцієнти розкладу точного розв'язку задачі в точності співпали з першими трьома коефіцієнтами при степенях параметра наближеного розв'язку, отриманого 1-им варіантом методу збурення форми границі, які визначають величину концентрації напружень на поверхні порожнини. Виконано порівняння числових даних коефіцієнтів концентрації напружень точного розв'язку задачі Ламе для оболонки, обмежених еліпсоїдальними поверхнями або близькими до них, з їх величиною отриманого згідно з наближеними розв'язками 1-го і 2-го варіантів методу збурення форми границі.

Перший і другий варіанти методу збурення форми границі та його застосування для розв'язку просторових задач пружної рівноваги тіл, обмежених неканонічними поверхнями, детально викладено в монографіях [2, 6]. Основою методу є представлення компонент напружено-деформованого стану (НДС) тіла неканонічної форми в ряди по степенях параметру, що характеризує величину відхилення неканонічної поверхні від відповідної канонічної. В даному випадку розв'язок задачі для визначення НДС тіла неканонічної форми зводиться в кожному із наближень до послідовності граничних задач для тіла канонічної форми у відповідній системі координат, які мають в замкненому вигляді точний або наближений аналітичний розв'язок включно з нульовим наближенням. Згідно з методом збурення форми границі для кожного із послідовних наближень в загальному вигляді у системах координат (прямокутна, циліндрична, сферична) в [6] приведено в загальному вигляді диференціальні оператори, залежні від функції із рівняння неканонічної поверхні тіла, що дозволяють на основі аналітичних розв'язків в попередніх наближеннях отримати граничні умови для наступного наближення.

1. Перший варіант методу збурення форми границі орієнтований на розв'язок класу просторових задач теорії пружності для тіл, обмежених неканонічними поверхнями, які віднесені до криволінійної ортогональної системи координат ρ, γ, φ . В довільній точці M координатної поверхні S

($\rho = \text{const}$) між одиничними векторами (ортами) $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\gamma, \vec{e}_\varphi$ і ортом нормалі \vec{n} до S виконуються умови ортогональності

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_n = 1, \quad \vec{e}_\gamma \cdot \vec{e}_n = 0, \quad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_n = 0. \quad (1)$$

Вважаємо, що контур поперечного перерізу поверхні обертання порожнини в криволінійних координатах ρ, γ, φ задано рівнянням

$$r_0^{-1} \omega(\xi) = \xi + \varepsilon f(\xi), \quad (2)$$

де r_0 — характерний розмір порожнини, $\xi = \rho e^{i\gamma}$, $i = \sqrt{-1}$, $|\varepsilon| \ll 1$. Для поверхонь обертання зв'язок між безрозмірними сферичними r, θ, α (θ — кут довготи, α — широти) і криволінійною системою координат представимо співвідношенням [2]:

$$r = \frac{1}{r_0} \sqrt{\omega(\xi) \overline{\omega(\xi)}}, \quad \theta = \arctg \frac{\text{Im} \overline{\omega(\xi)}}{\text{Re} \omega(\xi)}, \quad \alpha = \varphi. \quad (3)$$

Зокрема, якщо в (2) задати функцію $f(\xi) = \xi^{-1}$ при $\rho = \text{const}$, то отримаємо рівняння поверхні еліпсоїдної порожнини з параметрами

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a+b} \left(\frac{a}{b} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right), \quad (4)$$

де a, b — півосі еліпсоїда обертання, ε — ексцентриситет. Значенням $\varepsilon > 0$ ($a > b$) відповідає відносно Oz витягнута, а при $\varepsilon < 0$ ($a < b$) — стиснута еліпсоїдальні порожнини.

Точні аналітичні розв'язки просторових задач теорії пружності для тіл, обмежених еліпсоїдальними поверхнями, отримано в [9]. Зокрема, в [5] приведено точний розв'язок задачі про концентрацію напружень на поверхні еліпсоїдальної порожнини в круговому циліндрі при крученні його моментом M . У випадку рівномірного розтягу-стиску ізотропного середовища з еліпсоїдальною порожниною точний аналітичний розв'язок задачі про концентрацію напружень на її поверхні отримано в [1]. В [4] отримано точний аналітичний розв'язок просторової задачі через його представлення поліномами Лежандра 1-го і 2-го роду про пружну рівновагу еліпсоїдальної оболонки під дією внутрішнього тиску p (задача Ламе). При цьому аналітичні та числові результати про НДС еліпсоїдальної оболонки отримані на основі розв'язку скінченної алгебраїчної системи рівнянь 20-го порядку, що слідує із асимптотики для поліномів Лежандра при редукції безкінечної системи алгебраїчних рівнянь як коефіцієнтів при невідомих високого порядку.

Таким чином, точні аналітичні розв'язки і числові результати просторових задач теорії пружності про кручення вала, розтяг-стиск

ізотропного середовища з еліпсоїдальною порожниною, задача Ламе для еліпсоїдальної оболонки порівнювались з числовими даними [2], отриманими із розв'язків вище вказаних задач згідно 1-го варіанта методу збурення форми границі на основі перших трьох наближень в аналітичному вигляді й дослідженням їх практичної числової збіжності. Однак, питання про збіжність цього варіанта методу збурення форми границі залишалось відкритим. У статті [3] вперше отримано розклад точного розв'язку задачі [5] про кручення циліндричного вала з еліпсоїдальною порожниною в ряд по степеням параметра ε (ε - ексцентриситет порожнини, що характеризує відхилення її поверхні від сфери). При цьому поверхню еліпсоїдальної порожнини в [2] прийнято за основу неканонічною, що є близькою до сферичної ($\varepsilon \ll 1$). В результаті було отримано перші три члени розкладу з точністю до $O(\varepsilon^3)$, коефіцієнти яких при степенях $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ точно співпали [3] відповідно з коефіцієнтами при тих же степенях, отриманих згідно з 1-м варіантом методу збурення форми границі [2].

2. Розглянемо розклад в ряд по степенях ε точного розв'язку задачі [10] про рівномірний всебічний розтяг-стиск ізотропного середовища з еліпсоїдальною порожниною зусиллям постійної інтенсивності $\sigma_0 = \text{const}$. Для викладок в подальшому скористаємось позначеннями, які прийняті в монографії [2] та статті [3].

Віднесемо поверхню еліпсоїдальної порожнини до ортогональної криволінійної системи координат ρ, γ, φ , яка співпадає з координатною поверхнею $\rho = \text{const}$.

Основний напружений стан середовища має вигляд

$$\bar{\sigma}_{\rho\rho} = \bar{\sigma}_{\gamma\gamma} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_0 \quad (\bar{\sigma}_{\rho\gamma} = \bar{\sigma}_{\rho\varphi} = \bar{\sigma}_{\gamma\varphi} = \sigma_0) \quad (5)$$

($\sigma_0 > 0$ — розтяг, $\sigma_0 < 0$ — стиск).

Компоненти, що відповідають напруженому стану середовища при наявності порожнини, позначимо відповідно $\sigma_{\rho\rho}^T = \sigma_{\gamma\gamma}^T = \sigma_{\varphi\varphi}^T$, $\sigma_{\rho\gamma}^T = \sigma_{\rho\varphi}^T = \sigma_{\gamma\varphi}^T$. Тоді в припущенні, що поверхня порожнини вільна від напружень, отримуємо граничні умови.

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=1} = (\sigma_{\rho\rho}^T + \bar{\sigma}_{\rho\rho}) \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \sigma_{\rho\gamma} \Big|_{\rho=1} = (\sigma_{\rho\gamma}^T + \bar{\sigma}_{\rho\gamma}) \Big|_{\rho=1} = 0. \quad (6)$$

Для визначення компонент σ_{ij}^T ($i, j = \rho, \gamma$), що відповідають точному розв'язку [10], використано представлення їх через гармонічні функції напружень у формі П.Ф. Папковича, а у випадку 1-го варіанта методу збурення форми границі в [2] — представлено розв'язки у вигляді розкладів в ряди по степенях малого параметра ε за умови ($\varepsilon \ll 1$). При

цьому в [2] коефіцієнти при степенях ε , як компоненти напружень, визначаються через гармонічні функції в сферичній системі координат згідно роботи В.Т. Чена [11]. В нульовому наближенні при ε^0 отримуємо розв'язок про напружений стан рівномірного розтягу-стиску на "нескінченності" середовища з сферичною порожниною. В подальшому скористаємось представленням визначальних коефіцієнтів концентрації напружень згідно із точними розв'язками [10], а саме:

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\sigma_0} \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\xi_1}{2N} \left[2(1+\nu)c^2\xi_1 - c(2\nu\xi_1 + 2\nu + 7\xi_1) + 1 + 4\xi_1 + 2\nu \right],$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\sigma_0} \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{1}{2N} \left\{ \xi_1 \left[2(1+\nu)c^2\xi_1 - c(\xi_1 + 6 + 4\nu(2\xi_1 - 1)) + 4\nu\xi_1 + 3 \right] + 2(1-\nu) \right\}, \quad (7)$$

де $N = -(1+\nu)c^2\xi_1^2 + c[\xi_1^2 - 2(1-\nu)\xi_1] + \xi_1 + 1 - \nu$; ν — коефіцієнт Пуансона ізотропного середовища. Величини c і ξ_1 в (7) визначаються так:

1⁰ сплюснута еліпсоїдальна порожнина в полюсах ($-\varepsilon$, $a < b$) по відношенню до осі Oz

$$c = \frac{\arctg \sqrt{\xi_1 - 1}}{\sqrt{\xi_1 - 1}} \quad \left(\xi_1 = \frac{b}{\rho^*} = \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \left(\frac{1 - (-\varepsilon)}{1 + (-\varepsilon)} \right)^2 = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^2 > 1. \quad (8) \right.$$

Надалі при $\varepsilon > 0$ в кінцевих формулах для виразів розкладу коефіцієнтів концентрації напружень згідно 1⁰ ε міняємо на $(-\varepsilon)$.

2⁰. витягнута еліпсоїдальна порожнина в полюсах ($\varepsilon > 0$, $a > b$) по відношенню до осі Oz

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi_1}} \left[\ln(1 + \sqrt{1 - \xi_1}) - \frac{1}{2} \ln \xi_1 \right] \quad \left(\xi_1 = \frac{b}{\rho^*} = \left(\frac{b}{a} \right)^2 = \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 < 1. \quad (9) \right.$$

Відмітимо, що у випадку $\xi_1 < 1$ в статті [10] допущена друкована помилка у виразі для величини c , де у знаменнику замість значення $\sqrt{\xi_1 - 1}$ ($\xi = \xi_1$) повинно бути $\sqrt{1 - \xi}$. В дальшому використовуємо заміну змінної $\xi_1 - 1$ на $u(\varepsilon)$ згідно з [3] у випадку 1⁰ сплюсненого еліпсоїда обертання ($\varepsilon < 0$)

$$u(\varepsilon) = \xi_1 - 1 = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^2 - 1, \quad (10)$$

а в іншому, 2^0 , для витягнутого еліпсоїда обертання ($\varepsilon > 0$)

$$z(\varepsilon) = 1 - \xi_1 = 1 - \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2. \quad (11)$$

Згідно з двома випадками форми еліпсоїдальної порожнини при рівномірному розтягу-стиску на поверхні для коефіцієнтів концентрації напружень, як складних функцій залежних від змінних $u(\varepsilon)$ або $z(\varepsilon)$, отримуємо вирази для розкладу в ряд Тейлора по степенях ε в околі точки $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\sigma_{ii}^*}{\sigma_0} \right|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} &= K_{ii}^*(f(\varepsilon)) = K_{ii}^*(f(0)) + \frac{dK_{ii}^*(f(\varepsilon))}{df} \cdot \frac{df}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 K_{ii}^*(f(\varepsilon))}{df^2} \cdot \left(\frac{df}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{dK_{ii}^*(f(\varepsilon))}{df} \frac{d^2 f}{d\varepsilon^2} \right] \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \dots \quad (12) \\ &\left(i = \gamma, \varphi; f(\varepsilon) = \begin{cases} u(\varepsilon) & \text{при } \varepsilon < 0 \\ z(\varepsilon) & \text{при } \varepsilon > 0 \end{cases} \right). \end{aligned}$$

Аналітичне визначення коефіцієнтів розкладів при степенях ε у виразах (7) на основі величини c з відповідними значеннями ξ_1 із пунктів 1^0 або 2^0 є далеко нетривіальним, оскільки необхідно знаходити границю складних трансцендентних функцій, залежних від ε в точці $\varepsilon=0$, граничним переходом $\varepsilon \rightarrow 0$ з розкриттям невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ за правилом Лопітала.

Як раніше в [3], скористаємось асимптотичним розкладом величини c заданої функціями згідно (8), (9) в ряди відповідно по степенях нових змінних u або z , тобто [1]:

$$\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} = 1 - \frac{u}{3} + \frac{u^2}{5} - \frac{u^3}{7} + \dots + (-1)^n \frac{u^n}{2n+1} + \dots \quad (\text{при } \varepsilon \rightarrow 0, u(\varepsilon) \rightarrow 0), \quad (13)$$

$$\ln \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} = 2 \left(\sqrt{z} + \frac{z\sqrt{z}}{3} + \frac{z^2\sqrt{z}}{7} + \dots + \frac{z^n\sqrt{z}}{2n+1} + \dots \right) \quad (\text{при } \varepsilon \rightarrow 0, z(\varepsilon) \rightarrow 0). \quad (14)$$

Скористаємось представленням точного розв'язку (7) у випадку стиснутої еліпсоїдальної порожнини згідно виразів (8), (13). Опустимо ряд гноміздких аналітичних викладок із групування членів при однакових степенях змінної $u(\varepsilon)$ в чисельнику і знаменнику. Для коефіцієнта концентрації напруження $\sigma_{\gamma\gamma}^* / \sigma_0$ відносно параметра ε в ряд виду (12) отримаємо

$$\left. \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\sigma_0} \right|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = K_0(u(\varepsilon)) + \frac{dK_1(u(\varepsilon))}{du} \frac{du}{d\varepsilon} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 K_2(u(\varepsilon))}{du^2} \left(\frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{dK_2(u(\varepsilon))}{du} \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \right] \varepsilon^2 + \dots \quad (15)$$

Коефіцієнти в (15) залежні від змінної $u(\varepsilon)$ і мають вигляд

$$K_0(u(\varepsilon)) = 1 + \frac{7(7-5\nu) + (-7\nu+32)u}{2[7(7-5\nu) + 2(7\nu-5)u]},$$

$$\frac{dK_1(u(\varepsilon))}{du} \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{(-7\nu+32)[7(7-5\nu) + 2(7\nu-5)u] - 2(7\nu-5) \cdot [7(7-5\nu) + (-7\nu+32)u']}{2[7(7-5\nu) + 2(7\nu-5)u]^2},$$

$$K_2(u(\varepsilon)) = 1 + \frac{A(u)}{2B(u)}, \quad (16)$$

де

$$A(u) = 35(7-5\nu) + 5(-7\nu+32)u + (29\nu-46)u^2,$$

$$B(u) = 35(7-5\nu) + 10(7\nu-5)u + (-37\nu+23)u^2,$$

$$A' = [5(-7\nu+32) + 2(29\nu-46)u]u', \quad A'' = 5(-7\nu+32)u'' + (29\nu-46) \cdot 2(u')^2,$$

$$B' = 10(7\nu-5)u' + 2(-37\nu+23)uu', \quad B'' = 10(7\nu-5)u'' + 2(-37\nu+23)(u')^2,$$

$$K_2' = \frac{A'B - AB'}{2B^2}, \quad K_2'' = \frac{(A''B - AB'')B - 2(A'B - AB')B'}{2B^3},$$

$$u' = \frac{4(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}, \quad u'' = 8 \frac{2+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}, \quad (17)$$

де $'$ і $''$ — позначають першу та другу похідні по змінній ε .

Переходимо до границі у виразі (15) з врахуванням (16), (17) при умові $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\varepsilon) = 0$.

При цьому згідно (17) вирази $A(0)=B(0)$. Тоді для коефіцієнтів розкладу (16) при степенях ε отримуємо значення

$$K_0(u(0)) = \frac{3}{2}; \quad \left. \frac{dK_1(u(\varepsilon))}{du} \frac{du}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{6(2-\nu)}{7-5\nu},$$

$$\frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 K_2(u(\varepsilon))}{du^2} \cdot \left(\frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{dK_2(u(\varepsilon))}{du} \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8(285\nu^2 - 1311\nu + 1104)}{35(7 - 5\nu)^2}. \quad (18)$$

Оскільки розглядається розв'язок для середовища з стиснутою еліпсоїдальною порожниною ($\varepsilon < 0$), то для перших трьох членів розкладу напружень в ряд по ε згідно з (15) отримаємо

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\sigma_0} \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{6(2-\nu)}{7-5\nu} \varepsilon + \frac{4(285\nu^2 - 1311\nu + 1104)}{35(7-5\nu)^2} \varepsilon^2 + \dots \quad (19)$$

що точно співпадає з його аналітичним виглядом, отриманим в монографії О.М. Гузя і Ю.М. Неміша [2] методом збурення форми границі для розв'язку просторових задач теорії пружних тіл, обмежених неканонічними ортогональними поверхнями. Відмітимо, що величина $3/2$ коефіцієнта концентрації напружень відповідає всебічному розтягустиску середовища з сферичною порожниною і є числовим значенням нульового наближення методу збурення форми границі. За аналогією з попереднім випадком, можна отримати аналітичний вигляд розкладу по параметру ε для коефіцієнта напружень

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^*}{\sigma_0} \Big|_{\rho=1, \gamma=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} + \varepsilon \frac{6(1-2\nu)}{7-5\nu} + \varepsilon^2 \frac{4(-111 + 1389\nu - 1200\nu^2)}{35(7-5\nu)^2}, \quad (20)$$

оскільки точний розв'язок (7) містить аналогічні вирази для величин N , c як функцій залежних від змінної $u(\varepsilon)$, що справедливі для $\sigma_{\gamma\gamma}^* / \sigma_0$.

Аналогічні аналітичні викладки можна провести для розкладу точного розв'язку для коефіцієнтів концентрації напружень на поверхні еліпсоїдальної порожнини, витягнутої в полюсах відносно осі Oz ($\varepsilon > 0$) згідно асимптотичного розкладу справедливого для функції (14), залежної від змінної $z(\varepsilon)$.

У рамках застосування 1-го варіанта методу збурення форми границі в просторових задачах теорії пружності у випадку тіл, обмежених неканонічними ортогональними поверхнями, є можливість порівняння наближених розв'язків з точними для еліпсоїдальних областей. Стосовно 2-го варіанта методу, орієнтованого на розв'язок задач пружної рівноваги для тіл з неканонічними неортогональними поверхнями точні розв'язки практично відсутні.

Якщо задамо в безрозмірних сферичних координатах r, θ, α неортогональну поверхню обертання порожнини, що описується рівнянням

$$S \sim r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta \quad (|\varepsilon| < 1, 0 \leq \theta \leq \pi \text{ — кут довготи}), \quad (21)$$

то поверхня, задана рівнянням (21), співпадає з формою поверхні еліпсоїдальної стиснутої порожнини ($\varepsilon > 0$) на екваторі ($\theta = \pi/2$) та витягнутої в полюсах ($\theta = 0, \pi$). В іншому випадку ($\varepsilon < 0$) поверхня (21) відповідає витягнутій еліпсоїдальній порожнині вздовж осі Oz . Зауважимо, що поверхня (21) незначно відхиляється від контуру поверхні еліпсоїдальної порожнини в околі полюсів. В [8] наведено числові дані для коефіцієнтів концентрації напружень на поверхні порожнини (21) в ізотропному середовищі при значенні $\nu = 0,3$ у випадку рівномірного розтягу-стиску (τ — величина інтенсивності), які отримані за 2-им варіантом методу збурення форми границі [2] на основі аналітичних розв'язків задачі для перших трьох наближень із точністю $O(\varepsilon^3)$.

Порівняння числових значень величини концентрації напружень точного розв'язку задачі всебічного розтягу-стиску ізотропного середовища з еліпсоїдальною порожниною з врахуванням розв'язків перших трьох наближень згідно із 1-им варіантом (еліпсоїдальна порожнина) і 2-им варіантом (поверхня порожнини задана рівнянням (21)) методу збурення форми границі приведено в табл. 1.

Таблиця 1

$\frac{b}{a}$	ε	1-й варіант методу збурення форми границі [2]				2-й варіант методу збурення форми границі [8]			
		$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^n}{\sigma_0}$	$\Delta_{\gamma\gamma}, \%$	$\frac{\sigma_{\phi\phi}^n}{\sigma_0}$	$\Delta_{\phi\phi}, \%$	$\frac{\sigma_{\theta\theta}^n}{\tau}$	$\Delta_{\theta\theta}, \%$	$\frac{\sigma_{\alpha\alpha}^n}{\tau}$	$\Delta_{\alpha\alpha}, \%$
0,707	0,172	1,264	0,2	1,597	0,1	1,111	12,2	1,596	0,12
1,225	-0,101	1,716	0,2	1,4636	0,03	1,663	3,3	1,463	0,07

При цьому числові значення коефіцієнтів концентрації напружень, що відповідають точному розв'язку [10], мають наступні величини:

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\sigma_0} = 1,266; \quad \frac{\sigma_{\phi\phi}^*}{\sigma_0} = 1,598 \quad (b/a = 0,707; \varepsilon = 0,172);$$

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\sigma_0} = 1,719; \quad \frac{\sigma_{\phi\phi}^*}{\sigma_0} = 1,464 \quad (b/a = 1,225; \varepsilon = -0,101).$$

В табл. 1 величина Δ_{ii} характеризує процентне відхилення числового значення коефіцієнтів концентрації напружень, отриманих методом збурення форми границі від їх числових величин із точного розв'язку, прийнятих за 100 %. У випадку 2-го варіанта методу для меридіонального напруження $\sigma_{\theta\theta}^n / \tau$ різниця 12,2 % від його точного значення $\sigma_{\gamma\gamma}^* / \delta_0$, прийнятого за 100%, зумовлене відхиленням контуру порожнини (21) від поверхні еліпсоїдальної порожнини.

3. Для задачі про напружений стан еліпсоїдальної оболонки під дією внутрішнього рівномірного тиску в [4] точний розв'язок та числові результати, отримано із розв'язку скінченої алгебраїчної системи рівнянь 20-го порядку редукцією безкінечної системи на основі асимптотики функцій Лежандра 1-го і 2-го роду високого індекса.

В даному випадку практично можливе тільки порівняння числових даних про НДС ізотропної еліпсоїдальної оболонки під дією внутрішнього тиску з їх числовими даними, отриманими 1-им та 2-им варіантом метода збурення форми границі [2, 7], яке приведено в табл. 2 в залежності від зміни її товщини r_1 .

На основі 2-го варіанту методу збурення форми границі отримано числові результати для НДС оболонки в безрозмірних сферичних координатах r, θ, α (θ — довгота, α — широта) під дією постійного внутрішнього тиску з внутрішньою $S_0 \sim 1 + \varepsilon \cos 2\theta$ і зовнішньою поверхнями $S_1 \sim r_1 + \varepsilon \cos 2\theta$ ($\varepsilon = 0,1; \nu = 0,25$). При заданих рівняннях поверхонь оболонка є аналогом оболонки еліпсоїдальної форми із незначним відхиленням між ними в околі полюсів, оскільки товщина першої оболонки є постійною на відміну від еліпсоїдальної.

Згідно викладеного вище встановлено, що на основі розкладів коефіцієнтів концентрації напружень, як точних розв'язків, на поверхні еліпсоїдальної порожнини по степенях параметра ε (ε — ексцентриситет порожнини) у випадку задачі кручення та розтягу-стиску середовища, в точності співпадають з їх аналітичними виразами, які отримані методом збурення форми границі (1-й варіант) в результаті послідовних наближень з використанням відповідних диференціальних операторів для кожного із них. Проведено для вказаних задач порівняння числових даних коефіцієнтів концентрації напружень, отриманих відповідно згідно 1-го та 2-го варіантів цього методу, з їх числовими значеннями що слідують із точних розв'язків. Аналогічне порівняння виконано у випадку задачі Ламе для еліпсоїдальної оболонки.

Таблиця 2

r_1	Точний розв'язок [4]	1-й варіант методу збурення форми границі [2]		2-й варіант методу збурення форми границі [7]	
	$k_{\gamma\gamma}^T$	$k_{\gamma\gamma}^{\Pi}$	$\Delta_{\gamma}, \%$	$\sigma_{\alpha\alpha}^{\Pi} / \tau$	$\Delta_{\alpha}, \%$
1,01	40,438	40,543	0,3	40,666	0,6
1,05	8,455	8,465	0,1	8,162	3,5
1,1	4,454	4,460	0,1	4,281	3,9
1,5	1,270	1,263	0,6	1,257	1,0
2,0	0,8774	0,8763	0,1	0,8744	0,3
3,0	0,7102	0,7105	0,04	0,7138	0,5

Викладене вище дозволяє зробити висновок про ефективну теоретичну і практичну збіжність розв'язків із послідовних наближень згідно 1-го і 2-го варіанта методу збурення форми границі до точного розв'язку просторових задач теорії пружності тіл, обмежених неканонічними поверхнями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. *Гузь А.Н., Немши Ю.Н.* Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. — 352 с.
3. *Дзира Б.Л., Чернопиский Д.Г.* Про збіжність першого варіанту метода збурення форми границі для розв'язку просторових задач теорії пружності у випадку тіл обертання, близьких до канонічних // Опір матеріалів і теорія споруд. — 2008. — № 82. — С. 83—90.
4. *Куценко Г.В., Улитко А.Ф.* Осесимметричная деформация полого эллипсоида вращения. — Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1971, вып. 11, с. 37 — 42.
5. *Лехницький С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. — М.: Наука, 1971. — 240 с.
6. *Немши Ю.Н.* Элементы механики кусочно – однородных тел с неканоническими поверхностями. — К.: Наук. думка, 1989. — 312 с.
7. *Немши Ю.Н., Сазалюк И.С., Чернопиский Д.И.* Осесимметричное напряженно – деформированное состояние трехслойных толстостенных оболочек, близких к сферическим // Прикл. механика. — 1989. 25, № 11. — С. 20 — 25.
8. *Немши Ю.Н., Чернопиский Д.И.* Упругое равновесие гофрированных тел. — К.: Наук. думка, 1983. — 188 с.
9. *Подильчук Ю.Н.* Трехмерные задачи теории упругости. — К.: Наук. думка, 1979. — 240 с.
10. *Шаниро Г.С.* Осесимметричные деформации эллипсоида вращения // Докл. АН СССР. — 1947. — 58, № 7. — С. 1309—1312.
11. *Чен В.Т.* О некоторых задачах для упругих материалов со сферической изотропией. — Труды амер. о – ва инж.- механиков. Прикл. механика, 1966, 33, № 3 с. 71— 79.

Стаття надійшла до редакції 14.12.2010 р.

Чернопиский Д.И.

СХОДИМОСТЬ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ВАРИАНТОВ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЯ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ НЕКАНОНИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Получено разложение точного решения осесимметричной задачи упругости об равномерном растяжении – сжатии на “бесконечности” среды с эллипсоидальной полостью по степеням параметра, что характеризует ее эксцентриситет. При этом коэффициенты разложения точного решения задачи в точности совпали с первыми тремя коэффициентами при степенях параметра приближенного решения, полученного 1-ым вариантом метода возмущения формы границы, которые определяют величину концентрации напряжений на поверхности полости. Выполнено сравнения числовых данных коэффициентов концентрации напряжений точного решения для тел (полостей) и оболочек, ограниченных эллипсоидальными поверхностями или близкими к ним, с их величиной следующей из приближенных решений полученных 1-ым и 2-ым вариантом метода возмущения формы границы.

Chernopysky D.G.

CONVERGENCE OF THE FIRST AND SECOND VARIANTS OF THE METHOD OF BOUNDARY FORM PERTURBATION IN SPATIAL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR THE BODIES BOUNDED BY NONCANONICAL SURFACES

A decomposition was obtained for the exact solution of axisymmetrical problem of elasticity about uniform extension-compression on the «infinity» of the medium with ellipsoidal cavity by the parameter extents, that characterises its eccentricity. Coefficients of decomposition of the exact problem solution has coincided with the first three coefficients under the degrees of parameter of the approximate solution obtained by the 1st variant of the method of boundary form perturbation, which determine the value of strain concentration on the cavity surface. Comparisons were made of numerical data of strain concentration coefficients of the exact solution for the bodies(cavities) and shells, bounded by ellipsoidal surfaces or by those close to them, with their value in accordance with approximate solutions obtained by the 1st and 2nd variants of the method of the boundary form perturbation.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

А.А. Козак

О.С. Черненко

МЕТОДИКА ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ АНТИПЛОСКИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ МАСИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

На основі співвідношень методу потенціалу побудовано чисельний алгоритм для розв'язання задачі про нестационарні антиплоскі коливання пружних масивів, послаблених отворами. Розв'язана тестова задача про динамічний деформований стан пружного простору з циліндричним отвором кругового перерізу та модельна задача про коливання простору з двома отворами.

Розглянемо нестационарні коливання пружного масиву, обмеженого циліндричною поверхнею, до границі якої раптово прикладаються навантаження, рівномірно розподілені по довжині твірних. Будемо вважати, що в масиві реалізується стан антиплоскої деформації. В такому разі єдиною відмінною від нуля компонентою вектора переміщень є компонента $u_3(x_1, x_2, t)$ (вважається, що вісь циліндра співпадає з віссю x_3). За відсутності об'ємних сил деформований стан тіла описується двовимірним хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де через C позначена швидкість зсувної хвилі – $C = \mu/\rho$, ρ – густина матеріалу, μ – модуль зсуву. Початковими умовами задаються значення переміщень $u_0(x_1, x_2)$ та швидкостей $\dot{u}_0(x_1, x_2)$ в момент часу $t_0=0$. Розрахунковою областю Ω є переріз циліндру площиною, перпендикулярною осі x_3 . На частині границі Γ_u розрахункової області в кожний момент часу відомі переміщення, а на іншій частині границі Γ_q – граничні напруження $q(y_1, y_2, t)$; $\bar{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$. Оскільки в подальшому йдеться виключно про переміщення в напрямку осі x_3 , то будемо опускати нижній індекс "3" і позначати цю скалярну величину як $u(x_1, x_2, t)$.

Існують два підходи до чисельного розв'язання динамічної задачі. Перший з них пов'язаний із поданням розв'язку у вигляді суперпозиції незв'язаних між собою гармонійних коливань, а другий – з безпосереднім

інтегруванням рівняння (1). Зауважимо, що розв'язання динамічної задачі в частотному просторі доцільно в тих випадках, коли зовнішні навантаження, а слідом за ними і реакція пружної системи є періодичними, або близькими до таких. Хоча при неперіодичному навантаженні за допомогою перетворення Фур'є перехід в частотний простір також є теоретично можливим, але трудомісткість зворотного перетворення дуже часто стає значною перешкодою (більш значною, ніж безпосереднє інтегрування за часовою координатою) на шляху практичної реалізації вказаного підходу. Крім того, якщо мова йде про детальне дослідження НДС в початковій фазі перехідного процесу при навантаженні, яке змінюється з часом досить швидко, то застосування алгоритмів розв'язання задачі в часовій області є безальтернативним.

У разі, коли об'єктом досліджень є параметри НДС, локалізовані в околі відомих концентраторів, для чисельного розв'язання задачі може бути успішно застосований метод потенціалу. При так званому прямому формулюванні методу в якості алгоритмічної основи зазвичай використовують граничний аналог узагальненої формули Соміліани [1], який за відсутності об'ємних сил та нульових початкових умов може бути записаний наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\bar{x}_0, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ & - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) u(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\bar{x}_0 \in \Gamma$; $U(\bar{x}_0, \bar{y}, t)$ – фундаментальний розв'язок задачі [2],

$$U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) = \frac{C}{2\pi\mu [C^2 t^2 - r(\bar{x}_0, \bar{y})^2]^{1/2}} H[Ct - r(\bar{x}_0, \bar{y})], \quad (3)$$

$r(\bar{x}_0, \bar{y}) = |\bar{y} - \bar{x}_0|$ – відстань між точками \bar{x}_0 і \bar{y} ; $H(Ct - r)$ – функція Хевісайда, наявність якої у виразі (3) пояснюється тим, що при $Ct < r$ функція $U(r, t)$ повинна дорівнювати нулю, оскільки збурення, викликане дією миттєвих одиничних імпульсів, що мали місце в точці \bar{y} в моменті часу, ще не дійшли до точки \bar{x} в момент часу t . Узагальнена похідна фундаментального розв'язку має вигляд:

$$T(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) = \mu \frac{\partial U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau)}{\partial n} =$$

$$= \frac{C}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{r}{(C^2 t^2 - r^2)^{3/2}} H(Ct - r) + \frac{1}{(C^2 t^2 - r^2)^{1/2}} \frac{\partial H(Ct - r)}{\partial r} \right]. \quad (4)$$

З точки зору чисельної реалізації більш зручним є інтегральні рівняння, ядра яких не містять похідних функцій Хевісайда. Таке рівняння можна отримати, якщо скористатися наступною очевидною залежністю

$$\frac{\partial H[C(t - \tau) - r]}{\partial r} = \frac{1}{C} \frac{\partial H[C(t - \tau) - r]}{\partial \tau},$$

та перетворити другий інтеграл в правій частині рівняння (2) за допомогою інтегрування частинами. В результаті отримаємо наступне співвідношення [3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\bar{x}_0, t) &= \iint_{0\Gamma}^{t^+} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ &- \iint_{0\Gamma}^{t^+} V(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) u(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau + \frac{1}{C} \iint_{0\Gamma}^{t^+} \frac{\partial r}{\partial n} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) \dot{u}(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$V(\bar{x}_0, \bar{y}, t) = \frac{C}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{C(r - Ct)}{(C^2 t^2 - r^2)^{3/2}} H(Ct - r). \quad (6)$$

Вирази (2) і (5) являють собою гранично-часове інтегральне рівняння (ГЧІР) відносно незаданих граничними умовами переміщень $u(\bar{y}, t)$ та напружень $q(\bar{y}, t)$ в точках $\bar{y} \in \Gamma$. Зауважимо, що інтеграли в правих частинах виразів (2) і (5) є сингулярними і розуміються за Коші.

Якщо характер залежності від часу функцій $u(\bar{y}, t)$ та $q(\bar{y}, t)$ є відомим, то інтегрування по часовій координаті може бути виконане в аналітичному вигляді. Наприклад, якщо в точках границі задані навантаження у вигляді добутку

$$q(\bar{y}, t) = Q(\bar{y})f(t),$$

де функція часу $f(t)$ відповідає трапецеїдальному імпульсу тривалістю T секунд, визначеному наступним чином:

$$f(t) = \begin{cases} t/t_1, & \text{якщо } 0 \leq t < t_1, \\ 1, & \text{якщо } t_1 \leq t < t_2, \\ (T-t)/(T-t_2), & \text{якщо } t_2 < t \leq T, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \text{ або } t > T, \end{cases} \quad (7)$$

то перший з інтегралів в правій частині (5) набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau = \\ & = \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} \frac{q(\bar{y}, t) CH[C(t - \tau) - r]}{2\pi\mu[C^2(t - \tau)^2 - r^2]^{1/2}} d\tau d\Gamma = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} Q(\bar{y}) P(r, t) d\Gamma, \end{aligned} \quad (8)$$

причому вираз підінтегральної функції $P(r, t)$ залежить від того, яке саме збурення вже здолало відстань $r(\bar{x}_0, \bar{y})$ та дійшло до точки \bar{x} із точки \bar{y} в розглядуваний момент часу, тобто

$$P(r, t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r \geq Ct, \\ B_1(t, 0, t - r/C, r)/t_1, & \text{якщо } t > r/C \geq (t - t_1), \\ B_1(t, 0, t_1, r)/t_1 + \\ \quad + B_0(t, t_1, t - r/C, r), & \text{якщо } (t - t_1) > r/C \geq (t - t_2), \\ B_1(t, 0, t_1, r)/t_1 + B_0(t, t_1, t_2, r) + TB_0(t, t_2, t - r/C, r)/(T - t_2) - \\ \quad - B_1(t, t_2, t - r/C, r)/(T - t_2), & \text{якщо } (t - t_2) > r/C \geq (t - T), \\ B_1(t, 0, t_1, r)/t_1 + B_0(t, t_1, t_2, r) + t_3 B_0(t, t_2, T, r)/(T - t_2) - \\ \quad - B_1(t, t_2, T, r)/(T - t_2), & \text{якщо } r < C(t - T), \end{cases} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} B_1(t, \alpha, \beta, r) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{C\tau d\tau}{\sqrt{C^2(t - \tau)^2 - r^2}} = t \ln \left[\frac{C(t - \alpha) + \sqrt{C^2(t - \alpha)^2 - r^2}}{C(t - \beta) + \sqrt{C^2(t - \beta)^2 - r^2}} \right] + \\ &+ \frac{1}{C} \left[\sqrt{C^2(t - \beta)^2 - r^2} - \sqrt{C^2(t - \alpha)^2 - r^2} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$B_1(t, 0, t - r/C, r) = t \ln \left[\frac{Ct + \sqrt{C^2 t^2 - r^2}}{r} \right] - \frac{\sqrt{C^2 t^2 - r^2}}{C}, \quad (11)$$

$$B_0(t, \alpha, \beta, r) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{C d\tau}{\sqrt{C^2(t - \tau)^2 - r^2}} = \ln \left[\frac{C(t - \alpha) + \sqrt{C^2(t - \alpha)^2 - r^2}}{C(t - \beta) + \sqrt{C^2(t - \beta)^2 - r^2}} \right], \quad (12)$$

$$B_0(t, \alpha, t - r/C, r) = \ln \left[\frac{C(t - \alpha) + \sqrt{C^2(t - \alpha)^2 - r^2}}{r} \right]. \quad (13)$$

Якщо ж залежність навантаження від часу має параболічний характер, тобто

$$f(t) = \begin{cases} 4t(T-t)/T^2, & \text{якщо } 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{якщо } t < 0 \text{ або } t > T, \end{cases} \quad (14)$$

то підінтегральна функція $P(r, t)$ у рівності (8) визначається наступним чином:

$$P(r, t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r \geq Ct, \\ \frac{4}{T^2} B_2(t, t-r/C, r) - \\ \quad - \frac{4}{T} B_1(t, 0, t-r/C, r), & \text{якщо } t > r/C \geq (t-T), \\ \frac{4}{T^2} B_2(t, T, r) - \frac{4}{T} B_1(t, 0, T, r), & \text{якщо } r < C(t-T), \end{cases} \quad (15)$$

де

$$B_2(t, \beta, r) = \int_0^\beta \frac{C\tau^2 d\tau}{\sqrt{C^2(t-\tau)^2 - r^2}} = \\ \frac{1}{2C^2} \left\{ (2C^2t^2 + r^2) \ln \left[\frac{Ct + \sqrt{C^2t^2 - r^2}}{C(t-\beta) + \sqrt{C^2(t-\beta)^2 - r^2}} \right] + \right. \\ \left. + C(3t+T) \left[\sqrt{C^2(t-\beta)^2 - r^2} - 3Ct\sqrt{C^2t^2 - r^2} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$B_2(t, t-r/C, r) = \frac{1}{2C^2} \left\{ (2C^2t^2 + r^2) \ln \left[\frac{Ct + \sqrt{C^2t^2 - r^2}}{r} \right] - \right. \\ \left. - 3Ct\sqrt{C^2t^2 - r^2} \right\}. \quad (17)$$

Цілком аналогічно при відомому вигляді або заданій апроксимації функції $u(\vec{y}, t)$ можна виконати аналітичне інтегрування за часом другого і третього доданків в правій частині рівності (5). Якщо на k -му часовому відрізьку задана функція форми $\eta_k(t)$, то ніщо не заважає записати:

$$Z_k(\bar{x}_0, \bar{y}, t) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\eta_k(\tau) V(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) - \dot{\eta}_k(\tau) \frac{1}{C} \frac{\partial r}{\partial n} U(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) \right] d\tau.$$

Для функцій форми, які відповідають кусково-лінійній залежності граничних переміщень від часу, результат інтегрування наведений в [3].

Розглянемо задачу про симетричне навантаження кругового циліндричного отвору граничними навантаженнями $q_R(t) = Q_R f(t)$. Завдяки симетрії деформованого стану ГЧП відносно невідомих граничних переміщень $u(\bar{x}_0, t_n) = u_R(t_n)$ в заданий момент часу t_n може бути записане у вигляді

$$u_R(t_n) \left[\frac{1}{2} + \int_{\Gamma} Z_n(\bar{x}_0, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y \right] = Q_R \int_{\Gamma} P(r, t_n) d\Gamma_y - \sum_{m=1}^{n-1} u_R(t_m) \int_{\Gamma} Z_m(x_0, y, t_n) d\Gamma_y. \quad (18)$$

Рівняння (18) розв'язується кроковим методом. В момент часу t_1

$$\left[\frac{1}{2} + \int_{\Gamma} Z_1(\bar{x}_0, \bar{y}, t_1) \Gamma_y \right] u_R(t_1) = Q_R \int_{\Gamma} P(r, t_1) d\Gamma_y,$$

в момент t_2

$$\left[\frac{1}{2} + \int_{\Gamma} Z_2(\bar{x}_0, \bar{y}, t_2) \Gamma_y \right] u_R(t_2) = Q_R \int_{\Gamma} P(r, t_2) d\Gamma_y - u_R(t_1) \int_{\Gamma} Z_1(\bar{x}_0, \bar{y}, t_2) d\Gamma_y,$$

в момент t_3

$$\left[\frac{1}{2} + \int_{\Gamma} Z_3(\bar{x}_0, \bar{y}, t_3) \Gamma_y \right] u_R(t_3) = Q_R \int_{\Gamma} P(r, t_3) d\Gamma_y - u_R(t_1) \int_{\Gamma} Z_1(\bar{x}_0, \bar{y}, t_3) d\Gamma_y - u_R(t_2) \int_{\Gamma} Z_2(\bar{x}_0, \bar{y}, t_3) d\Gamma_y,$$

і т.д.

Ця задача може бути розв'язана також і за допомогою переходу в частотний простір. Для цього навантаження, прикладене до границі отвору $q_R(t)$, будемо вважати імпульсно-періодичним, що дозволяє розкласти його в ряд Фур'є:

$$q_R(t) = Q_R \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^K f_k \exp(-i\omega_k t) \right], \quad (19)$$

де $\omega_k = k \frac{2\pi}{T_0}$, T_0 – проміжок часу між початковими моментами сусідніх імпульсів. Зазначимо, що чим більшим є період T_0 , тим меншим є вплив попередніх імпульсів, і тим точніше може бути визначена реакція на одиничний імпульс.

Переміщення всередині розрахункової області на відстані r від центру також подаються у вигляді ряду Фур'є

$$u(r, t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^K u_k(r) \exp(-i\omega_k t) \right], \quad (20)$$

причому компоненти розвинення $u_k(r)$ підпорядковані рівнянню Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2} + \frac{\omega_k^2}{C^2} u_k = 0 \quad (21)$$

та граничній умові

$$-\mu \frac{\partial u_k}{\partial r} \Big|_{r=R} = Q_R f_k. \quad (22)$$

Оскільки загальний вигляд розв'язку рівняння Гельмгольца при осьовій симетрії є відомим [4]:

$$u_0(r) = A_0 \frac{1}{r}; \quad u_k(r) = A_k H_0^{(1)} \left(\frac{\omega_k r}{C} \right), \quad k = 1, \dots, K, \quad (23)$$

то за допомогою диференціювання та умови (22) неважко знайти, що

$$A_0 = f_0 \frac{Q_R R^2}{\mu}, \quad A_k = f_k \frac{Q_R C}{\mu \omega_k} \frac{1}{\left[H_1^{(1)} \left(\frac{\omega_k R}{C} \right) \right]},$$

після чого розвинення (20) перетворюється на

$$u(r, t) = f_0 \frac{Q_R R^2}{\mu r} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K f_k \frac{Q_R C}{\mu \omega_k} \frac{H_0^{(1)} \left(\frac{\omega_k r}{C} \right)}{\left[H_1^{(1)} \left(\frac{\omega_k R}{C} \right) \right]} \exp(-i\omega_k t) \right]. \quad (24)$$

Подання (24) дозволяє знайти переміщення із наперед заданою точністю в будь-якій точці розрахункової області. Зокрема, на границі отвору маємо

$$u(R, t) = -f_0 \frac{Q_R R \ln R}{\mu} + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^K f_k \frac{Q_R C}{\mu \omega_k} \frac{H_0^{(1)} \left(\frac{\omega_k R}{C} \right)}{H_1^{(1)} \left(\frac{\omega_k R}{C} \right)} \exp(-i\omega_k t) \right]. \quad (25)$$

Чисельне розв'язування задачі було виконано для матеріалу з характеристиками $\mu = 4 \cdot 10^7$ Па, $\rho = 2000$ кг/м³ при трьох різновидах імпульсного навантаження. В першому варіанті навантаження являло собою трапецеїдальний імпульс $q_R(t)$ тривалістю $T = \pi$ секунд, визначений рівністю (7). Радіус отвору R дорівнював 3м. Дані, наведені на рис.1, свідчать про досить повільну збіжність результатів розрахунку при збільшенні кількості гармонік в розвиненні навантаження. Так максимальне значення нормованого переміщення $u_R(t)\mu/(Q_R R)$ при чотирьох гармоніках становило 4.35, при восьми гармоніках – 4.66, при двадцяти чотирьох – 4.86, а при ста п'ятдесяти – 4.96.

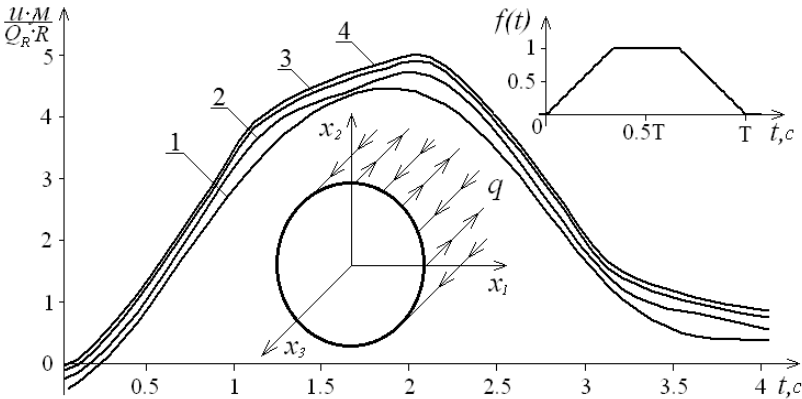


Рис. 1. Реакція системи на імпульс трапецеїдальної форми

Далі при збільшенні кількості складових змін значення переміщення стає майже непомітною (значення нормованого переміщення при врахуванні п'ятиста гармонік становило 4.97), що дозволяє вважати останній результат точним. Зазначимо, що максимум переміщення, отриманого в результаті розв'язку рівняння (18), становить 5.01, що відповідає похибці 0.74%. При цьому час, витрачений на розв'язання задачі при використанні чотирьох гармоніках перевищував час розв'язку рівняння (18) майже вдвічі, що пов'язано зі складністю обчислення функцій Ханкеля. Отже, алгоритм розв'язання задачі, який базується на

системах рівнянь (18), при навантаженні одиничним імпульсом є значно ефективнішим за алгоритм, що використовує перехід в частотну область.

Аналогічні результати були отримані, при дослідженні реакції на дію симетричного трикутного імпульсу, вираз для якого отримуємо із трапецеїдального, поклавши $t_1=t_2=0.5T$.

В цьому випадку максимальне значення нормованого переміщення при чотирьох гармоніках становило 3.66, при восьми гармоніках – 3.91, при двадцяти чотирьох – 4.01, при ста п'ятдесяти – 4.09, а при п'ятиста – 4.096 (рис.2).

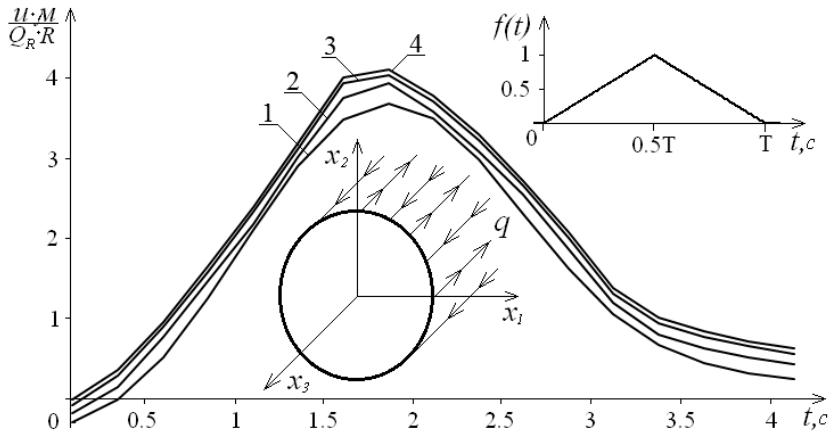


Рис. 2. Реакція системи на імпульс трикутної форми

Подальше уточнення результату при збільшенні членів ряду Фур'є виявляється непомітними, що дозволяє вважати останнє значення точним. В той самий час, максимум нормованого переміщення, отриманого як розв'язок рівняння (18), становить 4.132, що відповідає похибці 0.89%.

Нарешті, була розв'язана задача про коливання масиву, границя якого піддається дії параболічного імпульсу тривалістю $T=\pi$ секунд (вираз (8)). Максимальне значення нормованого переміщення при чотирьох гармоніках становило 4.2, при восьми – 4.43, при двадцяти чотирьох – 4.6, при ста п'ятдесяти – 4.69, а при п'ятиста – 4.706 (рис. 3). Водночас, максимум нормованого переміщення, отриманого в результаті розв'язку рівняння (18), дорівнював 4.744, що відповідає похибці 0.79%.

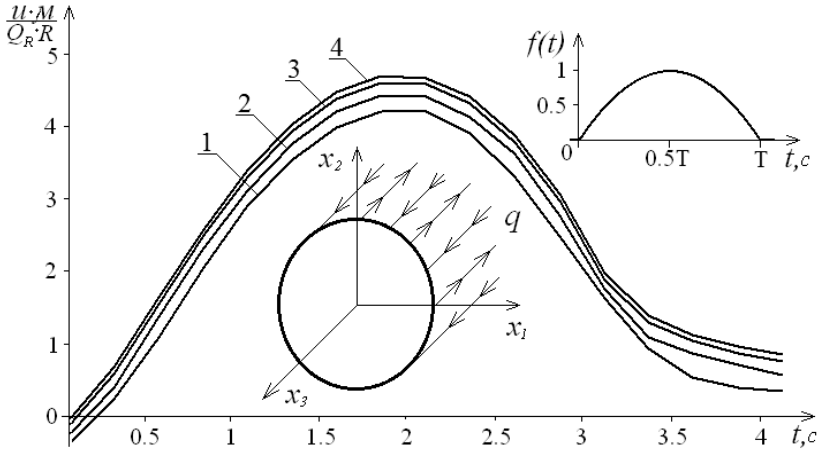


Рис. 3. Реакція системи на імпульс параболічної форми

Таким чином, наведені результати чисельних розрахунків переконливо свідчать про високу точність та ефективність даних, отриманих за допомогою розробленої гранично-елементної методики аналізу антиплоских нестационарних пружних коливань, спричинених дією одиначного імпульсу.

Більш складною є задача за відсутності центральної симетрії. В такому разі на кожному кроці за часом необхідно застосовувати загальну процедуру методу граничних елементів (МГЕ), тобто розбивати границю на окремі ділянки відомої геометрії та приймати гіпотезу про характер зміни переміщень в межах кожного елемента. В даній роботі використано варіант МГЕ, який базується на поданні границі у вигляді сукупності дуг кола (граничних елементів), в межах кожного з яких в певний момент часу невідомі переміщення вважаються постійними. В результаті такої заміни інтегральне рівняння (18) перетворюється на алгебраїчне:

$$\left[\frac{1}{2} u(\bar{x}_i, t_n) + \sum_{k=1}^K u(\bar{x}_k, t_n) \int_{\Delta\Gamma_k} Z_n(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y \right] = Q_R \int_{\Gamma} P(\bar{x}_i, y, t_n) d\Gamma_y - \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^K u(\bar{x}_k, t_m) \int_{\Delta\Gamma_k} Z_m(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y, \quad (26)$$

де через $\Delta\Gamma_k$ позначена область, яку займає k -й ГЕ, K – загальна кількість елементів.

Послідовно розміщуючи точку \bar{x}_i в геометричних центрах граничних елементів, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих переміщень в зазначених точках. Коефіцієнтами системи є інтеграли $\int_{\Delta\Gamma_k} Z_m(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y$, які в більшості випадків можна обчислити

чисельно за квадратурними формулами. На перший погляд, випадки, коли $i = k$ та $m = n$, тобто інтегрування як по часовій, так і по просторовій координаті здійснюється по тому самому відрізку, на якому розташована точка спостереження, становлять виключення. В такому разі підінтегральний вираз набуває вигляду [3]:

$$Z_n(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) = -\frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{2\pi C\Delta t} \frac{\sqrt{(C\Delta t)^2 - r(\bar{x}_i, \bar{y})^2}}{r(\bar{x}_i, \bar{y})}. \quad (27)$$

З урахуванням того, що точки \bar{x}_i та \bar{y} знаходяться на дузі кола, будемо мати

$$r(\bar{x}_i, \bar{y}) = 2R \sin(\varphi/2); \quad \frac{\partial r}{\partial n} = \sin(\varphi/2); \quad d\Gamma_y = R d\varphi, \quad (28)$$

де R – радіус кола, φ – центральний кут, який спирається на дугу, обмежену точками \bar{x}_i та \bar{y} .

Тепер вираз (27) можна переписати наступним чином:

$$Z_n(R, \varphi, t_n) = -\frac{1}{4\pi RC\Delta t} \sqrt{(C\Delta t)^2 - 4R^2 \sin^2(\varphi/2)},$$

тобто при переході в більш зручну для інтегрування полярну систему координат особливість підінтегрального виразу зникає, і коефіцієнт системи $\int_{\Delta\Gamma_i} Z_n(R, \varphi, t_n) R d\varphi$ може бути обчислений за звичайною

квадратурною формулою.

В правій частині системи (26) також містяться сингулярні інтеграли $\int_{\Gamma} Q(\bar{y}) P(\bar{x}_i, \bar{y}, t_n) d\Gamma_y$, визначення яких при постійній величині множника

$Q(\bar{y})$ згідно виразів (11), (13), (17) зводиться до обчислення інтегралу

$\int_{\Delta\Gamma_i} \ln r(\bar{x}_i, \bar{y}) d\Gamma_y$. За допомогою співвідношень (28) в полярній системі

координат запишемо:

$$\int_{\Delta\Gamma_i} \ln r(\bar{x}_i, \bar{y}) d\Gamma_y = 2 \int_0^{\varphi_1} \ln[2R \sin(\varphi/2)] R d\varphi =$$

$$= 2R \left\{ \ln[2R \sin(\varphi_1/2)]\varphi_1 + 2 \sin(\varphi_1/2) \int_0^1 \frac{\ln(y)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_1/2) y^2}} dy \right\}, \quad (29)$$

де φ_1 – половина центрального кута, який спирається на граничні точки елемента.

Інтеграл, який знаходиться в правій частині рівності (29), містить логарифмічну особливість і може бути обчислений за відповідними квадратурними формулами [5].

Отже, отримано повну систему співвідношень, необхідних для побудови чисельного алгоритму, який застосуємо до задачі про динамічний НДС масиву з двома круговими циліндричними отворами радіусу $R=3$ м, один з яких є навантаженим. Навантаження змінюється в часі за трапецеїдальним законом і є постійним вздовж границі отвору. Відстань між центрами отворів l змінювалась в діапазоні від 7 до 12 метрів. Виявилось, що незалежно від відстані між отворами найбільші переміщення виникають в точці, яка розташована на границі навантаженого отвору та лежить на прямій, що з'єднує центри отворів (точка A на рис. 4).

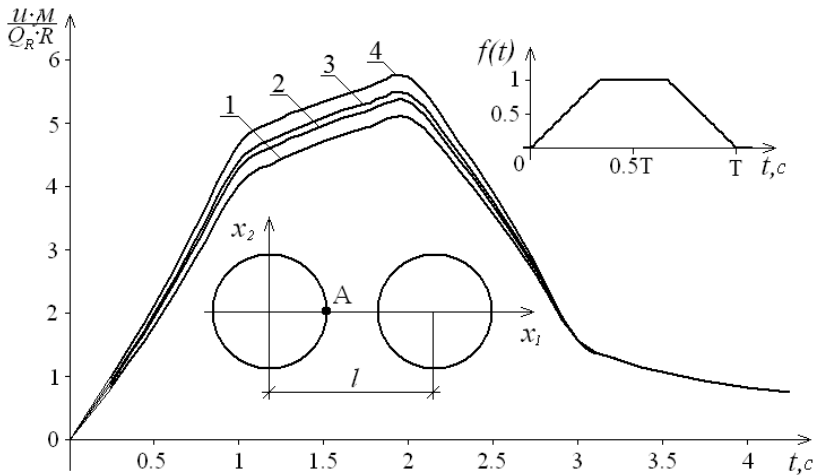


Рис. 4. Залежність від часу найбільших переміщень системи

На вказаному рисунку цифрою 1 позначено графік залежності від часу переміщення в точці A при $l=12$ м. Нормований параметр переміщення $u(\vec{x}, t)\mu / (Q_R R)$ досягав максимального значення в момент

часу $t=2T/3$ і становив 5.06. Зазначимо, що при збільшенні відстані l зміна графіку 1 є майже непомітною. Так, при $l=\infty$ максимальне значення нормованого переміщення дорівнює 5.01. Інша картина спостерігається при зменшенні відстані між отворами. Наприклад, при $l=9\text{м}$ (крива, позначена цифрою 2) $u(\vec{x},t)^{\max}\mu/(Q_R R)=5.31$, при $l=8\text{м}$ (крива 3) $u(\vec{x},t)^{\max}\mu/(Q_R R)=5.43$, а при $l=7\text{м}$ (крива 4) цей параметр мав значення 5.69.

Разом із зменшенням відстані між отворами сильнішою стає нерівномірність розподілу переміщень вздовж границі. На рис. 5 наведені в полярних координатах графіки граничних переміщень в різні моменти часу.

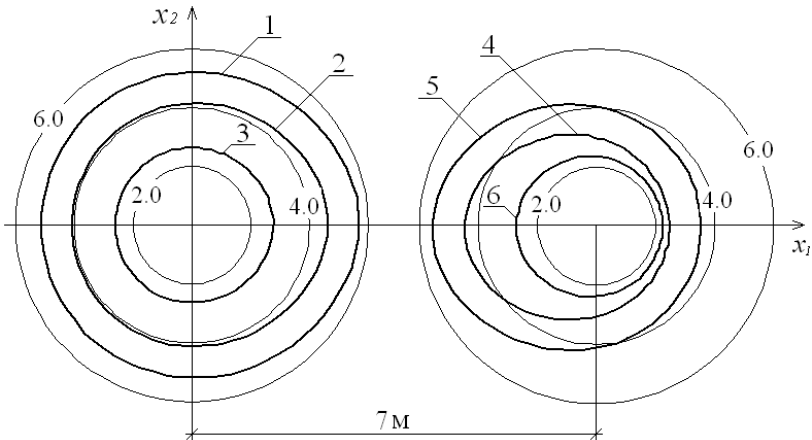


Рис. 5. Розподіл граничних переміщень

Бачимо, що розподіл переміщень на границі навантаженого (лівого) отвору є біль рівномірним. Наприклад, в момент часу $t=2T/3$ (крива 1) параметр переміщення $u(\vec{x},t)\mu/(Q_R R)$ мав максимальне значення 5.69, а мінімальне – 5.14. Водночас на границі ненавантаженого отвору (крива 5) переміщення в цей момент змінювались в діапазоні від 3.52 в найбільш віддаленій від навантаженого контуру точці границі до 5.52 в найближчій точці (рис.5).

Схожа ситуація виникала і в інші моменти часу. Так, при $t=T/3$ на навантаженому отворі (крива 2) параметр переміщення приймав значення від 4.08 до 4.64, а на іншому отворі (крива 4) – значення від 2.45 до 4.46. Нарешті, в момент $t=11T/12$ на навантаженому контурі (крива 3) мали

місце величини параметру переміщень від 2.61 до 2.75, тоді як на границі ненавантаженого отвору (крива б) діапазон зміни переміщень був обмежений значеннями 2.22 та 2.71.

Наведені приклади свідчать про те, що розроблена методика може бути застосована для дослідження нестационарних антиплоских коливань пружних масивів під дією імпульсного навантаження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: Издательство Казанского университета, 1986. – 296 с.
2. Морс Ф.М., Феибах Г. Методы теоретической физики. – М: ИЛ, 1958. – 901 с.
3. Dominguez J. Boundary Elements in Dynamics. – Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1993.
4. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М: Наука, 1970. – 720 с.
5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М: Мир, 1984. – 494 с.

Стаття надійшла до редакції 14.08.2011 р.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko E.S.

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ АНТИПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

На основе соотношений метода потенциала построен численный алгоритм для решения задачи про нестационарные антиплоские колебания упругих массивов, ослабленных отверстиями. Решена тестовая задача о динамическом деформированном состоянии упругого пространства с цилиндрическим отверстием кругового сечения и модельная задача про колебания пространства с двумя отверстиями.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.

THE PROCEDURE FOR NUMERICAL ANALYSIS OF SOLIDS ANTIPLANE TRANSIENT OSCILLATIONS

The boundary element technique for analysis of out-of-plane shearing transient vibration of elastic solids with holes is developed. The technique was tested on the problem of an infinite solid with a round cylindrical hole vibration. Oscillations of the solid with two round holes were investigated as well.

УДК 539.3

П.П. Чеверда, канд.техн.наук,

О.В. Геращенко, канд.техн.наук

ВПЛИВ ДІЇ СЕЙСМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НЕСУЧУ ЗДАТНІСТЬ ПАЛЬОВОГО РОСТВЕРКУ ЖИТЛОВОГО БУДИНКУ

Виконано дослідження напружено-деформованого стану плити фундаментного ростверку залізобетонного житлового будинку при дії основного та аварійного сполучення навантажень. Висотна будівля моделювалась як просторовий скінченно-елементний каркас зі сталими жорсткістними характеристиками. За допомогою програмного комплексу МОНОМАХ досліджувався вплив сейсмічного навантаження на максимальні значення зусиль та напружень фундаментного пальового ростверку та на величини прогинів верхньої її частини. Аналіз результатів дослідження напружено-деформованого стану плитного ростверку будівлі свідчить про те, що дія сейсмічного навантаження суттєво впливає на несучу здатність та жорсткість як ростверку так і будівлі в цілому.

Проектування будівель і споруд в районах, схильних до сейсмічних впливів з навантаженням силою 7 і більше балів, має здійснюватись згідно з вимогами економічної доцільності використання окремих конструктивних схем в конкретних умовах будівництва, з урахуванням максимального зниження матеріалоемності, трудомісткості і вартості будівництва, зниження маси конструкцій, що досягаються за рахунок впровадження ефективних будівельних матеріалів і конструкцій. Збільшення обсягів будівництва з індустріального та монолітного залізобетону вимагає всебічного полегшення конструкцій, а отже, постійного вдосконалення методів їх розрахунку. При виборі конструктивних схем необхідно прагнути до найбільш простої форми в плані будівель, уникати перепадів висот, вибирати такі об'ємно-планувальні рішення, щоб вони забезпечували максимальну уніфікацію та скорочення числа типорозмірів конструкцій. При цьому прийняті у проєкті рішення повинні забезпечувати необхідну міцність, жорсткість, стійкість елементів конструкції та будівлі в цілому.

Розрахунок несучої здатності будівель та споруд при дії сейсмічного навантаження в значній мірі залежить від вибору методів розв'язання та точності моделювання розрахункових схем. При динамічному впливі маси елементів конструкції отримують прискорення, які зумовлені силами інерції. Внаслідок наявності пружних та інерційних сил елементи розрахункових систем здійснюють коливальний рух, який викликає їх

переміщення. Такі переміщення в декілька разів перевищують переміщення елементів конструкції від дії статичного навантаження.

Основною характеристикою розрахункової динамічної моделі є кількість незалежних параметрів, що визначають положення системи у будь-який момент часу в процесі руху. Кількість таких параметрів розрахункової динамічної моделі визначається мінімальним числом в'язей, які необхідно накласти на систему, щоб виключити рух усіх матеріальних точок, що мають масу. Перехід від розрахункової схеми до дискретної динамічної моделі з скінченим числом ступенів вільності за допомогою методу скінчених елементів (МСЕ) базується на побудові функціоналу повної потенціальної енергії [3]. Для його побудови необхідно знайти диференційні оператори, які пов'язують між собою переміщення з напруженнями і деформаціями. Якщо стержнева система, на яку накладені кінематичні в'язі, знаходиться у рівновазі під дією прикладених сил, то згідно з принципом можливих переміщень сума можливих робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють у межах цієї системи, на будь-яких нескінченно малих можливих переміщеннях, які не заперечуються кінематичними в'язями дорівнює нулю. Так згідно з принципом Гамільтона коливання стержневої системи згідно з [1,2,4] можна записати у наступному вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0, \quad (1)$$

де T – загальна кінетична енергія системи; U – потенціальна енергія системи, що включає енергію деформації та потенціал будь-яких консервативних зовнішніх сил; A – робота, яку виконано неконсервативними силами, що діють на систему, враховуючи затухання та інші довільні зовнішні навантаження. Визначення розрахункових значень горизонтального сейсмічного навантаження, які входять до рівняння руху (1), виконувалось за спектральним методом розрахунку за методикою [5], згідно з якою виконано порівняльний аналіз величин динамічної реакції плитного пальового фундаментного ростверку двадцяти поверхової житлової будівлі висотою (H) 60 м при дії аварійного сполучення навантажень з урахуванням у основі ростверку сил демпфірування. Для дослідження просторового каркасу будівлі приймались наступні вихідні дані: район будівництва – м. Київ, категорія ґрунту за сейсмічними властивостями – III, сейсмічність площадки будівництва – 7 балів, матеріал конструктивних елементів – бетон класу В25, висота поверху будівлі $h = 2,8$ м.

Житловий будинок, який зображений на рис. 1, моделювався як просторовий збірний залізобетонний каркас з розмірами в плані по довжині (L) 32.4 м і 16.2 м по ширині (B). Стінові панелі та плити

переkritтя приймалися як скінченно-елементні пластини прямокутної форми з розмірами в плані $1,5 \times 1,5$ м та товщиною 0,16 м. За результатами статичного випробування несуча здатність бурин'екційної палі діаметром 62 мм. та довжиною 17 м. при осадці 20 мм. становить 200 тон. За несучий шар основи палі приймався пісок середньої крупності при товщині залягання до 10 метрів. Фундамент житлового будинку моделювався як стрічковий пальовий ростверк з 156 палями. Дослідження напружено-деформованого стану фундаментного ростверку та будинку в цілому виконувалось на основне та аварійне сполучення навантажень з використанням програмного комплексу МОНОМАХ згідно з [6]. Для моделі,

що досліджувалась на ділянці будівництва з ґрунтами III категорії за сейсмічними властивостями, приймалось сейсмічне навантаження величиною 7 балів, яке діяло в напрямках осей X та Y . Результати розрахунку житлового будинку показали, що при дії горизонтальних складових сейсмічного навантаження в напрямках осей X та Y , рух елементів моделі здійснювався за I формою (рис. 2) відносно осі X при частоті власних коливань 0,52 Гц. При цьому максимальних значень переміщень отримала верхня частина будинку та крайня грань фундаментного ростверку, які відповідно у напрямках осей Y та Z становлять 7,0 см та 3,9 см. Переміщення будівлі здійснювалось за I формою і розвиток деформацій в напрямку осі Y був зумовлений переважно дією сил інерції.

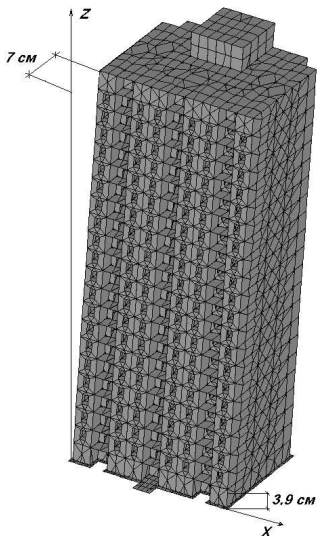


Рис. 2. Деформована просторова модель

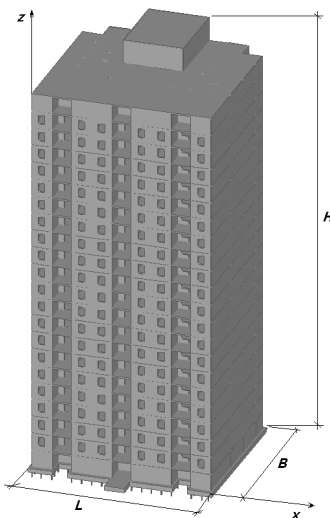


Рис. 1. Розрахункова просторова модель

На рис. 3 та рис. 4 відповідно

зображені схеми ізольній згинальних моментів M_x ($m \cdot m$) плити фундаментного ростверку від дії основного та аварійного сполучення навантажень. Максимальні значення згинальних моментів отримані у фундаментній плиті на ділянці ростверку, де стінові панелі опираються на палі з ексцентриситетом. Значення максимальних згинальних моментів при цьому становлять відповідно до рисунків $M_x=28 m \cdot m$ та $M_x=42 m \cdot m$.

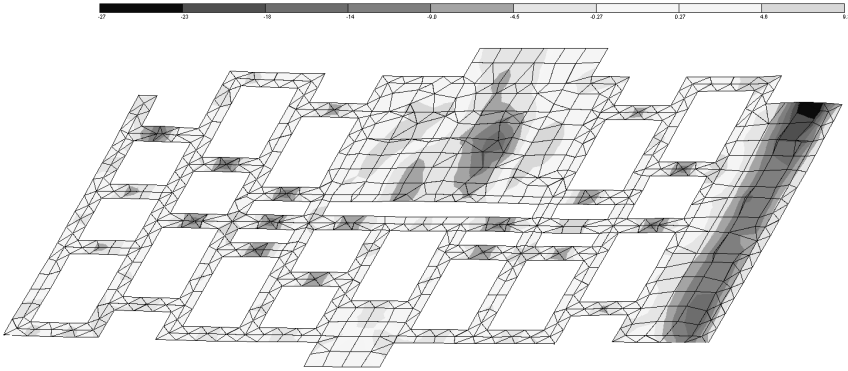


Рис. 3. Схема ізольній згинальних моментів від дії основного сполучення навантажень

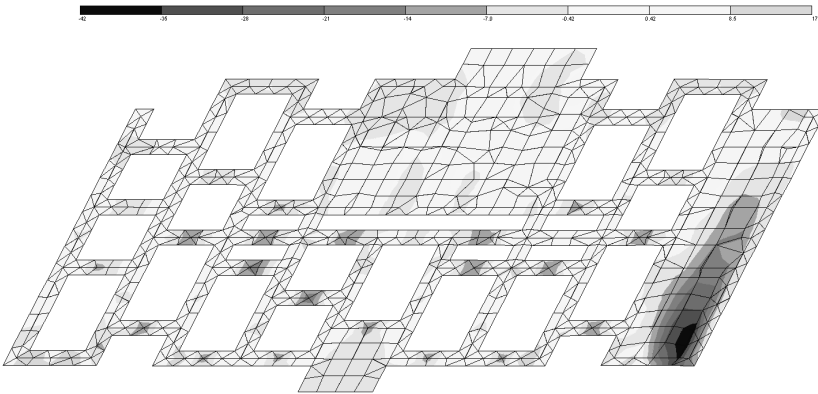


Рис. 4. Схеми ізольній згинальних моментів від дії аварійного сполучення навантажень

Аналіз результатів дослідження реакції плити фундаментного ростверку житлового будинку свідчить про те, що значення зусиль згинальних моментів при сталих жорсткісних характеристиках та дії основного сполучення навантажень згідно з рис.3 суттєво залежать від дії аварійного сполучення навантажень. Значення згинальних моментів

тільки при дії сейсмічного навантаження величиною 6 балів збільшились майже в два рази. Щодо деформації будівлі, то як показують результати прогини верхньої частини будівлі при дії основного сполучення навантажень незначні і задовольняють вимогам норм. Однак деформації, які виникають в елементах конструкції при дії аварійного сполучення навантажень, в десятки разів перевищують деформації будівлі від дії основного сполучення навантажень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С.* Будівельна механіка. Динаміка споруд. Навч. посібник.-К.: ІЗМН, 1998. -208с.
2. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології: Підручник/ За заг. ред. д.т.н., проф. В.А.Баженова.-К.: Каравела, 2009. -696 с.
3. *Легостаєв А.Д.* Метод скінченних елементів. Конспект лекцій.-К.:КНУБА, 2004.-112с.
4. *Чеверда П.П., Геращенко О.В., Міщенко О.О.* Дослідження динамічної реакції просторового каркасу висотної будівлі при дії сейсмічного навантаження. Сб. Опір матеріалів і теорія споруд. Вип.86.-Київ, КНУБА.-2010.-С.140-147 .
5. *ДБН В.1.1-12:2006.* Будівництво у сейсмічних районах України. Норми проектування. Мінбуд України, 2006.
6. *ДБН В.1.2-2:2006.* Навантаження і впливи. Норми проектування. Мінбуд України, 2006.

Стаття надійшла до редакції 14.03.2011 р.

Чеверда П.П., Геращенко О.В.

ВЛИЯНИЕ ДЕЙСТВИЯ СЕЙСМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ НА НЕСУЩЮЮ СПОСОБНОСТЬ СВАЙНОГО РОСТВЕРКА ЖИЛОГО ДОМА

Выполнено исследование напряженно-деформированного состояния плиты фундаментного ростверка железобетонного жилого дома при действии основного и аварийного сочетания нагрузок. Высотное здание моделировалась как пространственный конечно-элементный каркас с постоянными жесткостными характеристиками. С помощью программного комплекса MOHOMAX исследовалось влияние сейсмической нагрузки на максимальные значения усилий и напряжений фундаментного свайного ростверка и на величины прогибов верхней ее части. Анализ результатов исследования напряженно-деформированного состояния плитного ростверка здания свидетельствует о том, что действие сейсмической нагрузки существенно влияет на несущую способность и жесткость как ростверка так и здания в целом.

Cheverda P.P., Gerashchenko O.V.

INFLUENCE OF ACTION OF SEISMIC LOADING ON BEARING STRENGTH OF PILE GRILLAGE OF DWELLING-HOUSE

Investigation of stress and strain of reinforced concrete slab foundation grillage apartment building in action and emergency traffic loads. High-rise building is modeled as a spatial finite-element framework with constant zhorstkisnymy characteristics. With the help of software monomials The influence of seismic loading on maximum effort and stress pile grillage foundation and the size of deflections of the upper part of it. Analysis of survey results of the stress-strain state of plate grillage building indicates that the effect of seismic load significantly affects the bearing capacity and stiffness as grillage and buildings in general.

УДК 539.3

І.В.Жупаненко

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЇ КРУГЛИХ ДИСКІВ НА НЕСТАЦІОНАРНІ ВПЛИВИ

Для визначення реакції круглих дисків на нестационарні впливи реалізовано алгоритм розрахунку дискретно-континуальної моделі методом розкладу руху за власними формами коливань. Частоти і форми власних коливань визначаються двома альтернативними підходами. Ефективність та достовірність методики перевірена при розв'язанні тестової задачі і порівнянням результатів.

Розглядається задача про вимушені коливання просторових лінійно-пружних ізотропних тіл обертання, що відносяться до класу круглих дисків.

Круглі та кільцеві диски знаходять широке застосування як елементи будівель та споруд чи деталі машин та обладнання. Часто при проектуванні таких об'єктів виникає необхідність дослідження режимів їх коливань, наприклад, при розрахунку на сейсмічні впливи конструктивних елементів споруд, що відносяться до категорії відповідальних, або при розрахунку деталей машин, під час роботи яких виникає змінне в часі навантаження.

Найбільш поширеним при розв'язку динамічних задач є підхід, за яким динамічний процес представляється у вигляді суперпозиції характерних часткових рухів – власних коливань у випадку тіл обмежених розмірів. Розроблена на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень, чисельно-аналітична методика визначення частот і форм власних коливань нетонких пластин обертання [1–3] дозволяє реалізувати такий підхід для зазначених об'єктів. Дослідженню цього питання присвячена дана стаття.

Розглядаються товсті однорідні ізотропні лінійно-пружні пластини обертання. Для визначення динамічної реакції таких об'єктів на нестационарні впливи застосовується підхід, що базується на методі розкладу руху за власними формами коливань [4]. Зазначений метод застосовується для дискретно-континуальної розрахункової моделі, методика побудови та адекватності якої досліджена в роботах [5,6].

Рівняння руху дискретно-континуальної моделі пластини складаються на основі принципу Д'Аламбера і утворюють систему звичайних диференціальних рівнянь за часом, яка при застосуванні методу сил в матричній формі в загальному вигляді записується наступним чином:

$$\mathbf{П} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = \mathbf{B} \cdot \vec{P}. \quad (1)$$

Згідно з методом розкладу руху за власними формами коливань, шуканий вектор розв'язків $\vec{Y}(t)$ рівнянь руху (1) представляється у вигляді суми:

$$\vec{Y}(t) = q_1(t) \cdot \vec{v}_1 + \dots + q_n(t) \cdot \vec{v}_n = \sum_{k=1}^n q_k \cdot \vec{v}_k, \quad (2)$$

де $q_k(t)$ – нові невідомі узагальнені переміщення, \vec{v}_k – вектор k -ї форми коливань.

Завдяки ортогональності векторів власних форм коливань після перетворення (2) система рівнянь (1) зводиться до n окремих диференціальних рівнянь, що визначають координати $q_k(t)$:

$$M_k \ddot{q}_k + M_k \omega_k^2 q_k = Q_k(t), \quad k = 1, \dots, n$$

або

$$\ddot{q}_k = -\omega_k^2 q_k + \frac{Q_k(t)}{M_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Тут $M_k = \sum_{i=1}^n m_i \cdot v_{ik}^2$ ($k = 1, \dots, n$) – узагальнені маси відповідних форм

власних коливань, ω_k – відповідна власна частота, $Q_k(t) = \sum_{i=1}^n v_{ik} \cdot P_i(t)$

представляє узагальнену зовнішню силу, що відповідає k -й формі коливань. Матриця мас $\mathbf{T} = [m_i]$ та матриця-стовпчик зосереджених

зовнішніх сил $\vec{P} = \{P_i(t)\}$ ($i = \overline{1, m}$) (m – кількість зосереджених мас) визначаються за методикою, описаною в [5].

Динамічна реакція системи на нестационарні впливи визначається на основі рівнянь (3) за наступним алгоритмом.

На першому етапі розрахунку будується дискретно-континуальна розрахункова модель і визначається матриця інерції $[\mathbf{T}]$ та вектор $\{P\}$ навантажень на дискретні маси. Далі за одним із запропонованих в роботах [1] чи [5] алгоритмів визначаються частоти і форми власних коливань об'єкта розрахунку. Із знайдених власних частот утворюється матриця власних частот $[\Omega^2]$, а із нормованих власних векторів формується матриця $[\mathbf{V}]$. Це дає можливість визначити матрицю

узагальнених мас $[M_q]$ та вектор узагальнених сил \bar{Q} і сформуувати праву частину рівнянь (3).

Другим кроком алгоритму є чисельне інтегрування на заданому проміжку часу рівнянь (3) для кожного k ($k = 1, \dots, n$) (n – кількість форм коливань, що утримуються в розкладі (2)). Оскільки шукані розв'язки не обов'язково повинні задовольняти рівняння (1) в будь-який момент часу t , а лише на окремих коротких відрізках Δt , то чисельне інтегрування виконується за допомогою покрокової процедури. При цьому диференціальне рівняння другого порядку (3) зводиться до еквівалентної системи двох звичайних диференціальних рівнянь відносно q_k та \dot{q}_k (коефіцієнтів розкладу вектора переміщень та вектора швидкостей). Така система на кожному часовому відрізку Δt розв'язується чисельно за алгоритмом Рунге-Кутта-Мерсона четвертого порядку точності.

На останньому етапі розрахунку по знайдених коефіцієнтах розкладу q_k для кожного часового кроку за формулою (2) визначається шуканий вектор переміщень \bar{Y} .

Аналізуючи рівняння (3), можна сказати, що точність розрахунку динамічної реакції системи на нестационарні впливи визначається точністю визначення частот і форм власних коливань. При цьому, відносний вклад окремих режимів власних коливань в загальний розв'язок нестационарної задачі і, відповідно, кількість утримуваних в розкладі (2) форм визначається характером навантаження, а тому потребує додаткового аналізу в кожному окремому випадку. З огляду на це, слід зауважити, що проведені в роботі [3] дослідження для високочастотної області підтвердили достовірність і високу точність розв'язків за методикою, що базується на покроковому методі, в той час як в роботі [5] виявлено, що точність розрахунку дискретно-континуальної моделі погіршується з ростом номера частоти. Тому, вбачається більш раціональним визначення параметрів власних коливань покроковим методом.

Для тестування алгоритму розрахунку на нестационарні впливи розглянуто задачу про динамічну реакцію жорстко защемленої по контуру круглої пластини товщиною $H = 0,1$ м і радіусом $R = 1$ м на дію нормального вісесиметричного навантаження в двох варіантах:

$$1) P_1(t) = 1, 0 \leq t \leq \infty; \quad 2) P_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t_0 \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Максимальні значення прогину u_z в різні моменти часу для задачі 1 та задачі 2 наведено в таблиці 1. Значення, отримані по запропонованій вище методиці при визначенні частот і форм власних коливань покрововим методом (колонки 3) і при розрахунку дискретно-континуальної моделі (колонки 4), порівняно з результатами, отриманими в роботі [7] на основі дискретизації вихідної моделі просторової лінійної теорії пружності за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів (колонки 1) та на основі теорії типу Тимошенка (колонки 2). Приведені фізико-механічні характеристики взяті з роботи [7]: модуль Юнга $E = 1$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, щільність $\rho = 1$.

Для забезпечення об'єктивності оцінки, розрахунок, як і в роботі [7], виконано при утриманні перших шести частот і форм власних коливань. Чисельні експерименти підтвердили також дослідження автора роботи [7] стосовно несуттєвого уточнення переміщень при врахуванні наступних власних форм.

Таблиця 1

t	$P_1(t)$				$P_2(t)$			
	1	2	3	4	1	2	3	4
2	-18,1	-18,9	-34,8	-32,0	-18,1	-18,5	-34,8	-32,0
4	-110,7	-109,8	-123,0	-116,7	-110,7	-110,0	-123,0	-116,7
6	-230,3	-229,8	-229,5	-224,0	-212,3	-211,8	-194,4	-191,0
8	-304,0	-307,0	-321,0	-316,0	-193,3	-197,2	-197,3	-197,6
10	-361,0	-366,1	-368,8	-360,1	-130,7	-136,8	-138,5	-134,3
12	-344,6	-355,4	-350,1	-340,6	-40,6	-48,6	-28,6	-23,4
14	-245,8	-256,9	-269,2	-264,5	115,2	110,9	99,8	95,8
16	-152,4	-162,2	-161,1	-158,7	192,2	193,7	188,8	181,1
18	-62,4	-64,2	-64,9	-60,68	193,4	191,6	203,7	202,2
20	12,3	12,6	-8,8	-5,5	164,8	173,8	151,4	151,7

Як видно з таблиці, чисельні результати, отримані за всіма окресленими вище підходами, практично збігаються. Це дозволяє говорити про достовірність запропонованої методики розрахунку реакції вісесиметричних пластин на нестационарні впливи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Жупаненко І. В.* Власні коливання товстої кільцевої пластини / І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техніч. збірник / Відп. ред. В. А. Баженов. – Вип. 83. – К., 2009. – С. 165 – 172.
2. *Чибіряков В. К.* Методика розв'язання задачі про власні коливання пластин обертання змінної товщини / В. К. Чибіряков, І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В. А. Баженов. – Вип. 86. – К., 2010. – С. 30 – 46.
3. *Жупаненко І. В.* Про один варіант динамічної теорії нетонких пластин та оболонки / І. В. Жупаненко // Науковий вісник молодих вчених Запорізької державної інженерної академії: збірник наукових праць / Відп. ред. В. І. Пожувєв. – Вип. 1(2). – Запоріжжя, 2011. – С. 47 – 51.
4. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников.* – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.
5. *Чибіряков В. К.* Про один алгоритм розрахунку віссиметричних коливань круглої пластини / В. К. Чибіряков, І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Вип. 81. – К. : КНУБА, 2007. – С. 43 – 50.
6. *Чибіряков В. К.* Дослідження власних коливань товстих пластин на основі дискретно-континуальної розрахункової моделі / В. К. Чибіряков, І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Вип. 87. – К. : КНУБА, 2011. – С. 118 - 127.
7. *Григоренко А. Я.* Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел / А. Я. Григоренко, И. И. Дьяк, В. М. Макара // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 5. – С. 24 – 31.

Стаття надійшла до редакції 03.10.2011 р.

Жупаненко И. В.

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИИ КРУГЛЫХ ДИСКОВ НА НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для определения реакции круглых дисков на нестационарные воздействия реализован алгоритм расчета дискретно-континуальной модели методом разложения движения по собственным формам колебаний. Частоты и формы собственных колебаний определяются двумя альтернативными подходами. Эффективность и достоверность методики проверена решением тестовой задачи и сравнением результатов.

Zhupanenko I. V.

THE PROCEDURE OF DETERMINATION OF DYNAMIC UNSTABLE RESPONSE OF THE AXI-SYMMETRIC PLATES

The dynamic unstable response of the slabs is defined by the decomposition on free vibration modes technique for discrete-continuum computation model. The procedure of determination of natural frequencies and modes is based on two alternative approaches. Efficiency and reliability of the technique has been checked by solving of the test problem and comparison of results.

УДК 539.3

О.К. Гревцев

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРІВ, НАВАНТАЖЕНИХ ЗМІННИМ ПО ДОВЖИНІ ТИСКОМ

Отримано точне розв'язання у переміщеннях рівнянь теорії пружності для тіл обертання при осесиметричному навантаженні.

Розв'язані задачі для порожнистих циліндрів, які перебувають під дією нормально доданих сил, відповідно до будь-якого закону на його внутрішніх та зовнішніх поверхнях. Краї циліндричної товстої оболонки порожнистого циліндра можуть бути закріплені по-різному.

Розроблена теорія розв'язання задач з галузі теорії пружності у переміщеннях дає можливість знайти умови, за яких з'являються температурні зміни у тілах обертання під дією зовнішніх навантажень.

Вступ

Крайові задачі для товстостінного порожнистого циліндра дуже складні і якщо не згадувати деяких тривіальних випадків, то немає жодного розв'язання задачі теорії пружності, яке цілком задовольняло всім граничним умовам на його бічній поверхні і торцях [1].

До таких тривіальних рішень належить задача визначення напруженого стану порожнистого циліндра вільного від закріплень на його торцях і навантаженого нормальними зусиллями, які змінюються по довжині за лінійним законом або при постійному тиску (задача Ламе).

Основна частина

У пропонованому дослідженні розглядається точне розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для порожнистого циліндра, навантаженого змінним нормальним тиском на його циліндричних поверхнях, з урахуванням різних умов закріплення на кінцях. При цьому тиск змінюється по довжині циліндра за довільним законом (рис. 1).

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах мають такий вигляд [2]:

в переміщеннях

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{e_{,1}}{1-2\nu} - 2 \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha \theta_{,1} = 0; \quad \Delta u_3 + \frac{e_{,3}}{1-2\nu} - 2 \frac{(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta_{,3} = 0; \quad (1)$$

і напруженнях

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0; \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \frac{1}{r} \sigma_{13} = 0; \quad (2)$$

У рівняннях (1) і (2) індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою r або z ; u_1 і u_3 – відповідно компоненти радіального і осевого переміщень; Δu – оператор Лапласа від переміщень u_i ($i=1,3$); σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{13} – відповідно компоненти радіальної, окружної, осевої і дотичної напружень.

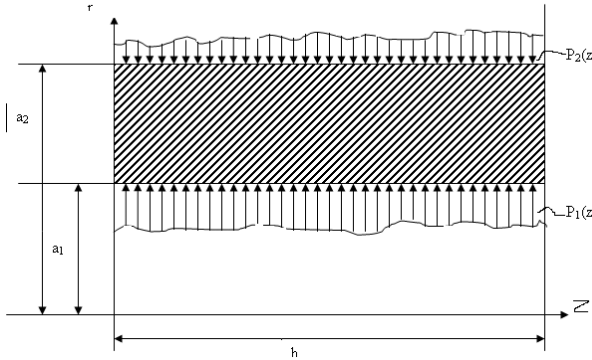


Рис. 1

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [2]

$$\sigma_{ij} = 2G \left(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3)$$

при відомих залежностях між деформаціями і переміщеннями:

$$e_{11} = u_{1,1}; \quad e_{22} = \frac{1}{r} u_1; \quad e_{33} = u_{3,3}; \quad 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1}. \quad (4)$$

Тут δ_{ij} – символ Кронекера; α і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона; $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ – об'ємне розширення;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ модуль зсуву; E – модуль пружності.

Рішення системи рівнянь (1) беремо у вигляді:

$$u_1(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\Psi_{,1} + \frac{1}{r} (A_5 z - A_3) \right] + r \left(A_4 z + \frac{1}{2} A_6 \right);$$

$$u_3(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} (\Psi_{,3} - A_5 e n r) - A_4 \left(\frac{\nu}{1-\nu} z^2 + \frac{r^2}{2} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} z A_6 + A_7, \quad (5)$$

де A_i – довільні сталі інтегрування, а $\Psi(r, z)$ функція, яку треба знайти.

Далі по переміщеннях (5) знаходимо деформації (4):

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= u_{,1} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\Psi_{,11} - \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) \right] + A_4 z + \frac{1}{2} A_6; \\
 e_{22} &= \frac{1}{r} u_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{1}{r} \Psi_{,1} + \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) \right] + A_4 z + \frac{1}{2} A_6; \\
 e_{33} &= u_{3,3} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \Psi_{,33} - \frac{2\nu}{1-\nu} \left(A_4 z + \frac{1}{2} A_6 \right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Підставляючи у закон Гука (3) деформації (6), знаходимо пружності:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13} &= \frac{E}{1-\nu} \Psi_{,13}; \sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r} (r \Psi_{,1})_{,1}; \\
 \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu} \left[-\frac{1}{r} \Psi_{,1} - \Psi_{,33} - \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + A_6 \frac{1}{2} \right]; \\
 \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu} \left[-\Psi_{,11} - \Psi_{,33} + \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + A_6 \frac{1}{2} \right]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Формули (5) і (7) є точними розв'язками рівнянь рівноваги (1) і (2), тому що після підстановки перетворюють останні на тотожності.

Як відомо, деформація пружного тіла нерозривно пов'язана зі зміною його температури [3]. Таким чином, зміна поля деформації спричиняє зміну поля температури і навпаки. Нехай температура ненапруженого циліндра при часі $t = 0$, дорівнює деякому постійному значенню T_0 . При навантаженні циліндра зовнішніми навантаженнями в ньому з'являється не тільки поле переміщень, а й температурне поле, яке відрізняється від T і не залежить від того, нагріте тіло чи не нагріте. Зміна температури буде $\theta = T - T_0$, де T – абсолютна температура точки тіла. Отже, під час деформації змінюється температура точки тіла і в результаті може відбутися поглинання або виділення тепла пружним неізолюваним тілом при взаємодії його з навколишнім середовищем [4].

Якщо деформація тіла досить мала, то після припинення дії зовнішніх сил, які викликають деформацію, тіло повертається у початковий недеформований стан. При цьому процес деформування відбувається дуже повільно, тобто він буде термодинамічно оборотний [5].

Тепер знаходимо температурну зміну $\theta = T - T_0$, яка виникає внаслідок дії зовнішніх навантажень.

Для об'ємного розширення $e = e + e + e$ з виразу (4), маємо:

$$e = \frac{1-2\nu}{1-\nu} 2 \left(A_4 z + \frac{1}{2} A_6 \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta \Psi, \quad (8)$$

де $\Delta \Psi = \Psi_{,11} + \frac{1}{r} \Psi_{,1} + \Psi_{,33}$.

Підставляючи переміщення (5) та вираз (8) в систему рівнянь рівноваги (1) і роблячи необхідні перетворення, знаходимо температурну зміну, яка з'являється внаслідок дії зовнішніх навантажень:

$$\alpha\theta = \Delta\Psi. \quad (9)$$

Розглянемо такі граничні умови для напружень при осесиметричній деформації циліндра:

$$\sigma_{13} = 0 \text{ при } r = a_1, r = a_2, z = 0, z = h, \quad (10)$$

$$\sigma_{11} = P_1(z) \text{ при } r = a_1; \sigma_{11} = -P(z) \text{ при } r = a_2, \quad (11)$$

$$\sigma_{33} = 0 \text{ при } z = 0, z = h, \quad (12)$$

де a_1 і a_2 – внутрішній та зовнішній радіуси циліндра, а h – його довжина.

Для виконання граничних умов візьмемо частинну похідну по r від функції переміщень $\Psi(r, z)$ у вигляді:

$$\Psi_{,1}(r, z) = \varphi(z) \frac{1}{r}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) \quad (13)$$

де $\varphi(z)$ – довільна функція від z , яку потрібно визначити з граничних умов.

Диференціюючи похідну (13) по z і підставляючи у дотичну напругу, σ_{13} з (7), знаходимо:

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu} \Psi_{,13} = \frac{E}{1-\nu} \varphi_{,3}(z) \frac{1}{r}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2), \quad (14)$$

при цьому:

$$\varphi_{,3}(z)|_{z=0} = 0; \varphi_{,3}(z)|_{z=h} = 0 \quad (15)$$

і граничні умови (10) виконуються.

Підставляючи похідну (13) в осьову напругу σ_{33} з (7), знаходимо:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} \varphi(z) \left[4r^2 - 2(a_1^2 + a_2^2) \right]. \quad (16)$$

Гранична умова (12) буде виконана, якщо

$$\varphi(z)|_{z=0} = 0; \varphi(z)|_{z=h} = 0. \quad (17)$$

Для знаходження радіальної напруги σ_{11} з (7) знаходимо функцію $\Psi(r, z)$, для чого інтегруємо похідну (13) по r :

$$\Psi(r, z) = \varphi(z) \int_{a_1}^r \frac{1}{r}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr + f(z), \quad (18)$$

$f(z)$ – довільна функція інтегрування.

Використовуючи похідну (13) і двічі диференціюючи функцію (18) по z , а потім підставляючи у формулу (7), отримаємо:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\varphi(z) \frac{1}{r^2} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) - \varphi_{,33}(z) \int_{a_1}^r \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr - \right. \\ \left. - f_{,33}(z) - \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + \frac{1}{2} A_6 \right\}. \quad (19)$$

Якщо виконати граничні умови (11), то знайдемо рівняння для визначення функцій $\varphi_{,33}(z)$ і $f_{,33}(z)$:

$$-\varphi_{,33}(z) = -\frac{P_1(z) - P_2(z) 1 - \nu}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1 - \nu}{E\beta} + \frac{A_5 z - A_3}{a_1^2 a_2^2 \beta}, \quad (20)$$

де $\beta = \frac{a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \ln \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1^2 + a_2^2}{4}$ та

$$-f_{,33}(z) = -P_1(z) \frac{1 - \nu}{E} + \frac{A_5(z) - A_3}{a_1^2} - \left(A_4(z) + \frac{1}{2} A_6 \right). \quad (21)$$

Підстановка похідної (21) у формулу (19) дає:

$$\sigma_{11} = -P_1(z) + \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\varphi(z) \frac{1}{r^2} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) - \right. \\ \left. - \varphi_{,33}(z) \int_{a_1}^r \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr + \frac{A_5(z) - A_3}{a_1^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (22)$$

Аналогічно для окружного напруження матимемо:

$$\sigma_{22} = -P_1(z) + \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\varphi_{(z)} \left[3r^2 - (a_1^2 + a_2^2) - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2} \right] - \right. \\ \left. - \varphi_{,33}(z) \int_{a_1}^r \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr + \frac{A_5 z - A_3}{a_1^2} \left(1 + \frac{a_1^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (23)$$

Знаходимо функцію $f(z)$, для чого двічі проінтегруємо рівняння (21):

$$f(z) = \frac{1-\nu}{E} \int_0^z \int_0^z P_1(z) dz dz - \frac{1}{a_1^2} \left(A_5 \frac{z^2}{6} - A_3 \frac{z^2}{2} \right) + A_4 \frac{z^2}{6} + A_6 \frac{z^2}{4} + C_3 z + C, \quad (24)$$

де C_3 і C_4 – довільні сталі інтегрування.

Температурна зміна $\theta(r_1 z)$ визначається з рівняння (9):

$$\theta(r_1 z) = \frac{1}{2} \Delta \Psi = \frac{1}{2} \left(\Psi_{,11} + \frac{1}{r} \Psi_{,1} + \Psi_{,33} \right), \quad (25)$$

після підстановки частинних похідних від функції (18) з урахуванням виразу (24) та функції $\varphi(z)$, яка визначається інтегруванням рівняння (20).

Знаючи функцію (18), закон навантаження $P_1(z)$ і $P_2(z)$ та граничні умови спирання кінців циліндра, можна легко знайти температурну зміну $\theta(r, z)$, яка в окремих випадках може дорівнювати нулю. Далі розглянемо деякі приклади розрахунків порожнистих циліндрів для конкретних випадків спирання і завдань різних законів навантаження.

Нехай порожнистий циліндр навантажений нормальним за довжиною тиском на його зовнішній і внутрішній поверхнях (задача Ламе). В цьому випадку маємо $P_1 = \text{const}$ і $P_2 = \text{const}$; кінці циліндра вільні. Інтегруючи рівняння (20), отримуємо:

$$-\varphi(z) = -\frac{P_1 - P_2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1 - \nu}{E\beta} \frac{z^2}{2} + \frac{A_5}{a_1^2 a_2^2 \beta} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2, \quad (26)$$

де A_5, A_3, C_1, C_2 – довільні сталі інтегрування.

Скористаймося граничними умовами (15) та (17), виконання яких дає:

$$A_5 = 0, \quad A_3 = -\frac{(P_1 - P_2) a_1^2 a_2^2 (1 - \nu)}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1}{E}, \quad C_1 = C_2 = 0. \quad (27)$$

Звідси для $\varphi(z)$ з (26) маємо:

$$\varphi(z) = 0. \quad (28)$$

У цьому випадку пружності (14) і (16) дорівнюють:

$$\sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = 0, \quad (29)$$

а для нормальних радіальної та осьової напруг з (22) і (23) отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{P_1 a_1^2 - P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 - P_2) a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)}; \\ \sigma_{22} &= \frac{P_1 a_1^2 - P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{(P_1 - P_2) a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Пружності (29) та (30) мають назву напруг задачі Ламе.

Підставляючи в функцію (21) для A_5 і A_3 з (27), отримуємо після інтегрування по z :

$$f(z) = \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1 - \nu}{E} \frac{z^2}{2} + A_4 \frac{z^3}{4} + A_6 \frac{z^2}{4} + C_3 z + C_4, \quad (31)$$

де A_4, A_6, C_3, C_4 – довільні сталі інтегрування.

Для функції переміщення (18), користуючись (28), знаходимо:

$$\Psi(r, z) = f(z). \quad (32)$$

Після підстановки (31) у (32) та диференціювання отримаємо:

$$\Psi_{,1} = 0; \quad (33)$$

$$\Psi_{,3} = \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1-\nu}{E} z + A_4 \frac{z}{2} + A_6 \frac{z}{2} + C; \quad (34)$$

$$\Psi_{,33} = \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1-\nu}{E} + A_4 z + \frac{1}{2} A_6. \quad (35)$$

Знаходимо переміщення (5), підставляючи (33) та (34) і використовуючи сталі (27):

$$u_1(r, z) = \frac{(P_1 - P_2) a_1^2 a_2^2}{r(a_2^2 - a_1^2)} \frac{1+\nu}{E} + r \left(A_4 z + A_6 \frac{1}{2} \right),$$

$$u_3(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1-\nu}{E} z + A_4 \frac{z^2}{2} + A_6 \frac{z}{2} + C_3 \right] -$$

$$-A_4 \left(\frac{\nu}{1-\nu} z^2 + \frac{r^2}{2} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} z A_6 + A_7. \quad (36)$$

За допомогою переміщень (36) можна задавати різні граничні умови на кінцях циліндра. В задачі Ламе цього не можна було зробити, тому що у ній знайдене рішення лише для вільних кінців циліндра. Знайдемо рішення задачі Ламе для труби з вільними від навантажень кінцями, вважаючи у переміщеннях (36) довільні сталі інтегрування рівними: $A_4=0$, $A_7=0$, $C_3=0$:

$$A_6 = A_1 = \frac{P_1 a_1^2 - P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} 2 \frac{1-\nu}{E};$$

$$A_2 = -A_3 \frac{1+\nu}{1-\nu} = \frac{(P_1 - P_2) a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1+\nu}{E}. \quad (37)$$

Отримаємо переміщення:

$$u_1 = A_1 \frac{r}{2} + A_2 \frac{1}{2}; \quad u_3 = -\frac{\nu}{1-\nu} z A_1, \quad (38)$$

які є відомим розв'язком задачі Ламе.

Таким чином, переміщення (36) дають можливість задовольнити різним умовам спірання на кінцях труби і у задачі Ламе.

Тепер з'ясуємо, чи виникає температурна зміна $\theta = T - T_0$ у задачі Ламе.

Для цього використовуємо рівняння (25), функції (33)–(35) та сталі (37):

$$\Psi_{,1} = 0; \Psi_{,11} = 0,$$

$$\Psi_{,33} = \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1-\nu}{E} - \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1-\nu}{E} = 0.$$

Таким чином, у задачі Ламе, розв'язок якої задається переміщеннями (38) при $P_1 = \text{const}$ і $P_2 = \text{const}$, температурна зміна θ дорівнює нулю:

$$\theta = T - T_0 = 0; T = T_0,$$

тобто задача Ламе є ізотермічною задачею.

Температурна зміна $\theta(r, z)$ може з'являтися при певних навантаженнях і у задачі Ламе при відповідних умовах спирання на кінцях порожнистого циліндра. Розглянемо, наприклад, такий тип опирання циліндра:

$$u_3 = 0, \text{ при } z=0; z=h. \quad (39)$$

З рівнянь (36) при $z=0$ знаходимо:

$$\frac{1+\nu}{1-\nu} C_3 - A_4 \frac{r^2}{2} + A_7 = 0,$$

звідки:

$$A_4 = 0; A_7 = -\frac{1+\nu}{1-\nu} C_3.$$

Завдяки довільності сталих інтегрування, вважаємо $C_3 = 0$ і $A_7 = 0$, оскільки ці сталі характеризують поступальне переміщення тіла. Враховуючи значення сталих $A_4 = A_7 = C_3 = 0$, отримаємо для осевого переміщення u_3 з (36):

$$u_3(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1-\nu}{E} + A_6 \frac{1}{2} \right] z - \frac{\nu}{1-\nu} z A_6.$$

Враховуючи ці значення сталих інтегрування у переміщеннях (36) при $z=h$, маємо:

$$A_6 = -2 \frac{1+\nu}{E} \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}.$$

Далі знаходимо функції (33) і (35):

$$\Psi_{,33} = -\frac{2\nu}{E} \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}; \Psi_{,1} = 0; \Psi_{,11} = 0.$$

Підставляючи ці похідні у температурну змінену (25), отримаємо:

$$\theta(r, z) = -\frac{2\nu}{E} \frac{P_2 a_2^2 - P_1^2 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}. \quad (40)$$

Таким чином, за даними умовами опирання (39) температурна змінена у порожнистому циліндрі виражається через зовнішні навантаження і не дорівнює нулю. Знімаючи дію зовнішніх навантажень, знову повертаємося у початковий стан, тобто температурна змінена (40) зникає. Отже, маємо пружну й теплову оборотність. Залежно від знака виразу $P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2$ у (40), температурне змінення $\theta = T - T_0$ може бути позитивною або негативною. Величина $\theta(r, z)$, як бачимо з (40), дуже мала.

Далі розглянемо приклад, коли нормальний тиск на циліндр змінюється за лінійним законом. У цьому випадку граничні умови будуть такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -P_1(z) = Mz + N \text{ при } r = a_1; \\ \sigma_{22} &= -P_2(z) = Qz + R \text{ при } r = a_2, \end{aligned} \quad (41)$$

де M, N, Q, R – задані постійні величини, які можуть мати різний знак.

Зовнішній та внутрішній тиски на циліндр є лінійними функціями від z , тобто змінюються за лінійним законом вздовж його циліндричних поверхонь. З (41) маємо:

$$P_1(z) = -(Mz + N); \quad P_2(z) = -(Qz + R). \quad (42)$$

Звідси:

$$P_1(z) - P_2(z) = (Q - M)z + (R - N). \quad (43)$$

Підставимо у рівняння (20) величину (43) і отримаємо

$$\varphi_{,33}(z) = -\left[(Q - M)z + (R - N)\right] \frac{1 - \nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)} + \frac{A_5 z - A_3}{a_2^2 a_1^2 \beta}. \quad (44)$$

Інтегруючи (44) по z , маємо:

$$\varphi_{,3}(z) = -\left[(Q - M) \frac{z^2}{2} + (R - N)z\right] \frac{1 - \nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)} + \frac{A_5}{\beta a_2^2 a_1^2} \frac{z^2}{2} - \frac{A_3 z}{\beta a_2^2 a_1^2} + C_1. \quad (45)$$

Знову інтегруючи (45), знаходимо:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\left[(Q - M) \frac{z^3}{6} + (R - N) \frac{z^2}{2}\right] \frac{1 - \nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)} + \\ &+ \frac{A_5}{\beta a_2^2 a_1^2} \frac{z^3}{6} - \frac{A_3}{\beta a_2^2 a_1^2} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2. \end{aligned} \quad (46)$$

Використовуючи граничні умови (15), знаходимо значення довільних сталих:

$$C_1 = C_2 = 0; \quad \frac{A_5}{\beta a_2^2 a_1^2} = (Q - M) \frac{1 - \nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)}$$

$$-\frac{A_3}{\beta a_2^2 a_1^2} = (R - N) \frac{1 - \nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)}. \quad (47)$$

Підставляючи величини (47) в функцію (46), отримуємо:

$$\varphi(z) = - \left[(Q - N) \frac{z^3}{6} + (R - N) \frac{z^2}{2} \right] \frac{1 - \nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)} +$$

$$+ \left[(Q - N) \frac{z^3}{6} + (R - N) \frac{z^2}{2} \right] \frac{1 - \nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)} = 0, \quad (48)$$

тобто $\varphi(z) = 0$; $\varphi_{,3}(z) = 0$; $\varphi_{,33}(z) = 0$.

При даному виді навантаження усі формули, отримані раніше для розв'язання задачі Ламе, залишаються справедливими, але замість $P_1 = \text{const}$ і $P_2 = \text{const}$ треба підставити зовнішнє навантаження (42), яке змінюється по довжині циліндра за лінійним законом.

Підставляючи значення сталих з (37) у (36), знаходимо для переміщень:

$$u_1(r, z) = \frac{P_1 a_1^2 - P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1 - \nu}{E} r + \frac{(P_1 - P_2) a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{1 + \nu}{E} \frac{1}{r};$$

$$u_3(r, z) = \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{2(1 + 2\nu)}{E} z, \quad (49)$$

де $P_1(z) = -(Mz + N)$; $P_2(z) = -(Qz + R)$.

І у розглянутій задачі температурна змінена $\theta(r, z)$ дорівнює нулю.

Таким чином, відомий розв'язок Ламе є окремим випадком розглянутої у статті більш загальної задачі при навантаженні циліндра за довільним законом та при дотриманні різних умов опирання на його кінцях.

Для підтвердження вищевикладеного розглянемо розв'язок узагальненої задачі теорії пружності для порожнистого циліндра, навантаженого осесиметричним тиском за будь-яким законом на його зовнішній та внутрішній циліндричних поверхнях.

Розглянемо такі нелінійні закони розподілу навантажень:

$$\sigma_{11} = -P_1(z) = D_1 z \quad \text{при } r = a_1;$$

$$\sigma_{22} = -P_2(z) = D_2 z \quad \text{при } r = a_2, \quad (50)$$

де D_1 та D_2 – задані постійні величини.

Тоді:

$$P_1(z) - P_2(z) = -(D_1z - D_2z). \quad (51)$$

Для зручності подальшого розв'язку введемо в рівняння для визначення функції $\varphi(z)$ (20) такі позначення:

$$\beta_2 = \frac{A_5}{a_2^2 a_1^2 \beta}; \quad \beta_3 = \frac{A_3}{a_2^2 a_1^2 \beta}; \quad \beta_1 = \frac{1-\nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)}. \quad (52)$$

Підставляючи (52) в рівняння (20), з урахуванням (1), отримаємо:

$$-\varphi_{,33} = (D_1 z^3 - D_2 z^2) \beta_1 + \beta_2 z + \beta_3. \quad (53)$$

Інтегруючи (22) двічі по z , отримаємо для (z) :

$$-\varphi(z) = \left(D_1 \frac{z^5}{20} - D_2 \frac{z^4}{12} \right) \beta_1 + \beta_2 \frac{z^3}{6} + \beta_3 \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2. \quad (54)$$

Задовольняючи граничним умовам (15) та (17) на кінцях циліндра, знаходимо сталі β_2 і β_3 :

$$\beta_2 = \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10} \right) \beta_1, \quad \beta_3 = \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6} \right) \beta_1. \quad (55)$$

Підставляючи їх у функцію (54), отримаємо:

$$-\varphi_{(z)} = \left(D_1 \frac{z^5}{20} - D_2 \frac{z^4}{12} \right) \beta_1 + \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10} \right) \beta_1 \frac{z^3}{6} + \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6} \right) \beta_1 \frac{z^2}{2}. \quad (56)$$

З (56) знаходимо похідні $\varphi_{,3}$ і $\varphi_{,33}$:

$$\begin{aligned} -\varphi_{,3} &= \left(D_1 \frac{z^4}{4} - D_2 \frac{z^3}{3} \right) \beta_1 + \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10} \right) \beta_1 \frac{z^2}{2} + \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6} \right) \beta_1 z; \\ -\varphi_{,33} &= (D_1 z^3 - D_2 z^2) \beta_1 + \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10} \right) \beta_1 z + \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6} \right) \beta_1. \end{aligned} \quad (57)$$

З позначень (52) маємо з урахуванням (55):

$$A_3 = - \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6} \right) \beta_1 a_2^2 a_1^2 \beta, \quad A_5 = \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10} \right) \beta_1 a_2^2 a_1^2 \beta. \quad (58)$$

де $\beta_1 = \frac{1-\nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)}$.

Напруги отримаємо з формул (14), (16), (22) і (23):

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{E}{1-\nu} \varphi_{,3}(z) \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2) (r^2 - a_2^2); \\ \sigma_{11} &= -P_1(z) + \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\varphi(z) \frac{1}{r^2} (r^2 - a_1^2) (r^2 - a_2^2) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\varphi_{,33}(z) \int_{a_1}^r \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr + \frac{A_5 z - A_3}{a_1^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{r^2} \right) \Bigg\}, \\
 \sigma_{22} = & -P_1(z) + \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\varphi(z) \left[3r^2 - (a_1^2 + a_2^2) - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2} \right] - \right. \\
 & \left. -\varphi_{,33}(z) \int_{a_1}^r \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr + \frac{A_5 z - A_3}{a_1^2} \left(1 + \frac{a_1^2}{r^2} \right) \right\}. \quad (59)
 \end{aligned}$$

У формулах (59): $P_1 = -D_1 z$, $P_2 = -D_2 z$; $\varphi(z)$ та її похідні визначені у (56) і (57); A_5 та A_3 знаходимо з (58).

Функцію переміщень $\psi(r, z)$ знаходимо з (18), при цьому для функції $f(z)$ з (24) маємо:

$$f(z) = -\frac{1-\nu}{E} D_1 \frac{z^5}{20} - \frac{1}{a_1^2} \left(A_5 \frac{z^3}{6} - A_3 \frac{z^2}{2} \right) + A_4 \frac{z^3}{6} + A_6 \frac{z^2}{4} + C_3 z + C_4. \quad (60)$$

Температурна змінена $\theta = T - T_0$ в циліндрі від дії зовнішніх навантажень визначаємо з (25), в яке потрібно підставити похідні від функції (18):

$$\begin{aligned}
 \psi_{,1} = & \varphi(z) \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2); \quad \psi_{,11} = \varphi(z) \left[3r^2 - (a_1^2 + a_2^2) - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2} \right]; \\
 \psi_{,33} = & \varphi_{,33}(z) \int_{a_1}^r \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr + f_{,33}(z), \quad (61)
 \end{aligned}$$

де маємо з (60):

$$f_{,33} = -\frac{1-\nu}{E} D_1 z^3 - \frac{1}{a_1^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + \frac{1}{2} A_6.$$

У цьому разі температурна змінена $\theta(r, z)$ відмінна від нуля і має досить складний вигляд. Радіальне і осьове переміщення визначаються з формул (5), які дозволяють задовольнити різним умова опирання на кінцях циліндра завдяки довільності постійних сталих інтегрування A_4 ; A_6 ; A_7 і C_3 .

Висновки

Таким чином, у пропонованій статті розглянуто узагальнення задачі Ламе на зовнішнє навантаження будь-якого закону і можливість задовольнити різним умовам опирання на кінцях товстої циліндричної оболонки, яка навантажена осесиметрично.

Отримані рішення свідчать про те, що дія зовнішніх зусиль приводить до появи температурної зміни у циліндрі, яка залежить від виду навантаження і граничних умов на його кінцях.

У випадку постійного або лінійного навантаження вздовж циліндричних поверхонь тіла обертання температура змінена відсутня. Отже, не завжди зовнішнє навантаження спричиняє появу температурної зміни.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том2. Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. – 463 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Жермен П. Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.
4. Фен Дж. Машины, энергия, энтропия. – М.: Мир, 1986. – 336 с.
5. Ландау Л.Д. и Лившиц Е. М. Теория упругости. – М.: Наука. 1987. – Т. VII. –246 с.

Стаття надійшла до редакції 20.10.2011 р.

Гревицев А.К.

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ НАГРУЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫМ ПО ДЛИНЕ ДАВЛЕНИЕМ

Получено точное решение в перемещениях уравнений теории упругости для тел вращения при осесимметричной нагрузке.

Решены задачи для полых цилиндров, которые находятся под воздействием нормально прилагаемых сил, согласно любого закона, на его внутренней и внешней поверхностях. Края цилиндрической толстой оболочки, полого цилиндра могут быть закреплены по-разному.

Разработанная теория решения задач из области теории упругости в перемещениях дает возможность обнаружить условия, при которых появляются температурные изменения в телах вращения под действием внешних нагрузок.

Grevtsev O.K.

SOLUTION OF AXIALLY SYMMETRICAL TASK OF ELASTICITY THEORY FOR THICK-WALLED CYLINDERS LOADED LENGTHWISE BY FLUCTUATING STRESS

The exact solution in the shifts of equations of elasticity theory for axially symmetrical rotary bodies under symmetric loading is obtained. (At the symmetrical axis to a loading).

Problems for hollow cylinders, which are under the influence of normally, applied forces on its interior and exterior surfaces, according to any law, are resolved. The edges of a cylindrical thick shell of the hollow cylinder can be fixed differently.

The developed theory of tasks solution related to the elasticity theory in the shifts gives the opportunity to find out the conditions under which thermal changes in axially symmetrical rotary bodies under the influence of exterior loadings appear.

УДК 539.3

Є.О.Гоцуляк, д-р техн. наук
А.В. Пікуль

РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОСТОРОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА В КРИВОЛІНІЙНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Розроблено методику розрахунку нетонких пластин та оболонок на основі просторових скінчених елементів у криволінійній системі координат. За цією методикою створено алгоритм та написано програму для розрахунку на мові фортран. На прикладі товстостінного циліндра (задача Ламе) продемонстровано збіжність методу скінчених елементів за метричним критерієм порівняно з точним розрахунком в переміщеннях.

Розглянемо об'ємний криволінійний скінченний елемент оболонки. В центрі скінченного елемента розміщуємо криволінійну систему координат x^1, x^2, x^3 (рис. 1)

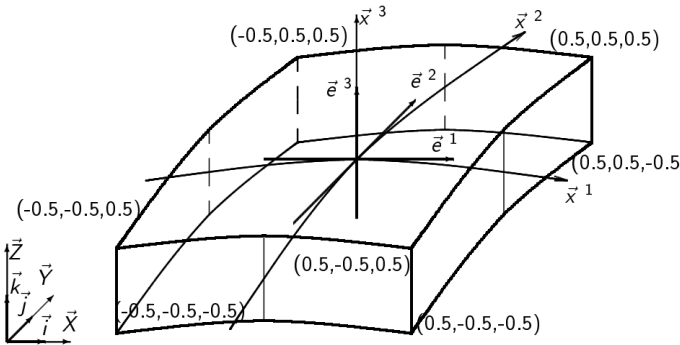


Рис. 1

Таким чином контури СЕ знаходяться в межах від $x^i = -0.5$ до $x^i = 0.5$. Отже розміри сторін визначаються коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні $\sqrt{g_{ii}}$, де $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ ($i, j = \alpha, \beta, \gamma$), а об'єм відповідає визначнику метричного тензора \sqrt{G} :

$$G = \det \|\vec{g}_{ij}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Серединна поверхня в декартовій системі координат XYZ описується функціями $X = X(x^1, x^2, x^3), Y = Y(x^1, x^2, x^3), Z = Z(x^1, x^2, x^3)$.

Вектори, що описуються залежностями

$$\bar{e}_\alpha = \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} \bar{i} + \frac{\partial Y}{\partial x^\alpha} \bar{j} + \frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} \bar{k}, \quad \alpha = 1, 2,$$

дотичні до координатних ліній x^1, x^2, x^3 і співпадають з напрямком зростання відповідних координат. Вектор \bar{e}_3 співпадає з ортом нормалі до серединної поверхні

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{|\bar{e}_1 \times \bar{e}_2|} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\sqrt{g}}.$$

Ці вектори являють собою основний локальний базис точок серединної поверхні скінченного елемента оболонки.

Вектори взаємного базису пов'язані з векторами основного базису співвідношеннями

$$\bar{e}^{-1} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{|\bar{e}_2 \times \bar{e}_3|} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\sqrt{g}}, \quad \bar{e}^{-2} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{|\bar{e}_3 \times \bar{e}_1|} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\sqrt{g}},$$

де

$$g = \det \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Переміщення точок елемента оболонки описуються вектор-функцією координат серединної поверхні $\bar{u} = \bar{u}(x^1, x^2, x^3)$.

Коваріантні компоненти тензора деформацій визначаються диференціальними залежностями

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x^\alpha} \bar{e}_\beta + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x^\beta} \bar{e}_\alpha \right).$$

Для однорідного ізотропного матеріалу закон Гука матиме такий вигляд

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu g^{\alpha\beta} g^{\gamma\omega} + (1-\nu) g^{\alpha\gamma} g^{\beta\omega} \right] \varepsilon_{\gamma\omega},$$

де E — модуль пружності матеріалу, $\sigma^{\alpha\beta}$ — коваріантна компонента тензора напружень.

Потенціальну енергію деформації запишемо у вигляді

$$Y = \frac{1}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \sigma^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Вектор-функцію переміщень апроксимуємо рядом Маклорена

$$\bar{U}(x^1, x^2, x^3) = \bar{U}^0 + \frac{\partial \bar{U}^0}{1! \partial x^\alpha} x^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{U}^0}{2! \partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{\partial^3 \bar{U}^0}{3! \partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots$$

Отримуємо залежності для деформацій

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(U_{\alpha\beta}^0 + U_{\beta\alpha}^0 U_{\alpha\beta\gamma}^0 x^\gamma + U_{\beta\alpha\omega}^0 x^\omega + \frac{1}{2!} U_{\alpha\beta\gamma\omega}^0 x^\gamma x^\omega \right),$$

або в матричному вигляді

$$\{\varepsilon\} = [D_\varepsilon]\{\Phi\},$$

де $[D_\varepsilon]$ - матриця коефіцієнтів, що пов'язують деформації з набором коефіцієнтів апроксимуючого ряду переміщень $\{\Phi\}$:

$$\{U\} = \{U_1^0, U_2^0, U_1^0, U_3^0, U_{11}^0, U_{21}^0, U_{31}^0, U_{12}^0, U_{22}^0, U_{32}^0, U_{13}^0, U_{23}^0, U_{33}^0, U_{112}^0, U_{212}^0, U_{312}^0, U_{113}^0, U_{213}^0, U_{313}^0, U_{123}^0, U_{223}^0, U_{323}^0, U_{1123}^0, U_{2123}^0, U_{3123}^0\}^T.$$

Вектор вузлових переміщень:

$$\{U\} = \{U_1^{---}, U_2^{---}, U_3^{---}, U_1^{+--}, U_2^{+--}, U_3^{+--}, U_1^{-+-}, U_2^{-+-}, U_3^{-+-}, U_1^{++-}, U_2^{++-}, U_3^{++-}, U_1^{-+-}, U_2^{-+-}, U_3^{-+-}, U_1^{+++}, U_2^{+++}, U_3^{+++}\}^T,$$

де символами «+» і «-» позначені величини +0,5 і -0,5 координат x^1, x^2, x^3 .

Пряма та зворотня залежності вектора вузлових переміщень і вектора коефіцієнтів апроксимуючого ряду визначаються матрицею $[P]$:

$$\{U\} = [P]\{\Phi\},$$

$$\{\Phi\} = [P]^{-1}\{U\} = [S]\{U\}.$$

Де компоненти матриці $[P]$ визначаються з наступних співвідношень

$$U_j^{\alpha\beta\gamma} = U_i \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i + U_{i\alpha} \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i \cdot \alpha + \frac{1}{2!} U_{i\alpha\beta} \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i \cdot \alpha\beta + \dots$$

$$a_{j\alpha\beta\gamma}^i = \bar{e}^i(0,0,0) \cdot \bar{e}_j(\alpha, \beta, \gamma).$$

Потенціальну енергію елемента через вузлові переміщення визначається функціоналом

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \{U\}^T [S]^T [D_\varepsilon]^T [A] [D_\varepsilon] [S] \{U\} \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3 - \{U\}^T [F] - \{U\}^T [R],$$

де $[A]$ - матриця пружних сталей матеріалу, $[F]$ - вектор вузлових навантажень, $[R]$ - вектор реакцій.

З умови стаціонарності функціоналу повної потенціальної енергії скінченного елемента

$$\delta\Pi = [K]\{U\} - [F] - [R] = 0,$$

визначаємо вектор реакцій

$$[R] = [K]\{U\} - [F],$$

де $[K]$ - матриця жорсткості, котра має наступний вигляд

$$[K] = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} [S]^T [D_\varepsilon]^T [A][D_\varepsilon][S] \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Оцінка методики. МСЕ використовує принцип можливих переміщень $a(u, v) + l(v) = 0$, де дійсне переміщення u та довільне можливе переміщення v визначені на області Ω і належать енергетичному простору V .

Позначимо dr крок розбивки скінченного елемента, $d = \max(dr)$.

МСЕ буде збіжним при умові справедливості рівності:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|U - U_d\|_0 \rightarrow 0,$$

де U – точний розв’язок, U_d – розв’язок, отриманий МСЕ.

Оцінка похибки за метричним критерієм $\|U - U_d\|_0 \leq kh^2 \|U\|_2$.

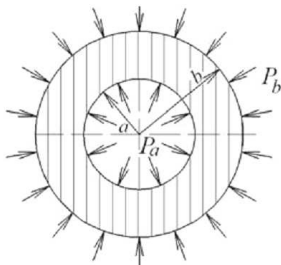


Рис. 2

Дослідження збіжності виконуємо на прикладі задачі Ламе, для котрої існує точний розв’язок в переміщеннях.

Товстостінний циліндр знаходиться під дією внутрішнього p_a та зовнішнього p_b тиску (рис. 2).

$$p_b = 100 \text{ кПа}, \quad p_a = 500 \text{ кПа}, \quad E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа}, \\ G = 8 \cdot 10^7 \text{ кПа}, \quad \nu = 0.25, \quad x = \frac{r}{b}, \quad x_1 = \frac{a}{b}.$$

Точний розв’язок у переміщеннях описується формулою:

$$U = \frac{b}{2G(1-x_1^2)} [(1-2\nu)(p_a x_1^2 - p_b)x + (p_a - p_b) \frac{x_1^2}{x}].$$

Розбиваємо циліндр на скінченні елементи – в 1 та 2 шари по товщині, і на $m=6, 12$ та 24 сегмента по колу:

1) $R=0.1 \text{ м}, h=0.01 \text{ м}$:

M	U^+	U	U_d^+	U_d^-	$\Delta, \%$	
	Один елемент по товщині ($U, 10^{-7} \text{ м}$)					
6	1,5674	1,6858	1,7451	1,7894	11,34	6,14
12			1,6408	1,6816	4,68	0,25
24			1,6135	1,6536	2,94	1,91
Два елемента по товщині ($U, 10^{-7} \text{ м}$)						
6	1,5674	1,6858	1,7324	1,7761	10,53	5,35
12			1,6377	1,6913	4,48	0,32
24			1,6272	1,6815	3,81	0,25

2) $R=0.1$ м, $h=0.02$ м:

m	U^+	U	U_d^+	U_d	$\Delta, \%$	
Один елемент по товщині ($U, 10^{-7}$ м)						
6	6,3541	7,0833	6,7926	7,5036	6,9	5,93
12			6,5544	7,2713	3,15	2,65
24			6,4501	7,1544	1,51	1,01
Два елемента по товщині ($U, 10^{-7}$ м)						
6	6,3541	7,0833	6,5904	7,4636	3,72	5,37
12			6,4865	7,0872	2,08	0,06
24			6,3794	6,9815	0,39	1,43

Отже, на прикладі даної задачі можна зробити висновок – при зменшенні розмірів скінченно-елементної сітки, похибка зменшується, а значить зростає збіжність методу за метричним критерієм збіжності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Блох В.И.* Теория упругости — Х.: Изд-во Харьковск. Гос. ун-та, 1964 — 438 с.
2. *Борисенко А.И., Тарапов И.Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высшая школа. 1966 — 256 с.
3. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
4. *Городецкий А.С., Евзеров И.Д.* Компьютерные модели конструкций. — К.: Факт, 2007. — 394 с.
5. *Джонсон, Маклей.* Сходимость метода конечных элементов в теории упругости. — Прикладная механика, Сер Е, 1968, №2, с. 68-72.
6. *Костіна О.В.* Реалізація криволінійних скінченноелементних моделей на основі векторної апроксимації функції форми в задачах теорії оболонок: дисертація канд. техн. наук: 05.23.17 — Київський національний ун-т будівництва і архітектури. - К., 2003.
7. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959 — 364 с.
8. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. — М.: Высшая школа, 1983 — 396 с.

Стаття надійшла до редакції 14.03.2011 р.

Гоцуляк Е.А., Пикуль А.В.

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Разработано методику расчета нетонких пластин и оболочек на основе пространственных конечных элементов в криволинейной системе координат. Согласно этой методике создано алгоритм и написано программу для вычислений на языке фортран. На примере толстостенного цилиндра (задача Ламе) продемонстрировано сходимость метода конечных элементов по метрическому критерию сравнительно с точным расчетом в перемещениях.

Gotsuliak E.O., Pikul A.V.

THE SOLID FINITE ELEMENT REALIZATION IN CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM

The method of non-thin plates and shells calculation was elaborated on the basis of solid finite elements in curvilinear coordinate system. There was an algorithm and a FORTRAN programme for calculations created according to this method. The example of the thick-walled cylinder (the Lamé problem) was used to demonstrate the metric criterion convergence of the solid finite elements method in comparison with the exact calculation in motion.

УДК 624.044:624.012.45

П.В. Войтенко

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛИТИ ПЕРЕКРИТТЯ У ВУЗЛІ ОПИРАННЯ НА КОЛОНУ

На основі співвідношень для просторового скінченного елемента розроблено та удосконалено методи чисельного розрахунку залізобетонних конструкцій в умовах об'ємного багатовісного напруженого стану із врахуванням пластичних характеристик матеріалів.

Вступ

Метою даної роботи є розробка та удосконалення ефективних чисельних методів розрахунку залізобетонних конструкцій в об'ємному багатовісному напруженому стані з врахуванням пластичних характеристик матеріалів.

Однією з тенденцій сучасного будівництва є збільшення корисних площ приміщень і, як наслідок, збільшення величини робочих прольотів каркасів будівель. Це призводить до збільшення відстані між несучими елементами та, відповідно, збільшення навантажень на них. В зонах опирання плит перекриття на колони виникає значна концентрація, як вертикальних та зсувних напружень, так і згинальних моментів, для сприйняття яких збільшують товщину плити та зменшують розрахункові прольоти шляхом встановлення на колонах капітелей [1]. А саме, передбачено виконання перекриття у вигляді нерозрізної монолітної залізобетонної плити; при розмірах чарунки плити більш ніж 6000х6000 мм, товщину плити рекомендується приймати не менше 200 мм; при відстанях між опорами плити більш ніж 7200 мм, плиту перекриття рекомендується підсилювати капітелями або балками.

З встановленням капітелей збільшується площа опирання плити перекриття на колону, тим самим формується більш жорсткий вузол сполучення, і в розрахунковій моделі зменшується проліт плити на величину капітелі. Це дозволяє, не зменшуючи корисну площу, конструктивними методами підвищити жорсткість всього перекриття, а отже, зменшити величини згинальних моментів та забезпечити їх рівномірне розподілення по ширині плити. Зі збільшенням площі опирання перекриття підвищується міцність на продавлювання.

1. Вихідні співвідношення для просторового скінченного елемента

Робота залізобетонних елементів, на відміну від бетонних, має ряд характерних особливостей. Якщо бетон, з деяким наближенням, можна

Дотичні модулі K_t (об'ємний) і G_t (зсувний) обчислюються:

$$\begin{aligned} K_t &= \frac{K_0 H_0 \sigma_0}{\left[H_0 (k_{11} + k_{11}^*) \sigma_0 + K_0 k_{12}^* T \right]}, \\ G_t &= \frac{G_0 H_0 T}{\left[H_0 (k_{22} + k_{22}^*) T + G_0 k_{12}^* T \right]}, \\ H_t &= \frac{H_0}{\left[(k_{12} + k_{12}^*) \right]}, \end{aligned} \quad (6)$$

де коефіцієнти k_{11} , k_{22} , k_{12} , k_{11}^* , k_{22}^* , k_{12}^* дорівнюють:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 1 + L_{\mu\sigma} \sigma_0^2; \quad k_{12} = M_{\mu\sigma} \sigma_0^5 T^5; \quad k_{22} = 1 + N_{\mu\sigma} T^5; \\ k_{11}^* &= 2L_{\mu\sigma} \sigma_0^2; \quad k_{12}^* = 5M_{\mu\sigma} \sigma_0^5 T^5; \quad k_{22}^* = 5N_{\mu\sigma} T^5. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) $L_{\mu\sigma}$, $M_{\mu\sigma}$, $N_{\mu\sigma}$ – коефіцієнти нелінійності для тривісного стику, які визначаються за параметром навантаження R та коефіцієнтами $\bar{q}_{\mu\sigma}$, $\bar{S}_{\mu\sigma}$, що залежать від типу напруженого стану (параметр Лоде-Надаї $\mu\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$):

$$L_{\mu\sigma} = \frac{\bar{q}_{\mu\sigma} - 1}{\bar{\sigma}^2}, \quad M_{\mu\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2\bar{\sigma}_0^2 \cdot \bar{T}^6}, \quad N_{\mu\sigma} = \frac{\bar{S}_{\mu\sigma} - 1}{\bar{T}^5} - \frac{3\bar{\sigma}_0^2 \cdot (\bar{q}_{\mu\sigma} - 1)}{4\bar{T}^7}. \quad (8)$$

При розтягу дилатаційні ефекти в бетоні не проявляються і, відповідно, складові, що характеризують взаємний вплив, дорівнюють нулю ($k_{12}=0$), а співвідношення (6) матимуть вигляд:

$$K_t = K_0 / (k_{11} + k_{11}^*); \quad G_t = G_0 / (k_{22} + k_{22}^*). \quad (9)$$

Для ділянок тривісного стику ($\sigma_1 \leq 0$, $\sigma_2 \leq 0$, $\sigma_3 < 0$) матрицю пружності бетону формуємо за іншими принципами. По-перше створимо матрицю піддатливості бетону $B_t(\Delta\sigma)$ за загальною схемою дилатаційної моделі, із врахуванням сумісного впливу об'ємних та зсувних складових. Матриця $B_t(\Delta\sigma)$, розміром шість на шість елементів, повністю заповнена, а для отримання матриці пружності бетону знайдемо обернену матрицю. Обернення виконаємо стандартним методом виключень Гауса-Жордана з перекомпонуванням вихідної матриці в одиничну, вибором вирішального елемента та перевіркою стійкості розв'язку лінеаризованої системи рівнянь. Процес обчислення проходить цілком стійко, оскільки кожний основний елемент b_{ij} характеризує, безпосередньо, піддатливість конструкції, а отже відмінний від нуля. Але, так як головні елементи матриці $B_t(\Delta\sigma)$ мають порядок $n \cdot 10^{-6}$, то при визначенні детермінанта матриці $\det[B_t(\Delta\sigma)]$ чи оберненні може відбутися втрата значущих цифр. Це ніяк не відобразиться на процесі обчислення, але може внести деяку

похибку в вихідну матрицю. Щоб цього уникнути, помножимо первісну матрицю піддатливості бетону на масштабний коефіцієнт $V_t(\Delta\sigma) \cdot k$, де $k=10^6$. Тоді, після обернення, матриця пружності бетону $\mathbf{D}_b(\varepsilon)$ матиме вигляд:

$$\mathbf{D}_b = k \cdot \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ & & & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ & & & & b_{55} & b_{56} \\ & & & & & b_{66} \end{pmatrix} \cdot k \right]^{-1}. \quad (10)$$

Маючи матриці пружності арматури (3) і бетону (10) чи (4), в відповідності з (2), отримаємо композитну матрицю пружності залізобетону $\mathbf{D}_{bs}(\Delta\varepsilon)$.

Інший шлях отримання матриці пружності залізобетонного елемента $\mathbf{D}_{bs}(\Delta\varepsilon)$, котрий реалізований в програмних комплексах, ґрунтується на теорії анізотропного тіла [2]:

$$\mathbf{D}_{bs} = \frac{E_b(1-\nu_b)}{(1-\nu_b)(1-2\nu_b)} \left[\begin{array}{ccccccc} \frac{E_{xx}^*}{E_b} & a & a & & & & \\ & \frac{E_{yy}^*}{E_b} & a & & & & \\ & & \frac{E_{zz}^*}{E_b} & & & & \\ & & & \frac{G_{xx}^*}{G_b} b & & & \\ & & & & \frac{G_{yy}^*}{G_b} b & & \\ & & & & & \frac{G_{zz}^*}{G_b} b & \end{array} \right], \quad (11)$$

де $a = \nu_b / (1 - \nu_b)$; $b = (1 - 2\nu_b) / (2 - 2\nu_b)$.

Модуль пружності E_{ii}^* і модуль зсуву G_{ii}^* визначимо як:

$$E_{ii}^* = E_b \left[1 + (n_i - 1) f_i + \frac{(1 - \frac{1}{n_{i+1}}) \cdot f_{i+1}}{1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{n_i})^2 \cdot f_i + (1 - \frac{1}{n_{i+1}})^2 \cdot f_{i+1}}} \right] +$$

$$G_{ii}^* = G_b \left[1 + \frac{(1 - \frac{1}{m_i}) \cdot f_i + (1 - \frac{1}{m_{i+1}}) \cdot f_{i+1}}{1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{m_i})^2 \cdot f_i + (1 - \frac{1}{m_{i+1}})^2 \cdot f_{i+1}}} \right], \quad (12)$$

де коефіцієнти приведення n_i , m_i жорстких характеристик для анізотропного тіла [2]

$$n_i = E_{si} / E_b, \quad m_i = G_{si} / G_b, \quad i = x, y, z. \quad (13)$$

Пружні характеристики для сталі E_s , G_s приймаються у відповідності з прийнятою діаграмою роботи металу. Для бетону знаходяться змінні дотичні характеристики E_b , G_b , ν_b на кожному кроці збільшення навантаження у відповідності з (5).

Для визначення об'ємного напружено-деформованого стану різних бетонних та залізобетонних конструкцій, особливо складних конструктивних вузлів, потрібні скінченні елементи, реалізація яких в постановці МСЕ розроблена в роботах [3, 4, 5] і базується на теоретичних передумовах таких авторів в цій області, як М.Айронс, Дж.Аргіріс, К.Бате, Е.Вільсон, Т.Гелен, О.Зенкевич, Дж.Оден, Г.Стренг та інші.

Для опису об'ємного напружено-деформованого стану приймемо довільно орієнтований в просторі гексаedr з трьома ступенями вільності u, v, w у вузлі (рис. 1).

Нелінійне матричне розв'язуюче рівняння МСЕ на кожному n -му кроці навантаження має вигляд:

$$[K(\{\Delta q\})]_n \cdot \{\Delta q\}_n = \{\Delta P\}_n, \quad (14)$$

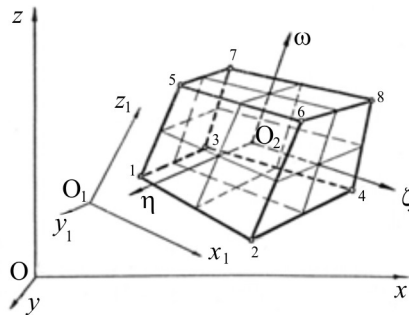


Рис. 1. Орієнтація об'ємного ізопараметричного скінченного елемента в просторі

де $K(\{\Delta q\})$ – матриця жорсткості системи на r скінченних елементів, $K(\{\Delta q\}) = \sum_{i=1}^r K_i$, $\{\Delta q\}$ – вектор збільшення вузлових переміщень, $\{\Delta P\}$ – вектор збільшення зовнішнього навантаження.

Використаний при такому підході простий кроковий метод, хоч і має деяку похибку, але при вирішенні фізично нелінійних задач, є найбільш стійким.

Після утворення тріщини в об'ємному елементі з повної матриці \mathbf{D}_{bs} виключаються жорсткісні характеристики зруйнованого бетону в напрямку головного розтягуючого напруження σ_1 . При крихкому руйнуванні бетону, його жорсткісні характеристики обнуляються і зусилля сприймає арматура. Досягнувши зусиль, що перевищують межу міцності, в арматурі фіксується її розрив чи зминання. В даному випадку відповідні стовпці і рядки матриці жорсткості арматури $\mathbf{D}_{bs}(\Delta \epsilon)$ обнуляються.

2. Розрахунок вузла опирання плити перекриття на колону

Як правило такий вузол опирання розраховують аналітичним методом та з використанням програмних комплексів. При аналітичному розрахунку капітелі розглядається як консольно-закріплена плита з усіма прикладеними навантаженнями, без урахування спільної роботи конструкції в цілому. Розрахунок капітелі зводиться до розрахунку на головні напруження розтягу по периметру всіх точок перелому контуру капітелі.

При розрахунку капітелі за допомогою програмних комплексів, основним способом моделювання є збільшення товщини в плоских скінченних елементах по всій її площині. Використання жорстких вставок дозволяє створити ексцентриситет між нульовими лініями плити та капітелі, що наближує модель до реальної. При розрахунку колони використовуємо стрижневі скінченні елементи, а в точці опирання виникають значні зусилля, які не відповідають реальним. Для виправлення цієї похибки, колону змодельовано просторовими скінченними елементами, що дозволяє розподілити зусилля по всьому контуру опирання плити. Щоб найточніше змодельовати сумісну роботу плити перекриття з капітеллю та колоною, використано просторову модель, яка дозволяє в повній мірі відтворити роботу реальної конструкції.

В дослідженні змодельовано та отримано результати для розглянутих варіантів розрахункових схем вузла опирання плити перекриття на колону. Модель створена для нескінченної в плані плити перекриття, товщиною 250 мм, з кроком колон 8х8м, перерізом 500х500мм. По гранях плити задані умови симетрії, що дозволяє, розглядаючи фрагмент,

врахувати нескінченний в плані масив плити з колоною в центрі. Грунтову основу задано у вигляді пружних елементів в вузли сітки опором 4905 кН/м^2 . Навантаження на плиту перекриття складає 6.4 кН/м^2 , на колону прикладено навантаження 4900 кН , також враховується власна вага конструкцій. Розрахунки всіх варіантів виконано в лінійній постановці.

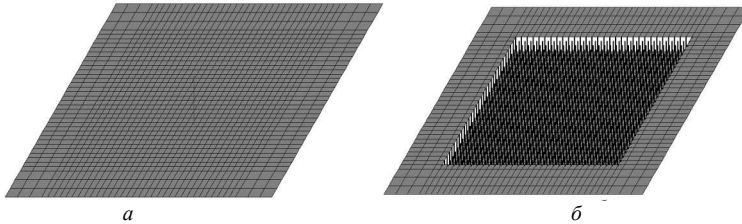


Рис. 2. Розрахункові схеми першої групи варіантів з плитою та колоною в плоскій постановці: а) схема плити без капітелі та з капітеллю без різниці між нейтральними вісями; б) плита з капітеллю та різницею між нейтральними осями

Перша група варіантів розрахункової схеми представлена у вигляді плити, що утворена плоскими скінченними елементами (СК) та опирається на колону, яка, у свою чергу, змодельована стрижневими елементами (рис. 2). Скінченні елементи пластин мають жорсткісні характеристики, які відповідають бетону класу В30 ($E=19.6 \text{ ГПа}$, $R_o=25 \text{ кН/м}^2$, $h=0.25 \text{ м}$), елементам колони задані, також, характеристики бетону класу В30 ($E=19.6 \text{ ГПа}$, $R_o=25 \text{ кН/м}^2$, $b \times h=0.5 \times 0.5 \text{ м}$).

На рис. 3 представлено результати розрахунку варіанту плити з плоских СЕ без урахування капітелі та колоною з стрижневих СЕ. Максимальний згинальний момент відносно осей X та Y знаходиться в межах $-33,3 - +4,3 \text{ кН/м}$. Розрахункове армування плити складає: верхнє вздовж осей x та y в зоні опирання колони $62.8 \text{ см}^2/\text{м}$, в прольоті $10.1 - 50.9 \text{ см}^2/\text{м}$; нижня арматура в середині прольоту 12.7 см^2 . Відповідно до рис. 3,а максимальне армування в межах $24.5 - 62.8 \text{ см}^2/\text{м}$ знаходиться в радіусі 750 мм від центру колони.

Результати розрахунку моделі плити з капітеллю утворених плоскими СЕ та зі стрижневих СЕ колони зображені на рис. 4. Відповідно до ізополів згинальних моментів при використанні капітелі максимальні згинальні моменти концентруються в її межах і складають $-42.1 - +14 \text{ т/м}$, в прольоті плити в межах $-14 - +3.51 \text{ т/м}$. Введення в модель капітелі дозволяє зменшити верхнє армування в плиті до $7.69 - 24.5 \text{ см}^2$, в той час як армування в капітелі досягає 50.9 см^2 . Нижня арматура в прольоті плити складає 12.7 см^2 .

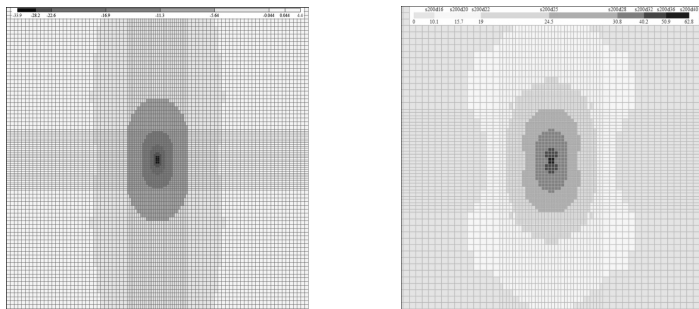


Рис. 3. Результати розрахунку для плити та колони без капітелі з плоских СЕ

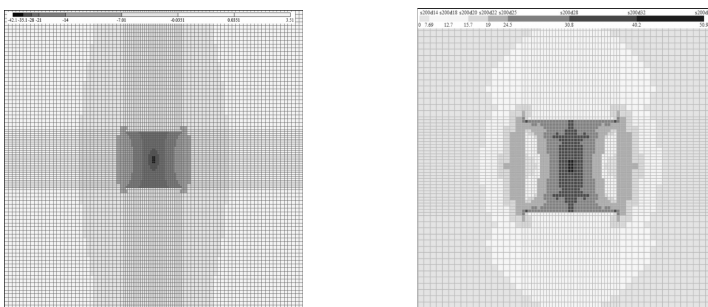


Рис. 4. Результати розрахунку для плити з капітеллю з плоских СЕ без зміщення нейтральних осей та колони зі стрижневих СЕ

Використання моделі зі зміщенням нейтральних осей між плитою і капітеллю (рис. 5) дозволяє створити ексцентриситет за рахунок якого досягається наближеність до роботи реальної конструкції. В даному випадку максимальні згинальні моменти складають від $+3.46 \text{ т/м}$ в прольоті та до -39 т/м в зоні опирання на колони. Максимальне верхнє армування знаходиться в межах $5.66 - 40.2 \text{ см}^2$, нижнє – $1.41 - 10.1 \text{ см}^2$. Як видно з ізополів армування та згинальних моментів в кутах примикання плити та капітелі виникають локальні концентрації напружень, що потребують значного підвищення армування і додаткового розрахунку на продавлення.

В другій групі варіантів (рис. 6) розглянуто скінченно-елементну модель плити перекриття з плоских СЕ опертої на колону змодельовану з просторових СЕ. Це дозволяє відтворити реальну картину розподілу напружень по всьому периметру колони у вузлі опирання. Жорсткісні характеристики плити ідентичні попередній групі варіантів. Об'ємним

елементам колони задані наступні характеристики: $E=19.6 \text{ ГПа}$, $R_0=25 \text{ кН/м}^2$, $\nu=0.2$.

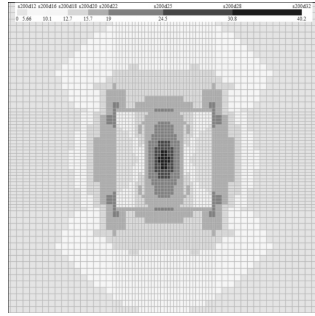
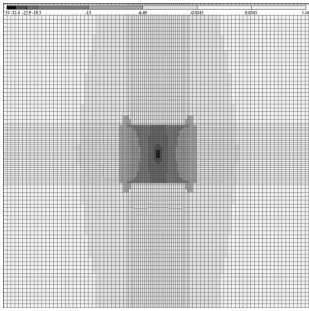


Рис. 5. Результати розрахунку для плити з капітеллю с плоских СЕ зі зміщення нейтральних осей та колони зі стижневих СЕ

На рис. 7 зображено результати розрахунку для плити з плоских СЕ без капітелі. По всій площині плити згинальні моменти змінюються від $+4.32 \text{ т/м}$ в прольоті, до -17.3 т/м в зоні опирання на колону. Армування верхньої зони плити перекриття в прольоті складає 5.66 см^2 та в зоні опирання на колону змінюється в межах від 10.1 до 40.2 см^2 . Максимальне нижнє армування складає 12.7 см^2 .

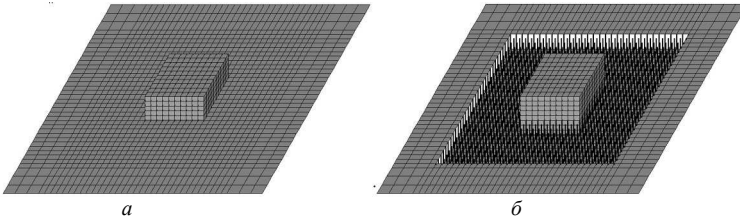


Рис. 6. Розрахункові схеми другої групи варіантів для плити перекриття з плоских СЕ та колоною з об'ємних СЕ: а) схема плити без капітелі та з капітеллю без зміщення нейтральних осей; б) плита з капітеллю та зі зміщенням нейтральних осей

Результати розрахунку варіанту плити перекриття з капітеллю без зміщення нейтральних осей зображені на рис. 8. В цій моделі згинальні моменти знаходяться в межах $-24.8 - +3.5 \text{ т/м}$. Згідно ізополів їх розподілу, максимальні значення згинальних моментів знаходяться в капітелі, те саме можна сказати про картину ізополів армування. Максимальне армування складає 40.2 см^2 в капітелі, в зоні опирання на колоною та в кутах примикання до плити перекриття. В областях переходу між капітеллю та плитою, по периметру опирання, виникають зони концентрації напружень, які потребують додаткового армування.

Загалом армування плити знаходиться в межах $5.66 - 30.8 \text{ см}^2$. Нижнє армування плити складає $7.69 - 12.7 \text{ см}^2$.

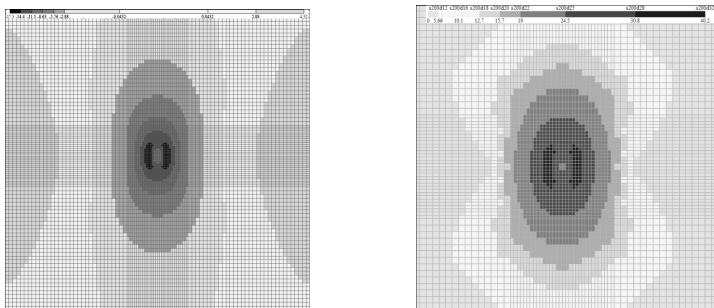


Рис. 7. Результати розрахунку для плити з плоских СЕ без капітелі та колони з об'ємних СЕ

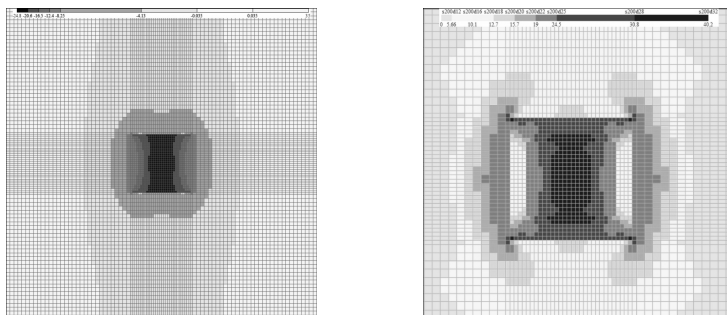


Рис. 8. Результати розрахунку для плити з капітеллю без зміщення нейтральних осей з плоских СЕ та колони з об'ємних СЕ

Результати розрахунку третього варіанту розрахункової схеми плити перекриття зі зміщенням нейтральних осей плити та капітелі опертих на колону з об'ємних СЕ зображено на рис. 9. Згинальні моменти в прольоті плити складають $+3.45 \text{ т/м}$, в зонах примикання капітелі та опирання на колону знаходяться в межах $+3.7 - (-22.2) \text{ т/м}$. Максимальне верхнє армування знаходиться в межах від 3.93 см^2 , по площі плити, та до 24.5 см^2 , за рахунок ексцентриситету між плитою та капітеллю, в зоні примикання капітелі з плитою та опирання на колону.

В третій групі варіантів розглядається просторова модель вузла опирання плити перекриття з капітеллю на колону з об'ємних СЕ (рис. 10). Їх характеристики: $E=19.6 \text{ ГПа}$, $R_0=25 \text{ кН/м}^2$, $\nu=0.2$. Розрахунок проводиться в лінійній постановці.

На рис. 11 представлено ізополя напружень N_x в окремих об'ємних найбільш напружених СЕ плити перекриття без капітелі. Групи елементів 20405, 20425, 23385 розташовані біля кутових елементів та граней колони відповідно вздовж бічної грані плити перекриття та колони, група 24051 розташована в середині прольоту.

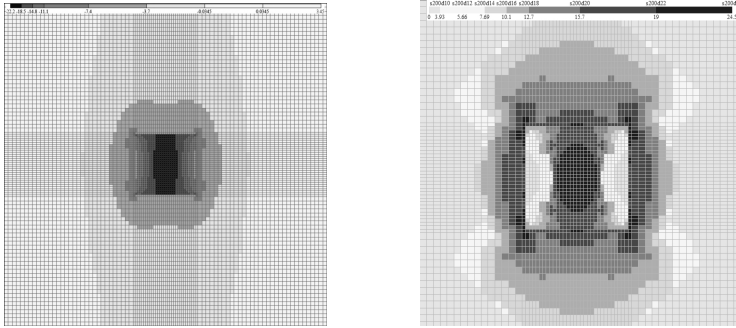


Рис. 9. Результати розрахунку плити з капітеллю з плоских СЕ зі зміщення нейтральних осей та колони з об'ємних СЕ

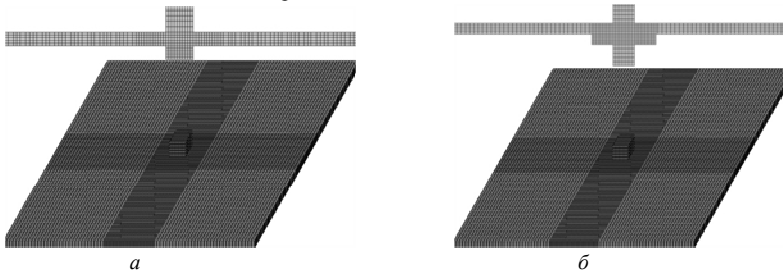


Рис. 10. Розрахункові схеми третьої групи варіантів з плитою та колоною з об'ємних СЕ: а) схема плити без капітелі; б) плита з капітеллю

При розрахунку просторової моделі на основі виведених співвідношень з використанням програмних комплексів ми отримуємо результати у вигляді головних та дотичних напружень. Щоб провести порівняння з попередніми варіантами розрахункових схем, потрібно результати розрахунку звести до однієї системи зусиль. Для даної задачі напруження, за виведеними формулами, переведені в згинальні моменти.

Обчислення максимальних згинальних моментів виконується за формулою:

$$M = (|N_1| + |N_2| + \dots) * d_z * z * l, \quad (2.1)$$

де N_1 , N_2 – напруження у відповідних стиснутих чи розтягнутих елементах; d_z – товщина скінченного елемента; z – відстань від

відповідного напруження в крайньому СЕ до нейтральної осі; l – ширина ділянки плити.

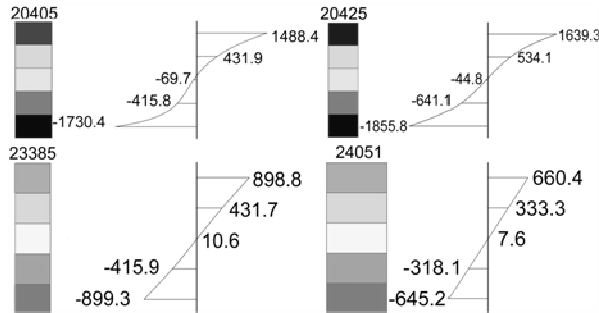


Рис. 11. Ізополя напружень в елементах по товщині плити перекриття без капітелі

Відповідно до формули 1, максимальні розтягуючі моменти в плиті перекриття будуть дорівнювати:

- група елементів 20405:

$$M = (1730.4 + 415.8 + 69.7) m / m^2 * 0.05 m * 0.1082 m * 1 m = 11.988 (m * m);$$

- група елементів 20425:

$$M = (1855.8 + 641.1 + 44.8) m / m^2 * 0.05 m * 0.1043 m * 1 m = 13.255 (m * m);$$

- група елементів 23385:

$$M = (899.3 + 415.9) m / m^2 * 0.05 m * 0.0987 m * 1 m = 6.49 (m * m);$$

- група елементів 24051:

$$M = (645.2 + 318.1) m / m^2 * 0.05 m * 0.0988 m * 1 m = 4.76 (m * m).$$

Ізополя напружень в найбільш навантажених елементах плити перекриття з капітеллю зображено на рис. 12. Групи елементів 21865 та 25590 вибираються в зоні опирання біля кута колони та по бічній грані відповідно, елементи 15675 групи розташовані на межі переходу капітелі в плиту перекриття, 25705 група розташована в прольоті плити.

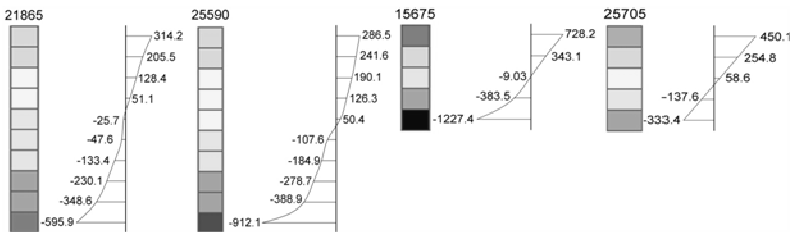


Рис. 12. Ізополя напружень в скінченних елементах плит із капітеллю по товщині

Розрахунок максимальних моментів виконується відповідно (15):

- група елементів 21865:

$$M=(595.8+348.6+230.1+133.4+47.6+25.7)m/m^2*0.05m*0.2714m*1m= 18.74(m*m);$$

- група елементів 25590:

$$M=(912.1+388.9+278.7+184.9+107.6)m/m^2*0.05m*0.2355m*1m=22.04(m*m);$$

- група елементів 15675:

$$M=(1227.4+383.5+9.03)m/m^2*0.05m*0.1007m*1m=8.16(m*m);$$

- група елементів 25705:

$$M=(333.4+137.6)m/m^2*0.05m*0.085m*1m= 2.002(m*m).$$

Висновки

Проведене дослідження напружено-деформованого стану плити перекриття різними методами моделювання вузла опирання плити перекриття на колону виявило недоліки та переваги кожного з них. В моделі плити з плоскими скінченними елементами максимальні згинальні моменти в прольоті плити майже не відрізняються в усіх поставлених задачах першої та другої групи варіантів. Включення колони з просторових СЕ дозволяє збільшити площу опирання колони і, як видно з розрахунку, дозволяє зменшити згинальні моменти на 45%.

Включення капітелі в розрахункову схему збільшує згинальний момент, проте це пов'язано зі збільшенням жорсткості елементів. Зміщення нейтральних осей плити та капітелі дозволяє зменшити згинальний момент на 8-9%, а отже і розрахункове армування, за рахунок виникнення додатніх моментів. Такий спосіб моделювання плоскими СЕ найбільш точно відповідає роботі реальної конструкції і відрізняється від схеми з просторових СЕ менше ніж на 5%.

Результати розрахунку задачі на основі дискретної моделі, утвореної з просторових СЕ показали, що такий метод моделювання повністю описує роботу реальної конструкції в лінійній постановці, в порівнянні з плоскими СЕ, для яких застосовують теорію тонких плит, що не враховує зсувні деформації та змінання в зонах концентрації вертикальних зусиль і потребує додаткового розрахунку на продавлення. Для виконання більш точного розрахунку складних ділянок конструкцій, таких як розглянутий вузол опирання плити перекриття, моделювання просторовими СЕ є необхідним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. ДБН. В.2.2-24:2009 –Проектування висотних житлових і громадських будівель
2. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. –М.:Наука, 1977. –416с.
3. Кудашов С.М., Козачевський А.И. К решению трехмерной задачи теории упругости железобетона методом конечных элементов // Изв. вузов. Строительство и архитектура.- 1979. - №3.- С. 112-116.
4. Кудашов В.И. Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования и разрушения железобетонных сосудов высокого давления при термосиловом

- нагрузки // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения : Всесоюз. межвузов. сб. / Горьковск. ун-т. – 1987. – С.60-68
5. *Кудашов В.И., Устинов В.П.* Расчет пространственных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности и трещинообразования // Строительная механика и расчет сооружений. -1981. - №4. – с. 6-10
 6. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона. -М.: Стройиздат, 1996. -416 с.:ил. –ISBN 5-274-01682-0
 7. *Гольшиев А.Б., Колчунов В.И.* Сопrotивление железобетона.-К.: Основа, 2009.-432 с.
 8. *Городецкий А.С., Евзеров И.Д.* Компьютерные модели конструкций.-К.: Факт,2007.-394с.

Стаття надійшла до редакції 10.10.2011 р.

Войтенко П.В.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛИТЫ ПЕРЕКРЫТИЯ В УЗЛЕ ОПИРАНИЯ НА КОЛОНУ

На основе соотношений для пространственного конечного элемента разработано и усовершенствовано методы численного расчета железобетонных конструкций в условиях объемного многоосного напряженного состояния с учетом пластических характеристик материалов.

Voitenko P.V.

RESEARCH OF THE INTENSE-DEFORMED STATE OF FLOOR SLAB IN KNOT LEANING ON THE COLUMN

On the basis of relation for a spatial finite element is developed and improved methods of numerical calculation of ferro-concrete constitution in the conditions of multiaxial tension taking into account plastic characteristics of materials.

УДК 539.3

О.О. Яковенко

ВПЛИВ РЕБЕР НА ЧАСТОТИ І ФОРМИ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Приведені результати розв'язання задач на власні коливання циліндричної оболонки підкріпленої ребрами за методом скінченних елементів. Аналізується вплив ребер на частоти і форми коливань.

Вступ. Створення несучих оболонкових конструкцій пов'язано з проведенням багатоваріантних розрахунків їх міцності і динамічних характеристик (частот і форм власних коливань). Наявність ребер жорсткості породжує інерційну неоднорідність оболонкових конструкцій і суттєво впливає на їх основні динамічні характеристики.

Метою роботи є дослідження впливу підкріплюючих ребер (стрингерів і шпангоутів) на частоти і форми власних коливань тонкої пружної пологої циліндричної оболонки. Розглядаються варіанти зовнішнього і внутрішнього підкріплення з одним і двома ребрами, аналізується вплив ребер на динамічні характеристики оболонки.

Побудова дискретної динамічної моделі. Дискретна динамічна модель оболонки створюється за методом скінченних елементів (МСЕ), співвідношення для яких будуються на основі положень тривимірної теорії пружності. Існує певний досвід використання просторових скінченних елементів (СЕ) для розрахунку тонких оболонок у так званих квазідвовимірних схемах [1]. Для тонких і середньої товщини оболонок прийнятним є лінійний закон розподілу розв'язувальної функції переміщень в межах СЕ [2]. Виходячи з аналізу існуючих схем МСЕ, прийнятна моментна схема скінченних елементів [3].

Для розрахунку ребристої оболонки за МСЕ з використанням просторових СЕ застосовується підхід згідно з яким ділянки обшивки і ділянки ступінчасто-змінної товщини оболонки моделюються одним просторовим СЕ, який може збільшувати свою товщину та розташовуватися ексцентрично відносно серединної поверхні обшивки [4]. Такий підхід забезпечує універсальність просторових СЕ і за рахунок цього розширює коло досліджуваних оболонок [2].

За умов того, що область ступінчатої зміни товщини вписується в сіткову область скінченноелементної моделі оболонки, їй надається статус «ребро», що дає можливість зберігати регулярність цієї моделі і спрощує процедуру побудови матриць жорсткості і інерції. Вплив наявності ребра, як нерегулярності в сітковій області дискретної моделі

враховуємо згідно пропозицій [7]. Чисельне дослідження і обґрунтування такого способу врахування ребер при дії силових навантажень для задач міцності наведено в роботах [2,4]. Середина поверхня обшивки оболонки при наявності ребер приймається за поверхню відліку.

В кожний момент часу напружено-деформований стан оболонки, як тривимірному тіла повинен задовільняти варіаційному рівнянню руху, яке у відповідності з принципом Лагранжа-Даламбера записується у вигляді:

$$\int_v \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - \int_v \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dv = 0. \quad (1)$$

При побудові системи рівнянь руху дискретної моделі МСЕ спочатку необхідно у варіаційному рівнянні (1) перейти від інтегрування по всьому об'єму тіла до суми інтегралів по об'ємам скінченних елементів, використовуючи співвідношення для матриць жорсткості і мас [5]. В роботі застосовується узгоджена матриця мас, методика побудови якої аналогічна процедурі побудови матриці жорсткості. Приймаючи до уваги, що невідомими МСЕ є залежні від часу значення переміщень вузлів скінченних елементів, рівняння руху дискретної моделі МСЕ в задачі про власні коливання оболонки набуває вигляду:

$$\sum_E \delta \{u\}_e^T [K]_e \{u\}_e + \sum_E \delta \{u\}_e^T [M]_e \{\ddot{u}\}_e = 0, \quad (2)$$

де $\{u\}_e$, $\{\ddot{u}\}_e$ - вектори переміщень і прискорень вузлів СЕ, $[K]_e$, $[M]_e$, - матриці жорсткості і мас СЕ.

В подальшому виконується перегрупування і зведення подібних членів таким чином, щоб перейти від підсумування по елементам до підсумування по індексам компонент вектора невідомих всієї дискретної моделі оболонки.

В результаті дискретний аналог варіаційного рівняння руху (2) зводиться до матричного рівняння:

$$\delta \{u\}^T ([K] \{u\} + [M] \{\ddot{u}\}) = 0, \quad (3)$$

розв'язок якого приймається у вигляді:

$$\{u\} = r \sin(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

і зводиться до узагальненої проблеми про власні значення матриць.

$$([K] - \lambda [M]) \{r\} = 0. \quad (5)$$

Нетривіальний розв'язок (5) має місце за умови

$$\det [K] - \lambda [M] = 0, \quad (6)$$

що визначає характеристичне рівняння системи, розв'язок якого виконується методом одночасних ітерацій у підпросторі [6].

Приклади розв'язання задач. Розглянемо розв'язання задачі про визначення динамічних характеристик сталевий ($E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho=7.85 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu=0.3$) циліндричної оболонки зацмленої по двом прямиолінійним сторонам (рис. 1). Розміри оболонки в плані 0.8x0.65 м, радіус 1.3 м, стріла підйому 0.0405 м. Товщина оболонки 0.001 м. Висота ребра 0.008 м. Розмірність підпростору в межах якого реалізується процес одночасних ітерацій дорівнює десяти. В межах оболонки побудована регулярна сітка скінченних елементів. Розміри сітки 15x15 вузлів.

Регулярною вважається сітка скінченних елементів якщо є прості засоби визначення номерів її вузлів та їх координат. Вузли СЕ моделі нумеруються в Лагранжевій (локальній) системі координат $\{x_1, x_2, x_3\}$. Така система не змінюється в процесі руху. Кожному вузлу сітки відповідає трійка значень $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ глобальної декартової системи координат, яка визначає положення вузла СЕ моделі у просторі.

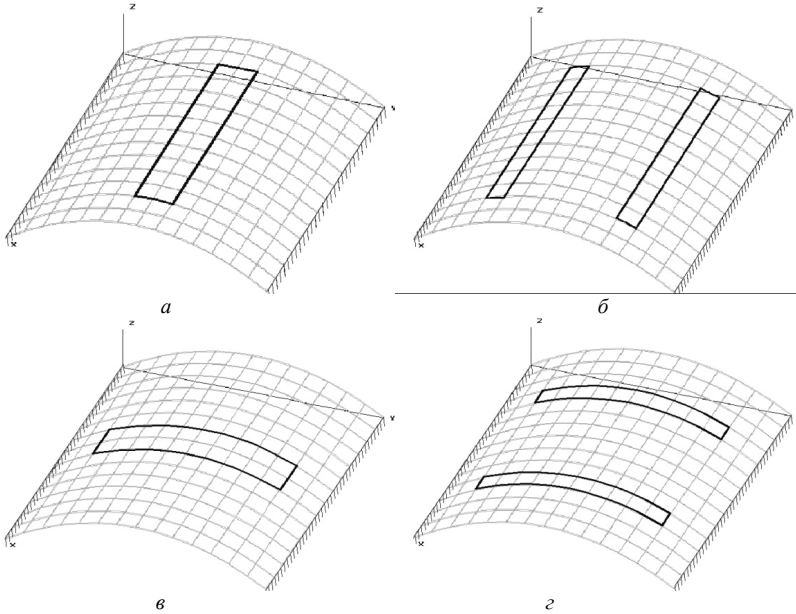


Рис. 1 Варіанти підкріплення циліндричної оболонки
 а - один стрингер, б - два стрингера, в - один шпангоут, г - два шпангоута

Форми коливань оболонки без ребер приведені на (рис.2).

Розглянемо вплив одного стрингера (зовнішнього і внутрішнього), розташованого посередині циліндричної оболонки на частоти і форми власних коливань (рис. 3). Найявність ребра на першу частоту майже не впливає і для обох варіантів підкріплення вона однакова. Це можна пояснити тим, що ребро співпадає з вузловою лінією [9]. Для другої і третьої форм при обох варіантах підкріплення при наявності ребра спостерігається зменшення частоти коливань. Це можна пояснити тим що більший вплив на частоту коливань виконує маса ребра. Оболонка з внутрішнім ребром має меншу частоту і відповідно меншу жорсткість у порівнянні із оболонкою з зовнішнім ребром.

Розглянемо вплив двох стрингерів (зовнішніх і внутрішніх), розташованих симетрично (рис. 4). Для першої форми коливань частота зменшується бо ребро знаходиться на випучині і його маса більш суттєво впливає на частоту ніж його жорсткість. Для другої форми коливань для обох варіантів підкріплення спостерігається збільшення частоти при наявності ребра. Це говорить про те, що жорсткість ребра має більший вплив на частоту ніж його маса що і видно з другої форми коливань. Аналогічна картина спостерігається і для третьої форми коливань.

Розглянемо вплив одного шпангоута (зовнішнього і внутрішнього), розташованого посередині циліндричної оболонки (рис 5). Для перших трьох форм коливань при обох варіантах

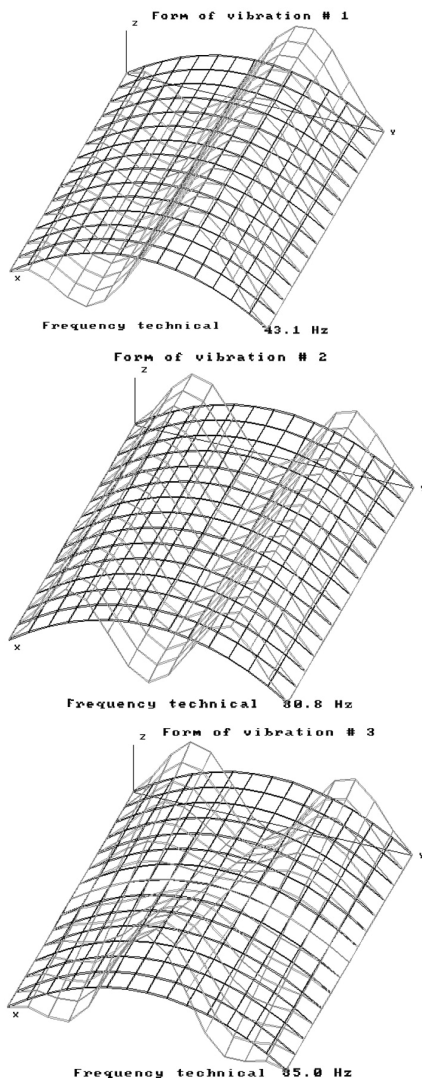


Рис. 2 Форми коливань оболонки без ребер

Рис. 2 Форми коливань при обох варіантах

підкріплення спостерігається збільшення частоти коливань в порівнянні з оболонкою без ребра і оболонкою зі стрингером.

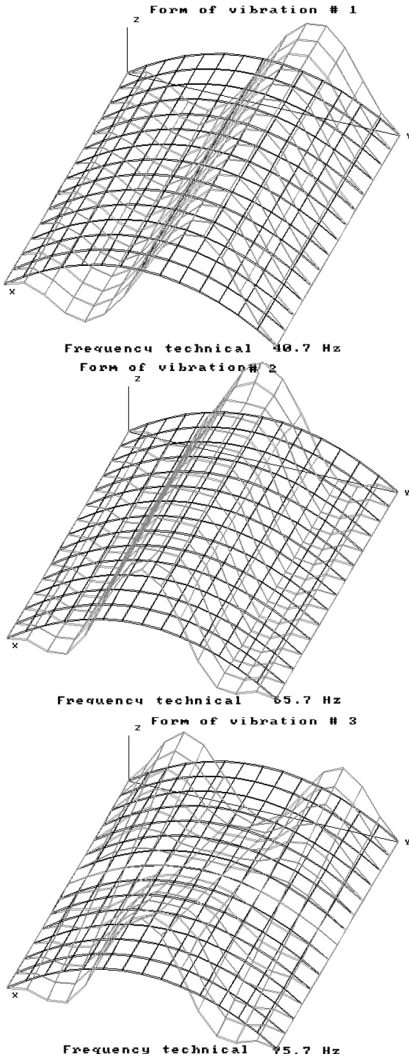


Рис. 3 Форми коливань оболонки з одним стрингером

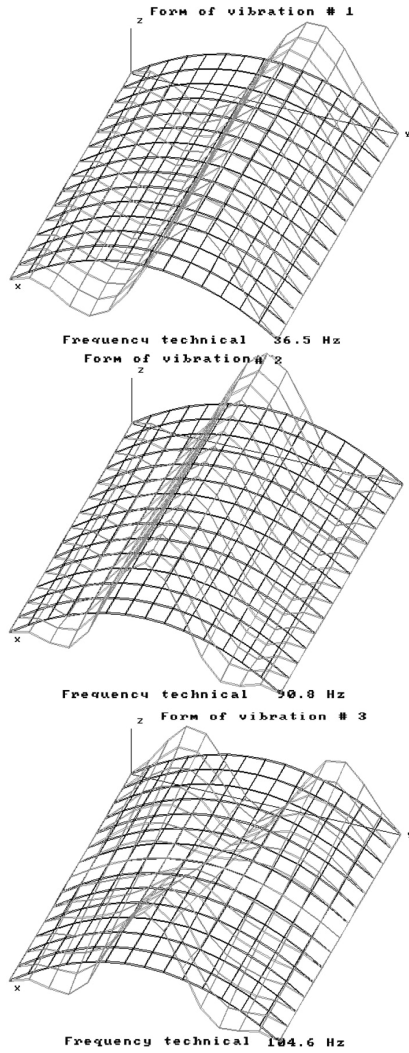


Рис. 4 Форми коливань оболонки з двома стрингерами

Розглянемо вплив двох шпангоутів (зовнішніх і внутрішніх), розташованих симетрично (рис 6). Для усіх трьох форм коливань в обох

варіантах підкріплення спостерігається збільшення частоти коливань при наявності ребер в порівнянні з оболонкою зі стрингерами. Тобто шпангоут більш підсилює оболонку ніж стрингер бо збільшує згинну жорсткість в радіальній площині [8].

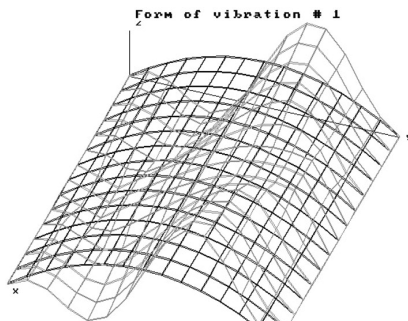


Рис. 5 Форми коливань оболонки з одним шпангоутом

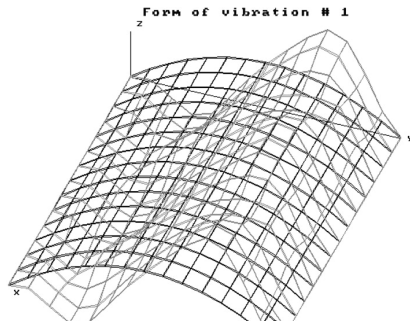


Рис. 6 Форми коливань оболонки з двома шпангоутами

Висновки:

1) якщо стрингер співпадає з вузловою лінією, то він не змінює частоту власних коливань оболонки.

2) шпангоут більш підсилює оболонку ніж стрингер бо збільшує згинну жорсткість в радіальній площині.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зарубаев В.П., Корнеев В.Г.* Квазидвумерные схемы метода конечных элементов для расчета пластин и оболочек и некоторые вопросы их исследования / Метод конечных элементов и строительная механика.- Л.-1974.- С. 16-36.
2. Метод конечных элементов в механике твердых тел /А.С. Сахаров, В.Н. Кислюцкий, В.В. Киричевский и др. - К. : Вища шк. Голов. изд-во,1982. - 480 с.
3. *Соловей М.О.* Модифікований просторовий скінченний елемент для моделювання тонких неоднорідних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. зб.- К.: КНУБА, 2006. – Вип. 80. – С. 96-113.
4. *Соловей Н.А.* Исследование напряженно-деформированного состояния и устойчивости пластин и оболочек ступенчато-переменной жесткости с применением модифицированного конечного элемента // Сопrotивление материалов и теория сооружений, 1983. – Вип. 43. – С. 30-35.
5. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К. : ЗАТ «Віпол», 2010. - 316с.
6. *Клаф Р. Пензен Дж.* Динамика сооружений. Пер. с. англ. - М. : Стройиздат, 1979.-320с.
7. *Легостасв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.* Деякі особливості побудови дискретних моделей МСЕ в задачах динаміки пластинчато - оболонкових конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. зб.- К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С. 94-101.
8. *Каиров А.С., Латанская Л.А.* Математическое моделирование и исследование свободных колебаний подкрепленных ребрами цилиндрических оболочек с присоединенными твердыми телами // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: Зб. наук. праць Дніпропетровського. національного ун-ту.- 2009, - Вип. 10. - С. 136-144.
9. *Назаров А.А., Бублик Б.Н.* Свободные колебания пологой оболочки, подкрепленной ребрами жесткости // Расчет пространственных конструкций: Сб. статей. Вип.5. М.: Стройиздат, 1959. - С. 549-555.

Стаття надійшла до редакції 10.10.2011 р.

Яковенко О.О.

ВЛИЯНИЕ РЕБЕР НА ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Приведены результаты решения задач на собственные колебания цилиндрической оболочки подкрепленной ребрами методом конечных элементов. Анализируется влияние ребер на частоты и формы колебаний.

Iakovenko O.O.

INFLUENCE OF RIBS ON FREQUENCIES AND FORMS OF FREE VIBRATION OF CYLINDRICAL SHELL

There are given results of solution of tasks of free vibration of cylindrical shell stiffened by ribs by finite elements method. Influence of ribs on frequencies and forms of vibration are analyzed.

УДК 539.4

С.В. Кобельський, канд. техн. наук

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТРІЩИН НА ОСНОВІ ЗМІШАНОЇ СХЕМИ МЕТОДА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для розв'язання просторових задач теорії тріщин запропоновані комбіновані скінченні елементи змішаного типу в формі шестиграних призм та тетраедрів. Розроблені схеми та обчислювальні алгоритми, що їх реалізують, забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність та узгоджуються з розв'язком Райса для розподілу напружень в околі вершини тріщини.

Розв'язування прикладних задач теорії тріщин вимагає більш точного визначення таких параметрів руйнування як розкриття, напруження та коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) вздовж фронту тріщини. При розв'язанні просторових задач механіки руйнування в пружно-пластичній постановці традиційне формулювання методу скінчених елементів (МСЕ) у формі методу переміщень не забезпечує отримання достатньо точного та стійкого розподілу напружень та деформацій в околі фронту тріщини. У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці спеціальних схем МСЕ та пов'язаних з ними обчислювальних процедур, які дозволяють покращити точність розв'язання в локальній області фронту тріщини [1-6].

У даній публікації для розв'язання тривимірних задач теорії тріщин застосовується змішана проекційно-сіткова схема МСЕ, основні положення якої сформульовані в монографії [6]. Головна перевага застосованої схеми МСЕ, у порівнянні з класичним підходом МСЕ у формі методу переміщень, полягає у можливості забезпечити неперервність апроксимації не тільки для переміщень, але й для напружень та деформацій, а також можливості точного дотримання статичних граничних умов на поверхні тіла.

Застосування та результати чисельного аналізу збіжності та точності змішаної схеми МСЕ до розв'язання двовимірних задач теорії тріщин містяться в [7].

У роботах [8,9] побудовані просторові скінчені елементи змішаного типу у формі шестигранної призми з полілінійним поповненням переміщень та апроксимацією напружень та деформацій за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно вершин і центру призми. Також, у роботі використовується змішаний скінчений елемент у формі

тетраедра з апроксимацією напружень та деформацій, побудованих за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно його вершин і центру.

Прийнято, що восьмивузловий скінчений елемент (елемент типу «кубик») розбивають на 24 тетраедри (рис. 1). За умови сумісного використання скінчених елементів різного типу, на границю контакту двох скінчених елементів, розділеного та не розділеного на тетраедри, виходять з однієї сторони 5, а з іншої - 4 вузли. Для задоволення властивості неперервності полів переміщень, переміщення у вузлі в центрі грані виражаються через переміщення вузлів в її вершинах.

Результати чисельного аналізу розв'язання тестових і практичних задач, отриманих при сумісному використанні скінчених елементів різного типу, свідчать про те, що розбиття на тетраедри трьох шарів призм в околі точки на фронті тріщини достатньо для отримання розв'язання задач у пружно-пластичній постановці, які не суперечать теоретичним положенням дрібномасштабної пластичної течії - поправці Ірвіна на пластичність [10] та розв'язку Райса [11] для розподілу напружень в околі вершини тріщини. Такий підхід дозволяє суттєво зменшити розмірність дискретної задачі та об'єм інформації, яка опрацьовується.

Для розв'язання задач теорії тріщин у тривимірній постановці в пакеті SPACE [12] розроблені спеціальні програмні методи побудови сітки скінчених елементів в околі фронту тріщини. Сітка складається з трьох зон – ядра, перехідної зони та зони розрідження (рис. 2).

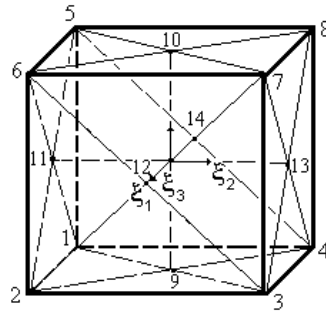


Рис. 1. Схема розбиття восьмивузлового елемента на тетраедри

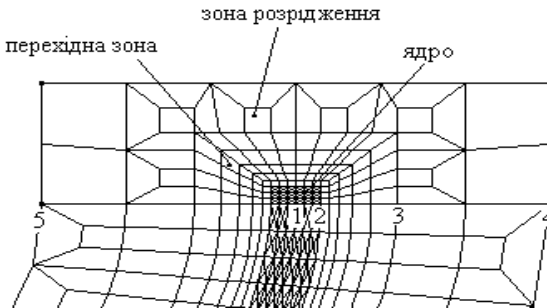


Рис. 2. Спеціальна сітка з регулярним ядром

Точка 1 лежить на фронті тріщини. Ядро розбивається сіткою, регулярною в площині, яка перпендикулярна до фронту тріщини. Його розмір (відстань між точками 1 і 2) вибирають незначним у порівнянні з розміром перехідної зони (відстань між точками 2 і 3). Сітка, яку будують у перехідній зоні, забезпечує плавний перехід від густої сітки в ядрі до грубої в зоні розрідження.

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень використані два підходи – метод еквівалентного об'ємного інтегрування [13] та метод, який ґрунтується на концепції G -інтегралу закриття тріщини у дискретних моделях МСЕ [14]:

$$K_I = \sqrt{\frac{EG}{1-\nu^2}}, \quad (1)$$

де

$$G = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma(s) \delta(s) ds, \quad (2)$$

робота сил зчеплення, які діють перед фронтом тріщини та перешкоджають розсуванню верхнього та нижнього берегів тріщини на ділянці $[0, \Delta a]$ при її просуванні на величину Δa ; $\sigma(s)$ – напруження, яке діє по нормалі до площини тріщини; $\delta(s)$ – розкриття берегів тріщини; s – вісь, спрямована по нормалі до фронту тріщини у площині тріщини.

При

$$\Delta a \rightarrow 0, \quad G = \frac{1}{2} \sigma \Delta. \quad (3)$$

Тут Δ – розкриття, яке обчислюють як абсолютну величину різниці переміщень в напрямку нормалі до площини тріщини вузлів сітки, які найближчі до вузла на фронті, та розташовані на двох поверхнях тріщини.

Розглядали три варіанти вибору напруження σ в (3).

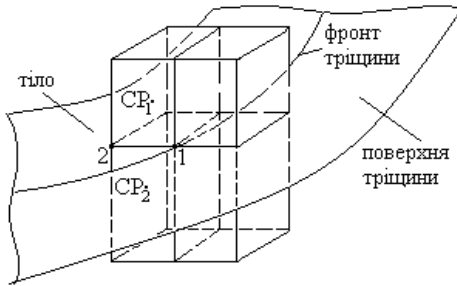
У першому за σ приймали напруження, яке обчислене у вузлі, розміщеному в тілі на нескінченно малій відстані від фронту тріщини (варіант 1P).

У другому за σ приймали осереднене напруження, яке обчислене в центрах усіх n елементів, які оточують точку на фронті тріщини та розміщені в тілі (варіант CP, рис. 3):

$$\sigma = (\sigma_{CP1} + \dots + \sigma_{CPn}) / n. \quad (4)$$

У третьому за σ приймали напруження, яке обчислене у вузлі, розміщеному в тілі на безкінечно малій відстані від фронту тріщини, та у вузлі, що стоїть за ним (варіант 2P, рис. 3, вузли 1 і 2)

$$\sigma = \frac{2}{3} \sigma_1 + \frac{1}{3} \sigma_2. \quad (5)$$

Рис. 3. До варіантів визначення напруження σ

Нижче наведені результати розв'язання трьох модельних задач, які мають в пружній постановці відомий аналітичний або чисельний розв'язок. Під час розв'язання цих задач у пружно-пластичній постановці перевіряли узгодження результатів з поправкою Ірвіна на пластичність та відповідність розподілу напруження σ в околі точки фронту тріщини розв'язку, який отримав Райс із співробітниками.

Задача 1. Еліптична щілина у нескінченному тілі, яке однорідно розтягується в напрямку осі z (рис. 4).

Розглядався еліптичний циліндр радіусу $R=40$ м; половиною висоти $H=40$ м; з еліптичною тріщиною $a/c=2$; $c_0=0.0125$ м; $c=2c_0$; величина кроку сітки в ядрі $S=1,10,100,1000s$; $s=8,333$ мкм. На верхньому торці циліндру прикладене навантаження розтягнення $q=100$ МПа. Модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$. Матеріал ідеальний пружно-пластичний, границя текучості $\sigma_T=400$ МПа.

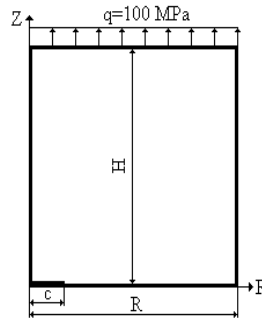


Рис. 4. До задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

На рис. 5 наведені графіки обчислення параметрів механіки руйнування (напруження σ , розкриття та КІН) при використанні лише елементів типу «кубик» («К»), тільки тетраедрів («Т») та елементів типу «кубик» разом з тетраедрами («К+Т») в пружно-пластичній постановці.

Зменшення кроку сітки досягається шляхом зменшення у відповідне число разів розміру ядра відносно розміру перехідної зони (рис. 1).

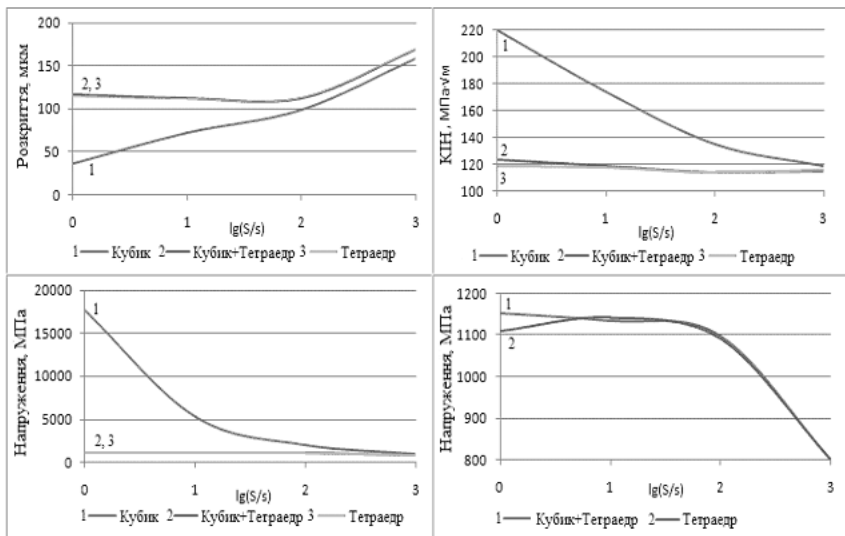


Рис. 5. Графіки обчислення параметрів руйнування в задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

Як видно з графіків (рис. 5), елементи типу «кубик» дозволяють отримати прийнятні результати тільки при дуже великих кроках сітки, зі зменшенням кроку напруження σ стрімко зростають, тоді як тетраедри забезпечують отримання стійких розв'язків при всіх кроках сітки. Аналогічні стійкі результати було отримано і при використанні елементів типу «кубик» сумісно з тетраедрами. Крім того, результати, отримані з використанням тетраедрів та комбінованих елементів, узгоджуються з розв'язком Райса для напружень в околі вершини тріщини при плоскій деформації для ідеально пластичного матеріалу.

В табл. 1 зіставлені результати визначення КІН різними способами в пружній та пружно-пластичній постановках при різних величинах кроку сітки.

З даних таблиці видно, що при розв'язанні задачі в пружній постановці найбільш точні результати було отримано за допомогою методу ЕОІ та G -інтегралу в формулюванні за варіантом 3. Результати, отримані з використанням методу ЕОІ та G -інтегралу в формулюванні за варіантом 1 в пружно-пластичній задачі, не забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність, тоді як G -інтеграл в формулюванні за варіантами 2 та 3 забезпечує її виконання при всіх кроках сітки. Треба також відмітити, що при розв'язанні задачі в пружно-пластичній

постановці використання G -інтегралу приводить до достатньо близьких результатів для всіх розглянутих варіантів вибору напруження σ .

Таблиця 1

Внутрішня кільцева тріщина в суцільному циліндрі при розтягненні

Крок	CE	Задача	EOI	G-інтеграл (2P)	G-інтеграл (CP)	G-інтеграл (1P)
$S = 1000s$	К	пруж	115,103	117,912	102,395	131,232
		пласт	115,510	118,774	108,066	130,579
	Т	пруж	116,447	112,3540	109,2197	121,143
		пласт	117,496	115,6890	114,075	122,335
	К+Т	пруж	115,354	111,291	108,194	119,970
		пласт	117,143	115,262	113,656	121,885
$S = 100s$	К	пруж	114,652	117,820	102,018	131,330
		пласт	110,923	135,396	100,122	149,402
	Т	пруж	115,600	114,014	108,526	123,491
		пласт	111,149	114,371	112,770	116,642
	К+Т	пруж	114,520	112,888	107,463	122,246
		пласт	111,500	114,383	112,870	116,740
$S = 10s$	К	пруж	114,573	117,778	101,942	131,304
		пласт	108,186	173,833	62,676	203,133
	Т	пруж	115,474	114,006	108,471	123,505
		пласт	113,297	118,2578	118,4835	118,584
	К+Т	пруж	114,365	112,846	107,376	122,222
		пласт	112,771	118,666	119,167	118,648
$S = 1s$	К	пруж	114,525	117,742	101,899	131,268
		пласт	114,027	219,638	-	266,719
	Т	пруж	115,446	113,996	108,461	123,496
		пласт	114,998	119,467	120,919	118,536
	К+Т	пруж	114,303	112,802	107,334	122,177
		пласт	114,427	122,563	122,966	121,990
КІН (пружність) = 112,83791671 [15]						

На рис. 6 наведені графіки змінення КІН вздовж фронту внутрішньої еліптичної тріщини при різних співвідношеннях півосей (1:1, 3:1, 5:1, 10:1), що отримані в пружній та пружно-пластичній постановках. Розв'язок в пружній постановці зіставляється з аналітичним, наведеним в [15]. КІН обчислювався з використанням концепції G -інтегралу закриття тріщини з вибором напруження σ за варіантом 3.

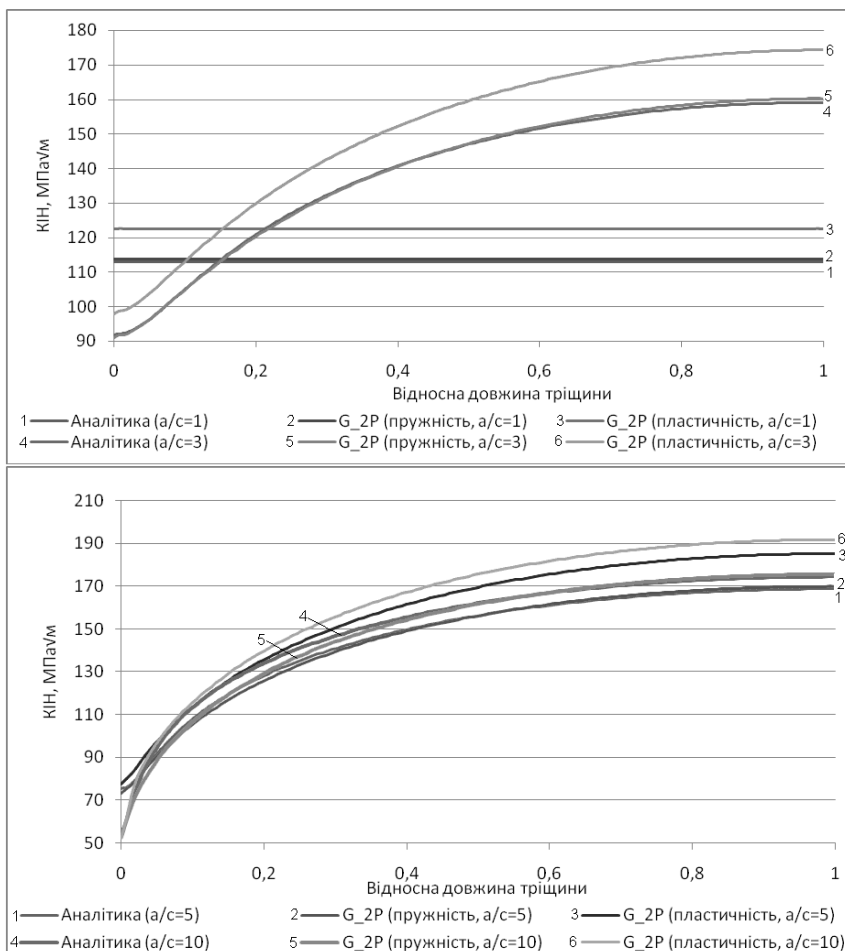


Рис. 6. Графіки обчислення K_{IH} в задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

Аналіз результатів свідчить про добре збігання результатів розв'язку в пружній постановці з аналітичним розв'язком (похибка при співвідношеннях півосей 1:1, 3:1, 5:1 склала менше 1% по всій довжині тріщини, для випадку 10:1 максимальна похибка склала 6%). При розв'язанні задач в пружно-пластичній постановці поправка Ірвіна виконується для всіх точок фронту тріщини при всіх співвідношеннях півосей еліпсу.

Задача 2. Розтягнення полого циліндру з зовнішнім діаметром $D_1 = 2.2$ м; внутрішнім діаметром $D_2 = 2$ м; висотою $2H=2$ м з симетрично розташованою внутрішньою (зовнішньою) крайовою кільцевою тріщиною глибиною $a/t=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$; $t=R_1-R_2$ (рис. 7).

На торцях циліндру прикладене рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = 100$ МПа. Модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. Матеріал ідеальний пружно-пластичний, границя текучості $\sigma_T = 500$ МПа.

Завдяки симетрії задачі розглядався сектор з довжиною дуги, що дорівнювала довжині тріщини.

Результати розв'язання задач в пружній постановці зіставлялись з відомими чисельними розв'язками. Результати розв'язання задач в пружно-пластичній постановці зіставлялись з отриманими при розв'язанні задач у осесиметричній постановці на сітці з кроком 0,1 мкм в околі вершини тріщини.

При розв'язанні задач в тривимірній постановці використовувалась сітка з кроком 2,5 мкм в площині, перпендикулярній до фронту тріщини.

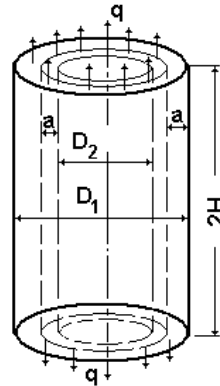


Рис. 7. До задачі про розтягнення полого циліндру з внутрішньою та зовнішньою крайовою кільцевою тріщиною

Таблиця 2

Зовнішня кільцева тріщина в полуму циліндрі при розтягненні

Задача	ЕОІ	$\delta, \%$	G-інтеграл (2P)	$\delta, \%$	G-інтеграл (CP)	$\delta, \%$	G-інтеграл (1P)	$\delta, \%$
$a/t = 0,1$; КІН (пруж) = 20,33714 [16], КІН (пласт) = 21,80698 [6]								
пруж	20,593	1.30	20,285	0.26	19,310	5.05	21,962	7.99
пласт	20,178	7.47	21,175	2.90	21,118	3.16	21,290	2.37
$a/t = 0,3$; КІН (пруж) = 42,97972[16], КІН (пласт) = 46,62864 [6]								
пруж	44,892	4.45	44,222	2.89	42,097	2.05	47,879	11.4
пласт	44,494	4.58	46,437	0.41	46,217	0.88	46,851	0.48
$a/t = 0,5$; КІН (пруж) = 73,12341[16], КІН (пласт) = 79,56431 [6]								
пруж	76,090	4.06	74,957	2.51	71,355	2.42	81,155	11.0
пласт	75,922	4.58	79,894	0.41	79,551	0.02	80,350	0.99
$a/t = 0,7$; КІН (пруж) = 114,07140 [16], КІН (пласт) = 123,25948 [6]								
пруж	119,34	4.62	117,56	3.06	111,92	1.89	127,29	11.6
пласт	121,02	1.82	129,67	5.20	129,48	5.05	129,48	5.05

Таблиця 3

Внутрішня кільцева тріщина в полуму циліндрі при розтягненні

Задача	EOI	$\delta, \%$	G-інтеграл (2P)	$\delta, \%$	G-інтеграл (CP)	$\delta, \%$	G-інтеграл (1P)	$\delta, \%$
$a/t = 0,1$; КІН (пруж) = 20,52502 [17], КІН (пласт) = 21,55598 [7]								
пруж	20,352	0.85	20,046	2.33	19,084	7.02	21,704	5.74
пласт	19,826	8.03	20,928	2.91	20,864	3.21	21,049	2.35
$a/t = 0,3$; КІН (пруж) = 42,73412 [17], КІН (пласт) = 45,21656 [6]								
пруж	43,437	1.64	42,789	0.13	40,734	4.68	46,328	8.41
пласт	42,821	5.30	45,329	0.25	45,665	0.99	45,094	0.27
$a/t = 0,5$; КІН (пруж) = 70,507592 [17], КІН (пласт) = 76,01313 [6]								
пруж	72,331	2.59	71,254	1.06	67,830	3.80	77,146	9.41
пласт	72,137	5.10	77,033	1.34	77,280	1.67	76,639	0.82
$a/t = 0,7$; КІН (пруж) = 111,96073 [6], КІН (пласт) = 117,33991 [6]								
пруж	111,86	0.09	110,19	1.58	104,89	6.32	119,30	6.56
пласт	113,37	3.38	122,94	4.77	122,59	4.47	122,62	4.50

Аналіз результатів свідчить про добре збігання результатів розв'язання в пружній та пружно-пластичній постановці з розв'язками, отриманими іншими авторами, для всіх глибин тріщини. Як і в попередньому випадку, найбільш добре збігання результатів обчислення КІН має місце при використанні концепції G-інтегралу закриття тріщини з вибором напруження σ за варіантом 3.

Висновки. Запропоновані комбіновані скінченні елементи змішаного типу в формі шестигранних призм та тетраєдрів для розв'язання просторових задач механіки руйнування. Результати розв'язання модельних задач теорії тріщин свідчать про ефективність запропонованого підходу. Показано, що при врахуванні пластичних деформацій в околі фронту тріщини розроблені схеми та обчислювальні алгоритми, що їх реалізують, забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність та узгоджуються з розв'язком Райса для розподілу напружень в околі вершини тріщини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сахаров А.С., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 478 с.
2. Ворошко П.П. Смешанные вариационные формулировки задач теории упругости и их реализация методом конечных // Пробл. прочности. – 1985. – № 1. – С. 100 – 105.
3. Уманский С.Э. Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // Пробл. Прочности. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. – Butterworth-Heinemann. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi. – 5th ed., 2000. – Vol. 1–3. – 1482 p.

5. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – Київ: НДІ БМ, 1993. – 376 с
6. *Чирков А.Ю.* Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – К.: Изд-во Ин-та пробл. прочности, 2003. – 250 с.
7. *Чирков А.Ю.* Расчетный анализ модельных задач теории трещин на основе смешанной схемы метода конечных элементов // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2012. – Вып. 35. – С. 200 – 208.
8. *Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А.* Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2008. – Вып. 31. – С. 195 – 207.
9. *Кобельский С.В.* Построение смешанных конечных элементов на основе шестигранной призмы для решения пространственных задач теории упругости // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2010. – Вып. 33. – С. 248 – 262.
10. *Irwin G.R.* Relation of crack toughness measurements to practical applications // *Welding J., Res. Suppl.* – 1962. – 41. – P. 519 – 528.
11. *Levy N., Marcal P.V., Ostergren V.J., Rice J.R.* Small scale yielding near a crack in plane strain: a finite element analysis // *Techn. Report NASA NGL 40-002-080/1 to the National Aeronautics and Space Administration, Nov., 1969.*
12. Програмне забезпечення «Тривимірне скінченноелементне моделювання теплового і термонапруженого стану елементів машинобудівних конструкцій» (SPACE) / Система сертифікації УкрСЕПРО. Сертифікат відповідності № UA1.017.0054634-04. – 2004. -1 с.
13. Вычислительные методы в механике разрушения /Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
14. *Чирков А.Ю.* Розвиток та реалізація змішаного методу скінченних елементів у задачах міцності, коливань та стійкості елементів конструкцій: Автореф. дис. д-ра техн. наук. – К., 2008. – 41 с.
15. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
16. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х т. /Под ред. Ю. Мураками. - М.: Мир, 1990. - Т.2 - 1014 с.
17. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

Стаття надійшла до редакції 19.10.2011 р.

Кобельский С.В.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН НА ОСНОВЕ СМЕШАННОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для розв'язання просторових задач теорії тріщин запропоновані комбіновані скінченні елементи змішаного типу в формі шестигранних призм та тетраедрів. Розроблені схеми та обчислювальні алгоритми, що їх реалізують, забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність та узгоджуються з розв'язком Райса для розподілу напружень в околі вершини тріщини.

Кобельский С.В.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН НА ОСНОВЕ СМЕШАННОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для розв'язання просторових задач теорії тріщин запропоновані комбіновані скінченні елементи змішаного типу в формі шестигранних призм та тетраедрів. Розроблені схеми та обчислювальні алгоритми, що їх реалізують, забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність та узгоджуються з розв'язком Райса для розподілу напружень в околі вершини тріщини.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І.</i> Визначення динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень в задачах змішаного руйнування на базі напіваналітичного метода скінченних елементів	3
<i>Гуляр О.І., Сахаров О.С., Шкриль О.О., Максим'юк Ю.В.</i> Модифікований варіант метода реакцій в двовимірних задачах механіки руйнування	12
<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О., Богдан Д.В.</i> Модифікований метод реакцій для визначення J-інтеграла в задачах пружнопластичного деформування просторових призматичних тіл	18
<i>Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.</i> Метод прямих у просторовій задачі теорії пружності	24
<i>Гайдайчук В.В., Борщ О.І.</i> Коливання кружляння бурильних колон	37
<i>Гуляєв В.І., Гловач Л.В.</i> Стійкість коливань лопатей роторів вітроенергетичних установок при складному обертанні	48
<i>Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Реалізація методу продовження за параметром для віброударних систем при побудові кривих навантаження	56
<i>Кліменко В.З.</i> Аналіз приблизних методів розрахунку дерев'яних елементів, що працюють на складний опір	65
<i>Чорнописький Д.Г.</i> Збіжність першого та другого варіантів методу збурення форми границі в просторових задачах теорії пружності для тіл, обмежених неканонічними поверхнями	72
<i>Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С.</i> Методика чисельного дослідження антиплоских нестационарних коливань масивних елементів конструкцій	83

<i>Чеверда П.П., Геращенко О.В.</i> Вплив дії сейсмічного навантаження на несучу здатність пальового ростверку житлового будинку	97
<i>Жупаненко І.В.</i> Методика визначення реакції круглих дисків на нестационарні впливи	102
<i>Гревцев О.К.</i> Розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для товстостінних циліндрів навантажених змінним по довжині тиском	107
<i>Гоцуляк С.О., Пікуль А.В.</i> Реалізація просторового скінченого елемента в криволінійній системі координат	120
<i>Войтенко П.В.</i> Дослідження напружено-деформованого стану плити перекриття у вузлі опирання на колону	126
<i>Яковенко О.О.</i> Вплив ребер на частоти і форми власних коливань циліндричної оболонки	140
<i>Кобельський С.В.</i> Чисельний аналіз просторових задач теорії тріщин на основі змішаної схеми метода скінчених елементів	147

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 88

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 01.11.11. Формат 60x90 ¹/₁₆. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10.
Тираж 100. Зам. № 12-550К

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

Віддруковано на ЗАТ “ВПОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.