

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 89

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2012

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук

С.О. Пискунов, д-р техн. наук
М.О. Соловей, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 89 / Відп. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2012. – 188 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31
м. Київ, 03680
тел.: (044) 248-3040

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2012

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук,
О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
С.О. Пискунов, д-р техн. наук,
С.В. Мицюк, канд. техн. наук

ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНОГО СТАНУ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Розроблені співвідношення моментної схеми скінчених елементів для скінчених елементів (СЕ) із змінними геометричними і фізичними параметрами із інтегруванням в замкненому вигляді, що урахують змінність компонент метричного тензора в поперечному перерізі СЕ, що дозволяє ефективно отримувати достовірні результати обчислення параметрів напружено-деформованого стану.

Ключові слова: скінченний елемент, моментна схема, пружний стан, просторові тіла складної форми.

Визначення напружено-деформованого стану просторових тіл в пружній постановці є невід'ємним етапом розв'язання задач пружнопластичного деформування, задач повзучості і механіки континуального руйнування та задач механіки тріщин (механіки дискретного руйнування). При цьому конфігурація і структура реальних об'єктів можуть бути досить складними, що утруднює їх розрахунок на основі МСЕ. У випадку використання напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) це призводить до необхідності розгляду як питань, що стосуються МСЕ, зокрема покращення дискретного подання параметрів напружено-деформованого стану в межах поперечного перерізу скінченого елемента (СЕ), так і специфічних питань, притаманних НМСЕ – врахування неоднорідності напружено-деформованого стану в характерному напрямку, забезпечення моделювання довільних умов закріплення на торцях тіла і реалізація алгоритмів, орієнтованих на особливості структури систем рівнянь НМСЕ.

Метою даної роботи є дослідження ефективності скінчено-елементних співвідношень для параметрів напружено-деформованого стану в межах поперечного перерізу СЕ та ефективності і достовірності розв'язувальних співвідношень моментної схеми МСЕ в сполученні з НМСЕ для визначення пружного стану просторових тіл складної форми.

1. Вихідні співвідношення теорії пружності для просторових тіл із змінними геометричними і фізичними параметрами. Розглянемо

просторове тіло, що утворене рухом деякої геометричної фігури складної, не обов'язково однозв'язаної конфігурації, вздовж незамкненої напрямної у вигляді дуги кола (рис. 1,а) або відрізка прямої (рис. 1,б). Площа $A(z^3)$ згаданої фігури, що визначає поперечний переріз тіла, може повільно і незначно змінюватись вздовж напрямної із збереженням подібності форми. Таке зміння площі, що може бути обумовлено, зокрема, недосконалістю технологічного процесу виготовлення, спричиняє повільне кількісне зміння параметрів напружено-деформованого стану досліджуваного об'єкту вздовж напрямної із збереженням якісної картини їх розподілення. Фізико-механічні характеристики матеріалу (зокрема модуль пружності матеріалу E) також передбачаються залежними від просторових координат, при цьому їх зміння носить локальний характер, а величини змінюються на декілька порядків, що може бути обумовлено наявністю набутих в процесі експлуатації макроскопічних дефектів. Такі зміння фізико-механічних характеристик призводять до концентрації напружень і суттєвих змін якісної картини та кількісних показників напружено-деформованого стану. На торцях тіла можуть бути реалізовані різні типи граничних умов, що, зокрема, обумовлено необхідністю моделювання тріщин. У подальшому такі об'єкти будемо називати неоднорідними круговими (рис. 1,а) та неоднорідними призматичними (рис. 1,б) тілами із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами.

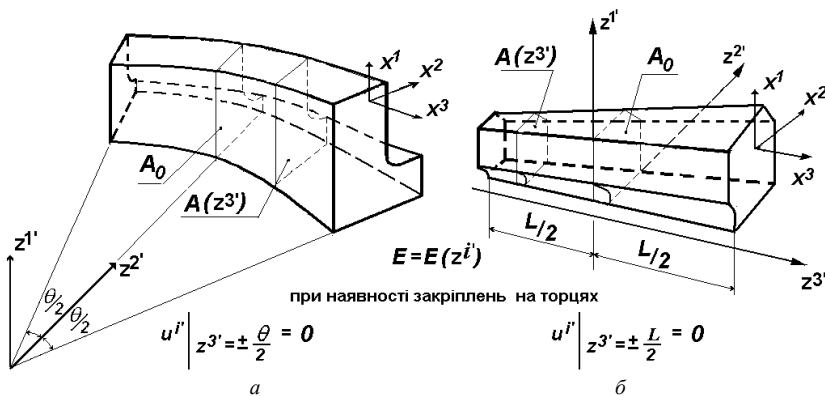


Рис. 1. Неоднорідне кругове (а) і призматичне (б) тіло із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами

Отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ ґрунтується на варіаційному рівнянні Лагранжа:

$$\delta W - \delta A = 0. \quad (1.1)$$

У випадку пружного деформування варіація енергії просторового деформівного тіла об'ємом V визначається співвідношенням:

$$\delta W = \iiint_V \epsilon_{kl} C^{ijkl} \delta \epsilon_{ij} dV.$$

де ϵ_{ij} і C^{ijkl} – тензори деформацій і пружних констант.

Варіація роботи об'ємних сил p^j та поверхневих навантажень q^j , розподілених вздовж частини поверхні тіла S_q , обчислюється за формулою:

$$\delta A = \iiint_V p^j \delta U_j dV + \iint_{S_q} q^j \delta \bar{U}_j dS,$$

де U_j і \bar{U}_j – відповідно переміщення точок об'єму тіла і частини його поверхні S_q , завантаженої зовнішніми навантаженнями. [4].

Для дослідження процесів деформування зазначених тривимірних тіл доцільно використовувати такі системи координат: *базисну* z^i (в розглядуваних випадках: циліндричну – для неоднорідних кругових тіл або декартову – для неоднорідних призматичних тіл), яка є незмінною і призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (осі z^1 та z^2 базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь z^3 орієнтована вздовж напрямної); *місцеву* криволінійну систему координат x^i , природно пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта. При цьому напрямки осей x^3 і z^3 збігаються.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z^i_{,j}$, що визначає зв'язок між місцевою та базисною системами координат [4]:

$$z^i_{,j} = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}, \quad z^{\alpha}_{,3} = z^3_{,\alpha} = 0. \quad (1.2)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, набуватимуть значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Компоненти метричного тензора g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'}. \quad (1.3)$$

З урахуванням (2.2), $g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}$, для незамкнених кругових тіл $g_{33} = (z_{,3}^{3'})^2 (z^{2'})^2$, а для призматичних тіл – $g_{33} = (z_{,3}^{3'})^2$.

Співвідношення для визначення компонент деформацій ε_{ij} через переміщення u_i в місцевій системі координат [4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (1.4)$$

де $\Gamma_{ij}^k = x_{,i}^k z_{,j}^{m'} z_{,i}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} + x_{,i}^k z_{,i}^{m'} \frac{\partial z_{,j}^{l'}}{\partial z^{m'}}$ – символи Крістофеля другого роду,

$$u_k = u_{s'} z_{,k}^{s'}.$$

Після підстановки двох останніх формул в (1.2) в (1.4), зважаючи, що $z_{,k}^{s'} x_{,i}^k = \delta_{i'}^{s'}$, одержимо загальний вираз для деформацій у місцевій системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{,i} z_{,j}^{l'} + u_{,j} z_{,i}^{l'} \right) - u_{l'} z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'}. \quad (1.5)$$

З урахуванням ненульових значень символів Крістофеля у циліндричній базисній системі координат

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{z^{2'}}.$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(u_{,\alpha} z_{,\beta}^{\gamma'} + u_{,\beta} z_{,\alpha}^{\delta'} \right); \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(u_{,\alpha} z_{,3}^{3'} + u_{,\alpha} z_{,3}^{\gamma'} - 2u_{3'} z_{,\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} / z^{2'} \right); \\ \varepsilon_{33} &= u_{,3} z_{,3}^{3'} + u_{2'} z_{,3}^{3'} z_{,3}^{3'} z^{2'}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

У декартовій базисній системі координат дорівнюють нулю всі символи Крістофеля, тому формула (1.5) матиме вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{,i} z_{,j}^{l'} + u_{,j} z_{,i}^{l'} \right). \quad (1.7)$$

Фізичні компоненти тензорів деформацій $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ та пружних констант \tilde{C}^{ijkl} визначаються співвідношеннями:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \quad \tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \quad (1.8)$$

При використанні фізичних компонент тензорів деформацій $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ і пружних констант \tilde{C}^{ijkl} для варіації енергії пружного деформування отримуємо:

$$\delta W = \iiint_V \tilde{\varepsilon}_{kl} \tilde{C}^{ijkl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV \quad (1.9)$$

При описі процесу деформування передбачається, що пружні деформації є малими. Напруження σ^{ij} визначаються через компоненти тензора пружних деформацій відповідно до узагальненого закону Гука [4]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = \left[\mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e, \quad (1.10)$$

де $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – коефіцієнти Ляме, які визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^i, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^i, T)$.

Фізичні компоненти тензора напружень дорівнюють;

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}. \quad (1.11)$$

Варіаційне рівняння в термінах фізичних компонент тензорів деформацій (1.9) дозволяє проводити для опис пружного деформування просторових тіл складної конфігурації.

2. Співвідношення моментної схеми скінчених елементів для фізичних деформацій. При використанні НМСЕ скінченоелементна дискретизація виконується в межах поперечних перерізів тіл, а в напрямку утворюючої використовується один скінчений елемент (СЕ), конфігурація якого збігається із конфігурацією утворюючої (рис. 2). Для апроксимації просторових неоднорідних кругових та призматичних тіл змінної площі поперечного перерізу використовуються просторові неоднорідні кругові (рис. 3,а) та призматичні (рис. 3,б) скінчені елементи (СЕ) із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами.

Зазначені СЕ являють собою відповідно криволінійну або прямолінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола або прямої. Площа такого чотирикутника може змінюватись (із збереженням подібності його форми) за законом: $A(z^{3'}) = A_0 f(z^{3'})$, де A_0 – площа поперечного

перерізу при $z^{3'}=0$, $f(z^{3'})$ – монотонна безперервна функція.

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , яка природно пов'язана з геометрією об'єкта так, що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ, а вісь x^3 спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із $z^{3'}$.

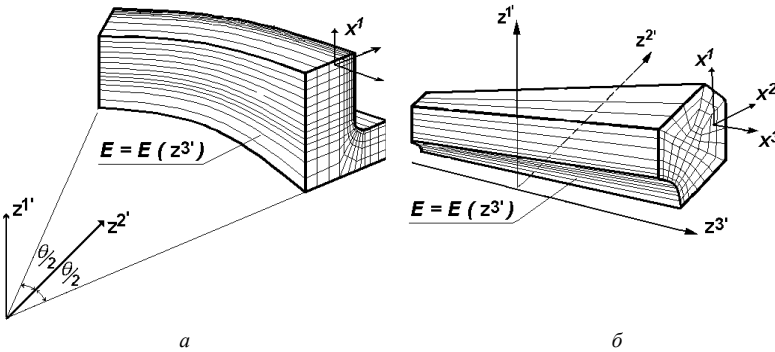


Рис. 2. Скінчені елементні моделі НМСЕ для неоднорідного кругового (а) і призматичного (б) тіл із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами

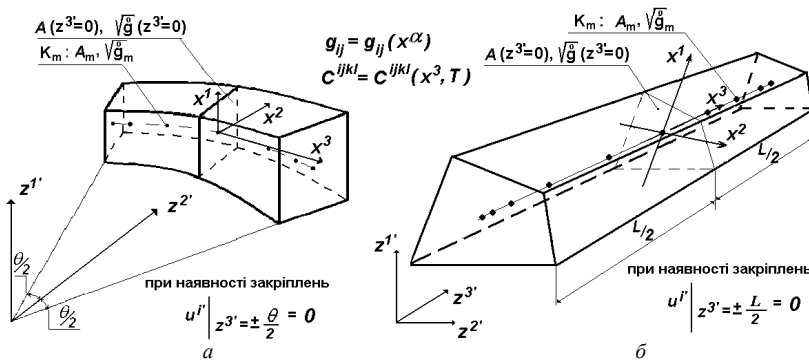


Рис. 3. Неоднорідні круговий (а) і призматичний (б) скінчені елементи із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами в базисній системі координат

При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ (рис. 4). Вздовж вісі

скінченного елемента, відповідно до вимог формули інтегрування Гаусса, розташована певна кількість точок інтегрування K_m , $m=1\dots M$ (рис. 3,4) [1,5].

При побудові розв'язувальних співвідношень НМСЕ для неоднорідних кругових і призматичних скінчених елементів в роботах [5] було використано припущення про сталість компонент метричного тензора в межах поперечного перерізу СЕ. Як засвідчили чисельні експерименти, проведені із використанням згаданих СЕ на найпростішій задачі про двовісний розтяг куба (рис. 5, $q = 0.1$ МПа, модуль пружності $E = 0.1$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$) у випадку



Рис. 4. Неоднорідні круговий і призматичний скінчені елементи із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами в місцевій системі координат

використання показаної на вірці рис. 5 ортогональної дискретної моделі при кількості невідомих $N_u=27$ результати є ідентичними аналітичному розв'язку. У випадку використання показаної не ортогональної дискретної моделі такої ж розмірності похибки визначення переміщень δ_{u_1} і δ_{u_2} становлять 8–13%. Підвищення точності результатів потребує ортогоналізації дискретної моделі шляхом її згущення. При цьому досягнення точності в межах 2% потребує майже на порядок більшої кількості невідомих і, відповідно, надмірних обчислювальних витрат.

У випадку тіл обертання суттєве погіршення точності обчислення параметрів напружено-деформованого стану виникає навіть при використанні ортогональних сіток, що обумовлено зміною радіуса в межах кожного СЕ, що також може бути подолано за рахунок згущення сітки по радіусу.

Збіжність результатів для не ортогональної дискретної моделі може бути покращена також шляхом урахування зміни компонент метричного тензора на основі чисельного інтегрування в межах поперечного перерізу СЕ [5], що теж потребує суттєвого обсягу додаткових обчислень.

Таким чином, підвищення точності результатів при використанні не ортогональних дискретних моделей як шляхом ортогоналізації СЕ сітки при її згущенні так і з використанням чисельного інтегрування в поперечному перерізі призводить до збільшення обсягів обчислювальних витрат. В той же час, побудова раціональних дискретних моделей

просторових тіл складної форми потребує використання не ортогональних дискретних моделей. В зв'язку з цим, в даній роботі при виведенні розв'язувальних співвідношень НМСЕ здійснено урахування змінності компонент метричного тензора в межах поперечного перерізу СЕ:

$$g_{ij} = g_{ij}(x^\alpha). \quad (2.1)$$

Крім того, для геометричних і фізико-механічних параметрів прийнято наступні гіпотези:

– визначник матриці, складеної зі компонент метричного тензора g_{ij} і компоненти тензору пружних сталей дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перерізу СЕ:

$$g = \overset{\circ}{g} = g|_{x^\alpha=0}, \quad C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}^{ijkl} = C^{ijkl}|_{x^\alpha=0};$$

– визначник матриці, складеної зі компонент метричного тензора g_{ij} , є змінним за напрямною і обчислюється на основі вихідних даних про геометрію досліджуваного об'єкта – заданого закону змінення площі поперечного перерізу – із використанням співвідношення:

$$\sqrt{g(z^{3'})} = \frac{A(z^{3'})}{A_0} \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} = f(z^{3'}) \sqrt{g|_{z^{3'}=0}}. \quad (2.2)$$

– компоненти тензору пружних сталей є змінним за напрямною, залежать від температури:

$$C^{ijkl} = C^{ijkl}(x^3, T). \quad (2.3)$$

Розподілення переміщень у межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'}(S_1 S_2) \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (2.4)$$

де $u_{m'}(S_1 S_2)$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центра поперечного перетину елементу в місцевій системі координат x^i .

Апроксимація невідомих переміщень в базисній системі координат $u_{3'}$, в напрямку утворюючої здійснюється розкладенням за системою координатних функцій ϕ^l – поліномам Лагранжа ($l = 0, 1$) і Міхліна ($l = 2, \dots, L$):

$$u_s = \sum_{l=0}^L \bar{u}_s^l \Phi^{(l)}, \quad (2.5)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \Phi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3), \\ \Phi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[(1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right] \end{aligned}$$

– поліноми Лагранжа.

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [5] компоненти тензора повних фізичних деформацій у поперечному перерізі, що відповідає певній точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} x^\beta \end{aligned} \quad (2.6)$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}$, $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}$ – значення величин деформацій і їх

похідних в центрі поперечного перерізу СЕ.

З урахуванням подання фізичних компонент деформацій через відповідні ненормовані величини (1.8) для коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій в ряд Маклорена (2.6) отримаємо:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \left(\varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right)_h ; \\
&\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial \left(\epsilon_{\alpha 3} / \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}} \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left[\epsilon_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha 3} \left(\frac{g_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}}{g_{\alpha\alpha}} + \frac{g_{33,(3-\alpha)}}{g_{33}} \right) \right] \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left[\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} \left(\overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} \right)_h ; \\
&\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\alpha} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\epsilon_{33} / g_{33})}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{1}{g_{33}} \left(\epsilon_{33,\alpha} - \epsilon_{33} \frac{g_{33,\alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\epsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} \right)_h, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{h}_{ij,\delta} = \frac{\overset{\circ}{g}_{ij,\delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}, \quad \overset{\circ}{g}_{ij,\delta} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\delta} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

З урахуванням (1.2) і (1.4) для призматичних тіл $g_{33,\delta} = \left[\left(z_{,3}^3 \right)^2 \right], \delta = 0$.

Відповідно, в цьому випадку вирази для лінійних коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій в ряд Маклорена (2.6) набудуть наступного, спрощеного порівняно із випадком кругових тіл, вигляду:

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right)_h ; \\
&\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} \right)_h ; \\
&\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\alpha} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} \right)_h. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Необхідно відзначити, що кожний зі лінійних коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій (в (2.7) для кругових і в (2.8) для призматичних тіл) являє собою добуток нормуючого множника вигляду $\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii} \overset{\circ}{g}_{jj}}}$ на

ненормовану похідну від деформації $(\overset{\circ}{\epsilon}_{ij,k})_h$, яка, в свою чергу містить два складники. Перший з них являє собою власне похідні від компонент ненормованих деформацій в місцевій криволінійній системі координат СЕ, що використовуються для опису сталюї в межах поперечного перерізу СЕ геометрії. Другий складник – це добуток величин деформацій на похідні від компонент метричного тензора, нормовані за їх значеннями в центрі поперечного перерізу СЕ $\overset{\circ}{h}_{ij,\delta}$, що дозволяють враховувати змінність геометрії в межах поперечного перерізу СЕ.

На основі закону Гука (1.10) і прийнятих співвідношень (2.6) запишемо вираз для компонент тензора фізичних напружень:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \overset{\circ}{C}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{11} + \overset{\circ}{\epsilon}_{11,2} x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{C}^{ij12} \overset{\circ}{\epsilon}_{12} + \overset{\circ}{C}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{22} + \overset{\circ}{\epsilon}_{22,1} x^1 \right) + \\ & + 2 \overset{\circ}{C}^{ij13} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{13} + \overset{\circ}{\epsilon}_{13,2} x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{C}^{ij23} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{23} + \overset{\circ}{\epsilon}_{23,1} x^1 \right) + \overset{\circ}{C}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33} + \overset{\circ}{\epsilon}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\epsilon}_{33,2} x^2 \right). \end{aligned}$$

Застосовуючи позначення:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\epsilon}_{kl},$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = \overset{\circ}{C}^{ij11} \overset{\circ}{\epsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{C}^{ij13} \overset{\circ}{\epsilon}_{(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{C}^{ij33} \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha};$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена в термінах фізичних величин:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\sigma}^{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{ij} x^1. \quad (2.9)$$

Відкидаючи з (2.9) члени вигляду $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як ті, що не дають вкладення в енергію деформування СЕ, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} = & \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} = & \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де значення коефіцієнтів $\overset{\circ}{\sigma}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij}$ обчислюються в точках інтегрування K_m , що розташовані в поперечних перерізах вздовж вісі x^3 (рис. 3,4).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент тензора напружень в місцевій системі координат (1.9):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} &= \sqrt{g_{ii} g_{jj}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} = g_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} \quad \text{і} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} = g_{33} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Визначення отриманих коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій в ряд Маклорена (2.7) і (2.8) потребує подальшого представлення ненормованих компонент деформацій та їх похідних, що входять до складу цих коефіцієнтів, через вузлові переміщення і їх похідні в базисній системі координат.

3. Подання коефіцієнтів розкладу деформацій через переміщення з урахуванням змінності компонент метричного тензора в поперечному перерізі. Обчислення коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій через переміщення згідно із (1.6) для тіл обертання або з (1.9) для призматичних тіл потребує визначення похідних від переміщень в центрі СЕ. Виходячи з прийнятого закону розподілу переміщень в поперечному перерізі (2.4) ці величини дорівнюють:

$$\begin{aligned} u_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)}; \quad u_{i',\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_{\alpha}; \\ u_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_1 S_2; \quad u_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3}; \\ u_{i',3\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3} S_{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При цьому, аналогічно до використаного позначення для величин похідних від переміщень центрі поперечного перерізу СЕ $\overset{\circ}{u}_{m',i}$, введемо позначення для відповідних величин компонент тензора перетворення :

$z_{,i}^{m'} \Big|_{x^{\alpha}=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'}$. Тоді, для кругових неоднорідних незамкнених просторових тіл із застосуванням базисної циліндричної системи координат на основі виразу (1.6) отримаємо:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma(S_1 S_2)} \left(S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1, S_2)} S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} + \frac{1}{2} u_{\gamma(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} - u_{3'(S_1, S_2)} \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'}}{\overset{\circ}{z}^{2'}} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} + u_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}^{2'} \left(\overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} \right)^2 \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma(S_1 S_2)} \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[2 \cdot u_{3'(S_1, S_2)} S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} + u_{\gamma(S_1, S_2), 3} \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma} + S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'}}{\overset{\circ}{z}^{2'}} u_{3'(S_1, S_2)} \left(\overset{\circ}{z}_{,\beta}^{2'} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \left(2S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\beta}^{2'}}{\overset{\circ}{z}^{2'}} \right) \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} \left[2u_{3'(S_1, S_2), 3} S_{\alpha} + u_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} + 2S_{\alpha} \overset{\circ}{z}^{2'} \right) \right]. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Для неоднорідних призматичних просторових тіл із застосуванням базисної декартової системи координат на основі виразу (1.7) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma(S_1 S_2)} \left(S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1 S_2)} S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} + \frac{1}{2} u_{\gamma(S_1 S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1 S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma(S_1 S_2)} \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[2 u_{3'(S_1 S_2)} S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{3'} + u_{\gamma(S_1 S_2), 3} \left(S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1 S_2),3} \left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right) \right]. \quad (3.3)$$

З урахуванням прийнятої апроксимації переміщень в напрямку утворюючої (2.5) отримані вирази для ненормованих компонент деформацій (3.2) і (3.3) в місцевій криволінійній системі координат через вузлові переміщення та їх похідні, що обчислені в базисній системі координат, набудуть наступного вигляду:

- для кругових неоднорідних тіл:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left(S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_\beta \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[\left(u_{3'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left(S_\alpha - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right) \Phi^{(l)} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \Phi_{,3}^{(l)} \right) \right] \right]; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[u_{3'(S_1 S_2),3}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \Phi_{,3}^{(l)} + u_{2'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}^{2'} \left(\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \Phi^{(l)} \right] \right]; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,12} \right) \Phi^{(l)} \right], \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[u_{3'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left[2 \cdot S_1 S_2 + \frac{1}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \left(\overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \times \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \left(2S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,3-\alpha}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right) \right] \right] \Phi^{(l)} + u_{\gamma'(S_1 S_2),3}^l \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} + S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right] \right]; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left[\sum_{l=0}^L \left[2u_{3'(S_1 S_2),3}^l S_\alpha \Phi_{,3}^{(l)} + u_{2'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} + 2S_\alpha \overset{\circ}{z}^{2'} \right) \Phi^{(l)} \right] \right], \end{aligned}$$

- для призматичних тіл:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left(S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_\beta \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left(u_{3'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} S_\alpha \Phi^{(l)} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \Phi_{,3}^{(l)} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{3'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \Phi_{,3}^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{, \alpha}^{\gamma'} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{, 12}^{\gamma'} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left\{ u_{3'(S_1 S_2)}^l \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{, 3}^{3'} \right) \Phi^{(l)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left(S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{, \alpha}^{\gamma'} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{, 12}^{\gamma'} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right\} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{3'(S_1 S_2)}^l \left(2S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{, 3}^{3'} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right]. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Отримані вирази для ненормованих компонент деформацій (3.2) і (3.3) в місцевій криволінійній системі координат через вузлові переміщення та їх похідні, що обчислені в базисній системі координат, які у векторній формі мають наступний вигляд:

$$\{\overset{\circ}{\varepsilon}\} = \sum_{l=0}^L \left([\overset{\circ}{B}_1] \Phi^{(l)} + [\overset{\circ}{B}_2] \Phi_{,3}^{(l)} \right) \{ u_l \}, \tag{3.5}$$

де

$$\begin{aligned}
\{\overset{\circ}{\varepsilon}\}^T &= \{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \}; \\
\{ u_l \}^T &= \{ u_{i(-1;-1)}^l \quad u_{i(1;-1)}^l \quad u_{i(-1;1)}^l \quad u_{i(1;1)}^l \}; \\
[\overset{\circ}{B}_{\alpha}] &= \left[[\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(-1;-1)} \quad [\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(1;-1)} \quad [\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(-1;1)} \quad [\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(1;1)} \right].
\end{aligned}$$

Склад матриць $[\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(S_1, S_2)}$ є наступним:

$$\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{(B}_1)_{11} & \overset{\circ}{(B}_1)_{12} & 0 \\ \overset{\circ}{(B}_1)_{21} & \overset{\circ}{(B}_1)_{22} & 0 \\ \overset{\circ}{(B}_1)_{31} & \overset{\circ}{(B}_1)_{32} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{(B}_1)_{43} \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{(B}_1)_{53} \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{(B}_1)_{63} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{41} & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{42} & 0 \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{51} & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{52} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{63} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Значення компонент матриць $[\overset{\circ}{B}_\alpha]^{(S_1, S_2)}$ для неоднорідних кругових тіл із змінними геометричними параметрами мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{11} &= \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^1, & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{12} &= \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'}, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{21} &= \frac{1}{2} \left(S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} \right), & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{22} &= \frac{1}{2} \left(S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} \right), \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{31} &= \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^1, & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{32} &= \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{43} &= \frac{1}{2} z, 3 \left(S_2 \frac{\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}} \right), & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{53} &= \frac{1}{2} z, 3 \left(S_1 \frac{\overset{\circ}{z}_{,1}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}} \right), \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{63} &= \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}^{2'} \cdot \left(\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{41} &= \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'}, & \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{42} &= \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{51} &= \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'}, & \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{52} &= \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'}, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{63} &= \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для неоднорідних призматичних тіл із змінними геометричними параметрами для матриць $[\overset{\circ}{B}_1]^{(S_1, S_2)}$ відмінними від попередньо наведених для кругових неоднорідних тіл (3.6) будуть тільки наступні компоненти:

$$\overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{43} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} S_2, \quad \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{53} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} S_1, \quad \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{63} = 0. \quad (3.8)$$

Вигляд матриці $[\overset{\circ}{B}_2]^{(S_1, S_2)}$ є повністю ідентичним випадку неоднорідних кругових тіл.

Отримані величини ненормованих деформацій $(\varepsilon_{ij,k})_h$, що входять до складу коефіцієнтів лінійних членів розкладення фізичних деформацій в ряд Маклорена, в векторній формі можуть бути подані у вигляді:

$$\left\{ \varepsilon_{,\alpha} \right\}_h = \left\{ \varepsilon_{,\alpha} \right\}_{const} + \left\{ \varepsilon_{,\alpha} \right\}_{var}, \quad (3.9)$$

де склад векторів $\left\{ \varepsilon_{,\alpha} \right\}_{const}$ є однаковими для неоднорідних кругових і призматичних тіл:

$$\left\{ \varepsilon_{,1} \right\}_{const}^T = \left\{ \varepsilon_{22,1} \quad 2\varepsilon_{23,1} \quad \varepsilon_{33,1} \right\}, \quad \left\{ \varepsilon_{,2} \right\}_{const}^T = \left\{ \varepsilon_{11,2} \quad 2\varepsilon_{13,2} \quad \varepsilon_{33,2} \right\}. \quad (3.10)$$

Вектори $\left\{ \varepsilon_{,\alpha} \right\}_{var}$ для неоднорідних кругових тіл із змінними геометричними параметрами мають вигляд:

$$\left\{ \varepsilon_{,1} \right\}_{var} = \left\{ \varepsilon_{22} h_{22,1} \quad \varepsilon_{23} \left(h_{22,1} + h_{33,1} \right) \quad \varepsilon_{33} h_{33,1} \right\};$$

$$\left\{ \varepsilon_{,2} \right\}_{var}^T = \left\{ \varepsilon_{11} h_{11,2} \quad \varepsilon_{13} \left(h_{11,2} + h_{33,2} \right) \quad \varepsilon_{33} h_{33,2} \right\}, \quad (3.11)$$

а для неоднорідних призматичних тіл із змінними геометричними параметрами:

$$\left\{ \varepsilon_{,1} \right\}_{var}^T = \left\{ \varepsilon_{22} h_{22,1} \quad \varepsilon_{23} h_{22,1} \quad 0 \right\}, \quad \left\{ \varepsilon_{,2} \right\}_{var}^T = \left\{ \varepsilon_{11} h_{11,2} \quad \varepsilon_{13} h_{11,2} \quad 0 \right\}. \quad (3.12)$$

Зважаючи, що компоненти двох із зазначених складових векторів похідних від деформацій обчислюються з урахуванням прийнятого подання переміщень в напрямку утворюючої, матричне представлення вектору $\left\{ \varepsilon_{,\alpha} \right\}_h$ доцільно провести у вигляді:

$$\left\{ \varepsilon_{,\alpha} \right\}_h = \sum_{l=0}^L \left[\left([B_{1,\alpha}]_{const} + [B_{1,\alpha}]_{var} \right) \Phi^{(l)} + \left([B_{2,\alpha}]_{const} + [B_{2,\alpha}]_{var} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right] \{u_l\}, \quad (3.13)$$

де склад матриць $[B_{\beta,\alpha}]_{const}$ і $[B_{\beta,\alpha}]_{var}$ має наступний загальний вигляд:

$$\begin{aligned}
 \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} &= \begin{bmatrix} \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11} & \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12} & 0 \\ 0 & \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{33} \end{bmatrix}, \\
 \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \left(\tilde{B}_{2,\alpha} \right)_{21} & \left(\tilde{B}_{2,\alpha} \right)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\tilde{B}_{2,\alpha} \right)_{33} \end{bmatrix}, \\
 \left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right] &= \left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^{(1;1)}. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Для компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]_{const}^{(S_1, S_2)}$ і $\left[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]_{var}^{(S_1, S_2)}$ для неоднорідних кругових тіл із змінними геометричними параметрами згідно із (3.4) отримаємо:

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11}^{const} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{1'},$$

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12}^{const} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{2'},$$

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22}^{const} = \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \left(2 \overset{\circ}{z}^{2'} S_{\alpha} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \right),$$

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{33}^{const} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left(2 S_1 S_2 - \frac{1}{\overset{\circ}{z}^{2'}} \left(\overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} + 2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} \cdot S_{\alpha} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}}{\overset{\circ}{z}^{2'}} \right) \right)$$

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11}^{var} = -\frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}$$

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12}^{var} = -\frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,-3-\alpha}^{2'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}$$

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22}^{var} = -\frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \overset{\circ}{z}^{2'} \cdot \overset{\circ}{h}_{33,\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{33}^{var} &= -\frac{1}{4} z_{,3}^{\circ 3'} \left(S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,3}^{\circ 2'}}{z_{,3}^{\circ 2'}} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{21}^{const} &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 1'} \cdot S_{\alpha} + \frac{1}{4} z_{,12}^{\circ 1'}, & \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{22}^{const} &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 2'} \cdot S_{\alpha} + \frac{1}{4} z_{,12}^{\circ 2'}, \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{33}^{const} &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3'} S_{\alpha}; \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{21}^{var} &= -\frac{1}{8} z_{,3}^{\circ 1'} \cdot \left(\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{22}^{var} &= -\frac{1}{8} z_{,3}^{\circ 2'} \cdot \left(\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{33}^{var} &= -\frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3'} \cdot \overset{\circ}{h}_{33,\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Для неоднорідних призматичних тіл із змінними геометричними параметрами значення компонент підматриць $[B_{\beta,\alpha}]_{const}^{(S_1, S_2)}$ і $[B_{\beta,\alpha}]_{var}^{(S_1, S_2)}$ визначаються за відповідно до формул (3.4). При цьому, відмінними від попередньо наведених для кругових неоднорідних тіл будуть наступні компоненти:

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{22}^{const} &= 0, & \left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{33}^{const} &= S_1 S_2 z_{,3}^{\circ 3'}, \\
\left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{22}^{var} &= 0, & \left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{33}^{var} &= -\frac{1}{4} S_{(3-\alpha)} z_{,3}^{\circ 3'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}, \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{21}^{var} &= -\frac{1}{8} z_{,3}^{\circ 1'} \cdot \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}, & \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{22}^{var} &= -\frac{1}{8} z_{,3}^{\circ 2'} \cdot \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}, \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{33}^{var} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Необхідно відзначити, що структура виразів (3.4) є повністю ідентичною аналогічним виразам, що не враховують змінність компонент метричного тензора в межах СЕ (зокрема, наведеним в роботі [1]). Зважаючи на це, їх використання дозволяє, не виконуючі трудомісткого чисельного інтегрування в поперечному перерізі і практично не змінюючи обсяг обчислювальних витрат враховувати змінність геометричних параметрів в межах поперечного перерізу СЕ.

4. Алгоритм розв'язання систем лінійних рівнянь НМСЕ і ефективність визначення напружено-деформованого стану із

використанням неоднорідних кругових і призматичних СЕ із змінними геометричними і фізичними параметрами. При використанні НМСЕ вектори невідомих $\{u\}$, зовнішніх навантажень $\{Q\}$ і матриця жорсткості $[K]$ дискретної моделі набувають блочної структури:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \dots \\ \{u_l\} \\ \dots \\ \{u_L\} \end{Bmatrix}, \{Q\} = \begin{Bmatrix} \{Q_1\} \\ \dots \\ \{Q_l\} \\ \dots \\ \{Q_L\} \end{Bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \dots & [K_{1l}] & \dots & [K_{1L}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{l1}] & \dots & [K_{ll}] & \dots & [K_{lL}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{L1}] & \dots & [K_{Ll}] & \dots & [K_{LL}] \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Зважаючи на це для розв'язання отриманої системи рівнянь раціональним є використання блочно-ітераційних алгоритмів [1], зокрема за алгоритмом блочних ітерацій з верхньою релаксацією:

$$\{u_l\}_n = \{u_l\}_{n-1} + \{\Delta u_l\}_n = \{u_l\}_{n-1} + [K_{ll}]^{-1} \left(\{Q_l\} - \beta \left[\sum_{s=0}^{l-1} [K_{ls}] \{u_s\}_n + \sum_{s=l}^L [K_{ls}] \{u_s\}_{n-1} \right] \right), \quad (3.18)$$

де $1 \leq \beta < 2$ – параметр релаксації, n – поточний номер ітерації.

Умовою збіжності ітераційного процесу є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L (\{\Delta u_l\}_n)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L (\{u_l\}_n)^2, \quad (3.19)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ – параметр точності розв'язання системи лінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності результатів.

Дослідження ефективності застосування розроблених нових призматичних СЕ із змінними геометричними параметрами проведено на основі розв'язання вищезгаданої задачі про двовісний розтяг куба (рис. 5,6). Результати, отримані із використанням не ортогональної дискретної моделі при використанні інтегрування в замкненому вигляді є повністю ідентичними результатам, отриманим на основі урахування змінності компонент метричного тензора шляхом чисельного інтегрування, результати є повністю ідентичними.

Дослідження ефективності використання і вірогідності результатів для кругових тіл проведено на тестовому прикладі про деформування нескінченного товстостінного циліндра під впливом внутрішнього тиску (внутрішній та зовнішній радіуси $a = 0.002 \text{ м}$ і $b = 10a$, $q = 1 \text{ МН/м}^2$, $E = 1 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$, рис. 6,а). В якості еталону використано аналітичний розв'язок [3]. При розв'язанні задачі використані ортогональні дискретні

моделі з різною кількістю (від 4 і більше) СЕ (рис. 6,б), граничні умови на площинах перпендикулярних вісі обертання відповідають площинам симетрії – $u^{1'}=0$, на торцевих поверхнях – $u^{3'}=0$.

Аналіз результатів проведений для точки циліндра, що знаходиться на відстані $r = 0,00425$ м від вісі обертання [2]. Отримані залежності похибок δ обчислення радіальних $\sigma^{2'2'}$ і колових $\sigma^{3'3'}$ напружень від кількості N СЕ вздовж радіуса циліндра (рис. 6) свідчать, що у випадку використання для визначення компонент тензора деформацій ϵ_{ij} місцевої ненормованої системи координат і усереднення значень компонент метричного тензора в поперечному перерізі СЕ (на графіку – штрихова лінія) величини похибок на найрідших сітках досягають 40%. В той же час при урахуванні змінності компонент метричного тензора (на графіку – суцільна лінія) похибка ϵ в 3-7 разів меншою. При цьому точність результатів, отриманих при урахуванні змінності компонент метричного тензора як шляхом чисельного так і шляхом безпосереднього інтегрування є однаковою. Тотожність результатів, отриманих із урахуванням і без урахування змінності компонент метричного тензора в поперечному перерізі досягається лише при суттєвому збільшенні кількості СЕ по радіусу, що відповідно збільшує обсяг обчислювальних витрат.

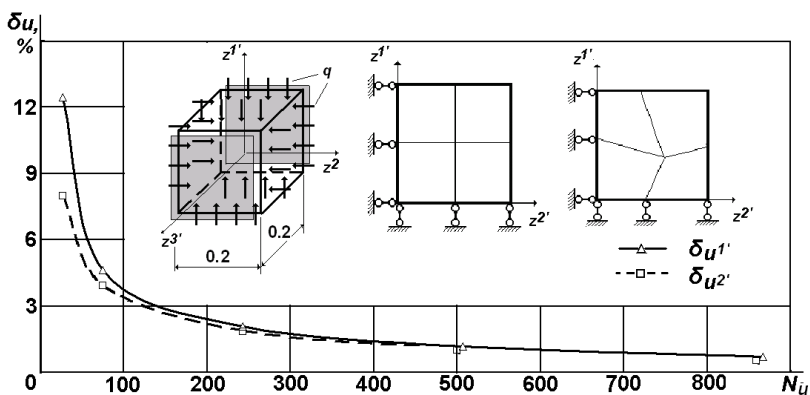


Рис. 5. Розрахункова схема та поперечний переріз дискретних моделей куба при двісному розтягу і похибка обчислення переміщень при використанні не ортогональних дискретних моделей

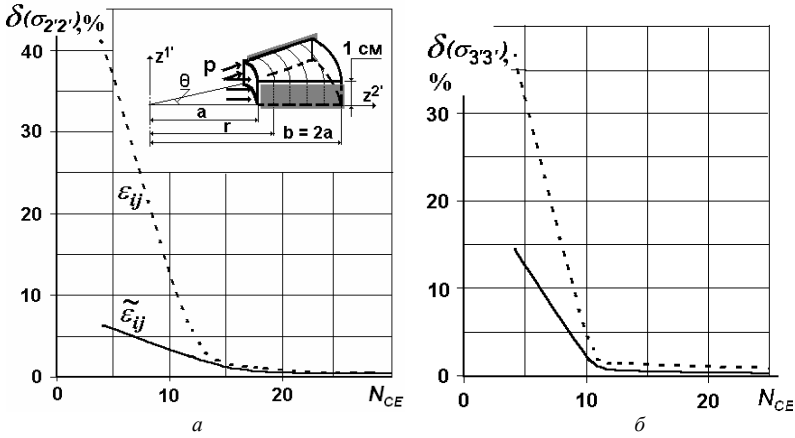


Рис. 6 Порівняння збіжності результатів обчислення радіальних (а) і колових (б) напружень.

Таким чином, для тіл обертання одержання точних результатів при мінімальних обчислювальних витратах навіть із використанням ортогональних СЕ можливе лише при урахуванні змінності компонент метричного тензора в поперечному перерізі СЕ.

Отже, розглянуті тестові приклади свідчать, що урахування змінності компонент метричного тензора при побудові дискретних моделей об'єктів складної форми є необхідною передумовою ефективного отримання вірогідних результатів обчислення параметрів напружено-деформованого стану. Розроблені СЕ із змінними геометричними і фізичними параметрами із інтегруванням в замкненому вигляді дозволять вирішити цю проблему.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. Баженов В.А., Гуляр О.І., Остапенко Р.М., Пискунов С.О. Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі термов'язкопружнопластичності для неоднорідних тіл обертання // Опір матеріалів і теорія споруд № 82, 2008. - С.3-29.
3. Баженов В.А., Солодей І.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І. Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружно-пластичності НМСЕ // Опір матеріалів і теорія споруд № 76, 2005. - С.3–26.
4. Блох В.И. Теория упругости / В. И. Блох. – Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. – 484 с.

5. Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике твердых тел.- К.: Вища школа, 1982.-480с.

Стаття надійшла до редакції 12.07.2012 р.

Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Мицюк С.В.

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Разработаны соотношения моментной схемы конечных элементов для конечных элементов (КЭ) с переменными геометрическими и физическими параметрами с интегрированием в замкнутом виде, учитывающие изменение компонент метрического тензора в поперечном сечении КЭ. Это позволяет эффективно получать достоверные результаты определения параметров напряженно деформированного состояния.

Ключевые слова: конечный элемент, моментная схема, упругое состояние, пространственные тела сложной формы.

Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Micyuk S.V.

FEATURES OF REALIZATION OF MOMENT SCHEME OF FINITE ELEMENT METHOD FOR DETERMINATION OF THE ELASTIC STATE OF SPATIAL BODIES OF COMPLICATED DIFFICULT FORM

Developed relationships moment finite element schemes for finite element (FE) with variable geometry and physical parameters with integration in closed form, taking into account the change in the components of the metric tensor in the cross section of FE. This effectively obtain valid results definition of stress strain state.

Keywords: finite element moment scheme, the elastic state, space bodies of complex shape.

УДК 539.3

М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук

ЗАСТОСУВАННЯ ГАМІЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛІЗМУ В ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Рівняння осесиметричних коливань циліндричних оболонок в теорії Кірхгофа-Лява та теорії типу Тимошенка вперше в науковій літературі представлені в операторній гамільтоновій формі по поздовжній координаті.

Ключові слова: змішана система рівнянь осесиметричних коливань, теорія Кірхгофа-Лява, теорія типу Тимошенка, операторна гамільтонова форма

Розвитку теорії і методів розрахунку стержнів, пластин і оболонок належить провідне значення в прикладних задачах будівельної механіки. В монографії [4] вперше в світовій науковій літературі з механіки деформування твердих тіл було запропоновано перетворення рівнянь теорії пружності до гамільтонової форми по просторовій координаті. Подальшому розвитку цього підходу присвячені чисельні роботи, аналіз яких проведено в оглядах [10, 11] та інших публікаціях. В теоріях стержнів і пластин гамільтонів формалізм по просторових координатах розвинутий в роботах [2, 3, 5 – 9, 13]. В цій статті гамільтонів формалізм по поздовжній координаті вперше розвинуто в теорії оболонок. Розглядаються рівняння осесиметричних коливань циліндричних оболонок теорії Кірхгофа-Лява і типу Тимошенка. Показано яким чином їх можна представити у вигляді змішаних операторних гамільтонових систем.

1. Теорія типу Тимошенка. Циліндричну оболонку товщиною h віднесемо до ортогональної системи координат $\alpha_1 = s, \alpha_2, z$ в її серединній поверхні радіусу R . В теорії типу Тимошенка коливань циліндричних оболонок при осесиметричній деформації тангенціальні зусилля N_{11} , N_{22} , згинальний момент M_{11} , перерізуюча сила Q_{1z} , тангенціальне переміщення $v_1(s, t)$, прогин $w(s, t)$ серединної поверхні, тимошенківська функція зсуву $\psi_1(s, t)$ знаходяться з рівнянь коливань

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial s} = \rho h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s} - Q_{1z} = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_{1z}}{\partial s} - \frac{N_{22}}{R} + q_3 = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

і матеріальних залежностей

$$N_{11} = B \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + v \frac{w}{R} \right), \quad N_{22} = B \left(v \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{w}{R} \right),$$

$$M_{11} = -D \frac{\partial \psi_1}{\partial s}, \quad Q_{1z} = B_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial s} - \psi_1 \right) \quad (1.2)$$

при відповідних граничних і початкових умовах. В рівняннях (1.1), (1.2) ρ , E , v , $G_{13} = G_{23} \neq 2(1-v)E$ – густина, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, модулі зсуву матеріалу, $D = I_1 E / (1-v^2)$ – згинальна жорсткість, $B = hE / (1-v^2)$ і $B_{55} = k_G h G_{13}$ – жорсткості при розтягуванні і зсуві, k_G – коефіцієнт зсуву, h – товщина оболонки, $I_1 = h^3 / 12$ – момент інерції поперечного перерізу на одиницю довжини.

Оскільки в перерізах $s = const$ величини M_{11} , w , N_{11} , ψ_1 , Q_{1z} , v_1 при досконалому механічному контакті залишаються неперервними, то рівняння (1.1) і (1.2) доцільно записати в операторній нормальній формі Коші відносно цих функцій по просторовій координаті s

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s} = -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + Q_{1z}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial s} = -\frac{M_{11}}{D},$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \psi_1 + \frac{Q_{1z}}{B_{55}}, \quad \frac{\partial Q_{1z}}{\partial s} = (1-v^2) B \frac{w}{R^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + v \frac{N_{11}}{B},$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial s} = \rho h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial s} = -v \frac{w}{R} + \frac{N_{11}}{B}. \quad (1.3)$$

Тангенціальне зусилля N_{22} , що не входить в систему (1.3), визначається за формулою

$$N_{22} = (1-v^2) B \frac{w}{R} + v N_{11} \quad (1.4)$$

через функції w , N_{11} системи (1.3).

Важливо наголосити, що коефіцієнти системи (1.3), а значить і рівнянь (1.1) і (1.2), можуть бути довільними функціями координати s з розривами першого роду.

Покажемо тепер, що система (1.3) є операторною гамільтоновою системою [1, 2] по просторовій координаті s

$$\frac{\partial q_i}{\partial s} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial s} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial q_i}, \quad i=1, 2, 3. \quad (1.5)$$

З цією метою за “канонічні” змінні треба взяти вектор-стовпці

$$\mathbf{q} = \text{col}(M_{11}, w, N_{11}), \quad \mathbf{p} = \text{col}(\psi_1, Q_{1z}, -v_1), \quad (1.6)$$

а операторну функцію Гамільтона вибрати у вигляді

$$\widehat{H} = \frac{1}{2} \widehat{P}_{ij} q_i q_j + \frac{1}{2} \widehat{Q}_{ij} p_i p_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.7)$$

де ненульові елементи операторних симетричних матриць \widehat{P}_{ij} , \widehat{Q}_{ij} мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} -\widehat{P}_{11} &= -\frac{1}{D}, \quad -\widehat{P}_{22} = (1-v^2)BR^{-2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ -\widehat{P}_{23} &= -\widehat{P}_{32} = vR^{-1}, \quad -\widehat{P}_{33} = -B^{-1}, \\ \widehat{Q}_{11} &= -\rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{21} = 1, \\ \widehat{Q}_{22} &= B_{55}^{-1}, \quad \widehat{Q}_{33} = -\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Неважко бачити, що система (1.5) з урахуванням (1.7) і (1.8) співпадає з системою (1.3), тобто система (1.3) є операторною гамільтоновою системою по просторовій координаті s . При виконанні операцій диференціювання елементи \widehat{P}_{ij} , \widehat{Q}_{ij} матриць $\widehat{\mathbf{P}}$, $\widehat{\mathbf{Q}}$ слід вважати “замороженими” (“сталими”) величинами.

2. Теорія Кірхгофа-Лява. Розглянемо теорію з засадничими гіпотезами Кірхгофа-Лява. Рівняння коливань і матеріальні залежності тепер будуть такі

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial s} &= \rho h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s} - Q_{1z} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{1z}}{\partial s} - \frac{N_{22}}{R} + q_3 &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$N_{11} = B \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + v \frac{w}{R} \right), \quad N_{22} = B \left(v \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{w}{R} \right), \quad M_{11} = -D \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}, \quad (2.2)$$

причому $\varphi_1 = \frac{\partial w}{\partial s}$.

На перерізах $s=const$ неперервними повинні бути значення M_{11} , w , N_{11} , φ_1 , Q_{1z} , v_1 , які і прийемо за основні розв'язуючі функції. Відповідним чином перетворимо систему (2.1)-(2.2) до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial s} &= Q_{1z}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} &= -\frac{M_{11}}{D}, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \varphi_1, & \frac{\partial Q_{1z}}{\partial s} &= (1-v^2)B \frac{w}{R^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + v \frac{N_{11}}{R}, \\ \frac{\partial N_{11}}{\partial s} &= \rho h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, & \frac{\partial v_1}{\partial s} &= -v \frac{w}{R} + \frac{N_{11}}{B}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тангенціальне зусилля

$$N_{22} = (1-v^2)B \frac{w}{R} + v N_{11}.$$

Якщо ввести “канонічні” змінні $\mathbf{q} = \text{col}(M_{11}, w, N_{11})$, $\mathbf{p} = \text{col}(\varphi_1, Q_{1z}, -v_1)$, то система (2.3) також набуде вигляду операторної гамільтонової системи

$$\frac{\partial q_i}{\partial s} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial s} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

де операторна функція Гамільтона

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{P}_{ij} q_i q_j + \frac{1}{2} \hat{Q}_{ij} p_i p_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Ненульові елементи матриць $\hat{\mathbf{P}}$ і $\hat{\mathbf{Q}}$ мають наступні значення

$$\begin{aligned} -\hat{P}_{11} &= -\frac{1}{D}, & -\hat{P}_{22} &= (1-v^2)BR^{-2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ -\hat{P}_{23} &= -\hat{P}_{32} = vR^{-1}, & -\hat{P}_{33} &= -B^{-1}, \\ \hat{Q}_{12} &= \hat{Q}_{21} = 1, & \hat{Q}_{33} &= -\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким чином, показано, що система (2.4) з врахуванням (2.5) і (2.6) співпадає з системою (2.3), тобто система (2.3) є операторною гамільтоновою системою по просторовій координаті s . При виконанні операцій диференціювання елементи \hat{P}_{ij} , \hat{Q}_{ij} матриць $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$ слід вважати “замороженими” (“сталими”) величинами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.

2. Шульга М.О. О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 3-7.
3. Шульга М.О. О гамильтоновом формализме в кирхгофовой теории изгиба пластин // Теорет. и прикл. механика. – 2010. – № 1 (47). – С. 7-10.
4. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
5. Шульга О.М. Построение решений уравнений колебаний классической теории пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теоретическая и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 109-113.
6. Шульга О.М. Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластины с периодическими по одной координате параметрами // Теоретическая и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – С. 105-111.
7. Шульга М.О., Троблюк О.М. Про змішану систему рівнянь типу Тимошенка коливань неоднорідних пластин // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – № 87. – С. 158-163.
8. Шульга О.М. Коливання неоднорідних стержнів періодичної структури. – Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – К.: Ін-т механіки, 2000. – 19 с.
9. Шульга М.О. Застосування гамильтонового формалізму в теорії типу Тимошенка коливань пластин. – Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – 54, №1. – С. 189-195.
10. Shul'ga N.A. Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 7. – P.763 – 796.
11. Shul'ga N.A. Theory of dynamic processes in mechanical systems and materials of regular structure // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, № 12. – P. 1301-1338.
12. Shul'ga N.A. On certain mixed system of equations of theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, № 3. – P. 271-275.
13. Shul'ga M.O. Application of the Hamilton formalism in a Timoshenko-type theory of vibrations of plates // Journal of Mathematical Sciences. – Vol. 183, № 2, May, 2012. – P. 222-230.

Стаття надійшла до редакції 14.07.2012 р.

Шульга М.О.

ПРИМЕНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНОВОГО ФОРМАЛИЗМА В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Уравнения осесимметричных колебаний цилиндрических оболочек в теории Кирхгофа-Лява и типа Тимошенко впервые в научной литературе представлены в операторной гамильтоновой форме по продольной координате.

Ключевые слова: смешанная система уравнений осесимметричных колебаний, теория Кирхгофа-Лява, теория типа Тимошенко, операторная гамильтонова форма.

Shul'ga M.O.

THE USE OF THE HAMILTONIAN FORMALISM IN THE THEORY OF VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS

The equations of axisymmetric vibrations of cylindrical shells in the theory of Kirchhoff-Love and Timoshenko-type for the first time in the scientific literature presented in the form of the Hamiltonian operator in the longitudinal coordinate.

Keywords: mixed system of equations of axisymmetric vibrations, theory of Kirchhoff-Love, theory of Timoshenko-type, operator Hamiltonian form.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О.О. Лук'яченко, канд. техн. наук
О.В. Костіна, канд. техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ

Представлений чисельний підхід дослідження динамічної поведінки та стійкості пологої оболонки при дії стохастичного параметричного навантаження. Задача стохастичної стійкості сформульована як задача стійкості тривіальних розв'язків диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку. Досліджена стійкість динамічних режимів стохастичних коливань оболонки. Визначені критичні значення стохастичного параметричного навантаження на оболонку.

Ефективними конструктивними елементами інженерних споруд в багатьох областях техніки і будівництва є тонкостінні оболонки. Порівнюючи різні форми оболонок можна відзначити певну тенденцію до проектування все більш пологих оболонок, пов'язану з бажанням зменшити конструктивний об'єм споруд. Але при цьому втрата стійкості пологих оболонок стає більш небезпечною. У випадках, коли оболонки перебувають під впливом динамічних навантажень, які змінюються в часі за випадковим законом, можуть збуджуватися стохастичні параметричні коливання [1-3]. Тому актуальною є реалізація точних методів розрахунку динаміки пологих оболонок, які дозволять отримати найбільш повну і достовірну інформацію про особливості їхньої динамічної поведінки та стохастичної стійкості при параметричному впливі. В роботі представлений чисельний підхід дослідження динамічної поведінки та стійкості пологої оболонки при дії дельта-корельованого стохастичного параметричного навантаження.

Редукована скінченноелементна модель стохастичних параметричних коливань дералюмінієвої квадратної пологої оболонки побудована авторами і представлена в роботі [4]. Оболонка має наступні вхідні дані: сторона $a = b = 0,480$ м, товщина $h = 0,004$ м, модуль пружності $E = 7,2 \times 10^7$ кПа, питома вага $\rho = 2700$ кг/м³, коефіцієнт Пуасона $\mu = 0,3$, прогин в середині і на контурі $f = 0,096$ м. Поверхня оболонки змодельована у вигляді сукупності трикутних плоских скінченних елементів зі шістьма ступенями вільності в вузлах. Вздовж контуру оболонки обмежені переміщення в просторі. На оболонку зі сторони її випуклості діє поверхневе розподілене стохастичне параметричне

навантаження $z(t) = z_0 + \tilde{z}(t)$, де z_0 – стала складова навантаження; $\tilde{z}(t)$ – дельта-корельована випадкова складова навантаження з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau} \left(\cos \theta_\alpha \tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau \right), \quad (1)$$

і скінченим часом кореляції

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \int K(\tau) d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}, \quad (2)$$

де σ_0^2 – інтенсивність стохастичного впливу; α – параметр кореляції, θ_α – частота схованої періодичності.

Математична модель оболонки має вигляд системи детерміністичних диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку у фазових змінних $\zeta_1(t) = y_i(t)$, $\zeta_2(t) = \dot{y}_i(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \zeta_1^2(t) \rangle &= 2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle &= \langle \zeta_2^2(t) \rangle - \omega_i^2 \langle \zeta_1^2(t) \rangle - 2\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_2^2(t) \rangle &= -4\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_2^2(t) \rangle - 2\omega_i^2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle + a_i^2 \omega_i^4 z_0 \langle \zeta_2^2(t) \rangle + a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 \langle \zeta_2^2(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

з початковими умовами $\zeta_1(0) = y_{i0}$, $\zeta_2(0) = \dot{y}_{i0}$. Тут $y_i(t)$, $\dot{y}_i(t)$ – узагальнені координати та узагальнені швидкості вузлів скінченноелементної моделі оболонки; ω_i – частота власних коливань, ε_i – коефіцієнт конструкційного демпфірування оболонки; a_i – коефіцієнти, які характеризують вплив сталої складової стохастичного навантаження на жорсткісні характеристики оболонки.

Таким чином, аналіз стійкості оболонки при стохастичному параметричному навантаженні зводиться до дослідження стійкості рівнянь від моментних функцій другого порядку (3) по кожній формі коливань.

Важливим є дослідження динаміки оболонки при зростанні статичної складової параметричного навантаження без урахування його випадкової складової ($\sigma_0 = 0$). Вплив статичної складової навантаження z_0 на частоти власних коливань оболонки виконано за допомогою методу Ланцоша, який реалізований в програмному комплексі NASTRAN []. Результати розрахунку наведені в табл. 1.

Таблиця 1

z_0 , $\kappaПа$	Частоти власних коливань оболонки V_i , $Гц$									
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
0,001	199,4	401,7	402,1	637,5	719,4	756,5	983,1	983,8	1126,2	1126,9
1	198,8	401,0	401,4	636,9	718,6	755,8	982,4	983,1	1125,5	1126,1
10	193,1	394,6	395,1	630,9	711,4	749,4	976,4	977,1	1118,7	1119,4
50	149,9	349,6	350,3	590,0	661,3	705,4	935,0	935,9	1072,9	1073,7
100	121,1	323,5	324,3	567,5	633,6	681,3	912,6	913,5	1048,2	1049,1
135	75,1	290,6	291,5	540,4	600,3	652,6	886,0	887,1	1019,3	1020,2
155	20,3	269,8	270,9	524,2	580,3	635,5	870,3	871,4	1002,3	1003,3
156	0	249,6	250,6	504,0	560,1	615,2	850,1	851,2	982,1	983,1

При невеликих статичних навантаженнях спостерігається збільшення власної частоти оболонки по кожній формі коливань, тобто оболонка стає більш жорсткою. При подальшому збільшенні статичного впливу власні частоти навантаженої оболонки зменшуються. При $z_0 = 156 \kappaПа$ перша частота власних коливань дорівнює нулю, що відповідає втраті стійкості оболонки.

Отримані результати представлені у вигляді кривих, що відповідають першим десяти частотам власних коливань навантаженої (суцільна лінія) і ненавантаженої (штрихова лінія) оболонки (рис. 1).

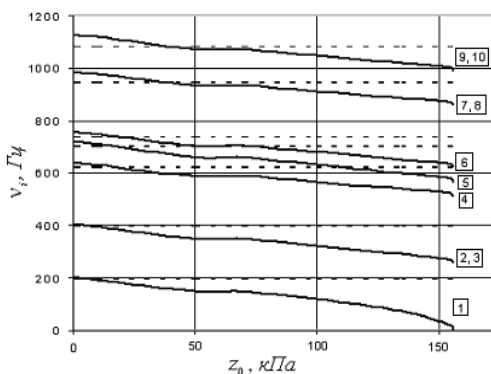


Рис. 1. Частоти власних коливань навантаженої оболонки

За допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Куты четвертого порядку досліджена динамічна поведінка оболонки при дії

статичної складової навантаження. На рис. 2 представлені залежності від часу моментної функції другого порядку $\zeta_1^2(t)$ по першій формі коливань та її фазові траєкторії при $z_0 = 50 \text{ кПа}$. Коливальний режим оболонки без урахування конструкційного демпфірування (рис. 2, а) відповідає гармонічним коливанням зі сталою амплітудою і частотою $\nu_1 = 149,936 \text{ Гц}$. Затухаючі коливання спостерігаються при врахуванні коефіцієнта конструкційного демпфірування $\varepsilon_1 = 0,0276$ (рис. 2, б). В обох випадках режим коливань оболонки є стійким.

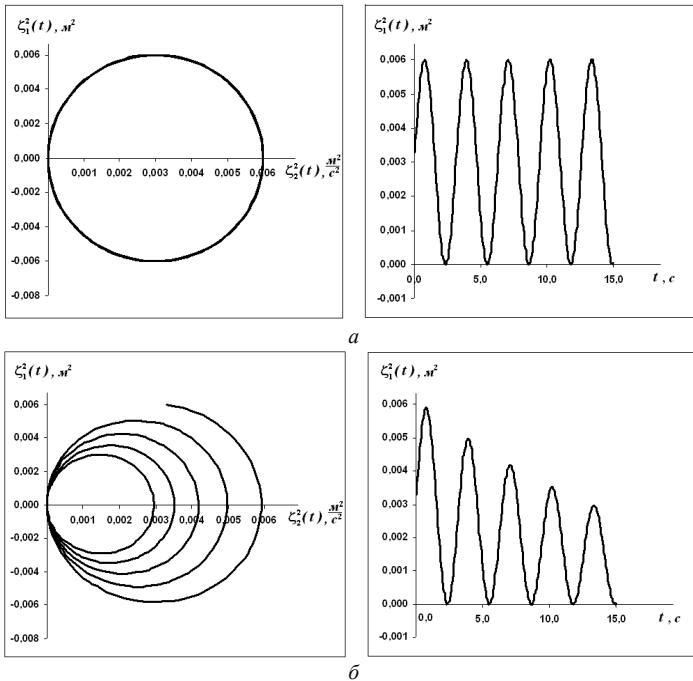


Рис. 2. Динамічна поведінка оболонки при дії статичної складової параметричного навантаження: а) без урахування конструкційного демпфірування; б) з урахування конструкційного демпфірування

Досліджено вплив стохастичної складової параметричного навантаження на динамічну поведінку оболонки без урахування статичної складової навантаження. За допомогою прямого методу Рунге-Куты чисельно виконано інтегрування системи диференціальних рівнянь (3). На рис. 3 представлені фазові траєкторії та динамічна поведінка розв'язку

$\zeta_1^2(t)$ системи (3) при стійкому (рис. 3, а, в) та нестійкому (рис. 3, б) режимах коливань оболонки по першій формі коливань.

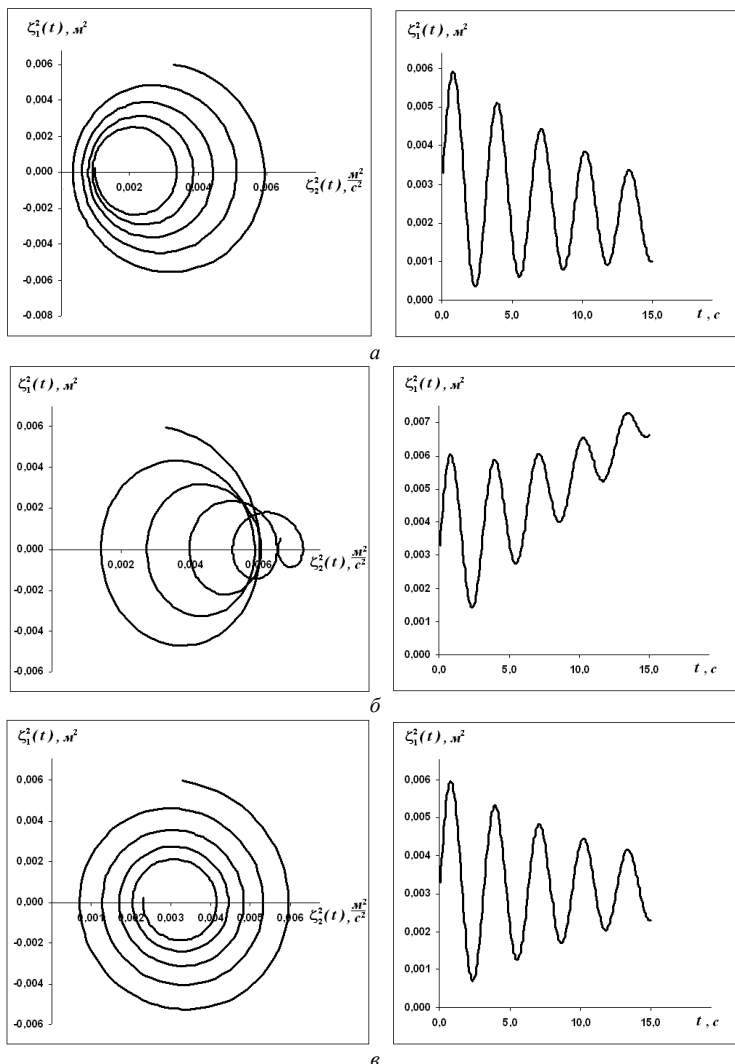


Рис. 3. Динамічні режими коливань оболонки при стохастичному параметричному впливі: а) стійкий; б) нестійкий; в) стійкий режим на границі області стійкості

При стійкому режимі стохастичних параметричних коливань значення розв'язку $\zeta_1^2(t)$ системи (3) з часом зменшується, при нестійкому – збільшується. Якщо переписати систему детерміністичних диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку (3) у вигляді лінійної автономної системи

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix} = G(t) \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

де $G(t)$ – матриця, коефіцієнти якої є $\frac{2\pi}{\omega}$ – періодичні функції

$$G(t) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\omega_i^2 & -2\varepsilon_i \omega_i & 1 \\ a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 & -2\omega_i^2 & -4\varepsilon_i \omega_i \end{vmatrix}, \quad (5)$$

то аналіз стійкості оболонки зводиться до задачі про стійкість тривіальних розв'язків системи (4). За допомогою методу узагальнених показників Хілла при розв'язанні алгебраїчної задачі на власні значення визначені характеристичні показники та побудовані границі області нестійкості системи (4). У випадку, коли у всіх характеристичних показників дійсна частина менша від нуля, компоненти будь-якого розв'язку системи зменшуються по модулю, що відповідає стійкому тривіальному розв'язку. Якщо серед характеристичних показників з'являється хоча б один з додатною дійсною частиною, тривіальний розв'язок системи (4) є нестійким. Значення параметрів системи (4), при яких максимальна дійсна частина характеристичних показників дорівнює нулю, відповідають границі області нестійкості.

На рис. 4 представлена поведінка характеристичних показників системи (4) від впливу стохастичного параметричного навантаження на оболонку при частоті схованої періодичності $\theta_\alpha = \omega_1$, параметрі кореляції $\alpha = \varepsilon_i \omega_1 = 0,0276\omega_1$ та радіусі кореляції

$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} = 0,0552 / \omega_1$. Дійсні частини характеристичних показників

показані суцільною лінією, комплексні – штриховою.

Додатні дійсні частини характеристичних показників, які відповідають нестійкому режиму коливань, лежать у верхній півплощині. Точки перетину суцільної кривої осі координат відповідають критичним значенням стохастичної складової параметричних коливань.

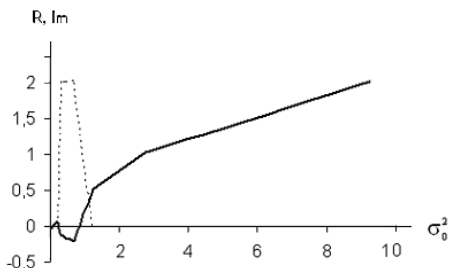


Рис. 4. Залежність характеристичного показника від дисперсії стохастичного впливу

Визначені і представлені на рис. 5 критичні значення дисперсії стохастичної складової навантаження σ_0^2 по п'яти формах власних коливань оболонки при зміні коефіцієнта $\beta = \theta_\alpha / \omega_i$. Критичні стохастичні навантаження, які відповідають першій формі коливань, мають значення більші за значення, що отримані для інших форм. Зі збільшенням частоти схованої періодичності θ_α критичні навантаження зростають.

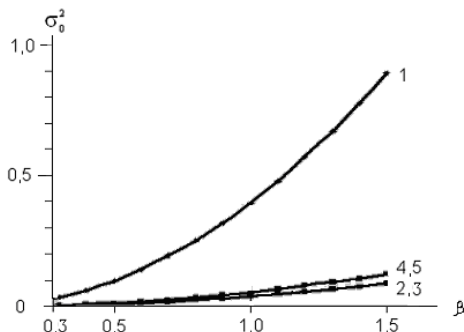


Рис. 5. Критичні значення стохастичних параметричних навантажень

Для визначення критичного стохастичного навантаження з урахуванням всіх форм коливань необхідно виконати операцію сумування значень по окремих формах, що отримані для конкретної частоти схованої періодичності. Значення інтенсивності стохастичного навантаження, що лежать вище за отриману криву, належать до областей нестійкості оболонки.

Висновок. Представлений чисельний підхід дозволяє за основи отриманої авторами в роботі [1] математичної моделі дослідити динамічну поведінку пологої оболонки при дії дельта-корельованого

стохастичного параметричного навантаження; за допомогою дослідження стійкості тривіальних розв'язків диференціальних рівнянь відносно моментних функцій другого порядку проаналізувати стохастичну стійкість оболонки; визначити критичні значення стохастичного параметричного навантаження при різних частотах схованої періодичності; за допомогою прямого методу чисельного інтегрування надати якісну характеристику режимів стохастичних коливань оболонки; оцінити вплив статичної складової параметричних навантажень на власні частоти коливань оболонки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979. - 335 с.
2. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения в случайно однородных средах. - М.: Наука, 1980. - 336 с.
3. *Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В.* Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С.51 – 59.
4. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.* Чисельна побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пологих оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. - К.: КНУБА, 2011. – Вип.87. – С.73 – 87.
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Стаття надійшла до редакції 14.07.2012 р.

В.А. Баженов, О.А. Лук'янченко, Е.В. Костіна

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Представлен численный подход исследования динамического поведения и устойчивости пологой оболочки при действии стохастической параметрической нагрузки. Задача стохастической устойчивости сформулирована как задача устойчивости тривиальных решений дифференциальных уравнений относительно моментных функций второго порядка. Исследована устойчивость динамических режимов стохастических колебаний оболочки. Определены критические значения стохастической параметрической нагрузки на оболочку.

Bazhenov V.A., Dehtyaryuk E.S., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V.

INVESTIGATION OF STABILITY OF STOCHASTIC PARAMETRIC VIBRATIONS OF SHALLOW SHELLS

A numerical approach to investigate of dynamic behavior and stability of shallow shells under stochastic parametric load was presented. A problem of stochastic stability was formulated as a problem of trivial solutions stability of differential equations in reference to second order momentum functions. The stochastic stability of dynamic states of the shell was investigated. The critical value of stochastic parametric load was determined.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук**О.С. Погорелова**, канд. фіз.-мат. наук**Т.Г. Постнікова**, канд. техн. наук

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ

В статті викладені теоретичні основи та особливості застосування модифікованого методу продовження розв'язку за параметром для дослідження динаміки віброударних систем, зокрема для побудови амплітудно-частотних характеристик, та аналізу стійкості їхнього коливального руху при моделюванні удару силою контактної взаємодії.

Вступ

В НДІ будівельної механіки КНУБА (раніше ПНДЛ тонкостінних просторових конструкцій) рядом авторів був запропонований та розвинутий чисельний метод побудови періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь [1-4]. В його основу покладена методика продовження розв'язку за деяким параметром. Модифікація та розвиток цього методу для двомасових віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії викладені в роботах [5-7]. В цих роботах продовження розв'язку виконувалось за параметром інтенсивності зовнішнього навантаження, що давало можливість побудувати криві навантаження. В даній статті описується застосування цього методу, якщо продовження розв'язку будується за параметром частоти зовнішнього навантаження, що забезпечує побудову амплітудно-частотних характеристик.

Відмітимо, що в попередніх роботах [8-10] були викладені теоретичні положення та чисельна реалізація побудов амплітудно-частотних характеристик для одномасового ударного осцилятора та двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності, якщо удар моделювався граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення на базі стереомеханічної теорії удару. Але, як було доведено в [11] та сформульовано в [12], автори вважають доцільним використовувати для моделювання удару більш реалістичну модель ударного процесу [12], а саме введення силових характеристик контактної взаємодії. Такий підхід до моделювання удару обумовлює доцільність та бажаність побудови амплітудно-частотних характеристик віброударних систем та проведення аналізу стійкості їхнього коливального руху, якщо удар моделюється силою контактної взаємодії.

1. Постановка задачі

Постановка задачі та методика побудови аналогічні відповідним побудовам статті [5], де для цієї самої двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності (рис. 1) описана модифікація методу продовження розв'язку за параметром інтенсивності зовнішнього навантаження.

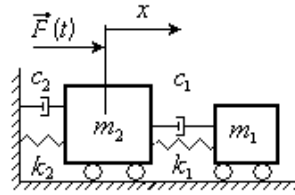


Рис. 1

Нелінійні диференціальні рівняння її руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{\text{кон}}(t), \\ \ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2x_2 - 2\xi_1\omega_1\mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{\text{кон}}(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{де } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \quad \xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}, \quad \xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}; \quad \chi = \frac{m_2}{m_1}.$$

Сила контактної взаємодії $F_{\text{кон}}(t)$, яка моделює удар, діє лише під час удару і відсутня в інші моменти часу. Контактна сила описується законом Герца [14,15]:

$$F_{\text{кон}}(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (2)$$

де $\alpha(t) = x_2 - x_1$ – відносне зближення тіл,

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0\pi}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad (3)$$

μ_i і E_i – коефіцієнти Пуассона та модулі Юнга для обох тіл, A , B і q – константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту. Відмітимо, що моделювання удару контактною силою, що описується законом Герца, можливе лише у випадку, якщо поверхні контакту є “Герцевими” поверхнями, тобто відповідають відомій таблиці [14,15]. Ми вважаємо, що поверхні контакту основного (з масою m_2) та приєднаного (з масою m_1) тіл нашої моделі є, наприклад, сферами великих радіусів, чи сферою та площиною і таким чином відповідають таблиці “Герцевих” поверхонь. При чисельному розв'язку задачі необхідно визначити величини констант A , B і q згідно з цією таблицею, які і є характеристиками місцевої геометрії зони контакту.

Гармонічне зовнішнє навантаження записується у вигляді:

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4)$$

Продовження розв'язку будується за параметром частоти зовнішнього навантаження ω , якій є ведучим параметром. Модифікація методу розробляється для дослідження T -періодичних усталених режимів коливань, де T – період зовнішнього навантаження.

Якщо частота зовнішнього навантаження ω змінюється, то природно змінюється і його період $T = 2\pi/\omega$.

2. Теоретичні основи побудови амплітудно-частотних характеристик

Як вже зазначалось вище, ця стаття є продовженням та подальшим розвитком статті [5]. Але продовження розв'язку за параметром частоти зовнішнього навантаження має деякі особливості, а саме.

При деякому фіксованому значенні частоти зовнішнього навантаження $\omega_{(k)}$ (і певному значенні інтенсивності навантаження λ) знайдемо прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху (1) їхній розв'язок. Як і раніше (при побудові кривих навантаження) обминаємо перехідний процес та обираємо в усталеному режимі коливань стан при деякому $t=t_0$, який буде вихідним для подальших побудов

$$x_{i(k)}(t_0), \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i=1,2. \quad (5)$$

На наступному кроці надамо ведучому параметрові приріст

$$\omega_{(k+1)} = \omega_{(k)} + \Delta\omega_{(k)}. \quad (6)$$

Далі для кожного нового значення частоти зовнішнього навантаження будемо шукати розв'язки рівнянь руху тільки на одному періоді. Цей розв'язок, як і будь який розв'язок диференціальних рівнянь, залежить від вихідних умов, тобто вихідних значень переміщень та швидкостей (5). Але при зміні частоти зовнішнього навантаження вихідні значення переміщень та швидкостей при $t=t_0$ також отримають прирости

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)}(t_0) &= x_{i(k)}(t_0) + \Delta x_{i(k)}(t_0), \\ \dot{x}_{i(k+1)}(t_0) &= \dot{x}_{i(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (7)$$

Щоб розв'язати рівняння руху (1) при новому значенні ведучого параметра $\omega_{(k+1)}$ необхідно знайти нові значення вихідних умов, а для цього потрібно знайти їхні прирости (7). Для цього скористуємось головним рівнянням періодичного процесу, тобто умовами періодичності, які виконуються на кожному кроці для T -періодичних усталених режимів коливань. При цьому пам'ятаємо, що при зміні частоти зовнішнього навантаження його період також змінюється. Умови періодичності на $(k+1)$ -му кроці мають вигляд:

$$x_{i(k+1)}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k+1)}}), x_{1(k+1)}(t_0), x_{2(k+1)}(t_0), \dot{x}_{1(k+1)}(t_0), \dot{x}_{2(k+1)}(t_0), \omega_{(k+1)}) = x_{i(k+1)}(t_0),$$

$$\dot{x}_{i(k+1)}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k+1)}}), x_{1(k+1)}(t_0), x_{2(k+1)}(t_0), \dot{x}_{1(k+1)}(t_0), \dot{x}_{2(k+1)}(t_0), \omega_{(k+1)}) = \dot{x}_{i(k+1)}(t_0), \quad (8)$$

$$i = 1, 2.$$

Ці рівняння з врахуванням співвідношень (6) та (7) визначають систему чотирьох нелінійних рівнянь відносно чотирьох невідомих приростів

$$\Delta x_{1(k)}(t_0), \Delta x_{2(k)}(t_0), \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \quad (9)$$

які відповідають приросту $\Delta\omega_{(k)}$ ведучого параметра.

Задля лінеаризації цієї системи розкладемо ліві частини рівнянь в ряд Тейлора відносно приростів (9) і відкидаючи члени вище першого порядку отримуємо лінійну алгебраїчну систему чотирьох рівнянь (10) з чотирма невідомими (9):

$$\begin{aligned} c_{11}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{12}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{13}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{14}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_1 \\ c_{21}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{22}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{23}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{24}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_2 \\ c_{31}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{32}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{33}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{34}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_3 \\ c_{41}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{42}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{43}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{44}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_4 \end{aligned} \quad (10)$$

Всі коефіцієнти цієї системи $c_{ij}, i, j = 1, 2, 3, 4$ такі саме, як і коефіцієнти системи, що отримані та докладно описані в [5] при побудові кривих навантаження. Але праві частини цих рівнянь відрізняються, а саме:

$$\begin{aligned} b_i = & - \left[\frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \omega_{(k)}}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k)}}), x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \omega_{(k)}) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial t}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k)}}), x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \omega_{(k)}) - \frac{2\pi}{\omega_{(k)}^2} \right] \Delta \omega_{(k)} - \dot{t}_{i(k)}, \quad i=1, 2, \quad (11) \\ b_i = & - \left[\frac{\partial \dot{x}_{i(k)}}{\partial \omega_{(k)}}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k)}}), x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \omega_{(k)}) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \dot{x}_{i(k)}}{\partial t}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k)}}), x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \omega_{(k)}) - \frac{2\pi}{\omega_{(k)}^2} \right] \Delta \omega_{(k)} - \dot{t}_{i(k)}, \quad i=3, 4. \end{aligned}$$

Додаткові члени в цих співвідношеннях обумовлені зміною періоду коливань за рахунок зміни частоти зовнішнього навантаження ω . Тут, як і раніше, запроваджені нев'язки k -го кроку методу продовження за параметром:

$$\begin{aligned} r_{i(k)} &= x_{i(k)}(t_0 + 2\pi/\omega_{(k)}) - x_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2, \quad (12) \\ \dot{r}_{i(k)} &= \dot{x}_{i(k)}(t_0 + 2\pi/\omega_{(k)}) - \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Дали порядок побудови амплітудно-частотних характеристик збігається з порядком побудови кривих навантаження: коефіцієнти c_{ij} та праві частини b_i алгебраїчної системи (10) обчислюються шляхом розв'язку відповідних задач Коші; розв'язки системи (10) визначають природи вихідних значень переміщень та швидкостей (9) тіл віброударної системи для нового значення частоти зовнішнього навантаження (6). Значення вихідних переміщень та швидкостей при $t = t_0$ обумовлюють розв'язок вихідних рівнянь (1) для нового значення частоти зовнішнього навантаження. Таким чином крок за кроком, збільшуючи (чи зменшуючи) на кожному кроці частоту зовнішнього навантаження на обрану величину $\Delta\omega_{(k)}$ будемо амплітудно-частотну характеристику віброударної системи при фіксованому значенні інтенсивності зовнішнього навантаження.

Як вже згадувалось, в [5,6] була побудована крива навантаження, тобто залежність напіввзмахів коливань тіл віброударної системи від амплітуди зовнішнього навантаження. В цієї статті описаний порядок побудови амплітудно-частотної характеристики, тобто залежності напіввзмахів коливань тіл віброударної системи від частоти зовнішнього навантаження. Очевидно, що вибравши ведучим параметром яку-небудь іншу характеристику віброударної системи, можна отримати таким самим шляхом із застосуванням модифікованого методу продовження розв'язку за цим параметром залежність від нього напіввзмахів (і швидкостей) тіл віброударної системи.

3. Теоретичні основи аналізу стійкості коливального руху

В дійсності віброударна система, яка є суттєво нелінійною, при зміні параметрів, як самої системи, так і зовнішнього навантаження, може змінювати режими свого коливального руху (див., наприклад, [16]). Тоді одноударний T -періодичний режим, який може бути отриманий тій модифікацією числового методу продовження за параметром, що розглядається, не реалізується в дійсності і тому втрачає стійкість. Отже, побудови як кривих навантаження, так і амплітудно-частотних характеристик мають бути доповнені аналізом стійкості отриманих режимів коливань.

Визначення стійкості одноударного періодичного режиму коливань може бути сформульоване таким чином.

Нехай при заданих значеннях параметра інтенсивності λ та частоти ω в системі (1), що описує коливальний рух системи, існує $T = 2\pi/\omega$ періодичний розв'язок, обумовлений вихідними умовами

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0). \quad (13)$$

При заданому зовнішньому впливі стійкість періодичного коливального режиму характеризується здатністю відновлюватися після збудження цього режиму. А саме, нехай у момент $t = t_0$ має місце деяке збудження параметрів (13), що характеризують цей режим:

$$\begin{aligned}\widehat{x}_i(t_0) &= x_i(t_0) + \delta x_i(t_0), \\ \widehat{\dot{x}}_i(t_0) &= \dot{x}_i(t_0) + \delta \dot{x}_i(t_0), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (14)$$

Збудження в наступному циклі будуть іншими:

$$\begin{aligned}\widehat{x}_i^p(t_0) &= x_i(t_0) + \delta^p x_i(t_0), \\ \widehat{\dot{x}}_i^p(t_0) &= \dot{x}_i(t_0) + \delta^p \dot{x}_i(t_0), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (15)$$

Вектор збуджень на черговому циклі усталеного віброударного режиму $\delta^p x$ ($\delta^p x_1(t_0)$, $\delta^p x_2(t_0)$, $\delta^p \dot{x}_1(t_0)$, $\delta^p \dot{x}_2(t_0)$)^T необхідно зв'язати з вектором збуджень на попередньому циклі $\overline{\delta x}$ ($\delta x_1(t_0)$, $\delta x_2(t_0)$, $\delta \dot{x}_1(t_0)$, $\delta \dot{x}_2(t_0)$)^T (тут ^T індекс транспонування). Якщо норма $\|\overline{\delta^p x}\|$ менше норми $\|\overline{\delta x}\|$, то збудження згодом будуть меншати і коливальний режим буде стійким. У протилежному випадку збудження будуть наростати, що відповідає нестійкому коливальному режимові.

Знайдемо зв'язок між цими векторами.

Умови періодичності для незбуджених значень параметрів мають вигляд:

$$\begin{aligned}x_i(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) &= x_i(t_0), \\ \dot{x}_i(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) &= \dot{x}_i(t_0), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (16)$$

Запишемо явно залежність збуджених значень переміщень та швидкостей через період від збуджених значень вихідних параметрів:

$$\begin{aligned}\widehat{x}_i(t_0 + T) &= x_i(t_0 + T, \widehat{x}_1(t_0), \widehat{x}_2(t_0), \widehat{\dot{x}}_1(t_0), \widehat{\dot{x}}_2(t_0)), \\ \widehat{\dot{x}}_i(t_0 + T) &= \dot{x}_i(t_0 + T, \widehat{x}_1(t_0), \widehat{x}_2(t_0), \widehat{\dot{x}}_1(t_0), \widehat{\dot{x}}_2(t_0)), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (17)$$

З врахуванням (14) вирази (17) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}\widehat{x}_i(t_0 + T) &= x_i(t_0 + T, x_1(t_0) + \delta x_1(t_0), x_2(t_0) + \delta x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0) + \delta \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0) + \delta \dot{x}_2(t_0)), \\ \widehat{\dot{x}}_i(t_0 + T) &= \dot{x}_i(t_0 + T, x_1(t_0) + \delta x_1(t_0), x_2(t_0) + \delta x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0) + \delta \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0) + \delta \dot{x}_2(t_0)), \quad (18) \\ & \quad i=1, 2.\end{aligned}$$

Розкладемо ці вирази в ряд Тейлора відносно вихідних збуджень $\delta x_1(t_0)$, $\delta x_2(t_0)$, $\delta \dot{x}_1(t_0)$, $\delta \dot{x}_2(t_0)$ та відкинемо члени вище першого порядку малості:

$$\widehat{x}_i(t_0 + T) = x_i(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial x_i}{\partial x_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial x_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_2(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_2(t_0), \\
& \widehat{x}_i(t_0 + T) = \dot{x}_i(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_2(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_2(t_0), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{19}$$

На підставі (15) та (16) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\delta^p x_i(t_0) &= \frac{\partial x_i}{\partial x_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial x_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_2(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_2(t_0), \\
\delta^p \dot{x}_i(t_0) &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_2(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_2(t_0), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Таким чином, вектор

$$\overline{\delta^p x} (\delta^p x_1(t_0), \delta^p x_2(t_0), \delta^p \dot{x}_1(t_0), \delta^p \dot{x}_2(t_0))^T$$

зв'язаний з вектором

$$\overline{\delta x} (\delta x_1(t_0), \delta x_2(t_0), \delta \dot{x}_1(t_0), \delta \dot{x}_2(t_0))^T$$

співвідношенням:

$$\overline{\delta^p x} = C \overline{\delta x}, \quad (21)$$

де матриця C збігається з матрицею системи (10).

У такий спосіб проблема стійкості віброударного режиму коливальних зводиться до аналізу власних чисел матриці C . Матриця C є не що інше, як матриця монодромії системи (10), а її власні числа є мультиплікатори цієї системи. Відомо [1], що про стійкість коливального режиму роблять висновок за значеннями мультиплікаторів системи, які для стійкого режиму коливальних знаходяться всередині одиничного кола. Таким чином, коливальний режим стійкий, якщо усі мультиплікатори системи лежать в одиничному колі.

Відмітимо, що побудова матриці монодромії значно простіша, якщо удар моделюється силою контактної взаємодії, як було зроблено вище, ніж граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення R . В

цьому випадку вектори $\overline{\delta^p x}$ та $\overline{\delta x}$ мають 5 компонент:

$$\overline{\delta^p x} (\delta^p x_1(t_0), \delta^p x_2(t_0), \delta^p \dot{x}_1(t_0), \delta^p \dot{x}_2(t_0), \delta^p \varphi)^T, \quad (22)$$

$$\overline{\delta x} (\delta x_1(t_0), \delta x_2(t_0), \delta \dot{x}_1(t_0), \delta \dot{x}_2(t_0), \delta \varphi)^T. \quad (23)$$

Відповідно матриця A , яка зв'язує вектори $\overline{\delta^p x}$ та $\overline{\delta x}$, аналогічно (21)

$$\overline{\delta^p x} = A \overline{\delta x}, \quad (24)$$

має розмірність 5×5 , а її елементи $a_{ij}, i, j = 1, \dots, 5$ мають значно складніший вигляд.

4. Амплітудно-частотні характеристики та визначення ділянок нестійкості

Для тіл віброударної системи, що зображена на рис. 1, за допомогою теорії та методики, які описані вище, були побудовані амплітудно-частотні характеристики та визначені зони нестійкості T -періодичного режиму (рис. 2).

Верхня крива відноситься до приєднаного (з масою m_1) тіла, нижня – до основного (з масою m_2). На обох кривих виділені зони нестійкого стану. В цих діапазонах частот T -періодичний режим стає нестійким і в дійсності не реалізується.

Параметри двомасової віброударної системи наведені в статті “Застосування методу продовження розв’язку за параметром до аналізу динамічної поведінки віброударної системи” в №90 цього збірника. В ній виконаний докладний аналіз коливального руху тіл віброударної системи в усіх діапазонах параметрів зовнішнього навантаження та представлені реальні динамічні стани, які існують в діапазонах як нестійкого, так і стійкого T -періодичного режиму коливаль.

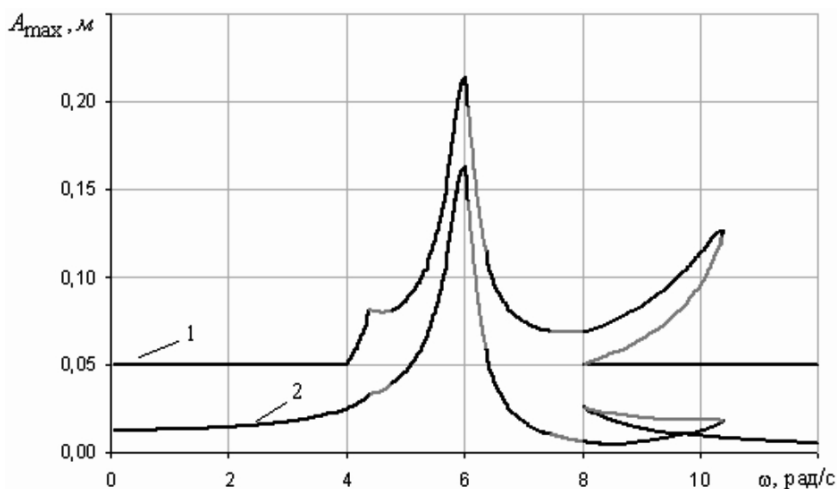


Рис. 2

Поки що відмітимо два цікавих моменти. Перший – при малих частотах напіврозмахи коливаль приєднаного тіла майже не залежать від зовнішньої частоти. Другий – в деякому діапазоні великих частот одночасно існують два стійких T -періодичних режимів, кожний з них може існувати в дійсності. Реалізація того чи іншого режиму залежить від вихідних умов, тобто від стану, в якому знаходиться віброударна система в початковий момент.

Висновок

Запропонований синтез модифікованої процедури продовження розв’язку за параметром та моделювання удару нелінійною силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца, дозволяє побудувати амплітудно-частотні характеристики віброударної системи в усім діапазоні частот та виконати аналіз стійкості отриманих режимів коливаль на базі теорії Флоке. Модифікований метод продовження розв’язку за параметром є надійним способом проведення повного дослідження режимів коливального руху віброударної системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П. Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах // Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
2. Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С. Построение периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений // Сопротивление материалов и теория сооружений: Науч.-техн. сборник - К.:Будівельник. 1978.-Вып.32.-С.106-110.
3. Дехтярюк Е.С., Лизунов П.П., Попов С.Л. Реализация численного метода построения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений // Сопротивление материалов и теория сооружений: Науч.-техн. сборник - К.:Будівельник. 1979.-Вып.35.-С.15-20.
4. Попов С.Л. Построение и анализ амплитудно-частотных характеристик нелинейных автономных динамических систем// Сопротивление материалов и теория сооружений: Науч.-техн. сборник - К.:Будівельник. 1980.-Вып.37.-С.23-26.
5. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Развитие метода продолжения за параметром для виброударных систем при моделировании удара силою контактної взаємодії// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.:КНУБА. 2011.-Вип. 87. — К.: КНУБА, 2011.- С. 63-73.
6. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Реализация метода продолжения за параметром для виброударных систем при побудові кривих навантаження// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.:КНУБА. 2011. Вип. 88. — К.: КНУБА, 2011.- С. 56-64.
7. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.М. Стійкість сталих режимів коливаний виброударных систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10-18.
8. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Модификация метода продолжения решения по параметру для анализа динамики виброударных систем //Пробл. Прочности. - 2012. (Принята до друку).
9. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.М. Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливаний виброударных систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА, вип. 70. 2002. - С. 69-81.
10. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.М. Аналіз усталених виброударных процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.
11. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А. Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силою контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
12. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н. Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – С. 69-77.
13. S R. Bishop Impact oscillators // Philos. Trans. R. Sot. London A 347, 341-351 (1994).
14. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.
15. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.
16. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Влияние конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику //Пробл. прочности. - 2011. - №1. – С. 122-133.

Стаття надійшла до редакції 02.07.2012 р.

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ**

В статье изложены теоретические основы и особенности применения модифицированного метода продолжения решения по параметру для исследования динамики виброударных систем, в частности для построения амплитудно-частотных характеристик, и анализа устойчивости их колебательного движения при моделировании удара силой контактного взаимодействия.

Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.

**THEORETICAL PRINCIPLES OF DYNAMIC BEHAVIOR ANALYSIS FOR
VIBROIMPACT SYSTEMS**

The theoretical principles and features of using of continuation after parameter method are described in this article. This method is used for research of vibroimpact systems dynamics, in particular for the construction of Frequency response. This method is used also for stability analysis of oscillatory motion. The impact is simulated by the nonlinear contact interaction force.

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук

О.В. Глушакова

САМОЗБУДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СКЛАДЕНИХ БУРИЛЬНИХ КОЛОН

Розглянута проблема самозбудження крутильних коливань бурильних колон, складених із ланок з різними жорсткостями крутіння. Проведені дослідження основних закономірностей самозбудження і протікання цих коливань. Виведені рівняння дифракції хвиль крутіння в точках стику ланок колони з різними жорсткостями. Встановлено, що форми автоколивань реалізуються по сценаріям релаксаційних автоколивань.

1. Вступ. Автоколивальною являється будь-яка неконсервативна система, в якій в результаті розвитку нестійкостей можливо встановлення незатухаючих хвильових або коливальних рухів, параметри яких визначаються самою системою і не залежать від скінченної зміни початкових умов. Задача про дослідження періодичних автоколивань в системі зводиться до задачі знаходження граничних циклів в фазовому просторі і визначення їх параметрів.

Основною причиною самозбудження торсіонних коливань бурильної колони є біфуркаційне порушення балансу між пружним крутним моментом бурильної колони і нелінійним моментом фрикційної взаємодії долота зі стінкою свердловини [2,3,6-8].

Автоколивання в механічних системах, обумовлені тертям, докладно проаналізовані в ґрунтовних і оригінальних роботах А.А. Андронова, С.В. Білокобильського, Н.В. Бутенина, Г.С. Горелика, Дж.П. Ден-Гартога, Ю.С. Колесова, В.О. Кононенка, І.В. Крагельский, Л.Г. Лобаса, С.Ф. Міщенко, А.А. Харкевича та в інших [1,4,5,9,10].

Мета даного дослідження полягає у встановленні найбільш загальних закономірностей настання автоколивань долота і у визначенні факторів, які найбільше впливають на генерування цих коливань.

2. Постановка задачі. Розглянемо складену бурильну колону (Рис. 1). В ній хвилі крутіння зазнають додаткових актів заломлення – відображення в точці з'єднання сегментів бурильної колони (БК) різної жорсткості. Тоді виникають акти вторинного, третинного і т.д. відображень – заломлень вже відображених і заломлених хвиль і в точці розриву крутильної жорсткості БК і на її верхньому кінці (в інтерфейсних

точках). В цьому випадку необхідно безпосередньо відслідковувати рух хвиль $f(z,t)$ і $g(z,t)$.

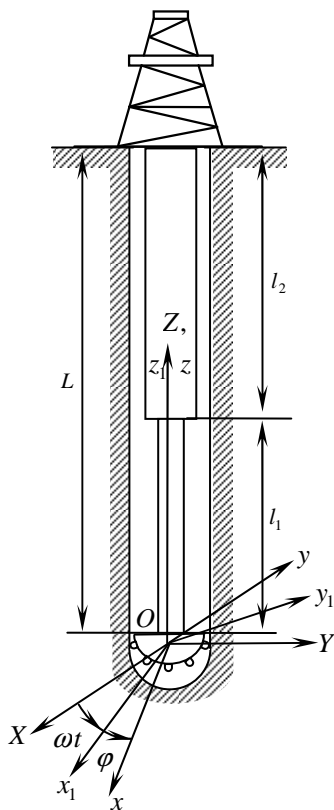


Рис. 1.Схема складеної бурильної колони

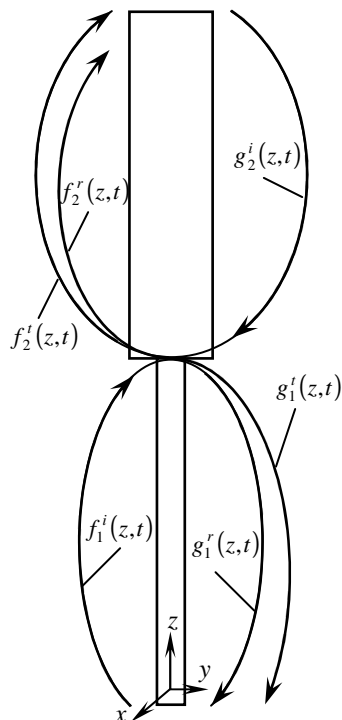


Рис. 2.Схема розповсюдження хвиль крутіння в неоднорідній складеній бурильній колоні

Для цього звернемося до схеми розповсюдження хвиль $f(z,t)$ і $g(z,t)$ в двосекційній бурильній колоні (рис. 2). Будемо вважати, що нижня ділянка є першою, верхня ділянка - другою. Тоді хвиля $f(z,t)$, яка підіймається вгору, буде зароджуватись при $z=0$. Ця хвиля буде розповсюджуватись не змінюючи свого профілю вгору до інтерфейсної точки, і тому, досягнувши її, вона буде грати роль падаючої хвилі. Позначимо її $f_1^i(z,t)$. При дифракції цієї хвилі в точці розділення $z=l_1$

першої і другої ділянок вона буде трансформуватись у відображену і заломлену хвилю. Позначимо їх $g_1^r(z, t)$ і $f_2^t(z, t)$ (рис. 2). Відображена $g_1^r(z, t)$ – хвиля буде спускатись вниз зі швидкістю β , в той час як заломлена $f_2^t(z, t)$ – хвиля буде розповсюджуватись вгору з тією ж швидкістю.

В верхній точці $z = L$ БК формується $g_2^i(z, t)$ – хвиля, що розповсюджується вниз зі швидкістю β вздовж другої ділянки і яка грає роль падаючої хвилі для інтерфейсної точки.

При досягненні цієї точки $g_2^i(z, t)$ – хвиля розпадається на заломлену $g_1^t(z, t)$ і відображену $f_2^r(z, t)$ хвилі. При цьому $g_1^t(z, t)$ накладається на $g_1^r(z, t)$ і вони разом впливають на долото, а $f_2^r(z, t)$ накладається на $f_2^t(z, t)$, і вони, піднімаючись вгору, беруть участь потім у відображенні від верхньої точки, перетворюючись в $g_2^i(z, t)$ – хвилю. Описана схема розповсюдження заломлених і відображених $f(z, t)$ - і $g(z, t)$ -хвиль використовується при постановці задачі про самозбудження крутильних коливань бурильної колони і долота.

Пружні крутильні рухи БК описуються хвильовим рівнянням [5]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

де β – швидкість поширення поперечної пружної хвилі.

Воно має розв'язок у вигляді функцій, які залежать від двох фазових змінних $z - \beta t$, $z + \beta t$. Представимо його в формі Д'Аламбера

$$\Phi(z, t) = f(z - \beta t) + g(z + \beta t), \quad (2)$$

де $f(z - \beta t)$, $g(z + \beta t)$ - довільні неперервні, не обов'язково диференційовані функції. Перша з них визначає хвилю, яка розповсюджується зі швидкістю β в додатному напрямку осі Oz , друга - в протилежному напрямку. Завдяки тому, що ці хвилі є недиспергуючими, вони переміщуються, не змінюючи свій профіль, що суттєво спрощує розв'язання задачі.

Гранична умова на нижньому кінці колони формується за допомогою рівняння балансу моментів сил інерції M^{in} , сил тертя $M^{тер}$ і сил пружності M^{np}

$$M^{in} + M^{тер} + M^{np} = 0, \quad (3)$$

що впливає з принципу Даламбера, записаного для долота, умовно відокремленого від труби БК.

Тут M^{in} - момент сил інерції долота, що записується у вихідному вигляді

$$M^{in} = -J \cdot \ddot{\phi} = -J \frac{\partial^2}{\partial t^2} [f(-\beta t) + g(\beta t)], \quad (4)$$

M^{mep} - момент сил тертя, який підраховується за допомогою формул

$$M_{\epsilon' \epsilon z}^{mep} = -m \cdot \frac{a_1 \{ k \cdot [\omega + \dot{f}(-\beta t) + \dot{g}(\beta t)] \} + \dots + a_9 \{ k \cdot [\omega + \dot{f}(-\beta t) + \dot{g}(\beta t)] \}^9}{1 + a_2 \{ k \cdot [\omega + \dot{f}(-\beta t) + \dot{g}(\beta t)] \}^2} \quad (5)$$

або

$$M_{\text{Кыл}}^{mep} = -M_{\text{lim}}^{mep} - e \sqrt{|M_{\epsilon' \epsilon z}^{mep}|}. \quad (6)$$

Для виведення функції M^{np} , як і вище, використовуємо залежність

$$M^{np} = GI_z \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (7)$$

Вона відрізняється від рівностей (4), (5) тим, що містить частинну похідну від функції ϕ по z . Щоб перейти від цієї похідної до похідної по t , випишемо наступні залежності

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial f(z - \beta t)}{\partial z} + \frac{\partial g(z + \beta t)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}, \\ \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(z - \beta t)}{\partial t} + \frac{\partial g(z + \beta t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = -\beta \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial g}{\partial w}. \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси випливає

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (9)$$

З урахуванням (9) запишемо

$$M^{np} = -GI_z \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial g}{\partial t} \right). \quad (10)$$

Змінні $f(-\beta t)$ і $g(\beta t)$, які використовуються у співвідношеннях (4), (5), (10), визначаються так

$$\begin{aligned} f(-\beta t) &= f_1^i(0, t), \\ g(\beta t) &= g_1^r(0, t) + g_1^i(0, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Підставимо отримані вирази (5), (10) в рівність (3). З урахуванням (11) отримаємо в остаточній формі нелінійне звичайне диференціальне рівняння крутильного руху долота

$$J \left[\ddot{f}_1^i(0,t) + \ddot{g}_1^r(0,t) + \ddot{g}_1^t(0,t) \right] - M^{мер} + \frac{GI_z}{\beta} \left[\dot{f}_1^i(0,t) - \dot{g}_1^r(0,t) - \dot{g}_1^t(0,t) \right]. \quad (12)$$

З його застосуванням виконуються дослідження самозбудження коливань складених бурильних колон. В ньому функції $g_1^r(t)$, $g_1^t(t)$ хвиль, що приходять, вважаються відомими, а функція вихідної хвилі $f_1^i(t)$ — шуканою. Вона знаходиться в результаті чисельного інтегрування даного рівняння.

3. Дифракція хвилі крутіння в точці з'єднання ланок бурильної колони. Нехай механічні характеристики колони на її ділянках складають β_1 , ρ_1 , I_1 та β_2 , ρ_2 , I_2 , відповідно. Тоді елементи хвилі $f(z - \beta t)$, розповсюджуючись від точки $z = 0$ і досягаючи точки $z = l_1$, будуть в ній піддаватись впливу актів ударного заломлення-відображення. В результаті дифракції хвиль $\phi_1^i(z - \beta_1 t)$ и $\phi_2^i(z + \beta_2 t)$ суперпозиція прониклої $\phi_2^t(z - \beta_2 t)$ і відображеної $\phi_2^r(z - \beta_2 t)$ хвиль складає хвилю $f_2(z - \beta_2 t)$ на другій ділянці, а сума $\phi_1^r(z + \beta_1 t) + \phi_1^t(z + \beta_1 t)$ — хвилю $g_1(z + \beta_1 t)$ на першій ділянці. З урахуванням цього отримаємо початкову умову в точці $z = l_1$ для хвилі $f_2(z - \beta_2 t)$ в області $l_1 \leq z \leq L$

$$\begin{aligned} f_2(l_1 - \beta_2 t) &= \frac{2\beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} f_1^i(l_1 - \beta_1 t) - \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} g_2^i(l_1 + \beta_1 t), \\ \dot{f}_2(l_1 - \beta_2 t) &= \frac{2\beta_1 \rho_1 I_1}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{f}_1^i(l_1 - \beta_1 t) - \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{g}_2^i(l_1 + \beta_1 t), \end{aligned} \quad (13)$$

і початкові умови в цій точці для хвилі $g_1(z + \beta_1 t)$ в області $0 \leq z \leq l_1$

$$\begin{aligned} g_1(l_1 + \beta_1 t) &= \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} f_1^i(l_1 - \beta_1 t) + \frac{2\beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} g_2^i(l_1 + \beta_2 t), \\ \dot{g}_1(l_1 + \beta_1 t) &= \frac{\beta_1 \rho_1 I_1 - \beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{f}_1^i(l_1 - \beta_1 t) + \frac{2\beta_2 \rho_2 I_2}{\beta_1 \rho_1 I_1 + \beta_2 \rho_2 I_2} \dot{g}_2^i(l_1 + \beta_2 t). \end{aligned} \quad (14)$$

Рівняння (1) спільно з граничними умовами (3) і умовами спряження (13), (14) описують триточкову крайову задачу по відношенню до змінної z з умовами в точках $z = 0$, $z = l_1$ і $z = L$. Для її розв'язання застосовується метод Рунге-Кутта.

4. Аналіз самозбудження крутильних коливань у складених бурильних колонах. Дослідження виконані для випадку взаємодії долота зі стінкою свердловини по законам в'язкого (випадки I, II, III) і кулонового тертя (випадки IV, V, VI). Розглядалися такі співвідношення між довжинами ланок колони:

випадки I, IV — $l_1 = L/3$, $l_2 = 2L/3$;

випадки II, V — $l_1 = l_2 = L/2$;

випадки III, VI — $l_1 = 2L/3$, $l_2 = L/3$.

Механічні і геометричні параметри труби першої (нижньої) секції склали: $G = 80,77 \text{ ГПа}$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $J = 3,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $r_1 = 0,05049 \text{ м}$, $r_2 = 0,04449 \text{ м}$, при цьому $I_z = 0,41 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$.

Для другої (верхньої) секції механічні властивості матеріалу труби і момент інерції долота залишилися незмінними, а радіуси труби набули значень $r_1 = 0,08415 \text{ м}$, $r_2 = 0,07415 \text{ м}$, при цьому $I_z = 3,12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$.

Результати чисельних досліджень представлені в таблиці 1. В дослідження проводилися для колони довжиною $L = 1000 \text{ м}$ при кутовій швидкості $\omega = 2 \text{ рад/с}$.

Таблиця 1
Числові значення параметрів автоколивальних процесів складених бурильних колон

Випадок	Модель в'язкого тертя			Модель кулонового тертя		
	I	II	III	IV	V	VI
$\Phi_{cm} \text{ (рад)}$	-105,32	-141,89	-178,25	-105,35	-142,08	-178,84
$\Phi_{сер} \text{ (рад)}$	-85,79	-115,46	-145,13	-100,03	-134,78	-169,49
$D \text{ (рад)}$	39,07	52,86	66,25	10,65	14,61	18,71
$T \text{ (с)}$	31,20	42,17	53,33	8,33	11,67	15,2

Можна бачити, що при різних моделях тертя суттєво відрізняються лише розмахи (D) і періоди (T) коливань, а кут пружного закручування Φ_{cm} залишається майже незмінним.

Результати розрахунків представлені також в графічній формі на рис. 3 (форма автоколивань долота) і на рис. 4 (фазовий портрет автоколивань долота).

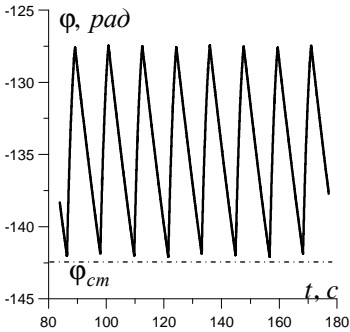


Рис. 3. Форма релаксаційних автоколивань долота складеної БК довжиною $L = 1000$ м

при кутовій швидкості $\omega_n = 2$ рад / с
(випадок V)

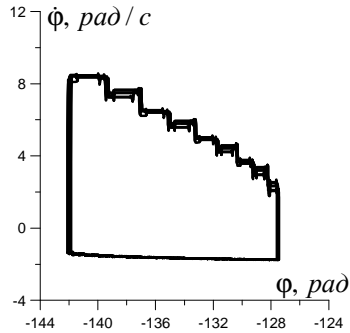


Рис. 4. Фазовий портрет автоколивань долота складеної БК ($L = 1000$ м ,

$\omega_n = 2$ рад / с , випадок V)

Видно, що для даної конструкції динамічний процес протікає за сценарієм релаксаційних автоколивань.

Висновки. В роботі виконані теоретичні дослідження самозбудження крутильних коливань складених бурильних колон з використанням різних моментів сил тертя. Проведені дослідження основних закономірностей самозбудження і протікання цих коливань:

- 1) Виведені рівняння дифракції хвиль крутіння в точках стику ланок колони з різними жорсткостями.
- 2) Встановлено, коливальний процес реалізуються за сценарієм релаксаційних автоколивань.
- 3) Виконані дослідження для випадків, коли бурильна колона складається з двох ділянок рівної довжини, або з довжинами, які знаходяться у відношенні 1:2. Проведено аналіз впливу моменту сил тертя на параметри автоколивань.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Физматгиз, 1959. - 915 с.
2. Андрусенко Е.Н., Гуляев В.И., Худолій С.Н.. Изгиб бурильной колонны в криволинейной скважине с несовершенствами осевой линии // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т 76, № 3. — С. 459 – 468.
3. Гуляев В.И., Глушакова О.В., Худолій С.Н.. Квантованные аттракторы в волновых моделях торсионных колебаний колонн глубокого бурения // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. — 2010. — №2. С. 134-147.
4. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания — М.: Наука, 1975. — 248 с.

5. *Рабинович М.К., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн – М.: Наука, 1984. — 432 с.
6. *Ford Brett J.* The genesis of torsional drillstring vibrations // SPE Drilling Engineering. – 1992, v.7, September. – P. 168-174.
7. *Gulyayev V.I., Hudoliy S.N., Glushakova O.V.* Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models. // Journal of Multi-body Dynamics. — V. 225. — P. 139 – 152.
8. *Gulyayev V., Glushakova O.* Large-scale and small-scale self-excited torsional vibrations of homogeneous and sectional drill strings // Interaction and Multiscale Mechanics. - V. 4, №4. - P. 139 - 152.
9. *Gulyayev V.I., Borshch O.I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2011. — V. 78. — P. 759 – 764.
10. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V.* The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. — 2009. — V. 67. — P. 140 - 148.

Стаття надійшла до редакції 23.06.2012 р.

Гайдайчук В.В., Глушакова О.В.

САМОВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН

Рассмотрена проблема самовозбуждения крутильных колебаний бурильных колонн, состоящих из звеньев с разными жесткостями. Проведены исследования основных закономерностей самовозбуждения и протекания этих колебаний. Выведены уравнения дифракции волн кручения в точке сочленения участков с разными жесткостями. Установлено, что формы автоколебаний реализуются по сценариям релаксационных автоколебаний.

Gaidaichuk V.V., Glushakova O.V.

SELFEXCITATION OF TORSION WAVE VIBRATIONS OF MULTILINK DRILL STRING

The problem of torsion vibration self-excitation of drill strings combined from tubular segments with differing torsion stiffness is considered. The analysis of principal regularities of self-excitation and realization of those vibrations is performed. The equations of the torsion wave diffraction at the points of joints of the links with differing stiffnesses are constructed. It is established that the auto-vibration regimes are realized with the scenarios of relaxation auto-vibrations.

УДК 539.3

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
А.М. Станкевич, канд. техн. наук
А.А. Сташук

ЗНИЖЕННЯ ВИМІРНОСТІ РІВНЯНЬ СТАТИКИ ТОВСТОЇ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ УЗАГАЛЬНЕНИМ МЕТОДОМ ПРЯМИХ

Метод прямих є одним з найбільш поширених засобів зниження вимірності рівнянь теорії пружності. Як правило, він застосовується для побудови редукованих рівнянь для товстих пластин та оболонок сталої товщини. При цьому по поперечній координаті для зниження вимірності застосовується метод скінчених різниць. Застосування проєкційного методу з тією ж метою [1] значно спрощує і узагальнює процес побудови редукованих рівнянь. Це узагальнення дає можливість поширити запропоновану в [1] процедуру на пластину змінної товщини, причому замість прямих тут будемо мати криві лінії, але назву метода не змінюємо.

Вихідні рівняння.

В постановці плоскої задачі теорії пружності [2] розглядається товста пластина, віднесена до декартової системи координат в постановці плоскої деформації, переріз якої займає область $[h^-(x), h^+(x)] \otimes [0, l]$ (рис. 1).

По граничних поверхнях пластини задано граничні умови загального вигляду, які моделюються пружними в'язями із заданими коефіцієнтами жорсткості [3] (рис. 2, 3, 4). Тут Δ – кінематичні дії з боку оточуючого середовища, віднесені до одиниці площі проєкції ділянки граничних поверхонь на осі OX а торцевих площин на OY ; q – зовнішні навантаження на граничні поверхні, віднесені до одиниці їх площі відповідно; k – жорсткості пружних в'язів, які приймаються сталими по всій поверхні; u, v – компоненти вектора переміщень у відповідній точці граничної поверхні.

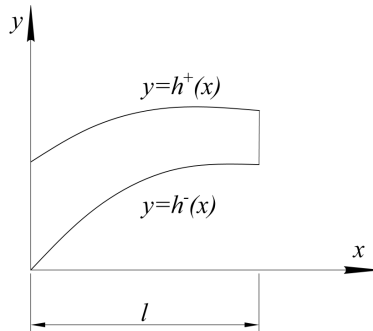


Рис. 1

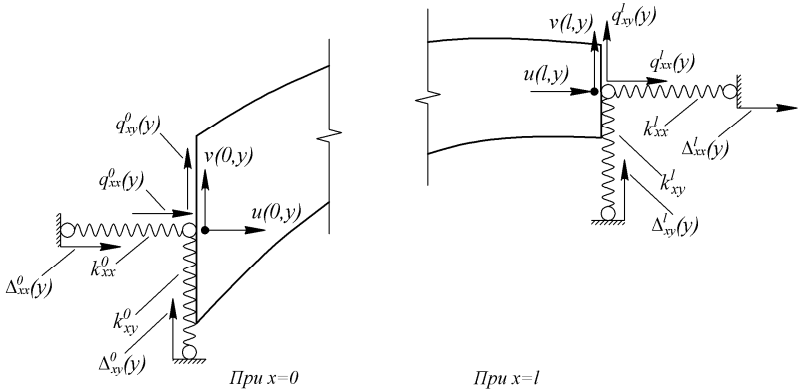


Рис. 2

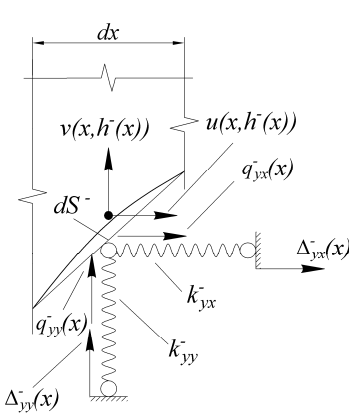


Рис. 3

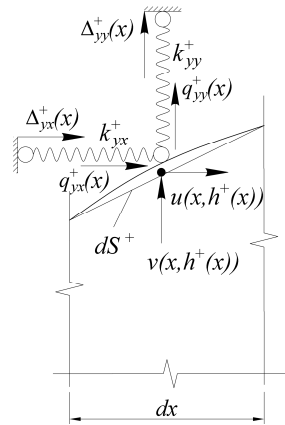


Рис. 4

З таких закріплень точок граничних поверхонь впливають граничні умови, яким повинні задовольняти розрахункові функції, що описують напружено-деформований стан (НДС) об'єкту, що розглядається.

Будемо мати

при $x = 0$:

$$k_{xx}^0 \cdot u(0, y) - \sigma_x^0 = q_{xx}^0(y) + k_{xx}^0 \cdot \Delta_{xx}^0(y), \quad (1)$$

$$k_{xy}^0 \cdot v(0, y) - \tau_{xy}^0 = q_{xy}^0(y) + k_{xy}^0 \cdot \Delta_{xy}^0(y), \quad (2)$$

при $x = l$

$$k_{xx}^l \cdot u(l, y) - \sigma_x^l = q_{xx}^l(y) + k_{xx}^l \cdot \Delta_{xx}^l(y), \quad (3)$$

$$k_{xy}^l \cdot v(l, y) - \tau_{xy}^l = q_{xy}^l(y) + k_{xy}^l \cdot \Delta_{xy}^l(y), \quad (4)$$

при $y = h^-(x)$

$$\sigma_x(x, h^-(x)) \cdot \frac{dh^-}{dx} - \tau_{xy}(x, h^-(x)) = q_{yx}^- + k_{yx}^- \cdot \Delta_{yx}^-(x) - k_{yx}^- \cdot u(x, h^-(x)), \quad (5)$$

$$\sigma_y(x, h^-(x)) - \tau_{xy}(x, h^-(x)) \cdot \frac{dh^-}{dx} = -q_{yy}^- - k_{yy}^- \cdot \Delta_{yy}^-(x) + k_{yy}^- \cdot v(x, h^-(x)), \quad (6)$$

при $y = h^+(x)$

$$\sigma_x(x, h^+(x)) \cdot \frac{dh^+}{dx} - \tau_{xy}(x, h^+(x)) = -q_{yx}^+ - k_{yx}^+ \cdot \Delta_{yx}^+(x) + k_{yx}^+ \cdot u(x, h^+(x)), \quad (7)$$

$$\sigma_y(x, h^+(x)) - \tau_{xy}(x, h^+(x)) \cdot \frac{dh^+}{dx} = q_{yy}^+ + k_{yy}^+ \cdot \Delta_{yy}^+(x) - k_{yy}^+ \cdot v(x, h^+(x)). \quad (8)$$

Варіювання величинами коефіцієнтів жорсткості пружних стержнів дозволяє врахувати всі стандартні варіанти граничних умов.

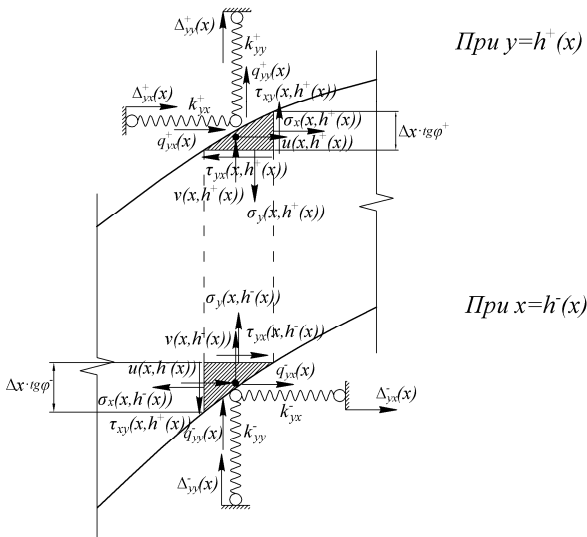


Рис. 5

НДС пластини можна описати системою диференціальних рівнянь теорії пружності (плоска деформація) відносно компонент вектора

переміщень $u(x, y), v(x, y)$ та компонент тензора деформацій $\sigma_x(x, y), \tau_{xy}(x, y), \sigma_y(x, y)$, які є системою диференціальних рівнянь в часткових похідних першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \sigma_x \\ \frac{\partial v^*}{\partial x} = -\frac{\partial u^*}{\partial y} + \tau_{xy} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y \\ \sigma_y = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} \end{cases} \quad (9)$$

Тут позначено: $u^* = \mu \cdot u, v^* = \mu \cdot v; X, Y$ – об'ємні сили.

Для прогнозування НДС необхідно знайти розв'язок системи рівнянь, невідомі функції яких повинні задовольняти граничним умовам (1)-(8), тобто маємо граничну задачу (1)-(9), яка враховує не тільки об'ємні сили $X(x, y)$ та $Y(x, y)$, але й силові та кінематичні дії в точках граничних поверхонь.

Для розв'язання цієї задачі пропонується комбінована методика, яка наближено розв'язує граничну задачу в 2 етапи. На першому етапі двовимірна гранична задача зводиться до одновимірної, яка є системою звичайних диференціальних рівнянь, що визначена на відрізку $[0, l]$, з редукованими граничними умовами на кінцях цього відрізка. На другому етапі пропонується одновимірну граничну задачу розв'язувати ефективним чисельним методом С.К.Годунова [4].

Дана робота присвячена реалізації першого етапу комбінованої методики, тобто зведенню вихідної двовимірної задачі (1)-(9) до одновимірної.

Для зведення двовимірних диференціальних рівнянь (9) до системи звичайних диференціальних рівнянь застосуємо узагальнення методу прямих [1].

На область, яку займає переріз пластини, накладаємо систему ліній, які є геометричними місцями точок, що поділяють кожну висоту пластини $h(x) = h^+(x) - h^-(x)$ на $(n-1)$ рівних ділянок $\Delta u(x) = h(x) / (n-1)$ (рис. 6).

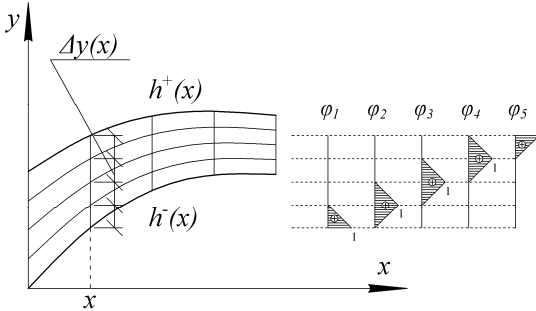


Рис. 6

При кожному x виберемо систему фінітних функцій

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) \dots \varphi_n(x)\},$$

де $\varphi_i(x) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$ є кусково-лінійними функціями (рис.6).

Особливістю цих функцій є те, що вони залежать не тільки від поперечної координати y , як в [1], але й від повздожньої координати x , що значно ускладнює вигляд одновимірних розрахункових рівнянь, які отримані у [1].

За методикою, запропонованою в [1], побудуємо систему редукованих одновимірних рівнянь, при цьому підкреслимо нові особливості, які з'являються в зв'язку з врахуванням змінної товщини.

Перше рівняння з системи (9) помножимо скалярно на $\varphi_i(x)$ і проінтегруємо від $h^-(x)$ до $h^+(x)$. Тут, як і в роботі [1] будемо застосовувати термінологію тензорного числення. Як і в згаданій роботі, скалярний добуток функції на базову функцію основного базиса розглядається як коваріантна компонента цієї функції, тобто $\sigma_x(x, y)$

співставляється $\sigma_{xi}(x)$. На відміну від [1] складова $\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x}$ при

редукуванні значно ускладнюється. Там, в зв'язку із незалежністю товщини від повздожньої координати, знак похідної можна було виносити за знак інтеграла. Тут це необхідно робити інакше. Розглянемо

це питання докладніше. Для цього розглянемо $\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x} \varphi_i(x) dy$. Для

того, щоб винести за знак інтегрувала похідну $\frac{\partial}{\partial x}$, розглянемо формулу

диференціювання інтеграла, що залежить від параметра x та має змінні межі інтегрування:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot \varphi_i(x, y) dy = & \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi_i(x, y) dy + \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} dy + \\ & + \frac{dh^+(x)}{dx} f(x, h^+(x)) \cdot \varphi_i(x, h^+(x)) - \frac{dh^-(x)}{dx} f(x, h^-(x)) \cdot \varphi_i(x, h^-(x)), \quad (10) \end{aligned}$$

з чого випливає

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot \varphi_i(x, y) dy = & \frac{df_i(x)}{dx} - \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} dy - \\ & - \frac{dh^+(x)}{dx} f(x, h^+(x)) \cdot \varphi_i(x, h^+(x)) + \frac{dh^-(x)}{dx} f(x, h^-(x)) \cdot \varphi_i(x, h^-(x)). \end{aligned}$$

Враховуючи, що на граничних лініях базові функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_n(x)$ дорівнюють одиниці, можна записати співвідношення:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, h^-(x)) = \varphi_1(x, h^-(x)) = \delta_{i1}, \\ \varphi_i(x, h^+(x)) = \varphi_1(x, h^+(x)) = \delta_{in}. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи (11) в попереднє співвідношення, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot \varphi_i(x, y) dy = & \frac{df_i(x)}{dx} - \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} dy - \\ & - \frac{dh^+(x)}{dx} f(x, h^+(x)) \cdot \delta_{in} + \frac{dh^-(x)}{dx} f(x, h^-(x)) \cdot \delta_{i1}. \quad (12) \end{aligned}$$

Якщо функція $f(x, y)$ є переміщенням, то значення переміщень на лініях, що узагальнюють прямі методу прямих визначаємо як лінійну комбінацію елементів базису $f(x, y) = f^i(x) \cdot \varphi_i(x, y)$, а їх значення на границях області $y = h^-(x)$ та $y = h^+(x)$ як $f(x, h^-(x)) = f^1(x)$, $f(x, h^+(x)) = f^n(x)$.

Позначимо

$$\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} \cdot f^j(x) dy = \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x} \cdot d_{ij},$$

де

$$\{d_{ij}\} = \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/6 & -1/6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Тоді (12) отримає вигляд:

$$\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi_i(x, y) dy = \frac{df_i(x)}{dx} - \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x} \cdot d_{ij} \cdot f^j(x) - \frac{dh^+(x)}{dx} f^n(x) \cdot \delta_{in} + \frac{dh^-(x)}{dx} f^1(x) \cdot \delta_{i1} \quad (13)$$

(індекси 1 та n – фіксовані, по ним сума не передбачається).

Якщо функція $f(x, y)$ визначає напруження, то для виключення значень функції напружень на граничних лініях застосуємо граничні умови на граничних поверхнях $y = h^-(x)$ та $y = h^+(x)$ (5)–(8).

В результаті отримуємо необхідні формули наступним чином:

$$\text{Розглянемо} \quad \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi_i(x, y) dy.$$

Якщо $f(x, y)$ – функція переміщень, то цей інтеграл обчислюємо так:

$$f(x, y) = f^j(x) \cdot \varphi_j(x, y),$$

$$\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f^j(x) \cdot \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y} \cdot \varphi_i(x, y) dy = f^j(x) \cdot \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \varphi_i(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y} dy = f^j(x) \cdot b_{ij};$$

Якщо $f(x, y)$ – функція напружень, то інтегруємо частинами:

$$\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \varphi_i(x, y) dy = \left[f(x, y) \cdot \varphi_j(x, y) \right]_{h^-(x)}^{h^+(x)} - \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial y} dy = \left[f(x, y) \cdot \varphi_j(x, y) \right]_{h^-(x)}^{h^+(x)} - f^j(x) \cdot b,$$

$$\int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot \varphi_i(x, y) dy = \frac{d\sigma_{xi}(x)}{dx} - \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x} \cdot d_{ij} \cdot \sigma_x^j(x) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{dh^+(x)}{dx}\sigma_x(x, h^+(x))\cdot\delta_{1n} + \frac{dh^-(x)}{dx}\sigma_x(x, h^-(x))\cdot\delta_{11}, \\
& \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\cdot\varphi_i(x, y)dy = \frac{d\tau_{xyi}(x)}{dx} \cdot \frac{\partial\Delta(x)}{\partial x} \cdot d_{ij} \cdot \tau_{xy}^j(x) - \\
& -\frac{dh^+(x)}{dx}\tau_{xy}(x, h^+(x))\cdot\delta_{1n} + \frac{dh^-(x)}{dx}\tau_{xy}(x, h^-(x))\cdot\delta_{11}.
\end{aligned}$$

В результаті множення на $\varphi_i(x, y)$ та інтегрування по y в межах від $h^-(x)$ до $h^+(x)$ після нескладних перетворень над першими двома рівняннями системи (9) отримаємо рівняння:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du_i^*(x)}{dx} &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ij} \cdot v^{*j}(x) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \sigma_{xi}(x) - \\ & -\frac{dh^-(x)}{dx} u^1(x) \cdot \delta_{i1} + \frac{dh^+(x)}{dx} u^n(x) \cdot \delta_{in} + \frac{\partial\Delta(x)}{\partial x} d_{ij} \cdot u^{*j}(x) \\ \frac{dv_i^*(x)}{dx} &= -b_{ij} \cdot u^{*j}(x) + \tau_{xyi} - \frac{dh^-(x)}{dx} v^1(x) \cdot \delta_{i1} + \\ & + \frac{dh^+(x)}{dx} v^n(x) \cdot \delta_{in} + \frac{\partial\Delta(x)}{\partial x} d_{ij} \cdot v^{*j}(x). \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Враховуючи співвідношення, граничні умови (5)-(8) та виключаючи σ_{yi} за допомогою співвідношення [1]:

$$\sigma_{yi} = \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot b_{ij} \cdot v^{*j}(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \sigma_{xi}(x),$$

отримуємо:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\sigma_{xi}(x)}{dx} &= \begin{bmatrix} k_{xx}^- u(x, h^-(x)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{xx}^+ u(x, h^+(x)) \end{bmatrix} + b_{ij} \tau_{xy}^i(x) \begin{bmatrix} \bar{q}_{yx}^- \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{q}_{yx}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xx}^- \Delta_{xx}^-(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{xx}^+ \Delta_{xx}^+(x) \end{bmatrix} + \frac{\partial\Delta(x)}{\partial x} d_{ij} \sigma_{xi}^j(x) - X_i \\ \frac{d\tau_{xyi}(x)}{dx} &= \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ij} v^{*j}(x) + \begin{bmatrix} k_{xx}^- u(x, h^-(x)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{xx}^+ u(x, h^+(x)) \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \sigma_{xi}(x) \begin{bmatrix} \bar{q}_{yy}^- \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{q}_{yy}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy}^- \Delta_{yy}^-(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{yy}^+ \Delta_{yy}^+(x) \end{bmatrix} + \frac{\partial\Delta(x)}{\partial x} d_{ij} \tau_{xy}^j(x) - Y_i \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Система рівнянь (14), (15) є системою $4n$ звичайних диференціальних рівнянь, але деякі невідомі входять до цих рівнянь як в коефіцієнтах так і в моментах. Щоб позбутися цього недоліку, необхідно привести всі редуковані невідомі до одного типу. Для цього використовуємо тензорні операції опускання та піднімання індексів за допомогою метричних тензорів

g^{ij} та g_{ij} [1].

Система рівнянь (14), (15) є замкненою системою $4n$ звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих моментів $u_i(x)$, $v_i(x)$, $\sigma_{xi}(x)$ та $\tau_{xyi}(x)$ $i = \overline{1, n}$. Для знаходження її єдиного розв'язку, що відповідає конкретному напружено-деформованому стану, необхідно задати граничні умови при $x=0$ та $x=l$. Ці умови отримуються з вихідних граничних умов (1)-(4), при цьому процедура редукування не залежить від повздожньої координати і редуковані граничні умови співпадають з отриманими в [1].

Граничну задачу для системи звичайних диференціальних пропонується розв'язувати чисельно за допомогою метода дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.* До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – випуск 36 – с. 413 – 423.
2. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966.
3. *Чибіряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонки: Монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с: іл.
4. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171 - 174.

Стаття надійшла до редакції 21.08.2012 р.

Чибиряков В.К., Станкевич А.Н., Сташук А.А.

СНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ТОЛСТЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

Метод прямых является одним из наиболее распространенных способов снижения размерности уравнений теории упругости. Как правило, он применяется для построения редуцированных уравнений для толстых пластин и оболочек постоянной толщины. При этом по поперечной координате для снижения размерности применяется метод конечных разностей. Применение проекционного метода с той же целью [1] значительно упрощает и обобщает процесс построения редуцированных уравнений. Это обобщение дает возможность распространить предложенную в [1] процедуру на пластины переменной толщины, причем вместо прямых здесь будем иметь кривые линии, но название метода не меняем.

Chybyryakov V.K., Stankevich A.M., Stashuk A.A.

DIMENSIONAL REDUCTION STATIC EQUATIONS OF LARGE PLATE OF VARIABLE THICKNESS BY GENERALIZED METHOD OF "LINES"

Method of "lines" is one of the most common means of dimensional reducing equations of theory of elasticity. Typically, it is used to build the reduced equations for thick plates and shells of constant thickness. On the transverse coordinate for dimension reduction used the method of finite differences. Application of the projection method for the same purpose [1] simplifies and summarizes the process of constructing reduced equations. This generalization makes it possible to extend the proposed in [1] procedure on plates of variable thickness, and instead of lines we have curves, but do not change the name of the method.

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Л.В. Шевчук

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ КРУЖЛЯННЯ КОЛОН ГЛИБОКОГО БУРІННЯ

Поставлена задача про коливання кружляння долота бурильної колони, яка попередньо напружена поздовжньою силою і обертається під дією прикладеного до долота моменту сил різання. Виконано аналіз механізму самозбудження коливань. Обговорюються результати комп'ютерного моделювання.

Вступ. В зв'язку з вичерпанням легкодоступних вуглеводневих палив, останнім часом все більші об'єми нафти і газу добуваються із дуже глибоких підземних резервуарів. За даними геологорозвідки ресурси газу в українському секторі акваторії Чорного і Азовського морів оцінюються в 1228 млрд.куб.м. Проте глибина цих покладів складає 7000 м і більше, а рекордна глибина буріння в Україні поки що рівна 6200 м. Однак в цих випадках проблема видобування нафти і газу пов'язана зі значними технологічними труднощами буріння глибоких свердловин [1,3,4,5,7]. Одна з основних труднощів – можливість появи нештатних ситуацій, які викликані критичними станами квазістатичної рівноваги і коливань бурильної колони (БК).

Проте найбільш складним механізмом володіють згині коливання низу БК, які викликані дією на долото змінних з часом нормальних і дотичних сил контактної і фрикційної взаємодії долота зі стінкою свердловини. В цьому випадку геометричний центр долота починає рухатися навколо осьової лінії свердловини, обганяючи або відстаючи від обертального руху самої колони [8,9]. Схожі рухи здійснюють під дією гіроскопічних сил інерції гіроскоп або ротор центрифуги пральної машини старої конструкції. У механіці вони отримали назву процесійних коливань. У роботах [6,8,9] відмічається, що описаний вище рух центра долота має іншу природу і для його визначення використовують термін “whirling” – кружляння. Воно вивчалось на вельми спрощених фізичних і математичних моделях з одною або двома степенями вільності при різних законах фрикційної взаємодії долота зі стінкою та дном свердловини. Ці моделі вельми далекі від реальної системи і слабо відображають реальні динамічні процеси.

Як показують експерименти та спостереження, при деяких режимах коливань кружляння долота починає перекочуватися по криволінійній

поверхні дна свердловини, а його центр рухається по досить складних траєкторіях, які нагадують багатопелюсткову квітку.

Вивчення автоколивань такої системи може бути виконане лише методами неголономної механіки. Справжня робота присвячена проблемі комп'ютерного передбачення і моделювання явища коливань кружляння долота і бурильної колони як неголономної системи.

Моделювання кочення з вертінням твердого тіла по шорсткій поверхні. Розробка багатьох питань механіки неголономних систем тісно пов'язане з застосуванням методів теорії диференціальних рівнянь і диференціальної геометрії. Загальне геометричне трактування проблем руху таких систем привело до створення нового розділу диференціальної геометрії – неголономної геометрії, основу якої складає задача про кочення без ковзання однієї поверхні по іншій [2]. Вона формулюється таким чином: є нерухома поверхня S_1 і рухома поверхня S_2 , яка контактує з S_1 в точці дотику G (рис. 1). Задана вектор-функція $\vec{\omega}(t)$ залежності миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ поверхні S_2 від часу t . Потрібно побудувати траєкторії l_1 і l_2 руху точки G на кожній з поверхонь.

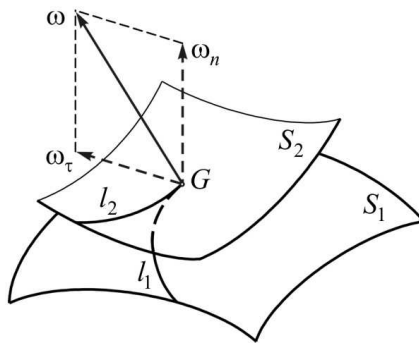


Рис. 1. Неголономне кочення з вертінням поверхні S_2 по поверхні S_1

При розв'язанні цієї задачі необхідно враховувати, що в кожен момент часу поле швидкостей точок рухомої поверхні таке ж, як би вона оберталася з деякою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо деякої осі, що проходить через точку дотику. Залежно від напрямку миттєвій осі обертання розрізняють чисте або власне кочення і так зване вертіння. Чисте кочення має місце у разі, коли миттєва вісь обертання рухомої поверхні лежить в дотичній площині, дотичній до обох поверхонь, і вертеться – коли миттєва вісь обертання нормальна до цієї площини.

В загальному випадку кочення поверхні S_2 по поверхні S_1 можна розкласти на чисте кочення і чисте вертіння відповідно розкладанню вектора $\vec{\omega}$ на складову $\vec{\omega}_\tau$, яка лежить в дотичній площині, і складову $\vec{\omega}_n$, нормальну до поверхонь (рис. 1).

Задача про кочення і вертіння суттєво ускладнюється, якщо вектори $\vec{\omega}_\tau(t)$ та $\vec{\omega}_n(t)$ не є заданими, а мають бути визначені з яких-небудь додаткових умов. Так, в неголономній механіці вважається, що поверхні S_1 та S_2 обмежують тверді шорсткі тіла, що володіють масами, і їх взаємний рух без ковзання здійснюється в результаті прикладання до них сил, які залежать (або не залежать) від часу t . Тоді складаються динамічні рівняння руху тіл, для яких кінематичні умови їх контактної взаємодії відіграють роль неголономних в'язей. У такій постановці вирішені задачі про кочення без ковзання тіл простих форм по простих поверхнях. Зокрема, показано, що залежно від початкових умов кочення шорсткої кульки по шорсткій сферичній поверхні може супроводжуватися рухом точки їх контакту уздовж деяких гладких синусоїдальних траєкторій, кривих з точками повернення і петлеподібних кривих.

Мабуть, найбільш яскравим з відомих прикладів неголономних систем є двоколісні і навіть одноколісні (моноцикли) велосипеди, які зберігають стійкість свого вертикального положення, завдяки наявності неголономної керованої в'язі.

Умови кочення з вертінням можуть бути реалізовані і в системі долото-дно свердловини. Вони забезпечуються за рахунок наявності на поверхні долота діамантових вкраплень, які при коченні відіграють роль твердих інденторів, які вдавлюються в скельну породу на поверхні дна свердловини і перешкоджають ковзанню долота по ній.

Оскільки поверхня долота (рис. 2) і дна свердловини можуть мати



Рис. 2. Геометричні форми доліт

різні геометричні форми, в процесі буріння можливі переходи руху долота від чистого вертіння (штатний процес буріння) до його додатковим коченням, відходу з вертикалі точки дотику долота з дном свердловини і викривлення осі бурильної колони. Для дослідження цих явищ необхідно поставити задачу про пружні поперечні коливання бурильної колони, в якій неголономні в'язі є граничними умовами для рівнянь руху долота.

Рівняння коливань БК в нижньому прольоті. Коливання кружляння долота, яке обертається з кутовою швидкістю ω , зазвичай супроводжується залученням до вібраційного процесу також і нижніх ділянок колони, які розташовані між центруючими пристроями і відіграють роль додаткових опор. Тому при аналізі механізму збудження коливань кружляння долота будемо нехтувати впливом верхньої частини БК і виділимо її фрагмент завдовжки l (рис. 3.).

Виділена трубчаста ділянка БК попередньо напружена прикладеним до долота крутним моментом M_z і подовжньою стискуючою силою T , рівній реакції опирається долота на дно свердловини. Динаміку цієї ділянки моделюватимемо на основі теорії стисло-закручених стрижнів, що обертаються. Для цього введемо нерухому систему координат $OXYZ$ і систему координат $Oxuz$, що обертається разом з БК, із загальним початком O на опорі A (рис. 4.).

Для кількісного аналізу кінематично збуджуваних коливань кружляння необхідно скласти рівняння динаміки всієї виділеної для розгляду двопрогонної балки ABC , що обертається, попередньо напруженої крутним моментом $M_z = -M^{fr}$ і подовжньою стискуючою силою $T = -R$.

Рівняння динамічного пружного згинання БК при наявності відмічених факторів мають форму:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - (\rho F + \rho_l F_l) \omega^2 u - 2(\rho F + \rho_l F_l) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho F + \rho_l F_l) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

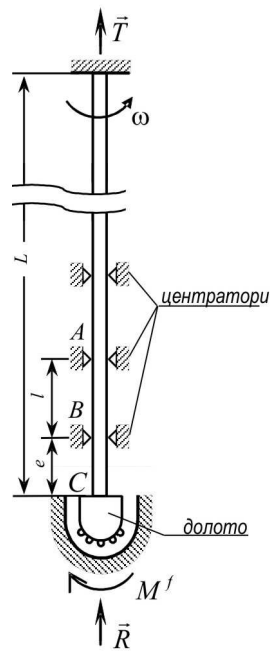


Рис. 3. Розрахункова схема бурильної колони

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - (\rho F + \rho_l F_l) \omega^2 v - 2(\rho F + \rho_l F_l) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho F + \rho_l F_l) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де $u(z, t)$, $v(z, t)$ – пружні переміщення елемента труби БК в напрямках осей Ox , Oy відповідно; EI – жорсткість труби БК при згині; ρ , ρ_l – густина матеріалу труби і промивної рідини, відповідно; F , F_l – площі поперечних перерізів стінки труби і її внутрішнього каналу, відповідно; t – час.

Для опису пружного повороту долота введемо також жорстко пов'язану з ним систему координат $Cx_1y_1z_1$, осі Cx_1 , Cy_1 якої у початковому положенні паралельні осям Ox , Oy , відповідно, а при пружній деформації долота повертаються на кути $-v'|_C$ і $u'|_C$ (рис. 4.).

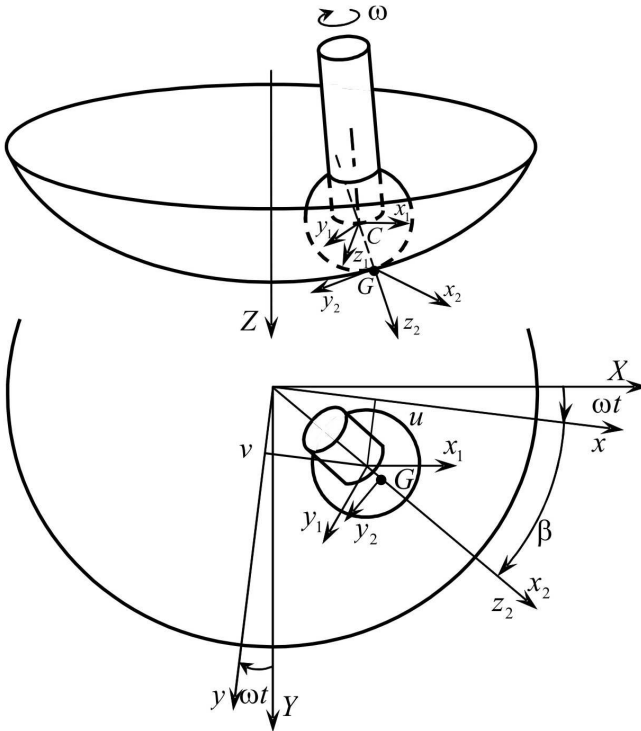


Рис. 4. Схема кочення долота по поверхні дна свердловини

Кочення поверхні S_2 по поверхні S_1 задаватимемо в рухомій системі координат $Gx_2y_2z_2$, початок G якої збігаються з точкою зіткнення поверхонь S_1 і S_2 ; вісь Gz_2 є продовженням відрізка CG ; вісь Gy_2 перпендикулярна площині, яка містить вісь OZ і відрізок CG , і орієнтована у напрямі обертання; вісь Gx_2 доповнює систему осей до правої трійки.

Умова кочення долота без ковзання дозволяє сформулювати в точці C дві групи крайових рівнянь. Вони включають два кінематичні рівняння, які задають швидкість точки C , і два динамічні рівняння, які визначають динамічну рівновагу всіх моментів відносно точки G .

Для виведення кінематичних крайових умов обчислимо абсолютну швидкість центра C , тіла S_2 , що котиться, в проекціях на осі системи $Oxyz$.

В той же час цю швидкість можна обчислити, виходячи із аналізу пружних коливань кінця C стержня:

Прирівнюючи праві частини цих рівностей, одержимо кінематичні крайові умови

$$\dot{u} - \frac{R-2a}{R-a} \omega v = 0, \quad \dot{v} + \frac{R-2a}{R-a} \omega u = 0. \quad (2)$$

Вони є неголономними, оскільки містять похідні \dot{u} і \dot{v} .

Для побудови рівнянь руху скористаємося теоремою про зміну моменту кількостей руху долота відносно точки G

$$\frac{d\vec{K}_G^{(2)}}{dt} + \vec{\Omega}^{(2)} \times \vec{K}_G^{(2)} = \vec{M}_G^{(2)}, \quad (3)$$

де $\vec{K}_G^{(2)}$ – момент кількостей руху долота відносно точки, представлений в системі $Gx_2y_2z_2$, $\vec{M}_G^{(2)}$ – момент сил пружності, які діють на долото, також записаний в цій же системі.

Вектор $\vec{K}_G^{(2)}$ в системі координат $Gx_2y_2z_2$ підраховується за формулою:

$$\begin{aligned} \vec{K}_G^{(2)} = & \frac{J+ma^2}{\sqrt{u^2+v^2}} \left\{ [(-\dot{v} + \omega u)u + (\dot{u} + \omega v)v] \sqrt{1 - \frac{u^2+v^2}{(R-a)^2}} - \omega \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{R-a} \right\} \vec{i}_2 + \\ & + \frac{J+ma^2}{\sqrt{u^2+v^2}} [(\dot{v} - \omega u)v + (\dot{u} + \omega v)u] \vec{j}_2 + J \left\{ [(-\dot{v} + \omega u)u + (\dot{u} + \omega v)v] \cdot \frac{1}{R-a} + \right. \end{aligned}$$

$$+\omega \sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2}{(R-a)^2}} \vec{k}_2. \quad (4)$$

В цій же системі координат підраховується і момент $\vec{M}_G^{(2)}$

Співвідношення (1)–(4) визначають трьохточкову крайову задачу динаміки нижнього прольоту бурильної колони з долотом. Вони доповнюються також початковими умовами, які задають початкове збурення системи. Чисельне розв'язання поставленої задачі здійснюється методом скінченних різниць із використанням неявної схеми по часу t .

По розробленій методиці були проведені дослідження коливань сферичного долота постійного радіуса a при різних значеннях радіуса R дна свердловини і кутових швидкостях ω обертання колони.

Результати чисельних досліджень. В результаті підрахунків встановлено, що великий вплив на динамічний процес має величина R . Встановлені найнесприятливіші випадки. Так, при великих R центр долота починає рухатися по спіралі, яка розширюється. На рис. 5 показана траєкторія руху в нерухомій і рухомій системах координат.

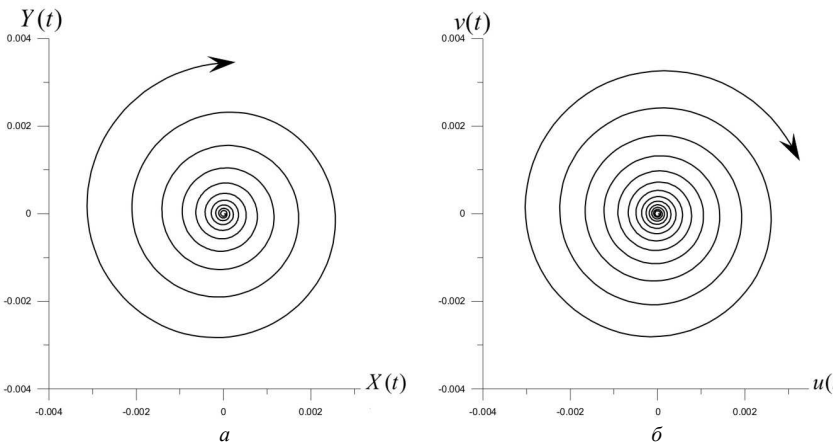


Рис. 5. Нестійке обертання ($R=0,25 \text{ м}$, $a=0,2 \text{ м}$, $\omega=20 \text{ рад/с}$, $t=1 \text{ с}$):
а) нерухома система відліку, б) система відліку, що обертається

Такий рух нестійкий. При деяких R обертання долота (рис. 6.) стійке, однак обертання колони і долота відбувається в різних напрямках. Воно є небезпечним, так як в цьому випадку відбувається викришування алмазних різців.

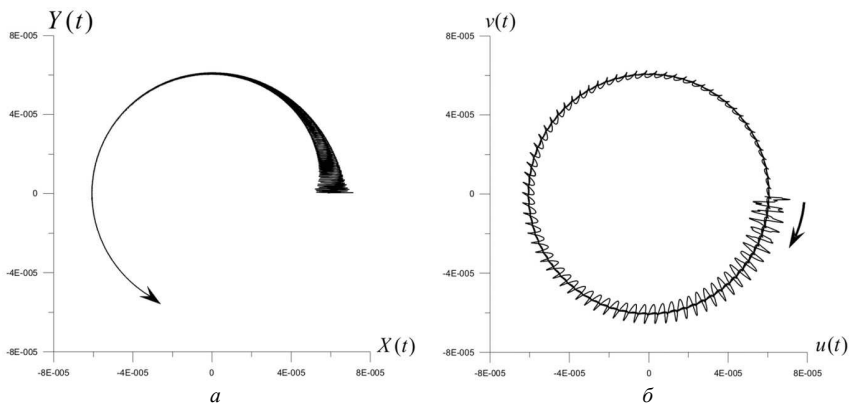


Рис. 6. Стійке обертання ($R=1,0\text{ м}$, $a=0,2\text{ м}$, $\omega=1\text{ рад/с}$, $t=30\text{ с}$):
а) нерухома система відліку, б) система відліку, що обертається

Цікавий випадок представлений на рис. 7. Тут в нерухомій системі координат долота, яке обертається, намагається зайняти положення, в якому відбувається його чисте вертіння, тобто буріння. Однак воно також недопустиме, так як тут вісь свердловини відхиляється в бік.

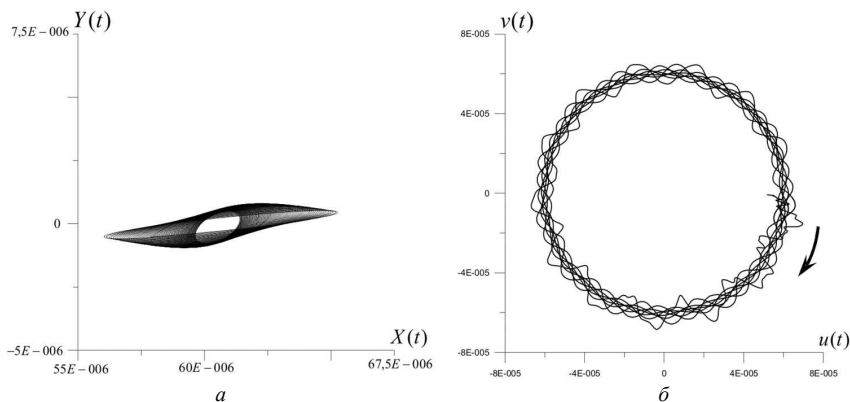


Рис. 7. Стійке вертіння обертання ($R=0,677\text{ м}$, $a=0,2\text{ м}$, $\omega=5\text{ рад/с}$, $t=10\text{ с}$):
а) нерухома система відліку, б) система відліку, що обертається

Висновки. На основі методів неголомомної механіки, поставлена задача про коливання кружляння долота бурильної колони, яка попередньо напружена поздовжньою силою і обертається під дією прикладеного до долота моменту сил різання. Виконано аналіз механізму

самозбудження коливальних. Обговорюються динамічні ефекти, викликані змодельованою контактною взаємодією долота з дном свердловини, аналізуються умови прямого і оберненого кочення долота по поверхні дна свердловини.

Виконано комп'ютерне моделювання механізму кінематичного збудження коливальних кружляння на простих кінематичних схемах з простими геометричними тілами. Вони дозволили встановити найбільш важливі фактори, що впливають на характер протікання цих коливальних. Отримані результати можуть бути враховані при проектуванні конструкцій доліт і режимів буріння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Борщ Е.И.* Спиральные бегущие волны в упругих стержнях /Е.И. Борщ, Е.В. Ващилина В.И. Гуляев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела– 2009. – №2. С. 143 – 149.
2. Неймарк Ю.И. Динамика неголономных систем /Ю.И. Неймарк, Н.А.Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
3. *Gulyayev V.I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells / V.I. Gulyayev, O.I. Borshch // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011 — V. 78. — P. 759 – 764.
4. *Gulyayev V.I.* The buckling of elongated rotating drill strings / V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, I.V. Gorbunovich //Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – 67. – P.140–148.
5. *Gulyayev V.I.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections / V.I. Gulyayev, S.N. Hudoly, L.V. Glovach // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.
6. *Gulyayev V.I.* Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models / V.I. Gulyayev, S.N. Hudoliy, O.V. Glushakova // Journal of Multi-body Dynamics. – 2011 — V. 225. — P. 139 – 152.
7. *Gulyayev V.I.* Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes / V.I. Gulyayev, S.N. Khudoliy, E.N. Andrusenko // Interaction and Multiscale Mechanics. – 2011. – V.4. – No.1. – P.1–16.
8. *Christoforou A.P.* Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions / A.P. Christoforou, A.S. Yigit // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – 206(2). – P.243 – 260.
9. *Jansen J.D.* Wirl and chaotic motion of stabilized drill collars / J.D. Jansen // SPE Drilling Engineering. – 1992. – 7(2). – P.107 – 114.

Стаття надійшла до редакції 21.08.2012 р.

Гайдайчук В.В., Шевчук Л.В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КРУЖЕНИЯ КОЛОН ГЛУБОКОГО БУРЕНИЯ

Поставленная проблема о колебании кружения долота буровой колонны, которая предварительно напряжена продольной силой и вращается под действием прикладываемого к долоту момента сил резания. Выполнен анализ механизма самовозбуждения колебаний. Обсуждаются результаты компьютерного моделирования.

Gaidaichuk V.V., Shevchuk L.V.

SIMULATION OF SPINNING OSCILLATIONS OF DEEP-HOLE DRILLING COLUMNS

The problem of the whirling vibrations of a bit of a drillstring, which is prestressed by longitudinal force and rotates under the applied forces is stated. The analysis of the mechanism of the vibration self-excitation is performed. The results of computer simulation are discussed.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук

Н.А. Гречух

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Викладені положення стосовно реалізації алгоритму одночасних ітерацій в задачах про власні коливання складних оболонок, для яких застосований прийом декомпозиції на фрагменти. Розрахунок оболонок на змушені коливання передбачає перетворення рівнянь руху до нормальних координат – форм власних коливань фрагментів. Наведені співвідношення для попередньо напруженого скінченного елемента оболонки.

1. Побудова редукованих моделей

Вивчення динамічної поведінки конструкцій має суттєве значення для будівельних конструкцій, енергетичного обладнання, авіаційної техніки і т.ін.

Особливо таке положення стосується оболонок конструкцій, які за умов малої маси наділені великою жорсткістю і чутливо реагують на дію динамічних навантажень навіть невеликої інтенсивності. Тому поряд з задачами визначення динамічних характеристик оболонок необхідно проводити дослідження їх поведінки під дією динамічних навантажень, що мають різні закони зміни в просторі і часі.

Дуже небезпечним для тонкостінних конструкцій типу оболонок і пластин є поєднання статичних навантажень з різного роду динамічними навантаженнями. Такі комбінації дій приводять до втрати стійкості конструкцією. Тому актуальними є задачі дослідження зазначених явищ з положень геометрично нелінійної теорії. Поряд з цим втрата несучої здатності оболонки пов'язана з накопиченням пластичних деформацій, а тому важливим також є дослідження фізично нелінійних ефектів.

Вивчення поведінки пластин і оболонок при імпульсному навантаженні вважається найбільш повним, якщо воно стосується великих прогинів з позицій нелінійної теорії. Але природно вважати, що дослідження початкової стадії перехідного процесу може бути проведено за допомогою лінеаризованих залежностей.

Що стосується розв'язання задач динаміки оболонок конструкцій, то на сьогодні найширше застосування має метод скінчених елементів, можливості якого не безмежні. На шляху його застосування стоять притаманні МСЕ особливості: чим більш складну конструкцію і з великою точністю треба розрахувати, тим більше число ступенів вільності слід вводити для дискретної моделі, заздалегідь знаючи, що

практичну цінність має тільки деяка частина параметрів динамічної моделі. Запропоновано декілька алгоритмів орієнтованих на зниження числа невідомих. Це досягається завдяки спеціальній організації розрахунків, що приводить до «розщеплення» систем рівнянь високого порядку на ряд незалежних систем меншого порядку, або використовуються нові узагальнені координати, число яких значно менше ніж у вихідній дискретній моделі.

Що стосується задачі про власні коливання оболонок, то перехід до нової системи узагальнених координат виконується без спрощення просторової апроксимації області оболонки. Виконання цієї умови досягається у алгоритмі одночасних ітерацій з необхідним числом власних векторів узагальненої проблеми про власні значення матриць. Потрібне число власних векторів призначається заздалегідь. Досвід використання алгоритму одночасних ітерацій показує, що число початкового набору векторів приймається дещо збільшеним (приблизно на 20%) у порівнянні з очікуваним набором точних значень. Суть цього алгоритму повно викладена в монографії [1]. Важливою особливістю ітераційного процесу є те, що він реалізується в автоматичному режимі і забезпечує щільність нижчої ділянки спектру частот власних коливань. Цей алгоритм зарекомендував себе як один з найбільш ефективних прийомів при розв'язанні задач про власні коливання системи з великим числом ступенів вільності для яких необхідно визначати до сорока власних частот і форм. Однією з переваг цього методу є можливість визначення модальних координат з бажаною точністю.

Вхідна інформація для конкретної задачі готується у формі, сприятливій для інженера і групується по категоріям, які характеризують геометрію поверхні оболонки, граничні умови, фізико-механічні властивості матеріалу, топологію дискретної моделі конструкції. Інформація про геометрію поверхні подається точковим каркасом – координатами вузлів скінченних елементів у декартовій системі координат. У випадку неканонічної поверхні оболонки, наприклад, лопатки парової турбіни або газового компресора побудова точкового каркаса є досить складною самостійною проблемою. Успішний розв'язок цієї проблеми став можливим завдяки використанню математичного апарата сплайнових апроксимацій, який дав змогу по мінімальному числу теоретичних перерізів пера лопатки будувати з великою точністю необхідну кількість проміжних перерізів. Блок геометричних розрахунків включає набір програмних модулів, які забезпечують побудову сітки скінченних елементів для різних поверхонь у автоматичному режимі. Отримані результати – точкові каркаси поверхонь зберігаються у файлах і використовуються як вхідна інформація для розв'язання задач механіки.

Сітка скінченних елементів дискретної моделі оболонки має регулярну структуру, що суттєво спрощує підготовку вхідної інформації, для забезпечення автоматизації процесу побудови глобальних матриць жорсткості і мас цієї моделі. Нерегулярності типу вирізів, включень фрагментів тіла оболонки, виконаних із матеріалу з іншими характеристиками, ступінчата зміна товщини оболонки усуваються за допомогою введення особливих скінченних елементів “пустий елемент” – для вирізу, “включення” – для області з особливими характеристиками матеріалу, “ребро” – для ділянки із ступінчатою зміною товщини оболонки.

Інформація про зовнішні в'язі, характеристики матеріалу, зовнішні навантаження, топологію розрахункової моделі передбачено формулювати в діалоговому режимі і зберігається в файлах даних на магнітних носіях. Передбачено, що програма реалізується в автоматичному режимі. При багатоваріантних розрахунках конструкції у процесі проектування доводиться вносити зміни в файл даних задачі. Для цього використовується редактор файлів системного блоку комп'ютера.

До складу обчислювальної системи включено блок – після процесор, який оснащений засобами візуалізації результатів, отриманих для конкретного варіанту даних. Візуальна інформація також записується у спеціальні файли і зберігається на магнітних носіях.

Розрахунок конструкцій нерегулярної структури виконується методом під конструкції. При цьому об'єкт розділяється на фрагменти простої форми, в межах яких будується регулярна сітка скінченних елементів. Побудова глобальних матриць жорсткості і мас моделі складної конструкції виконується для узагальнених координат віднесених до області стиковки фрагментів. Новим у запропонованому підході є те, що у якості узагальнених координат приймаються можливі конфігурації границь фрагментів. Шляхом накладення додаткових в'язей на стиковочних границях фрагментів будується основна система метода переміщень. Далі виконується розрахунок кожного фрагмента на змушені переміщення границь, що відповідають їх конфігурації, тобто новим узагальненим координатам. Апроксимацію конфігурацій стиковочних границь можливо виконувати, наприклад, набором синусоїд, амплітудні значення яких розглядаються як узагальнені координати. До однієї границі може бути віднесено декілька узагальнених координат. Повне ж їх число для усієї моделі метода підконструкцій визначає число ступенів вільності редукованої моделі. Узагальненим координатам присвоюються номери. Далі формується матриця базисних векторів як результат розрахунку кожного фрагмента основної системи на змушені зміщення границь від кожної узагальненої координати.

Складовими базисного вектора є переміщення вузлів СЕМ фрагмента від змушеного зміщення стиковочної границі для відповідної узагальненої координати. Тобто розмірність базисного вектора співпадає з числом ступенів вільності фрагмента.

Задача обчислення базисних векторів зведена до розв'язку системи рівнянь МСЕ для кожного фрагмента

$$[K][U]=[P]. \quad (1.1)$$

Тут $[K]$ – матриця жорсткості фрагмента побудована з урахуванням накладених в'язей на границях стиковки з іншими фрагментами; $[P]$ – матриця, складена із стовпчиків матриці жорсткості фрагмента, які відповідають переміщенням вузлів на стиковочній границі фрагмента. Число таких стовпчиків відповідає кількості узагальнених координат моделі фрагмента, що розглядається. Результатом розв'язку задачі (1.1) є матриця $[U]$ складена із базисних векторів, що визначають конфігурацію фрагмента від зміщення границі по кожній із узагальнених координат. Базисний вектор – це по суті свій структурний спінінг. Таким чином можна сказати, що матриця $[U]$ утворена із базисних векторів які характеризують реакцію фрагмента на зміщення стиковочних границь.

Система базисних векторів являє собою систему фундаментальних векторів, лінійна комбінація яких дає змогу реалізувати варіанти стану фрагмента. Матриця $[U]$ формується для кожного фрагмента моделі метода підконструкцій. Базисні вектори повинні відповідати умовам лінійної незалежності. Забезпечення цієї вимоги досягається шляхом введення узагальнених координат для фрагмента таким чином, щоб вони обмежували рух основної системи фрагмента як жорсткого цілого.

Для побудови рівняння руху редукованої моделі фрагмента скористаємось варіаційним рівнянням руху його скінченнелементної моделі

$$\sum_e \delta\{v\}_e^T [K]_e \{v\}_e + \sum_e \delta\{v\}_e^T [M]_e \{\ddot{v}\}_e = \sum_e \delta\{v\}_e^T [Q(t)]_e. \quad (1.2)$$

де $\{v\}_e, \{\ddot{v}\}_e$ – вектори переміщень і прискорень вузлів скінченних елементів (СЕ); $[K]_e, [M]_e \{Q(t)\}_e$ – відповідно матриці жорсткості, мас і вектор зведених до вузлів сил СЕ; символ \sum_e – означає суму по всіх елементах моделі фрагмента; індексом “ T ” відмічені транспоновані вектори.

Якщо компонентами вектора $\{V\}$ є переміщення вузлів СЕМ фрагмента, а переміщення вузлів одного СЕ визначаємо рівністю

$$\{v\}_e = [I]_e \{V\}, \quad (1.3)$$

де $[I]_e$ – матриця інциденцій, яка забезпечує вибірку переміщень стосовно одного СЕ з повного набору переміщень, то співвідношення (1.2) з урахуванням (1.3) набуває вигляду

$$\sum_e \delta\{V\}^T [I]_e^T [K]_e [I]_e \{V\} + \sum_e \delta\{V\}_e [I]_e^T [I]_e^T [M]_e [I]_e \{\ddot{v}\}_e - \sum_e \delta\{V\}^T [I]_e^T \{Q(t)\}_e = 0, \quad (1.4)$$

$$\delta\{V\}^T [K]_e^* [I]_e^T \{V\} + \delta\{V\}^T [M]_e^* [I]_e^T \{\ddot{v}\}_e - \delta\{V\} \{Q\} = 0, \quad (1.5)$$

де $[K]_e^* = \sum_e [I]_e^T [K]_e [I]_e$ – матриця жорсткості СЕМ фрагмента;

$$[M]_e^* = \sum_e [I]_e^T [M]_e [I]_e \quad - \text{матриця мас фрагмента; } \{Q(t)\}_e = \sum_e [I]_e^T \{Q(t)\}_e \quad -$$

вектор зведених до вузлів сил фрагмента; $\{v\}_e, \{\ddot{v}\}_e$ – N вимірні вектори переміщень і прискорень вузлів дискретної моделі фрагмента.

Для перетворення рівнянь руху фрагмента до нових узагальнених координат, запишемо співвідношення між узагальненими координатами СЕМ фрагмента і його розрахункової моделі:

$$\{v\} = [U] \{q\}. \quad (1.6)$$

Підставимо (1.6) в (1.5) і виконаємо аналогічні перетворення. Остаточно отримаємо:

$$\delta\{q\}^T ([A] \{q\} + [B] \{\ddot{q}\} - \{q(t)\}) = 0, \quad (1.7)$$

де

$$[A] = [U]^T [K]_e^* [U], \quad (1.8)$$

$$[B] = [U]^T [M]_e^* [U], \quad (1.9)$$

$$\{q(t)\} = [U]^T \{Q(t)\}, \quad (1.10)$$

відповідно матриці жорсткості, мас і вектор узагальнених сил, які характеризують рух редукованої моделі фрагмента.

Побудова рівняння руху моделі складеної оболонки метода під конструкцій виконується за схемою (1.3) – (1.5).

Якщо ввести співвідношення

$$\{q\} = [I]_F \{P\}, \quad (1.11)$$

де $\{P\}$ – вектор узагальнених координат повної редукованої моделі оболонки метода під конструкцій; $\{q\}$ – вектор узагальнених переміщень редукованої моделі фрагмента; $[I]_F$ – матриця інциденції фрагмента, яка

забезпечує вибірку з $\{P\}$ узагальнених переміщень, які стосуються конкретного фрагмента в складі повно і редукованої моделі конструкції.

Остаточнo рівняння руху редукованої моделі, по аналогії з (1.7), і з урахуванням того, що вектор варіації можливих переміщень $\delta\{q\} \neq 0$ набуває вигляду

$$[A]^*\{p\} + [B]^*\{p\} = \{q(t)^*\}. \quad (1.12)$$

Задача про власні коливання допускає розв'язок матричного рівняння (1.12) у вигляді

$$\{p\} = \{r\} \sin(\omega t + \alpha)$$

зводиться до розв'язку узагальненої проблеми про власні значення

$$([A] - \lambda[B])\{r\} = 0, \quad (1.13)$$

Матричне рівняння (1.13) має нетривіальний розв'язок за умови

$$\det \left| [A] - \lambda[B] \right| = 0, \quad (1.14)$$

яка являє характеристичне рівняння системи.

Корні λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) і відповідні їм вектори розв'язку системи (14) $\{r\}^{(i)}$ називаються власними значеннями і власними векторами матриці $[B]^{-1}[A]$. Підстановка їх у (1.13) приводить до рівності

$$[A][R] = [\Lambda][B][R], \quad (1.15)$$

де $[R]$ – модальна матриця, стовпцями якої є вектори $\{r\}^{(i)}$; $[\Lambda]$ – діагональна матриця складена із власних значень λ_i .

Окрім самостійного використання при оцінюванні частот і форм власних коливань конструкції, що важливо для прогнозування резонансних явищ в конструкціях і спорудах, розв'язок проблеми (1.13) грає фундаментальну роль в теорії малих коливань, а також в методах розв'язку нелінійних задач, таких як метод малого параметра, методи теорії стійкості руху, задачі бифуркації і т.п.

Розв'язок узагальненої проблеми про власні значення (1.13) надає можливість реалізувати перетворення системи рівнянь руху до головного (нормального) базису простору. Для нормованих власних векторів, які взаємно ортогональні отримаємо важливі співвідношення

$$[R]^T [B][R] = [E], \quad [R]^T [A][R] = [\Lambda]. \quad (1.16)$$

Якщо в (1.2) зробити заміну $\{v\} = [R]\{p\}$, то отримаємо

$$\delta\{p\}^T ([R]^T [K][R]\{p\} + [R]^T [M][R]\{\ddot{p}\}) - [R]^T \{Q(t)\} = 0.$$

З урахуванням (1.16), за умов довільної варіації вектора $\{p\}$, маємо:

$$\{p\} + [\Lambda]\{p\} = \{f\}, \quad (1.17)$$

де $\{f\} = [R]^T \{Q(t)\}$.

Якщо матриця $[\Lambda]$ – діагональна, то розв'язок (1.17) зводиться до розв'язку N незалежних рівнянь що мають вигляд

$$\ddot{p}_i + \lambda_{(i)} p_i = f_i(t), \quad (1.18)$$

розв'язок якого визначається інтегралом Дюамеля [1].

2. Урахування попереднього напруження конструкції в задачах динаміки

В деяких випадках виникає необхідність проводити розрахунок динамічних характеристик оболонки в напруженому стані.

Розглядаються малі коливання оболонки відносно природного стану ненапруженої оболонки та відносно скінченно-здеформованого урівноваженого стану, який характеризується напруженнями $\dot{\sigma}^{ij}$, викликаними статичними силами \dot{F}_i .

Повне напруження і інтенсивність сил подамо у вигляді сум:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^{ij} &= \dot{\sigma}^{ij} + \Delta\sigma^{ij}(t), \\ F_{i'} &= \dot{F}_{i'} + \Delta F_{i'}(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $\Delta\sigma^{ij}(t)$, $\Delta F_{i'}(t)$ – змінювані в часі прирощення відповідних величин.

Зовнішні сили $F_{i'}$ визначаються в декартовій системі координат, пов'язаній з конструкцією $Z^{i'}$. Напруження ж – в місцевій криволінійній системі.

Передбачено виконання умови взаємно однозначної відповідності систем координат:

$$x^i = x^i(Z^{1'}, Z^{2'}, Z^{3'}), \quad Z^j = Z^j(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}). \quad (2.2)$$

Базисні вектори місцевої \bar{r}_j , і глобальної $\bar{e}_{i'}$ системи пов'язані співвідношеннями:

$$\bar{r}_j = \frac{\partial \bar{r}'}{\partial x^j} = Z_{j'}^{i'} \bar{e}_{i'}, \quad \bar{e}_j = \frac{\partial \bar{r}'}{\partial z^{i'}} = Z_{i'}^k \bar{r}_k, \quad (2.3)$$

де

$$Z_{j'}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad Z_{i'}^k = \frac{\partial x^k}{\partial z^{i'}} - \quad (2.4)$$

компоненти тензорів перетворення, які в наслідок (2) задовольняють рівнянням:

$$Z_j' Z_i^k = \delta_j^k \begin{cases} 1, & \text{при } j=k \\ 0, & \text{при } j \neq k \end{cases} \quad (2.5)$$

Для кожної часової миті напружено–деформований стан оболонки як тривимірного тіла повинен задовольняти варіаційному рівнянню руху, яке для задачі про вільні коливання у відповідності з принципом Лагранжа–Д'аламбера має вигляд:

$$\delta W - \delta T = 0. \quad (2.6)$$

Перший член в (2.6) представляє варіацію енергії пружної деформації

$$\delta W = \int_{\nu} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\nu, \quad (2.7)$$

де $\sigma^{ij} = C^{ijmn} \varepsilon_{nm}$ – компонент тензора напружень середовища [2];

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(Z_j' \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} + Z_i' \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} + \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} \right)$ – тензор скінченних деформацій, з урахуванням якого (7) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\nu} \sigma^{ij} \frac{1}{2} \left(Z_j' \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} + Z_i' \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} + \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} + \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} \right) d\nu = \\ &= \int_{\nu} \sigma^{ij} \left(Z_j' + \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} \right) \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} d\nu. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Остаточню, з урахуванням (2.1), отримаємо (2.7) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\nu} \left(C^{ijmn} Z_n^k Z_j' \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} + \dot{\sigma}^{ij} \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} \right) d\nu = \\ &= \int_{\nu} \left(C^{ijmn} Z_n^k Z_j' + \dot{\sigma}^{im} \delta^{k'e'} \right) \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} d\nu = \\ &= \int_{\nu} \left(C^{ijmn} + Z_p^n Z_p^j \dot{\sigma}^{im} \right) Z_n^k Z_j' \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} d\nu = \\ &= \int_{\nu} \left(C^{ijmn} + g^{nj} \dot{\sigma}^{im} \right) Z_n^k Z_j' \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} d\nu = \int_{\nu} C^{*ijmn} Z_n^k Z_j' \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^m} \delta \frac{\partial u_{e'}}{\partial x^i} d\nu, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де

$$C^{*ijmn} = C^{ijmn} + g^{nj} \dot{\sigma}^{im}. \quad (2.10)$$

Співвідношення (2.9) по формі співпадає із співвідношенням варіації енергії нескінченно малих деформацій відносно ненапруженого

(природного) стану. Відміна (2.10) від компонент звичайного тензора пружності полягає в наявності складових, які утримують компоненти початкових напружень, що можна вважати анізотропією матеріалу, яка визначається вибором відлікового стану.

Викладені положення дають змогу суттєво спростити співвідношення методу скінчених елементів для попередньо напружених конструкцій. Побудова матриці жорсткості скінченного елемента у цьому випадку не відрізняється від випадку ненапружених елементів. Корегується тільки блок, що визначає компоненти тензора пружності у відповідності з (2.10).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Клаф, Дж. Пензиен.* Динамика сооружений. –М: Стройиздат, 1981, -345 с.
2. Метод конечных элементов в механике твердых тел (под общ. ред. А.С.Сахарова, И. Альтенбаха) - Киев: Высшая школа. Головное изд., 1982, – 480 с.

Стаття надійшла до редакції 23.10.2012 р.

Легостаев А.Д., Гречух Н.А.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Изложено положение относительно использования алгоритма одновременных итераций в задаче о собственных колебаниях сложных оболочек, для которых используется прием декомпозиции оболочки на фрагменты. Расчет оболочки на вынужденные колебания ориентирован на преобразования уравнений движения к нормальным координатам – формам собственных колебаний фрагментов. Определены соотношения для предварительного напряженного конечного элемента оболочки.

Legostaev A.D., Grechukh N.A.

SOME TASKS OF DYNAMICS OF SHELL STRUCTURES

There are formulated the principle concerning realization of algorithm of simultaneous iterations for the problem of natural vibrations of complex shells for which decomposition technique to shell fragments is used. Investigation of shell on forced vibrations is focused on transformation the equations of motion to the normal coordinates- forms of natural vibrations of fragments. The relations for prestressed finite element of shell are determined.

УДК 539.3

О.А. Киричук, д-р техн. наук

О.О. Лук'яненко, канд. техн. наук

ДИНАМІКА ДВОХ КІЛЕЦЬ, З'ЄДНАНИХ СТЕРЖНЕВИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Для якісної оцінки взаємного впливу власних коливань двох резервуарів, поверхні яких в певних точках мають з'єднання прямолінійними трубчатими елементами, виконано модальний аналіз конструкції на основі спрощеної скінченноелементної моделі у вигляді двох концентричних кілець, що з'єднанні стержневим елементом. Виявлено суттєвий вплив з'єднувального елемента на динаміку механічної конструкції в цілому.

Дослідження та експлуатація відповідальних споруд, до класу яких відносяться паливні резервуари, пов'язані з урахуванням всіх вимог діючих нормативних документів, особливо, якщо споруда з підвищеною вимогою безпеки [1, 2]. Одним із варіантів захисту оточуючого середовища від витоків пального є конструктивне рішення, коли резервуар з паливом знаходиться всередині іншого захисного резервуара з дещо більшим діаметром. Прикладом такої споруди є резервуар для зберігання дизельного пального на Українській антарктичній станції Академік Вернадський. Він являє собою металевий циліндр об'ємом 200 м^3 , висотою $5,96 \text{ м}$ і діаметром $6,63 \text{ м}$ [3]. Захисний металевий циліндричний резервуар має висоту $6,58 \text{ м}$ і діаметр $6,96 \text{ м}$. Товщина стінок обох резервуарів складає 5 мм , матеріал – сталь СтЗпс2. Дві циліндричні оболонки мають технологічні з'єднувальні елементи у вигляді трубопроводів для закачування та відбору пального. Оскільки з ряду об'єктивних причин на стадіях проектування резервуарів та монтажу на місці їх подальшої експлуатації були допущені відхилення від діючих нормативних документів [2], виникла необхідність створити автоматизовану систему діагностики функціонального стану резервуарів для забезпечення їх безаварійної експлуатації та запобігання витоків пального у навколишнє середовище.

Одним з важливих елементів системи є побудова математичної моделі об'єкту діагностики, виконання розрахунків на статичні і динамічні експлуатаційні навантаження, дослідження несучої спроможності та надійності резервуарів [4].

Для якісної оцінки взаємного впливу власних коливань обох циліндрів, поверхні яких в певних точках мають з'єднання прямолінійними трубчатими елементами, виконано модальний аналіз

резервуарів на основі спрощеної скінченноелементної моделі у вигляді двох концентричних кілець, що з'єднанні стержневим елементом (рис. 1, *а*). Діаметри кілець відповідають діаметрам внутрішнього та зовнішнього резервуарів. Висота кілець приймається $1/20$ від висоти зовнішнього резервуару – $0,331$ м, товщина стінок – 5 мм, матеріал – сталь Ст.3пс.2. Стержневий елемент, що з'єднує кільця, розташований посередині висоти стінок кілець і моделює сталеву трубу для закачування палива діаметром 3 дюйма, довжиною $0,16$ м (рис. 1, *б*).

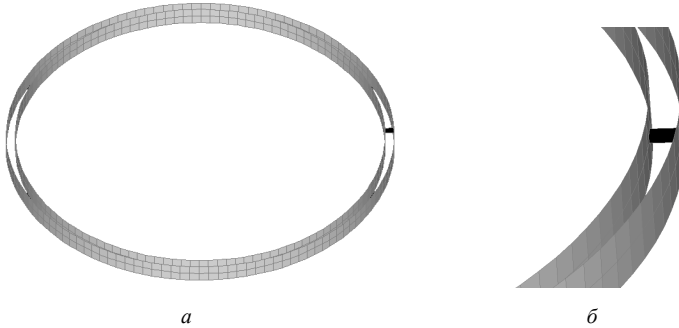


Рис. 1. Скінченноелементна модель системи двох кілець, з'єднаних стержневим елементом

Кільця розбиті по колу на 128 частин, по висоті – на 2 . Стінки змодельовані чотирьохкутними плоскими скінченними елементами зі шістьма степенями вільності. Граничні умови відповідають реальним умовам закріплення резервуарів (рис. 2).

Для вузлів нижньої кромки внутрішнього кільця обмежені переміщення по твірній та повороти навколо радіусу і дотичної. Вузли нижньої кромки зовнішнього кільця відповідають граничним умовам жорсткого кріплення.

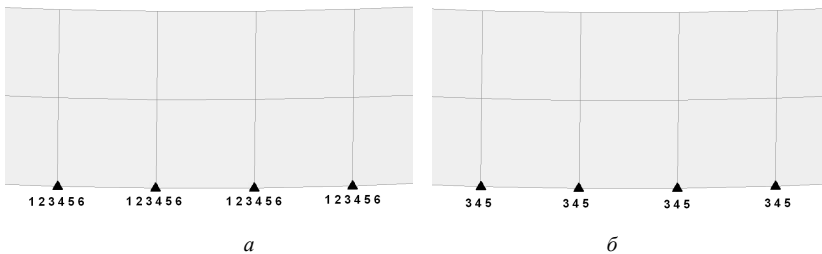


Рис. 2. Граничні умови кілець: а) зовнішнього, б) внутрішнього

Модальний аналіз об'єкту дослідження полягав у визначенні частот і форм власних коливань. Для цього був застосований пакет прикладних програм скінченноелементного аналізу конструкцій NASTRAN [5]. За допомогою методу Ланцоша розв'язані задачі на власні значення для внутрішнього і зовнішнього кілець окремо та системи двох кілець, які з'єднані стержневим елементом. В таблиці 1 і на рис. 3 відповідно представлені частоти і форми власних коливань.

Таблиця 1

№	Внутрішнє кільце	Зовнішнє кільце	З'єднанні кільця
1	-0,0000001	119,4099	0,062313
2	-0,0000001	119,4102	0,178424
3	-0,00000003	119,6119	0,373754
4	0,298357	119,6124	0,643757
5	0,298357	119,7754	0,962603
6	0,843986	119,7757	1,357360
7	0,843986	120,3821	1,787293
8	1,618477	120,3835	2,301998
9	1,618477	120,7053	2,840047
10	2,617796	120,7059	3,473504
11	2,617796	121,7224	4,118590
12	3,8408441	121,7230	4,870479
13	3,8408420	122,1956	5,621881
14	5,287281	122,1958	6,492289
15	5,287282	123,6275	7,348997
16	6,957028	123,6276	8,338570
17	6,957033	124,2401	9,398452
18	8,850088	124,2407	10,40900
19	8,850090	126,0931	11,46684
20	10,96648	126,0934	12,70312

З аналізу даних, наведених в таблиці 1, слідує, що перші двадцять частот власних коливань внутрішнього кільця набувають значення від 0 до 10,967 Гц. Спектр частот власних коливань зовнішнього кільця є більш щільним і розташований в діапазоні від 119,41 Гц до 126,093 Гц. Частоти власних коливань двох з'єднаних кілець лежать в діапазоні [0,062; 12,703] Гц і наближені до частот коливань внутрішнього кільця, але відрізняються від них. Це спостереження свідчить про те, що необхідно

враховувати вплив з'єднання при розв'язанні задач динаміки резервуару з паливом.

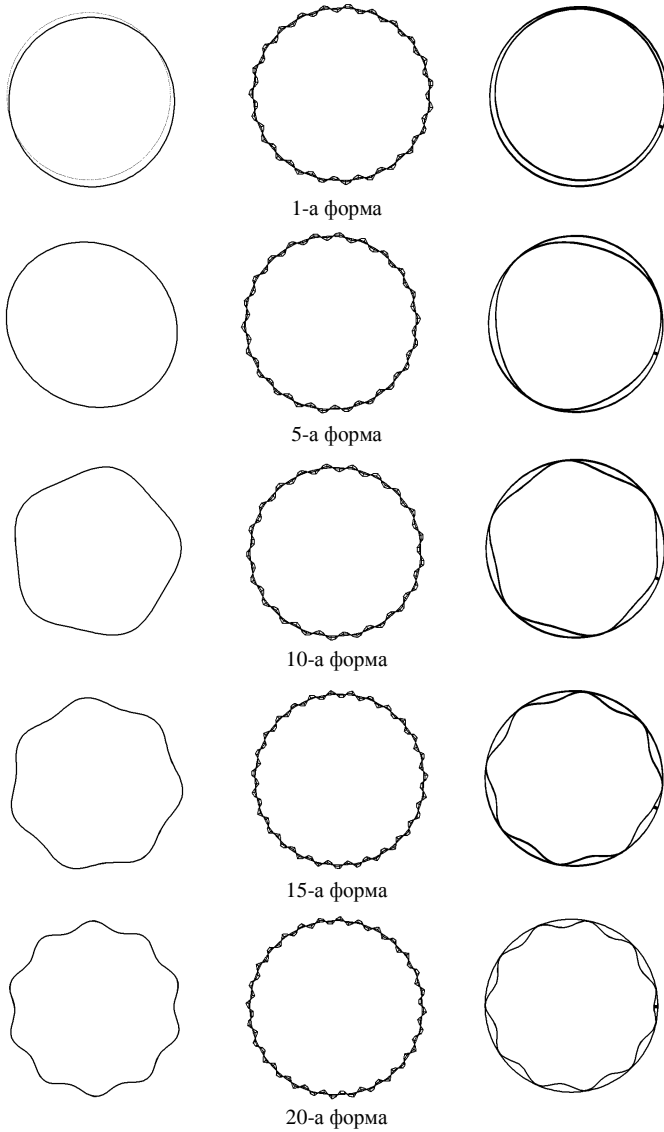


Рис 3. Форми власних коливань внутрішнього, зовнішнього кілець та системи двох з'єднаних кілець

Згідно результатів дослідження, наведених на рис. 3, внутрішнє кільце з першої по четверту форми коливань не деформується, а переміщується в горизонтальній площині як ціле. З п'ятої по двадцяту форми власних коливань кільця деформуються із збільшенням хвиль, при цьому реалізуються як циклічно симетричні так і циклічно несиметричні форми деформування. Форми власних коливань зовнішнього кільця також реалізуються як по циклічно симетричним, так і несиметричним формам із значно більшою кількістю хвиль деформування стінки кільця. Вздовж кільця спостерігаються від 23 до 28 хвиль.

При з'єднанні кільце стержневим елементом зовнішнє кільце не деформується. Внутрішнє кільце деформується подібно до форм коливань при його окремому варіанті розглядання, але кількість хвиль більша на одну ніж відповідна форма коливань окремого кільця. Форми коливань з'єднаних кілець мають завжди несиметричний характер, бо в місці їх з'єднання спостерігається незначний вплив стержневого елемента на деформацію внутрішнього кільця (рис. 4).

Дослідження показали, що зовнішнє кільце в системі двох з'єднаних кілець по перших двадцятьох формах коливань не деформується, тобто є більш жорстким за рахунок граничних умов жорсткого кріплення його нижньої кромки. Внутрішнє кільце деформується по циклічно несиметричним формам і якщо його амплітуда коливань за певних причин буде більша за 0,16 м, то це може спричинити деформацію зовнішнього кільця. Частоти поперечних коливань окремих кілець відрізняються від відповідних частот при їх з'єднанні, що свідчить про вплив стержневого елемента на їх динамічну поведінку. Таким чином, динаміка двох кілець, що з'єднані стержневим елементом, відрізняється від динаміки окремих кілець.

Висновок. наявність з'єднувального стержневого елемента двох кілець суттєво впливає на динаміку механічної конструкції в цілому. В подальших дослідженнях динаміки паливного резервуару за уточнену розрахункову модель необхідно прийняти систему з'єднаних циліндричних оболонок, що дозволить врахувати взаємодію не тільки поперечних, але і повздовжніх форм власних коливань.

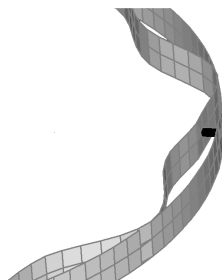


Рис. 4. Дев'ятнадцята форма власних коливань двох з'єднаних кілець

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. ВБН В.2.2-58.2-94. Резервуари вертикальні сталеві для зберігання нафти і нафтопродуктів з тиском насичених парів не вище 93.3 кПа. – Чинний з 1994.10.01 – К.: Держкомнафтогаз України, 1994. - 98с.
2. Протокол про охорону навколишнього середовища до Договору про Антарктику (Мадрид, 4жовтня 1991р.) Закон України №2284 – III від 22.02.2001р.
3. *Гайдайчук В.В., Киричук О.А., Кузько О.В., Палій О.М.* Розрахунок динамічних характеристик оболонки паливного резервуару// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.86. – К.:КНУБА, 2010. – С. 16 –21.
4. *Дехтярюк Є.С., Лук'яненко О.О., Шах В.В.* Оцінка рівня конструкційної безпеки нафтоналивного резервуара// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.86. – К.:КНУБА, 2010. – С. 22 –29.
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Стаття надійшла до редакції 02.08.2012 р.

Киричук А.А., Лук'яненко О.А.

ДИНАМИКА ДВУХ КОЛЕЦ, СОЕДИНЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Для качественной оценки взаимного влияния собственных колебаний двух резервуаров, поверхности которых в определенных точках имеют соединения прямолинейными трубчатыми элементами, выполнен модальный анализ конструкции на основе упрощенной конечноэлементной модели в виде двух концентрических колец, соединенных стержневым элементом. Обнаружено существенное влияние соединительного элемента на динамику механической конструкции в целом.

Kyrychuk A.A., Lukianchenko O.O.

DYNAMICS OF TWO RINGS CONNECTED BY A BAR ELEMENT

For qualitative assessment of the mutual influence of the natural oscillations of two reservoirs, which surfaces at certain points are connected with straight tubular elements, modal analysis was made on the basis of the simplified structure of the finite element model in the form of two concentric rings connected by a bar element. A significant effect of the connecting element on the dynamics of the overall mechanical design was revealed.

УДК 539.3

І.І. Солодей, канд. техн. наук

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО І НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТА РУЙНУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

Стаття присвячена постановці проблеми, вибору систем координат, рівнянь теорії пружності та пластичності. Запропонована концепція розгляду задач контактної взаємодії системи тіл та тіл з тріщинами. Проведено аналіз рівнянь динамічної рівноваги загального вигляду та їх окремих випадків.

Вступ.

Особливе місце, серед розмаїття об'єктів, що розглядаються за допомогою аналітичних і чисельних методів, займають просторові кругові і призматичні тіла складної форми, що об'єднують суттєво тривимірні та тонкостінні елементи із змінними по всім координатам фізико-механічними характеристиками. Виділений геометричний клас використовується в якості природних конструкцій, вузлів та деталей в будівництві і різноманітних областях машинобудування. Достатньо велика розповсюдженість зазначених форм в будівельній та машинобудівельній галузях народного господарства з одного боку, та можливість спрощення розрахункових співвідношень за рахунок урахування їх геометричних особливостей з іншого, привертає все більшу увагу дослідників. Прикладами об'єктів можуть служити захисні оболонки ядерних реакторів, промислові градирні та димові труби, резервуари для зберігання харчових або промислових рідин, елементи трубопроводів, тунелі метрополітену, перекриття та фундаменти будівель, а також різноманітні вузли та деталі енергетичного і транспортного машинобудування.

Проектування конструкцій та їх елементів на сучасному етапі неможливо без розгляду динамічних навантажень. Це пояснюється багатьма причинами. Найбільш очевидна – збільшення динамічних впливів, що викликані машинами, кранами та іншим обладнанням, широке застосування вібрацій, ударів та промислових вибухів як елементів технологічного процесу, урахування природних факторів таких як смерч (торнадо) або сейсмічні коливання.

Необхідність задоволення жорстким нормам безпеки, бажання створювати оптимальні рішення з точки зору вартості розробки та

подальшої експлуатації запроєктованих об'єктів веде до розгляду складних просторових задач динаміки при наявності різноманітних супутніх факторів, що ускладнюють аналіз їх поведінки. До них відносяться змінність фізико-механічних характеристик, невизначені заздалегідь зони контактної взаємодії, крім того, все більш високі потреби до надійності і економічності конструкцій ведуть до необхідності використання матеріалів, які відрізняються суттєво вираженими нелінійними механічними характеристиками. Одним з важливих питань є визначення можливості експлуатації відповідальних елементів конструкцій при наявності в них тріщин. Перебіг процесів деформування значною мірою залежить від геометричних особливостей запроєктованих об'єктів. В багатьох випадках на практиці доводиться мати справу з круговими та призматичними тілами неканонічної форми, яка визначається або проектними рішеннями, або є результатом умов експлуатації.

Тому розробка та реалізація об'єктоорієнтованих ефективних підходів розв'язання стаціонарних і нестаціонарних просторових задач динаміки для неоднорідних просторових кругових і призматичних тіл складної форми з можливістю урахування нелінійної роботи матеріалу, контактної взаємодії, тріщин та відхилень геометричних параметрів від номінальних є актуальною проблемою будівельної механіки і представляє практичний інтерес.

1. Вихідні співвідношення теорії пружнопластичності для просторових кругових та призматичних тіл неканонічної форми із змінними геометричними та фізико-механічними параметрами.

Розглянемо в деякій довільній системі координат Z^i просторові кругові або призматичні тіла (рис. 1), що утворені рухом деякої твірної поверхні вздовж замкнутої або незамкнутої довільної напрямної без розривів та знаходяться під дією стаціонарного чи нестаціонарного навантаження, на інтервалі часу $T \in [t_0, t_1]$.

Систему координат Z^i в подальшому будемо називати базисною та використовувати для опису геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов,

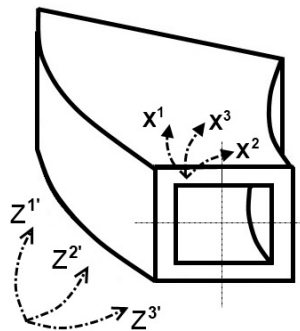


Рис. 1. Кругові та призматичні просторові тіла

зовнішніх навантажень. Для подання напружено-деформованого стану тіла запровадимо місцеву криволінійну систему координат x^i , яка пов'язана з геометрією тіла. Координатні лінії x^1 і x^2 розміщені в області твірної поверхні, а x^3 - орієнтована вздовж напрямної.

Вважається, що в будь-якій точці тіла відомий однозначний зв'язок між базисною і місцевою системами координат, який визначається за допомогою прямого і зворотного тензорів перетворення координат:

$$z_{,j}^i = \frac{\partial Z^i}{\partial x^j}, \quad x_{,j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial Z^{j'}}. \quad (1)$$

Тут і надалі, індекси, що позначені латинськими літерами, приймають значення 1, 2, 3; а грецькими – 1, 2; кома перед індексом показує операцію диференціювання.

Коваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат можна представити через коваріантні компоненти базисної системи:

$$g_{ij} = z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} g_{m'n'}. \quad (2)$$

Контраваріантні компоненти знаходяться по відомим коваріантним:

$$g^{ij} = \frac{A(g_{ij})}{g}, \quad (3)$$

де $A(g_{ij})$ - алгебраїчне доповнення до елемента g_{ij} , $g = \det[g_{ij}]$ - визначник матриці.

Геометричні співвідношення Коші в криволінійних системах координат. В загальному випадку компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються співвідношенням:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (4)$$

де $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j}$, Γ_{ij}^k - символи Кристофеля другого роду, u_i - переміщення в місцевій системі координат.

Для зручності представимо переміщення і символи Кристофеля їх значеннями в базисній системі координат:

$$u_k = z_{,k}^{m'} u_{m'} \quad (5)$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{,r'}^k z_{,i}^{m'} \left(z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{r'} + \frac{\partial z_{,j}^{r'}}{\partial z_{,m'}^{r'}} \right) \quad (6)$$

де

$$z_{,k}^{s'} x_{,r'}^k = \delta_{r'}^{s'}. \quad (7)$$

Після підстановки (5) – (7) в (4) отримаємо формулу для подання компонент тензора деформацій в місцевій системі координат через компоненти переміщень в базисній [2, 5]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} \right) - u_{k'} z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{k'}. \quad (8)$$

Геометричні співвідношення Коші в декартовій та ортогональній циліндричній системах координат. Опис кругових та призматичних тіл із змінними геометричними та фізико-механічними параметрами найбільш природно проводити в ортогональній циліндричній:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = (Z^{2'})^2, \quad \Gamma_{3'3'}^{2'} = -Z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{Z^{2'}} \quad (9)$$

та декартовій системах координат:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = g_{3'3'} = 1, \quad \Gamma_{m'}^{k'} = 0.. \quad (10)$$

В цьому випадку компоненти метричного тензора в місцевій системі координат подаються через компоненти в базисній по формулі:

$$g_{ij} = z_{,i}^{1'} z_{,j}^{1'} + z_{,i}^{2'} z_{,j}^{2'} + z_{,i}^{3'} z_{,j}^{3'} g_{3'3'}. \quad (11)$$

Зв'язок між переміщеннями і деформаціями (8) можна записати у вигляді:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} \right) - u_{2'} z_{,i}^{3'} z_{,j}^{3'} \Gamma_{3'3'}^{2'} - u_{3'} z_{,i}^{2'} z_{,j}^{3'} \Gamma_{2'3'}^{3'} - u_{3'} z_{,i}^{3'} z_{,j}^{2'} \Gamma_{3'2'}^{3'}. \quad (12)$$

Геометричні співвідношення Коші для тіл обертання та прямокутних призматичних тіл. Важливим частковим випадком, що має самостійне практичне значення, є об'єкти з напрямною канонічної форми, для яких геометричні рівняння (12) значно спрощуються. Це насамперед неоднорідні тіла обертання та призматичні прямокутні тіла із змінною площею поперечного перерізу.

В силу збіжності x^3 і $Z^{3'}$, та ортогональності їх до площини поперечного перерізу в циліндричній системі координат ($0 \leq x^3 \leq 2\pi$):

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0, \quad z_{,3}^{3'} = 1, \quad (13)$$

в декартовій ($0 \leq x^3 \leq 2$):

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0, \quad z_{,3}^{3'} = a, \quad (14)$$

де a – половина довжини тіла.

Враховуючи (13) і (14), співвідношення (12) приймають вигляд в ортогональній циліндричній системі координат:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{,\beta}^{\gamma} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{,\alpha}^{\gamma} \right),$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3} - \frac{2z_{,\alpha}^{\gamma} u_{3'}}{Z^{2'}} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3',3} + Z^{2'} u_{2'}, \quad (15)$$

в декартовій:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,\beta} + z_{,\beta}^{\gamma} u_{\gamma,\alpha} \right),$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(a u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma} u_{\gamma,3} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = a u_{3',3}. \quad (16)$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [2]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (17)$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних сталей d^{ijkl} пов'язані з коефіцієнтами Ляме λ і μ співвідношеннями [7]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{il} g^{jk} + g^{ik} g^{jl}), \quad (18)$$

де $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $E = E(Z')$, $\nu = \nu(Z')$ - значення модуля пружності і коефіцієнта Пуасона в точці тіла, що розглядається.

Припускається, що в процесі навантаження в об'ємі тіла виникають пружні ε_{ij}^e і миттєві пластичні ε_{ij}^p деформації. Опис пластичного деформування матеріалу ґрунтується на наступних загальних гіпотезах та припущеннях, що базуються на експериментальних даних [6]:

1. Матеріал тіла однорідний і ізотропний, зміна його об'єму - лінійно-пружна:

$$\varepsilon_{kk}^p = 0. \quad (19)$$

2. Компоненти тензора приросту деформацій $d\varepsilon_{ij}$ складаються з приросту пружних $d\varepsilon_{ij}^e$ і пластичних $d\varepsilon_{ij}^p$ складових:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (20)$$

3. Зворотна частина тензора приросту деформацій однозначно пов'язана з тензором напружень і його приростом:

$$d\varepsilon_{ij}^e = k_{ijkl} d\sigma^{kl} + dk_{ijkl} \sigma^{kl}. \quad (21)$$

4. Область пружних деформацій обмежена поверхнею текучості, рівняння якої в просторі напружень має вигляд:

$$f(\sigma^{ij}, \chi) = 0, \quad (22)$$

де χ - параметр зміцнення.

5. У відповідності з асоційованим законом пластичної течії пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні текучості:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = d\lambda S_{ij}. \quad (23)$$

Для ізотропно зміцнюваного матеріалу при умові текучості Мізеса рівняння поверхні має вигляд:

$$f = \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} - \tau_s^2(\chi), \quad (24)$$

де τ_s - границя текучості при чистому зсуві, $\chi = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p$ - параметр

Одквіста, $S^{ij} = \sigma^{ij} - \sigma_0 g^{ij}$ - компоненти девіатора напружень, $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma^{ij} g_{ij}$.

Для моделювання взаємодії тіл вводиться тонкий контактний шар, в межах якого напружено-деформований стан описується в додатковій системі координат $y^{i''}$, що пов'язана з конфігурацією поверхонь тіл (рис. 2). В кожний момент часу t забезпечуються умови непроникнення, тертя на основі закону Кулона та відсутність розтягуючих напружень нормальних до поверхні контакту:

$$\sigma_t^{n''(n'')} \leq 0, \quad \tau_t \leq f_{fr} \sigma_t^{n''(n'')}, \quad (25)$$

де f_{fr} - коефіцієнт тертя, n'' - нормаль до поверхні контакту.

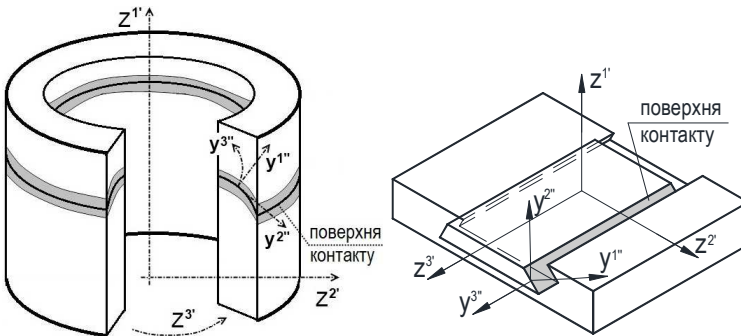


Рис. 2. Моделювання взаємодії тіл

Приймається, що для контактного шару щільність матеріалу та коефіцієнт Пуасона дорівнюють нулю:

$$\rho_c = 0, \nu_c = 0. \quad (26)$$

Формулювання (26) забезпечує безмасовість границі та миттєву передачу зусиль від одного тіла до іншого при динамічному навантаженні.

Рух неоднорідного ізотропного тіла, об'ємом V , обмеженого поверхнею S описується рівнянням, що є наслідком принципу Даламбера, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат має вигляд [2, 7]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} z_{,k}^{j'} \sigma^{ki}) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'}. \quad (27)$$

Однозначність розв'язання (27) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу t_0 , який приймається за початок часової координати:

$$u(Z^{i'}, t_0) = u_0(Z^{i'}), \dot{u}(Z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(Z^{i'}), Z^{i'} \in V. \quad (28)$$

На частині поверхні S_u можливі кінематичні граничні умови:

$$u(Z^{i'}, t) = \tilde{u}(Z^{i'}, t), Z^{i'} \in S_u, \quad (29)$$

а на поверхні S_p з нормаллю $\vec{n} = n_j e^j$ - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_{,i}^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(Z^{k'}, t), Z^{k'} \in S_p. \quad (30)$$

2. Особливості напружено-деформованого стану просторових тіл з тріщинами при наявності динамічних навантажень.

Для кругових та призматичних тіл розглядаються повздовжні стаціонарні тріщини, фронт яких збігається із напрямною тіла (рис. 3).

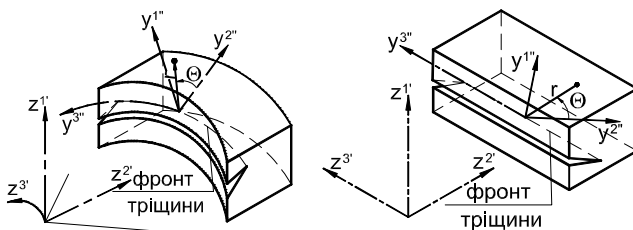


Рис. 3. Фрагменти тіл з тріщинами

Аналіз напружено-деформованого стану проводиться без урахування взаємодії берегів тріщини, тобто $\sigma_t^{n''(n'')} = 0$, $\tau_t = 0$, де n'' - нормаль до поверхні тріщини, τ - дотичні напруження на цій поверхні, t - час.

Найчастіше, при аналізі стану тіла з тріщинами, дослідники оперують коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН). Для задач динаміки особливістю є залежність напружень і перемішень від часу та швидкості приросту навантаження.

Для тріщин нормального відриву (тип I) формули зв'язку між компонентами тензора напружень, вектора переміщень та значеннями динамічного КІН мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma^{11}(t) &= \frac{K_{I_d}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma^{12}(t) &= \frac{K_{I_d}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{22}(t) &= \frac{K_{I_d}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ u_1(t) &= \frac{K_{I_d}(t)}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2}), \\ u_2(t) &= \frac{K_{I_d}(t)}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}).\end{aligned}\quad (31)$$

Для тріщин поперечного зсуву (тип II):

$$\begin{aligned}\sigma^{11}(t) &= \frac{K_{II_d}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{12}(t) &= \frac{K_{II_d}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma^{22}(t) &= \frac{K_{II_d}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right), \\ u_1(t) &= \frac{K_{II_d}(t)}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}), \\ u_2(t) &= \frac{K_{II_d}(t)}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2}).\end{aligned}\quad (32)$$

Для тріщин повздовжнього зсуву (тип III):

$$\sigma^{13}(t) = \frac{K_{III_d}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$\begin{aligned}\sigma^{23}(t) &= -\frac{K_{III}(t)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ u_3(t) &= \frac{K_{III}(t)}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2},\end{aligned}\quad (33)$$

де r , θ – полярні координати з початком у вершині тріщини (рис. 3); μ – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона.

Окрім аналізу тріщиностійкості конструкції на основі динамічного КІН, використовують і так званий енергетичний підхід, що спирається на поняття J - інтеграла. При динамічному процесі розповсюдження хвиль напружень у пружному тілі із стаціонарною тріщиною можна записати [1]:

$$J_k(t) = \int_{\Gamma} \left[(W+T)n_k - f_i \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right] d\Gamma, \quad (34)$$

де Γ - контур інтегрування, n_k - проекція на вісь x^k одиничної зовнішньої нормалі до контуру Γ , f_i - проекція на вісь x^k вектора зусиль на контурі Γ , u - переміщення, W і T - потенціальна та кінетична енергії відповідно.

Вирази (35) представляють собою зв'язок між традиційними характеристиками тріщиностійкості в області лінійної механіки руйнування:

$$K_I = \sqrt{J_I \tilde{E}}, \quad K_{II} = \sqrt{J_{II} \tilde{E}}, \quad K_{III} = \sqrt{2\mu J_{III}}, \quad (35)$$

$\tilde{E} = E$ - плоский напружений стан, $\tilde{E} = E/(1-\nu^2)$ - плоска деформація.

Як правило, для обчислення J - інтеграла в межах сіткових методів використовується формулювання:

$$J = \int_{\Gamma} \left[(W+T)n_i - n_i \sigma^{ik'} \zeta_{k'l'} p^{l'} \right] d\Gamma, \quad (36)$$

де p – вектор, що визначає напрямок розвитку тріщини, $\zeta = \nabla u$ - градієнт переміщень, σ – тензор напружень, n_i – проекція нормалі на напрямок вектора p .

3. Рівняння динамічної рівноваги просторових тіл.

Диференційне рівняння (27) з граничними умовами (30) еквівалентно варіаційному принципу Гамільтона [3, 4]:

$$\delta T + \delta W - \delta A = 0, \quad (37)$$

де δW - варіація потенційної енергії деформації [2]:

$$\delta W = \int_V \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dV, \quad (38)$$

$\delta A = \int_V f^i \delta u_i dV + \int_S p^i \delta u_i dS$ - варіація роботи внутрішніх та зовнішніх сил.

При загальному підході варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta T = - \int \int \int \rho \ddot{u}_k \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (39)$$

виходячи з якого, можна отримати вирази для окремих важливих випадків, що визначаються параметрами навантаження, а саме законом його зміни, рівнем інтенсивності, швидкістю зростання та тривалістю у часі.

Рівняння стану матеріалу, в його найбільш загальній формі, повинно описувати поведінку досліджуваного об'єкта при всіх можливих значеннях швидкості деформації, але навіть у випадку одноосного напруженого стану введення таких розрахункових рівнянь представляє великі труднощі. Тому більшість рівнянь стану та методів, як правило, застосовані лише у вузькому діапазоні швидкостей деформацій, що є природнім, оскільки в різних діапазонах швидкостей домінують різні фізичні механізми.

В процесі експлуатації споруди та обладнання зазнають впливу різноманітних динамічних навантажень. До них відносяться вітрові та рухомі навантаження, періодичні вібраційні або ударні впливи на несучі конструкції, дії вибухів, що викликають різку зміну тиску та поверхню споруди, сейсмічні коливання, які викликають примусові складні за законом переміщення елементів будівель і т. і.

Періодичні коливання просторових тіл. Навантаження та коливання, які можуть бути представлені у часі у вигляді гармонік синуса чи косинуса, називають періодичними. Відповідно до процесу стаціонарних коливань неоднорідного ізотропного просторового тіла під дією системи довільно розподілених у просторі періодичних зовнішніх навантажень:

$$f^j = \sum_{r=1}^R f_r^j \sin \omega_r t, \quad p^j = \sum_{r=1}^R p_r^j \sin \omega_r t, \quad \omega_r = \frac{r\pi}{T}, \quad (40)$$

де T - період дії навантаження; R - число гармонік, необхідне для опису розподілу навантаження в інтервалі $[t_0, t_1]$.

Можна очікувати, що реакція системи також повинна задовольняти періодичному закону, аналогічному (40):

$$u_i^s = \sum_{s=1}^S u_i^s \sin \omega_s t \Rightarrow \epsilon_{ij} = \sum_{s=1}^S \epsilon_{ij}^s \sin \omega_s t. \quad (41)$$

Представивши переміщення, зовнішні навантаження і деформації відомими періодичними функціями часової координати (40) і (41), та виконавши інтегрування з урахуванням ортогональності тригонометричних функцій на інтервалі $[t_0, t_1]$, у випадку коливань пружних тіл, коли залежність між напруженнями і деформаціями описується лінійним законом, і як наслідок $\sigma^{ij} = \sum_{s=1}^S \sigma^{ij,s} \sin \omega_s t$, розв'язання просторової задачі динаміки зводиться до пошуку ряду квазістатичних періодичних рішень для кожної гармоніки в розкладі заданих і невідомих функцій по часовій координаті з урахуванням інерційних сил:

$$\delta T = -\omega_p^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho u_p^i \delta u_i^p \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (42)$$

Деформування тіл під дією рухомого навантаження.

Розглядаються сталі процеси при постійній швидкості руху навантаження V_q , з фронтом якого пов'язують рухому базисну систему координат y^i (рис. 4).

Зв'язок між рухомою і нерухомою системами координат подається через співвідношення:

$$y^{3'} = z^{3'} - V_q t, \quad y^{\alpha'} = z^{\alpha'}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (43)$$

Тоді на основі (43) запишемо:

$$\frac{\partial z^{i'}}{\partial y^{i'}} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad \frac{\partial z^{i'}}{\partial t} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ V_q, & i = 3 \end{cases},$$

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial t} = \begin{cases} 0, & i \neq 3 \\ -V_q, & i = 3 \end{cases}, \quad \frac{\partial t}{\partial t} = 1. \quad (44)$$

Виходячи з (44) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial z^{i'}} = \frac{\partial}{\partial y^{i'}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - V_q \frac{\partial}{\partial y^{3'}}. \quad (45)$$

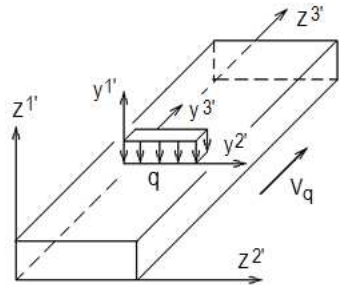


Рис. 4. Рухомі базисна система координат

На основі положення про стаціонарність процесу в рухомій системі координат та використовуючи співвідношення (39) як вихідне для варіації кінетичної енергії, отримуємо:

$$\delta T = V_g^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \frac{\partial u^i}{\partial y^3} \frac{\partial \delta u_i^r}{\partial y^3} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (46)$$

Вільні та вимушені коливання просторових тіл. Вважається, що в процесі вільних коливань:

$$\delta T + \delta W = 0, \quad (47)$$

зміна у часі параметрів напружено-деформованого стану системи визначається гармонійним законом:

$$u_i^r = \sum_{r=1}^{\Omega} \varphi_i^r \cos \theta_r t \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \sum_{r=1}^{\Omega} \varepsilon_{ij}^r \cos \theta_r t. \quad (48)$$

У випадку коливань пружних тіл:

$$\sigma^{ij} = \sum_{r=1}^{\Omega} \sigma^{ij,r} \cos \theta_r t, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (49)$$

де $\sigma^{ij,r}$, ε_{ij}^r - амплітуди коливань напружень і деформацій r -ої власної форми; φ_i^r , θ_r - r -а власна форма і частота вільних коливань твердого тіла.

Виходячи із співвідношень (48), варіація кінетичної енергії скінченного елемента в місцевій системі координат (39) прийме наступний вигляд:

$$\delta T = -\theta_r^2 \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho u_r^i \delta u_i^r \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (50)$$

Деформування тіл під дією імпульсного навантаження. Найбільш трудомісткою задачею динаміки, з точки зору опису динамічної реакції системи ϵ , безперечно, аналіз зміни параметрів напружено-деформованого стану у часі під дією імпульсних впливів.

Спроби спрощення розрахунку, наприклад за допомогою розкладу розв'язку за власними формами та частотами вільних коливань, не дають очікуваного результату, оскільки дослідження таких процесів потребує попереднього обчислення переважної більшості повного спектру частот і форм конструкції, що загалом нівелює ефективність підходу.

Крім того, зміна зон контактної взаємодії або поява та розповсюдження областей нелінійної роботи матеріалу змінюють властивості досліджуваного об'єкта, що в свою чергу потребує перегляду встановлених інтегральних характеристик конструкції, тобто циклічного вирішення початкових задач.

Тому для розв'язання поставленої проблеми використовується загальне формулювання варіації кінетичної енергії скінченного елемента із введенням додаткових гіпотез, щодо закону зміни прискорення точок елементарного об'єму тіла $\ddot{u}_k'(t)$ у часі:

$$\delta T = - \int_{x^1} \int_{x^2} \int_{x^3} \rho \ddot{u}_k'(t) \delta u_k'(t) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (51)$$

Висновки.

Для ефективного пошуку рішення задач динаміки, на сьогоднішній день, потрібно володіти всім набором засобів аналізу, чітко представляти правила і границі їх застосування.

До того ж, високі вимоги до розрахункових моделей, що закладені до сучасної нормативної бази припускають розгляд динамічних навантажень різного рівня інтенсивності та тривалості у часі, які можуть діяти на конструкцію в один і той же момент часу, що в свою чергу потребує ретельного дослідження меж їх достовірного використання.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлурі С.* Вычислительные методы в механике разрушения. – М.: Мир, 1990. – 392с.
2. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
3. *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т.* Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. –М.: Машиностроение, 1989. – 248с.
4. *Друккер Д.* Вариационные принципы в математическом теории пластичности // Механика.- М.: ИП, 1959.- № 6.
5. *Кильчевский Н.А., Изберская Г.А., Киселевская Л.М.* Лекции по аналитической механике оболочек. –К.: Выща шк. –1974. –232с.
6. *Коротких Ю.Г., Белевич С.М.* Основные уравнения термопластичности при сложном нагружении // Методы решения задач упругости и пластичности.- Горький, 1969.- С.134-141.
7. *Сахаров А.С., Кислюкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2012 р.

Солодей И.И.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Статья посвящена постановке проблемы, выбору систем координат, уравнений теории упругости и пластичности. Предложена концепция рассмотрения задач контактного взаимодействия системы тел и тел с трещинами. Проведен анализ уравнений динамического равновесия общего вида, а также их частных случаев.

Solodei I.I.

PROBLEM FORMULATION OF LINEAR AND NON-LINEAR DEFORMATION AND FRACTURE OF THREE-DIMENSIONAL BODIES UNDER DYNAMIC LOADING

Article covers problem formulation, choice of the coordinate system, elasticity and plasticity theory equations. Concept of contact problem solution and cracked bodies modeling are proposed. Analysis of general dynamic system equations and their particular cases are considered.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук

О.П. Кривенко, канд. техн. наук

М.О. Соловей, д-р техн. наук

ВПЛИВ ПОПЕРЕДНЬОГО НАГРІВУ НА СТІЙКІСТЬ ПОЛОГИХ КВАДРАТНИХ У ПЛАНІ ПАНЕЛЕЙ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ ЗАКРІПЛЕННІ КОНТУРУ

Вивчається вплив попереднього нагріву на втрату стійкості квадратної в плані сферичної панелі при поступовій зміні умов комбінованого закріплення контуру. Порівнюються два варіанти часткової заміни жорсткого затиснення контуру панелі на шарнірне опирання.

Несуча спроможність і форми нелінійного деформування пологих панелей залежать як від геометричних параметрів оболонки та виду навантажень, так і від типу граничних умов. У роботах [1, 2, 6] при дослідженні круглої та квадратної в плані пологих сферичних панелей, що навантажені тиском, виявлено нелінійну залежність величин верхнього та нижнього критичних навантажень від поступової заміни одного типу граничних умов (жорстке затиснення) на інший (шарнірне опирання). У роботі [3], на прикладі пологої круглої в плані панелі, досліджено вплив величини попереднього нагріву на втрату стійкості оболонки при зміні типу граничних умов. У даній роботі наведені результати аналогічних досліджень, які проведені для пологих квадратних у плані панелей.

Дослідження виконані за методикою [4–6], яка спирається на співвідношення тривимірної теорії термопружності, скінченноелементне формулювання геометрично нелінійної задачі у приростах і використання моментної схеми скінченних елементів. Достовірність методики обґрунтована чисельними дослідженнями збіжності та точності скінченноелементних розв'язків для різних класів пружних неоднорідних оболонок [6].

Розглядається попередньо нагріта квадратна в плані сферична панель сталі товщини, що навантажується зовнішнім рівномірним тиском інтенсивністю q (рис. 1, *a*). Матеріал оболонки – ізотропний. Прийнято наступні вихідні данні: модуль пружності $E = 19.6 \cdot 10^4$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, коефіцієнт лінійного розширення $\alpha = 0.125 \cdot 10^{-4}$ град⁻¹, товщина $h = 0.01$ м, стріла підйому $H = 4h$, розмір опорного контуру

$a=177.2h$, радіус серединної поверхні $R=1968.49h$, параметр кривизни $K=32$ ($K = 2a^2/(Rh)$). Результати досліджень подані з використанням безрозмірних параметрів навантаження $\bar{q}=a^4 q/(Eh^4)$, $\bar{T} = T/1^\circ\text{C}$ і прогину $\bar{u}^I = u^I/h$, де u^I – прогин панелі вздовж осі x^I .

За розрахункову скінченноелементну модель було прийнято чверть панелі з рівномірною сіткою 18×18 скінченних елементів, яка, як довели дослідження, забезпечує збіжність розв'язків.

Дія на оболонку нагріву та тиску реалізовувалась за такою схемою: спочатку панель поступово нагрівалась рівномірно за об'ємом на величину $T^\circ\text{C}$, а потім при зафіксованому температурному полі навантажувалась тиском інтенсивністю q . Панель розглядалась при попередньому нагріві на $T = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ і 30°C .

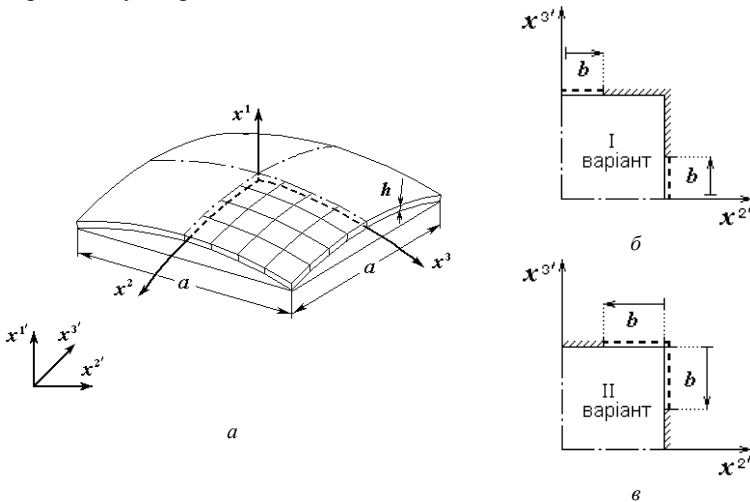


Рис. 1. Сферична панель з двома варіантами комбінованого закріплення контуру

Досліджувався вплив на стійкість оболонки двох варіантів поступової заміни жорсткого затиснення на шарнірне опирання відповідно до напрямку зміни параметра b . У першому варіанті заміщення виконувалось, починаючи з центра бічної грані панелі (рис. 1, б), у другому – з кута панелі (рис. 1, в). В обох випадках ділянка шарнірного опирання скінченноелементної моделі оболонки b характеризується безрозмірним параметром $\bar{b}=2b/a$ ($0 \leq \bar{b} \leq 1$). Крайні значення

параметра шарнірного опирання \bar{b} відповідають однорідним граничним умовам: $\bar{b}=0$ – умові жорсткого затиснення контуру всієї панелі (▨), а $\bar{b}=1$ – умові її шарнірного опирання (▧). Проміжні значення параметра $0 < \bar{b} < 1$ характеризують комбіноване закріплення контуру оболонки (▨▧▧).

Еволюція діаграм “навантаження-прогин” центра панелі (“ $\bar{q} - \bar{u}^1$ ”) для різних величин попереднього нагріву при зміні граничних умов за першим варіантом показана на рис. 2, за другим – на рис. 3.

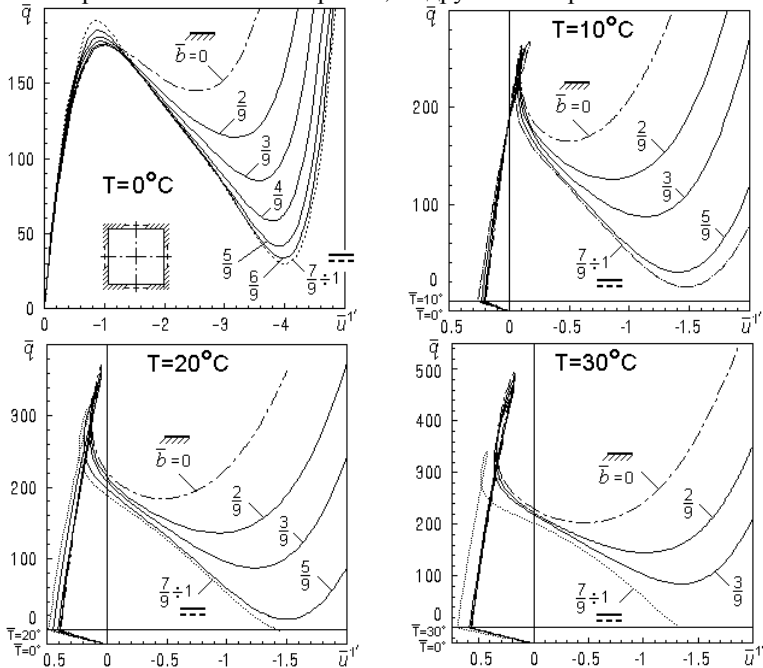


Рис. 2. Еволюція діаграм “навантаження-прогин” для першого варіанту зміни граничних умов

У докритичній області діаграми “ $\bar{q} - \bar{u}^1$ ” мало залежать від параметра \bar{b} . У закритичній області більший вплив на еволюцію діаграм “ $\bar{q} - \bar{u}^1$ ” справляє заміщення граничних умов за першим варіантом. Це пояснюється тим, що в цьому варіанті загальна жорсткість панелі швидше зменшується зі збільшенням величини параметра \bar{b} .

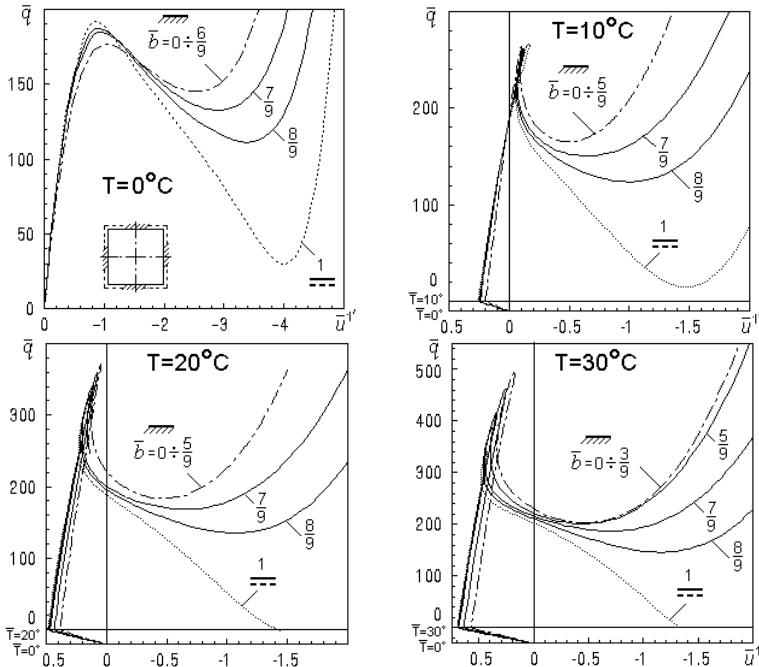


Рис. 3. Еволюція діаграм “навантаження-прогин” для другого варіанту зміни граничних умов

У випадку дії лише тиску ($T = 0^\circ\text{C}$) діаграми мають вигляд, що характерний для втрати стійкості пологих панелей. При наявності температурного поля ($T = 10^\circ + 30^\circ\text{C}$) діаграми “ $\bar{q} - \bar{u}^I$ ” набувають більш складного вигляду – з’являються петлі.

У докритичній області для всіх варіантів у розв’язках на діаграмах “навантаження-прогин” відсутні точки розгалуження. Точки розгалуження та сходження гілок розв’язків розміщуються лише на нестійких ділянках діаграм “навантаження-прогин” – між верхньою $\bar{q}_{кр}^e$ та нижньою $\bar{q}_{кр}^n$ критичними точками.

Узагальнення результатів досліджень у вигляді залежності величини верхнього критичного навантаження $\bar{q}_{кр}^e$ від параметра \bar{b} (рис. 4, табл. 1, 2) та нижнього критичного навантаження $\bar{q}_{кр}^n$ (рис. 5, табл. 3, 4) дозволило зробити такі висновки.

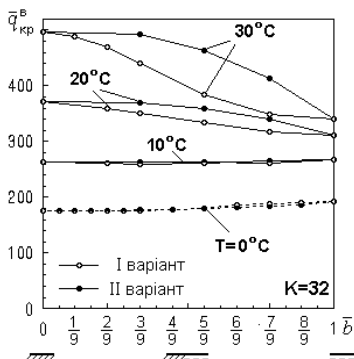


Рис. 4. Залежність верхнього критичного навантаження від величини параметра шарнірного опирання

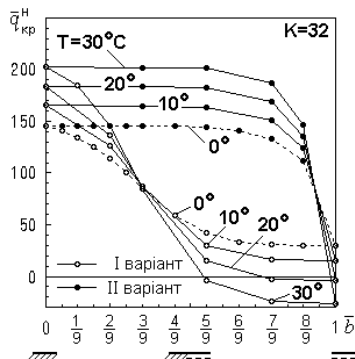




Рис. 5. Залежність нижнього критичного навантаження від величини параметра шарнірного опирання

Для ненагрітої ($T = 0^\circ\text{C}$) і нагрітої на $T = 10^\circ\text{C}$ панелей для обох варіантів зміни граничних умов залежність “ $\bar{q}_{кр}^e - \bar{b}$ ” близька до лінійної (рис. 4). Маємо незначне зростання величини $\bar{q}_{кр}^e$ при шарнірному опиранні, порівняно зі жорстким затисненням, відповідно на 8.6 і 1.3%. Слабкий вплив способу зміни граничних умов на величину $\bar{q}_{кр}^e$ можна пояснити малістю температури попереднього нагріву.

З підвищенням величини попереднього нагріву ($T = 20^\circ$ і 30°C) величина верхнього критичного навантаження зі зростанням параметра \bar{b} послідовно зменшується (на 15.86% при $T = 20^\circ\text{C}$ та на 31.67% при $T = 30^\circ\text{C}$). При цих відносно великих величинах нагріву проявляється різниця в способі заміни жорсткого затиснення на шарнірне опирання. Другий варіант зміни граничних умов виявився ефективнішим. Так, наприклад, при $\bar{b} = 5/9$, що припадає на 55% контуру із шарнірним опиранням, різниця між величинами $\bar{q}_{кр}^e$ для I і II варіантів зміни граничних умов становить 7.65% при $T = 20^\circ\text{C}$ і 20.44% при 30°C . Це, мабуть, пояснюється тим, що у другому варіанті перехід на більш слабкі граничні умови відбувається із найжорсткішої області панелі – з кутів.



Таблиця 1

Вплив нагріву на величину $\bar{q}_{кр}^e$ при зміні граничних умов (I варіант)

\bar{b}	$T = 0^\circ \text{C}$		$T = 10^\circ \text{C}$		$T = 20^\circ \text{C}$		$T = 30^\circ \text{C}$	
	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e),$ %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e),$ %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e),$ %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e),$ %
 0	176.4	0	263.4	0	370.7	0	497.0	0
1/9	175.1	-0.40	—	—	—	—	487.9	-1.83
2/9	175.5	-0.51	260.6	-1.06	359.6	-2.99	468.9	-5.65
3/9	176.2	-0.11	259.8	-1.37	351.3	-5.23	441.2	-11.23
5/9	180.9	2.55	261.0	-0.91	333.1	-10.14	384.0	-22.68
7/9	188.3	6.75	264.8	0.53	317.2	-14.43	348.7	-29.84
8/9	191.0	8.28	—	—	—	—	—	—
 1	191.5	8.56	266.9	1.33	311.9	-15.86	339.5	-31.67

Таблиця 2



Вплив нагріву на величину $\bar{q}_{кр}^e$ при зміні граничних умов (II варіант)

\bar{b}	$T = 0^\circ \text{C}$		$T = 10^\circ \text{C}$		$T = 20^\circ \text{C}$		$T = 30^\circ \text{C}$	
	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e),$ %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e),$ %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e),$ %	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^e),$ %
 0	176.4	0	263.4	0	370.7	0	497.0	0
1/9	176.4	0	—	—	—	—	—	—
2/9	176.5	0.06	—	—	—	—	—	—
3/9	176.9	0.28	263.1	-0.11	369.1	-0.43	493.3	-0.74
5/9	179.8	1.93	262.4	-0.38	358.6	-3.26	462.5	-6.94
7/9	184.7	4.71	261.6	-0.69	340.5	-8.15	414.1	-16.68
8/9	187.1	6.07	261.7	-0.64	330.5	-10.84	387.8	-21.97
 1	191.5	8.56	266.9	1.33	311.9	-15.86	339.5	-31.67

Вплив способу заміни жорсткого затиснення на шарнірне опирання підтверджується залежністю нижнього критичного навантаження від параметра \bar{b} (рис. 5). У другому варіанті при зростанні параметра шарнірного опирання \bar{b} до значення $\bar{b} = 5/9$ величина $\bar{q}_{кр}^e$ залишається практично незмінною. При першому варіанті заміни граничних умов величина нижнього критичного навантаження зразу падає.



Таблиця 3

Вплив нагріву на величину $\bar{q}_{кр}^H$ при зміні граничних умов (I варіант)

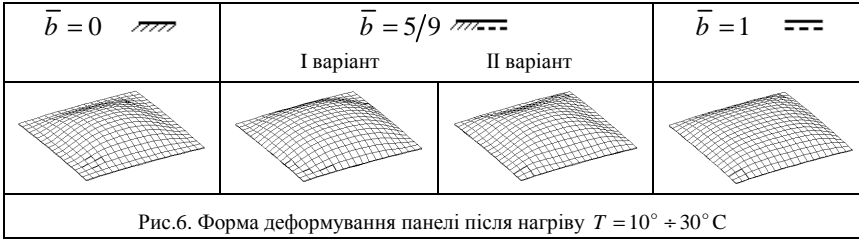
\bar{b}	$T = 0^\circ \text{C}$		$T = 10^\circ \text{C}$		$T = 20^\circ \text{C}$		$T = 30^\circ \text{C}$	
	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H),$ %	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H),$ %	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H),$ %	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H),$ %
 0	145.1	0	165.1	0	183.9	0	202.4	0
1/9	134.5	-7.30	–	–	–	–	184.6	-8.79
2/9	114.0	-21.43	125.8	-23.66	136.1	-25.99	145.4	-28.16
3/9	85.3	-41.18	87.44	-47.04	87.17	-52.60	84.74	-58.13
5/9	41.7	-71.26	30.17	-81.73	15.05	-91.82	-3.806	-101.88
7/9	30.8	-78.74	16.23	-90.15	-2.213	-101.20	-24.01	-11.86
8/9	30.1	-79.22	–	–	–	–	–	–
 1	30.1	-79.28	15.17	-90.81	-3.504	-101.90	-25.97	-112.83

Таблиця 4

Вплив нагріву на величину $\bar{q}_{кр}^H$ при зміні граничних умов (II варіант)

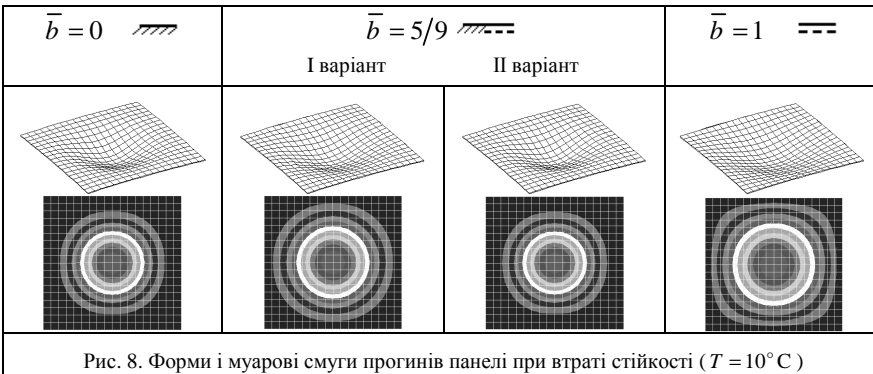
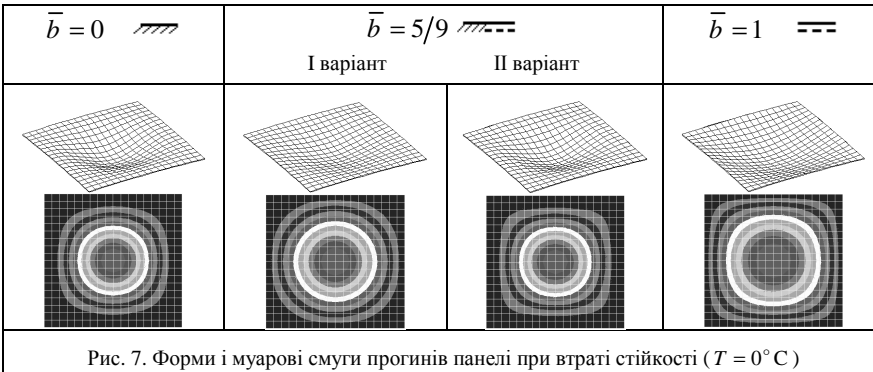
\bar{b}	$T = 0^\circ \text{C}$		$T = 10^\circ \text{C}$		$T = 20^\circ \text{C}$		$T = 30^\circ \text{C}$	
	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H),$ %	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H),$ %	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H),$ %	$\bar{q}_{кр}^H$	$\Delta(\bar{q}_{кр}^H),$ %
 0	145.1	0	165.1	0	183.9	0	202.4	0
1/9	145.1	0	–	–	–	–	–	–
2/9	145.1	0	–	–	–	–	–	–
3/9	145.1	0	164.8	-0.18	182.3	-0.87	201.8	-0.30
5/9	144.1	-0.69	163.8	-0.79	182.0	-1.03	201.4	-0.49
7/9	132.6	-8.61	150.5	-8.84	168.6	-8.32	186.8	-7.71
8/9	111.2	-23.23	123.8	-25.01	135.5	-26.32	146.1	-27.82
 1	30.1	-79.28	15.17	-90.81	-3.504	-101.90	-25.97	-112.83

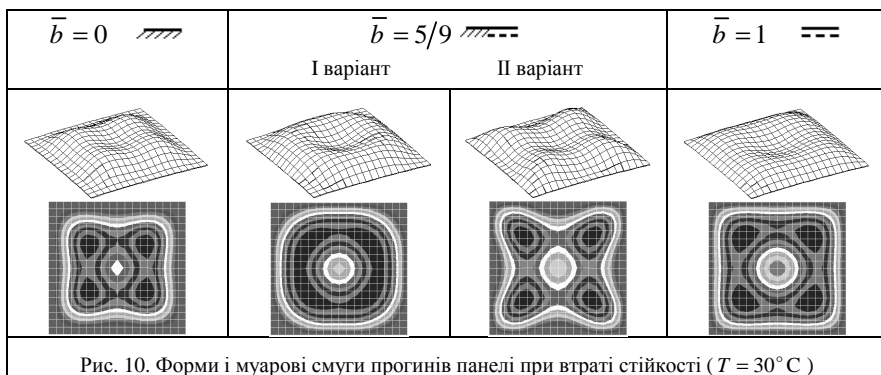
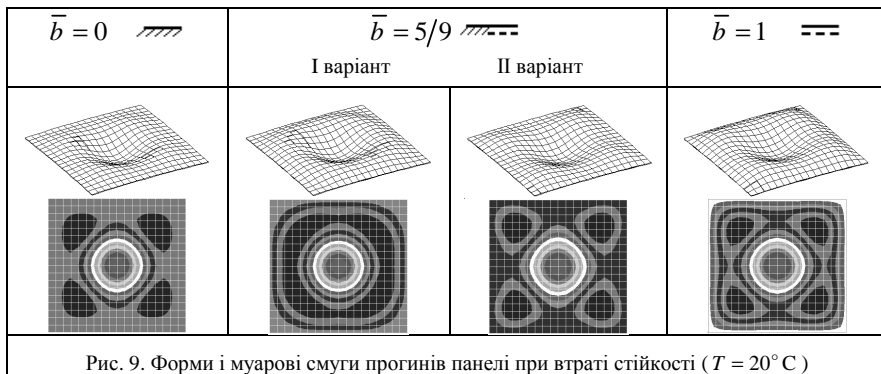
Характер зміни форми деформування панелі після нагріву залежить лише від способу закріплення контуру (тобто від параметра \bar{b}) (рис. 6). Форми деформування нагрітої на 10°C , 20°C і 30°C панелі відрізняються тільки за величиною переміщення її точок.



У всіх випадках граничних умов втрата стійкості супроводжується проклацуванням центральної частини панелі (рис. 7 – 10).

Без нагріву ($T = 0^\circ \text{C}$) і при нагріві на 10°C для квадратної панелі реалізується форма втрати стійкості, що відповідає загальній втраті стійкості оболонки (проклацування її центральної частини (рис. 7, 8)).





З підвищенням інтенсивності нагріву до $T = 20^\circ \text{C}$ і $T = 30^\circ \text{C}$ еволюція форми втрати стійкості (рис. 9, 10) ускладнюється, що пов'язано зі збільшенням вертикальних переміщень від нагріву – чим більше нагрів, тим сильніше оболонка видувається.

Проведені дослідження дозволили виявити існуючі нелінійні закономірності втрати стійкості пологих сферичних панелей, що навантажуються тиском та попереднім нагрівом, при послідовній зміні областей комбінованого закріплення контуру. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні різноманітних несучих оболонкових конструкцій та їхніх елементів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кривенко О.П.* Вплив комбінованих граничних умов на стійкість пологих оболонок обертання // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2007. – Вип. 81. – С. 84-90.
2. *Кривенко О.П.* Вплив комбінованого закріплення контуру на стійкість пологих квадратних у плані панелей // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 82. – С. 65-70.
3. *Кривенко О.П., Соловей М.О.* Вплив нагріву на втрату стійкості пологих панелей при зміні умов закріплення контуру // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87.
4. *Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.* Співвідношення моментної схеми скінченних елементів у задачах стійкості неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 1999. – Вип. 66. – С. 22-25.
5. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Прикладная механика, 2009. – Том 45, №9. – С. 3-40.
6. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2012 р.

Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАГРЕВА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ КВАДРАТНЫХ В ПЛАНЕ ПАНЕЛЕЙ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ КОНТУРА

Изучается влияние предварительного нагрева на потерю устойчивости квадратной в плане сферической панели при постепенном изменении условий комбинированного закрепления контура. Сравниваются два варианта частичной замены жесткого защемления контура панели на шарнирное опирание.

Vazchenov V.A., Kryvenko O.P., Solovey M.O.

EFFECT OF PRELIMINARY HEATING ON STABILITY OF SLOPING SQUARED PANELS AT THE COMBINED FIXING OF A BOUNDARY

The effect of preliminary heating to the loss of stability of a spherical squared panel at gradual change of conditions of the combined fixing of a boundary is studied. Two modes of a partial replacement on the panel's contour of the clamped boundary at the hinged boundary are compared.

УДК 539.3

О.В. Костіна, канд. техн. наук

ВЕКТОРНА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ ПЕРЕМІЩЕНЬ КРИВОЛІНІЙНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА У ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ КІЛЬЦЯ

Виконано аналітичне тестування нової схеми методу скінченних елементів, що базується на векторній апроксимації функції переміщень. Тестування проведено шляхом розв'язання двох задач про деформування кільця за допомогою запропонованої схеми і традиційної неекваторної схеми дискретизації. Виявлені переваги векторної апроксимації у точності розв'язку.

У криволінійній системі координат, як відомо, при операціях з векторними функціями необхідно суворо дотримуватись правил векторного аналізу [1]. Ідея нової схеми методу скінченних елементів полягає в апроксимації вектор-функції, а не окремо взятих скалярних функцій переміщень. Запропонований метод викладений у варіаційній постановці. Вектор-функція переміщень криволінійного скінченного елемента подається у вигляді ряду Маклорена

$$\begin{aligned} \bar{u}(x^1, x^2) &= \bar{u}^0 + \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial x^\alpha} x^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}^0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \bar{u}^0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots = \\ &= (u_i^0 + u_{i\alpha}^0 x^\alpha + \frac{1}{2} u_{i\alpha\beta}^0 x^\alpha x^\beta + \frac{1}{6} u_{i\alpha\beta\gamma}^0 x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots) \bar{e}^i, \end{aligned} \quad (1)$$

коефіцієнтами якого є значення компонент вектор-функції переміщень та її коваріантних похідних, які визначені в центрі скінченного елемента.

Необхідно підкреслити, що апроксимуючий поліном явно містить вектор жорстких зміщень скінченного елемента довільної криволінійної форми, завдяки чому виконується необхідна умова скінченноелементної дискретизації, а саме, матриця жорсткості має шість нульових власних значень. І тому, задовільняючи умові жорстких зміщень, дана методика у багатьох задачах про деформування оболонок покращує збіжність розв'язків.

Розрахункові співвідношення теорії тонких оболонок у загальній криволінійній системі координат виведені у відповідності до понять загальної теорії поверхонь у векторному поданні [2]. Основні положення запропонованої схеми методу скінченних елементів неодноразово опубліковані у роботах [3-7]. Виведення матриці жорсткості з використанням векторної апроксимації виявилось значно простішим ніж у випадку скалярної апроксимації. Достовірність запропонованої

методики доведено шляхом розв'язання низки тестових прикладів і реальних задач про напружено-деформований стан тонких оболонок. Наступним кроком є її розвиток шляхом застосування для розв'язання задач стійкості.

Розглянемо дві найпростіші задачі про деформування кільця, а саме жорстке переміщення та чистий згин за формою втрати стійкості. На рис. 1 наведені геометричні характеристики кільця, причому координати x^1 і x^3 направлені відповідно вздовж дуги та перпендикулярно до її дотичної.

Формули, що визначають метрику і форму кільця, запишемо у наступному вигляді:

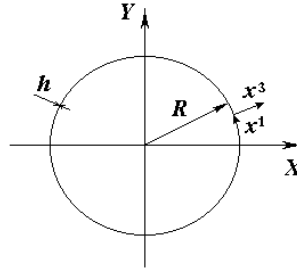


Рис. 1. Геометрія кільця

$$\begin{aligned} X &= R \cos(Ax^1), \quad Y = R \sin(Ax^1), \\ x^1 &= 1, 2, \dots, m, \quad A = \frac{2\pi}{m}, \quad \sqrt{a_{11}} = AR, \quad b_1^1 = -\frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

Наведемо вирази похідних від векторів локального базису

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}^1}{dx^1} &= -\frac{1}{R}\bar{e}^3, \quad \frac{d^2\bar{e}^1}{d(x^1)^2} = -\frac{a_{11}}{R^2}\bar{e}^1, \quad \frac{d^3\bar{e}^1}{d(x^1)^3} = -\frac{a_{11}}{R^3}\bar{e}^3, \\ \frac{d\bar{e}^3}{dx^1} &= \frac{a_{11}}{R}\bar{e}^1, \quad \frac{d^2\bar{e}^3}{d(x^1)^2} = -\frac{a_{11}}{R}\bar{e}^3 \end{aligned} \quad (3)$$

і коваріантних похідних від компонент вектора переміщень

$$\begin{aligned} u_{1|1} &= \frac{du_1}{dx^1} + \frac{a_{11}}{R}u_3, \quad u_{3|1} = \frac{du_3}{dx^1} - \frac{1}{R}u_1, \quad u_{3|11} = -\frac{2}{R}\frac{du_1}{dx^1} + \frac{d^2u_3}{d(x^1)^2} - \frac{a_{11}}{R^2}u_3, \\ u_{3|111} &= -\frac{3}{R}\frac{d^2u_1}{d(x^1)^2} + \frac{a_{11}}{R^3}u_1 + \frac{d^3u_3}{d(x^1)^3} - \frac{3a_{11}}{R^2}\frac{du_3}{dx^1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Розглянемо жорстке переміщення кільця, яке визначається функціями тангенціальної та нормальної компонент вектор-функції переміщень

$$u_1 = -\sqrt{a_{11}} \sin(Ax^1), \quad u_3 = \cos(Ax^1). \quad (5)$$

Визначимо коваріантні похідні заданої вектор-функції:

$$\begin{aligned}
 u_{1|1} &= -RA^2 \cos(Ax^1) + RA^2 \cos(Ax^1) = 0, \\
 u_{3|1} &= A \sin(Ax^1) - A \sin(Ax^1) = 0, \\
 u_{3|11} &= 2A^2 \cos(Ax^1) - A^2 \cos(Ax^1) - A^2 \cos(Ax^1) = 0, \\
 u_{3|111} &= -3A^3 \sin(Ax^1) + A^3 \sin(Ax^1) - A^3 \sin(Ax^1) + 3A^3 \sin(Ax^1) = 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

які, як видно, дорівнюють нулю і тому всі три деформації, а саме, тангенціальні ε_{11} , згинальні μ_{11} , та кути повороту ϑ_1 також точно дорівнюють нулю $\varepsilon_{11} = \mu_{11} = \vartheta_1 = 0$.

Форма втрати стійкості кільця описується виразами

$$u_1 = \sqrt{a_{11}} \sin(2Ax^1), \quad u_3 = -2 \cos(2Ax^1). \tag{7}$$

Визначимо деформації кожного скінченного елемента і суми інтегралів їх квадратів

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= u_{1|1}^0 = 2RA^2 \cos(2Ax^1) - 2RA^2 \cos(2Ax^1) = 0, \\
 \vartheta_1 &= - \left[3A \sin(2Ax_0^1) + 6A^2 \cos(2Ax_0^1) x^1 - \frac{15}{2} A^3 \sin(2Ax_0^1) (x^1)^2 \right], \\
 \sum_{x_0^1=1-0,5}^m \int^{0,5} \vartheta_1^2 dx^1 &= \frac{9}{2} mA^2 - \frac{3}{8} mA^4 + \frac{45}{128} mA^6, \\
 \mu_{11} &= 6A^2 \cos(2Ax_0^1) - 15A^2 \sin(2Ax_0^1) x^1, \\
 \sum_{x_0^1=1-0,5}^m \int^{0,5} \mu_{11}^2 dx^1 &= 18mA^4 + \frac{225}{24} mA^6.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Підставивши залежності (8) у вираз потенціальної енергії кільця і, враховуючи рівність її нулю

$$\Delta \Pi = \sum_{x_0^1=1-0,5}^m \int^{0,5} \left(\frac{1}{2} EI \frac{\mu_{11}^2}{a_{11}^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{(11)}}{a_{11}} \vartheta_1^2 \right) \sqrt{a_{11}} dx^1 = 0, \tag{9}$$

знайдемо критичне зусилля стиску кільця:

$$T_{(11)}^{kp} = - \frac{EI}{a_{11}} \frac{\sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \mu_{11}^2 dx^1}{\sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \vartheta_1^2 dx^1} = - \frac{4EI}{R^2} \frac{1 + \frac{225}{108} \frac{\pi^2}{m^2}}{1 - \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{289}{360} \frac{\pi^4}{m^4}}. \quad (10)$$

Далі, маючи точне значення критичного зусилля кільця у вигляді

$$T_{(11)}^{kp} = - \frac{4EI}{R^2}, \quad (11)$$

можемо зробити висновок, що помилка не залежить від відношення R/h і при $m=10$ складає 20%.

Тепер розглянемо ті ж задачі при традиційній, неекстремальній апроксимації функції переміщень

$$u_1 = u_1^0 + \frac{du_1^0}{dx^1} x^1, \quad u_3 = u_3^0 + \frac{du_3^0}{dx^1} x^1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_3^0}{d(x^1)^2} (x^1)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 u_3^0}{d(x^1)^3} (x^1)^3. \quad (12)$$

У цьому випадку деформації мають наступний вигляд:

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx^1} - b_{11} u_3, \quad \vartheta_1 = - \left(\frac{du_3}{dx^1} + b_{11}^1 u_1 \right), \quad \mu_{11} = \frac{d^2 u_3}{d(x^1)^2} + b_{11}^1 \frac{du_1}{dx^1}. \quad (13)$$

Визначимо деформації на функціях жорсткого переміщення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{du_1}{dx^1} - b_{11} u_3 = \frac{du_1^0}{dx^1} - b_{11} \left[u_3^0 + \frac{du_3^0}{dx^1} x^1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_3^0}{d(x^1)^2} (x^1)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 u_3^0}{d(x^1)^3} (x^1)^3 \right] = \\ &= -RA^2 \cos(Ax_0^1) + RA^2 \cos(Ax_0^1) - RA^3 \sin(Ax_0^1) x^1 - \frac{1}{2} RA^4 \cos(Ax_0^1) (x^1)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} RA^5 \sin(Ax_0^1) (x^1)^3 \neq 0, \\ \vartheta_1 &= \left[-A \sin(Ax_0^1) - A^2 \cos(Ax_0^1) x^1 + \frac{1}{2} A^3 \sin(Ax_0^1) (x^1)^2 + A \sin(Ax_0^1) \right] \neq 0, \\ \mu_{11} &= -A^2 \cos(Ax_0^1) + A^3 \sin(Ax_0^1) x^1 + A^2 \cos(Ax_0^1) \neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Як бачимо, жодна з них не дорівнює нулю.

Тепер виведемо деформації відповідно до форми втрати стійкості кільця:

$$u_1 = \sqrt{a_{11}} \sin(2Ax^1), \quad u_3 = -2 \cos(2Ax^1),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 2RA^2 \cos(2Ax_0^1) - 2RA^2 \cos(2Ax_0^1) + 8RA^3 \sin(2Ax_0^1)x^1 + \\ &+ 8RA^4 \cos(2Ax_0^1)(x^1)^2 - \frac{16}{3}RA^5 \sin(2Ax_0^1)(x^1)^3 \neq 0, \\ \vartheta_1 &= -3A \sin(2Ax_0^1) - 6A^2 \cos(2Ax_0^1)x^1 + 8A^3 \sin(2Ax_0^1)(x^1)^2, \\ \mu_{11} &= 6A^2 \cos(2Ax_0^1) - 16A^3 \sin(2Ax_0^1)x^1. \end{aligned} \quad (15)$$

З рівняння

$$\Delta \Pi = \sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \left(\frac{1}{2} EI \frac{\mu_{11}^2}{a_{11}^2} + \frac{1}{2} EF \frac{\varepsilon_{11}^2}{a_{11}^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{(11)}}{a_{11}} \vartheta_1^2 \right) \sqrt{a_{11}} dx^1 = 0 \quad (16)$$

отримаємо вираз для визначення критичного зусилля

$$\begin{aligned} T_{(11)}^{kp} &= \frac{\sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} (EI \mu_{11}^2 + EF \varepsilon_{11}^2) dx^1}{a_{11} \sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \vartheta_1^2 dx^1} = \\ &= -\frac{4EI}{R^2} \frac{1 + \frac{256}{108} \frac{\pi^2}{m^2}}{1 - \frac{4}{9} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{64}{45} \frac{\pi^4}{m^4}} - \frac{64EF}{27} \frac{\pi^2}{m^2} \frac{1 - \frac{1}{5} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{4}{21} \frac{\pi^4}{m^4}}{1 - \frac{4}{9} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{64}{45} \frac{\pi^4}{m^4}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поклавши $m \gg \pi$ і нехтуючи громіздкими множниками, отримаємо попередній вираз у наступному вигляді:

$$\tilde{T}_{(11)}^{kp} = -\frac{4EI}{R^2} - \frac{64EF}{27} \frac{\pi^2}{m^2}, \quad \tilde{T}_{(11)}^{kp} = -\frac{4Eh^3}{12R^2} - \frac{64Eh}{27} \frac{\pi^2}{m^2}. \quad (18)$$

Визначимо помилку за формулою

$$\eta = \frac{\tilde{T}_{(11)}^{kp} - T_{(11)}^{kp}}{T_{(11)}^{kp}} = \frac{64}{9} \frac{R^2}{h^2} \frac{\pi^2}{m^2}.$$

Очевидно, що при відношенні $R/h=100$ і $m=100$ помилка становить $\eta=70\%$.

Виконані розв'язки дозволяють зробити наступні висновки: неекторна апроксимація, що традиційно використовується, при обчисленні критичного зусилля дає велику помилку, що залежить від розмірів кільця, а також не задовольняє умові рівності нулю деформацій при жорсткому зміщенні. Запропонована методика, що базується на

векторній апроксимації функцій переміщень криволінійного скінченного елемента, задовольняє умові жорсткого зміщення, а в задачі стійкості помилка не залежить від геометричних параметрів кільця. Отже, розроблена методика дозволяє отримати значно точніший результат.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. — Казань: Изд. Казанского филиала физ.-техн. ин-та, 1989. — 269 с.
2. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Часть 2. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. — 395 с.
3. Гоцуляк Е.А., Костина Е.В. Исследование сходимости метода конечных элементов в векторной аппроксимации // Сопротивление материалов и теория сооружений. — 1997. — Вып.63. — С.38-47.
4. Гоцуляк Е.О., Костина О.В. Про особливості застосування методу скінченних елементів до розрахунку оболонок загального типу // Доповіді Нац. АН України. — 1998. - №11. — С.72-75.
5. Gotsulyak E.A., Kostina E.V. Vector relations finite element discretization of the theory of thin shells of arbitrary form // Proc. International Congress ICSS-98. — Moscow, 1998. — P.252-259.
6. Гоцуляк Е.А., Костина Е.В., Аранчий Н.Е. Криволинейный конечный элемент в теории тонких оболочек произвольной конфигурации // Сб. трудов Международного симпозиума по проблемам тонкостенных пространственных систем. — Грузия, Тбилиси, 4-5 июля, 2001. — С. 58-64.
7. Гоцуляк Е.А., Лукьянченко О.А., Костина Е.В., Гаран И.Г. Построение геометрически нелинейных конечно-элементных моделей для тонких оболочек с несовершенствами форм // Прикладная механика, 2011, Том 47, №3. С.82 – 101.

Стаття надійшла до редакції 18.10.2012 р.

Е.В. Костина

ВЕКТОРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КРИВОЛИНЕЙНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦА

Выполнено аналитическое тестирование новой схемы метода конечных элементов, основанной на векторной аппроксимации функции перемещений. Тестирование проведено путем решения двух задач о деформировании кольца с помощью предложенной схемы и традиционной неветорной схемы дискретизации. Выявлены преимущества векторной аппроксимации в точности решения.

О.В. Костина

VECTOR APPROXIMATION OF THE FUNCTION OF DISPLACEMENTS OF CURVILINEAR FINITE ELEMENT IN THE PROBLEM OF RING STABILITY

The analytical testing of the new scheme of the finite element method, based on the vector approximation of displacements, was executed. Testing was performed by solving two tasks on the deformation of ring by the means of proposed scheme and the traditional discretization scheme in a scalar form. The advantages of vector approximation in the precision of the solutions are proved.

УДК 539.3

О.О. Лук'яниченко, канд. техн. наук

О.В. Геращенко, канд. техн. наук

А.К. Завойський, канд. техн. наук

Г.Р. Ашмаріна

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСУЧОЇ СПРОМОЖНОСТІ СТАЛЬНИХ КРОНШТЕЙНІВ

Досліджено несучу спроможність двох сталених кронштейнів різної геометрії, що сконструйовані в НДІ будівельного виробництва м. Києва. Розрахункові моделі конструкцій побудовані за допомогою сучасного програмного комплексу скінченноелементного аналізу. Виконана перевірка міцності анкерних отворів для кріплення кронштейнів до цегляної стіни. Визначений коефіцієнт запасу стійкості кронштейнів.

Проектування інженерних конструкцій і споруд пов'язано із великою кількістю обчислень. Для вирішення цієї проблеми інженери застосовували наближені методи, спрощені розрахункові схеми, вводили допущення і гіпотези [1]. Поява комп'ютерів обумовило інтенсивну розробку чисельних методів, які базувалися на дискретизації диференціальних рівнянь, функціонала потенціальної енергії і безпосередньо розрахункових схем. Поява методу скінченних елементів дала змогу поєднати строгі математичні положення методів теорії пружності та математичної фізики з можливостями комп'ютерного моделювання [2-4]. У зв'язку з появою багатоповерхового будівництва та ускладненням форм несучих конструктивних елементів є актуальною задача дослідження напружено-деформованого стану та стійкості таких конструктивних елементів як кронштейни.

В роботі досліджено несучу спроможність двох сталених кронштейнів різної геометрії, що сконструйовані в НДІ будівельного виробництва м. Києва. Розрахункові моделі кронштейнів побудовані за допомогою методу скінченних елементів із застосуванням програмного комплексу NASTRAN [5]. Кронштейни виготовлено з нержавіючої сталі з механічними характеристиками: $E=2,06E11 \text{ МПа}$, $\mu=0,3$. Навантаження на кронштейн представляє собою вагу цегляного мурування керамічною цеглою шириною в півцеглини (0,125 м) в межах трьох поверхів (9,0 м). Розрахункове значення розподіленого навантаження приймається згідно з ДБН В.1.2-2-2006 „Навантаження і впливи” [6].

Результати дослідження несучої спроможності сталеного кронштейну КН-1 представлені на рис. 1-5. Скінченноелементна модель кронштейну

КН-1 містить 1902 вузла та 3540 трикутних пластинчатих елементів (рис. 1).

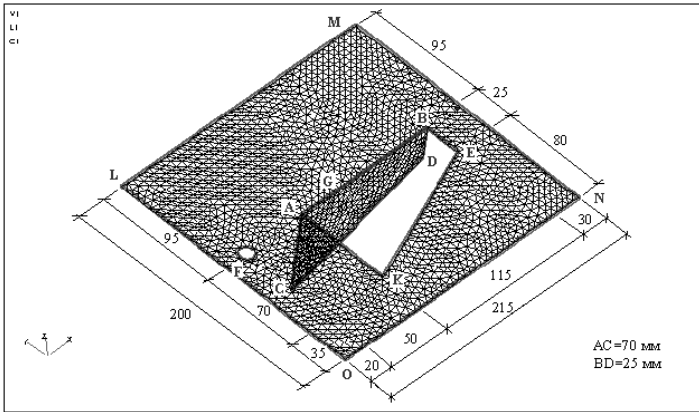


Рис. 1. Скінченноелементна модель кронштейну КН-1

Навантаження розподіляється вздовж прямої BG на довжину $0,085 \text{ м}$ і складає $50,94 \text{ кН/м}$. Граничні умови, що накладені на кронштейн, представлені на рис. 2. В усіх вузлах колового отвору не дозволяються переміщення вздовж осі Z , в точці F додатково введені закріплення вздовж осей X та Y . В точці A введено обмеження переміщень вздовж осей X, Z . В околі точки C не дозволяються переміщення вздовж осі Y .

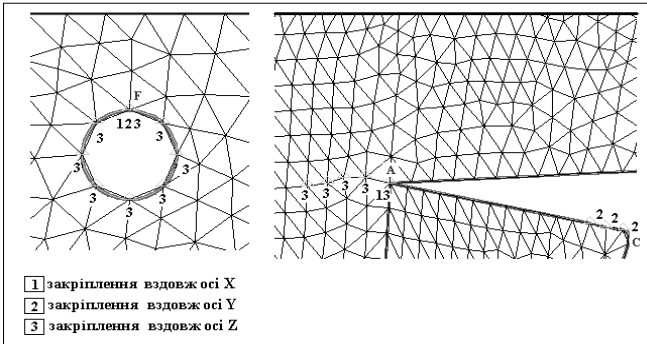
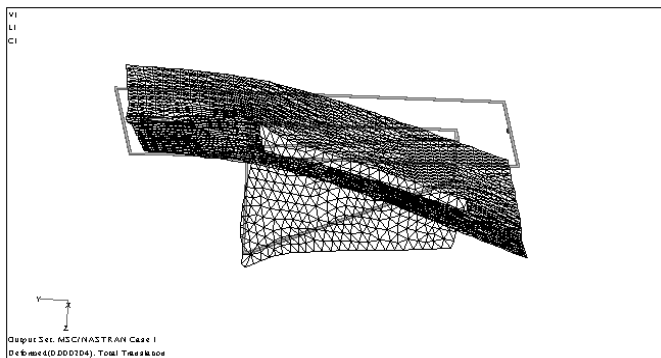


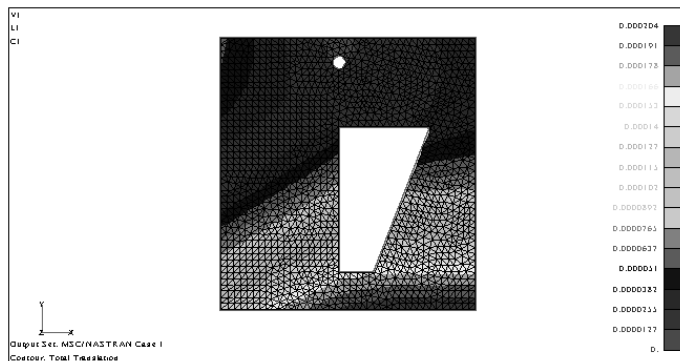
Рис. 2. Граничні умови

Результати розрахунку напружено-деформованого стану кронштейну КН-1 наведені на рис. 3. Міцність кронштейну перевіряється по максимальним середнім по товщині пластини еквівалентним напруженням. Кронштейн згинається в площині дії навантаження

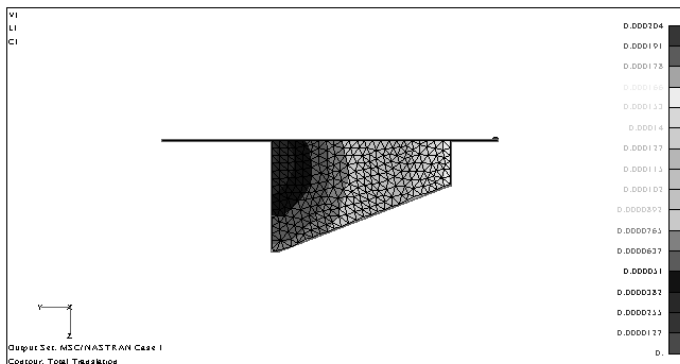
(рис. 3, а). Максимальне переміщення спостерігається в точці *N* і складає 0,0002 м.



а



б



в

Рис. 3. Напружено-деформований стан кронштейну KH-1

Максимальні еквівалентні напруження спостерігаються в вузькій області навколо точки *A* і складають $417,7 \text{ МПа}$ (рис. 3,б,в). Отримане значення напруження більше за розрахункову межу текучості сталі 230 МПа .

Для дослідження стійкості кронштейну КН-1 від дії розподіленого навантаження виконаний розрахунок на стійкість за допомогою методу Ланцоша, який реалізований в програмному комплексі NASTRAN. Визначено критичні значення навантаження та форми втрати стійкості кронштейну. На рис. 4 зображено першу форму втрати стійкості конструкції. Вона відповідає загальній формі втрати стійкості, але відрізняється від форми деформування кронштейну при дії експлуатаційного навантаження (рис. 3, а). Нижче критичне значення розподіленого навантаження і коефіцієнт запасу стійкості відповідно складають $226,94 \text{ кН/м}$ та $4,455$.

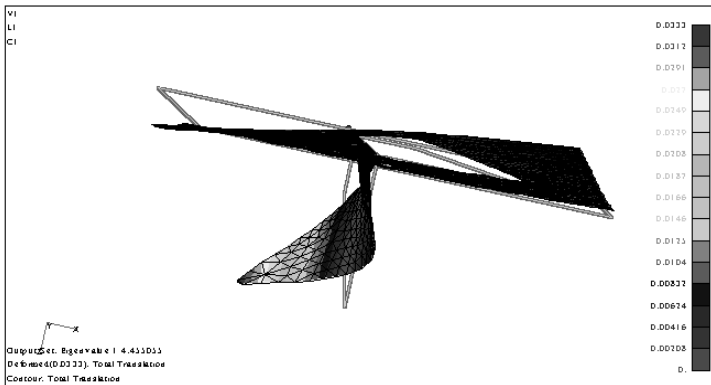


Рис. 4. Форма втрати стійкості кронштейну КН-1

Виконана перевірка міцності анкерних отворів для кріплення кронштейнів до цегляної стіни. Розрахункові зусилля в точках отвору, які повинні сприйнятися анкером, складають: на зріз $4923,76 \text{ Н}$, на вирив – $63,89 \text{ Н}$. Розрахункові зусилля знаходяться в межах допустимих, якщо прийняти анкер діаметром 10 мм .

Виконаний розрахунок напружено-деформованого стану сталюого кронштейну КН-2. Скінченноелементна модель кронштейну, яка містить 1856 вузлів та 3450 трикутних пластинчатих елементів, представлена на рис. 5.

Граничні умови, що накладені на кронштейн представлені на рис. 6. В усіх вузлах колового отвору не дозволяються переміщення вздовж осі *Z*.

В точках F та E двох отворів також введені закріплення вздовж осей X та Y . В околі точки C не дозволяються переміщення вздовж осі Y .

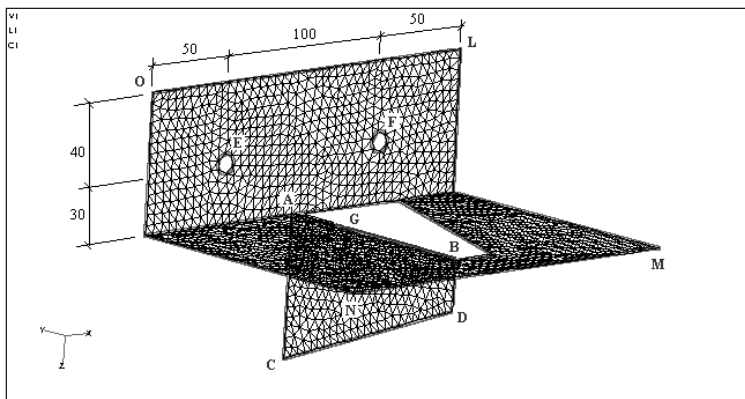


Рис. 5. Скінченноелементна модель кронштейну КН.-2

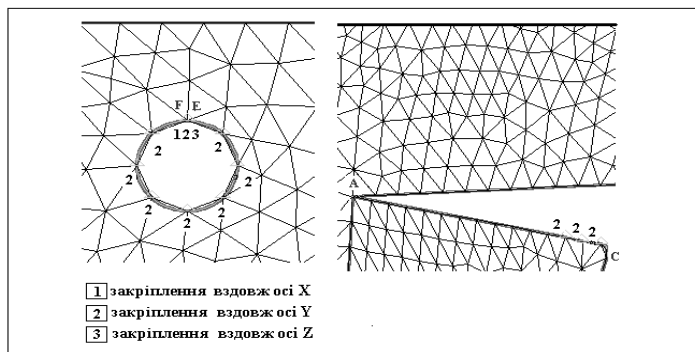
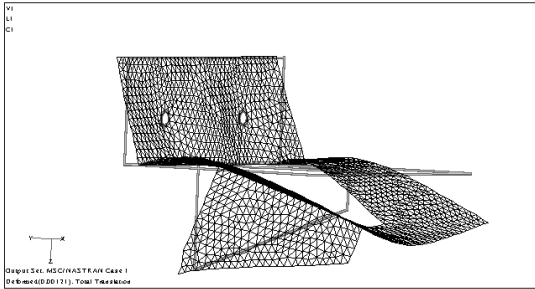
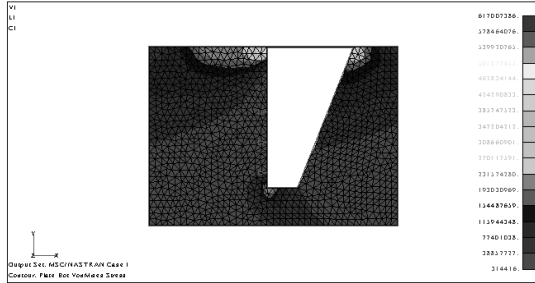


Рис. 6. Граничні умови

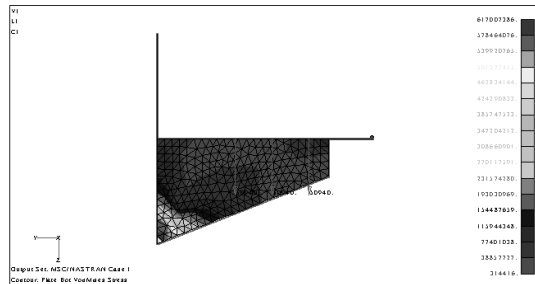
Навантаження на кронштейн розподіляється вздовж прямої BG на довжину $0,085$ м і складає $50,94$ кН/м . Напружено-деформований стан кронштейну представлений на рис. 7. Кронштейн згинається в площині дії навантаження (рис. 7, a). Максимальне переміщення спостерігається в середині сторони NM і складає $0,0012$ м. Концентрація еквівалентних напружень спостерігаються в областях навколо точок A , C , F , E (рис. 7, b , $в$, $г$). Максимальне значення еквівалентного напруження, яке дорівнює 617 МПа , більше за розрахункову межу текучості сталі 230 МПа .



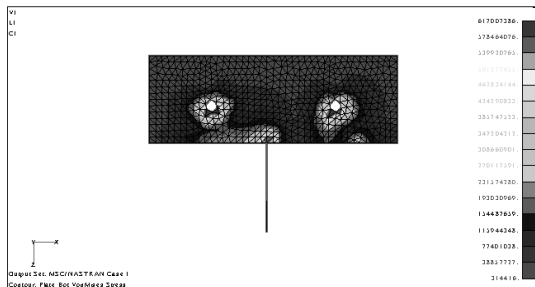
а



б



в



г

Рис. 7. Напружено-деформований стан кронштейну КН-2

Розрахункові зусилля в точках E та F двох отворів, які повинні сприйнятися анкерами, складають: на зріз 287,96 H та 1777,59 H , на вирив – 1657,67 H та 1211,87 H відповідно. Для двох анкерів діаметром 10 мм розрахункові зусилля не перевищують допустимі.

Результати розрахунку кронштейну на стійкість представлені на рис. 8. Нижче критичне значення розподіленого навантаження складає 175,59 $\kappa H/м$. Коефіцієнт запасу стійкості кронштейну КН-2 дорівнює 3,447.

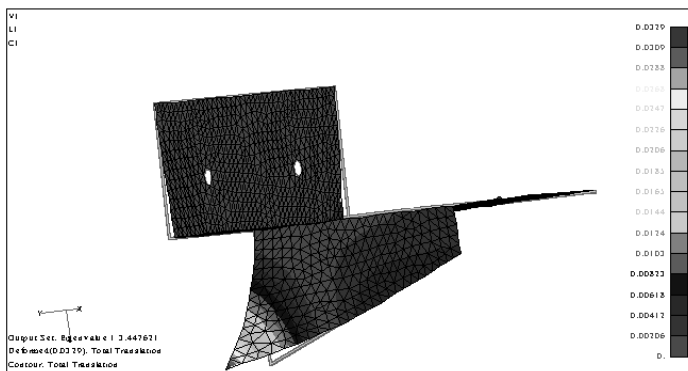


Рис. 8. Форма втрати стійкості кронштейну КН-2

Висновок. Розрахунок напружено-деформованого стану сталевих кронштейнів показав, що їх міцність забезпечена. В обмежених областях навколо отворів спостерігається підвищення напруженого стану. Всі кронштейни мають достатній запас стійкості. Прийняті розпірні анкери забезпечують розрахункові зусилля.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. - М.: Гостехтеориздат, 1956.- 419 с.
2. Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології.-К.: Каравела, 2009.- 696 с.
3. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. - К.: Факт, 2007. - 394 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.:Мир,1975.-542 с.
5. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.
6. ДБН В.1.2-2-2006 „Навантаження і впливи”.

Стаття надійшла до редакції 02.08.2012 р.

Лукьянченко О.А., Геращенко О.В., Завойский А.К., Ашмарина Г.Р.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТАЛЬНЫХ КРОНШТЕЙНОВ

Исследована несущая способность двух стальных кронштейнов разной геометрии, сконструированных в НИИ строительного производства г. Киева. Расчетные модели конструкций построены с помощью современного программного комплекса конечноэлементного анализа. Выполнена проверка прочности анкерных отверстий для крепления кронштейнов к кирпичной стене. Определен коэффициент запаса устойчивости кронштейнов.

Lukianchenko O.O., Gerashchenko O.V., Zavoyskiy A.K., Ashmarina G.R.

INVESTIGATION OF CARRYING CAPACITY OF STEEL BRACKET

Carrying capacity of two steel brackets of different geometry, which are designed in Kyiv Research Institute of Building Production, was studied. Calculated model structures was built using modern FEM software. The test of strength anchor holes for mounting brackets to a brick wall was executed. The safety factor of stability brackets was defined.

УДК 539.3

С.В. Кобельський, канд. техн. наук.

АНАЛІЗ ЗМІШАНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ СТОСОВНО ЗАДАЧ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТА МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

В рамках змішаної проєкційно-сіткової схеми МСЕ запропоновані нові тривимірні скінченні елементи для розв'язання просторових задач теорії пружності. Побудована змішана апроксимація полів переміщень-деформацій-напружень, отримані вирази для коефіцієнтів розв'язуючих матриць. Проведений порівняльний аналіз запропонованих елементів за результатами розв'язку ряду модельних задач.

Вступ. В даний час найбільш універсальним методом розв'язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла є метод скінченних елементів (МСЕ). Серед його формулювань найбільш широкого застосування здобули класичні схеми в переміщеннях [1-3]. Проте істотним недоліком класичного МСЕ є розривна апроксимація напружень і деформацій, а також нижчий порядок збіжності апроксимації напружень і деформацій в порівнянні з таким для переміщень.

У зв'язку з цим перспективним в чисельному аналізі задач механіки деформівного тіла представляється застосування змішаних формулювань МСЕ, в яких напруження або деформації входять у розв'язуючі рівняння поряд з переміщеннями як рівноправні невідомі [4-7]. Основний вииграш при використанні змішаних і змішано-гібридних формулювань МСЕ в порівнянні з класичним підходом МСЕ у формі методу переміщень полягає в зменшенні погрішності апроксимації для напружень і деформацій, а також можливості точного задоволення статичним граничним умовам на поверхні тіла. Ще одна перевага полягає в тому, що змішані схеми МСЕ дозволяють забезпечити безперервність апроксимації не лише для переміщень, але і для напружень і деформацій.

У роботі [8] запропонований просторовий змішаний скінченний елемент (ЗСЕ-1), побудований на основі шестигранної восьмивузлової призми з полілінійним заповненням переміщень і апроксимацією напружень і деформацій за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно вершин і центру призми.

У роботі [9] проведено аналіз застосування елемента ЗСЕ-1 при розв'язанні задач теорії пластичності і теорії тріщин.

У даній роботі розглядається ряд нових просторових змішаних скінченних елементів, побудованих на основі шестигранної 8-вузлової призми з різною мірою апроксимації деформацій і напружень і змішаний елемент у формі тетраедра з апроксимацією напружень і деформацій за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно його вершин і центру.

Матричні рівняння змішаного методу. Систему розв'язуючих рівнянь змішаного методу можна представити у вигляді [7]:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_h] \{\varepsilon_h\} &= [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{u}_h\}; \\ \{\sigma_h\} &= [\mathbf{D}_h] (\{\varepsilon_h\} - \{\xi_h\}); \\ [\mathbf{H}_h]^T \{\sigma_h\} &= \{\rho_h\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Перше рівняння визначає вектор значень деформацій $\{\varepsilon_h\}$ у вузлах триангуляції і центрах тяжіння елементів по відомих вузлових переміщеннях $\{\mathbf{u}_h\}$, друге – пов'язане з фізичним законом пружного середовища для побудови вектора напружень $\{\sigma_h\}$ і третє – забезпечує виконання умов статичної рівноваги. Вектори $\{\rho_h\}$, $\{\xi_h\}$ відповідають приведеним до вузлів сітки навантаженням і початковим деформаціям.

Апроксимуючі функції для переміщень. Розглянемо змішані скінченні елементи ЗСЕ-2 і ЗСЕ-3, побудовані на основі шестигранної восьмивузлової призми з полілінійним заповненням переміщень і скінченний елемент ЗТЕ-1, побудований на основі класичного чотиривузлового тетраедра.

Представимо множину $\Omega \in \mathbb{R}^3$ у вигляді об'єднання скінченного числа шестиграних восьмивузлових призм Ω_m .

Нехай $\xi_\alpha = (\xi_{1\alpha}, \xi_{2\alpha}, \xi_{3\alpha})$ – координати вузлів у вершинах скінченного елемента Ω_m - призми (рис. 1,а) або тетраедра (рис. 1,б). Позначимо $\xi_f = (\xi_{1f}, \xi_{2f}, \xi_{3f})$, $f=1\dots 6$ – координати вузлів в центрах граней призми, $\xi_k = (\xi_{1k}, \xi_{2k}, \xi_{3k})$, $k=1\dots n_{pr}$ – координати n_{pr} внутрішніх вузлів призми, $\xi_m = (\xi_{1m}, \xi_{2m}, \xi_{3m})$ – координати вузла в центрі призми або тетраедра.

Нехай $E_h = (\mathbf{x}_\alpha)_{\alpha=1}^{N_\alpha^{(h)}}$ – множина вузлів інтерполяції, що відповідають вершинам призм для елементів ЗСЕ-1, ЗТЕ-1, ЗСЕ-2, ЗСЕ-3. $\Lambda_h = E_h \cup K_h$ – множина вузлів інтерполяції, в яких шукаються деформації і напруження, причому $K_h = (\mathbf{x}_m)_{m=1}^{N_m^{(h)}}$ – для елементів ЗСЕ-1 і ЗТЕ-1,

$K_h = (\mathbf{x}_m)_{m=1}^{N_m^{(h)}} \cup (\mathbf{x}_f)_{f=1}^{N_f^{(h)}}$ - для елемента ЗСЕ-2,
 $K_h = (\mathbf{x}_m)_{m=1}^{N_m^{(h)}} \cup (\mathbf{x}_f)_{f=1}^{N_f^{(h)}} \cup (\mathbf{x}_k)_{k=1}^{N_k^{(h)}}$ - для елемента ЗСЕ-3.

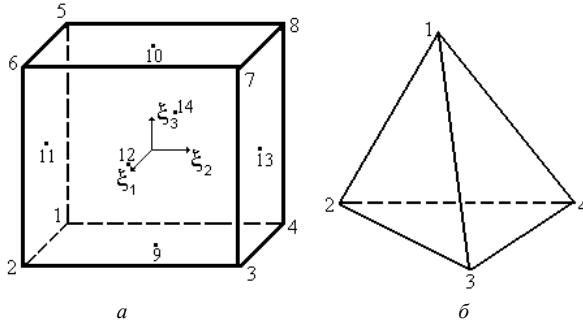


Рис. 1. Скінченний елемент– призма з вузлами в вершинах і центрах граней (а) і тетраедр (б)

Переміщення в межах призми Ω_m задамо у вигляді функції від локальних координат $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

$$u_{ih}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} u_{i\alpha} \lambda_{\alpha}^{(m)}(\xi), \quad i=1, 2, 3, \quad \forall \xi \in \Omega_m. \quad (2)$$

$$u_{ih}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} u_{i\alpha} \lambda_{\alpha}^{(m)}(\xi) + \sum_{1 \leq f \leq 6} u_{if} \lambda_{hf}^{(m)}(\xi), \quad i=1, 2, 3, \quad \forall \xi \in \Omega_m. \quad (3)$$

Тут $\lambda_{\alpha}^{(m)}(\xi)$, $\lambda_{hf}^{(m)}(\xi)$ – інтерполяційні функції для правильної шестигранної призми, що визначаються для елементів ЗСЕ-2, ЗСЕ-3 по співвідношеннях

$$\lambda_{\alpha}^{(m)}(\xi) = \frac{1}{8} (1 + \xi_{1\alpha} \xi_1) (1 + \xi_{2\alpha} \xi_2) (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3). \quad (4)$$

Зв'язок між координатами точки в локальній і глобальній системах координат в межах призми встановлюється за допомогою співвідношень

$$\mathbf{x} = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} \mathbf{x}_\alpha \lambda_{\alpha}^{(m)}(\xi); \quad \mathbf{x} = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} \mathbf{x}_\alpha \lambda_{\alpha}^{(m)}(\xi) + \sum_{1 \leq f \leq 6} \mathbf{x}_f \lambda_{hf}^{(m)}(\xi), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_m. \quad (5)$$

Функції $u_{ih}(\xi)$ приймають у вузлах інтерполяції призми Ω_m вузлові значення $u_{ih}(\xi_\alpha)$, $u_{ih}(\xi_f)$, $u_{ih}(\xi_k)$, $u_{ih}(\xi_m)$, позначені $u_{i\alpha}$, u_{if} , u_{ik} , u_{im} .

Тоді напруження і деформації в межах Ω_m задамо у вигляді

$$\tau_{ijh}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} \tau_{ij\alpha} \omega_{\alpha}^{(m)}(\xi) + \sum_{1 \leq f \leq 6} \tau_{ijf} \omega_{hf}^{(m)}(\xi) + \sum_{1 \leq k \leq npi} \tau_{ijk} \omega_{hk}^{(m)}(\xi) + \tau_{ijm} \omega_{im}^{(m)}(\xi), \quad (6)$$

де $\omega_{ha}^{(m)}(\xi)$, $\omega_{hf}^{(m)}(\xi)$, $\omega_{hk}^{(m)}(\xi)$ і $\omega_{hm}^{(m)}(\xi)$ – інтерполяційні функції, τ_{ijha} , τ_{ijhf} , τ_{ijhk} і τ_{ijhm} – значення функцій $\tau_{ijh}(\xi)$ у вузлах інтерполяції призми Ω_m .

Для елемента ЗСЕ-1 переміщення в його межах задамо за допомогою просторових L-координат

$$u_{ih}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 4} u_{i\alpha} L_{h\alpha}^{(m)}, \quad i=1, 2, 3, \quad \forall \xi \in \Omega_m, \quad (7)$$

а напруження і деформації у вигляді

$$\tau_{ijh}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 4} \tau_{ijh\alpha} \omega_{ha}^{(m)}(\xi) + \tau_{ijhm} \omega_{hm}^{(m)}(\xi). \quad (8)$$

Апроксимуючі функції для деформацій і напружень

Елемент ЗСЕ-2. Інтерполяційні функції, що приймаються для апроксимації напружень і деформацій, визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \omega_{ha}^{(m)}(\xi) &= \frac{1}{8} \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3 (1 + \xi_{1\alpha} \xi_1) (1 + \xi_{2\alpha} \xi_2) (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3) \times \\ &\times (-2(1 - \xi_{1\alpha} \xi_1 - \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{3\alpha} \xi_3) - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{3\alpha} \xi_3 - \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3), \\ \omega_{hf=1}^{(m)}(\xi) &= \frac{1}{2} \xi_{3\alpha} \xi_3 (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3) (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2), \\ \omega_{hm}^{(m)}(\xi) &= (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) (1 - \xi_3^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Для решти вузлів в центрах граней ($f = 2, \dots, 6$) вирази отримуються циклічною перестановкою індексів.

Елемент ЗСЕ-3. Інтерполяційні функції для апроксимації напружень і деформацій мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega_{ha}^{(m)}(\xi) &= -\frac{8}{27} \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3 (1 + \xi_{1\alpha} \xi_1) (1 + \xi_{2\alpha} \xi_2) (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3) \times \\ &\times (-2(1 - \xi_{1\alpha} \xi_1 - \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{3\alpha} \xi_3) - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{3\alpha} \xi_3 - \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3) \times \\ &\times \left(\frac{1}{4} - \xi_1^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_2^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_3^2\right), \\ \omega_{hf=1}^{(m)}(\xi) &= -\frac{32}{3} \xi_{3\alpha} \xi_3 (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3) (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) \left(\frac{1}{4} - \xi_1^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_2^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_3^2\right), \\ \omega_{hk}^{(m)}(\xi) &= \frac{2048}{27} \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3 \left(\frac{1}{2} + \xi_{1\alpha} \xi_1\right) \left(\frac{1}{2} + \xi_{2\alpha} \xi_2\right) \left(\frac{1}{2} + \xi_{3\alpha} \xi_3\right) (-2(1 - \xi_{1\alpha} \xi_1 - \\ &- \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{3\alpha} \xi_3) - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{3\alpha} \xi_3 - \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3) \times (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) (1 - \xi_3^2), \\ \omega_{hm}^{(m)}(\xi) &= 64(1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) (1 - \xi_3^2) \left(\frac{1}{4} - \xi_1^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_2^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_3^2\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для решти вузлів в центрах граней ($f=2, \dots, 6$) вирази отримуються циклічною перестановкою індексів.

Елемент ЗТЕ-1. Інтерполяційні функції, що приймаються для апроксимації напружень і деформацій, визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}\omega_{\text{h}\alpha}^{(m)}(\xi) &= L_\alpha - 81L_1L_2L_3L_4, \\ \omega_{\text{hm}}^{(m)}(\xi) &= 81L_1L_2L_3L_4.\end{aligned}\quad (11)$$

Побудова матриць. Для побудови розв'язуючих матриць використовувалася кубатурна формула, в якій точки зважування збігаються з вузлами інтерполяції елемента Ω_m :

$$\int_{\Omega_m} f(\mathbf{x}) d\Omega_m = \int_{\Omega_m} f(\mathbf{x}(\xi)) J(\xi) d\xi \approx k_1 \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} f_\alpha J_\alpha + k_2 \sum_{1 \leq f \leq 6} f_f J_f + k_3 \sum_{1 \leq k \leq n_{pi}} f_k J_k + k_4 f_m J_m, \quad (12)$$

де J_α , J_f , J_k , J_m – значення визначника матриці Якобі у вузлах інтерполяції елемента Ω_m , k_1 , k_2 , k_3 , k_4 – вагові множники.

У табл. 1 приведені характеристики скінченних елементів, координати однієї з характерних точок і вагові множники кубатурної формули [10]. Координати решти точок отримуються всілякими перестановками і змінами знаків.

Таблиця 1

Вагові множники кубатурних формул

Елемент	Вузли в вершинах	Вузли в центрах граней	Внутрішні вузли (<i>npi</i>)	Вузол в центрі
ЗСЕ-1	8 (1, 1, 1) $k_1 = 1/3$	-	-	1 (0, 0, 0) $k_4 = 16/3$
ЗСЕ-2	8 (1, 1, 1) $k_1 = 1/9$	6 (1, 0, 0) $k_2 = 8/9$	-	1 (0, 0, 0) $k_4 = 16/9$
ЗСЕ-3	8 (1, 1, 1) $k_1 = 3/45$	6 (1, 0, 0) $k_2 = 16/45$	8 (.5, .5, .5) $k_3 = 32/45$	1 (0, 0, 0) $k_4 = -16/45$
ЗТЕ-1	4 (1, 0, 0, 0) $k_1 = 73/120$	-	-	1 (1/3, 1/3, 1/3, 1/3) $k_4 = 128/420$

Матриця $[M_h]$ визначається за допомогою співвідношень:

$$\begin{aligned}[M_h]_{\alpha\alpha} &= \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{\text{h}\alpha}} \int_{\Omega_m} \omega_{\text{h}\alpha}(\xi) \omega_{\text{h}\alpha}(\xi) J(\xi) d\xi \approx k_1 \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{\text{h}\alpha}} J_\alpha, \\ [M_h]_{\text{ff}} &= \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{\text{hf}}} \int_{\Omega_m} \omega_{\text{hf}}(\xi) \omega_{\text{hf}}(\xi) J(\xi) d\xi \approx k_2 \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{\text{hf}}} J_f, \\ [M_h]_{\text{kk}} &= \int_{\Omega_m} \omega_{\text{hk}}(\xi) \omega_{\text{hk}}(\xi) J(\xi) d\xi \approx k_3 J_k, \\ [M_h]_{\text{mm}} &= \int_{\Omega_m} \omega_{\text{hm}}(\xi) \omega_{\text{hm}}(\xi) d\xi \approx k_4 J_m.\end{aligned}\quad (13)$$

Тут Λ_{ha} - множина призм, що містять вузол a , Λ_{hf} - множина призм, що містять вузол f .

Всі недіагональні члени матриці $[M_h]$ рівні нулю.

Для побудови матриці $[H_h]$ необхідно врахувати співвідношення

$$\frac{\partial \lambda_{ha}^{(m)}(\xi)}{\partial x_i} = e_{ia}^s \frac{\partial \lambda_{ha}^{(m)}(\xi)}{\partial \xi_s}, \quad (14)$$

де e_{ia}^s – компоненти оберненої матриці Якобі у вузлі x_a .

Компоненти матриці Якобі визначаються виразом:

$$e_{sia} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial \xi_s} \right|_{x_i = x_{ia}}. \quad (15)$$

Чисельний аналіз. Побудовані змішані скінченні елементи тестувалися на розв'язанні ряду задач, що мають аналітичний або відомий чисельний розв'язок.

Задача 1. Розглядалася задача про розтяг полого циліндра із зовнішнім діаметром $D_1 = 8$, внутрішнім діаметром $D_2 = 4$, висотою $2H = 60$ з симетрично розташованою внутрішньою (зовнішньою) крайовою кільцевою тріщиною глибиною $a = 1$ (рис. 2).

Торці циліндра навантажені рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $q=1$. Зважаючи на симетрію задачі розглядався сектор з довжиною дуги рівною довжині тріщини. Коефіцієнт Пуассона задавався 0.3. Модуль пружності матеріалу E приймався рівним одиниці.

Задача розв'язувалась в пружній постановці. Оцінювалась точність визначення коефіцієнта інтенсивності напружень. При побудові дискретної моделі використовувалась рівномірна

сітка з розбиттям, приведеним в таблиці (число точок вздовж фронту \times число точок вздовж радіусу \times число точок по висоті).

Результати розрахунків (табл. 2,3) зпівставлялися з рішенням, отриманим за допомогою чисельного методу [11]. Найкращі результати отримані з використанням елементу ЗСЕ-1, для яких спостерігається збіжність наближеного розв'язку при згущуванні сітки скінченних елементів. Для елементів ЗСЕ-2 і ЗСЕ-3 характерний той же ефект «запирання» розв'язку, що і для класичних 8-ми вузлових елементів.

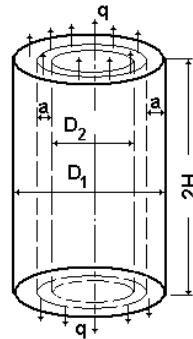


Рис. 2. Задача про розтяг полого циліндра з внутрішньою і зовнішньою крайовою кільцевою тріщиною

Таблиця 2

Результати розрахунків коефіцієнта інтенсивності напружень для задачі про розтяг полого циліндра з внутрішньою крайовою кільцевою тріщиною

Сітка	Коефіцієнт інтенсивності напружень			
	δ, %			
	СКЭ-1	СКЭ-2	СКЭ-3	КМКЭ-8
3×3×61	1.893441	1.791203	1.681791	-
	5.55	10.65	16.11	-
5×5×121	1.960688	1.864103	1.772582	1.76263
	2.19	7.01	11.58	12.07
7×7×181	1.987509	1.892830	1.806053	1.79778
	0.85	5.58	9.91	10.32
9×9×241	2.000348	1.906951	1.822905	1.81618
	0.21	4.87	9.07	9.40
11×11×301	2.008160	1.915504	1.833059	1.82577
	-0.17	4.45	8.56	8.92
13×13×361	2.013276	1.921185	1.839835	1.83333
	-0.43	4.16	8.22	8.54
15×15×421	2.016951	1.925249	1.844679	1.83876
	-0.62	3.96	7.98	8.28
[11]	2.0046453			

Таблиця 3

Результати розрахунків коефіцієнта інтенсивності напружень для задачі про розтяг полого циліндра з зовнішньою крайовою кільцевою тріщиною

Сітка	Коефіцієнт інтенсивності напружень			
	δ, %			
	СКЭ-1	СКЭ-2	СКЭ-3	КМКЭ-8
3×3×61	2.421854	2.300502	2.178809	-
	13.08	17.44	21.80	-
5×5×121	2.633741	2.514673	2.392979	2.3806
	5.48	9.75	14.12	14.56
7×7×181	2.702545	2.584908	2.467907	2.4587
	3.01	7.23	11.43	11.76
9×9×241	2.737831	2.620696	2.506018	2.4982
	1.74	5.94	10.06	10.34
11×11×301	2.758701	2.642098	2.529018	2.5223
	0.99	5.18	9.23	9.47
13×13×361	2.772698	2.656407	2.544412	2.5387
	0.49	4.66	8.68	8.89
15×15×421	2.782624	2.666624	2.555435	2.5492
	0.13	4.30	8.29	8.51
[11]	2.786297454			

Задача 2. В [9] розглядалася задача про еліптичну щілину в нескінченному тілі, підданому однорідному розтягу в напрямку осі z (рис. 3) з використанням елемента ЗСЕ-1. Тут ця задача розглядається з використанням елементів ЗСЕ-2, ЗСЕ-3.

На верхньому торці циліндра радіуса $R = 40$ м, половинної висоти $H=40$ м, з еліптичною тріщиною $a/c = 2$, $c = 0.025$ м (a – мала напіввісь еліпса тріщини, c – велика вісь) прикладено розтягуюче навантаження $q=100$ МПа. Модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$. Матеріал ідеальний пружно-пластичний, межа текучості $\sigma_T=400$ МПа. Як і в [9], величина кроку сітки в ядрі $S = 1, 10, 100, 1000s$, $s \approx 8$ мкм.

На рис. 4 приведені графіки обчислення параметрів механіки руйнування для глибокої точки тріщини (напруження σ , що діє у напрямі нормалі до її площини, розкриття у вузлі перед вершиною тріщини і КІН) в пружно-пластичній постановці при використанні лише елементів ЗСЕ-1, ЗСЕ-2, ЗСЕ-3 і елементів ЗСЕ-1 спільно з елементами ЗТЕ-1.

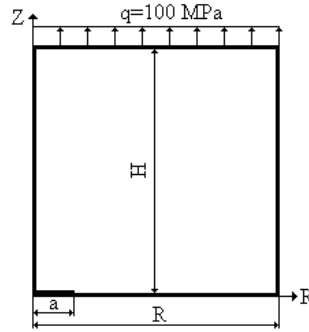


Рис. 3. До задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

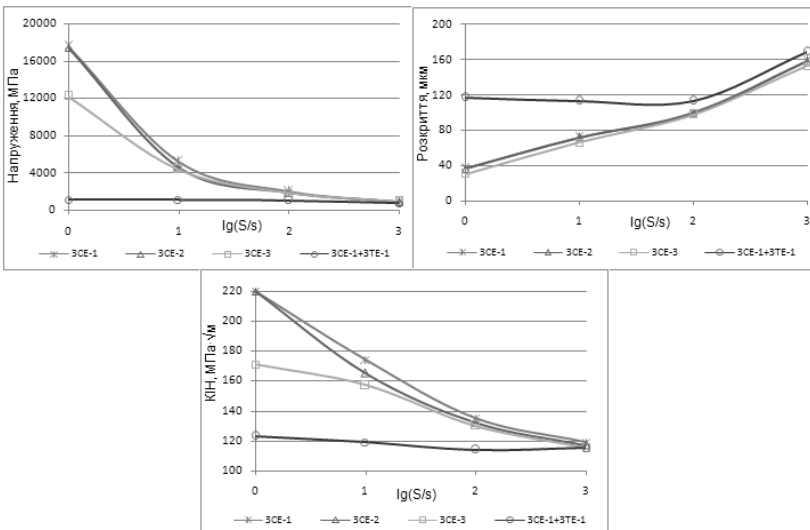


Рис. 4. Графіки обчислення параметрів руйнування в задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі для глибокої точки тріщини

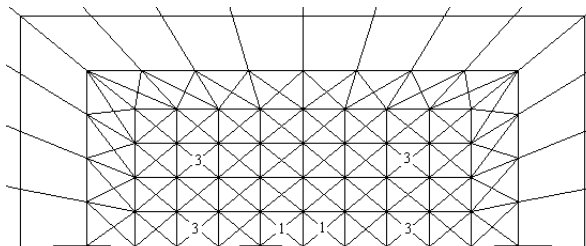


Рис. 5. Фрагмент сітки скінченних елементів в околиці точки на фронті тріщини

Видно, що збіжність результатів по напруженням, розкриттям і коефіцієнтам інтенсивності напружень при зменшенні кроку сітки має місце лише при спільному використанні елементів ЗСЕ-1 і ЗТЕ-1. Причому на тетраедри розбиваються лише елементи, що примикають до фронту тріщини.

Для оцінки числа елементів, які повинні розбиватися на тетраедри, була розглянута та ж задача, але для еліптичної тріщини $a/c=4$. Задача розв'язувалася при величинах кроку в ядрі $S=1$ і $1000s$ (рис. 5), на тетраедри розбивалися 1, 3 і 5 шарів елементів, що оточують точку на фронті тріщини.

Результати розв'язку представлені на рис. 6 графіками зміни параметрів руйнування уздовж фронту тріщини.

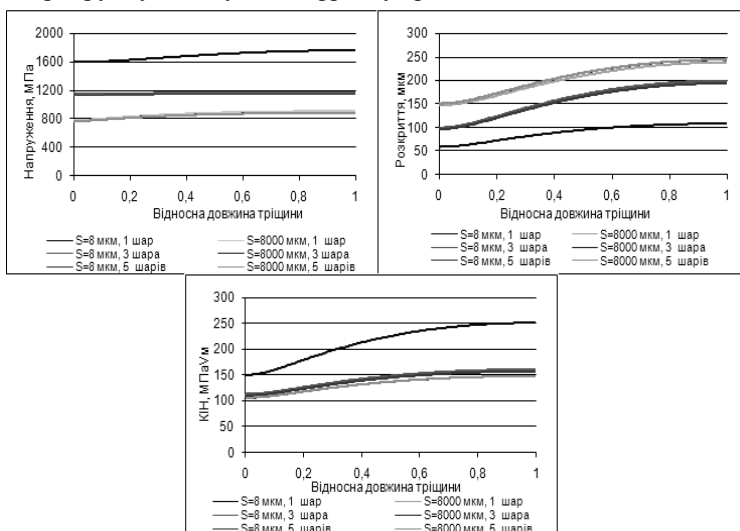


Рис. 6. Графіки зміни параметрів руйнування уздовж фронту тріщини в задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

Видно, що для рідких сіток ($S=1000s$) результати практично співпадають при будь-якому розбитті елементів на тетраедри (криві 4–6). Для густих сіток ($S=1s$) збіжність результатів має місце лише при розбитті на тетраедри не менше трьох шарів елементів. Це можна пояснити тим, що в першому випадку розмір зони пластичних деформацій локалізований в межах одного елементу біля точки на фронті тріщини, тоді як із зменшенням кроку сітки число таких елементів зростає.

Розв'язання задачі в пружно-пластичній постановці передбачає виконання ряду ітерацій «по пружності». У зв'язку з цим важливим є правильний вибір критерію зупинки ітераційного процесу. Для задач теорії тріщин як критерій пропонується аналіз значень G -інтеграла на п'яти послідовних кроках

$$\delta = \frac{|G_{i-4} - G_i|}{G_{i-4}} \leq \varepsilon. \quad (15)$$

Результати розв'язання даної задачі з використанням (20 кроків) і без використання (60 кроків) критерію (15) приведені в таблиці. 4. Зпівставлені значення параметрів руйнування в двох точках тріщини – глибокій (точка А) і на великій напівосі еліпса (точка D) для $\varepsilon = 10^{-4}$.

Таблиця 4

Результати розрахунків параметрів руйнування при різному числі кроків «по пружності»

	Точка	Напруження	Розкриття	КІН
20 кроків	A	1164,47	198,27	159,80
	D	1140,92	98,44	111,82
60 кроків	A	1162,69	198,36	159,79
	D	1138,50	98,49	111,79

Висновки. В рамках змішаної проекційно-сіткової схеми МСЕ запропоновані нові тривимірні скінченні елементи для розв'язання просторових задач теорії пружності, пластичності і теорії тріщин з різною мірою апроксимації напружень і деформацій.

Аналіз результатів розв'язання модельних задач дозволяє зробити висновок про те, що елементом, якому треба віддати перевагу (як з точки зору точності отримуваних результатів, так і з врахуванням часу розв'язання задач і об'єму породжуваної інформації) виявився елемент ЗСЕ-1 з полілінійним заповненням переміщень (апроксимація напружень і деформацій по восьми вузлах у вершинах і вузлу в центрі). Елемент ЗСЕ-2, хоча і забезпечує отримання дещо точніших результатів розв'язання ряду з розглянутих модельних задач, поступається елементу ЗСЕ-1 в часі їх розв'язання. Подальше підвищення міри апроксимації

напружень і деформацій при незмінній мірі апроксимації переміщень привело до погіршення результатів (елемент ЗСЕ-3).

У задачах лінійної механіки руйнування елементи ЗСЕ-2, ЗСЕ-3 поводяться аналогічно класичним 8-ми вузловим елементом (характерний той самий ефект «запирання» розв'язку), тоді як для елемента ЗСЕ-1 спостерігається збіжність наближеного розв'язку при згущуванні сітки скінченних елементів.

У задачах нелінійної механіки руйнування збіжні результати отримані при спільному використанні елементів ЗСЕ-1 і ЗТЕ-1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике, – М.: Мир, 1975. – 542 с.
2. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
3. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 1 – 3. – Butterworth-Heinemann, – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi. – 5th ed., 2000. – 1482 p.
4. *Ворошико П.П.* Смешанные вариационные формулировки задач теории упругости и их реализация методом конечных // Пробл. прочности, – 1985. – № 1. – С. 100 – 105.
5. *Уманский С.Э.* Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // Пробл. Прочности. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
6. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учётом жёстких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – С. 147 – 156.
7. *Чирков А.Ю.* Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения задач теории упругости // Пробл. Прочности. – 2003. – № 3. С. 70 – 100.
8. *Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А.* Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2008. – Вып. 31. – С. 195 – 207.
9. *Кобельский С.В.* Чисельний аналіз просторових задач теорії тріщин на основі змішаної схеми метода скінчених елементів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. зб.- К.: КНУБА, 2011. – Вип.88. – С. 147 - 156.
10. *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука. 1981. – 336 с.
11. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.,: Наукова думка. 1988. – 620 с.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2012 р.

Кобельский С.В.

АНАЛИЗ СМЕШАННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

В рамках смешанной проекционно-сеточной схемы МКЭ предложены новые трехмерные конечные элементы для решения пространственных задач теории упругости и пластичности с различной степенью аппроксимации напряжений и деформаций. Построена смешанная аппроксимация полей перемещений-деформаций-напряжений. Проведен сравнительный анализ предложенных элементов по результатам решения модельных задач.

Kobelsky S.V.

ANALYSIS OF MIXED FINITE ELEMENTS IN APPLICATION TO PROBLEMS OF ELASTO-PLASTIC DEFORMATION AND FRACTURE MECHANICS

Based on the mixed projection-mesh scheme of finite element method, the new three-dimensional finite elements scheme to solve three-dimensional problems of elasticity are proposed and examined. Expressions for the coefficients of solving matrixes are obtained. Results of some test problems being solved shows the advantages of the mixed method.

УДК 539.3

О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
 С.О. Пискунов, д-р техн. наук,
 І.І. Солодей, канд. техн. наук,
 Ю.В. Максим'юк, канд. техн. наук

ЕФЕКТИВНІСТЬ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МССЕ) В ЗАДАЧАХ ЗГИНУ ТА З КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРУЖЕНЬ

Розглянуті вісесиметричний і плоский скінченні елементи загального вигляду та їх модифікації із визначенням механічних і геометричних параметрів в центрах СЕ на базі фізичних компонент тензорів напружень та деформацій у поєднанні з моментною схемою скінченного елемента. На основі чисельних досліджень показана їх ефективність порівняно із скінчено-елементною (СЕМ) базою SCAD при розрахунку масивних і тонкостінних тіл в задачах згину та при наявності концентраторів напружень.

Вступ. В монографії [2] на основі МССЕ були приведені розрахункові співвідношення при використанні гіпотези про постійність компонент метричного тензору в межах СЕ. Як було показано в роботі [1] використання цієї гіпотези суттєво погіршує збіжність результатів навіть при однорідному напружено-деформованому стані. В даній роботі отримані розв'язувальні співвідношення, які враховують змінність компонент метричного тензора в його площині і проведені дослідження їх ефективності.

1. Вісесиметричний та плоский скінченні елементи загального вигляду. Для вісесиметричних та плоско-деформованих тіл на основі МСЕ використовуються скінченні елементи (СЕ), що являють собою чотирикутники довільної форми (рис. 1,а).

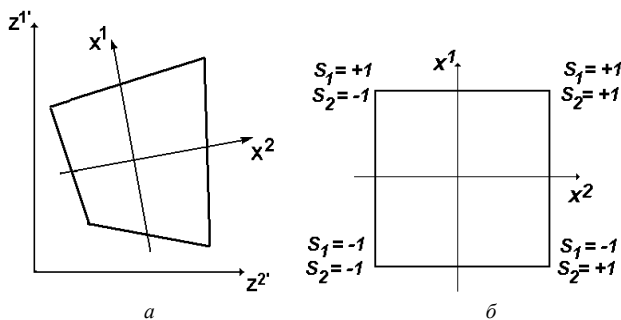


Рис. 1.

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат x^i , так що осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною (рис. 1,б). Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ.

У першому варіанті розглянемо скінченні елементи загального вигляду. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

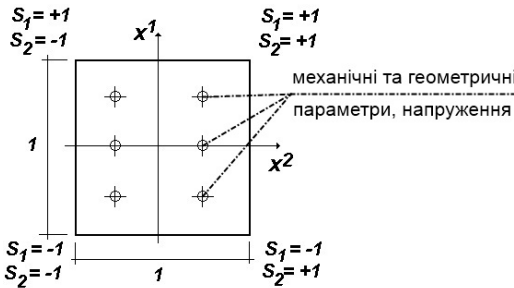


Рис. 2.

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень вузлів СЕ в базисній системі координат $u_{k'}$, де k' - напрямок в базисній системі координат.

$$u_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)} u_{k'(S_1, S_2)} \quad (1)$$

Білінійний розподіл переміщень, швидкостей і прискорень в площині перерізу елемента подається у наступному вигляді:

$$P_{(S_1, S_2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 \quad (2)$$

Індекси S_1 та S_2 визначають положення вузла відносно центру поперечного перерізу елемента і набувають значень ± 1 (рис. 2).

Застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [3] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження комбінованих просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище "хибного зсуву", що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{\alpha\alpha} &= \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \bar{\epsilon}_{12} = \overset{\circ}{\epsilon}_{12} \\ \bar{\epsilon}_{33} &= \overset{\circ}{\epsilon}_{33} + \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} x^\alpha,\end{aligned}\quad (3)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{ij,\alpha} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

Компоненти коефіцієнтів розкладу деформацій (3) та при заданому законі апроксимації переміщень (1) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(z_{,\alpha}^{k'} S_\beta + z_{,\beta}^{k'} S_\alpha \right) u_{k'}(S_1, S_2), \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} Z^{2'} u_{2'}(S_1, S_2), \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[\left(2z_{,\alpha}^{k'} S_1 S_2 + z_{,12}^{k'} S_\alpha \right) u_{k'}(S_1, S_2) \right], \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(2S_\alpha Z^{2'} + z_{,\alpha}^{2'} \right) u_{2'}(S_1, S_2).\end{aligned}\quad (4)$$

При цьому вважається, що в центрі поперечного перерізу СЕ переміщення і їх похідні виражаються формулами:

$$\begin{aligned}u_{k'} \Big|_{x^\alpha=0} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} u_{k'}(S_1, S_2), \\ u_{k',\beta} \Big|_{x^\alpha=0} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} u_{k'}(S_1, S_2) S_\beta, \\ u_{k',12} \Big|_{x^\alpha=0} &= \sum_{S_1} \sum_{S_2} u_{k'}(S_1, S_2) S_1 S_2.\end{aligned}\quad (5)$$

Опис процесу деформування вісесиметричних та плоско-деформованих тіл здійснюється відповідно до варіаційного принципу Лагранжа. Рівняння рівноваги системи, що складається з N СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (6)$$

В місцевій системі координат варіацію енергії деформації СЕ записується через компоненти тензорів напружень і деформацій:

$$\delta W = \int \int_{x^1 x^2} \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (7)$$

Перепишемо вираз (7) у матричному вигляді:

$$\delta W = \int \int_{x^1 x^2} \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2, \quad (8)$$

де

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \ 2\varepsilon_{12} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33}\}, \quad \{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \ \sigma^{12} \ \sigma^{22} \ \sigma^{33}\}. \quad (9)$$

Зв'язом між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u\}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} [B] &= \left[[B]^{(-1,-1)} \quad [B]^{(1,-1)} \quad [B]^{(-1,1)} \quad [B]^{(1,1)} \right], \\ \{u\}^T &= \left[\{u\}_{(-1,-1)}^T \quad \{u\}_{(1,-1)}^T \quad \{u\}_{(-1,1)}^T \quad \{u\}_{(1,1)}^T \right], \\ \{u\}_{(s_1, s_2)}^T &= \left[u_{1'(s_1, s_2)} \quad u_{2'(s_1, s_2)} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Елементи підматриць $[B]^{(s_1, s_2)}$ обчислюються відповідно до формул (4).

Підставляючи (10) в (8), запишемо варіацію енергії деформації елемента через переміщення $\{u\}$ та вузлові реакції $\{r_\sigma\}$:

$$\delta W = \delta \{u\}^T \{r_\sigma\}, \quad (12)$$

де

$$\{r_\sigma\} = \int \int_{x^1 x^2} [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (13)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} N_i N_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}, \quad (14)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, N_i, N_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між прирощеннями напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \{\Delta\varepsilon\}. \quad (15)$$

Опускаючи позначку прирощення Δ , прирощення варіації енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1, x^2} \delta \{ \varepsilon \}^T [D] \{ \varepsilon \} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (16)$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримаємо:

$$\delta W = \delta \{ u \}^T [k] \{ u \}, \quad (17)$$

де $[k]$ - матриця жорсткості:

$$[k] = \int_{x^1, x^2} [B]^T [D] [B] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (18)$$

Використовуючи формулу чисельного інтегрування:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [[B]^T [D] [B] \sqrt{g} N_i N_j]_{(x_i^1, x_j^2)}. \quad (19)$$

2. Вісесиметричний та плоский скінченні елементи із визначенням механічних і геометричних параметрів в центрах СЕ. Отримані співвідношення (14) і (19) не накладають обмежень на розподіл механічних і геометричних параметрів по будь-якій з осей x^i , але ведуть до необхідності виконання значного об'єму обчислень, що пов'язані з операціями чисельного інтегрування. Більш ефективною схемою представляється підхід, який припускає використання усереднених значень в області поперечного перерізу. На відміну від [2] не вводиться гіпотеза про постійність значень компонент метричного тензора в межах скінченного елемента, що досягається залученням фізичних компонент тензорів напружень, деформацій та пружних сталей в межах моментної схеми скінченного елемента.

Будемо вважати, що компоненти тензора пружних сталей та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора g_{ij} , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ (рис.3):

$$\tilde{C}^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}^{ijkl} = \tilde{C}^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad g = \overset{\circ}{g} = g \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (20)$$

Відповідно до МССЕ компоненти тензора фізичних деформацій у поперечному перетині скінченного елемента подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \beta} x^\beta, \quad (21)$$

де

$$\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}. \quad (22)$$

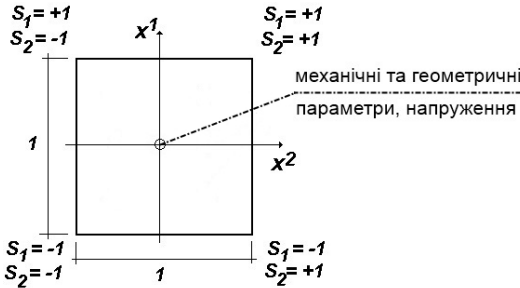


Рис. 3.

Зв'язок між фізичними компонентами тензора напружень та деформацій визначається на основі узагальненого закону Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (23)$$

де

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}. \quad (24)$$

Запишемо вираз для компонент тензора напружень через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \overset{\circ}{C}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{C}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \\ & + \overset{\circ}{C}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} x^1 \right) + \overset{\circ}{C}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} x^2 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Застосовуючи позначення

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} &= \overset{\circ}{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} &= \overset{\circ}{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} + \overset{\circ}{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2}, \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} &= \overset{\circ}{C}^{ij22} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \overset{\circ}{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1}, \end{aligned} \quad (26)$$

отримаємо запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} x^1. \quad (27)$$

Відкидаючи з виразу (27) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як такі, що не дають внеску в енергію деформування елемента, подамо фізичні компоненти тензора напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} x^{(3-\alpha)}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}, \quad (28)$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,\alpha}^{ij}$ – коефіцієнти розкладення напружень.

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням їх подання через компоненти тензора напружень в місцевій криволінійній системі координат:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} = g_{12}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{(3-\alpha)}^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha\alpha},$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} = g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{33}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}_{,(3-\alpha)}^{33} = g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}. \quad (29)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена, матимуть вигляд:

$$\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}^{\circ}} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}^{\circ} g_{22}^{\circ}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{12}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} = \frac{1}{g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33},$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial (\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha} / g_{\alpha\alpha}^{\circ})}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}^{\circ}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right),$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\alpha} = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33}}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta=0}} = \frac{\partial (\overset{\circ}{\epsilon}_{33} / g_{33}^{\circ})}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\beta=0}} = \frac{1}{g_{33}^{\circ}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\epsilon}_{33} \frac{g_{33,\alpha}^{\circ}}{g_{33}^{\circ}} \right) \Big|_{x^{\beta=0}} =$$

$$= \frac{1}{g_{33}^{\circ}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\epsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \quad (30)$$

де

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} \Big|_{x^{\gamma=0}}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \Big|_{x^{\gamma=0}}, \quad g_{(\alpha)\beta,\alpha}^{\circ} = z_{,\alpha}^{\nu'} z_{,\beta(\alpha)}^{\nu'},$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{33} = \overset{\circ}{\epsilon}_{33} \Big|_{x^{\gamma=0}}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\gamma} = \frac{\partial \overset{\circ}{\epsilon}_{33}}{\partial x^{\gamma}} \Big|_{x^{\gamma=0}},$$

$$\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^{\circ}}{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}}, \quad g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^{\circ} = \frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}^{\circ}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta=0}},$$

$$\overset{\circ}{h}_{33,\alpha} = \frac{\overset{\circ}{g}_{33,\alpha}}{\overset{\circ}{g}_{33}}, \quad \overset{\circ}{g}_{33,\alpha} = \left. \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{33}}{\partial x^\alpha} \right|_{x^\beta=0}, \quad \overset{\circ}{g}_{33} = g_{33}|_{x^\beta=0}. \quad (31)$$

Запишемо коефіцієнти розкладу деформації (30) через переміщення в базисній системі координат:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(z'_{,i} u'_{,j} + z'_{,j} u'_{,i} \right) \Big|_{x^\alpha=0}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \left(z'^2 u_2' \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \left. \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^\alpha=0} = \left. \frac{\partial \left(\frac{1}{2} (z'_{,\alpha} u'_{\gamma,(\alpha)} + z'_{,(\alpha)} u'_{\gamma,\alpha}) \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^\alpha=0} = \left(z'_{,\alpha} u'_{\gamma,(\alpha)} + z'_{,(\alpha)} u'_{\gamma,\alpha} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \left. \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}}{\partial x^\alpha} \right|_{x^\alpha=0} = \left. \frac{\partial (z'^2 u_2')}{\partial x^\alpha} \right|_{x^\alpha=0} = \left(z'_{,\alpha} u_2' + z'^2 u_{2,\alpha}' \right) \Big|_{x^\alpha=0}. \end{aligned} \quad (32)$$

Введемо наступні позначення для значення похідних від перемішень $u'_{,i}$ і компонент тензора перетворень $z'_{,i}$ в центрі СЕ:

$$u'_{,i} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}'_{,i}, \quad z'_{,i} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}'_{,i}. \quad (33)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{z}'_{,\alpha} \overset{\circ}{u}'_{,\beta} + \overset{\circ}{z}'_{,\beta} \overset{\circ}{u}'_{,\alpha} \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \overset{\circ}{z}'^2 u_2'; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{z}'_{,\alpha} \overset{\circ}{u}'_{,\alpha} + \overset{\circ}{z}'_{,\alpha} \overset{\circ}{u}'_{,\alpha}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{z}'_{,\alpha(3-\alpha)} \overset{\circ}{u}'_{,\alpha} + \overset{\circ}{z}'_{,\alpha} \overset{\circ}{u}'_{,\alpha(3-\alpha)}. \end{aligned}$$

Виразимо вектор деформацій і їх похідних в центрі СЕ через вектор вузлових переміщень у матричній формі:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = [B] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\} = [B_1] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\} = [B_2] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}, \quad (34)$$

де

$$\left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u'_{(s_1, s_2)} \\ u'_{(s_1, s_2)} \end{array} \right\}. \quad (35)$$

Для зручності представлення розділимо матриці $[B], [B_1], [B_2]$ на блоки:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{[B]} &= \begin{bmatrix} \overset{\circ}{[B]}^{(-1;-1)} \overset{\circ}{[B]}^{(+1;-1)} \overset{\circ}{[B]}^{(-1;+1)} \overset{\circ}{[B]}^{(+1;+1)} \end{bmatrix} \\ \overset{\circ}{[B_1]} &= \begin{bmatrix} \overset{\circ}{[B_1]}^{(-1;-1)} \overset{\circ}{[B_1]}^{(+1;-1)} \overset{\circ}{[B_1]}^{(-1;+1)} \overset{\circ}{[B_1]}^{(+1;+1)} \end{bmatrix} \\ \overset{\circ}{[B_2]} &= \begin{bmatrix} \overset{\circ}{[B_2]}^{(-1;-1)} \overset{\circ}{[B_2]}^{(+1;-1)} \overset{\circ}{[B_2]}^{(-1;+1)} \overset{\circ}{[B_2]}^{(+1;+1)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (36)$$

де

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{[B]}^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z \overset{\circ}{,1} S_1 & \frac{1}{2} z \overset{\circ}{,1} S_1 \\ \frac{1}{4} \left(z \overset{\circ}{,1} S_2 + z \overset{\circ}{,2} S_1 \right) & \frac{1}{4} \left(z \overset{\circ}{,1} S_2 + z \overset{\circ}{,2} S_1 \right) \\ \frac{1}{2} z \overset{\circ}{,2} S_2 & \frac{1}{2} z \overset{\circ}{,2} S_2 \\ 0 & \frac{1}{4} z \overset{\circ}{,2} \end{bmatrix}, \quad (37) \\ \overset{\circ}{[B_1]}^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(z \overset{\circ}{,12} S_2 + 2 z \overset{\circ}{,2} S_1 S_2 \right) - z \overset{\circ}{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{22,1} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(z \overset{\circ}{,12} S_2 + 2 z \overset{\circ}{,2} S_1 S_2 \right) - z \overset{\circ}{,2} S_2 \overset{\circ}{h}_{22,1} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 z \overset{\circ}{,1} S_1 + z \overset{\circ}{,1} + z \overset{\circ}{,2} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \end{bmatrix}, \\ \overset{\circ}{[B_2]}^{(s_1, s_2)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(z \overset{\circ}{,12} S_1 + 2 z \overset{\circ}{,1} S_1 S_2 \right) - z \overset{\circ}{,1} S_1 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) & \frac{1}{2} \left(\left(z \overset{\circ}{,12} S_1 + 2 z \overset{\circ}{,2} S_1 S_2 \right) - z \overset{\circ}{,1} S_2 \overset{\circ}{h}_{11,2} \right) \\ 0 & \frac{1}{4} \left(2 z \overset{\circ}{,2} S_2 + z \overset{\circ}{,2} + z \overset{\circ}{,2} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де $\overset{\circ}{h}$, $z \overset{\circ}{, \beta} \overset{\alpha'}{\alpha}$ визначаються згідно формул (14), $z \overset{\circ}{, \beta} \overset{\alpha'}{\alpha} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}$.

Отримані вирази для визначення деформацій через переміщення дозволяють ефективно описувати процес деформування вісесиметричних і плоско-деформованих тіл при використанні косокутних елементів [1].

Запишемо вираз для варіації енергії деформації одного СЕ у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (38)$$

Подаючи в останньому виразі фізичні компоненти тензора напружень (28) і тензора деформацій (21) відрізками рядів Маклорена через їхні значення у центрі елемента отримаємо:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left[\left(\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + 2 \overset{\circ}{\sigma}^{12} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} + \right. \\ \left. + \left(\overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha} x^\alpha \right) \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} x^\beta \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (39)$$

Обчислимо такі інтеграли:

$$\int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0, \\ \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}. \quad (40)$$

Виконуючи інтегрування виразу (39) з урахуванням (40) для варіації енергії деформації одного СЕ, одержимо:

$$\delta W = \left[\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g}. \quad (41)$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень і деформацій в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\delta W = \left[\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \left(\varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} h_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha} \delta \left(\varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} h_{33,\alpha} \right) \right) \right] \sqrt{g}. \quad (42)$$

У матричній формі цей вираз буде мати вигляд:

$$\delta W = \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \varepsilon_{,1} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \varepsilon_{,1} \right\} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \sqrt{g}, \quad (43)$$

де

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{33} \right\},$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right\}, \\
 \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right\}, \\
 \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right\}, \\
 \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} \right\}, \\
 \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)3} \right\}. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Вираз для варіації енергії деформації в матричній формі має вигляд:

$$\delta W = \left(\delta \{u\}^T [B]^T \right) \{ \overset{\circ}{\sigma} \} + \frac{1}{12} \left(\delta \{u\}^T \left([B_1]^T + [B_2]^T \right) \{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \} \right) \sqrt{g} = \delta \{u\}^T \{ \tilde{r} \}, \quad (45)$$

де

$$\left\{ \tilde{r} \right\} = \left[[B]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{2} \left([B_1]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + [B_2]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right) \right] \sqrt{g} \quad (46)$$

– вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням напружень.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо зв'язок між деформацій і переміщень по закону Гука. У цьому випадку зв'язок між коефіцієнтами напружень і деформацій в ряд Маклорена в матричній формі має вигляд:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} \right) \right\} \sqrt{g}. \quad (47) \\
 \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} &= [B] \left\{ u_{(s_1, s_2)} \right\}.
 \end{aligned}$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання деформацій законом Гука, матрична форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (48)$$

де

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \circ \\ D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1112} & C^{1122} & C^{1133} \\ C^{1211} & C^{1212} & C^{1222} & C^{1233} \\ C^{2211} & C^{2212} & C^{2222} & C^{2233} \\ C^{3311} & C^{3312} & C^{3322} & C^{3333} \end{bmatrix}, \\ \overset{\circ}{D}_{,\alpha} &= \left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{C}^{ij33} \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Компоненти матриці пружних сталей обчислюються із використанням компонент метричного тензора.

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \left(\delta \{ u \}^T \right) [K]_n \{ u \}_n, \quad (50)$$

де $[K]_n$ – матриця жорсткості вісесиметричного та плоского СЕ:

$$[K]_n = \left\{ [B]^T [D] [B] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left([B_1]^T [D_1] [B_1] + [B_2]^T [D_2] [B_2] \right) \right\} \sqrt{g}. \quad (51)$$

Отримані на основі МССЕ вирази матриці жорсткості (51) і вектора вузлових реакцій (46) кінченого елемента із змінними компонентами метричного тензора дозволяють будувати оптимальні дискретні моделі для вісесиметричних та плоско-деформованих тіл складної форми.

Для дослідження характеру збіжності, достовірності і ефективності результатів розрахунку тонкостінних об'єктів на базі двовимірних СЕ розглянуто тестовий приклад про згин шарнірно опертої круглої пластини (рис. 4,а) під дією рівномірно розподіленого навантаження. При розв'язанні даної та подальших задач використовували скінченні елементи з чисельним інтегруванням та без нього. Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: $l=0.8$ м, $h=0.01$ м модуль пружності $E=10^5$ Мпа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок. Отримані результати показали, що розроблені двовимірні СЕ для тонкостінних об'єктів не поступаються по ефективності оболонковим СЕ SCAD (рис. 4,б).

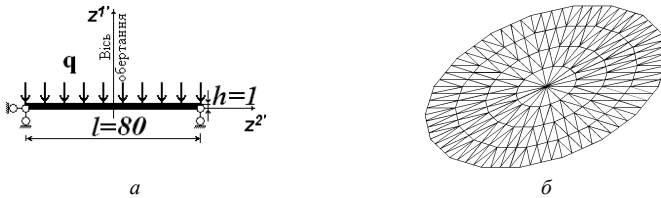


Рис. 4.

Для порівняння ефективності використання двовимірних СЕ було виконано розрахунок балки (рис. 5,а) на основі МССЕ та скінчено елементної бази SCAD.

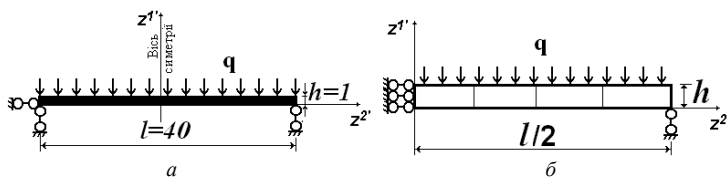


Рис.5.

Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ із використанням СЕМ бази, що ґрунтується на використанні МССЕ та програмного комплексу SCAD, в залежності від кількості N СЕ в дискретній моделі на половині балки наведене на (рис. 5,б). Геометричні і механічні параметри балки є наступними: $l=0.4$ м, $h=0.01$ м модуль пружності $E=105$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$.

Швидкість збіжності результатів показана на рис. 6(а) для напруження та рис. 6,б для прогинів, де $N=8,16,20,32$ кількість СЕ по довжині балки. Як видно, використання МССЕ має кращу збіжність результатів порівняно з програмним комплексом SCAD, що дозволяє зробити висновок про ефективність використання МССЕ, при розрахунку тонкостінних об'єктів з використанням двовимірних СЕ.

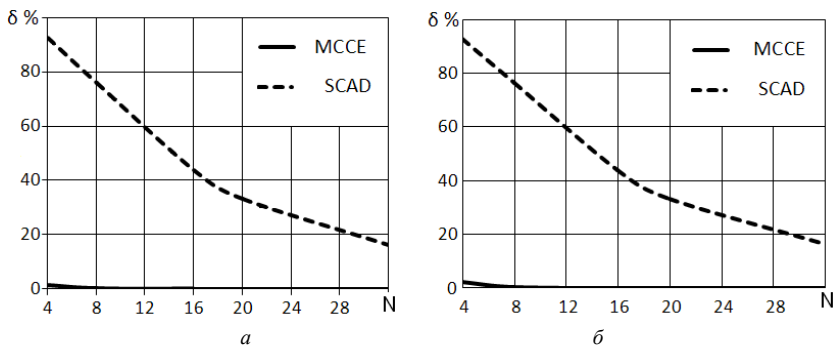


Рис. 6.

При розрахунку масивних тіл особливий інтерес представляє розподілення напружень поблизу контура тіла, оскільки в більшості випадків зазвичай тут знаходяться зони максимальних напружень. Збільшенню точності визначення контурних напружень в значній мірі допомагає використання нерівномірної апроксимуючої сітки з

приграничним шаром, розміри елементів яких в напрямку нормалі до поверхні тіла можуть бути відносно малими по відношенню до їх довжини. Ефективність використання приграничного шару наглядно виявилась навіть в такій елементарній задачі, як деформування нескінченного циліндра під дією внутрішнього навантаження (задача Ляме). З'ясувалося, що збіжність результатів розв'язку цієї задачі при використанні приграничного шару товщина якого прийнята 1/100 до зовнішнього радіусу, має кращу збіжність порівняно з використанням рівномірної сітки. Так для обчислення кільцевих напружень на внутрішній поверхні циліндра для досягнення похибки в 2.5% при наявності приграничного шару достатньо 4 СЕ, а при рівномірній сітці необхідно 9 СЕ.

Приведене порівняння підтверджує необхідність використання приграничного шару в задачах, пов'язаних з визначенням напружено-деформованого стану конструкції. Таким чином, можна передбачити, що ефективність використання нерівномірної сітки буде збільшуватися по мірі ускладнення дійсного поля напружень, а особливо при наявності концентраторів.

В якості прикладу розглянемо задачу про розтяг площини, яка ослаблена круглим отвором (задача Кірша) (рис. 7,а). Використання МССЕ забезпечують точність порядку 10% при апроксимуючій сітці з кількістю вузлів в межах 28. В той же час при використанні двовимірних СЕ програмного комплексу SCAD навіть дискретні моделі з кількістю вузлів 242 (рис. 7,б) дають похибку на рівні 25%.

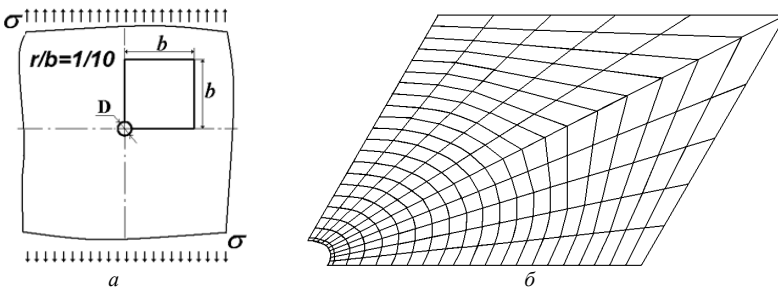


Рис. 7.

Висновки. Дослідження показали, що результати, які отримані за допомогою скінченних елементів із визначенням механічних і геометричних параметрів в їх центрах на базі фізичних компонент тензорів напружень та деформацій практично співпадають з результатами моделювання на базі СЕ загального вигляду з чисельним інтегруванням при цьому значно скорочуючи час розрахунку. Крім того, порівняння із

скінченно-елементною базою програмного комплексу SCAD показали переваги розроблених СЕ, які дозволяють розв'язувати задачі для тонкостінних об'єктів не поступаючись по ефективності оболонковим СЕ та суттєво перевищуючи по збіжності двовимірні СЕ при розгляді тонкостінних об'єктів в задачах згину та при наявності концентраторів напружень в масивних тілах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ / [*В.А. Баженов, С.О. Пискунов, І.І. Солодей та ін.*] // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2005. – Вип. 76. – С. 3–26.
2. *Баженов В.А.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл [*В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров*] // КНУБА, 2005, 298с.
3. *Сахаров А. С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А. С. Сахаров, В. Н. Кислооккий, В. В. Киричевский.* – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.

Стаття надійшла до редакції 03.12.2012 р.

Гуляр А.И., Солодей И.И., Максимюк Ю.В., Сизевич Б.И.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МСКЭ) В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА И С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

На основе численных исследований показана эффективность МСКЭ сравнению с конечно элементной базой SCAD при расчете массивных и тонкостенных тел при наличии изгиба и концентраторов напряжений.

Guliar A.I., Solodey I.I., Maksymiuk Y.V., Syzevych B.I.

EFFICIENCY OF MOMENT FINITE ELEMENT SCHEMES (MFES) IN PROBLEMS BENDING AND WITH STRESS CONCENTRATORS

Based on numerous studies, the effectiveness of MFES compared with finite element SCAD base when calculating the massive and thin-walled bodies in the presence of bending and stress concentrators.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук
 О.С. Черненко
 А.А. Козак

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗА МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИН З ТРИЩИНАМИ

Викладається підхід до розв'язання за методом граничних інтегральних рівнянь двовимірної динамічної задачі механіки руйнування, який полягає в заміні тріщини вузькою еліптичною порожниною. На тестових прикладах показана задовільна точність отриманих таким чином результатів.

За допомогою методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) розглядаються гармонічні вимушені коливання двовимірних об'єктів. В якості алгоритмічної основи обчислювального процесу використовується граничний аналог формули Соміліани для переміщень:

$$0.5u_j(\bar{x}_0) + \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad j=1, 2, \quad (1)$$

де $\bar{x}\{x_1, x_2\} \in V$; $\bar{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$; Γ - границя розрахункової області V ; τ_j - напруження на площинці границі з нормаллю $\bar{n}\{n_1, n_2\}$:

$$\tau_j(\bar{y}) = \sigma_{jk}(\bar{y}) n_k(\bar{y}) = \lambda n_j(\bar{y}) \frac{\partial u_m(\bar{y})}{\partial x_m} + \mu \left(\frac{\partial u_j(\bar{y})}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k(\bar{y})}{\partial y_j} \right) n_k(\bar{y}); \quad (2)$$

$U_{jk}(\bar{x}, \bar{y})$ - фундаментальний розв'язок задачі, що задається виразом [1];

$$U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{i}{4\mu} \left\{ \delta_{jk} \left[H_0^{(1)}(\varphi_1) - \frac{H_1^{(1)}(\varphi_2)}{\varphi_2} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(\varphi_1)}{\varphi_1} \right] + r_{,j} r_{,k} \left[H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] \right\}; \quad (3)$$

$\varphi_j = k_j r$; $k_j = \frac{\omega}{C_j}$; $C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$; $\alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}$; ρ - щільність

матеріалу; ω - кругова частота коливань; λ і μ - константи Ламе;

$r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r}$; $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$; $T_{jk}(\bar{x}, \bar{y})$ - узагальнена

похідна фундаментального розв'язку $U_{jk}(\bar{x}, \bar{y})$, тобто напруження на

площинках з компонентами нормалі $n_j(\bar{y})$, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили:

$$T_{kj}(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda n_j(\bar{y}) \frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_m} + \mu n_m(\bar{y}) \left[\frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_m} \right] =$$

$$= \frac{i}{4} \left[r_{,k} n_j T_1 + \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k \right) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right]; \quad (4)$$

$$T_1 = \frac{2}{r} \left[H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi_1}{r} H_1^{(1)}(\varphi_1);$$

$$T_2 = \frac{1}{r} \left[2H_2^{(1)}(\varphi_2) - \varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 2\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right];$$

$$T_3 = \frac{2}{r} \left[\varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 4H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha \varphi_1 H_1^{(1)}(\varphi_1) + 4\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right]; \quad (5)$$

$H_k^{(1)}$ - функція Ганкеля 1-го роду порядку k .

Метод ГІР має помітні переваги перед чисельними методами, пов'язаними із дискретизацією всієї розрахункової області, такими як метод скінченних різниць та метод скінченних елементів, у тих випадках, коли наперед відомою є область концентрації напружень в пружному тілі. Серед таких задач важливе місце займають задачі про напружений стан в околі вершини тріщини або тонкого включення.

Відомо однак, що безпосереднє використання ГІР (1) в задачах механіки руйнування призводить до вироджених або близьких до вироджених систем [2]. Як альтернативну інколи використовують системи гіперсингулярних ГІР, що базуються на формулі Сомі ліани для напружень [3-5], однак складність ядер інтегральних рівнянь великою мірою позначається на точності і швидкості обчислень, причому ці недоліки особливо стають помітними в задачах динаміки.

В такій ситуації привабливою виглядає ідея про заміну тріщини порожниною, що має форму вузького еліпсу. Справа в тому, що при такій заміні можна користуватись системою ГІР (1), не побоюючись того, що система стане виродженою. Оцінити ефективність цієї заміни можна за допомогою порівняння між собою точних параметрів напружено-деформованих станів (НДС), які виникають в статично розтягнутій нескінченній площині, послабленій або тріщиною, або еліптичним отвором показано на рис. 1. Суцільна лінія відповідає значенням нормованих переміщень, отриманим для послаблення у вигляді тріщини. Пунктирна лінія відповідає еліптичному послабленню зі співвідношенням осей 4:20. Розбіжність результатів в розрахункових точках на відстані $r_1=0,98a$ та

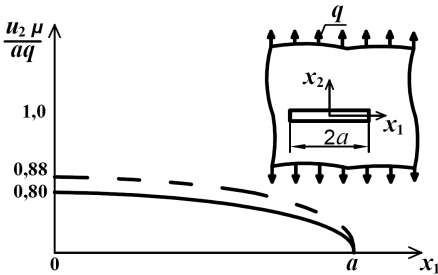


Рис. 1.

тріщина може бути замінена вузьким еліптичним отвором. Відмітимо, що така сама розбіжність спостерігається і при визначенні коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) K_1 .

Таблиця 1

Параметр	Точне значення для тріщини	Значення для еліптичного отвору із співвідношенням осей 4:20	Відносна похибка, %	Значення для еліптичного отвору із співвідношенням осей 1:20	Відносна похибка, %
$u_2(r_1)$	$1,92 \cdot 10^{-9}$	$2,09 \cdot 10^{-9}$	8,9	$1,96 \cdot 10^{-9}$	2,1
$u_2(r_2)$	$2,33 \cdot 10^{-9}$	$2,57 \cdot 10^{-9}$	10,3	$2,39 \cdot 10^{-9}$	2,6
K_1	560,5	618,1	10,3	574,9	2,6

Було також проведено співставлення результатів дослідження коливань скінченної пластини, послабленої центральною горизонтальною тріщиною, і такої самої пластини, але з еліптичним отвором. До торців пластини нормально прикладені рівномірно розподілені навантаження, що змінюються із часом за гармонійним законом.

Параметри НДС для пластини з тріщиною отримані за допомогою учбової версії скінченноелементної програми ANSYS, тоді як пластини з вузьким еліптичним отвором розглядалась на основі системи ГП (1). В таблиці 2 приведені залежності нормованого КІН K_1 від безрозмірного параметру частоти коливань. При співвідношенні осей еліптичного отвору 4:20 різниця між значеннями КІН становить приблизно 5%, коли коливання відбуваються із частотами, віддаленими від власних. При коливаннях з частотами, близькими до власних, похибка визначення КІН сягає 31%. Значно кращі результати спостерігаються при заміні тріщини отвором із співвідношенням осей 1:20. Тут розбіжність результатів при частотах коливань, віддалених від власних, не перевищує 1%, а при коливаннях з частотами, близькими до власних, спостерігається похибка величиною приблизно 10%.

$r_2=0,97a$ від вершини тріщини становить приблизно 9% (таблиця 1). При співвідношенні осей еліпса 1:20 в тих самих точках розбіжність даних розрахунку не перевищує 3%, що є цілком задовільним результатом з інженерної точки зору, який свідчить про те, що при чисельному розрахунку

Таблиця 2

$\frac{\omega a}{c_2}$ \ / $\frac{K_I}{K_I^{\text{ст}}}$	Тріщина	Еліптичний отвір із співвіднош. осей 1:20	Відносна похибка, %	Еліптичний отвір із співвіднош. осей 4:20	Відносна похибка, %
0	1,006	0,997	0,9	0,996	0,9
0,2	1,311	1,300	0,8	1,305	0,4
0,32	2,882	2,881	0,01	2,977	3,3
0,42	13,280	12,016	9,5	9,143	31,2
0,52	3,026	3,010	0,5	3,049	0,8
0,56	16,646	16,438	1,3	16,714	0,4
0,62	3,084	3,050	1,1	2,997	2,8
0,8	0,900	0,890	1,1	0,852	5,3

Графіки залежності нормованого КІН K_I від безрозмірного параметру частоти коливань наведені на рис. 2. Пунктирна лінія, відповідає значенням, отриманим за методом скінченних елементів. Суцільною лінією з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму при співвідношенні осей еліптичного отвору 1:20. Точкова лінія, побудована при співвідношенні осей отвору 4:20.

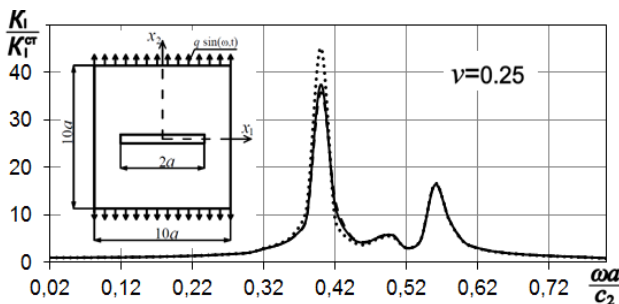


Рис. 2

Наведені результати, свідчать про те, що при дослідженні гармонійних пружних коливань пластина з тріщиною може бути замінена пластиною, послабленою вузьким еліптичним отвором.

Далі розглянемо коливання скінченної пластини, послабленої центральною похилою тріщиною. Знову до торців пластини нормально прикладені рівномірно розподілені навантаження, що змінюються із часом за гармонійним законом.

Як і в попередньому розрахунку параметри НДС для пластини з тріщиною отримані за допомогою учбової версії програми ANSYS. Пластина з вузьким еліптичним отвором розглядається за допомогою методу ГР. В

таблицях 3 і 4 наведені залежності нормованих КІН K_I і K_{II} відповідно від безрозмірного параметру частоти коливань.

Таблиця 3

$\frac{K_I}{K_{II}} \backslash \frac{\omega a}{c_2}$	Тріщина	Еліптичний отвір із співвіднош. осей 1:20	Відносна похибка, %	Еліптичний отвір із співвіднош. осей 4:20	Відносна похибка, %
0	1,00	1,00	0,2	0,97	3,0
0,10	1,16	1,16	0,3	1,15	0,9
0,17	2,54	2,44	3,8	2,28	10,1
0,25	37,19	36,76	1,2	28,57	23,2
0,26	12,17	12,16	0,1	12,04	1,1
0,40	0,30	0,30	0,2	0,30	1,6

Таблиця 4

$\frac{K_{II}}{K_I} \backslash \frac{\omega a}{c_2}$	Тріщина	Еліптичний отвір із співвіднош. осей 1:20	Відносна похибка, %	Еліптичний отвір із співвіднош. осей 4:20	Відносна похибка, %
0	1,00	0,99	1,0	0,97	2,8
0,10	1,18	1,17	0,8	1,14	3,4
0,17	1,75	1,66	5,0	1,61	7,7
0,25	46,92	46,29	1,3	39,57	15,7
0,26	15,57	15,34	1,4	15,14	2,7
0,40	0,85	0,84	0,9	0,83	2,1

Бачимо, що при співвідношенні осей еліптичного отвору 4:20 відносна похибка між значеннями КІН становить приблизно 8%, коли коливання відбувались із частотами, що помітно відрізняються від власних. При коливаннях з частотами, близькими до власних, похибка визначення КІН сягає 29%. При заміні тріщини еліптичним отвором із співвідношенням осей 1:20 отримаємо значно кращі результати. Тут розбіжність результатів при частотах коливань, віддалених від власних, не перевищує 1%, а при коливаннях з частотами, близькими до власних, спостерігається похибка величиною приблизно 5%.

Графіки залежності нормованого КІН K_I від безрозмірного параметру частоти коливань наведені на рис. 3. Так само, пунктирна лінія, відповідає значенням, отриманим за методом скінченних елементів. Суцільною лінією з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму при співвідношенні осей еліптичного отвору 1:20. Точкова лінія побудована при співвідношенні осей отвору 4:20.

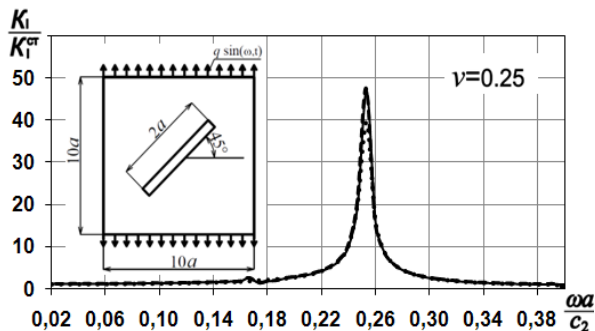


Рис. 3.

Подібним чином оформлені графіки залежності від безрозмірного параметру частоти коливань нормованого КІН K_{II} (рис. 4).

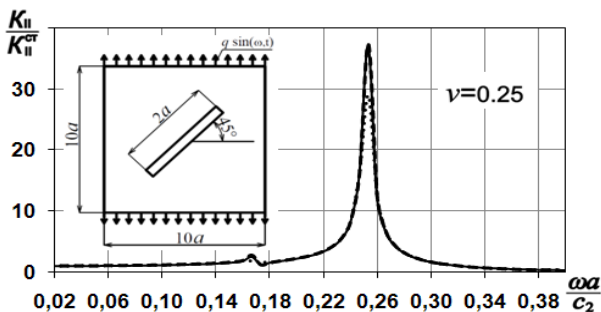


Рис. 4.

Ці приклади також свідчать про те, що при дослідженні гармонійних пружних коливань в широкому діапазоні частот пластина з тріщиною може бути замінена пластиною, послабленою вузьким еліптичним отвором.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бенерджи П., Баттерфілд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Cruse T.A. VE fracture mechanics analysis: 25 years of developments // Computational Mechanics, 18 (1996), pp. 1-11
3. Ворона Ю.В., Гончаренко М.В., Козак А.А., Черненко Е.С. Колебания двумерных массивных тел, ослабленных трещинами нормального відриву // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – Вип. 87. – С.131–143

4. Ворона Ю.В., Русанова О.С. Алгоритм розв'язання задач про коливання масивів з тріщинами поздовжнього зсуву // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010. – Вип. 86.– С.102–113
5. Кантор Б.Я., Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Об аппроксимации поверхности плоскими элементами при численном решении сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Адамара Алгоритм розв'язання задач про коливання масивів з тріщинами поздовжнього зсуву // Доповіді НАНУ. – 1995. – № 11.– С.21–23.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2012 р.

Vorona Yu.V., Chernenko E.S., Kozak A.A.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПО МЕТОДУ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ

Излагается подход к решению по методу граничных интегральных уравнений двумерной динамической задачи механики разрушения, который состоит в замене трещины узким эллиптическим отверстием. На тестовых примерах показана удовлетворительная точность полученных таким образом результатов.

Vorona Yu.V., Chernenko O.S., Kozak A.A.

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS METHOD ANALYSIS OF PLATES WITH CRACKS STEADY STATE VIBRATIONS

Boundary integral equations approach to 2D dynamic fracture mechanics problem is developed. It is proposed to substitute straight crack with elliptic hole. The abilities of such an approach are illustrated through the comparison of calculated values with FEM results.

УДК 539.3

Г.М. Іванченко, д-р. техн. наук

ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ АНІЗОТРОПІЇ ПРУЖНОЇ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ЛІНЗИ НА ЇЇ ФОКУСУЮЧІ ВЛАСТИВОСТІ

Розглядаються випадки фокусування плоскої нестационарної розривної хвилі в трансверсально-ізотропному середовищі поверхнями плоско-випуклої трансверсально-ізотропної пружної лінзи. Досліджується залежність положення зон фокусування хвилі від величин параметрів анізотропії середовища лінзи.

Вступ. Явища фокусування світлових променів оптичними приладами – лінзами і дзеркалами – широко використовуються для локального збільшення освітленості і концентрації світлової енергії. Аналогічні ефекти виявляються і при розповсюдженні нестационарних розривних хвиль в пружних середовищах. Для кількісного опису таких явищ, а також для дослідження їх особливостей застосовні методи геометричної оптики [1-3].

Задача актуальна при дослідженні особливостей розповсюдження нестационарних розривних хвиль в земній корі, породжуваних вибухами, землетрусом, де практичний інтерес мають питання геометричної побудови рухомих поверхонь розривів перших похідних польових функцій, які часто називають ударними хвилями або хвилями сильного розриву.

Для постановки і розв'язування таких задач в теорії пружності використовуються методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, який забезпечує хороший кількісний опис багатьох хвильових явищ різної фізичної природи [2,3].

Променевий метод припускає виділення функції оптичного шляху хвилі, або ейконалу, і побудова за допомогою рівняння ейконалу системи променів і фронтів ударної хвилі. Ця задача достатньо легко розв'язується для ізотропних середовищ, проте і там виникають деякі ускладнення, пов'язані з дослідженням взаємодія хвилі з поверхнями розділу середовищ, які володіють різними механічними властивостями (пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища та ін.), внаслідок чого утворюється каустик, де фокусується енергія і значно зростає інтенсивність поля.

При дослідженні розповсюдження хвиль сильних розривів в пружних анізотропних середовищах фізична картина динамічних явищ різко

ускладнюється, оскільки в цих випадках векторна польова функція для кожного напрямку є три види хвиль, відмінні поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать як від поляризації хвилі, так і від напрямку її розповсюдження; промені, в загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових швидкостей і між їх напрямками не завжди є однозначна відповідність.

Постановка задачі. Стан динамічної рівноваги пружного середовища в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (1)$$

де $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$; $c_{ik,pq}$ – параметри пружності середовища; ρ – її густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних зсувів, t – час.

Враховуючи те, що в анізотропних середовищах промені в загальному випадку не ортогональні поверхням хвильових фронтів, розрізнятимемо вектори фазової \mathbf{v} і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронтом хвилі є поверхня постійної фази, де кожна елементарна площадка фронту рухається уздовж місцевої одиничної нормалі \mathbf{n} зі швидкістю v . Тут \mathbf{r} – радіус-вектор точки фронту.

Фазові швидкості \mathbf{v} хвилі і вектори її поляризації \mathbf{A} для вибраного напрямку \mathbf{n} можна побудувати з однорідної системи алгебраїчних рівнянь [2,4]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (2)$$

як власні числа і вектори матриці її коефіцієнтів.

Ненульові рішення системи (2) мають місце при виконанні умови

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (3)$$

за допомогою якого для кожного напрямку нормалі \mathbf{n} можна визначити і розташувати у порядку зменшення три швидкості по різному поляризованих хвиль.

Підставляючи замість величини v^2 в систему (2) по черзі одне із відшуканих значень $v_r^2(\mathbf{n})$ ($r = 1,2,3$), можна визначити компоненти векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ трьох хвиль, які рухаються у даному напрямі \mathbf{n} зі своїми фазовими швидкостями $\mathbf{v}_r(\mathbf{n})$.

Поверхня фронту хвилі сильного розриву визначається співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (4)$$

у якому функція τ повинна задовольняти диференціальному рівнянню в часткових похідних першого порядку [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

Яке узагальнює рівняння ейконалу геометричної оптики для пружних анізотропних хвиль.

Величини p_k ($k = 1, 2, 3$), що входять у рівняння (5), є компонентами вектора рефракції $p_k \equiv \partial\tau/\partial x_k = n_k/v_r(\mathbf{n})$ ($k = 1, 2, 3$).

Фронт (4) хвилі сильного розриву в анізотропному середовищі постійної густини будується після знаходження розв'язків рівняння (5), яке методом характеристик приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dx_k/d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k/d\tau &= 0, \quad (k=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

У системі (6) перша група рівнянь характеризує розповсюдження хвилі уздовж променя з променевою швидкістю, а друга – показує на прямолінійність променів в анізотропному середовищі з постійною густиною.

Методика розв'язування. Розглядатимемо два трансверсально-ізотропні середовища, в яких осі симетрії пружних параметрів співпадають з віссю Ox_2 декартової системи координат. Завдяки властивостям симетрії, компоненти $c_{ik,pq}$ тензора пружних постійних кожного середовища можна представити у формі квадратної матриці

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu-p & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-l & \lambda-l & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-m \end{pmatrix}, \quad (7)$$

де λ і μ – параметри Ламе, l , m , p – константи, що відрізняють середовище від ізотропної (параметри анізотропії).

Нехай у середовищі \bar{I} збурена плоска подовжня хвиля сильних розривів, вектор поляризації якої направлений уздовж осі Ox_2 . Будемо

досліджувати дифракцію такої хвилі при її взаємодії з криволінійними осесиметричними межами G_1 і G_2 розділу середовищ, вісь симетрії якої також співпадає з Ox_2 . Задача є осесиметричною, тому достатньо розглянути явища перебудови і формування слідів хвиль сильних розривів на одній із площин, наприклад на площині, яка містить вісь симетрії. Прийємо „локально-плоске наближення” [2], відповідно до якого у місці падіння хвилі на елементарну площадку розділяючої поверхні G_i в площині падіння, всі відображені і заломлені хвилі також належатимуть цій площині, тобто треті компоненти всіх векторів поляризації рівні нулю. Це дозволяє застосовувати узагальнений закон Снелліуса, який описується рівністю [2,4,5]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}} - \gamma)}{v_{\bar{v}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}})} = \frac{\sin(\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}} + \gamma)}{v_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}(\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (8)$$

де γ – кут нахилу дотичної до поверхні G_1 в точці падіння променя на межу розділу середовищ, $\Theta_{\bar{1}}^{\bar{I}}, \Theta_{\bar{2}}^{\bar{I}}$ – кути між віссю Ox_2 і напрямками векторів фазових швидкостей квазіподовжньої qP і квазіпоперечної qS хвиль, відображених в середовище \bar{I} ; $\Theta_{\bar{1}}^{\bar{II}}, \Theta_{\bar{2}}^{\bar{II}}$ – аналогічні кути для хвиль, заломлених в середовище \bar{II} (у середній шар – в лінзу); $v, v_{\bar{v}}^{\bar{I}}, v_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}$. Для випадків анізотропних середовищ співвідношення (8) закону Снелліуса характеризуються тим, що знаменники і чисельники є функціями відповідних кутів $\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}}, \Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}$ і неявно функціями кута γ .

Значення кутів $\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}}, \Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}$ ($v, \mu = 1, 2$) віддзеркалення і заломлення променя у деякій точці межі, визначаються розв'язками системи нелінійних рівнянь (8) методом Ньютона спільно із алгоритмом продовження розв'язку по параметру [3]. Тут за провідний параметр зручно вибрати кут нахилу дотичної γ . Тоді, наприклад, для першого рівняння системи (8) при деяких відомих величинах параметра $\gamma = \gamma^n$

$$\Delta \Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}} = \frac{\cos \gamma \cdot v_{\bar{v}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}}) + \cos(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v}{\cos(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot dv_{\bar{v}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}}) / d\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}}} \cdot \Delta \gamma + r_v, \quad (9)$$

де $r_v = \sin(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin \gamma \cdot v_{\bar{v}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}})$ – нев'язка на даному кроці побудови розв'язку.

На поверхню розділу G_2 падають промені квазіподовжньої і квазіпоперечної хвиль, які породжуються в деякій точці взаємодії

початкового променя з першою межею розділу середовищ. На другій межі розділу середовищ обидва промені також підлеглі співвідношенням Снелліуса

$$\frac{\sin(\Theta - \varphi)}{v(\Theta)} = \frac{\sin(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}} + \varphi)}{v_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}})} = \frac{\sin(\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{I}} - \varphi)}{v_{\bar{\mu}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{I}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (10)$$

де φ – кут нахилу дотичної до поверхні G_2 в точці падіння відповідного променя квазіподовжньої або квазіпоперечної хвилі, $\Theta_{\bar{1}}^{\bar{I}}, \Theta_{\bar{2}}^{\bar{I}}$ – кути між віссю Ox_2 і напрямками векторів фазових швидкостей квазіподовжньої і квазіпоперечної хвиль, заломлених в середовище \bar{I} ; $\Theta_{\bar{1}}^{\bar{\Pi}}, \Theta_{\bar{2}}^{\bar{\Pi}}$ – аналогічні кути для хвиль, відображених в середній шар $\bar{\Pi}$; $v, v_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}, v_{\bar{\mu}}^{\bar{\Pi}}$ – величини фазових швидкостей падаючої хвилі на поверхню, заломлених в середовище \bar{I} і відображених в середовище $\bar{\Pi}$. Розв'язок системи (10) також формується покроково. Наприклад, мала зміна кута нахилу дотичної до поверхні G_2 на величину $\Delta\varphi = \Delta\varphi^n$ спричинить прирости направляючих кутів векторів фазових швидкостей відображених хвиль обох типів

$$\Delta\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}} = \frac{f_1 \cdot \Delta\Theta + f_2 \cdot \Delta\varphi}{f_3} + r_v. \quad (11)$$

Тут позначені функції

$$f_1 = \sin(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}} + \varphi) \cdot \frac{d v(\Theta)}{d \Theta} - \cos(\Theta - \varphi) \cdot v_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}),$$

$$f_2 = \cos(\Theta - \varphi) \cdot v_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}) + \cos(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}} + \varphi) \cdot v(\Theta),$$

$$f_3 = \sin(\Theta - \varphi) \cdot \frac{d v_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}})}{d \Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}} - \cos(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}} + \varphi) \cdot v(\Theta)$$

і нев'язку рівняння (11) $r_v = \sin(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}} + \gamma) \cdot v(\Theta) - \sin(\Theta - \gamma) \cdot v_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{\Pi}})$.

Обчислення по формулах вигляду (9), (11) можливі за наявності деякого початкового стану $\gamma^0, v^0, (\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}})^0, [v_{\bar{v}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}})]^0, (\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{I}})^0, [v_{\bar{\mu}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{I}})]^0$.

Для даних випадків з осесиметричним середнім шаром (лінзою) зручно починати побудову сімейства падаючого, відображених і заломлених променів із променя, орієнтованого уздовж осі Ox_2 .

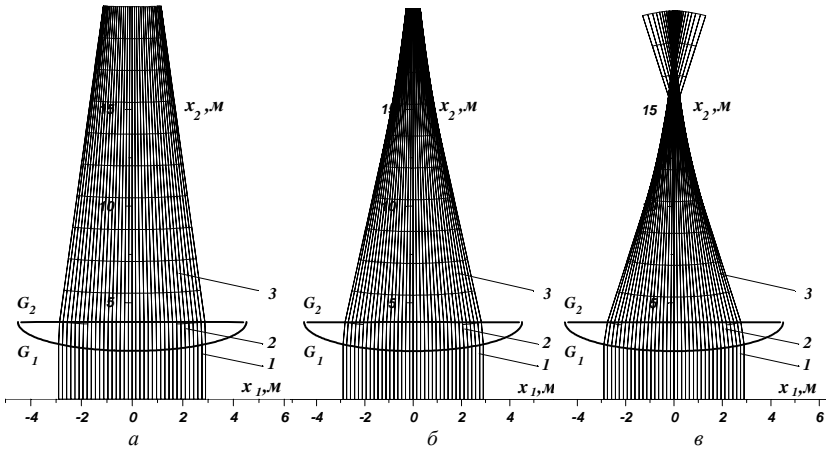


Рис. 1

Результати досліджень. Розглянута задача про дослідження впливу параметрів анізотропії l , m , p пружної плоско-опуклої лінзи на її фокусууючу здатність.

При розв'язуванні поставленої задачі прийнято: $\rho_1 = 2.650 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 4.972 \times 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_1 = 3.906 \times 10^{10} \text{ Па}$ для середовища \bar{I} і для середовища \bar{II} (лінзи): $\rho_2 = 2.760 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_2 = 3.409 \times 10^9 \text{ Па}$, $\mu_2 = 1.364 \times 10^{10} \text{ Па}$. Коефіцієнти анізотропії для першого середовища постійні: $m_1 = 0.1\mu_1$, $l_2 = 0.3\lambda_2$ і $p_1 = 0.1(\lambda_1 + 2\mu_1)$, а для лінзи вони варіювались. Виявлено, що ступінь і рівномірність фокусування або розсіювання двічі заломлених променів залежать не лише від геометрії поверхонь, G_2 , G_2 і пружних характеристик середовищ, але і в значній мірі вони залежать від параметрів анізотропії. Це видно на рис. 1, де показані промені падаючої (1) і заломленої в лінзу (2) квазіподовжньої хвилі а також промені і еволюція фронту квазіподовжньої хвилі (3), заломленої за лінзою. Для пружних лінз однакової геометрії приймалися наступні параметри: $m_2 = 0.3\mu_2$, $l_2 = -0.4\lambda_2$, $p_2 = -0.6(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,а); $m_2 = 0.1\mu_2$, $l_2 = -0.2\lambda_2$, $p_2 = -0.3(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,б) і $m_2 = 0.1\mu_2$, $l_2 = 0.2\lambda_2$, $p_2 = 0.05(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,в). При цьому густина і коефіцієнти Ламе середовища лінзи залишалися постійними.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кравцов Ю.А. Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. Г.: Наука, 1980. 304 с.
2. *Петраишень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград, Наука, 1980. 280 с.
3. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.: Наукова думка, 1988. 220 с.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т.64, №3. – С. 394–402.
5. *Gulyaev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.

Иванченко Г.М.

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПИИ УПРУГОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ЛИНЗЫ НА ЕЕ ФОКУСИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА

Рассматриваются случаи фокусировки плоской нестационарной разрывной волны в трансверсально-изотропной среде поверхностями плоско-выпуклой трансверсально-изотропной упругой линзы. Исследуется зависимость положения зон фокусировки волны от величин параметров анизотропии среды линзы.

Ivanchenko G.M.

ANISOTROPIC PARAMETERS EFFECT OF ELASTIC TRANSVERSALLY ISOTROPIC LENS ON ITS FOCUSING PROPERTIES

The cases of focusing of a plane unstationary discontinuous wave by the surfaces of a plane-convex transversally isotropic elastic lens in a transversally isotropic medium are examined. Dependence of position of focusing zones of the wave on the values of parameters of anisotropy of the lens medium is explored.

УДК 539.3

М.О. Соловей, д-р техн. наук
О.П. Кривенко, канд. техн. наук
О.О. Міщенко
О.Б. Калашніков

ВРАХУВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ В СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНІЙ МОДЕЛІ НЕОДНОРІДНОЇ ОБОЛОНКИ

Наведено основні поняття щодо композитних матеріалів, сформульовано їхні загальні ознаки та описано шляхи визначення ефективних пружних характеристик. Виходячи з розробленої скінченноелементної моделі, узагальнено поняття композитного матеріалу пружної оболонки.

У сучасній техніці та будівництві як раціональні конструкції та їх елементи застосовуються неоднорідні оболонки різноманітної форми з геометричними особливостями за товщиною. Усе частіше поряд з **традиційними матеріалами (ТМ)** в оболонках використовуються **композитні матеріали (КМ)**. Останні характеризуються комплексом властивостей [1 - 11], які значно відрізняються від властивостей традиційних матеріалів [17]. У теперішній час існує велика кількість різних видів КМ. Прикладами застосування КМ в оболонкових конструкціях є: конструктивні елементи літальних апаратів і суден, балони тиску, цистерни, резервуари та куполи [13,16-22], тощо. У будівництві композити знаходять все ширше застосування при створенні несучих конструкцій. Проблеми дослідження стержнів, пластин та оболонок із КМ розглядалися в багатьох монографіях [8,9,16,18,19, 23 - 27].

Висока міцність КМ при відносно малій об'ємній вазі, стійкість проти атмосферних впливів, а також інші цінні властивості визначають їхню ефективність і перспективність у застосуванні. Суттєво це стосується оболонок, що виготовлені з композитних матеріалів багатошарової структури. Конструкції, що створені з КМ з волокнистою структурою, характеризуються високою несучою спроможністю за вибраними напрямками. Зростаючі потреби практики та впровадження нових композитних матеріалів вимагають подальшого удосконалення методів розрахунку оболонкових конструкцій неоднорідної структури.

У монографії [28] висвітлено питання розробки з єдиних методологічних позицій тривимірної теорії термпружності

скінченноелементного методу розв'язування статичних задач геометрично нелінійного термопружного деформування, стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких пружних неоднорідних оболонок складної форми та структури. На базі універсального ізопараметричного просторового скінченного елемента (СЕ) з полілінійними функціями форми та введеними додатковими змінними параметрами побудовано розрахункову модель методу скінчених елементів, що враховує одним СЕ за товщиною геометричні особливості конструктивних елементів (змінність товщини, злами та гранованість обшивки, ребра, накладки, виїмки, отвори) і неоднорідності матеріалу (вставки та багат шарову структуру) тонкої оболонки. Застосована моментна схема скінчених елементів. Досліджуються малі термопружні деформації. Задача геометрично нелінійного деформування сформульована в приростах. Зв'язок між компонентами тензорів деформації і напружень для анізотропного матеріалу встановлений узагальненим законом Дюамеля-Неймана.

Для моделювання термопружних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки застосовано підхід, що базується на структуруванні неоднорідностей матеріалу за товщиною та у плані оболонки за допомогою багат шарового просторового СЕ. Прийнято, що кожний СЕ може складатися з довільного числа шарів різної змінної товщини. Шари СЕ жорстко поєднані між собою в монолітний пакет і деформуються спільно без проковзування та відриву по поверхнях контактів, де виконується вимога рівності компонент вектора переміщень. Використовується неklasична гіпотеза деформівної прямої, яка визначена наступним чином: пряма у напрямку товщини оболонки до деформування залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Ця пряма не обов'язково є нормаллю до середньої поверхні оболонки. У цьому напрямку розподіл переміщень приймається лінійним, що є загальноприйнятим припущенням у теорії тонких оболонок. Прийнята кінематична гіпотеза при певних обмеженнях на властивості матеріалів шарів забезпечує достатню точність результатів у задачах стійкості та коливань тонких багат шарових оболонок [29, 30].

У запропонованій методиці спосіб моделювання неоднорідностей матеріалу є однаковим як для обшивки оболонки, так і для ділянок зі ступінчасто-змінною товщиною, де розміщуються ребра, накладки, канали, виїмки. Таким чином, прийнятий підхід до структурування неоднорідностей матеріалу відповідає принципу моделювання неоднорідної оболонки на основі єдиної розрахункової моделі – просторового скінченного елемента.

Структурування неоднорідностей матеріалу оболонки за товщиною зведено в [28] до моделювання неоднорідного матеріалу в межах скінченного елемента необхідною кількістю шарів. Матеріали шарів представляються як однорідні анізотропні матеріали з заданими термопружними властивостями. При реалізації цього підходу в обчислювальному комплексі були створені бази ізотропних, трансверсально-ізотропних та ортотропних матеріалів шарів, які відповідають найпоширенішим варіантам симетрії їх пружних характеристик. Надалі будь-які матеріали шарів, термопружні властивості яких задаються безпосередньо через відомі технічні сталі, будемо відносити до класу **традиційних матеріалів**. Подібне визначення не суперечить загально прийнятому поняттю.

Існує багато визначень терміну «**композитні матеріали**», що пов'язано з різноманітністю методів і підходів до проектування композитних матеріалів та виконаних досліджень [1-16,18]. Для кожної окремої галузі матеріалознавства є своя різна термінологія, що ускладнює визначення загального поняття “композитні матеріали”. Як приклад одного з узагальнюючих можна привести наступне визначення КМ [10]:

“**Композиционные материалы** (от лат. compositio – сочетание), материалы, образованные объемным сочетанием химически разнородных компонентов с четкой границей раздела между ними. Характеризуются свойствами, которыми не обладают ни один из компонентов, взятый в отдельности. Различают КМ **волокнистые** (упрочненные волокнами, нитевидными кристаллами); **слоистые** (полученные прокаткой или прессованием разнородных материалов); **дисперсно-упрочненные** (упрочнитель в виде дисперсных частиц). По прочности, жесткости и другим свойствам превосходят обычные конструкционные материалы”.

Можна виділити такі загальні ознаки композитного матеріалу [31]:

- неоднорідність (або гетерогенність) за структурою та за складом, наявність різних компонентів (або гетерофазність);
- багатоконпонентність;
- наявність границь поділу між окремими компонентами;
- відмінність фізико-технічних властивостей КМ від властивостей вихідних компонентів.

Важливою рисою всіх КМ є наявність поверхонь поділу між окремими компонентами (фазами). Поверхню поділу можна уявити як область зміни властивостей матеріалу при переході від одного компонента до іншого або від однієї структури до іншої [4]. На поверхнях поділу фаз, які відрізняються своєю хімічною стабільністю, відбувається перерозподіл деформацій і напружень між окремими компонентами і структурами.

Згідно з даними теоретичних [4,24,32] та експериментальних досліджень щодо особливостей побудови та отримання штучно створених композитних матеріалів, які визначаються як неоднорідний матеріал регулярної структури при наявності повторюваних елементів, є можливість прогнозування пружних властивостей КМ, виходячи з властивостей вихідних його компонентів, технології виготовлення, тощо [33]. У літературі терміну “компоненти” відповідають такі визначення: “шари матеріалу”, “складові”, “елементи структури”, “фази”. Таким чином, існує можливість дослідження напружено-деформованого стану неоднорідної оболонки з композитного матеріалу, враховуючи властивості компонентів, що входять до його складу. Термінологічно в літературі на ці властивості посилаються як на “характеристики”, або “властивості”, або “параметри компонентів” композитних матеріалів. Надалі введемо та будемо застосовувати термін “**мікромеханічні параметри компонентів композитних матеріалів**”. До них можна віднести, наприклад, пружні характеристики матриці й армуючих волокон, їх об’ємний вміст у композиті, розміри та взаємне розташування армуючих компонентів, тощо [33 - 35].

У роботі В.В. Болотіна [24] при моделюванні процесу деформування оболонки композитний матеріал за методом енергетичного згладжування (шляхом усереднення по об’єму властивостей різних компонентів КМ) наближено замінений на однорідний ортотропний матеріал з усередненими (**макроскопічними**) пружними характеристиками, які отримали назву “**ефективні фізико-механічні характеристики композитного матеріалу**”. Питаннями визначення цих характеристик займається розділ механіки – механіка композитів [8,23,24]. В останні роки визначенню пружних ефективних характеристик КМ присвячено багато робіт, у яких наводяться більш точні дані для оцінки термопружних сталей матеріалу. Вибір тієї чи іншої методики розрахунку ефективних характеристик КМ залежить від точності кінцевого результату та його узгодженості з експериментальними даними [23,25, 33,35,36].

В літературі розрізняються поняття “**конструкція з композитного матеріалу**” та “**композитна конструкція**”. Так в [37] під “композитними конструкціями” розуміються конструкції шаруватої структури, що виготовлені з матеріалів з різними фізико-механічними характеристиками. При цьому мікроструктура матеріалів шарів залишається не визначеною, а їх пружні характеристики задаються тільки через технічні сталі. Природно виникає питання про віднесення багат шарових матеріалів до КМ навіть якщо кожен шар його складається з традиційних однорідних матеріалів.

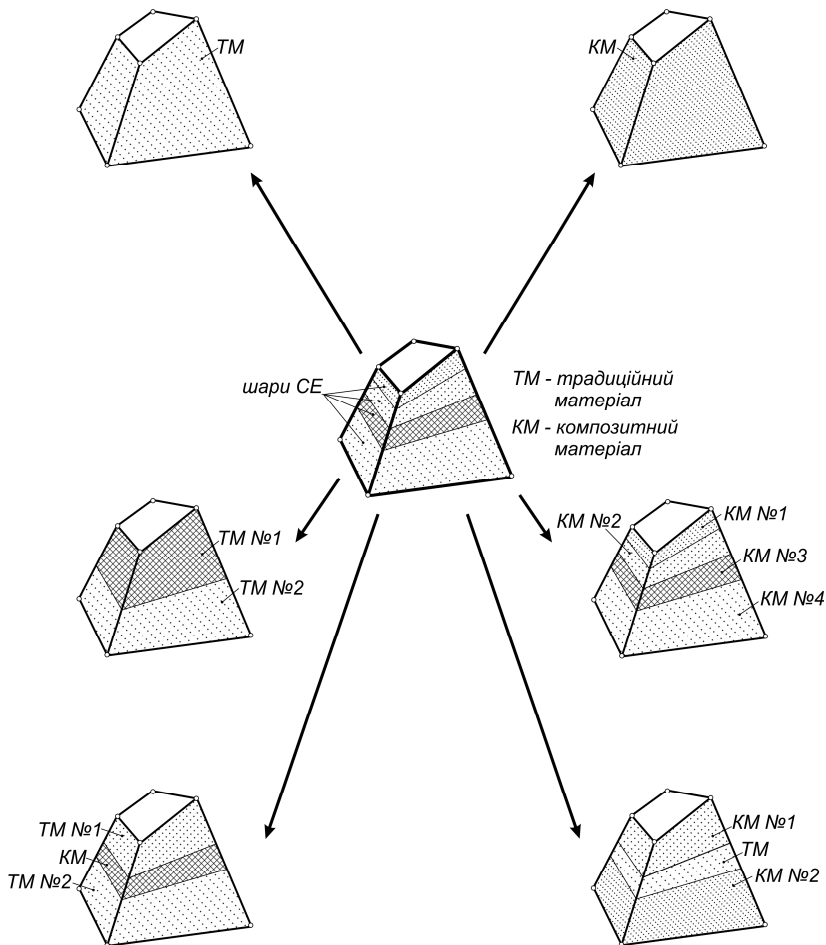
У нашому випадку в скінченноелементній моделі тонкої пружної неоднорідної оболонки [28] під “ефективними фізико-механічними характеристиками композитного матеріалу” будемо розуміти технічні сталі матеріалу шару КМ, які визначаються за розробленими в механіці композитів методиками [4]. У зв’язку цим з’являється можливість моделювання фізико-механічних характеристик як одношарового, так і багатошарового композитного матеріалу. Пружні властивості одношарового КМ визначаються в обчислювальному комплексі через програмні засоби, що враховують мікромеханічні параметри компонентів КМ [4]. Для багатошарового КМ врахування термопружних характеристик кожного шару виконується через програмно реалізовану [28] звичайну для методу скінченних елементів процедуру інтегрування віртуальної роботи внутрішніх сил СЕ. При цьому відповідно визначаються [4, 28] технічні сталі матеріалів кожного шару КМ.

У нашому розумінні термін “композитний матеріал” передбачає як можливу його складову поняття “шар матеріалу”, який є додатковим до термінів “компонента”, “фаза”, “елемент структури”, “складова”. У рамках створеної моделі [28] багатошаровий скінченний елемент можна використовувати як СЕ, що дозволяє моделювати матеріал оболонки різними типами традиційних і композитних матеріалів шарів (рис. 1).

Прикладом традиційного матеріалу може бути ортотропний матеріал, параметрами якого є термопружні технічні сталі: E_1'' , E_2'' , E_3'' – модулі пружності при розтягу-стиску; $G_{1''2''}$, $G_{1''3''}$, $G_{2''3''}$ – модулі зсуву; $\nu_{1''2''}$, $\nu_{1''3''}$, $\nu_{2''3''}$ – коефіцієнти Пуассона; $\alpha_{1''}$, $\alpha_{2''}$, $\alpha_{3''}$ – коефіцієнти термічного розширення. Ці параметри з точки зору одношарового композитного матеріалу можна розуміти як “ефективні фізико-механічні характеристики”.

Прикладом композитного матеріалу може бути однонаправлений волокнистий матеріал, мікромеханічними параметрами компонентів якого є: E_f , E_m – модулі пружності матеріалу волокна та матриці; G_f , G_m – модулі зсуву матеріалу волокна та матриці; ν_f , ν_m – коефіцієнти Пуассона матеріалу волокна та матриці; d_f – діаметр волокон; h_0 – товщина армованого шару; i_f – частота армування; α_f , α_m – коефіцієнти термічного розширення волокна та матриці.

Таким чином, за рахунок моделювання універсальним багатошаровим СЕ композитних матеріалів у методиці [28] з’являється можливість дослідження більш широкого класу неоднорідних оболонок (рис. 2).



ПАРАМЕТРИ МАТЕРІАЛІВ:

TM ортотропний - E_1'' , E_2'' , E_3'' , G_1'' , G_2'' , G_3'' , ν_1'' , ν_2'' , ν_3'' ,
 α_1'' , α_2'' , α_3'' .

KM однонаправлений волокнистий - E_f , E_m , G_f , G_m , ν_f , ν_m , d_f ,
 h_0 , i_f , α_f , α_m .

Рис. 1. Приклади моделювання матеріалу неоднорідної оболонки універсальним багатошаровим скінченним елементом

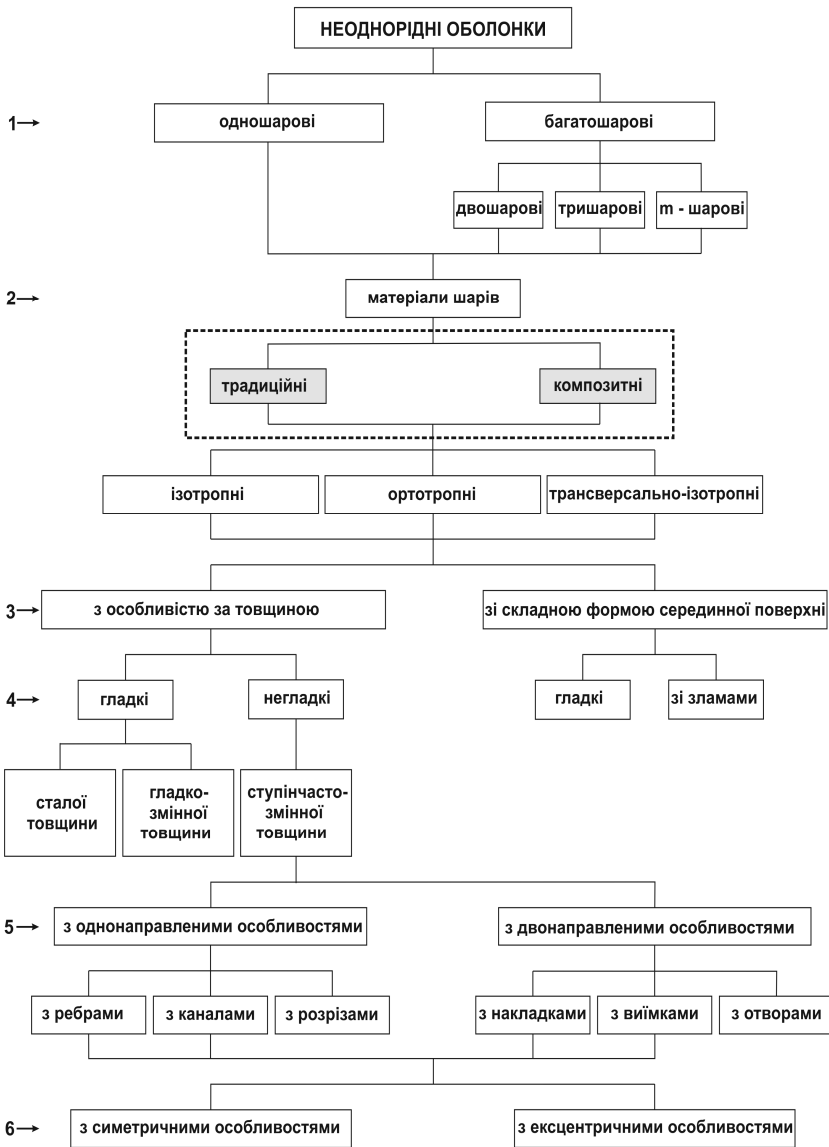


Рис. 2. Типи неоднорідних оболонок, що підпадають під розрахункову модель

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Анциферов В.Н., Бездудный Ф.Ф., Белянчиков Л.Н. и др.* Новые материалы. – М.: Мисис, 2002. – 736 с.
2. *Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др.* Композитные материалы: Справочник. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
3. *Карпинос Д.М., Тучинский Л.И., Сапожникова А.Б. и др.* Композиционные материалы в технике. – К.: Техника, 1985. – 152 с.
4. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. *Карпиноса Д.М.*, АН УССР. Ин-т проблем материаловедения. – К.: Наукова думка, 1985. – 592 с.
5. Справочник по композитным материалам: в 2-х книгах. Кн. 1 / Под ред. *Любина Дж.*; Пер. с англ. Геллера А.Б., Гельмонта М.М. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
6. *Пилитовский Ю.Л., Трудина Т.В., Сапожникова А.Б. и др.* Композиционные материалы в машиностроении. – К.: Техника, 1990. – 139 с.
7. Композиционные материалы и новые конструкции / Редкол.: *Подстригач Я.С.* (отв. ред.) и др. – К.: Наукова думка, 1977. – 151 с.
8. *Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г.* Прочность, жесткость и устойчивость. Теория и практикум: Строительная механика и расчеты композитных конструкций на прочность. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2008. – 191 с.
9. *Максимук О.В., Махницький Р.М., Щербина Н.М.* Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, 2005. – 396 с.
10. Большая энциклопедия: в 62 томах. Под редакцией *Кондратова С.А.* – М.: Терра (2000 - 2006 гг.). Т.22. – 2006. – 592 с.
11. Большая советская энциклопедия (в 30 томах) под редакцией академика *Прохорова А.М.* – М.: «Советская энциклопедия» (третье издание 1969-1978 гг.). Т.12. – 1973. – 624 с.
12. Українська радянська енциклопедія під редакцією *Бажана М.П.* – К.: «Українська радянська енциклопедія» (друге видання 1974-1985рр.). Т.5 – 1980. – 566 с.
13. *Марголін Г.Г.* Механіки вивчають композити. – К.: Т-во «Знання» УРСР, 1985. – 48 с.
14. *Фудзиши Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
15. Композиционные материалы. В 8-ми т. / Под ред. *Л. Браутмана и Р. Крока.* – М.: Машиностроение, 1978. Т.2. Механика композиционных материалов. / Под ред. *Г.Сендецьки.* 1978. – 568 с.
16. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
17. *Кривенко П.В., Пушкарьова К.К., Барановський В.Б. та ін.* Будівельне матеріалознавство: Підручник. – К.: ТОВ УВПК «ЕксОб», 2006. – 704 с.
18. *Винсон Ж.Р., Сираковский Р.Л.* Поведение конструкций из композиционных материалов. – М.: Металургия, 1991. – 264 с.
19. *Воробей В.В., Морозов Е.В., Татарников О.В.* Расчет термонапряженных конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1992. – 240 с.
20. *Лебедев А.О., Бобир М.И., Ламашевський В.П.* Механіка матеріалів для інженерів: навч. посіб. Нац. техн. ун-т України "КПІ" – Київ, 2006. – 288 с.
21. *Будник А.Ф., Юскаев В.Б., Будник О.А.* Неметалеві матеріали в сучасному суспільстві: навч. посіб. Сум. держ. ун-т. – Суми, 2008. – 222 с.
22. *Дзяди́кевич Ю.В.* Матеріали в техніці: навч. посіб. – Тернопіль: Екон. думка, 2009. – 204 с.
23. *Белозеров Л.Г., Киреев В.А.* Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2003. – 388 с.
24. *Болотин В.В., Новичков Ю.И.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

25. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
26. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х томах Т.1. Механика материалов / Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с.
27. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
28. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ “Віпол”, 2010. – 316 с.
29. Белостоцкий А.М. Конечноэлементные модели пространственных пластин, оболочек и массивов: построение, программная реализация и исследования / Сб. науч. трудов Гидропроекта, 1985. – Вып. 100. – С. 24-35.
30. Пискунов В.Г., Верижченко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – К.: Будівельник, 1986. – 176 с.
31. Пушкарьова К.К. Загальні принципи побудови будівельних композиційних матеріалів: Конспект лекцій. – К.: КНУБА, 2002. – 20 с.
32. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: МГУ, 1984. – 336 с.
33. Кучер М.К., Зарозовський М.М. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів // Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Серія Машинобудування. – 2010. – № 58. – С. 24-29.
34. Гоменюк С.И., Гребенюк С.Н., Ольшанецкий В.Е., Лавренко А.С. Применение различных теорий определения упругих характеристик композиционного материала при расчете конструкций // Вестн. двигателестроения. – 2009. – № 2. – С. 139-142.
35. Верещака С.М. Упругие постоянные и обобщенные характеристики жесткости материала слоистой структуры // Вестник Национ. техн. ун-та “ХПИ”. – Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2008. – № 36. – С. 29-40.
36. Тащинов А.А., Шавкувов В.Е. Тепловое расширение однонаправленных и пространственных ортогонально армированных волокнистых композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – Т. 9, №2. – С. 133-141.
37. Расчет композитных конструкций с учетом расслоений / В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, А.И. Оглобля и др. – К.: Будівельник, 1992. – 136 с.

Стаття надійшла до редакції 13.12.2012 р.

Соловей Н.А., Кривенко О.П., Мищенко О.А., Калашников А.Б.

УЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКИ

Приведены основные понятия касательно композитных материалов, сформулированы их общие признаки, описаны пути определения их эффективных упругих характеристик. Исходя из разработанной конечно-элементной модели, обобщено понятие композитного материала упругой неоднородной оболочки.

Solovey N.A., Kryvenko O.P., Myshchenko O.A., Kalashnikov O.B.

COMPOSITE MATERIAL CHARACTERISTICS CONSIDERATION IN A FINITE ELEMENTS MODEL OF A HETEROGENEOUS SHELL

The basic concepts about composite materials are given, their general features are formulated, and the ways of definition of their effective elastic characteristics are described. Coming from the constructed finite elements model, the concept of a composite material of an elastic heterogeneous shell is generalized.

УДК 539.3

О.В. Герашенко, канд.техн.наук

РОЗРАХУНОК НЕСУЧОЇ СПРОМОЖНОСТІ ГВИНТОВИХ ДЕРЕВ'ЯНИХ СХОДІВ

В роботі досліджена несуча спроможність і стійкість гвинтових самонесучих сходів.

Проектування сходів може бути визнано успішним, якщо воно враховує вимоги норм проектування [1,2] та норм ергономіки до особливостей застосування різних видів конструкцій сходів і матеріалів, безпечного пересування людей та можливостей їх евакуації у випадку пожежі. Сходи повинні з'єднувати естетику інтер'єру і функціональність, а вибір їх конструкції – залежати від специфіки будівлі. Якщо шлях складається з прямолінійних похилих ділянок, то застосовуються маршові сходи. Самі ділянки є маршами, які зазвичай з'єднуються в міжповерхове просторі за допомогою сходових площадок і можуть розміщатися як уздовж стін, так і розташовуватися автономно. Якщо траєкторія руху являє собою вигнуту лінію, як би складену з невеликих похилих ділянок, то застосовуються гвинтові сходи. Такі сходи в плані можуть являти собою не тільки коло, але і будь-яку іншу складну конфігурацію. Згідно історичній довідці, гвинтові сходи вперше використовувалися при будівництві мінаретів. Ранні мінарети дуже часто мали гвинтові сходи зовні, пізні - всередині башти. В теперішній час в будівлях широко застосовуються класичні гвинтові сходи, які називаються спіральними і складаються із ступенів, центральної стійки і поручнів, розрахунок яких не потребує складних обчислювальних процедур [3]. А вирішення питання несучої спроможності самонесучих гвинтових сходів, які потребують більш складного розрахунку, стає більш актуальним.

В роботі досліджена несуча спроможність гвинтових самонесучих сходів, конструкція яких представлена на рис. 1. Тятиву має прямокутний переріз з висотою 425 мм і шириною 50 мм, ступені мають L-образний переріз 300 мм на 50 мм та 114 мм на 17 мм. Матеріал сходів – дуб.

На основі методу скінченних елементів та узагальнених координат із застосуванням програмного комплексу NASTRAN [4] побудована розрахункова скінченноелементна модель сходів (рис. 2). Тятива та ступені моделювалися набором стержневих просторових скінченних елементів з відповідними геометричними та механічними

характеристиками. В п'яти вузлах кріплення сходів були обмежені переміщення по трьох напрямках.

Розрахункове навантаження від власної ваги (рис. 3,а) і ваги людей, розташованих на ступенях сходів уздовж внутрішньої і зовнішньої тятиви (рис. 3,б), моделювалося у вигляді симетричних та кососиметричних зосереджених сил у вузлах перетину ступенів та тятиви і приймалося рівними $80 H$ та $700 H$ відповідно.

Для визначення несучої спроможності сходів виконані статичний розрахунок напружено-деформованого стану при дії сумарного розрахункового навантаження.

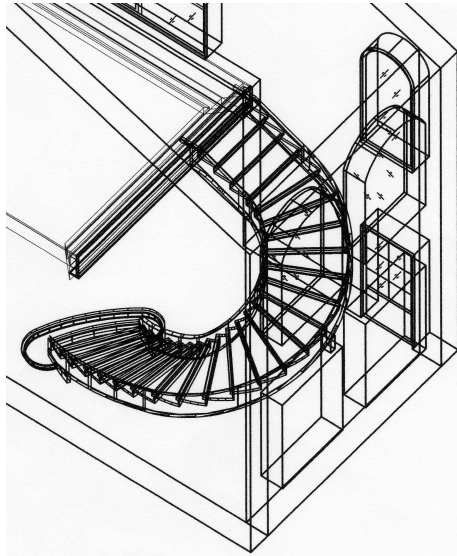


Рис. 1. Конструкція гвинтових сходів

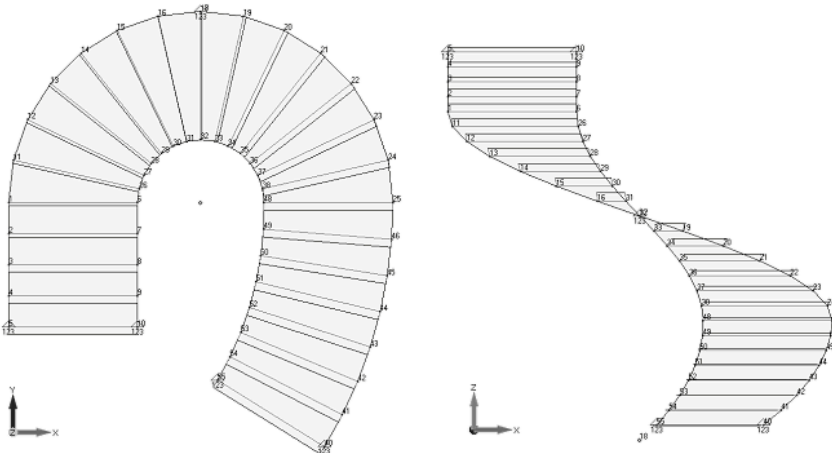


Рис. 2. Скінченноелементна модель сходів

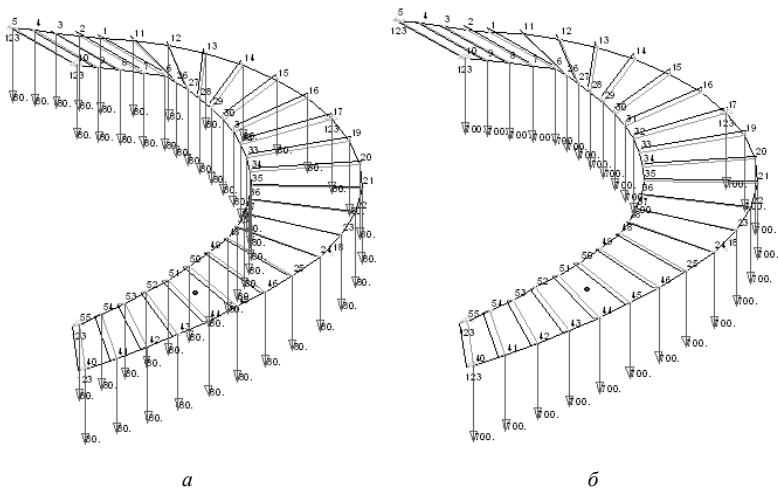


Рис. 3. Навантаження на гвинтові сходи

Деформований стан сходів представлений на рис. 4. Максимальні переміщення спостерігалися у вузлі 25 скінченноелементної моделі сходів і склали 7 мм; максимальні напруження – в елементі 64 (вузли 20, 34) і склали 7,3 МПа.

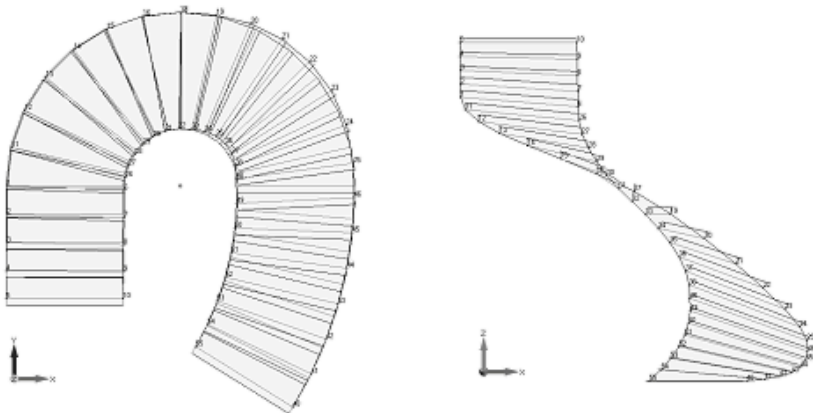


Рис. 4. Деформований стан сходів

Максимальне напруження не перевищує допустимого напруження розтягу для дуба, тобто менше за 9-13 МПа.

В роботі виконаний розрахунок гвинтових сходів на стійкість (рис. 5) за допомогою розв'язання задачі на власні значення та розв'язання нелінійної задачі статики.

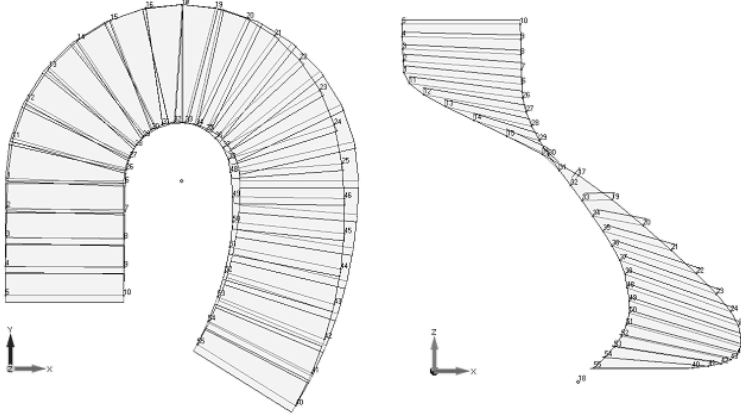


Рис. 5. Розрахунок сходів на стійкість

Отримане перше критичне навантаження за допомогою методу Ланцоша склало 84390 H на один вузол моделі, що у 97 разів перевищило розрахункове навантаження. При цьому максимальні переміщення і напруження також набагато перевищили допустимі значення. Розрахунок стійкості за допомогою розв'язання нелінійної задачі стійкості покроковим методом Ньютона-Рафсона дозволило відстежити навантаження, при якому напруження в елементах сходів було рівним за допустиме, воно склало 2184 H на один вузол моделі. Тобто критичне навантаження на гвинтові сходи перевищує розрахункове сумарне навантаження у 2,51 рази.

Висновок. Несуча спроможність та стійкість гвинтових самонесучих сходів представленої конструкції і виготовленої з дуба забезпечена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия.
2. ДБН В.1.1-7-2002. Захист від пожежі Пожежна безпека об'єктів.
3. Линович Л.Е. Расчет и конструирование частей гражданских зданий. – К.: Будівельник, 1972. – 644 с.
4. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.

Геращенко О.В.

РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ВИНТОВОЙ САМОНЕСУЩЕЙ ЛЕСТНИЦЫ

В работе исследована несущая способность и устойчивость винтовой самонесущей лестницы.

Gerashchenko O.V.

CARRYING CAPACITY OF SCREW SELF SUPPORTING STAIRS CALCULATION

The load-bearing capacity and stability of the self-supporting spiral staircase is studied.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Мицюк С.В.</i> Особливості реалізації моментної схеми скінчених елементів для визначення пружного стану просторових тіл складної форми	3
<i>Шульга М.О.</i> Застосування гамільтонового формалізму в теорії коливань циліндричних оболонок	26
<i>Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.</i> Дослідження стійкості стохастичних параметричних коливань пологої оболонки	31
<i>Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Теоретичні основи аналізу динамічної поведінки віброударних систем	39
<i>Гайдайчук В.В., Глушакова О.В.</i> Самозбудження хвильових крутильних коливань складених бурильних колон	50
<i>Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Сташук А.А.</i> Зниження вимірності рівнянь статички товстої пластини змінної товщини узагальненим методом прямих	58
<i>Гайдайчук В.В., Шевчук Л.В.</i> Моделювання коливань кружляння колон глибокого буріння	68
<i>Легостасв А.Д., Гречух Н.А.</i> Деякі задачі динаміки оболоноквих конструкцій	78
<i>Киричук О.А., Лук'янченко О.О.</i> Динаміка двох кілець, з'єднаних стержневим елементом	87
<i>Солодей І.І.</i> Постановка задачі лінійного і нелінійного деформування та руйнування просторових тіл в задачах динаміки	93

<i>Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.</i> Вплив попереднього нагріву на стійкість пологих квадратних у плані панелей при комбінованому закріпленні контуру	107
<i>Костіна О.В.</i> Векторна апроксимація функції переміщень криволінійного скінченного елемента у задачі стійкості кільця	117
<i>Лук'янченко О.О., Геращенко О.В., Завойський А.К., Ашмаріна Г.Р.</i> Дослідження несучої спроможності сталених кронштейнів	123
<i>Кобельський С.В.</i> Аналіз змішаних скінченних елементів стосовно задач пружно- пластичного деформування та механіки руйнування	131
<i>Гуляр О.І., Пискунов С.О., Солодей І.І., Максим'юк Ю.В.</i> Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень	143
<i>Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А.</i> Дослідження за методом граничних інтегральних рівнянь усталених коливань пластин з тріщинами	158
<i>Іванченко Г.М.</i> Вплив параметрів анізотропії пружної трансверсально-ізотропної лінзи на її фокусуючі властивості	165
<i>Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О., Калашніков О.Б.</i> Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки.	172
<i>Геращенко О.В.</i> Розрахунок несучої спроможності гвинтових дерев'яних сходів	181

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 89

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку .12. Формат 60x90 ¹/₁₆. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10.
Тираж 100. Зам. № 12-550К

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

Віддруковано на ЗАТ “ВПІОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.