

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 90

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2012

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук

С.О. Пискунов, д-р техн. наук
М.О. Соловей, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 90 / Відп. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2012. – 173 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31
м. Київ, 03680
тел.: (044) 248-3040

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2012

УДК 539.375

В.А. Баженов, д-р техн. наук,
О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
С.О. Пискунов, д-р техн. наук,
О.О. Криль, канд. техн. Наук,
Д.В. Богдан

**ВИЗНАЧЕННЯ ТРІЩИНОСТІЙКОСТІ ЛОПАТКИ ГАЗОВОЇ
ТУРБИНИ З НАПІВЕЛІПТИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ**

Розглянута реалізація методики визначення J -інтеграла модифікованим методом реакцій в призматичних тілах з поперечними тріщинами на прикладі дослідження тріщиностійкості лопатки газової турбіни.

На сьогоднішній день в енергетиці та інших галузях промисловості можуть експлуатуватися елементи конструкцій з тріщинами. Значну частину таких об'єктів можна віднести до класу призматичних тіл. Розрахунок таких задач потребує обчислення параметрів механіки руйнування. Найбільшого застосування серед них здобув J -інтеграл Черепанова-Райса. Обчислення J -інтеграла в дискретних моделях методу скінченних елементів (МСЕ) доцільно виконувати методом реакцій [1,2]. Його використання дозволило отримати інваріантні величини J -інтеграла в задачах пружного та, в часткових випадках, пружнопластичного деформування [3].

В даній роботі методика визначення J -інтеграла методом реакцій була застосована при розв'язанні задачі про визначення тріщиностійкості лопатки газової турбіни з напівеліптичною тріщиною від дії експлуатаційного навантаження. Для досягнення цієї мети використовується модифікований метод реакцій із представленням дискретної моделі за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ).

Складний характер профілю лопатки турбіни моделюється шляхом задання набору скінченних елементів, поперечний переріз яких може змінюватися вздовж утворюючої Z^3 . Кожний поперечний переріз SE вздовж цієї осі знаходиться в стані позacentрового розтягу (рис. 1).

При формуванні розрахункової моделі лопатки враховані раніше виконані дослідження [4], присвячені розвитку початкової тріщини в лопатці турбіни при дії циклічного навантаження.

Проведені раніше дослідження по континуальному руйнуванні лопатки показали, що утворення тріщини виникає в перерізах в межах $0,94R_0 - 1,06R_0$, де R_0 – небезпечний поперечний переріз лопатки, в якому комбінація усередненого напруження σ_0 і усередненої температури T_0 призводить до найбільш інтенсивного накопичення деформацій повзучості.

Розрахункова модель лопатки наведена на рис. 2.

Моделювання верхньої частини лопатки ($R > 1,06 R_0$) здійснюється шляхом прикладення до перерізу $R = 1,06 R_0$ нерівномірно розподіленого навантаження q . Крім того, фрагмент завантажений розподіленим за об'ємом відцентровим навантаженням p .

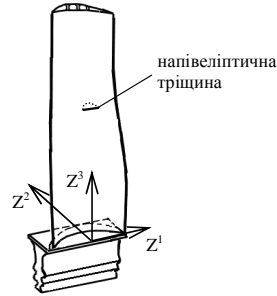


Рис. 1. Загальний вигляд лопатки газотурбінного двигуна (ГТД) з напівеліптичною тріщиною

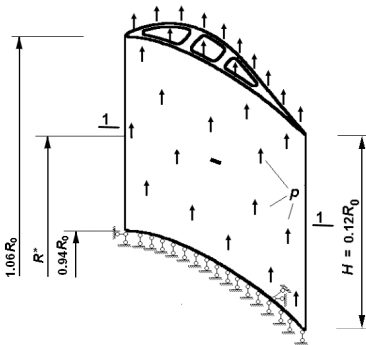
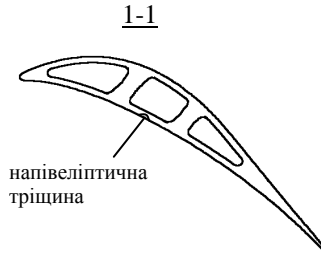


Рис. 2. Розрахункова модель лопатки з тріщиною



Розглядуваний фрагмент лопатки може бути віднесений до неоднорідних призматичних тіл. Відповідна дискретна модель НМСЕ, що утворена із використанням неоднорідних призматичних СЕ, наведена на рис. 3.

Отримані на основі 3D-МСЕ розподілення інтенсивності нормальних напружень σ_i , віднесеної до усередненої величини інтенсивності напружень σ_0 в небезпечному перерізі R_0 , по радіусу в характерних точках поперечного перерізу (рис. 3, б) свідчать, що напружено-деформований стан фрагмента лопатки має суттєво тривимірний характер: величини інтенсивності напружень в межах поперечного перерізу відрізняються більше ніж в 2,5 рази в точках 1 і 8 перерізу

$R = 0,94R_0$ (рис. 3,а). В точці 1 (рис. 3,б) відмінність в напруженнях σ_i досягає 1,5 разів.

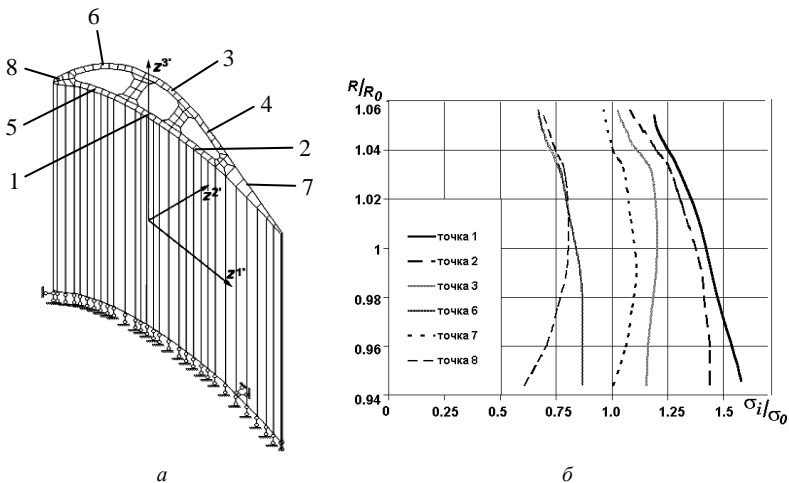


Рис. 3. Дискретна модель лопатки на основі НМСЕ з характерними точками поперечного перерізу (а), розподіл безрозмірної інтенсивності напружень по висоті лопатки (б)

Результат розрахунку, виконаний із використанням неоднорідних призматичних СЕ засвідчив суттєві відмінності в розподіленні параметрів напружено-деформованого стану по висоті лопатки.

Порівняння отриманого розподілення безрозмірної інтенсивності нормальних напружень σ_i/σ_0 по висоті фрагмента лопатки з розв'язком, отриманим на основі 3D-МСЕ при пружному деформуванні в зазначених характерних точках перерізу (рис. 3, а) засвідчило добре узгодження цих результатів [5].

Дослідження збіжності розподілення КІН вздовж фронту початкової тріщини, обчислення яких виконувалось за методикою описаною в [4], засвідчило, що розподіл КІН, отриманий на різних сітках, є майже однаковим, тобто для опису розподілення КІН достатньо СЕ моделі, що апроксимує половину фронту напівеліптичної тріщини 12 елементами (рис. 4). Вибір трьох конфігурацій тріщин проводився із умови, що глибина тріщини не перевищує 1/4 товщини стінки лопатки.

На рис. 5 показані результати обчислення J-інтеграла вздовж фронту тріщини за допомогою модифікованого методу реакцій.

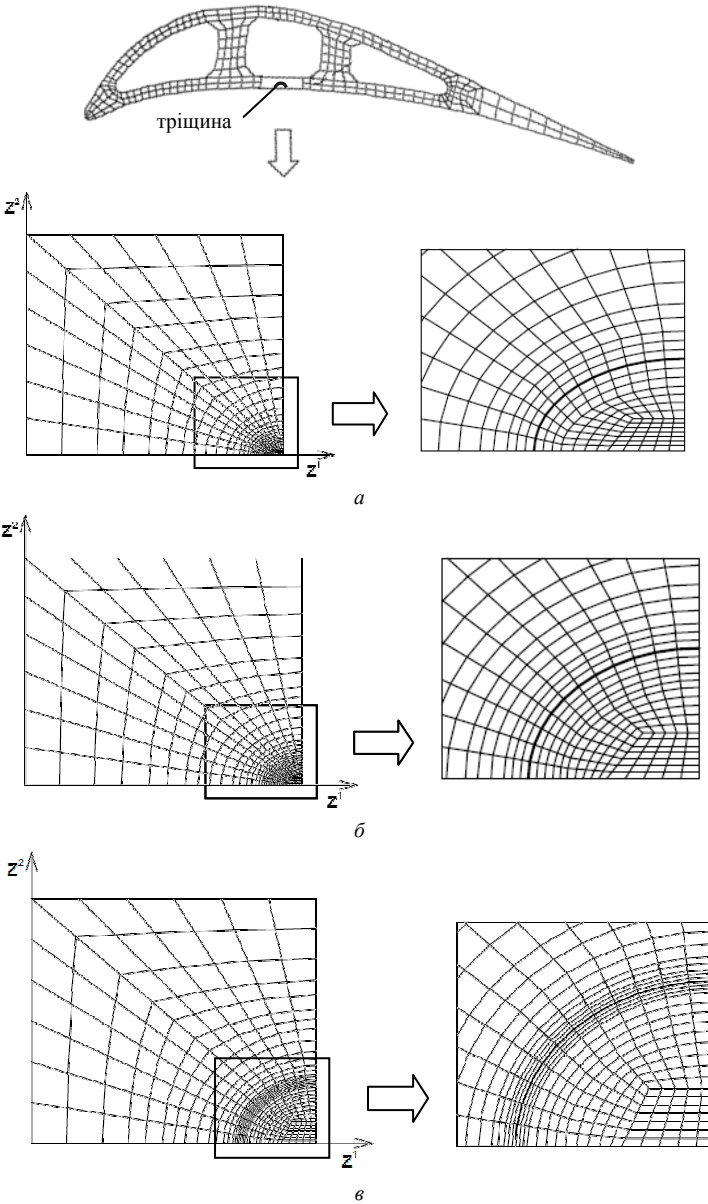


Рис. 4. Поперечний переріз лопатки та фрагмент дискретної моделі з розмірами напівосей тріщини: а – 0,5 та 0,3 мм; б – 0,63 та 0,47 мм; в – 1,53 та 1,3 мм

Порівняння остаточних результатів розрахунку показали, що застосування модифікованого методу реакцій забезпечує хорошу збіжність результатів навіть на одному кроці навантаження в порівнянні з покроковим завантаженням.

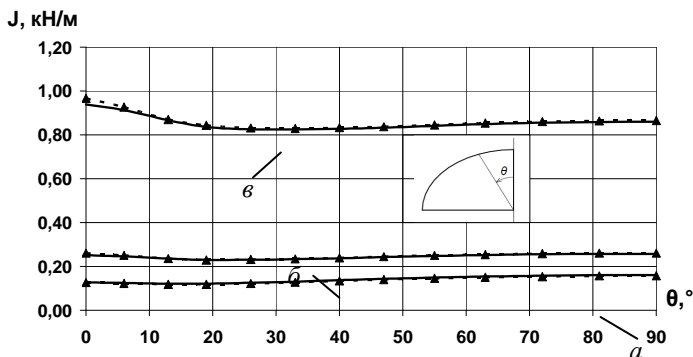


Рис. 5. Розподіл J-інтеграла вздовж фронту тріщини (суцільна лінія – пластикна постановка; штрихова з трикутниками – пружна постановка) для напівеліптичних тріщин з розмірами напівосей: a – 0,5 та 0,3 мм; b – 0,63 та 0,47 мм; v – 1,53 та 1,3 мм

На рис. 6 показано залежність J-інтеграла як функції від навантаження P (кН) у вузлі розташованому в точці на малій напівосі для різних розмірів тріщин, що досліджувалися при розв'язанні даної задачі.

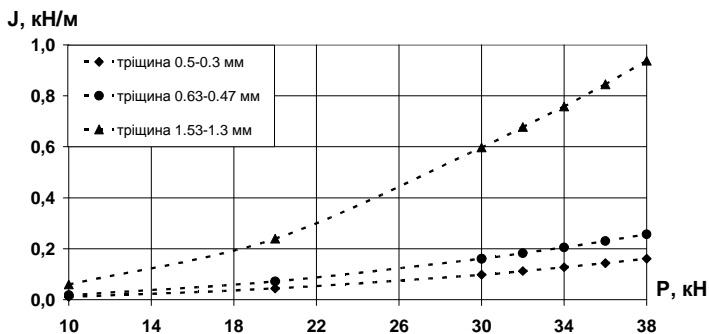


Рис. 6. Графік залежності J-інтеграла від величини прикладеного навантаження P , кН.

Максимальне значення J-інтеграла складає $J = 0,94$ кН/м, якому відповідає величина коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I = 13,06$ МПа·м^{0,5} обчислена за формулою:

$$K_I = \sqrt{\frac{J_I \cdot E}{k}},$$

де модуль пружності $E = 1,7 \cdot 10^5$ МПа, $k = 1 - \nu^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,25$.

Отримана величина K_I значно менша гранично допустимих критичних значень K_{IC} для розповсюджених марок сталі [6]. Так для сталі 20X13, отриманої із використанням термообробки $K_{IC} = 32$ МПа·м^{0,5}.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О.* Особливості визначення J-інтеграла для дискретних моделей метода скінченних елементів// Опір матеріалів і теорія споруд, № 77, 2005, С.43–64
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О., Богдан Д.В.* Ефективність методу реакцій для призматичних тіл з поперечними тріщинами// Опір матеріалів і теорія споруд, № 87, 2011, С.3–12
3. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Сахаров О.С., Шкриль О.О. Богдан Д.В.* Ефективність визначення J-інтеграла в задачах пружнопластичного деформування// Опір матеріалів і теорія споруд.– К.: КНУБА, 2010.- Вип. 86.- С. 3-17.
4. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, С.О. Пискунов, О.С. Сахаров. – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Шкриль А.А.* Определение ресурса лопатки газовой турбины в условиях ползучести на основе континуальной механики разрушения // Проблемы прочности. – 2006. – №4. – С. 87-93.
6. Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие, в 4-х томах / под ред. Панасюка В.В. - Киев: Наукова думка, 1988: т. 3 Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения / Ковчик С.Е., Морозов Е.М., 1988 - 436с.

Стаття надійшла до редакції 27.11.2012 р.

Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Шкриль А.А., Богдан Д.В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ЛОПАТКИ ГАЗОВОЙ ТУРБИНЫ С ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрена реализация методики определения J-интеграла методом реакций в призматических телах с поперечными трещинами на задаче по определению трещиностойкости лопатки газовой турбины.

Bazhenov V., Gulyar A., Piskunov S., Shkril' A., Bogdan D.

DETERMINATION OF CRACK GROWTH RESISTANCE OF THE GAS TURBINE BLADE WITH A SEMI-ELLIPTICAL CRACK

An implementation of the procedure for J-integral estimation by the method of reactions in prismatic bodies with transversal cracks was considered for the problem of determining crack growth resistance of the gas turbine blade.

УДК 539.3

М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук,
О.М. Тробюк

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ТИПУ ТИМОШЕНКА В ГАМІЛЬТОНОВІЙ ФОРМІ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ПЕРІОДИЧНО-НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН

Побудовано розв'язок рівнянь типу Тимошенка гармонічних коливань періодично-неоднорідних пластин, представлених в гамільтоновій формі по просторовій координаті. На основі теореми Ляпунова-Пуанкаре встановленні властивості характеристичного рівняння і структура загального розв'язку для необмежених і півобмежених областей.

Ця стаття є продовженням робіт [2-4] і присвячена побудові розв'язку рівнянь типу Тимошенка в гамільтоновій формі гармонічних коливань періодично-неоднорідних пластин. Користуючись теоремою Ляпунова-Пуанкаре [5-8], встановленні властивості характеристичного рівняння і структура загального розв'язку для необмежених і півобмежених областей.

Розглянемо пластину, серединна відлікова площина $z=0$, якої віднесена до прямокутної декартової системи координат x_1, x_2, z . В теорії типу Тимошенка коливань пластин згинальні M_{11}, M_{22} та крутильні $M_{12}=M_{21}$ моменти, перерізуючі сили Q_1, Q_2 , прогин w і тимошенківські функції зсуву ψ_1, ψ_2 зв'язані рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

та матеріальними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right), \quad M_{22} = -D \left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right), \\ M_{12} &= -\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right), \end{aligned}$$

$$Q_1 = B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 \right), \quad Q_2 = B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right). \quad (2)$$

В формулах (1), (2) використовуються загальноприйняті позначення [4 та ін.].

Система рівнянь (1), (2) в статті [4] представлена в операторній нормальній формі Коші по просторовій координаті x_1 , відносно функцій $M_{11}, \psi_2, w, \psi_1, M_{12}, Q_1$, які при досконалому механічному контакті залишаються неперервними на перерізах $x_1 = const$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} &= -\rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} + Q_1, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{2}{(1-\nu)D} M_{12}, \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} &= \psi_1 + \frac{Q_1}{B_3}, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} &= -\frac{M_{11}}{D} - \nu \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} &= -\nu \frac{\partial M_{11}}{\partial x_2} + (1-\nu^2)D \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - B_3 \psi_2 + B_3 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} &= B_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} - B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Після визначення $M_{11}, \psi_2, w, \psi_1, M_{12}, Q_1$ з решти рівнянь знаходимо функції M_{22}, Q_2 через розв'язувальні функції M_{11}, ψ_2, w

$$\begin{aligned} M_{22} &= \nu M_{11} - (1-\nu^2)D \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \\ Q_2 &= B_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right). \end{aligned}$$

При перетворенні рівнянь коливань (1), (2) до системи (3) приймалося, що коефіцієнти системи (3), а значить і рівнянь (1), (2), можуть бути довільними функціями координати x_1 з розривами першого роду.

Система (3) є операторною гамільтоновою системою по просторовій координаті x_1

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}$$

з операторною функцією Гамільтона $\widehat{H} = \frac{1}{2} \widehat{P}_{ij} q_i q_j + \frac{1}{2} \widehat{Q}_{ij} p_i p_j$. Ненульові операторні коефіцієнти симетричних матриць $\widehat{\mathbf{Q}}$, $\widehat{\mathbf{P}}$ дорівнюють

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{11} &= -\rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \widehat{Q}_{12} = \widehat{Q}_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \widehat{Q}_{13} = \widehat{Q}_{31} &= 1, \quad \widehat{Q}_{22} = -\frac{2}{(1-\nu)D}, \quad \widehat{Q}_{33} = \frac{1}{B_2}, \\ -\widehat{P}_{11} &= -\frac{1}{D}, \quad -\widehat{P}_{12} = -\widehat{P}_{21} = -\nu \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ -\widehat{P}_{22} &= (1-\nu^2)D \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \rho I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - B_3, \quad -\widehat{P}_{23} = -\widehat{P}_{32} = B_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ -\widehat{P}_{33} &= -B_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язок системи (3) беремо у вигляді біжучих хвиль

$$\begin{aligned} &\{M_{11}, \Psi_2, w, \Psi_1, M_{12}, Q_1\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ D_{00} I_{00}^{-1} q_1(\xi), -i q_2(\xi), l_{00} q_3(\xi), p_1(\xi), -D_{00} I_{00}^{-1} i p_2(\xi), D_{00} I_{00}^{-2} p_3(\xi) \right\} \times \\ &\quad \times \exp i(k_2 x_2 - \omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Підставивши (5) в систему (3) з урахуванням (4) отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial \xi} &= \bar{\rho} \bar{I}_1 \bar{\omega}^2 p_1 - \bar{k}_2 p_2 + p_3; \\ \frac{\partial q_2}{\partial \xi} &= -\bar{k}_2 p_1 + \frac{2}{(1-\nu)D} p_2; \\ \frac{\partial q_3}{\partial \xi} &= p_1 + \frac{1}{B_3} p_3; \\ \frac{\partial p_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{D} q_1 - \nu \bar{k}_2 q_2; \\ \frac{\partial p_2}{\partial \xi} &= -\nu \bar{k}_2 q_1 + \left[(1-\nu^2) D \bar{k}_2^2 - \bar{\rho} \bar{I}_1 \bar{\omega}^2 + B_3 \right] q_2 + \bar{B}_3 \bar{k}_2 q_3; \\ \frac{\partial p_3}{\partial \xi} &= \bar{B}_3 \bar{k}_2 q_2 + \left[\bar{B}_3 \bar{k}_2^2 - \bar{\rho} \bar{h} \bar{\omega}^2 \right] q_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Безрозмірні величини вводимо наступним чином:

$$\bar{D} = \frac{D}{D_{00}}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \bar{B}_3 = \frac{B_3}{D_{00} l_{00}^{-2}}, \bar{k}_2 = k_2 l_{00},$$

$$\bar{h} = \frac{h}{l_{00}}, \bar{I}_3 = \frac{I_3}{l_{00}^3}, \bar{\omega}^2 = \omega^2 \frac{\rho_{00} l_{00}^5}{D_{00}}.$$

Безрозмірна координата $\xi = x_1/l_{00}$, нормуючі параметри $l_{00}, \rho_{00}, D_{00}$ мають розмірність відповідно $m, \text{кг}/\text{м}^3, \text{Н} \cdot \text{м}$.

Систему (6) відносно амплітудних функцій $q = [q_1, q_2, q_3]^T$, $p = [p_1, p_2, p_3]^T$ запишемо в матричній формі

$$q'_i = Q_{ij}(\xi) p_j; \quad p'_i = -P_{ij}(\xi) q_j, \quad (7)$$

з ненульовими елементами симетричних матриць $\mathbf{Q}(\xi)$, $\mathbf{P}(\xi)$

$$Q_{11} = \bar{\rho} \bar{I}_1 \bar{\omega}^2; \quad Q_{12} = -\bar{k}_2; \quad Q_{13} = 1; \quad Q_{22} = \frac{2}{(1-\nu) \bar{D}}; \quad Q_{33} = \frac{1}{\bar{B}_3};$$

$$-P_{11} = -\frac{1}{\bar{D}}; \quad -P_{12} = -\nu \bar{k}_2; \quad -P_{22} = (1-\nu^2) \bar{D} \bar{k}_2^2 - \bar{\rho} \bar{I}_1 \bar{\omega}^2 + \bar{B}_3;$$

$$-P_{23} = \bar{B}_3 \bar{k}_2; \quad -P_{33} = \bar{B}_3 \bar{k}_2^2 - \bar{\rho} \bar{h} \bar{\omega}^2.$$

Коефіцієнти матриць $\mathbf{Q}(\xi)$, $\mathbf{P}(\xi)$ залежать від функцій $\bar{\rho}(\xi)$, $\bar{D}(\xi)$ і не містять їх похідних.

Для періодично змінних механічних та геометричних параметрів матриця системи (7) буде періодичною з періодом ξ_{00} . Позначимо через $U(\xi, 0)$ матрицант системи (7), що задовольняє умови $U(0, 0) = I_6$ (I_6 – одинична матриця шостого порядку). Згідно з теоремою Ляпунова-Пуанкаре [5-8] характеристичне рівняння матриці монодромії $U(\xi_{00}, 0)$ періодичної гамільтонової системи (7) буде зворотним

$$\rho^6 - a_1 \rho^5 + a_2 \rho^4 - a_3 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0, \quad (8)$$

та має три пари ненульових взаємно обернених коренів $\rho_j, \rho_{j+3} = 1/\rho_{j+3}$, $j=1, 2, 3$.

Матрицант $U(\xi, 0)$ системи (7) на одному (основному) періоді можна знайти одним із чисельних методів, розв'язуючи шість задач Коші для системи (7) з лінійно незалежними одиничними початковими векторами. Характеристичне рівняння (8) шостого порядку заміною $\rho + 1/\rho = 2b$ зводиться до трьох квадратних рівнянь $\rho^2 - 2b_j \rho + 1 = 0$, коефіцієнти яких визначаються з кубічного рівняння $8b^3 - 4a_1 b^2 + (2a_2 - 6)b - a_3 + 2a_1 = 0$.

Якщо ввести заміну $\rho = \exp(\pm ish)$, то алгебраїчні квадратні рівняння $\rho^2 - 2b_j\rho + 1 = 0$ перейдуть в тригонометричні $\cos sh = b_j$. При дійсних $|b_j| \leq 1$ однозначний розв'язок цих рівнянь потрібно вибирати згідно правилу відбору мод [5-8]

$$sh = (-1)^{N_j-1} \arccos b_j + 2\pi [N_j/2],$$

де $\arccos b_j$ – головне значення оберненої тригонометричної функції із інтервалу $(0, \pi)$; N_j – порядковий номер появи нерівності $|b_j| < 1$ при зростанні частоти від нуля; $[N_j/2]$ – ціла частина числа $N_j/2$.

Позначимо відповідні власні вектори матриці монодромії $U(\xi_{00}, 0)$ через $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_6$, приймаючи, що характеристичні числа (мультиплікатори матриці монодромії) пронумеровані так, що $|\rho_j| \leq 1$, $j=1, 2, 3$. При нерівних мультиплікаторах або існуванні лінійно незалежних векторів для рівних мультиплікаторів загальний розв'язок системи (4) при довільному ξ із інтервалу періодичності $(n-1)\xi_{00} < \xi < n\xi_{00}$ (n – ціле) можна записати у вигляді суперпозиції

$$\text{col}[q(\xi), p(\xi)] = \sum_{m=1}^6 K_m \rho_m^{n-1} U(\xi - (n-1)\xi_{00}, \xi_{00}(n-1)) d_m, \quad (9)$$

з довільними постійними K_m . Формула (9) безпосередньо впливає із теореми Флоке для рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

Формула (9) дає можливість проаналізувати структуру розв'язків основних типів хвильових задач для періодично-неоднорідної пластини. Перш за все зауважимо, що при $-\infty < \xi < +\infty$ (об'ємні хвилі в необмеженій області) частотні зони існування об'ємних хвиль визначаються існуванням всіх одночасно рівних по модулю одиниці мультиплікаторів (мультиплікатори повинні лежати на одиничному колі та не співпадати між собою). До зон пропускання хвиль можна віднести і випадки, коли хоч би одна взаємно обернена пара мультиплікаторів лежала на одиничному колі, якщо під фізично розумним розв'язком для необмеженого середовища будемо розуміти суперпозицію відповідних цій парі доданків у розв'язку (9). Для напівобмеженої області $0 \leq \xi < +\infty$ із

(9), перш за все, маємо $\text{col}[q(0), p(0)] = \sum_{m=1}^6 K_m d_m$. Оскільки при $\xi=0$

фізично можливими є тільки три умови, то на розв'язок (9) потрібно

накласти умову обмеженості при $\xi \rightarrow +\infty$. Для поверхневих хвиль розв'язок повинен затухати при $\xi \rightarrow +\infty$ і його слід шукати в частотній області, де $|\rho_j| < 1$, вважаючи $K_4 = K_5 = K_6 = 0$. У випадку, коли розв'язок повинен задовільняти тільки умову обмеженості при $\xi \rightarrow +\infty$, мультиплікатори потрібно вибирати згідно з правилом відбору мод [5-8]. В таких випадках хвилі не будуть тільки поверхневими, оскільки буде відбуватися відтік енергії від границі $\xi = 0$. У випадку обмеженої області $0 < \xi < L_1 \equiv \xi_{00}^{n_*}$, (n_* – фіксоване ціле число) необхідно скористатися формулами

$$\text{col}[q(0), p(0)] = \sum_{m=1}^6 K_m d_m; \quad \text{col}[q(L_1), p(L_1)] = \sum_{m=1}^6 K_m \rho_m^{n_*-1} d_m,$$

в яких всі шість сталих K_m визначаються із граничних умов при $\xi = 0$ (три умови) і $\xi = L_1$ (три умови).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
2. Шульга О.М. Волновые решения уравнений типа Тимошенко поперечных колебаний пластин с периодическими по одной координате параметрами // Теорет. и прикладная механика. – 1996. – Вып. 26. – с. 105 – 111.
3. Шульга М.О. О гамильтоновом формализме в теории типа Тимошенко изгиба пластин. – Теор. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – с. 3 – 7.
4. Шульга М.О., Тробюк О.М. Про змішану систему рівнянь типу Тимошенка коливань неоднорідних пластин. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 87. – с. 158-163.
5. Shul'ga N.A. Propagation of Elastic Waves in Periodically Inhomogeneous Media // Int. Appl. Mech. – 2003. 39, N 7. – P. 763-796.
6. Shul'ga N.A. Propagation of Coupled Waves in Layered-Periodic Continua for Interaction with an Electromagnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2003. 39, N 10. – P. 1146-1172.
7. Shul'ga N.A. Theory of Dynamical Processes in Mechanical Systems and Materials of Regular Structures // Int. Appl. Mech. – 2009. 45, N 12. – P. 1301-1330.
8. Shul'ga N.A. On Certain Mixed System of Equations of Theory of Elasticity // Int. Appl. Mech. – 2010. 46, N 3. – P. 247-251.

Стаття надійшла до редакції 22.10.2012 р.

Шульга М.О., Тробиук О.М.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА ТИМОШЕНКО В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН

Построено решение уравнений типа Тимошенко гармонических колебаний периодически-неоднородных пластин, представленных в гамильтоновой форме по пространственной координате. На основании теоремы Ляпунова-Пуанкаре установлены свойства характеристического уравнения и структура общего решения для неограниченных и полуограниченных областей.

Shul'ga M.O., Trobiuk O.M.

FORMATION OF EQUATIONS SOLUTIONS OF TYMOSHENKO TYPE IN THE HAMILTONIAN FORM OF HARMONIC VIBRATIONS OF PERIODICALLY HETEROGENEOUS PLATES

It was formed the solution of the equations of Timoshenko type of harmonic vibrations of periodically heterogeneous plates, that was presented in the Hamiltonian form of the spatial coordinate. Based on Lyapunov-Poincare theorem the properties of the characteristic equation and the structure of the general solution for the unlimited and semi limited areas were established.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук,
О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук,
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДО АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ

В статті представлені результати чисельних досліджень режимів коливального руху сильно нелінійної двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності під дією періодичного зовнішнього навантаження, що були отримані методом продовження розв'язку за параметром. Побудовані амплітудно-частотні характеристики, виявлені зони стійкості та нестійкості Т-періодичного руху, приведені графічні характеристики отриманих коливальних режимів, зокрема перерізи Пуанкаре, проаналізована динамічна поведінка системи в широкому діапазоні частот та в точках біфуркації.

Вступ. Диференціальні рівняння руху сильно нелінійної віброударної системи, що розглядається в цій статті, представлені в вигляді (1), який містить параметр. Це ϵ , зокрема, параметр інтенсивності зовнішнього навантаження λ чи його частота ω . Питання про змінювання розв'язку при змінюванні параметра ϵ дуже істотним. Тому застосування методу продовження розв'язку за параметром достатньо природно в цьому випадку.

Метод продовження розв'язку за параметром, що застосовується в цій роботі задля дослідження режимів коливального руху віброударної системи, відомий здавна. Ідея застосування продовження за параметром для дослідження розв'язків нелінійних рівнянь бере свій початок в роботах У.Левер'є (1886) та А.Пуанкаре (1892). Вперше для чисельного розв'язку рівнянь метод продовження був застосований М.Лаеєм (1934). Серед сучасних слід відмітити фундаментальні роботи Е.І.Григолоюка, В.И.Шалашиліна та Є.Б.Кузнецова [1,2], які внесли вагомий внесок в розвиток методу, а також прекрасний огляд Е.Л.Алговер та К.Георг [3].

Ідея методу продовження полягає в побудові розв'язку $x_n(\lambda_n)$, виходячи з відомого розв'язку $x_0(\lambda_0)$ та рухаючись вздовж кривої розв'язків K і використовуючи на кожному кроці інформацію про розв'язок, отриманий на попередньому кроці. Чисельна реалізація продовження розв'язку, як правило, виконувалась в вигляді деякого крокового процесу за параметром. При цьому реалізація крокових процесів за параметром можлива з використанням різних ітераційних

процесів. Із літератури відома велика різноманітність таких процесів. Часто вони представляються і розуміються незалежно від загальної схеми продовження розв'язку за параметром.

В НДІ будівельної механіки рядом авторів був запропонований і розвинутий новий метод побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем, якій в поєднанні з методикою продовження розв'язку за параметром дозволяє розв'язувати широке коло задач для різного типу нелінійних систем [4].

Цю методику вдалося застосувати для дослідження динаміки віброударних систем при різних способах моделювання удару – спочатку при моделюванні удару граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення [4-7], а потім силовими характеристиками контактної взаємодії [8-10].

Ця стаття є продовженням і розвитком робіт [8-10], в яких досліджувалась динаміка віброударної системи продовженням розв'язку за параметром інтенсивності зовнішнього навантаження. Вона також є прямим продовженням статті [11], де викладена уся необхідна теорія для виконання аналізу коливального руху віброударної системи методом продовження розв'язку за параметром частоти зовнішнього навантаження, якщо удар моделюється силовою характеристикою контактної взаємодії. В [11] викладена теорія, яка забезпечує побудову амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) та проведення аналізу стійкості отриманих режимів коливань.

В цій роботі проведений докладний аналіз динамічного стану двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності в широкому діапазоні частот зовнішнього навантаження, виявлені зони її стійкого та нестійкого T -періодичного коливального руху, визначені ті коливальні режими, які в дійсності реалізуються в діапазонах частот, де T -періодичний режим є нестійким, відмічені точки бифуркації, зокрема, точки розривної бифуркації. Побудовані перерізи Пуанкаре задля перевірки регулярності чи хаотичності динамічних станів системи. Наочно продемонстрований кардинальний вплив вихідних умов на встановлення динамічного стану сильно нелінійної віброударної системи.

Питання про особливі точки не розглядається в статті і є предметом подальшої роботи.

Постановка задачі. Двохмасова віброударна система з двома ступнями вільності, поведінка якої досліджується у статті, зображена на рис. 1.

Досить докладно побудова математичної моделі цієї віброударної системи була описана в роботах [8-11].

Загальна постановка задачі статті збігається з постановкою, що приведена в [11], тому не будемо її детально повторювати. Приведемо лише диференціальні рівняння руху моделі та числові характеристики її параметрів (див. табл. 1).

Диференціальні рівняння руху моделі мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 = -2\xi_1 \omega_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2 (x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1} F_{\text{кон}}(t),$$

$$\ddot{x}_2 = -2\xi_2 \omega_2 \dot{x}_2 - \omega_2^2 x_2 - 2\xi_1 \omega_1 \chi (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2 \chi (x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2} [F(t) - F_{\text{кон}}(t)], \quad (1)$$

де $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi = \frac{m_2}{m_1}$.

На систему діє зовнішнє гармонічне навантаження $F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Сила контактної взаємодії $F_{\text{кон}}(t)$ описується контактним законом Герца.

Вихідні умови задачі такі:

$$x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \quad (2)$$

Таблиця 1

Назва характеристики	Основне тіло	Приєднане тіло
Маса m_i , кг	1000,0	100,0
Парціальна частота коливань ω_i , рад/с	6,283	5,646
Коефіцієнт демпфірування ξ_i	0,036	0,036
Модуль Юнга E_i Н/м ²	$2,099 \cdot 10^{11}$	$2,099 \cdot 10^{11}$
Коефіцієнт Пуассона μ_i	0,3	0,3
Вихідна відстань між тілами D , м	0,05	
Константи A, B , 1/м, q	A=0,5 B=0,5 q=0,319	
Амплітуда навантаження F_0 , Н	500,0	
Параметр інтенсивності навантаження λ	1	
Початкова фаза навантаження φ_0 , рад	0,0	

2. Аналіз амплітудно-частотної характеристики із визначенням ділянок нестійкості. В роботі [11], згідно з теоретичними положеннями та методикою продовження розв'язку за параметром, були побудовані

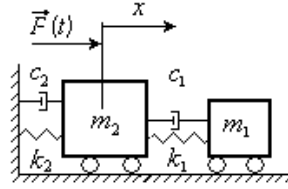


Рис. 1

АЧХ основного (з масою m_2) та приєднаного (з масою m_1) тіл віброударної системи в широкому діапазоні значень частоти зовнішнього навантаження (рис. 2). Аналіз стійкості рухів динамічної системи був проведений за допомогою теорії Флоке та аналізу значень мультиплікаторів. Були визначені ділянки стійкості та нестійкості.

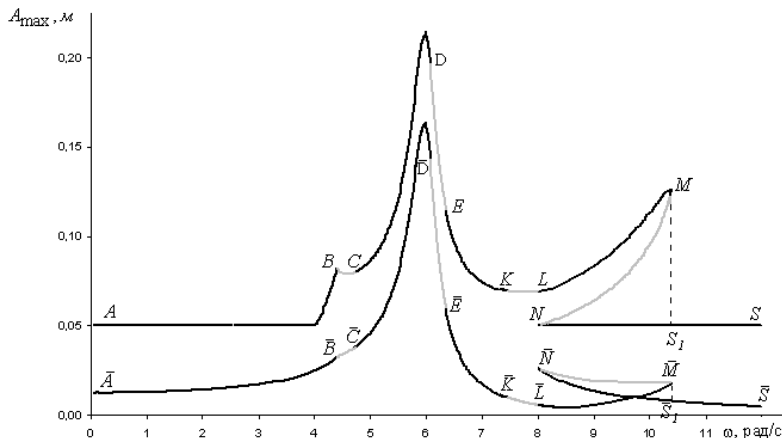


Рис. 2

На графіках рис. 2 чорним кольором позначені ділянки АЧХ, що відповідають стійким T -періодичним динамічним станам отриманого коливального руху віброударної системи під дією періодичного зовнішнього навантаження, сірим кольором—нестійким станам. В цих діапазонах частот T -періодичний режим стає нестійким і в дійсності не реалізується. По осі абсцис відкладені значення частоти зовнішнього навантаження, по осі ординат - напіврозмахи коливань тіл $A_{\max} = (|x_{\min}| + |x_{\max}|) / 2$. Верхня крива відноситься до приєднаного тіла, нижня – до основного.

Проведемо аналіз еволюції поведінки віброударної системи (1) в різних діапазонах частот зовнішнього навантаження, тобто на різних ділянках кривої АЧХ, що відповідають як стійким так і нестійким динамічним станам.

1-ий діапазон частот $0,01 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 4,39 \text{ рад/с}$, ділянки кривої $\bar{A}-\bar{B}$ для основного тіла, $A-B$ для приєднаного.

У цьому діапазоні частот T -періодичний коливальний рух віброударної системи є стійким, при цьому реалізується безударний режим коливань. На рис. 3 приведені залежності переміщень основного та приєднаного тіл вібросистеми від часу при значенні частоти

навантаження $\omega=4,0 \text{ рад/с}$. Цей закон руху тут і далі отриманий прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху системи (1) методом Рунге-Кутта 4-го порядку. Слід відмітити, що інтегрування всюди виконується зі змінним кроком: під час удару крок інтегрування значно менший. Товстою лінією на рисунках зображені криві, що відносяться до основного тіла, тонкою – до приєднаного. Побудовані фазові траєкторії тіл системи та відповідний переріз Пуанкаре, який має вигляд однієї окремої точки на фазовій площині, свідчать про одноперіодичність руху.

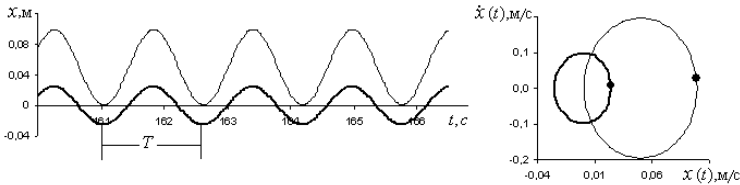


Рис. 3

Точка $\bar{B}(B)$ амплітудно-частотної характеристики є точкою біфуркації. В ній режим коливань системи втрачає стійкість. В цій точці відбувається перехід T -періодичного безударного режиму коливань в $3T$ -періодичний одноударний. Висновок про втрату стійкості T -періодичного режиму робиться за значеннями мультиплікаторів: режим втрачає стійкість, якщо хоча б один з мультиплікаторів виходить за одиничне коло [4]. В точці $\bar{B}(B)$ модулі двох мультиплікаторів виходять за одиничне коло. Але тому, що віброударна система знаходиться в процесі переходу від безударного режиму до руху з періодичними ударами, мультиплікатори змінюються стрибком і приймають дуже великі значення. Точка $\bar{B}(B)$ є точкою розривної біфуркації [12]. В роботі [12] автор називає розривною біфуркацією якісні зміни фазового портрета, які супутні розривам хоча б одного з мультиплікаторів. В таблиці 2 приведений модуль мультиплікатора з максимальним значенням в околиці точки $\bar{B}(B)$.

Таблиця 2

ω , рад/с	Максимальне значення модуль мультиплікаторів	Кількість ударів на періоді T
4,400	0,7966	0
4,401	0,7965	0
4,402	0,7966	0
4,403	0,7967	0
4,404	0,7966	0
4,405	4,3065	1
4,406	31,0890	1
4,407	18,5230	1
4,408	24,0050	1
4,409	10,5770	1
4,410	5,8963	1
4,411	10,1980	1
4,412	5,3382	1
4,413	4,8419	1
4,414	4,6143	1

2-ий діапазон $4,40 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 4,75 \text{ рад/с}$, ділянки кривих $\bar{B}-\bar{C}$, $B-C$.

Ділянки кривих відповідають нестійким динамічним станам віброударної системи. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху (1) показує, що в цьому невеликому діапазоні частот існують декілька типів коливальних рухів. Наприклад, при $\omega=4,4 \text{ рад/с}$ реалізується $3T$ -періодичний одноударний режим коливаний (рис. 4), при $\omega=4,5 \text{ рад/с}$ – $4T$ -періодичний двоударний (рис. 5). На цих рисунках зображені процеси коливаний основного та приєднаного тіл, графік сили контактної взаємодії в залежності від часу, фазові траєкторії приєданого та основного тіл та перерізи Пуанкаре. У випадку $3T$ -періодичного режиму коливаний переріз Пуанкаре має вигляд трьох окремих точок, $4T$ -періодичного стану – чотирьох.

При $\omega=4,75 \text{ рад/с}$ режим коливаний віброударної системи стає більш складним (рис. 6). Вигляд коливаний характерний для квазіперіодичних рухів. Представлені фазові траєкторії коливаний

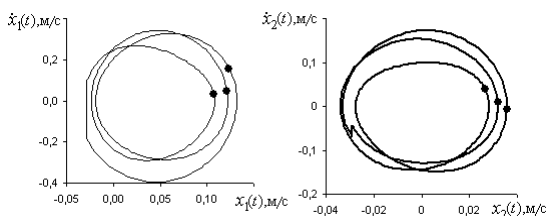
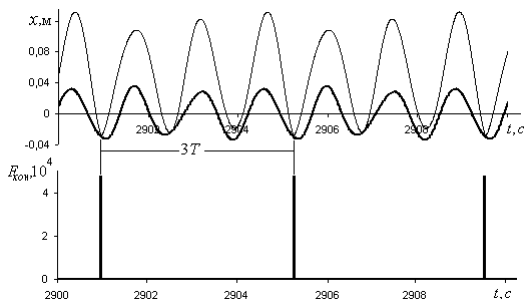


Рис. 4

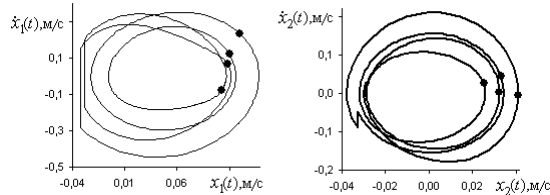
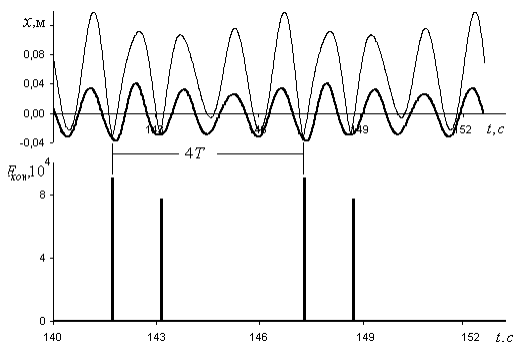


Рис. 5

системи, які мають вигляд тора, не змінюються при збільшенні числа періодів, що використовуються задля побудови фазового портрета. Відповідні перерізи Пуанкаре являють собою замкнені криві. Вони зображені маркерами як на тлі фазових траєкторій, так і для наочності на окремих рисунках. Замкнутість кривих перерізів Пуанкаре свідчить про квазіперіодичний характер коливань.

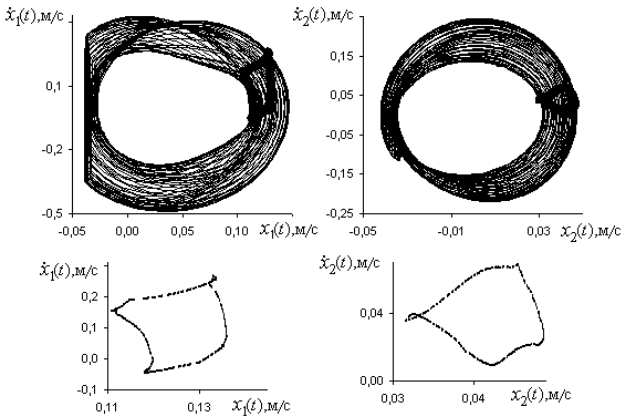


Рис. 6

Звернемо увагу на точку біфуркації \bar{C} (C). В цій точці нестійкий T -періодичний режим стає стійким. У зв'язку з тим, що в цій точці немає переходу від безударного режиму до режиму з періодичними ударами, мультиплікатори змінюються плавно. В таблиці 3 приведені значення мультиплікаторів в околиці точки \bar{C} (C).

Таблиця 3

ω , <i>rad/c</i>	Максимальне значення модулів мультиплікаторів	Кількість ударів на періоді T
4,748	1,0038	1
4,749	1,0030	1
4,750	0,9994	1
4,751	0,9992	1

3-ій діапазон $4,76 \text{ rad/c} \leq \omega \leq 6,07 \text{ rad/c}$, ділянки кривих $\bar{C} - \bar{D}$, $C - D$.

У цьому діапазоні частот T -періодичний коливальний рух віброударної системи стійкий, реалізується основний T -періодичний одноударний режим коливань. На рис. 7 приведені залежності переміщень основного та приєднаного тіл від часу та їхні фазові траєкторії при значенні частоти навантаження $\omega = 5,5 \text{ rad/c}$.

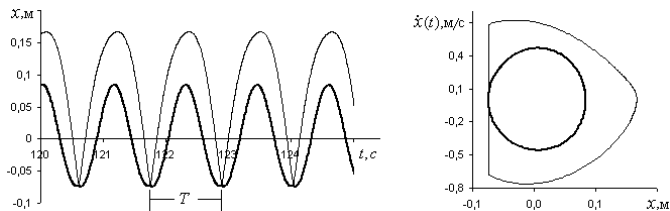


Рис. 7

4-ий діапазон $6,08 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 6,36 \text{ рад/с}$, ділянки кривих $\bar{D}-\bar{E}$, $D-E$.

В точці \bar{D} (D) T -періодичний коливальний режим втрачає стійкість. І знову на цій ділянці частот прямим чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь руху (1) отримуємо різні режими коливань. Так, наприклад, при $\omega=6,1 \text{ рад/с}$ спостерігаємо хаотичні коливання (рис. 8).

Закони руху тіл віброударної системи $x_1(t), x_2(t)$ та графік зміни сили контактної взаємодії $F_{\text{кон}}(t)$ мають явно випадковий характер. Переріз Пуанкаре має характерний вигляд для хаотичного руху і являє собою безладне розташування фазової точки, тобто вона не розміщується на якомусь простому геометричному об'єкті, як у випадках періодичних та квазіперіодичних коливань.

При більших частотах навантаження отримуємо інші режими коливань. Наприклад, при $\omega=6,30 \text{ рад/с}$

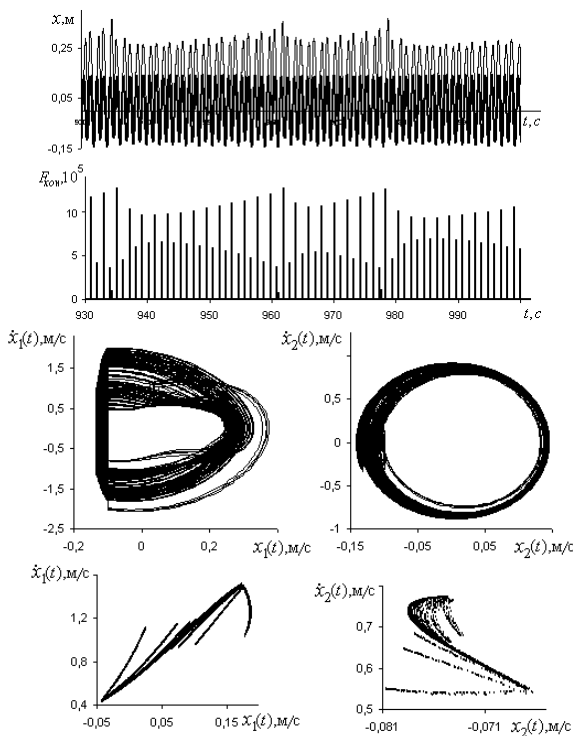


Рис. 8

реалізується $4T$ -періодичний шестиударний рух системи (рис. 9), а при $\omega=6,34 \text{ рад/с}$ – $2T$ -періодичний двоударний режим коливальний режим (рис. 10). Вигляд графіків контактної сили та перерізів Пуанкаре наочно демонструють nT -періодичність та k -ударність в (n,k) -режимі коливальний. Тут і далі у назві режиму коливальний n позначає кратність періоду коливальний віброударної системи періоду зовнішнього навантаження, k – кількість ударів за один цикл [13].

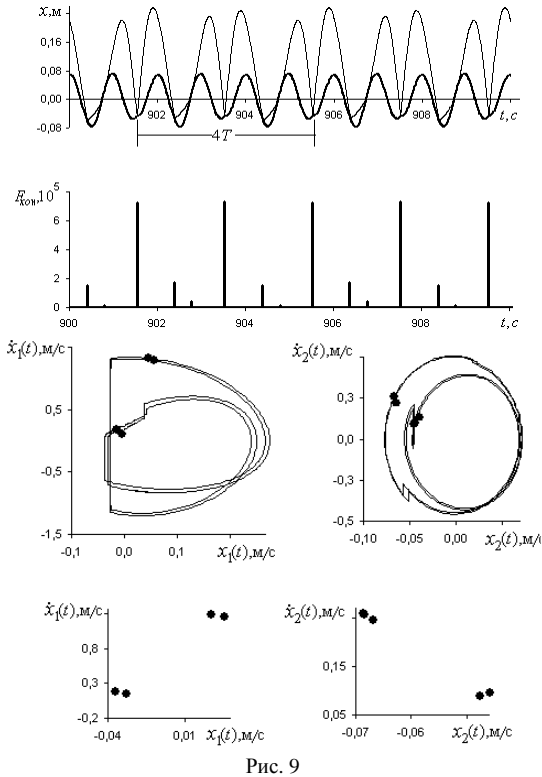


Рис. 9

5-ий діапазон
 $6,37 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 7,45 \text{ рад/с}$,
 ділянки кривих
 $\bar{E} - \bar{K}$, $E - K$.

В точці \bar{E} (E)
 коливальний процес
 знову стає стійким T -
 періодичним та одноударним. Цей режим коливальний зберігається для
 всього діапазону частот. На рис. 11 приведені залежності переміщень
 основного та приєднаного тіл від часу та їхні фазові траєкторії при
 значенні $\omega=7,23 \text{ рад/с}$. На фазових портретах маркерами позначені
 перерізи Пуанкаре.

6-ий діапазон $7,46 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 7,99 \text{ рад/с}$, ділянки кривих $\bar{K} - \bar{L}$, $K - L$.

Режими коливальний в області нестійкості T -періодичного режиму мають
 складний характер, характеризуються великою періодичністю та
 наявністю великої кількості ударів за цикл. На рис. 12 для прикладу
 приведені основні характеристики $14T$ -періодичного десятиударного руху
 тіл системи при значенні $\omega=7,7 \text{ рад/с}$. Відповідні перерізи Пуанкаре
 являють собою чотирнадцять окремих точок. Вони зображені маркерами
 як на тлі фазових траєкторій, так і для наочності на окремих рисунках.

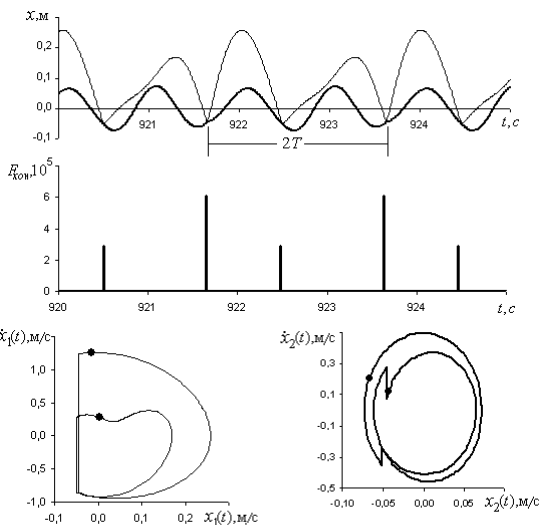


Рис. 10

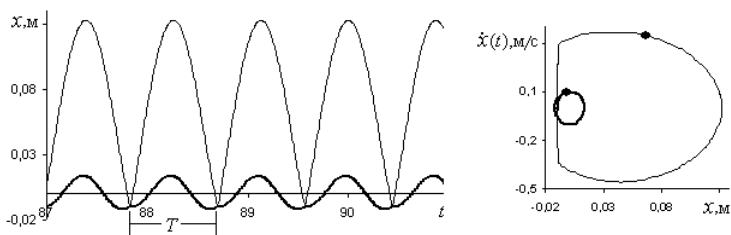


Рис. 11

7-ий діапазон $\text{rad/c} \leq \omega \leq 10,39 \text{ rad/c}$, ділянки кривих $\bar{L} - \bar{M}$, $L - M$; $\bar{M} - \bar{N}$, $M - N$; $\bar{N} - \bar{S}_1$, $(N - S_1)$.

У цьому діапазоні спостерігаємо найцікавіше явище: на графіку АЧХ бачимо, що тут одночасно побудовані три різні гілки кожної кривої. Дві гілки відповідають стійким режимам, а третя гілка – нестійкому стану віброударної системи.

Відомо, що динамічний стан сильно нелінійних систем надзвичайно залежить від їхнього вихідного стану. Наявність трьох різних режимів коливань у цьому діапазоні частот наглядно демонструє це явище.

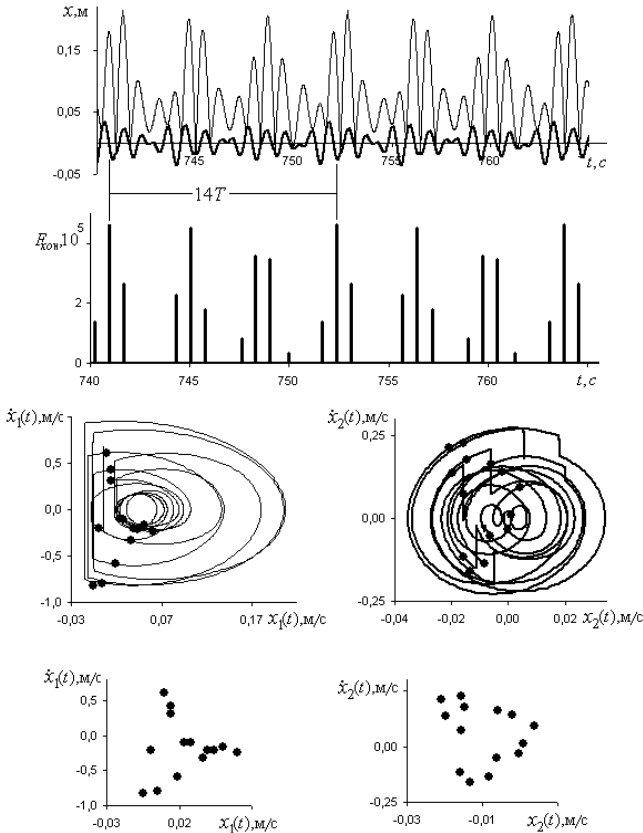


Рис. 12

Ці режими побудовані таким чином. Коли ми рухаємось вздовж кривої $\bar{D}-\bar{E}-\bar{K}-\bar{L}-\bar{M}$ ($D-E-K-L-M$) (рис. 2) крок за кроком додаючи до ведучого параметра частоти зовнішнього навантаження ω приріст $\Delta\omega_{(k)}$, ми отримуємо гілку $\bar{L}-\bar{M}$ ($L-M$) стійкого T -періодичного коливального руху. В точці \bar{M} (M) нев'язка стає дуже великою, щоб пройти цю точку, необхідно змінювати ведучий параметр. Але є інша можливість отримання розв'язків: якщо за початковий стан обрати стан системи в точці \bar{M} (M) та приріст ведучого параметру $\Delta\omega_{(k)}$ зробити від'ємним, то, рухаючись крок за кроком вздовж кривої розв'язку, одержимо гілку $\bar{M}-\bar{N}$ ($M-N$) нестійкого руху. В точці \bar{N} (N)

нев'язка знов стає великою і без заміни ведучого параметра подальший рух вздовж кривої розв'язку неможливий. Візьмемо тоді за початковий стан системи при значенні $\omega=12,0 \text{ rad/c}$, якому відповідає точка \bar{S} (S), і надаючи приросту ведучого параметру $\Delta\omega_{(k)}$ від'ємні значення, крок за кроком отримуємо гілку $\bar{S} - \bar{N}$ ($S - N$) кривої розв'язків – гілку стійкого T -періодичного коливального руху.

Подивимось тепер, що являють собою стійкі T -періодичні режими коливань на цій ділянці. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху (1) методом Рунге-Кутта 4-го порядку з вихідним умовами (2) дає T -періодичний безударний режим коливань, приклад якого при $\omega=9,0 \text{ rad/c}$ зображений на рис. 13. Цей режим відповідає гілці $\bar{S} - \bar{N}$ ($S - N$) кривої розв'язків. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху (1) методом Рунге-Кутта 4-го порядку з вихідним умовами, що відповідають точці на гілці $\bar{L} - \bar{M}$ ($L - M$), дає T -періодичний одноударний режим коливань, приклад якого при $\omega=9,0 \text{ rad/c}$ зображений на рис. 14. Цей режим відповідає гілці $\bar{L} - \bar{M}$ ($L - M$) кривої розв'язків.

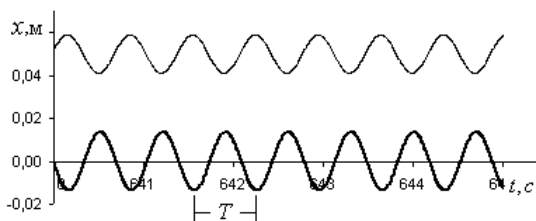


Рис. 13

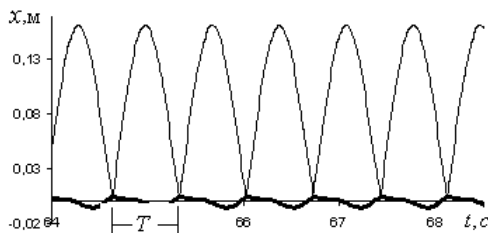


Рис. 14

Отже бачимо, що у віброударній системі можуть реалізовуватись різні стійкі T -періодичні коливальні стани – одноударний і безударний – і який з них реалізується в дійсності залежить від вихідних умов, тобто від того стану, в якому знаходилася віброударна систем перед тим, як вона

продовжила коливатися при незначній зміні частоти зовнішнього навантаження.

В точці $\bar{N}(N)$ віброударна система змінює безударний режим на режим з періодичними ударами, і мультиплікатори змінюються стрибкоподібно (таблиця 4), точка $\bar{N}(N)$ є точкою розривної біфуркації [12].

8-ий діапазон, $10,39 \text{ рад/с} < \omega$.

При великих частотах реалізується стійкий T -періодичний безударний коливальний рух віброударної системи, такий, як на рис.13.

Отримані результати зібрані в таблицю 5.

Таблиця 4

ω , <i>рад/с</i>	Максимальне значення модулів мультиплікаторів	Кількість ударів на періоді T
8,15	21,7080	1
8,14	23,2350	1
8,13	25,6330	1
8,12	29,0000	1
8,11	33,6080	1
8,10	37,3660	1
8,09	43,9670	1
8,08	55,1490	1
8,07	65,9350	1
8,06	90,1470	1
8,05	151,4100	1
8,04	0,8829	0
8,03	0,8828	0

Таблиця 5

№ діапазону	Ділянка АЧХ	Діапазон частот ω , <i>рад/с</i>	Режим коливань (n, k)
1	$\bar{A} - \bar{B}$, $A - B$	0,01 – 4,39	(1,0)
2	$\bar{B} - \bar{C}$, $B - C$	4,40 – 4,75	(3,1); (4,2); квазіперіодичний.
3	$\bar{C} - \bar{D}$, $C - D$	4,76 – 6,07	(1,1)
4	$\bar{D} - \bar{E}$, $D - E$	6,08 – 6,36	хаотичний; (4,6); (2,2)
5	$\bar{D} - \bar{E}$, $D - E$	6,37 – 7,45	(1,1)
6	$\bar{K} - \bar{L}$, $K - L$	7,46 – 7,99	Багатоперіодичні багатоударні; (14,10)
7	$\bar{L} - \bar{M}$, $L - M$	8,00 – 10,39	(1,1)
	$\bar{M} - \bar{N}$, $M - N$		–
	$\bar{N} - \bar{S}_1$, $N - S_1$		(1,0)
8	$\bar{S}_1 - \bar{S}$, $S_1 - S$	більше 10,39	(1,0)

Висновки

Методика продовження розв'язку за ведучим параметром в поєднанні з лінеаризацією алгебраїчної системи для визначення головних невідомих (приростів вихідних значень розв'язків), з використанням інтегрування задач Коші для визначення базових коефіцієнтів алгебраїчної системи, а

також з моделюванням удару контактною силою, яка описується за законом Герца, та з використанням теореми Флоке дає досліднику потужний інструмент для аналізу динамічної поведінки віброударної системи. Розроблені алгоритми забезпечують побудову залежності амплітуд тіл сильно нелінійної двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності від обраного ведучого параметра, зокрема, інтенсивності зовнішнього навантаження [8-10] та його частоти. Аналіз стійкості отриманих режимів коливального руху дозволяє одержати зони нестійких рухів, тобто такі зони, де T -періодичний коливальний рух в дійсності не реалізується. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху методом Рунге-Кутта 4 порядку підтверджує, що в зонах нестійкого руху в дійсності реалізуються nT -періодичні чи неперіодичні режими коливальності. Проте, в діапазонах частот з нестійким T -періодичним рухом необхідно виконувати додаткове дослідження задля того, щоб з'ясувати, які саме коливальні режими реалізуються у таких діапазонах частот, зокрема будувати перерізи Пуанкаре, що і виконано в роботі. Необхідно також мати на увазі, що динамічний стан, якій встановлюється в сильно нелінійній віброударній системі при однаковому зовнішньому навантаженні, кардинально залежить від вихідних умов, що наочно продемонстровано в роботі.

Особливої уваги потребують точки біфуркації. Часто в таких точках продовження розв'язку стає неможливим тому, що швидко зростає нев'язка. Тоді для продовження розв'язку необхідно змінювати ведучий параметр. Питання про найкращу параметризацію в цієї статті не розглядається і є предметом подальшої роботи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988.
2. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Allgower E.L., Georg K. Introduction to numerical continuation methods. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1990.
4. Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П. Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах // Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
5. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Стійкість сталих режимів коливальності віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10–18.
6. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливальності віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА, вип. 70. 2002. - С. 69– 81.

7. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- С.31–44.
8. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2011.-Вип. 87. — К.: КНУБА, 2011.- С. 63–73.
9. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Реалізація методу продовження за параметром для віброударних систем при побудові кривих навантаження// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2011.-Вип. 88. — К.: КНУБА, 2011.- С.56–64.
10. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Модифікація методу продовження рішення по параметру для аналізу динаміки віброударних систем //Пробл. Прочности. - 2012. (Прийнята до друку).
11. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Теоретичні основи аналізу динамічної поведінки віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2012.-Вип. 89. — К.: КНУБА, 2012.(Прийнята до друку).
12. Иванов А.П. Исследование разрывных бифуркаций в негладких динамических системах//Нелинейная динамика, 2012, 8 (2), С. 231– 247.
13. Lamarque C. H., Janin O. Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal// Journal of Sound and Vibration. - 2000. № 235(4). – P. 567– 609.

Стаття надійшла до редакції 07.11.2012 р.

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

В статье представлены результаты численных исследований режимов колебательного движения сильно нелинейной двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы под действием периодического внешнего воздействия, которые были получены методом продолжения решения по параметру. Построены амплитудно-частотные характеристики, определены зоны устойчивости и неустойчивости T -периодического движения, приведены графические характеристики полученных колебательных режимов, в частности, сечения Пуанкаре, проанализировано динамическое поведение системы в широком диапазоне частот и в точках бифуркации.

Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.

PARAMETER CONTINUATION METHOD USING FOR ANALYSIS OF VIBROIMPACT SYSTEM DYNAMIC BEHAVIOUR

Results of oscillatory movement numerical investigations are presented in this article. The authors examine the behaviour of nonlinear two-mass vibroimpact system with two degrees of freedom under periodical loading. The investigations are fulfilled by parameter continuation method. The Frequency responses are constructed, the steady and non-steady zones of T -periodic movement are determined. The graphic characteristics of received oscillatory regimes are given. In particular the Poincare cross-sections are given too. The system dynamic behaviour in wide frequency diapason and at bifurcations points is analysed.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук
Н.А. Гречух
О.О. Яковенко

КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З ПРИЄДНАНИМИ МАСАМИ

Запропонована методика побудови скінченноелементних моделей з урахуванням нерегулярностей типу 'приєднана маса' в задачах про власні коливання континуальних конструкцій. Регулярність сіткової області моделі забезпечується шляхом введення особливих СЕ, яким надається статус 'включення'. Обчислені значення частот власних коливань пластини з приєднаними масами порівнювались з тими, що отримані аналітичними методами.

На несучих поверхнях оболонок, що відчувають на собі вібраційні впливи можуть бути приєднані тверді тіла (пристрої, механізми, елементи автоматики), неметалічні матеріали (армовані пластики, ситали, технічне скло), що мають специфічні фізико-механічні властивості суттєво впливають на власні коливання і обумовлюють складнощі при розрахунку вказаних механічних систем. Визначення динамічних характеристик таких конструкцій, які суттєво залежать від жорсткісних і інерційних неоднорідностей представляє собою практичний інтерес і вимагає розробки надійних методів визначення ускладненого спектра власних частот.

Колівання циліндричних оболонок з приєднаними масами досліджував В.С. Бреславський [1,2]. В.Г. Паламарчук розглядав замкнуту кругову циліндричну оболонку регулярно підкріплену стрингерами і шпангоутами що має всередині себе абсолютно тверде тіло, шарнірно прикріплене вздовж твірної. Оболонка шарнірно оперта на два ряди проміжних опор, розмішених вздовж твірних. Система симетрична відносно поздовжньої діаметральної площини. Робота [4] присвячена створенню математичної моделі взаємодії циліндричної оболонки і абсолютно жорсткого тіла, що приєднано до одного з її кінців. Альбо-Рао [5] досліджував коливання вільно опертої прямокутної пластини до якої приєднана зосереджена маса. Власні коливання підкріплених ребрами оболонок з приєднаними масами розглянуто в роботі [6]. Також досліджено випадки жорсткого і пружного приєднання маси, вплив розміру площинки контакту маси і оболонки, з'єднання твердого тіла і оболонки за допомогою двох пружин, а також шарнірне приєднання

твердого тіла до оболонки у ряді точок. У роботі [7] досліджено особливості впливу підкріплюючих ребер і приєднаних твердих тіл на частоти та форми вільних коливань тонких пружних оболонок обертання. Задача реалізується в лінійній постановці методом Рітца з урахуванням дискретного розміщення ребер.

Використання аналітичних методів для розв'язання задач динаміки пластинчато-оболонкових конструкцій з інерційною неоднорідністю вимагає високої математичної культури, так як доводиться враховувати усі особливості в розв'язувальних рівняннях.

Проведення багатоваріантних розрахунків задач динаміки тонкостінних конструкцій на сьогодні в більшості випадків виконується за методом скінченних елементів (МСЕ) в середовищі сертифікованих програмних комплексів.

В той же час, стосовно до задач динаміки тонкостінних конструкцій зі складним розподілом матеріалу питання аналізу скінченноелементних схем в сучасній науковій літературі ще не досить повно висвітлені. А тому застосування скінченноелементних моделей для визначення динамічних характеристик тонкостінних конструкцій з особливостями вимагає ретельної перевірки запропонованих моделей і порівняння наближених результатів з отриманими аналітичним методами або експериментально.

Нами запропонована методика побудови співвідношень МСЕ в переміщеннях на основі положень тривимірної теорії пружності при одношаровій апроксимації скінченням елементом по товщині оболонки.

Нерегулярності типу приєднаних мас усуваються за допомогою введення особливих скінченних елементів, в межах яких не змінюється жорсткість конструкції, а змінюється тільки її інерційні властивості.

Нанесення сітки скінченних елементів виконується таким чином, щоб лінії сітки охоплювали ділянку з приєднаною масою. цій ділянці надається статус "включення", а вузлам сітки на границях області призначається спеціальний код. Таким чином забезпечується регулярність сіткової області і спрощується процедура побудови матриць жорсткості та інерції. для області включення задається відповідна щільність матеріалу при збереженні інших його характеристик.

Для аналізу динамічної поведінки континуального об'єкта вихідним є рівняння руху його дискретної скінченноелементної моделі

$$[K]\{\ddot{u}\}-\omega^2[M]\{u\}=0. \quad (1)$$

Розв'язком рівняння буде гармонічна функція $\{u\}=\{u_0\}\text{Sin}(\omega t)$, що приводить рівняння до узагальненої проблеми про власні значення

$$\left([K]\{\ddot{u}\}-\omega^2[M]\right)\{u\}=0. \quad (2)$$

Процедура розв'язання задачі виконується методом ітерацій в підпросторі, на кожному кроці якого виконуються такі дії:

1) задаються наближені значення власних векторів, кількість яких визначає розмір підпростору. Число компонент кожного вектора відповідає числу ступенів вільності дискретної моделі. З цих векторів формується модальна матриця $[\Phi]$;

2) обчислюється нове наближення модальних векторів $[K][\Phi]_{i+1}=[K][\Phi]_i$;

3) виконується ортогоналізація власних векторів за алгоритмом обертання Якобі. Одночасно визначаються власті числа.

Процес ітерацій по п.п.2-3 продовжується до тих пір, поки значення власних чисел i -го та $(i+1)$ -го кроків не співпадуть з заздалегідь заданою точністю.

Для отримання необхідної кількості власних чисел (колових частот власних коливань) виконується збільшення розміру модальної матриці на 20% в порівнянні з тією, що треба визначити.

Запропонований алгоритм випробований на тестових задачах, для яких існують аналітичні розв'язки. В роботі [8] наведені результати розв'язку задачі про визначення динамічних характеристик сталевієї пластини ($E=2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\rho=7.85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\nu=0.3$) з приєднаною масою (включення чужорідного матеріалу) при різних граничних умовах: 1) жорстко защемлена по контуру; 2) два суміжних країв жорстко защемлені а два інші шарнірно оперті; 3) жорстко защемлена по трьом сторонам. Розміри пластини в плані $0.6 \times 0.6 \times 0.001 \text{ м}$.

Розв'язок цієї ж задачі з використанням запропонованої нами методики виконано для сітки 32×32 скінченних елемента. Розмірність підпростору, в межах якого реалізовувався процес одночасних ітерацій, дорівнював десяти.

Розглянуто вплив розташування приєднаної маси на власні коливання пластини. Маса тіла $M_1=0.1M_0$, де M_0 маса пластини. Площа ділянки, де розташована приєднана маса складає $1/250$ загальної площі пластини.

В результаті розрахунку отримані форми коливань пластини без маси (рис. 1, рис. 4, рис. 7), при розміщенні маси на чверті діагоналі (рис. 2, рис. 5, рис. 8) та на половині діагоналі пластини (рис. 3, рис. 6, рис. 9) при різних граничних умовах пластини.

Результаті розв'язку задачі у вигляді залежності $\lambda=\lambda_i(z)$ $\lambda_i=\omega^2/\omega_0^2$, де ω_0 - частота коливань пластини без додаткової маси) представлені на графіку (рис. 10).

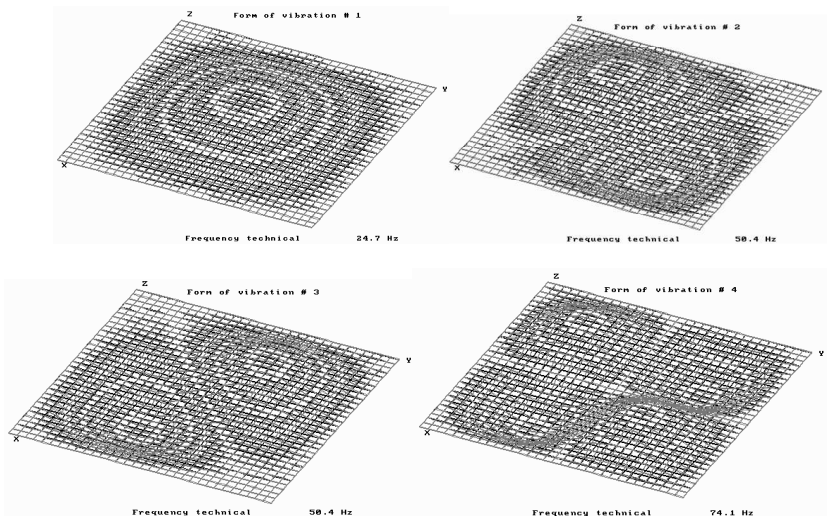


Рис. 1. Форми коливань пластини жорстко зашцевленої по контуру без приділеної маси

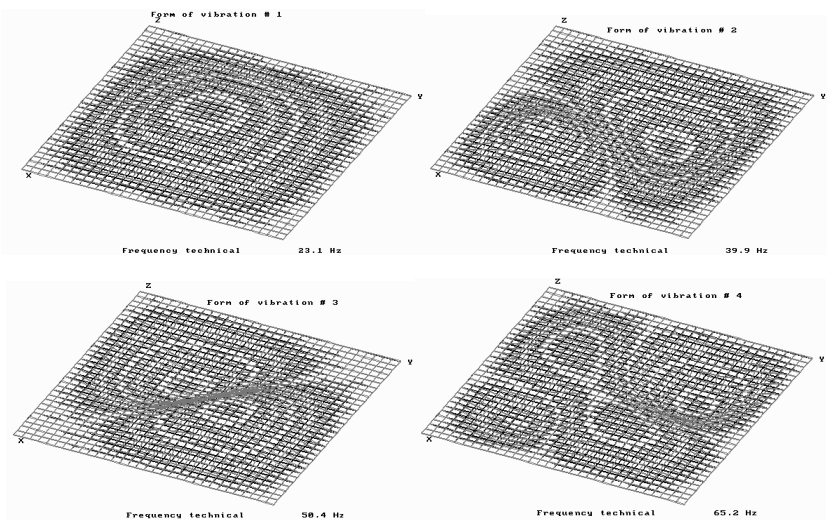


Рис. 2. Форми коливань пластини жорстко зашцевленої по контуру з приділеною масою розміщеною на чверті діагоналі

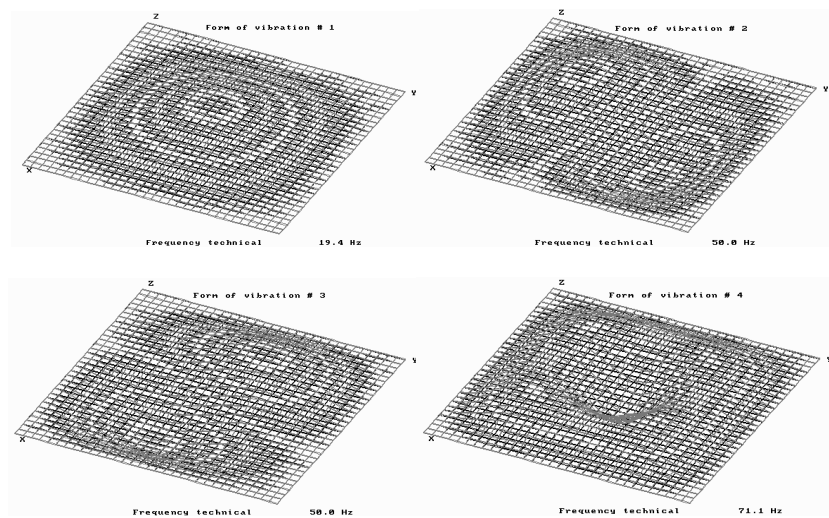


Рис. 3. Форми коливань пластини жорстко защемленої по контуру з приєднаною масою розміщеною по середині діагоналі

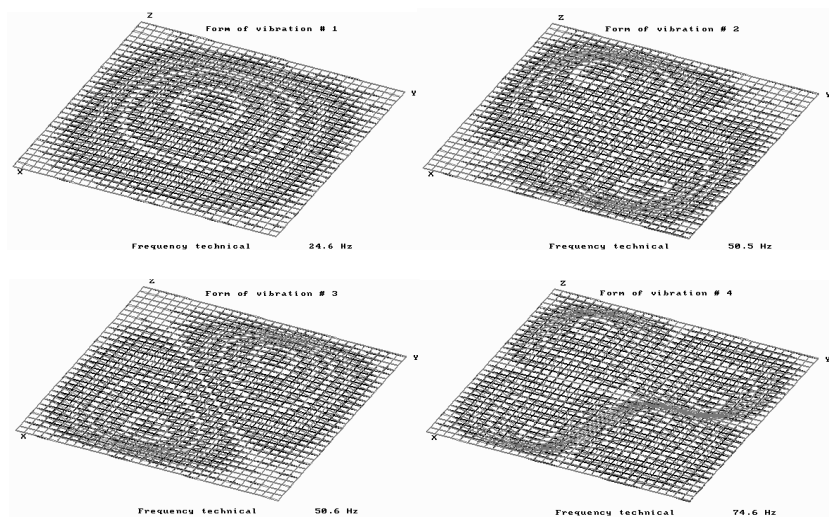


Рис. 4. Форми коливань пластини (без приєднаної маси), у якій два суміжних краї жорстко защемлені, а два інші шарнірно оперті

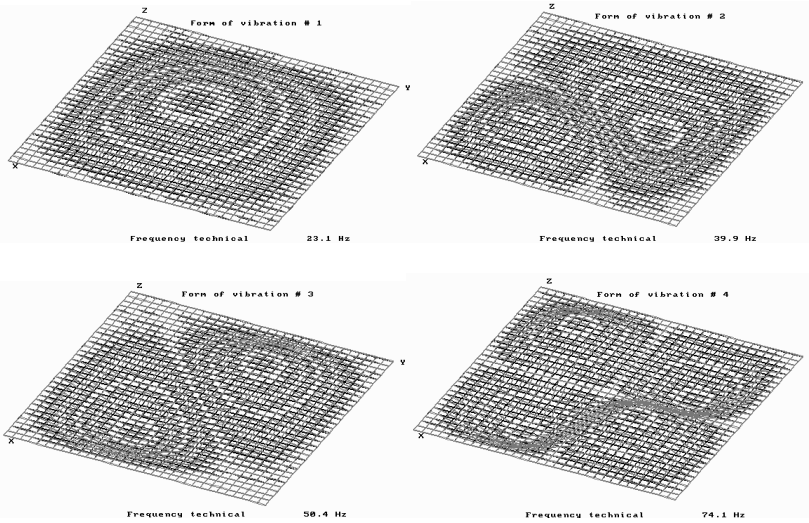


Рис. 5. Форми коливань пластини (з приєднаною масою, розміщеною на чверті діагоналі), у якій два суміжних краї жорстко защемлені, а два інші шарнірно оперті

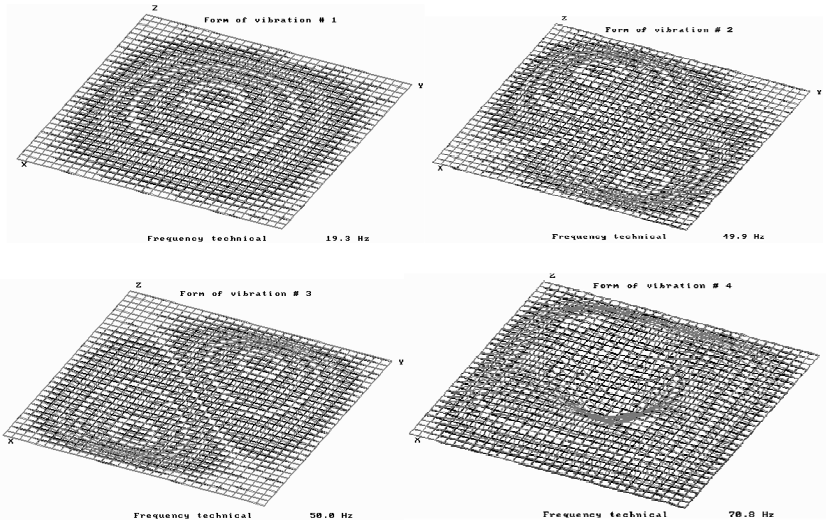


Рис. 6. Форми коливань пластини (з приєднаною масою, розміщеною посередині діагоналі), у якій два суміжних краї жорстко защемлені а два інші шарнірно оперті

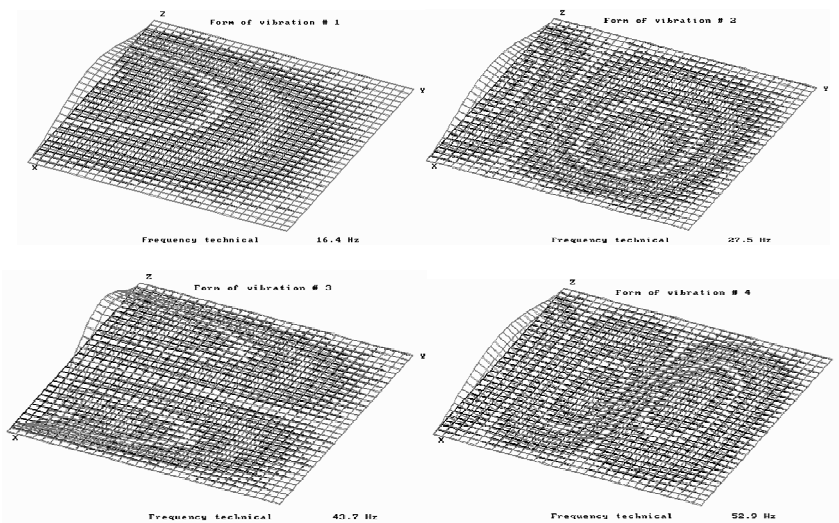


Рис. 7. Форми коливань пластини (без приєднаної маси) жорстко защемленої по трьом сторонам

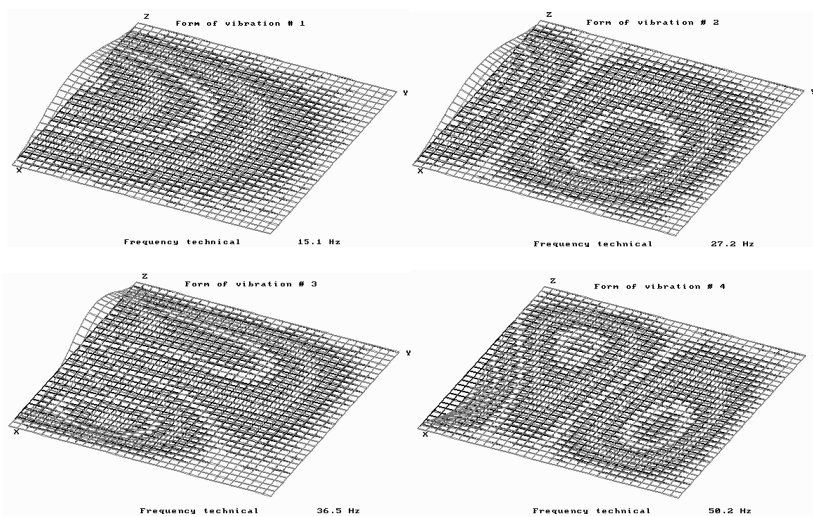


Рис. 8. Форми коливань пластини (з приєднаною масою, розміщеною на чверті діагоналі) жорстко защемленої по трьом сторонам

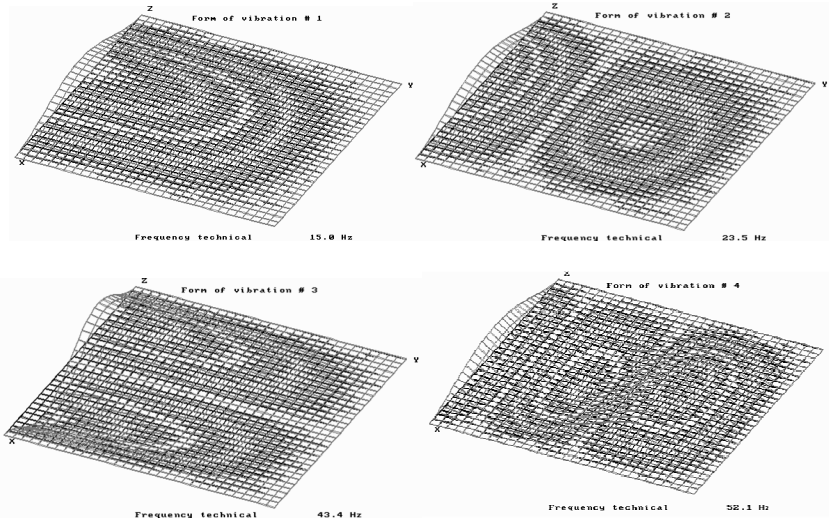


Рис. 9. Форми коливань пластини (з приєднаною масою, розміщеною посередині діагоналі) жорстко защемленої по трьом сторонам.

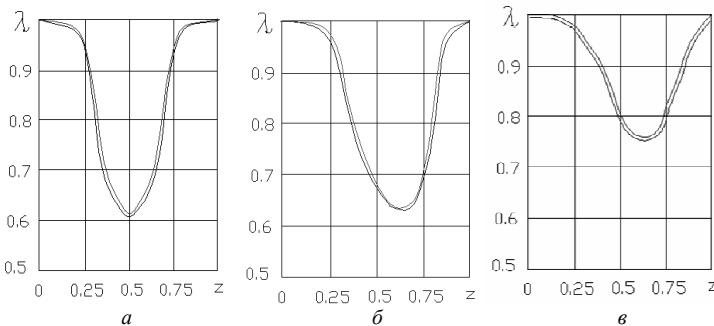


Рис. 10. Порівняння результатів розрахунку для пластини при різних граничних умовах: а) жорстко защемлена по контуру; б) два суміжних краї жорстко защемлені а два інші шарнірно оперті; в) жорстко защемлена по трьом сторонам (верхня лінія результат наведений в роботі [8], нижня лінія за мсе).

Приведені результати свідчать про ефективність методики, що застосовується і достатній практичній точності отриманих результатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бреславский В.Е.* Исследование колебаний тонких оболочек, скрепленных с наполнителем // Труды VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ленинград, 21–28 мая, 1973.– М: Наука.–1973.– С. 271
2. *Бреславский В.Е.* Продольные колебания цилиндрической оболочки, скрепленной с упруго-вязким наполнителем и сосредоточенными массами // Проблемы машиностроения.– 1981.– N 14.–С. 27–32.
3. *Паламарчук В.Г.* Свободные колебания системы, состоящей из ребристой цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела // Прикл. мех.– 1978.–14, N 4.– С. 56–62.
4. *Yu.V. Trotsenko.* On equilibrium equations of cylindrical shell with attached rigid body, Nonlinear Oscillations 4 (2001) 422–431.
5. *Amba-Rao C.L.* On the Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Concentrated Mass. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics 1964:550–1.
6. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г.* Динамика ребристых оболочек. Киев: Наукова думка, 1983. 204с.
7. *Кауров А.С., Кауров В.А.* Численное исследование свободных колебаний конструктивно неоднородных подкрепленных оболочек с присоединенными твердыми телами // Вісник Донецького університету, Сер.А: Природничі науки, 2008, вип.1.- С. 170-174.
8. *Беспалова Е.И.* Колебания пластин с присоединенными массами, распределенными по участку поверхности // Прикл. мех.– 1978.–23, N 6.– С. 78–83.

Стаття надійшла до редакції 23.11.2012 р.

Legostaev A.D., Grechukh N.A., Yakovenko O.O.

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ МАССАМИ

Предложена методика построения конечноэлементных моделей с учетом нерегулярностей типа 'присоединена масса' в задачах о собственных колебаниях континуальных конструкций. Регулярность сеточной области модели обеспечивается путем введения особенных КЭ, которым предоставляется статус 'включения'. Вычисленные значения частот собственных колебаний пластины с присоединенными массами сравнивались с теми, которые получены аналитическими методами.

Legostaev A.D., Grechukh N.A., Yakovenko O.O.

VIBRATIONS OF SHELL CONSTRUCTIONS WITH ATTACHED MASSES

The method of construction of finite element models is offered taking into account irregularities of type 'attached mass' in tasks of free vibrations of continuous constructions. Regularity of net area of model is provided by introduction of special FE, to which status of 'including' is given. Determined values of frequencies of free vibrations of plate with attached masses compared to those which are got by analytical methods.

УДК 539.3

О.А. Киричук, д-р.техн.наук

О.В. Кузько

О.О. Лук'янченко, канд.техн.наук

ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМИ ДВОХ З'ЄДНАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Для дослідження динаміки паливного резервуару ємністю 200 м^3 , який захищений зовнішньою циліндричною оболонкою і з'єднаний з нею сталевими трубами для закачування та відбору палива, за допомогою програмного комплексу NASTRAN побудована скінченноелементна модель конструкції у вигляді системи двох з'єднаних циліндричних оболонок. На основі методу Ланцоша виконано модальний аналіз системи. Виявлено вплив зовнішньої оболонки та елементів з'єднання на динамічну поведінку паливного резервуару.

Вступ. Виконання міжнародних зобов'язань України в зв'язку з її участю в Договорі про Антарктику [1] пов'язано із забезпеченням життєдіяльності і модернізації інфраструктури української антарктичної станції Академік Вернадський. На станції встановлено новий резервуар циліндричної форми ємністю 200 м^3 для дизельного пального. З метою додаткового захисту оточуючого середовища від можливого витoku пального внутрішня герметична ємність для палива захищена зовнішньою циліндричною оболонкою. Внутрішня і зовнішня оболонки технологічно з'єднані трубопроводами для закачування і відбору палива. Внаслідок природних збурень при коливанні захисної оболонки створюються передумови для додаткового динамічного навантаження через жорсткі кріплення труб на паливний резервуар. Під час накачки палива в резервуар через верхній патрубок внаслідок падіння палива під тиском і за рахунок жорстких з'єднань внутрішньої і зовнішньої оболонок у безвітряну погоду відчуються коливання зовнішньої оболонки. Наведені факти свідчать про необхідність дослідження несучої спроможності та динаміки паливного резервуара з урахуванням захисної оболонки та технологічних елементів з'єднання. Важливою стадією динамічного розрахунку споруди є виконання її модального аналізу [2,3].

В теперішній час ведуться інтенсивні дослідження в галузі математичного моделювання і прогнозування природних і техногенних процесів, що відбуваються на Землі. Для цього розроблюються потужні обчислювальні системи, які базуються на сучасних методах будівельної механіки, механіки твердих та деформівних тіл, математичної фізики.

Обчислювальні системи, що представлені на ринку наукомісткої продукції, мають розвинені сервісні можливості. У зв'язку з цим важливим є завдання - з великої кількості різноманітних вітчизняних і зарубіжних обчислювальних комплексів вибрати ті, які могли б найбільш ефективно використовуватися для вирішення науково-дослідних і прикладних задач механіки. Для дослідження динаміки системи двох з'єднаних резервуарів авторами застосований програмний продукт MSC.Software Corporation – скінченноелементна програмна система MSC.NASTRAN [5]. Користувачами програмного забезпечення цієї фірми є підприємства авіакосмічної, автомобільної, електронної та інших галузей промисловості, а також вищі навчальні заклади. Компанія співпрацює з найбільшими світовими виробниками, такими як BMW, DaimlerChrysler, Fiat, GM, Ford, Nissan, Toyota, Boeing, Airbus, Lockheed Martin, United Technologies, Dupont, Eastman Kodak, Motorola та ін.

Побудова скінченноелементної моделі системи двох з'єднаних циліндричних оболонок. В роботі побудована скінченноелементна модель складеної конструкції у вигляді системи двох з'єднаних циліндричних оболонок з відповідними геометричними та механічними характеристиками паливного та захисного резервуарів (рис. 1). Резервуар для дизельного палива являє собою металевий циліндр висотою 5,96 м і діаметром 6,63 м.

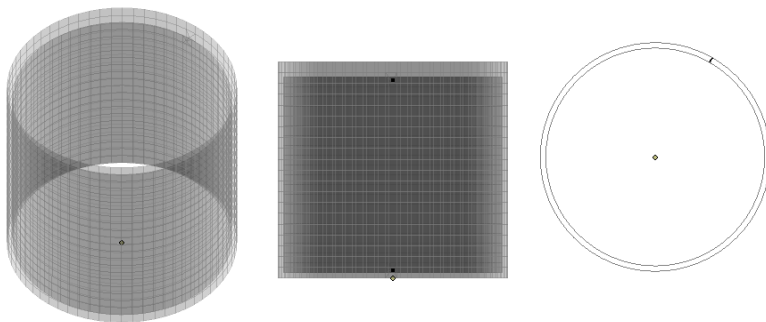


Рис. 1. Скінченноелементна модель системи двох з'єднаних циліндричних оболонок

Резервуар з паливом знаходиться в середині захисної металевій циліндричній оболонці висотою 6,58 м і діаметром 6,96 м. Товщина стінок оболонок складає 5 мм, матеріал – Ст.Зпс.2. Сталеві труби для закачування та відбору палива мають діаметр 3 дюйма та довжину 0,16 м. Циліндричні оболонки розбиті по колу на 64 частини, по висоті – на 20. Стінки оболонок змодельовані у вигляді сукупності чотирьохкутних

плоских скінченних елементів зі шістьма степенями вільності. Дві труби, що з'єднують оболонки, моделюються стержневими елементами. В місцях кріплення труб до резервуарів один чотирикутний елемент замінений на чотири трикутні плоскі елементи. Кількість двовірних елементів моделі складає 2692, кількість вузлів – 2575. У вузлах нижньої кромки внутрішнього резервуару обмежені переміщення по твірній і радіусу, повороти навколо радіусу і дотичної. Вузли нижньої кромки зовнішнього резервуару жорстко закріплені.

За допомогою методу Ланцоша, що реалізований в програмному комплексі NASTRAN, виконаний модальний аналіз системи двох з'єднаних оболонок. Отримані форми та частоти власних коливань системи. Дослідження показали, що спостерігаються регулярні(циклічні) та нерегулярні деформації стінок як зовнішньої так і внутрішньої оболонки. В таблиці 1 представлені частоти власних коливань системи та кількість хвиль вздовж кіл оболонок. Наведена наявність регулярних та нерегулярних деформацій стінок оболонок для 20-ти форм власних коливань системи.

Таблиця 1

№	Система з'єднаних оболонок		Паливний резервуар		Захисний резервуар	
	Частота, Гц	Кількість хвиль вздовж кола (внутр./зовн.)	Частота, Гц	Кількість хвиль вздовж кола	Частота, Гц	Кількість хвиль вздовж кола.)
1	14.0568	-/9	15,6536	10	13,94727	10
2	14.1037	-/*	15,36569	10	13,9477	10
3	14.2192	-/9	15,38951	9	14,11136	9
4	14.3192	*/*	15,9003	9	14,11138	9
5	14.8603	-/11	16,4548	11	14,73938	11
6	14.9440	*/11	16,4569	11	14,73945	11
7	15.6025	-/8	17,3935	8	15,48252	8
8	15.6833	*/8	17,4019	8	15,48252	8
9	15.8081	10/-	18,0561	12	16,24563	12
10	15.8298	10/*	18,0572	12	16,24585	12
11	16.0532	9/-	20,2515	13	18,27567	13
12	16.0737	9/*	20,2520	13	18,27572	13
13	16.3850	-/12	20,2918	7	18,32078	7
14	16.4680	*/12	20,3044	7	18,32082	7
15	16.6155	11/-	22,8956	14	20,70029	14
16	16.6359	11/*	22,8961	14	20,70039	14
17	17.5647	8/-	24,6471	6	23,00931	6
18	17.5895	8/*	24,6658	6	23,00963	6
19	18.2313	12/-	25,8949	15	23,43825	15
20	18.2386	12/*	25,8952	15	23,43831	15

* – нерегулярні деформації; - – деформації відсутні

Регулярні деформації зовнішньої оболонки без деформування внутрішньої оболонки спостерігаються по формах 1, 3, 5, 7, 13. По формах 9, 11, 15, 17; 19 циклічно деформується лише стінка внутрішньої оболонки, зовнішня оболонка не деформується. Мають місце одночасні регулярні деформації зовнішньої оболонки та нерегулярні внутрішньої оболонки (форми 6, 8, 14) і навпаки (форми 10, 12, 16, 18, 20). По формах власних коливань 2 та 4 спостерігаються нерегулярні деформації зовнішньої оболонки та локальні деформації внутрішньої оболонки. В багатьох випадках в місцях розташування труб деформації стінок оболонок носять локальний характер, що свідчить про вплив з'єднаних елементів на форми власних коливань системи двох оболонок. Вздовж твірних оболонок спостерігається одна півхвиля по всіх формах власних коливань системи. Частоти власних коливань системи з'єднаних оболонок набувають значення від 14,0568 Гц до 18,2386 Гц (табл. 1). На рис. 2 представлені 4 (рис. 2,а), 8 (рис. 2,б), 18 (рис. 2,в) форми власних коливань з'єднаних оболонок, по яких видно регулярні і нерегулярні деформації зовнішньої та внутрішньої оболонок, локальні деформації в місцях кріплення труб.

Для оцінки впливу елементів з'єднання на значення частот та форм власних коливань системи досліджена динаміка окремо паливного резервуару та захисного резервуарів. Побудовані їх розрахункові скінченноелементні моделі у вигляді циліндричних оболонок, стінки яких апроксимуються сукупністю чотирьохкутних плоских елементів. Геометричні, механічні характеристики та граничні умови резервуарів аналогічні характеристикам і умовам внутрішньої та зовнішньої оболонок системи.

Модальний аналіз резервуару для зберігання палива показав, що форми власних коливань є циклічними (рис. 3). В коловому напрямку спостерігаються від 6 до 15 хвиль і вздовж твірної – 1 півхвиля. Частоти власних коливань набувають значення від 15,6536 Гц до 25,8952 Гц (табл. 1). При дослідженні динаміки захисного резервуару форми його власних коливань співпадають з формами паливного резервуару (рис. 3), але частоти власних коливань менші за відповідні частоти паливного резервуару (табл. 1) і мають значення в діапазоні від 13,9473 Гц до 23,4383 Гц.

Якщо порівняти результати модальних аналізів внутрішньої оболонки системи з'єднаних оболонок та паливного резервуару, видно, що форми власних коливань і відповідні частоти коливань відрізняються (табл. 1). Спостерігаються коливання внутрішньої оболонки системи з суттєвими нерегулярними та локальними деформаціями (рис. 2), які відсутні при окремому дослідженні динаміки паливного резервуару (рис. 3). При порівнянні динаміки окремо захисного резервуару та зовнішньої оболонки системи лише 5 та 7 форми власних коливань співпадають, але відповідні

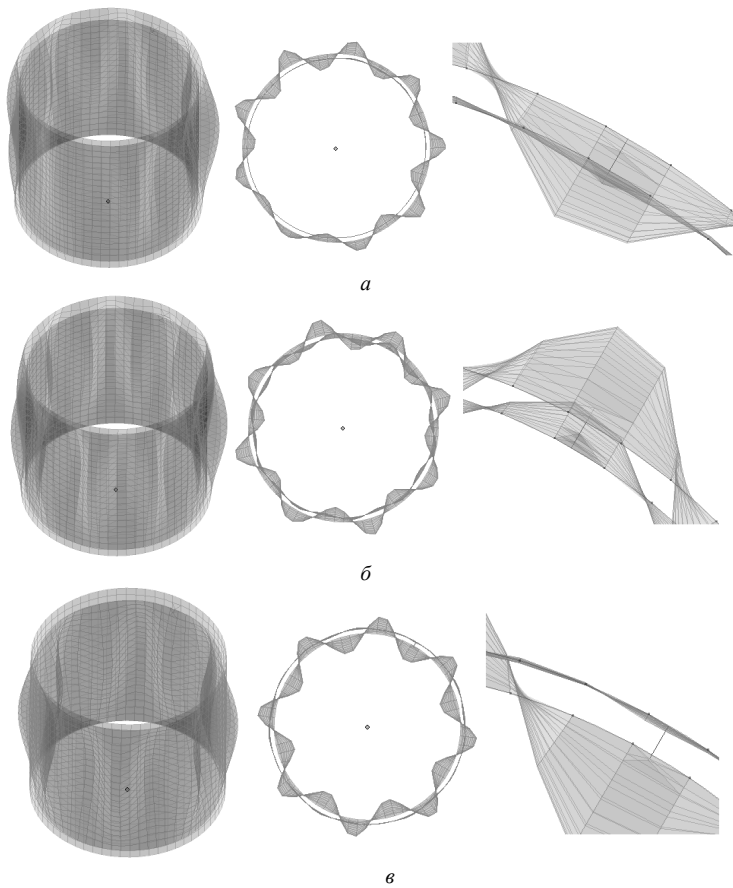


Рис 2. Форми власних коливань системи двох з'єднаних оболонок

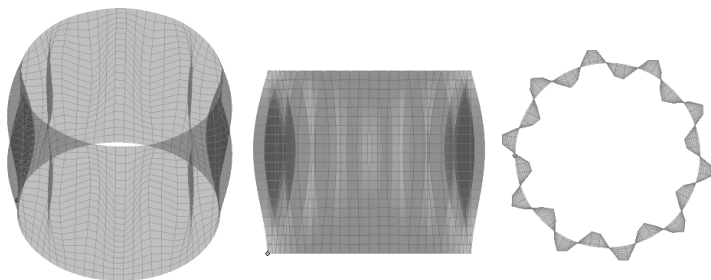


Рис 3. Перша форми власних коливань паливного та захисного резервуарів

частоти коливань по цих формах відрізняються (табл. 1). Також зовнішня оболонка системи має локальні та нерегулярні деформації, які відсутні при дослідженні динаміки захисного резервуару.

Отримані результати свідчать про вплив на динамічні характеристики паливного та захисного резервуару елементів їх з'єднання в систему, та існування взаємодії поперечних та повздожніх форм власних коливань обох резервуарів.

Висновок. При дослідженні динаміки резервуару для зберігання палива, що захищений оболонкою з'єднаною з ним технологічними елементами, за розрахункову модель необхідно прийняти систему двох з'єднаних оболонок, бо модальний аналіз моделі у вигляді циліндричної оболонки з відповідними характеристиками паливного резервуару не відповідає реальній поведінці цього резервуару в системі. Цей факт може суттєво вплинути на результати розрахунку паливного резервуару на різні види динамічних навантажень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Протокол про охорону навколишнього середовища до Договору про Антарктику (Мадрид, 4 жовтня 1991р.) Закон України №2284 – III від 22.02.2001р.
2. ВБН В.2.2-58.2-94. Резервуари вертикальні сталеві для зберігання нафти і нафтопродуктів з тиском насичених парів не вище 93.3 кПа. – Чинний з 1994.10.01 – К.: Держкомнафтогаз України, 1994. - 98с.
3. *Гайдайчук В.В., Киричук О.А., Кузько О.В., Палій О.М.* Розрахунок динамічних характеристик оболонки паливного резервуару// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.86. – К.:КНУБА, 2010. – С. 16–21.
4. *Дехтярюк С.С., Лук'яненко О.О., Шах В.В.* Оцінка рівня конструкційної безпеки нафтоналивного резервуара// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.86. – К.:КНУБА, 2010. – С. 22–29.
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Стаття надійшла до редакції 10.12.2012 р.

Киричук А.А., Кузько А.В., Лукьянченко О.А.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ДВУХ СОЕДИНЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для исследования динамики топливного резервуара объемом 200 м³, который защищен внешней цилиндрической оболочкой и соединен с ней стальными трубами для закачки и слива топлива, с помощью программного комплекса NASTRAN построена конечноэлементная модель конструкции в виде системы двух соединенных цилиндрических оболочек. На основе метода Ланцоша выполнен модальный анализ системы. Обнаружено влияние внешней оболочки и элементов соединения на динамическое поведение топливного резервуара.

Kyrychuk A.A., Kuzko A.V., Lukianchenko O.O.

DYNAMIC ANALYSIS OF TWO CONNECTED CYLINDRICAL SHELLS

For studying the dynamics of the fuel reservoir capacity of 200 m³, which is protected by the outer cylindrical shell and connected with her steel pipes for pumping and draining fuel, using program NASTRAN the finite element model a structure in the form of two connected cylindrical shells is constructed. Based on Lanczos method implemented modal analysis system. Revealed the influence of the outer shell and connection elements on the dynamic behavior of the fuel reservoir.

УДК 539.375

В.А. Баженов, д-р техн. наук,
О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
С.О. Пискунов, д-р техн. наук,
С.В. Мицюк, канд. техн. наук

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ КРУГОВИХ ТА ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Отримано матрицю жорсткості неоднорідного скінченого елемента із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами і досліджено достовірність отримуваних результатів моделювання неоднорідного напружено-деформованого стану.

Вступ. Достовірність і ефективність визначення напружено-деформованого стану просторових тіл складної форми із використанням напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) обумовлюється низкою чинників, зокрема ефективністю і достовірністю скінченоелементної бази щодо опису неоднорідності напружено-деформованого стану в поперечному перерізі і в характерному (вздовж утворюючої) напрямку та ефективністю алгоритмів розв'язання систем рівнянь НМСЕ. В попередній роботі авторів [2] було зокрема показано, що урахування змінності компонент метричного тензора в межах поперечного перерізу СЕ дозволяє майже на порядок скоротити кількість невідомих за рахунок зменшення кількості скінчених елементів в поперечному перерізі досліджуваного об'єкта. В цій же роботі було запропоновано здійснювати урахування зміння площі досліджуваних об'єктів вздовж утворюючої шляхом урахування зміни визначника метричного тензора вздовж утворюючої.

Метою даної роботи є отримання матриці жорсткості неоднорідного скінченого елемента із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами і перевірка достовірності отримуваних результатів моделювання неоднорідного напружено-деформованого стану.

1. Матриця жорсткості неоднорідного скінченого елемента із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами. Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи N СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (1.1)$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W_n = \iiint_{V_n} \tilde{\epsilon}_{kl} \tilde{C}^{ijkl} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} dV_n.$$

де $dV_n = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$ – об'єм n -го СЕ.

Подаючи, відповідно до МССЕ [3], фізичні компоненти тензору деформацій $\tilde{\epsilon}_{ij}$, що обчислені із використанням компонент метричного тензора

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}, \quad (1.2)$$

через їх значення у центрі елемента для варіації енергії n -го СЕ $\delta W_n = \delta W$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \tilde{C}^{\alpha(\alpha)kl} \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \right] + \\ & + 2 \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl} \tilde{C}^{12kl} \delta \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \tilde{C}^{\alpha 3kl} \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \\ & + \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl,\alpha} x^\alpha \right) \tilde{C}^{\alpha 33kl} \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\alpha} x^\alpha \right) \Big] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.3) \end{aligned}$$

Після інтегрування в поперечному перерізі із урахуванням значень інтегралів

$$\begin{aligned} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1; \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0; \\ \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}. \end{aligned}$$

вираз для варіації енергії деформації одного СЕ (1.3) набуде вигляду:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl} \tilde{C}^{ijkl} \delta \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl,(3-\alpha)} \tilde{C}^{\alpha(\alpha)kl} \delta \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \right. \right.$$

$$+\dot{\tilde{\epsilon}}_{kl,(3-\alpha)} \tilde{C}^{\alpha 3kl} \delta \dot{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \dot{\tilde{\epsilon}}_{kl,\alpha} \tilde{C}^{33kl} \delta \dot{\tilde{\epsilon}}_{33,\alpha} \left. \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3.$$

Використовуючи в цьому виразі представлення фізичних компонент деформацій (1.2) та їх похідних (3.2) в роботі [2], а також подання фізичних компонент пружних констант $\tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{kk} \overset{\circ}{g}_{ll}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{kl} C^{ijkl} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{(ii)} \overset{\circ}{g}_{(jj)} \overset{\circ}{g}_{(kk)} \overset{\circ}{g}_{(ll)}} \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii} \overset{\circ}{g}_{jj}}} \delta \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} + \right. \\ & + \frac{1}{12} \left[\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{kk} \overset{\circ}{g}_{ll}}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{kl,(3-\alpha)} \right)_h C^{\alpha\alpha kl} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{(\alpha\alpha)} \overset{\circ}{g}_{(\alpha\alpha)} \overset{\circ}{g}_{(kk)} \overset{\circ}{g}_{(ll)}} \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha}}} \delta \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right)_h + \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{kk} \overset{\circ}{g}_{ll}}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{kl,(3-\alpha)} \right)_h C^{\alpha 3kl} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{(\alpha\alpha)} \overset{\circ}{g}_{(33)} \overset{\circ}{g}_{(kk)} \overset{\circ}{g}_{(ll)}} \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{33}}} \delta \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} \right)_h + \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{kk} \overset{\circ}{g}_{ll}}} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{kl,\alpha} \right)_h C^{33kl} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{(33)} \overset{\circ}{g}_{(33)} \overset{\circ}{g}_{(kk)} \overset{\circ}{g}_{(ll)}} \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{g}_{33}}} \delta \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} \right)_h \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \\ & = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\epsilon}_{kl} C^{ijkl} \delta \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{kl,(3-\alpha)} \right)_h C^{\alpha\alpha kl} \delta \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right)_h + \right. \\ & \left. + \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{kl,(3-\alpha)} \right)_h C^{\alpha 3kl} \delta \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} \right)_h + \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{kl,\alpha} \right)_h C^{33kl} \delta \left(\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} \right)_h \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами (3.1, 3.2) в роботах [1,2], із використанням застосованих векторних представлень деформацій $\{\overset{\circ}{\epsilon}\}$ і їх похідних $\{\overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha}\}_h$ вигляду

$$\begin{aligned} \{\overset{\circ}{\epsilon}\}^T &= \{\overset{\circ}{\epsilon}_{11} \quad 2\overset{\circ}{\epsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{22} \quad 2\overset{\circ}{\epsilon}_{23} \quad 2\overset{\circ}{\epsilon}_{13} \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{33}\}, \\ \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\}_h &= \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\}_{const} + \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\}_{var} = \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} \quad 2\overset{\circ}{\epsilon}_{(3-\alpha)3,\alpha} \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} \right\} + \end{aligned}$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{(3-\alpha)3} \left(\overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + h_{33,\alpha} \right) \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right\}$$

подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у векторній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\epsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\epsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left(\left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\}^T + \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\}^T \right)_{const} + \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\}^T \right)_{var} \right\} \times \\ \times \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left(\left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\} + \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\} \right)_{const} \left. \right) \left. \right) \sqrt{g} dx^3. \quad (1.5)$$

В наведеному виразі $[\overset{\circ}{D}]$ і $[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}]$ – матриці пружних характеристик матеріалу:

$$[\overset{\circ}{D}] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1112} & C^{1122} & C^{1113} & C^{1123} & C^{1133} \\ C^{1211} & C^{1212} & C^{1222} & C^{1213} & C^{1223} & C^{1233} \\ C^{2211} & C^{2212} & C^{2222} & C^{2213} & C^{2223} & C^{2233} \\ C^{1311} & C^{1312} & C^{1322} & C^{1313} & C^{1323} & C^{1333} \\ C^{2311} & C^{2313} & C^{2322} & C^{2313} & C^{2323} & C^{2333} \\ C^{3311} & C^{3312} & C^{3322} & C^{3313} & C^{3323} & C^{3333} \end{bmatrix};$$

$$[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}] = \left[\left[C^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[C^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[C^{ij33} \right] \right]. \quad (1.6)$$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій (2.8) в роботі [2] через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \left(\delta \{ u_l \}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[\overset{\circ}{D} \right] \right) \times \\ \times \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right] \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u_l \} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \{ u_l \}^T \left(\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \varphi^{(l)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \varphi_{,3}^{(l)} \right) \times \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \right)$$

$$\left[\left(\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \\ \text{const} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \\ \text{var} \end{array} \right] \right) \varphi^{(l)} + \left(\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \\ \text{const} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \\ \text{var} \end{array} \right] \right) \varphi_{,3}^{(l)} \{ u_l \} \right] \times \\ \times \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left(\delta \{ u_l \}^T \right) [K_m]_h \{ u_n \}.$$

де $[K_m]_h$ – матриця жорсткості неоднорідного із змінними геометричними параметрами і довільними граничними умовами:

$$[K_m]_h = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_1 \\ \text{const} \end{array} \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_2 \\ \text{const} \end{array} \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[\overset{\circ}{D} \right] \times \left(\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_1 \\ \text{const} \end{array} \right] \varphi^{(n)} + \left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_2 \\ \text{const} \end{array} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left[\left(\left(\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \\ \text{const} \end{array} \right]^T + \left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \\ \text{var} \end{array} \right]^T \right) \varphi^{(l)} + \left(\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \\ \text{const} \end{array} \right]^T + \left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \\ \text{var} \end{array} \right]^T \right) \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\left(\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \\ \text{const} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \\ \text{var} \end{array} \right] \right) \varphi^{(n)} + \left(\left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \\ \text{const} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \\ \text{var} \end{array} \right] \right) \varphi_{,3}^{(n)} \right) \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. (1.7)$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком x^3 з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$[D_{00}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{30}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m^{(n)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{03}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{33}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(n)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$[D_{00\alpha}^{ln}] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$\left[D_{30\alpha}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \Phi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \Phi^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \Phi_{,3 m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \Phi_m^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m ;$$

$$\left[D_{03\alpha}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \Phi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \Phi_{,3}^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \Phi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \Phi_{,3 m}^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m ;$$

$$\left[D_{33\alpha}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \Phi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \Phi_{,3}^{(n)} \sqrt{g} dx^3 = \sum_{m=1}^M \Phi_{,3 m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \Phi_{,3 m}^{(n)} \left(\sqrt{g} \right)_m H_m .$$

де, згідно із запропонованим в [2] способом урахування змінності геометрії досліджуваного об'єкта в напрямку утворюючої

$$\left(\sqrt{g} \right)_m = \sqrt{g} \Big|_{z^3=z_m^3} = \frac{A_m}{A} \sqrt{g} \Big|_{z^3=0} , \quad (1.8)$$

H_m – значення вагових функцій в точках інтегрування.

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

$$\begin{aligned} \left[K_{ln} \right]_h = & \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[D_{00}^{ln} \right] \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[D_{30}^{ln} \right] \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[D_{03}^{ln} \right] \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \right. \\ & \left. + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[D_{33}^{ln} \right] \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \right. \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \left[D_{00\alpha}^{ln} \right] \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var} \right) + \right. \\ & + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \left[D_{30\alpha}^{ln} \right] \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var} \right) + \\ & + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \left[D_{03\alpha}^{ln} \right] \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var} \right) + \\ & \left. + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \left[D_{33\alpha}^{ln} \right] \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var} \right) \right\} . \quad (1.9) \end{aligned}$$

Отриманий вираз матриці жорсткості (1.9) неоднорідного скінченного елемента із змінними компонентами метричного тензора дозволяють проводити визначення пружного напружено-деформованого стану для

неоднорідних тіл обертання (при обчисленні компонент матриць $[\overset{\circ}{B}_\alpha]$ і $[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha}]$ за формулами (3.6, 3.7, 3.15) в роботі [2]) і призматичних тіл (при обчисленні компонент матриць $[\overset{\circ}{B}_\alpha]$ і $[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha}]$ за формулами (3.8, 3.14, 3.16) в роботі [2]) складної форми, в тому числі при змінній вздовж утворюючої площі поперечного перерізу.

У частковому випадку сталості площі поперечного перерізу процедури інтегрування за напрямком x^3 може бути здійснено з урахуванням сталості визначника метричного тензора. Тоді формула (1.9) набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
 [K_{ln}]_h = & \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[D_{00}^{ln} \right] \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[D_{30}^{ln} \right] \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[D_{03}^{ln} \right] \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \right. \\
 & \left. + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[D_{33}^{ln} \right] \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] + \right. \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \left[D_{00\alpha}^{ln} \right] \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var} \right) + \right. \\
 & + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \left[D_{30\alpha}^{ln} \right] \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var} \right) + \\
 & + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_{var}^T \right) \left[D_{03\alpha}^{ln} \right] \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var} \right) + \\
 & \left. + \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const}^T + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var}^T \right) \left[D_{33\alpha}^{ln} \right] \left(\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{const} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_{var} \right) \right\} \sqrt{g}, \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 [D_{00}^{ln}] &= \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} H_m; & [D_{30}^{ln}] &= \sum_{m=1}^M \varphi_{,3 m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} H_m; \\
 [D_{03}^{ln}] &= \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3 m}^{(n)} H_m; & [D_{33}^{ln}] &= \sum_{m=1}^M \varphi_{,3 m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3 m}^{(n)} H_m; \\
 [D_{00\alpha}^{ln}] &= \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} H_m; & [D_{30\alpha}^{ln}] &= \sum_{m=1}^M \varphi_{,3 m}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} H_m;
 \end{aligned}$$

$$\left[D_{03\alpha}^{ln} \right] = \sum_{m=1}^M \Phi_m^{(l)} \left[D_{,\alpha}^{\circ} \right] \Phi_{,3 m}^{(n)} H_m; \quad \left[D_{33\alpha}^{ln} \right] = \sum_{m=1}^M \Phi_{,3 m}^{(l)} \left[D_{,\alpha}^{\circ} \right] \Phi_{,3 m}^{(n)} H_m.$$

Таким чином, отримані розв'язувальні співвідношення НМСЕ задовольняють сформульованим вище вимогам щодо врахування змінності геометрії (характерних розмірів) і неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу в напрямку, перпендикулярному площині поперечного перерізу тіла. Крім того, використання в ході їх отримання фізичних величин деформацій дозволило замінити трудомістке чисельне інтегрування в поперечному перерізі СЕ процедурою інтегрування в замкненому вигляді, що суттєво зменшує обсяг обчислень компонент матриці жорсткості. Вірогідність моделювання особливостей напружено-деформованого стану, пов'язаних із вище переліченими факторами потребує обґрунтування на основі аналізу результатів розв'язання тестових прикладів.

2. Алгоритм розв'язання систем лінійних рівнянь НМСЕ і достовірність використання неоднорідних кругових і призматичних СЕ із змінними геометричними і фізичними параметрами. Розв'язання систем рівнянь великої розмірності є найбільш трудомістким етапом розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла на основі МСЕ. У загальному випадку система рівнянь МСЕ може бути подана у вигляді:

$$[K]\{u\}=\{Q\},$$

де $[K]$ – матриця жорсткості системи; $\{u\}$ – вектор невідомих вузлових переміщень; $\{Q\}$ – вектор вузлових навантажень.

При використанні НМСЕ із поданням компонент переміщень у вигляді розкладу за системою поліноміальних базисних функцій і відповідного подання зовнішніх навантажень у вигляді:

$$\{Q_l\} = \int_{-1}^1 Q \Phi^l \sqrt{g}^{\circ} dx^3 = \sum_{m=1}^M Q \Phi_m^{(l)} \sqrt{g}^{\circ} H_m,$$

вектори $\{u\}$, $\{P\}$, $\{Q\}$ і матриця жорсткості $[K]$ дискретної моделі набувають блочної структури :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \dots \\ \{u_l\} \\ \dots \\ \{u_L\} \end{Bmatrix}, \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} \{Q_1\} \\ \dots \\ \{Q_l\} \\ \dots \\ \{Q_L\} \end{Bmatrix},$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \dots & [K_{1l}] & \dots & [K_{1L}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{l1}] & \dots & [K_{ll}] & \dots & [K_{lL}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{L1}] & \dots & [K_{Ll}] & \dots & [K_{LL}] \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Зважаючи на зазначену особливість матриці жорсткості, для розв'язання отриманої системи рівнянь раціональним є використання блочно-ітераційних алгоритмів [1]. В даній роботі розв'язання систем лінійних рівнянь НМСЕ здійснюється за алгоритмом блочних ітерацій з верхньою релаксацією:

$$\begin{aligned} \{u_l\}_n &= \{u_l\}_{n-1} + \{\Delta u_l\}_n = \\ &= \{u_l\}_{n-1} + [K_{ll}]^{-1} \left(\{Q_l\} - \beta \left\{ \sum_{s=0}^{l-1} [K_{ls}] \{u_s\}_n + \sum_{s=l}^L [K_{ls}] \{u_s\}_{n-1} \right\} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

де $1 \leq \beta < 2$ – параметр релаксації, n – поточний номер ітерації.

Умовою збіжності ітераційного процесу є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L (\{\Delta u_l\}_n)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L (\{u_l\}_n)^2, \quad (2.3)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ – параметр точності розв'язання системи лінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності результатів.

Для доведення ефективності даного алгоритму було розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану просторового тіла із боковим надрізом (рис. 1). Моделювання асимптотичного розподілення напружень в околі такого концентратора напружень висуває підвищені вимоги до показників збіжності ітераційного алгоритму.

Внаслідок симетрії скінченоелемента модель НМСЕ побудована для половини досліджуваного об'єкта (врізка, рис. 2). Досліджувалась збіжність величин

переміщень в серединному ($z^3 = 0$) і торцевих ($z^3 = \pm 1$) перерізах призматичного тіла, вибір яких обумовлено наближенням їх умов деформування до плоскої деформації і плоского напруженого стану

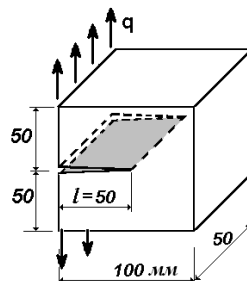


Рис. 1. Розрахункова схема просторового тіла з боковим надрізом

відповідно. Похибка визначалась відносно величин переміщень отриманих після 10 ітерацій розв'язання задачі. Отримані результати свідчать, що збіжність переміщень в околі вершини тріщини з точністю 2% досягається вже після за 5 ітерацій (рис. 2). Таким чином, запропонований алгоритм дозволяє з високим ступенем ефективності отримувати параметри напружено-деформованого стану в тому числі при наявності концентраторів типу надрізів і тріщин.

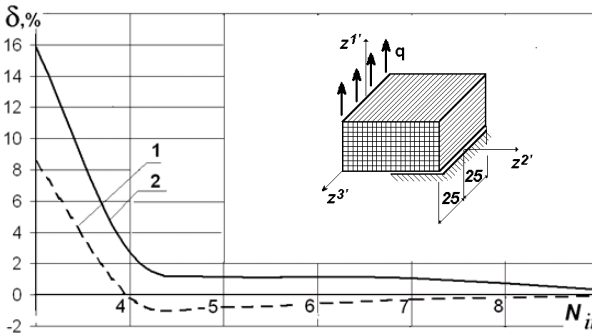


Рис. 2. Дискретна модель НМСЕ і збіжність величин переміщень в серединному (крива 1) і торцевих (крива 2) перерізах просторового тіла з боковим надрізом.

Дослідження достовірності моделювання неоднорідності фізико-механічних властивостей. Важливою перевагою розробленої скінченоелементної бази має бути можливість моделювання особливостей напружено-деформованого стану, пов'язаних із неоднорідністю фізико-механічних властивостей матеріалу. Необхідність розв'язання таких задач виникає у випадку розгляду об'єктів із вихідними вирізами і включеннями, а також при моделюванні неоднорідностей, набутих в процесі деформування. Неоднорідності, розмір яких є суттєво меншим за характерні розміри об'єкта, являють собою концентратор напружень, що якісно змінює картину і кількісні показники напружено-деформованого стану.

Для дослідження точності моделювання тривимірного напружено-деформованого стану при наявності неоднорідності фізико-механічних властивостей на основі НМСЕ і МСЕ проведено порівняння результатів, отриманих на основі НМСЕ і МСЕ в пластині з порожниною прямокутної форми під впливом розтягуючого навантаження при пружному деформуванні (рис. 3). При розрахунку розглядалась одна чверть частина пластини, граничні умови визначені із умов симетрії вздовж осей координат z^1 і z^2 . В напрямку, перпендикулярному товщині пластини

задані умови плоскої деформації. Фізико-механічні характеристики матеріалу: $E=1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$.

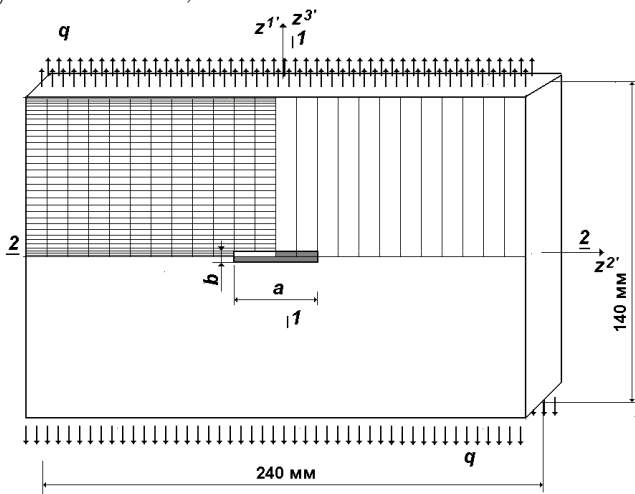


Рис. 3. Пластина з вирізом: розрахункова схема і дискретні моделі МСЕ (ліворуч) і НМСЕ (праворуч)

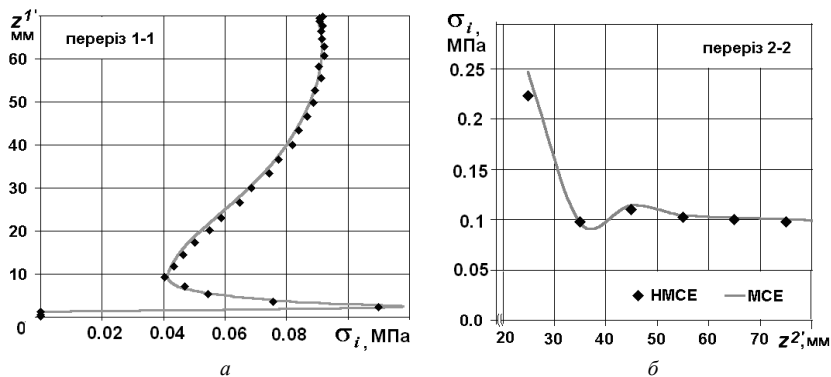


Рис. 4. Розподілення інтенсивності напружень в перерізах 1-1 (а) і 2-2(б) пластина з вирізом

Отримані розподілення інтенсивності нормальних напружень в перерізах 1-1 і 2-2 (рис. 4) при $h=2$ мм, $b=20$ мм мають однаковий характер, кількісні відмінності не перевищують 3%. Співставлення результатів отриманих при інших значеннях b і h та різних співвідношеннях b/h також є майже ідентичними і свідчать, що результати МСЕ і НМСЕ збігаються.

Таким чином, при застосуванні умови використання розроблених СЕ НМСЕ дозволяє отримувати достовірні результати моделювання напружено-деформованого стану за наявності неоднорідностей, розміри яких в напрямку z^3 є набагато меншими за відповідні характерні розміри об'єкта.

Достовірність результатів моделювання напружено-деформованого стану кругових і призматичних тіл при змінній геометричних параметрів вздовж характерного напрямку (змінної площі поперечного перерізу). Для перевірки вірогідності моделювання напружено-деформованого стану кругових тіл змінної площі поперечного перерізу та визначення меж застосування розробленого скінченного елемента було проведено розв'язання тестового прикладу про деформування циліндра. Середній радіус циліндра $R_0=10$ мм, середня товщина стінок $t_0=2$ мм. Змінення площі поперечного перерізу є

тотожним зміненню товщини стінки і становить 10% на секторі циліндра кутом 90 градусів (рис. 5), відповідно товщина стінки при $\theta=-45^\circ$ становить 2.1 мм, при $\theta=45^\circ$ – 1.9 мм. Модуль пружності $E=0.1$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$. Розв'язання задачі проведено МСЕ (рис. 5,а) та НМСЕ (рис. 5,б). Граничні умови на площинах перпендикулярних вісі обертання відповідають площинам симетрії, що у випадку МСЕ відповідає умовам плоскої деформації, для НМСЕ – $u^I=0$. В дискретній моделі МСЕ розташування центрів СЕ вздовж вісі

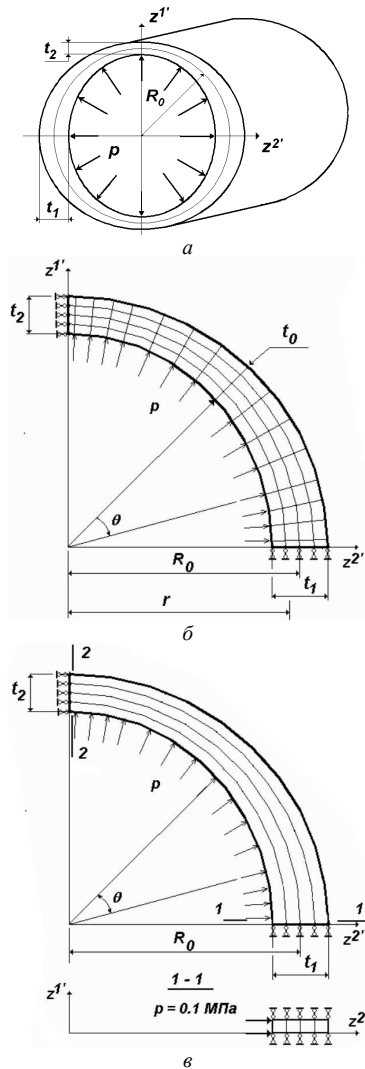


Рис. 5. Циліндр змінної площі поперечного перерізу: розрахункова схема (а), дискретні моделі МСЕ і НМСЕ (б і в)

стержня збігається із розташуванням точок інтегрування в дискретній моделі НМСЕ.

Отримані основи МСЕ та НМСЕ результати наведені у вигляді графіків розподілень по товщині величин колових напружень σ_θ в радіальних перерізах 1-1 ($\theta=45^\circ$) і 2-2 ($\theta=-45^\circ$) (рис. 6). Як видно, максимальна похибка визначення напружень спостерігається в точках на внутрішній поверхні труби – 4,7 %. На зовнішній поверхні ця похибка становить біля двох відсотків.

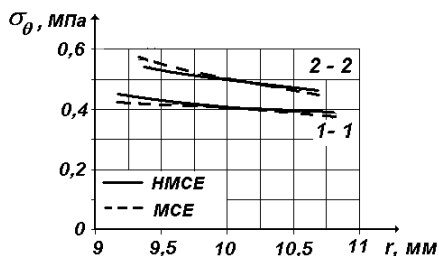


Рис. 6. Розподілення колових напружень в циліндрі змінної площі поперечного перерізу

Для обґрунтування достовірності розробленого підходу для призматичних тіл було розглянуто тестовий приклад про розтяг в умовах плоскої деформації в площині z^1-z^3 стрижня зі змінною за лінійним законом площею поперечного перерізу (рис. 7,а).

Зміна площі в даному випадку є тотожною зміні характерного розміру перерізу в напрямку в напрямку z^1 . Модуль пружності $E = 0.1$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$.

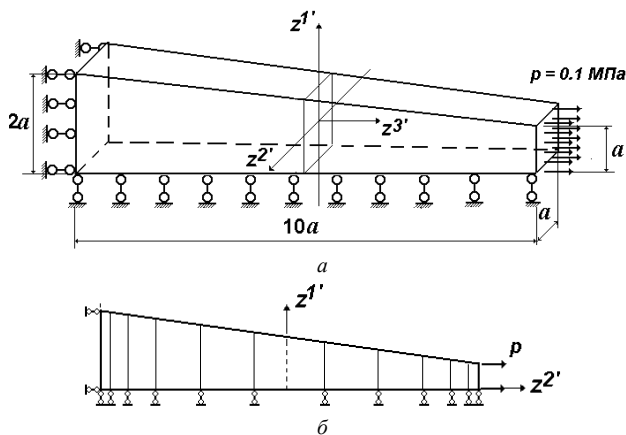


Рис. 7. Розрахункова схема (а) і дискретна моделі МСЕ (б) призматичного стрижня зі змінною площею поперечного перерізу

В дискретній моделі МСЕ (рис. 7,б) розташування центрів СЕ вздовж вісі стержня збігається із розташуванням точок інтегрування в дискретній моделі НМСЕ, що обумовлює специфічно нерівномірну скінчено елемента розбивку в напрямку вісі стержня. Дискретна модель НМСЕ утворена із використанням одного призматичного СЕ змінної площі поперечного перерізу і за виглядом повністю ідентична розрахунковій схемі.

Отримані результати – розподілення напружень σ_{z^3} і переміщень U^{z^3} вздовж вісі стержня (за напрямком z^2 – в МСЕ і z^3 в НМСЕ) наведені на рис. 8. Похибка визначення напружень і переміщень лежить в межах 1% .

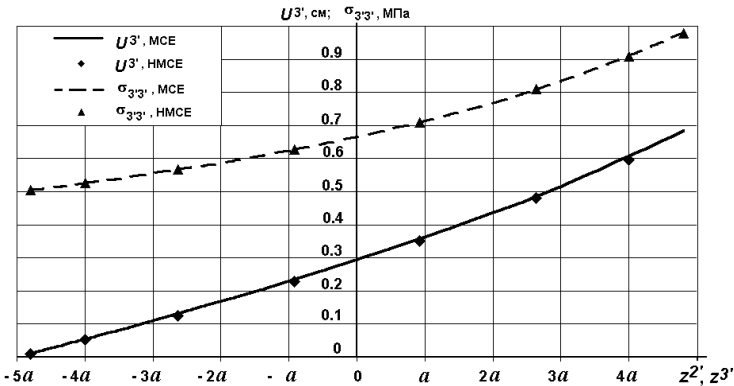


Рис. 8. Розподілення параметрів напружено-деформованого стану в стержні змінної площі поперечного перерізу

Висновки. Представлення варіації енергії пружного деформування через фізичні компоненти тензора деформацій дозволило отримати формули для визначення коефіцієнтів матриці жорсткості, які враховують змінність метричного тензора в поперечному перерізі СЕ. В поєднанні із МССЕ це дало змогу виконати інтегрування в поперечному перерізі СЕ в замкненому вигляді. Шляхом розв'язання тестових задач встановлено, що їх збіжність не поступається скінченим елементам із чисельним інтегруванням при суттєво меншому обсязі обчислювальних витрат, пов'язаних із визначенням коефіцієнтів матриці жорсткості.

На основі аналізу отримуваних розв'язків тестових задач вперше показано, що розроблені СЕ дозволяють отримувати вірогідні результати моделювання напружено-деформованого стану при наявності областей із суттєво неоднорідними фізико-механічними властивостями, розміри яких в напрямку z^3 є набагато меншими за відповідні характерні розміри

об'єкта. Це особливо важливо для моделювання напружено-деформованого стану при формуванні і розвитку макродефектів, які представляють собою локальні концентратори напружень. Урахування змінності визначника метричного тензора в напрямку утворюючої забезпечило достовірне визначення напружено-деформованого стану кругових і призматичних тіл із змінною в достатньо широкому інтервалі площею поперечного перерізу.

Порівняння ефективності реалізованої блочно-ітераційної процедури розв'язання систем лінійних рівнянь НМСЕ показало її високу ефективність порівняно з алгоритмами, які використовуються в ліцензійних програмних комплексах.

Таким чином в даній роботі на основі НМСЕ розроблений ефективний апарат чисельного визначення напружено-деформованого стану просторових неоднорідних кругових та призматичних просторових тіл складної конфігурації з довільними граничними умовами на торцях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Мицюк С.В.* Особливості реалізації моментної схеми скінчених елементів для визначення пружного стану просторових тіл складної форми// Опір матеріалів і теорія споруд № 89, 2012.- С. 3-25.
3. *Сахаров А.С., Кислюк В.Н., Киричевский В.В.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- К.: Вища школа, 1982. - 480с.

Стаття надійшла до редакції 13.12.2012 р.

Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Мицюк С.В.

РАЗРЕШАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ КРУГОВЫХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Получена матрица жесткости неоднородного конечного элемента с переменными геометрическими и физическими параметрами и произвольными граничными предельными условиями. Исследована достоверность получаемых результатов моделирования неоднородного напряженно деформированного состояния.

Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Pyskunov S.O., Mytsyuk S.V.

ALLOWING RATIOS OF THE SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD FOR NON-UNIFORM CIRCULAR AND PRISMATIC BODIES OF THE DIFFICULT FORM.

The stiffness matrix of a non-uniform finite element with variable geometrical and physical parameters and any boundary conditions is received. The reliability of received results of non-uniform stress-strained state modeling is investigated.

УДК 539.3

О.О. Лук'яненко, канд. техн. наук**О.М. Рудинюк**, канд. техн. наук**Г.Р. Ашмаріна**

ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМИ ЗАПОБІГАННЯ ПОДАЛЬШОГО РУЙНУВАННЯ ЦЕГЛЯНОЇ ДИМОВОЇ ТРУБИ

Розроблена методика розрахунку несучої здатності цегляної димової труби з урахуванням локальних руйнувань її стовбура при сумісній дії вітру, власної ваги та нагрівання відвідними газами. Проблема запобігання подальшого руйнування труби та забезпечення її безаварійної експлуатації вирішується за допомогою стяжних кілець, які встановлюються по всій висоті стовбура труби до усунення виявлених пошкоджень. В роботі виконаний розрахунок несучої здатності реальної цегляної димової труби з локальними руйнуваннями її стовбура, визначені розрахункові сили натягу стяжних кілець, надані рекомендації до їх встановлення.

Димові труби відносяться до складних спеціальних інженерних споруд баштового типу. Вони є невід'ємною частиною промислових підприємств і теплових електростанцій. В даний час на промислових підприємствах України експлуатується більше 5000 цегляних і металевих димових труб, призначених як для створення тяги, так і для відводу у верхні шари атмосфери і подальшого розсіювання шкідливих газів і газоповітряних сумішей [1,2,3]. Цегляні труби використовуються для відведення димових газів різного ступеня агресивності в широкому діапазоні температур. При технічно грамотній експлуатації вони є найбільш довговічними, бо мають основну перевагу - простоту їх ремонту, який не вимагає спеціальних пристосувань і будівельних механізмів. Питання забезпечення безаварійної експлуатації димових труб є актуальною, бо вихід їх з ладу може призвести не тільки до зупинки виробництва з великими економічними втратами, а і до людських жертв. Димові труби знаходяться під безперервною дією вітрових навантажень, що викликають помітні коливання і пов'язані з ними знакозмінні напруження. В результаті впливу атмосферних опадів і відвідних агресивних газів найбільш пошкодженими є оголовки труб. Перепад температур по товщині труби, вибухи газової суміші "хлопка", удари блискавки, локальні руйнування цегли, нерівномірні осідання основ під фундаментом труби, одностороннє зволоження зовнішньої поверхні труби викидами пари та води найбільш пошкоджують стовбури труб. Тому обов'язковим є технічний нагляд за станом конструкцій: контроль технологічних режимів їх експлуатації, загальний або частковий огляд, планове або позапланове обстеження елементів конструкцій,

своєчасне виявлення та усунення їх дефектів і пошкоджень. При реконструкції цегляної кладки стовбурів димових труб для запобігання їх подальшого руйнування рекомендується до закладання виявлених тріщин провести установку стяжних кілець та їх натяг.

В статті представлена методика розрахунку несучої здатності цегляної димової труби з урахуванням локальних руйнувань її стовбура при сумісній дії вітру, власної ваги та нагрівання відвідними газами, визначення сил натягу стяжних кілець. Алгоритм методики складається з:

- визначення геометричних та механічних характеристик стовбуру труби і його половини;
- визначення розрахункового вітрового навантаження;
- побудови епюр згинальних моментів і перерізуючих сил від дії вітру;
- визначення нормальних напружень від дії вітру, що виникають на поверхні цільної труби, та труби, складеної з двох окремих її половин;
- визначення дотичних напружень від дії вітру, що виникають в середині цільної труби;
- визначення розтягуючих зусиль в стяжних кільцях на 1 пог. м висоти стовбура, з умови рівності дотичних напружень силам тертя, що виникають між половинами стягнутої скобами труби;
- визначення розтягуючих зусиль в стяжних кільцях на 1 пог. м висоти стовбура від нагрівання ствола відвідними газами;
- визначення необхідної відстані між стяжними кільцями і сил їх натягу з урахуванням рекомендованої відстані між ними.

Наведений алгоритм реалізуємо для цегляної димової труби, конструкція стовбура якої представлена на рис. 1. Кладка стовбура виконана із цегли марки М100 на розчинах марки М25 на відмітках від 5,0 м до 55,0 м та М50 на інших відмітках.

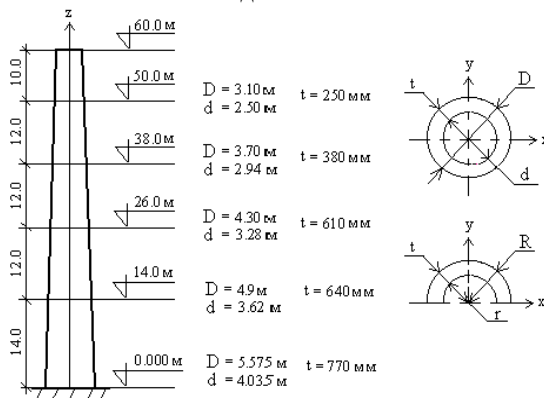


Рис. 1. Конструкція стовбура цегляної димової труби

Геометричні та механічні характеристики димової труби та її половини зведені в табл. 1.

Таблиця 1

Відмітки $h, м$	$D, м$	$d, м$	Площа поперечного перерізу $F, м^2$		Момент інерції $J_x, м^4$		Момент опору $W, м^3$	
			цільної труби	половини труби	цільної труби	половини труби	цільної труби	половини труби
0,50	5,575	4,03	11,626	5,813	35,046	3,666	12,343	2,961
14,0	4,900	3,62	8,565	4,283	20,238	1,936	8,110	1,878
26,0	4,300	3,28	6,072	3,036	11,307	1,075	5,163	1,132
38,0	3,70	2,94	3,963	1,982	5,635	0,532	2,990	0,594
50,0	3,10	2,50	2,639	1,319	2,664	0,251	1,688	0,279

Розрахунок вітрового навантаження, що діє на конструкцію димової труби, виконуємо згідно [4]. Нормативну статичну складову вітрового навантаження q_n визначаємо за формулою

$$q_n = q_0 \cdot k \cdot c, \quad (1)$$

де q_0 – швидкісний напір вітру на висоті 10 м над поверхнею землі, що приймається в залежності від району (для II району $q_0 = 400 \text{ Н/м}^2$), k – коефіцієнт, що враховує зміну швидкісного напору по висоті в залежності від типу місцевості (для типу місцевості А: $\leq 5\text{м}$ $k = 0,75$; $\leq 10\text{м}$ $k = 1$; $\leq 20\text{м}$ $k = 1,25$; $\leq 40\text{м}$ $k = 1,5$; $\leq 60\text{м}$ $k = 1,7$), c – аеродинамічний коефіцієнт, який приймається відповідно до вказівок [4] (для димової труби круглого перерізу $c = 0,6$).

Розрахункове значення статичної складової вітрового навантаження q_p визначаємо за формулою

$$q_p = q_n \cdot \gamma, \quad (2)$$

де q_n – нормативна статична складова вітрового навантаження, γ – коефіцієнт надійності за навантаженням (приймаємо $\gamma = 1,4$).

Визначаємо розрахункове значення статичної складової вітрового навантаження на 1 пог.м висоти димової труби. Отримані результати зводимо в табл. 2.

На рис. 2 представлені розрахункові статичні складові вітрового навантаження на одиницю поверхні та одиницю довжини стовбура труби.

Обчислені моменти та перерізуючі сили, які виникають в трубі від дії статичної складової вітрового навантаження, представлені на рис. 3.

Таблиця 2

Відмітки $h, м$	Коефіцієнт, що враховує зміну швидкісного напору вітру, k	Діаметр димової труби $D, м$	Нормативна статистична складова вітрового навантаження, $q_n, Н/м^2$	Розрахункова статистична складова вітрового навантаження q_p	
				на од. поверхні, $Н/м^2$	на од. довжини труби, $Н/м$
0,50	0,75	5,575	180	252	1404,9
5,00	0,75	5,35	180	252	1348,2
10,0	1,0	5,075	240	336	1705,2
20,0	1,25	4,60	300	420	1932,0
40,0	1,5	3,50	360	504	1764,0
60,0	1,7	1,75	408	571	999,6

Нормальні напруження від дії вітру, що виникають на поверхні цільної труби, обчислюємо за формулою

$$\sigma_B = M / W, \quad (3)$$

де M – згинальний момент від дії вітру; W – момент опору димової труби.

Нормальні напруження від дії вітру, що виникають на поверхні труби, з урахуванням опору двох окремих її половин визначаються згідно формули

$$\sigma_B = M \cdot y_{max}(y_c) / 2J_x, \quad (4)$$

де y_{max} – відстань від центра ваги половини труби до крайньої точки поверхні труби, y_c – координата центра ваги половини труби, J_x – момент інерції половини димової труби.

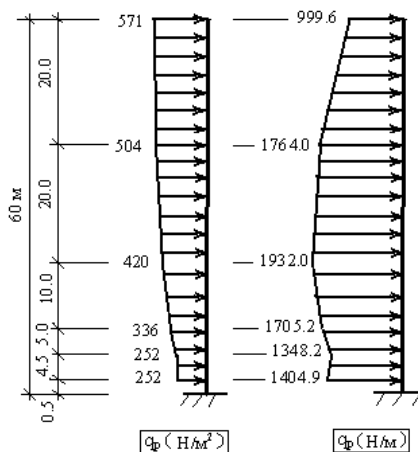


Рис. 2. Розрахункове вітрове навантаження

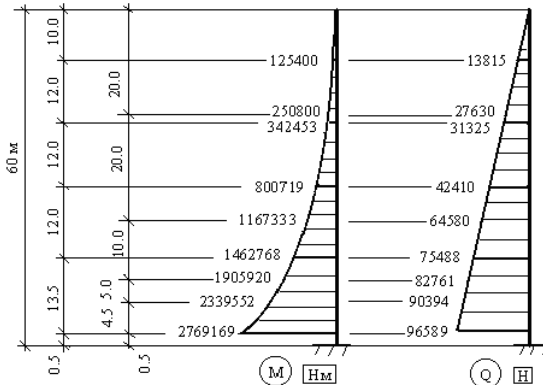


Рис. 3. Епюри згинальних моментів і перерізуючих сил

Визначаємо нормальні напруження від власної ваги для цільної труби за формулою

$$\sigma = N / F, \quad (5)$$

де N – повздовжні зусилля в цільній трубі від власної ваги; F – площа поперечного перерізу димової труби.

На рис. 4 представлені навантаження від власної ваги стовбура труби та епюра повздовжніх зусиль. Значення отриманих напружень наведені в табл. 3.

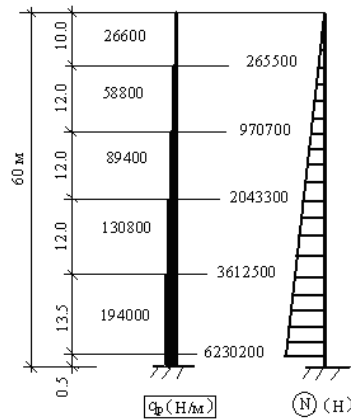


Рис. 4. Навантаження від власної ваги і епюра повздовжніх зусиль

Таблиця 3

Відмітки $h, \text{ м}$	$u_{max} / u_y,$ м	Згинальний момент $M,$ кНм	Повздовжні зусилля від власної ваги $N,$ кН	Нормальні напруги від вітрового навантаження $\sigma_B, \text{ МПа}$		Нормал. напруж. від власної ваги $\sigma, \text{ МПа}$
				цільна труба	з урах. опору двох половин	
0,50	1,245/1,543	2769,17	6230,2	$\pm 0,2243$	$+0,4702/-0,5827$	-0,5359
14,0	1,084/1,366	1462,77	3612,5	$\pm 0,1804$	$+0,4095/-0,5160$	-0,4218
26,0	0,936/1,214	800,72	2043,3	$\pm 0,1551$	$+0,3486/-0,4521$	-0,3365
38,0	0,789/1,061	342,45	970,7	$\pm 0,1145$	$+0,2539/-0,3410$	-0,2449
50,0	0,655/0,895	125,40	265,5	$\pm 0,0743$	$+0,1636/-0,2235$	-0,1006

Нормальне від'ємне максимальне сумарне навантаження, яке виникає в кладці димової труби з тріщинами, становить: $0,5827+0,5359 = 1,12 \text{ МПа}$, а це менше розрахункового опору стиску кладки із цегли марки М100 на розчинах марок М25 (М50), яке дорівнює $1.4 \div 1.7 \text{ МПа}$. Умова міцності кладки на стиск задовольняється.

Димова труба з тріщинами являє собою дві її половини, цегляна кладка яких не сприймає розтягуючих зусиль, а значить, не може забезпечити міцність труби. Розрахунок показав (табл. 3), що існують позитивні (розтягуючі) значення нормальних сумарних напружень на відмітках 26,0 м і вище, що не припустимо. Тому необхідно зробити певні дії для забезпечення її роботи як цільної конструкції. Для цього пропонується встановити стяжні кільця, сили натягу яких необхідно розрахувати з умови рівності сил тертя, що виникають між половинами труби, та дотичним напруженням в цільній трубі від дії вітру.

Сумарні розтягуючі зусилля в стяжних кільцях на 1 пог. м висоти стовбура труби визначаємо за формулою

$$N = N_B + N_t, \quad (6)$$

де N_B – розтягуючі зусилля від вітрового навантаження, N_t – розтягуючі зусилля від нагрівання ствола відвідними газами.

Від вітрового навантаження розтягуючі зусилля в стяжних кільцях на 1 пог. м висоти стовбура труби визначаємо за формулою

$$N_B = \tau \cdot t / f, \quad (7)$$

де τ – дотичні напруження, що виникають в поперечному перерізі труби вздовж осі z (рис. 1) від дії вітру, f – коефіцієнт тертя (для вологих поверхонь – цегла по цеглі $f = 0,3$), t – товщина стінки труби на відповідних відмітках.

Дотичні напруження отримаємо з виразу

$$\tau = Q \cdot S_x / 2t \cdot J_x, \quad (8)$$

де Q – перерізуючі сили від дії вітру (рис. 3), t – товщина стінки димової труби, J_x – момент інерції суцільної труби, S_x – статичний момент половини труби, який визначаємо за формулою

$$S_x = F \cdot y_u, \quad (9)$$

F – площа поперечного перерізу половини труби, y_u – координата центра ваги половини труби.

Отримані результати розрахунку представлені в табл. 4.

Розрахунок стяжних кілець на теплові зусилля в кладці ствола, що виникають від нагріву стовбура відвідними газами здійснюємо згідно [4,5,6].

Таблиця 4

Відмітки $h, м$	Статичний момент половини труби $S_x, м^3$	Товщина стінки труби $t, м$	Перерізу-ючі сили $Q, кН$	Дотичні напруження $\tau, МПа$	Розтягуючі зусилля в стяжних кільцях $N_B, кН$
0,50	8,969	0,77	96,589	0,01605	41,195
14,0	5,851	0,64	75,489	0,01705	37,333
26,0	3,686	0,61	42,410	0,01133	23,037
38,0	2,103	0,38	31,325	0,01538	19,481
50,0	1,181	0,25	13,815	0,01225	10,208

Дані для теплотехнічного розрахунку:

1. Температура газів, що відводяться $t_G = 500^\circ\text{C}$.
2. Температура зовнішнього повітря (взимку) $t_B = -20^\circ\text{C}$.
3. Швидкість газів, що відводяться $V_G = 2,7-3,0 м/с$.
4. Швидкість зовнішнього повітря $V_B = 5 м/с$.
5. Будівельний матеріал футерівки – шамотна нормальна цегла.
6. Теплоізоляція – прошивні мінераловатні мати.
7. Будівельний матеріал ствола – цегла глиняна звичайна марки М100 (розчин марки 2М5 на відмітках від 5,0 м до 55,0 м, на інших відмітках - марки М50).

Розтягуючі зусилля в стяжних кільцях на 1 пог. м висоти стовбура від нагрівання ствола відвідними газами визначаємо за формулою

$$N_t = 50\sigma_{кл}^t x, \quad (10)$$

де $\sigma_{кл}^t$ – теплове напруження в кладці, x – висота стиснутої зони кладки (відстань від внутрішньої грані стінки до нульової лінії напруження).

Різниця температур зовнішнього повітря і газів, що відводяться:

$$t_G - t_B = 500 - (-20) = 520^\circ\text{C}. \quad (11)$$

Термічний опір на внутрішній поверхні ствола:

$$R_B = \frac{1}{2 + 13\sqrt{V_G}} = 1/(2 + 13\sqrt{3}) = 0,047 м^2\text{ }^\circ\text{C} / \text{Вт}. \quad (12)$$

Термічний опір по зовнішній поверхні ствола:

$$R_H = \frac{1}{2 + 13\sqrt{V_B}} = 1/(2 + 13\sqrt{5}) = 0,037 м^2\text{ }^\circ\text{C} / \text{Вт}. \quad (13)$$

Термічний опір футерівки:

$$R_{\phi} = \frac{\delta_{\phi}}{\lambda_{\phi}} = 0,113/0,93 = 0,121 \text{ м}^2 \text{ }^{\circ}\text{C} / \text{Вт}, \quad (14)$$

де λ_{ϕ} – коефіцієнт теплопровідності футерівки (згідно [5] дорівнює $0,81-0,93 \text{ Вт/м}^{\circ}\text{C}$), $\delta_{\phi} = 113 \text{ мм}$ – товщина футерівки.

Термічний опір теплоізоляції

$$R_T = \frac{\delta_T}{\lambda_T} = 0,06/0,07 = 0,86 \text{ м}^2 \text{ }^{\circ}\text{C} / \text{Вт}, \quad (15)$$

$$R_T = \frac{\delta_T}{\lambda_T} = 0,08/0,07 = 1,14 \text{ м}^2 \text{ }^{\circ}\text{C} / \text{Вт},$$

де δ_T – товщина теплоізоляції (на висоті $> 38,0 \text{ м} - 60 \text{ мм}$, на висоті $< 38,0 \text{ м} - 80 \text{ мм}$), λ_T – коефіцієнт теплопровідності теплоізоляції (згідно [5] приймається $0,07 \text{ Вт/м}^{\circ}\text{C}$).

Термічний опір стінки стовбура:

$$R_C = \frac{\delta_C}{\lambda_C} \text{ м}^2 \text{ }^{\circ}\text{C} / \text{Вт}, \quad (16)$$

де δ_C – товщина стінки стовбура на різних відмітках (див. рис. 1), λ_C – коефіцієнт теплопровідності стінки стовбура (згідно [5] дорівнює $0,81 \text{ Вт/м}^{\circ}\text{C}$).

Питому тепловтрату стінки стовбура в зимовий час визначаємо за формулою

$$Q_3 = \frac{t_{\Gamma} - t_B}{R_B + R_{\phi} + R_T + R_C + R_H} \text{ Вт/м}^2. \quad (17)$$

Різниця температур на внутрішній і зовнішній поверхнях стінки стовбура обчислюємо згідно виразу

$$\Delta t = R_C Q_3. \quad (18)$$

Висоту стиснутої зони кладки визначаємо за формулою

$$x = \delta_C \frac{i_n - 0,0006}{i_n} \text{ см}, \quad (19)$$

де i_n – відносне подовження кладки.

Теплове напруження в кладці знаходимо з виразу

$$\sigma_{кл}^t = (1 - e^{-n}) 1,1 R_{кл} \leq R_{кл} / 1,9 \text{ МПа}, \quad (20)$$

де коефіцієнт n визначаємо за формулою

$$n = \left[\frac{i_n - 0,0006}{1,1 R_{кл}} \right] E_0, \quad (21)$$

$E_0 = \alpha R_{кл}$ – модуль пружності кладки; α – пружна характеристика кладки (згідно [6] для розчину марки М50 $\alpha=1000$; для розчину марки М25 $\alpha=750$); $R_{кл}$ – межа міцності кладки при стисненні (для кладки з цегли марки М100 на розчині марки М50 дорівнює 3 МПа, на розчині марки М25 – 2,5 МПа).

Отримані результати зводимо в табл. 5.

Таблиця 5

Відмітки $h, м$	Термічний опір стінки стовбура $R_C, м^2 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{Вт}$	Питома тепловтрата стінки $Q_3, \text{Вт}/\text{м}^2$	Висота стиснутої зони кладки $x, \text{см}$	Коефіцієнт n	Теплова напруга в кладці $\sigma'_{кл}, \text{МПа}$	Розтягуючі зусилля в стяжних кільцях $N_t, \text{кН}$
0,50	0,95	226,58	17,7	0,1627	0,4963	43,926
14,0	0,79	243,56	10,0	0,0755	0,1989	9,945
26,0	0,75	248,81	9,6	0,0760	0,2013	9,662
38,0	0,47	286,50	-	-	-	-
50,0	0,31	314,19	-	-	-	-

Визначаємо розрахунковий переріз стяжних кілець на 1 пог. м висоти стовбура за формулою

$$F_a = \frac{N}{R_y \gamma_c}, \quad (20)$$

де $R_y=190 \text{ МПа}$ розрахунковий опір матеріалу стяжних кілець (згідно [6] для стяжних кілець рекомендується сталь марки ВСтЗсп5), γ_c - коефіцієнт умови роботи, який враховує нерівномірну роботу стяжного кільця по периметру стовбура (згідно експериментальних даних дорівнює 0.7).

Приймаємо стяжні кільця перерізом $80 \times 8 \text{ мм}$ із сталі марки ВСтЗсп5 з площею перерізу прийнятої смугової сталі кільця $f_a=6,4 \text{ см}^2$ і кроком 1,5 м. Необхідну відстань між кільцями по висоті стовбура обчислюємо згідно виразу

$$a = \frac{f_a}{F_a} \text{ м}. \quad (21)$$

Результати розрахунку зводимо в табл. 6.

Таблиця 6

Відмітки h , m	Сумарні розтягуючі зусилля на 1 пог.м. висоти труби N , kH	Розрахунковий переріз стяжних кілець F_a , cm^2	Необхідна відстань між стяжними кільцями a , m
0,50	85,121	6,45	0,992
9,0	71,603	4,71	1,500
14,0	47,278	3,56	1,798
26,0	32,699	2,45	2,612
38,0	19,481	1,46	4,383
50,0	10,208	0,76	8,421

З розрахунку видно, що на висоті вище 9,0 м необхідна відстань між стяжними кільцями відповідає раніше ухваленому кроку 1,5 м. На висоті нижче 9,0 м при прийнятій площі перерізу кільця $f_a = 6,4 \text{ см}^2$ прийнятий крок встановлених стяжних кілець більший за необхідну відстань 0,992 м. Тому на висоті до 9,0 м для забезпечення міцності труби з тріщинами необхідно зменшити крок стяжних кілець і прийняти рівним 0,75 м. Визначаємо силу натягу стяжних кілець, розташованих по всій висоті димової труби (табл. 7).

Таблиця 7

Відмітки h , m	Відстані між стяжними кільцями a , m	Сила натягу стяжних кілець, $kH(T)$
$0,50 \leq h < 9,0$	0,75	64,9(6,49)
$9,0 \leq h < 14,0$	1,5	71,6(7,16)
$14,0 \leq h < 26,0$	1,5	39,5(3,95)
$26,0 \leq h < 38,0$	1,5	18,8(1,88)
$38,0 \leq h < 50,0$	1,5	6,7(0,67)
$50,0 \leq h \leq 60,0$	1,5	5,2(0,52)

Висновок. За допомогою розробленої методики вирішена проблема забезпечення безаварійної експлуатації та запобігання подальшого руйнування цегляної димової труби. Проведений розрахунок її напружено-деформованого стану при сумісній дії вітру, власної ваги та нагрівання відвідними газами. Надані рекомендації до встановлення стяжних кілець і сил їх натягу:

1. До висоти 9,0 м встановити додаткові стяжні кільця, таким чином, щоб відстань між встановленими раніше і додатковими кільцями було не більше 0,75 м. Натягнути стяжні кільця силами 6,49 Т.

2. Вище 9,0 м забезпечити натяг стяжних кілець, встановлених раніше з кроком 1,5 м, згідно табл. 7.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Строительство, материаловедение, машиностроение \\\ Сб. научн. трудов. Вып. 43, – Дн-ск, ПГАСА, 2007. – 628с.
2. Яблонько Е. В. Основные проблемы в эксплуатации дымовых труб // Молодой ученый. — 2011. — №9. — С. 65-68.
3. А.В. Чернов, В.А. Вольницев Кирпичные дымовые трубы, Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, М., 1955.
4. ДБН В.1.2-2:2006 Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования, К., 2006.
5. СНиП II-3-79** Строительная теплотехника. Нормы проектирования, М., 1979.
6. СНиП II-22-81 Каменные и армокаменные конструкции. Нормы проектирования, М., 1983.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.

Лукьянченко О.А., Рудинок А.М., Ашмарина Г.Р.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗРУШЕНИЯ КИРПИЧНОЙ ДЫМОВОЙ ТРУБЫ

Разработана методика расчета несущей способности кирпичной дымовой трубы с учетом локальных разрушений ее ствола при совместном действии ветра, собственного веса и нагрева отводными газами. Проблема предотвращения дальнейшего разрушения трубы и обеспечения ее безаварийной эксплуатации решается с помощью стяжных колец, которые устанавливаются по всей высоте ствола трубы до устранения выявленных повреждений. В работе выполнен расчет несущей способности реальной кирпичной дымовой трубы с локальными разрушениями ее ствола, определены расчетные силы натяжения стяжных колец, даны рекомендации по их установлению.

Lukianchenko O.O., Rudinok O.M., Ashmarina G.R.

SOLUTION OF TASK TO PREVENTING FURTHER DESTRUCTION OF BRICK CHIMNEY

The method for calculating the bearing capacity of a brick chimney with the local destruction of its trunk under the combined action of wind, dead weight and tap-off heating gases is developed. The problem of preventing further destruction the chimney and ensure its safe operation is achieved by clamping rings, which must be are installed throughout the height of the trunk before address the identified lesions. In the paper the bearing capacity of real brick chimney with local destruction of its trunk is investigated, the tension force of clamping rings are determined, the advices to their install are presented.

УДК 539.3

О.І. Гуляр, д-р. техн. наук,
 С.О. Пискунов, д-р. техн. наук,
 Ю.В. Максим'юк
 Б.І. Сизевич

ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ І ПОВЗУЧОСТІ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Розглянуто двовимірний плоский скінчений елемент (СЕ) для розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності в геометрично нелінійній постановці і отримана матриця теплопровідності. Достовірність результатів, що отримуються на основі розробленої методики, обґрунтовується порівнянням з відомими аналітичними результатами.

Вступ.

Визначення нерівномірних температурних полів в вісесиметричних та плоско-деформованих тілах є однією із ланок усієї послідовності інженерних розрахунків термо-напруженого стану конструкцій і конструктивних елементів. Тому від правильного розв'язання цієї задачі залежить успіх розрахунку в цілому. Особливо важливим це уявляється при визначенні ресурсу елементів конструкцій під дією тривалого термосилового навантаження, оскільки в цьому випадку відбувається континуальне руйнування об'єкту. При цьому вплив нерівномірності температурного поля проявляється, як при визначенні температурних де

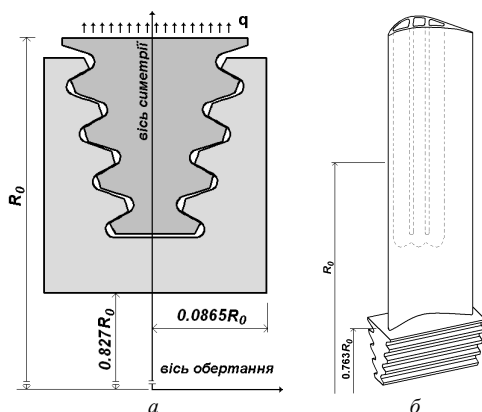


Рис. 1

формацій, так і при необхідності врахування залежності механічних констант від температури. Крім того, в процесі роботи навіть масивного тіла може відбуватися його формозмінення. Воно може хоч і несуттєво впливати на пружно-деформований стан, але як зазначається в багатьох роботах [1-5,7] значно більше може впливати на величину

розрахункового ресурсу. В якості прикладу такого об'єкту розглянуто хвостовик лопатки (рис. 1,а,б) газотурбінної установки (ГТУ), який є складовою частиною ялинкового з'єднання і одним із найбільш напружених і відповідальних елементів.

1. Розв'язувальні співвідношення для двовимірної задачі стаціонарної теплопровідності. Для визначення розподілення температур із використанням МСЕ в якості вихідного взято варіаційне рівняння двовимірної задачі стаціонарної теплопровідності [9]:

$$\delta\chi = \int_{x^1} \int_{x^2} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{g} dx^1 dx^2 = 0, \quad (1)$$

де $g^{\alpha\beta} \sqrt{g}$ - обчислюються в проміжній відрахунковій конфігурації [8]; λ_T - коефіцієнт теплопровідності; T - функція, що описує розподілення температур в площині досліджуваного об'єкта.

При скінченноелементній апроксимації досліджуваного об'єкта для системи з N СЕ зазначене рівняння набуває вигляду:

$$\delta\chi = \sum_{n=1}^N \delta\chi_n = \sum_{n=1}^N \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \lambda_T \left(\frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 = 0 \quad (2)$$

Для чисельного розв'язання задач теплопровідності розроблений плоский скінченний елемент, конфігурація якого є аналогічною СЕ для задач термов'язкопружнопластичного деформування [8]. Загальний вигляд цього СЕ в базисній і місцевій системах координат наведений на рис. 2.

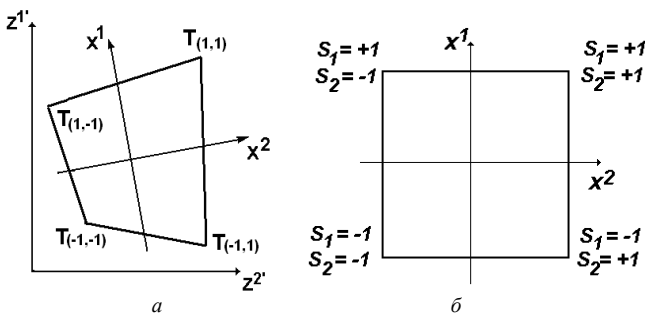


Рис. 2

В межах СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності λ_T змінюється незначно і приймається рівним відповідному значенню в центрі СЕ:

$$g^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ij} = g^{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \lambda_T = \overset{\circ}{\lambda}_T = \lambda_T \Big|_{x^\alpha=0}.$$

В якості невідомих при розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності приймається значення температури в вузлах елемента $T_{(S_1, S_2)}$.

Розподілення температури у межах СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (3)$$

де $T_{(S_1 S_2)}$ – вузлові значення температури.

Вирази для похідних від температури мають вигляд:

$$T_{, \alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha. \quad (4)$$

Після підстановки в (2) значень температури (3) та її похідних (4) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta \chi_n = & \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \lambda_T \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left(T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha \right) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1 P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_\beta \right) g^{\alpha\beta} \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (5) \end{aligned}$$

Грунтуючись на введених гіпотезах про постійність теплофізичних і геометричних характеристик в межах поперечного перерізу СЕ, а також після обчислення наступних інтегралів по площі СЕ:

$$\begin{aligned} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha dx^1 dx^2 = 0, \\ \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^\alpha x^\beta dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}, \quad (6) \end{aligned}$$

отримаємо:

$$\delta\chi_n = \lambda_T \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left[T_{(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{4} S_\alpha P_\beta g^{\circ\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\circ\alpha\alpha} \right) \right] \sqrt{g}$$

або в матричному вигляді:

$$\delta\chi_n = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \left[\delta\{T\}^T [A] \{T\}_l \right], \quad (7)$$

де $\{T\}^T = \{T_{(-1,-1)}, T_{(1,-1)}, T_{(-1,1)}, T_{(1,1)}\}$ – вектор температури; $[A]$ – матриці теплопровідності плоского СЕ, що обчислюються за формулами:

$$[A]_l = \left(\frac{1}{4} S_\alpha P_\beta g^{\circ\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 g^{\circ\alpha\alpha} \right) \sqrt{g} \lambda_l. \quad (8)$$

З метою доведення достовірності результатів розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності із використанням отриманих співвідношень розглянуто тестову задачу про теплопровідність нескінченного циліндру. Вихідні дані: $r_1 = 10$ мм, $r_2 = 40$ мм, температура на внутрішній поверхні стінки $T_1 = 100^\circ\text{C}$, температура на зовнішній поверхні стінки $T_2 = 400^\circ\text{C}$. Дискретна модель МСЕ наведена на рис. 3.

Поверхні вздовж осей z^1 та z^2 абсолютно теплоізолювані. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок отриманий в роботі [9]. Як видно, отримані результати (табл. 1) майже повністю збігаються із еталонним розв'язком.

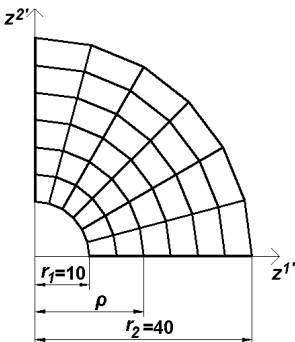


Рис. 3

Таблиця 1

ρ, мм	Температура T, °C		Похибка, %
	Аналітично [9]	МСЕ	
10	100	100	0
15	187,74	186,62	0,60
20	250	247,87	0,85
25	298,27	296,12	0,72
30	337,74	336,62	0,33
35	371,10	370,33	0,21
40	400	400	0

2. Вихідні та розрахункові співвідношення геометрично нелінійної задачі повзучості з урахуванням пошкоженості. При дослідженні геометрично нелінійних задач для двовимірних тіл доцільно використовувати дві системи координат: базисну і місцеву (Лагранжеву).

Опис напружено-деформованого стану об'єктів в процесах, що супроводжуються великими подовженнями і поворотами, як правило, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій x_0^i і актуальній X^i (рис. 4).

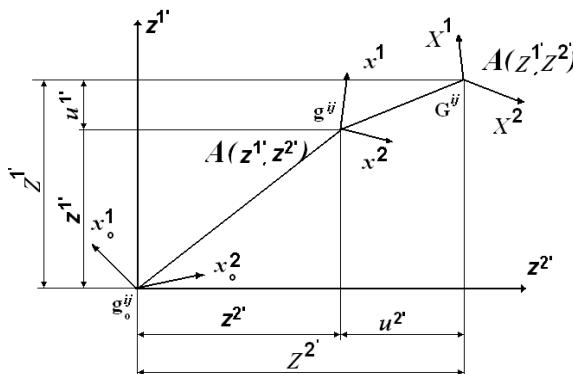


Рис. 4

Повні деформації в актуальній конфігурації визначаються співвідношенням :

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (F^{ij} - G^{ij}). \quad (9)$$

де F^{ij} – компоненти міри деформації Фінгера, що дорівнюють відповідним компонентам метричного тензора в початковій відрахунковій конфігурації g_o^{ij} , $F^{ij} = g_o^{ij}$, де G^{ij} – компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації.

Введемо проміжну перемінну відрахункову конфігурацію x^i (рис.4), компоненти метричного тензора якої позначимо через g^{ij} [8].

Перемінну відрахункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора був малою величиною порівняно з G^{ij} :

$$\Delta G^{ij} = (G^{ij} - g^{ij}) \ll G^{ij}. \quad (10)$$

Використовуючи перемінну відрахункову конфігурацію представимо деформацію в вигляді суми компонент, обумовлених переходом від початкової відрахункової до перемінної і від перемінної до відрахункової конфігурації:

$$\varepsilon_o^{ij} = \varepsilon^{ij} + \Delta \varepsilon^{ij},$$

де

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2} (g_o^{ij} - g^{ij}), \\ \Delta\varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2} (g^{ij} - G^{ij}) = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij}.\end{aligned}\quad (11)$$

Коваріантні компоненти ΔG^{ij} визначаються з умови:

$$G^{ik} G_{kj} = \delta_j^i. \quad (12)$$

Представимо компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації в відповідності з (2) :

$$(g^{ik} + \Delta G^{ik}) (g_{kj} + \Delta G_{kj}) - \delta_j^i = 0. \quad (13)$$

Нехтуючи приростом малих величин $\Delta G^{ik} \Delta G_{kj}$, одержуємо :

$$\Delta G^{ik} g_{kj} + \Delta G_{kj} g^{ik} = 0,$$

звідси

$$\Delta G^{ik} = -\Delta G_{kj} g^{ik} g^{jl}. \quad (14)$$

Коваріантні компоненти приросту деформацій в актуальній конфігурації відносно перемінної відрахункової дорівнюють:

$$\Delta\varepsilon_{kl} = \Delta\varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta\varepsilon^{ij} g_{ik} g_{jl} = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij} g_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2} \Delta G_{kl}. \quad (15)$$

Будемо вважати, що в кожній точці тіла для актуальної і проміжної відрахункової конфігурації відомі компоненти тензору перетворення $z_{,\beta}^{\alpha'}$, і $Z_{,\beta}^{\alpha'}$ відповідно, що обумовлюють зв'язок між місцевою та базисною системою координат:

$$z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}, \quad Z_{,\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X_{\beta}}. \quad (16)$$

Подамо компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат через коефіцієнти перетворення і компоненти метричного тензору базисної декартової системи координат:

$$\begin{aligned}g_{ij} &= z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0, \quad g_{3'3'} = 1 \\ g_{\alpha\beta} &= z_{\alpha}^{v'} z_{\beta}^{v'}, \quad g_{33} = 1\end{aligned}$$

Аналогічно,

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{v'} Z_{\beta}^{v'}, \quad G_{33} = (Z^{2'})^2. \quad (17)$$

Нове положення точки А в системі $z^{i'}$ визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = z^{\alpha'} + u^{\alpha'}.$$

Диференціюючи по x^i , визначимо компоненти тензора перетворення:

$$Z_{,\beta}^{\alpha'} = z_{,\beta}^{\alpha'} + u_{,\beta}^{\alpha'}$$

Представимо коваріантні компоненти метричного тензора $G_{\alpha\beta}$ в актуальній конфігурації через компоненти тензора перетворень:

$$G_{\alpha\beta} = (z_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'}) (z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}) = z_{,\alpha}^{\nu'} z_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}$$

$$G_{33} = (z^{2'} + u^{2'})^2. \quad (18)$$

Перепишемо (18) в вигляді :

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta},$$

$$G_{33} = g_{33} + \Delta G_{33},$$

де

$$\Delta G_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}$$

$$\Delta G_{33} = \left(2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right). \quad (19)$$

Підставляючи (19) в (15), опускаємо в подальшому знак Δ запишемо геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних і контраваріантних компонент приросту деформації в проміжній відрахунковій конфігурації:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}),$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{2} \left(2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2 \right). \quad (20)$$

Згідно з прийнятим припущенням, співвідношення (20) справедливе при малих $\Delta\epsilon_{kl}$ і великих переміщеннях.

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'}),$$

$$\hat{\epsilon}_{33} = z^{2'} u^{2'}.$$

При ізотермічному навантаженні зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями теорії пластичного течіння для матеріалу при ізотропному спрочненні.

Повний приріст тензора деформацій $d\epsilon_{ij}$ дорівнює сумі приросту пружних $d\epsilon_{ij}^e$ і деформацій повзучості $d\epsilon_{ij}^c$

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^c. \quad (21)$$

Передбачається, що пружні деформації малі і зв'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}.$$

Опис деформування в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості здійснюється на основі співвідношень теорії Качанова-Работнова [11,13]:

$$\xi_i^c = D \left(\frac{\sigma_i}{1 - \omega} \right)^m, \quad (22)$$

де інтенсивність швидкості деформацій повзучості $\xi_c^i = \frac{d\epsilon_c^i}{dt}$,

$\epsilon_c^i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_2(D_\epsilon)}$ – інтенсивність деформацій повзучості [12]; t – час, ω –

параметр пошкодженості матеріалу Ю.М. Работнова [13],

$\sigma_i = \sqrt{3 s_{ij} s^{ij} / 2}$ – інтенсивність нормальних напружень; D, m – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Значення величини параметра пошкодженості $\omega = \omega(t)$ змінюється в процесі деформування матеріалу від $\omega_0 = 0$ в вихідному стані матеріалу до $\omega^* = 1$, що відповідає умові локальної втрати несучої здатності.

Взаємозв'язок компонент тензора швидкостей деформацій повзучості ξ_{ij}^c і напружень має вигляд:

$$\xi_{ij}^c = \frac{d\epsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} \xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i}. \quad (23)$$

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості необхідно наведене співвідношення доповнити рівнянням, що описує зміни з часом параметра пошкодженості:

$$\frac{d\omega}{dt} \omega^{-\beta} = C_2 \left[\frac{\sigma_e}{1 - \omega} \right]^m,$$

де σ_e – еквівалентне напруження, обчислене відповідно до обраного критерію міцності [10].

Згідно з роботою [6] найбільш загальною структурою виразу для еквівалентного напруження при ізотропному характері накопичення пошкодженості ϵ :

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}),$$

де $I_1(\sigma_{ij})$, $I_2(s_{ij})$ – відповідно перший і другий інваріанти тензора σ_{ij} і діватора напружень s_{ij} ; α, β, γ – константи матеріалу, $\alpha + \beta + \gamma = 1$

Наведені фізичні співвідношення дозволяють проводити опис процесу континуального руйнування двовимірних тіл на основі моделювання деформацій повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо лінійний зв'язок між приростом деформацій і приростом переміщень. Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, отримаємо вираз варіації енергії:

$$\delta W = (\delta \{u\}^T) [K]_n \{u\}_n, \quad (24)$$

де $[K]_n$ – матриця жорсткості:

$$[K]_n = \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \wedge \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \wedge \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left[\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \wedge \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \wedge \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \wedge \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \wedge \end{bmatrix} \right] \sqrt{g} \right\}. \quad (25)$$

При поданні варіації енергії деформацій в такому вигляді:

$$\delta W = \left(\delta \{u\}^T \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left(\delta \{u\}^T \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \right) \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \sqrt{g} = \delta \{u\}^T \left\{ \overset{\circ}{r} \right\}, \\ \left\{ \overset{\circ}{r} \right\} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B} \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_1 \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \begin{bmatrix} \overset{\circ}{B}_2 \end{bmatrix}^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right) \sqrt{g}, \quad (26)$$

отримаємо вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням повних напружень в актуальній конфігурації за такою формулою (26).

3. Вплив геометричної нелінійності при визначенні величини ресурсу ялинкового з'єднання в умовах повзучості

Хвостовик лопатки (рис. 1) являє собою тіло із складною формою поперечного перерізу і, фактично однорідне в напрямку, перпендикулярному до площини поперечного перерізу. Зважаючи на це, розрахунок хвостовика доцільно виконувати в двовимірній постановці. При роботі ГТУ найбільш значними статичними зусиллями, що виникають в лопатках турбін і передаються на хвостовик є відцентрові зусилля розтягу від лопатки, розподілення яких вздовж поверхні хвостовика є майже сталим.

Внаслідок симетрії при розрахунку розглядалася половина поперечного перетину об'єкта (рис. 5,а). При побудові СЕ сітки використана концепція багатофрагментності.

Граничні умови визначено з умов симетрії та закріплення в радіальному напрямку:

$$u^1(z^1=0)=0,$$

$$u^2(z^2=0)=0,$$

$$u^2(z^2=0,066R_0)=0.$$

Частини поперечного перерізу в межах яких сітка є регулярною – фрагменти позначені на (рис. 5.2,а) цифрами в

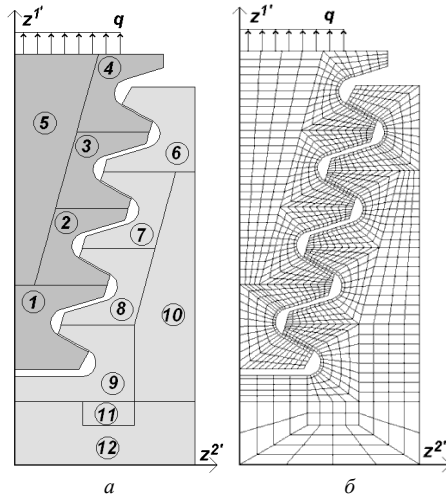


Рис. 5

кружках. Дослідження збіжності отримуваних результатів в залежності від кількості невідомих скінченоелементної моделі проведено шляхом співставлення розподілів безрозмірної інтенсивності напружень для сіток з кількістю невідомих 1074, 3344 та 9596. Похибка визначення напружень при пружному деформуванні становить біля 2%. Тому в подальшому використовуємо сітку з кількістю невідомих 3344 (рис. 5,б).

Для опису деформування матеріалу в умовах повзучості застосовано рівняння:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q}, \quad (5.1)$$

де $B = B(T)$, $C = C(T)$, $m = m(T)$, $n = n(T)$, $r = r(T)$, $q = q(\sigma, T)$ – константи матеріалу, T – температура, ω – параметр пошкодженості Качанова-Работнова, t – час, ε_c – інтенсивність деформацій повзучості, σ – інтенсивність нормальних напружень, $\sigma_e = \sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ – еквівалентне напруження.

Деформована схема об'єкта зображена на рис. 6. Розкриття в галтелі на хвостовику в фрагментах 1, 2, 3, 4 є однаковим.

Отримане розподілення безрозмірної інтенсивності напружень наведено на рис. 7. Також досліджувалася збіжність при квазірегулярному згущенні в фрагменті 1, де виникають максимальні напруження.

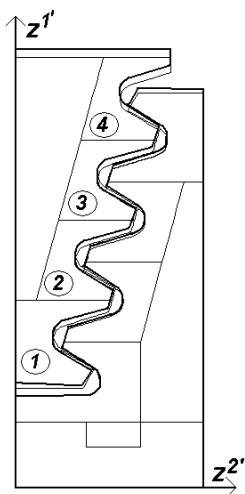


Рис 6.

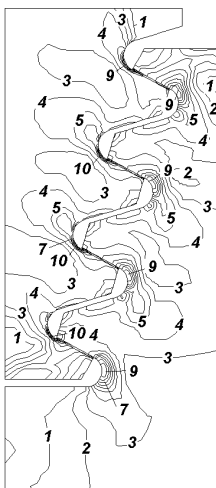


Рис 7.

Поз. на ізол.	σ_i / σ_0
1	0,12
2	0,24
3	0,36
4	0,48
5	0,60
6	0,72
7	0,84
8	0,95
9	1,07
10	1,19
$\sigma_i / \sigma_0 (\max)$	1,3

Згущення виконувалось в такій послідовності: по радіусу 9 елементів (рис. 8,а), по радіусу 13 елементів (рис. 8,б). В останньому варіанті в місці концентрації напружень, характерні розміри СЕ в напрямку z^1 суттєво перевищували розміри в напрямку z^2 в зв'язку з цим проведено згущення в коловому напрямку вздовж галтелі (рис. 8,в). Розподілення безрозмірної інтенсивності напружень для трьох дискретних моделей є однаковим.

Для більш детального аналізу збіжності результатів було досліджено розподілення безрозмірної інтенсивності напружень хвостовика вздовж радіусів 1, 2, 3, 4 галтелей (рис. 9), та по дузі тих самих галтелей (рис. 10), що проходить через точку максимальних напружень.

Показані результати, отримані при застосуванні скінченоеlementних моделей з кількістю невідомих 3344 та 9596, які майже повністю співпали між собою (похибка менше 1%), в той же час на сітці з кількістю невідомих 1074 отримані максимальні напруження є меншими майже на 10%. Розподілення інтенсивності напружень показано на (рис. 11,а) по дузі галтелі, що проходить через точки виникнення максимальних напружень фрагмента 1 та на (рис. 11,б) по радіусу галтелі.

В подальшому досліджувався вплив геометричної нелінійності в умовах повзучості на напружено-деформований стан об'єкту та величину основного ресурсу хвостовика до досягнення параметром пошкодженості критичного значення $\omega^* = 1$.

На рис.12 проілюстровано зміну безрозмірної інтенсивності напружень і пошкоженості з часом в нижній галтелі хвостовика з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності.

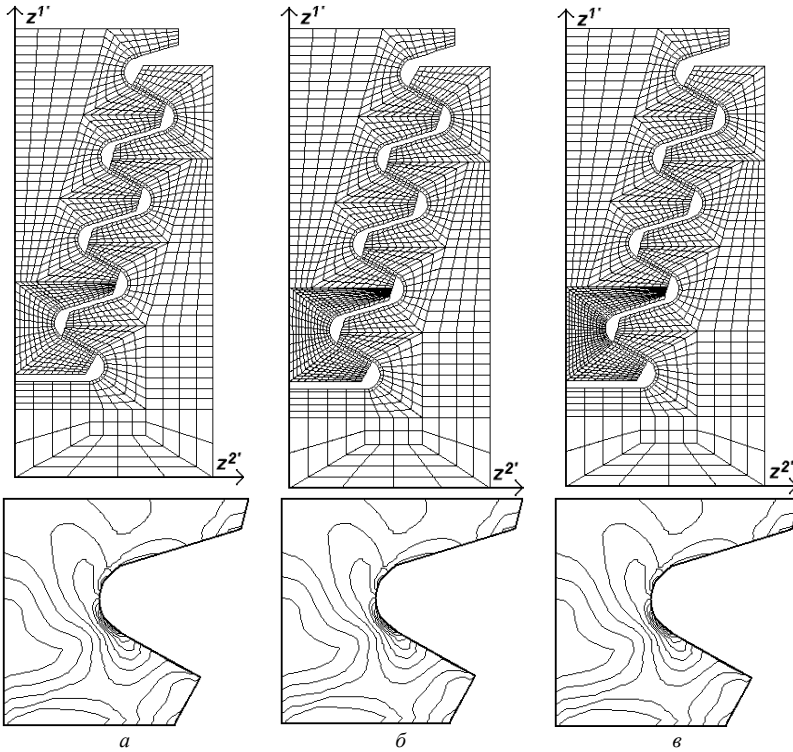


Рис. 8

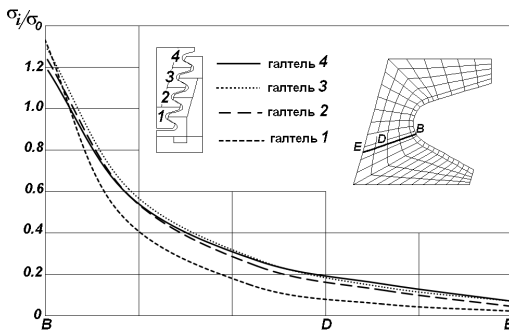


Рис. 9

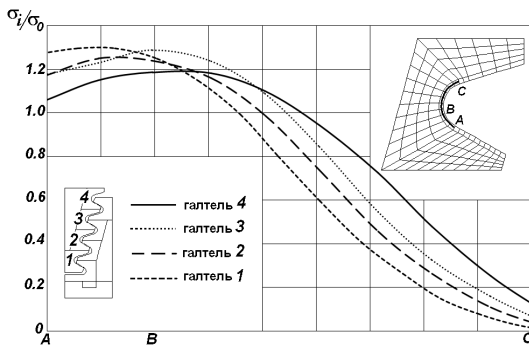


Рис. 10

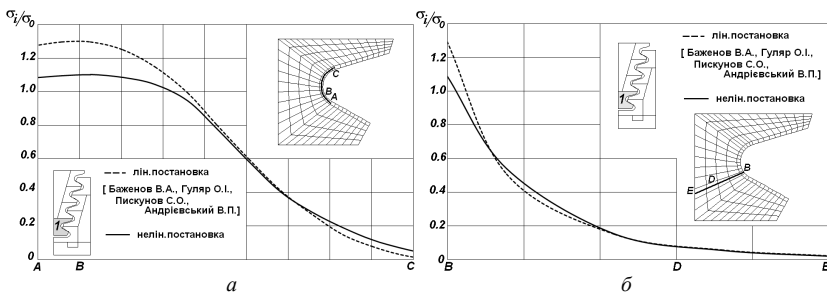


Рис. 11

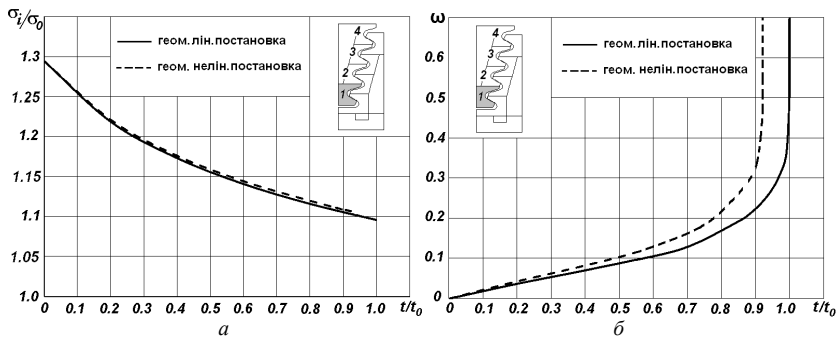


Рис. 12

На рис. 13,*a* показане накопичення різниці величини пошкодженості $\Delta\omega$ у відсотках обчислене в точці максимальних значень ω ,
$$\omega = \frac{\omega_{\text{геом.лін.}} - \omega_{\text{геом.нелін.}}}{\omega_{\text{геом.лін.}}} \cdot 100\%$$
 , за часом між результатами отриманими з

урахуванням і без урахування геометричної нелінійності. Розглядаючи графік можна зробити висновок, що накопичення різниці відбувається по лінійному закону. На рис. 13,б показано розподілення параметра пошкоженості вздовж радіусу цієї галтели в момент часу $0,8t_0$.

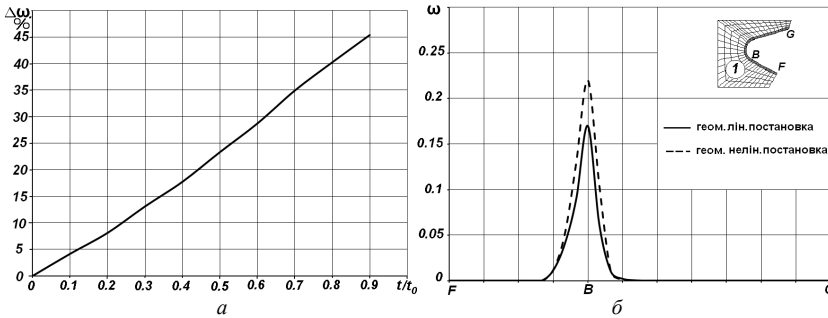


Рис. 13

Аналіз показав, що зміна інтенсивності напружень при геометрично лінійній і нелінійній постановках складає порядку біля 0,6%. В той же час величини пошкоженості відрізняються майже вдвічі, а ресурс зменшується на 8%.

На другому етапі розв'язання даної задачі проведено дослідження впливу неоднорідного температурного поля на еволюцію параметрів напружено-деформованого стану і розрахунковий ресурс хвостовика лопатки з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності. Зміна температури по висоті поперечного перерізу хвостовика лопатки описується лінійним законом, максимальні і мінімальні значення лежать в межах $\pm 0.5\%$ від значення температури в перерізі, що знаходиться на відстані $0,9345R_0$ від осі обертання диска.

В першу чергу для більш детального аналізу впливу температурного поля було досліджено відмінності розподілення безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 14,а) та пошкоженості (рис. 14,б) на протязі усього часу експлуатації в точці, де виникають максимальні напруження з урахуванням ($T \neq \text{const}$) і без урахування ($T = \text{const}$) неоднорідного температурного поля.

По-друге було досліджено розподілення безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 15,а) та пошкоженості (рис. 15,б) по самій галтелі що проходить через СЕ де виникають максимальні напруження.

При проведенні розрахунку передбачалось, що внаслідок малих розмірів хвостовика по висоті вплив температурних деформацій на напружено-деформований стан є незначним. В той же час залежність

констант рівнянь (5.1) від температури приводить до суттєвих відмінностей в перебігу процесу повзучості при урахуванні неоднорідного розподілу температури, що призводить до зміни ресурсу. Для даного розподілення температури значення розрахункового ресурсу становить $t_T=0,91t_0$.

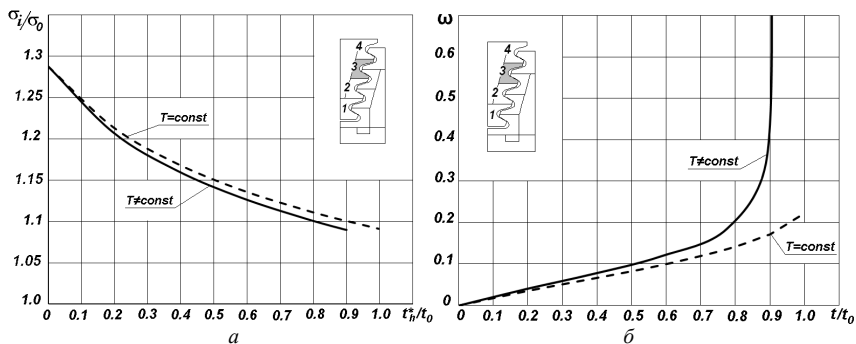


Рис. 14

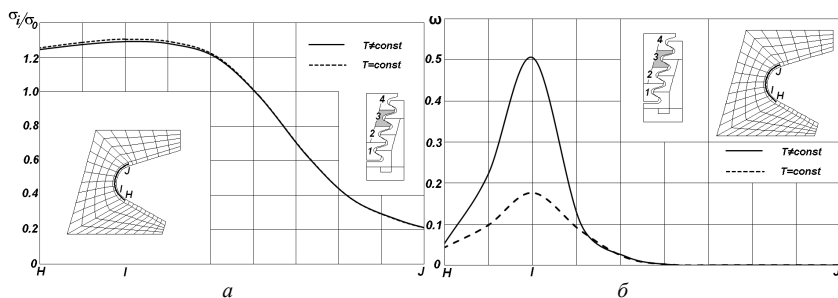


Рис. 15

З графіка зміни безрозмірної інтенсивності напружень (рис. 16,а) та параметра пошкоженості з часом (рис. 16,б), що побудовані із урахуванням та без урахування геометричної нелінійності видно, що врахування нерівномірного розподілення температури в хвостовику приводить до зміни розташування точки, де виникають максимальні значення пошкоженості порівняно з розрахунком при постійній температурі.

Максимальні значення напружень в початковий момент часу виникають в точці В, що знаходиться на галтелі фрагмента 1, а максимальні значення пошкоженості виникають в точці L фрагмента 3.

На (рис. 17,а) показана накопичення різниці величин пошкоженості ($\Delta\omega$) за часом з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності

для галтелі L фрагмента 3. Також на (рис. 17,б) показано зміну параметра пошкоженості вздовж радіусу цієї галтелі в момент часу $0,8t_0$.

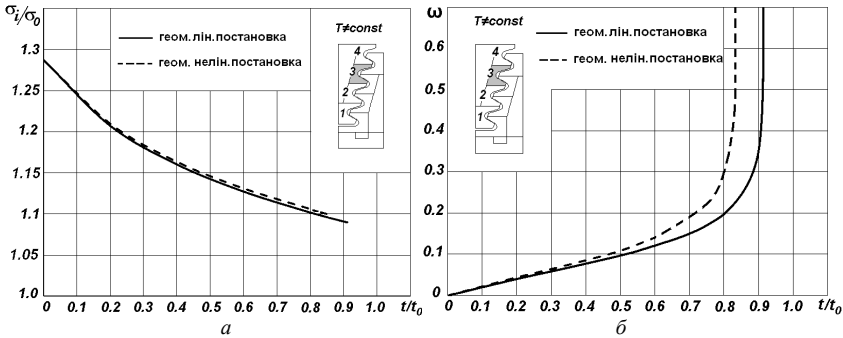


Рис. 16

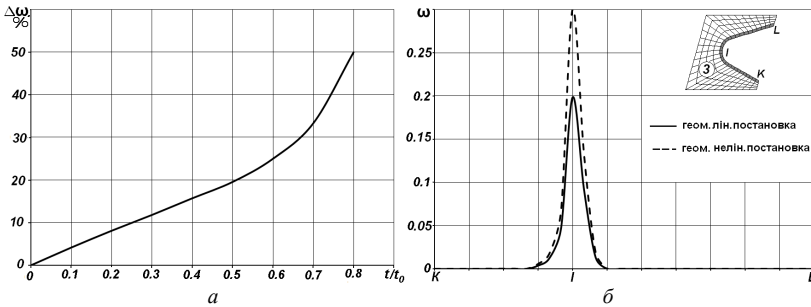


Рис. 17

Висновки. В даній роботі отриманий вираз матриці теплопровідності (8) плоского СЕ. Ефективність отриманих співвідношень стаціонарної теплопровідності було показано на тестовому прикладі про теплопровідність нескінченного циліндру. Отримані результати майже повністю збігаються із еталоном. Проведене дослідження урахування геометричної нелінійності на ресурс хвостовика лопатки стаціонарної газотурбінної установки (ГТУ) в умовах повзучості з урахуванням пошкоженості матеріалу та в умовах термосилового навантаження показало, що врахування нерівномірного розподілення температур по висоті дозволяє уточнити розрахунковий ресурс більш ніж на 9%.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Анищенко Г.О., Морачковский О.К.* Обзор решений задач ползучести и разрушения елочных замковых соединений лопаток ГТД. – Весник націогального технічного університета «ХПИ» - Харьков.: №38, 2007.
2. *Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
3. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1976. – 360 с.
4. *Гецов Л.Б.* Материалы и прочность деталей газовых турбин. – М.: Недра, 1996. – 591с.
5. *Гецов Л.Б.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Санкт-Петербург.:Изд. Политехнического университета, 2005. – 52 с.
6. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикл. механика. – 2000. – № 3. – С. 31–66.
7. *Грубин Н.А.* Расчет на прочность елочного замка лопаток турбин. – М.: Машиностроение, 1970. – 184 с.
8. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В., Сизевич Б.І* Розрахункові співвідношення МССЕ геометрично нелінійної задачі темов'язкопружно-пластичного деформування вісесиметричних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу. - Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.79, 2007.
9. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. –М.: Мир, 1975. – 539 с.
10. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974.– 312 с.
11. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
12. *Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач в машиностроении: в 2 ч.* – К.: Вища школа, 1991.– Ч. 2. Можаровский Н.С., Качаловская Н.Е. Методы и алгоритмы решения краевых задач.: Учеб.пособие – 287 с.
13. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.

Стаття надійшла до редакції 03.10.11.

Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В., Сизевич Б.І.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрен двумерный плоский конечный элемент (КЭ) для решения стационарной задачи теплопроводности в геометрически нелинейной постановке и полученная матрица теплопроводности. Достоверность результатов, которые получаются на основе разработанной методики, обосновывается сравнением с известными аналитическими результатами.

Guliar A.I., Piskunov S.O., Maksymiuk Y.V., Syzevych B.I

THE FEATURES OF DECISION OF TWO-DIMENSIONAL TASKS OF STATIONARY HEAT-CONDUCTING AND CREEP

Taking into account geometrical non-linearity are considered two-dimensional flat complete element (THIS) for the decision of stationary task of heat-conducting in the geometrically nonlinear raising and got matrix of heat-conducting. Authenticity of results which turn out on the basis of the developed method is grounded comparing to the known analytical results.

УДК 539.3

О.І. Гуляр, д-р техн. наук,
П.П. Лізунов, д-р техн. наук,
І.І. Солодей, канд. техн. наук

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОЯВИ ТА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗОН РУЙНУВАННЯ КРУГОВИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИСПЕРСНО-АРМОВАНИХ ТІЛ

Представлені дослідження спрямовані на створення нових фізичних і математичних моделей та алгоритмів ефективного чисельного моделювання нелінійної роботи широкого класу просторових залізобетонних конструкцій з урахуванням пластичних деформацій, тріщиноутворення і спільної роботи з армуванням та облицюванням.

Вступ

Актуальність створення ефективних методів розрахунку залізобетонних конструкцій обумовлена двома чинниками: широким застосуванням залізобетону в сучасному промисловому й цивільному будівництві, а також складністю фізичних процесів, що протікають при деформації і руйнуванні цього матеріалу. Найбільше поширення залізобетонні конструкції отримали при зведенні житлових, громадських і промислових будівель, гідротехнічних, транспортних споруд, в енергетичному будівництві. При розрахунку багатьох унікальних об'єктів (корпуси реакторів, градирні, захисні оболонки АЕС) домінуючою вимогою є надійність, тоді як для типових (фундаменти дрібного закладання, стінні панелі) - економічність. Але в обох випадках розрахунок повинен передбачати можливість тріщиноутворення в бетоні. Тільки аналіз роботи конструкцій з урахуванням розвитку тріщин дозволяє розкрити особливості взаємодії бетону, що сприймає стискаюче напруження, і арматури, переважно працюючої на розтяг, і передбачити спеціальні заходи (наприклад, попереднє напруження), що запобігають руйнуванню матеріалу або обмежують зони утворення тріщин.

В області розрахунків залізобетонних конструкцій з урахуванням тріщиноутворення досягнуті значні успіхи, однак залишається ряд важливих невирішених завдань, серед яких розглянемо наступні. Відомі умови міцності бетону і використані в них константи справедливі тільки у деякому діапазоні геометричних розмірів зразків і елементів конструкцій. Відсутність позитивного досвіду чисельного моделювання тріщиностійкості і деформативності бетону у мікроскопічних об'ємах на контакт з арматурою періодичного профілю свідчить про необхідність

розвитку феноменологічних теорій опору бетону в умовах неоднорідного напруженого стану. Крім того, складність розрахунків таких перспективних залізобетонних конструкцій, як ядерні реактори, обумовлена необхідністю урахування спільної роботи масиву бетону зі сталевими герметизуючими облицюваннями і металоконструкціями, що підсилюють зони концентрації напружень.

У рамках традиційних інженерних методик практично неможливо розрахувати реальні залізобетонні конструкції складної просторової форми з використанням математичних моделей, що адекватно описують нелінійну роботу залізобетону, ґрунтової основи і тонкостінних металевих елементів. Тому перспективним представляється комбінація математичних моделей нелінійної роботи конструкційних матеріалів із чисельними методами будівельної механіки та шагово-ітераційними алгоритмами. Ця методика дозволяє простежити послідовність станів досліджуваного об'єкта від початку навантаження до граничного навантаження без внесення будь-яких обмежень на характер вичерпання несучої здатності.

1. Структура бетону та деякі особливості його механічних властивостей

Як відомо, бетон є неоднорідним матеріалом для якого характерна наявність великого і дрібного заповнювача, пор та усадочних мікротріщин [12], які негативно впливають на опір бетону зовнішнім впливам. Однак, як відзначає А.А.Гвоздьов [18], ці фактори в ряді випадків визначають важливі позитивні властивості бетону. З одного боку, неоднорідність структури бетону сприяє утворенню мікротріщин, а з іншого - гальмує їх переростання в макротріщини і розвиток, небезпечний для опору матеріалу навантаженням.

Як відзначається в роботі Glucklich [28], розвиток тріщини в бетоні при зустрічі із зернами заповнювача, порами або порожнечами уповільнюється. Зерно великого заповнювача має підвищену міцність у порівнянні з розчином і перешкоджає подальшому просуванню тріщини, для якого необхідно або руйнування зерна, або зміна траєкторії тріщини. Пори і порожнечі, яких досягає вершина тріщини, зменшують концентрацію напружень в усті тріщини, що також затримує її розвиток. Аналогічна концепція висловлена В.В.Новожиловим [16], який припускав, що дефекти структури матеріалу і їх скупчення створюють енергетичні бар'єри на шляху поширення тріщин.

Неоднорідність структури бетону, наявність природніх концентраторів напружень і складного поля вторинних напружень обумовлюють низьку чутливість бетону до зовнішніх концентраторів напружень. Експерименти, проведені Shah і Mcgarry [19] при

випробуваннях на вигин балок із трикутним ослабленням розтягнутої зони під вантажем, і досліди на розтяг із плоскими зразками, ослабленими по краях або посередині перетину, показали, що вплив зовнішніх концентраторів напружень на зменшення рівня руйнівного напруження було тим менше, чим більше неоднорідність бетону. Зокрема, для вигину балок з важкого бетону - не досягало 6%. Аналогічні дані наведені в роботі Г.Д. Цискрелі [24], де викладені результати випробувань на розтяг і вигин бетонних зразків з надрізами різної форми і розмірів. Наявність пропилив трикутної, кругової і прямокутної форми в середині прольоту балки під зосередженим навантаженням приводило до зменшення руйнівного напруження на 13-17%. Гранична величина напруження при розтязі зразків призматичної форми з надрізами трикутного профілю однакової глибини зменшувалася на 6-11% залежно від форми надрізу. На цій підставі автором [24] зроблено висновок про те, що бетон мало чутливий до концентрації напружень у вигляді надрізів. До аналогічного висновку приводять результати роботи Wright і Вугле [31].

Деформування і руйнування бетону - складний процес. Мікроскопічні дослідження структури призматичних зразків із дрібнозернистого бетону показали [3,14], що існування хрупкого і пластичного стану в їх традиційному розумінні (тобто малі деформації і руйнування шляхом відриву, характерні для хрупкого матеріалу, великі нелінійні деформації і руйнування від зсуву - у випадку пластичного матеріалу) характерні для бетону при одночасній дії таких явищ, як утворення мікротріщин, з одного боку, та пластичного ковзання і механічного удвоєння з іншого. Всебічне обтиснення перешкоджає тріщиноутворенню і дозволяє розвиватися пластичним деформаціям. Позитивний гідростатичний тиск (всебічний розтяг) приводить до того, що домінує розвиток мікротріщин і матеріал руйнується крихко, а негативне - обумовлює прояв пластичних властивостей.

Масштабний фактор, тобто вплив об'єму бетонного зразка на його характеристики міцності, встановлений у численних експериментах і враховується державними будівельними нормами при призначенні розмірів зразків для контрольних випробувань. Необхідність урахування масштабного фактора в задачах зчеплення на основі теорії, яка б пов'язувала поведінку бетону у великих і малих об'ємах, відзначається М.М. Холмянським [22], оскільки в подібних дослідженнях доводиться аналізувати міцність бетону в різних областях.

Пояснення масштабного ефекту обґрунтовується в рамках статистичної теорії крихкого руйнування [5]. Ідея побудови статистичної теорії запропонована А.П. Александровим і С.М. Журковим [1] і далі розвинена в роботах Вейбулла (Weibull) [30], В.В. Болотина [5] та ін.

Згідно [30] руйнування залежить від місцевого напруження в точці, де спостерігається найнебезпечніший дефект структури. Тіло має багато дефектів різного ступеня небезпеки, які підпорядковуються деякому статистичному розподілу. Чим крупніше тіло, тим більше ймовірність виявити первинний елемент низької міцності і тим нижче міцність тіла в цілому. Для природніх і штучних каменів роль первинних елементів відіграють зерна і поверхні контакту (спайки) між ними.

На основі аналізу результатів великої кількості випробувань бетонних зразків при осьовому розтязі і концепцій статистичної теорії Вейбулла в роботі Г.Д. Цискрелі [24] запропонована залежність, що описує масштабний ефект:

$$\frac{R'_p}{R_p} = 0.3 \left(1 + \frac{11}{\sqrt[3]{F}} \right). \quad (1)$$

Тут R'_p - міцність зразка довільних розмірів, R_p - міцність зразка основного розміру, F - площа поперечного перерізу першого зразка. Відповідно до (1) при зменшенні розмірів бетонного зразка до величин порядку 1-2 мм міцність зростає в 10-15 разів у порівнянні з нормативною, що узгоджується з даними М.М. Холмянського [21] і результатами експериментальних досліджень Ш.А. Алієва [2], Ф.С. Белавіна [23] і Rehm [29]. Експерименти полягали у висмикуванні із бетонного зразка анкерів різної форми і розмірів (анкери мали вигляд шайб і квадратних пластинок). Автором роботи [22] був зроблений висновок про збільшення міцності бетону в малому об'ємі стосовно опору матеріалу зсуву (τ_s). Це достатньо умовно, тому що складний напружений стан бетону, що взаємодіє з анкером, відрізняється від чистого зсуву. Наведені вище міркування про масштабний характер міцності бетону і статистичний підхід можуть, очевидно, пояснити високу міцність бетону в області контакту з арматурами періодичного профілю. Так, М.М. Холмянский [22] відзначив, що шар бетону товщиною порядку декількох міліметрів, що безпосередньо примикає до профільованого арматурного стрижня, здатний сприймати значні нелінійні деформації і напруження, які в кілька разів перевищують межі міцності, що встановлені на стандартних зразках. Підвищена деформативність шару бетону в контакт з арматурою передбачалася також М.І. Карпенко [9].

Донедавна будівельними нормами передбачалося урахування збільшення границі опору бетону стиску при вигині балок. У середньому міцність на стиск при вигині має вигляд:

$$R_c'' = 1.25 R_c, \quad (2)$$

де R_c - призмenna міцність. Це явище можна пояснити зменшенням об'єму, у межах якого діє небезпечне напруження. Скептичне відношення до відмінності опору бетону нерівномірному і рівномірному стиску автори [8] обґрунтовують великим розсіюванням дослідних даних. Розглянуте явище, очевидно, носить масштабний характер, що необхідно враховувати при систематизації результатів випробувань. При випробуваннях бетонних зразків з постійною швидкістю деформування (кінематичне навантаження) спостерігається спадна гілка діаграми напруження - деформація. Це явище, відоме також за назвою "деформаційне знеміцнення", може проявлятися тільки тоді, коли розмір крупного заповнювача не занадто малий у порівнянні з розміром зразка, а дослідна машина має достатню твердість [26]. Його природа обумовлена поступовим розвитком мікротріщин, розподілених в об'ємі бетону [27]. Урахування спадної гілки діаграми деформування бетону дозволяє уточнити неоднорідний розподіл напружень у статично невизначених системах, однак деформаційне знеміцнення ще мало вивчене для того, щоб виконувати чисельні розрахунки [15].

Аналіз викладених механічних властивостей бетону, обумовлених його складною структурою, дозволяє стверджувати, що в основу методики розрахунків залізобетонних конструкцій повинна бути покладена теорія, що адекватно описує такі явища, як пластичність, деформаційне знеміцнення, тріщиноутворення, залежність міцності і деформативності від виду напруженого стану і масштабного фактору.

2. Побудова критерію міцності бетону в зонах концентрації напружень

Приймаємо наступні фізичні припущення, що основані на викладених вище особливостях структури і поведінки бетону при навантаженні:

1. В умовах неоднорідного напруженого стану міцність R_D малого бетонного елемента конструкції під дією осередненого в межах цього елемента напруження σ_D буде така ж, як міцність зразка бетону аналогічного розміру при однорідному розподілі напруження такого рівня, що і осереднене σ_D . Інакше кажучи, в умовах неоднорідного напруженого стану осереднена частина розподілу напруження σ_D діє на малий елемент конструкції, у межах якого проводиться осереднення, так само, як і однорідно розподілене напруження σ_D на зразок таких же розмірів.

2. Під елементом конструкції маємо на увазі елемент, який за формою близький до куба, з розмірами, що оговорені в пп. 3 і 4.

3. За верхню границю приймається розмір зразка, рекомендований

ДСТ для стандартних випробувань на міцність, або максимальна відстань до зовнішньої поверхні досліджуваної області. Таким чином, верхня границя розміру малого елемента приймається рівною мінімальній із зазначених величин.

4. Нижня границя визначається розмірами зерен матеріалу. В роботі [16] представлені рекомендації до вибору області розміром порядку розміру зерна для осереднення напруження в околі точки, де напруження і його градієнти нескінченно великі. У розглянутому випадку (для бетону в задачах зчеплення) нижня границя розміру малого елемента приймається рівною середньому розміру зерна дрібного заповнювача (0.1-0.2 мм).

5. У випадку однорідного напруженого стану міцність конструкції або зразка визначається у відповідності до їх габаритних розмірів.

6. Міцність малого елемента бетону R_D залежить від розміру цього елемента і приймається згідно з масштабним співвідношенням, яке запишемо за аналогією з (1) у вигляді:

$$\frac{R_D}{R} = 0.356(1 + 11V_D^{-2/9}), \quad (3)$$

де R - міцність бетонного зразка стандартних розмірів (його характерний лінійний розмір, тобто розмір сторони квадратного перетину - 15 см); V_D - об'єм малого елемента бетону у формі куба зі стороною D .

Треба зазначити, що:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{F}} = \frac{1}{\sqrt[3]{D^2}} = D^{-2/3} = \left(\sqrt[3]{V_D}\right)^{-2/3} = V_D^{-2/9}. \quad (4)$$

На основі викладених фізичних передумов сформулюємо концепцію опору бетону в умовах неоднорідного напруженого стану, що ґрунтується на масштабному характері умов міцності неоднорідного матеріалу. За кількісну характеристику неоднорідності напруженого стану в околі концентратора приймаємо функцію $\sigma_D = \sigma_D(V_D)$, де V_D - об'єм області, що включає в собі концентратор, та в межах якої відбувається осереднення напруження σ_D . За кількісну характеристику міцності бетону в умовах неоднорідного напруженого стану скористаємося функцією $R_D = R_D(V_D)$ у вигляді експериментально встановленої залежності (3). Таким чином, умова міцності визначається нерівністю $\sigma_D < R_D$ (σ_D і R_D обчислюються при тому самому значенні V_D).

Застосування умови міцності (3) для двох різних функцій $\sigma_{D1} = \sigma_{D1}(V_D)$ і $\sigma_{D2} = \sigma_{D2}(V_D)$ розподілу напруження в околі деякої точки A конструкції наведено на рис. 1.

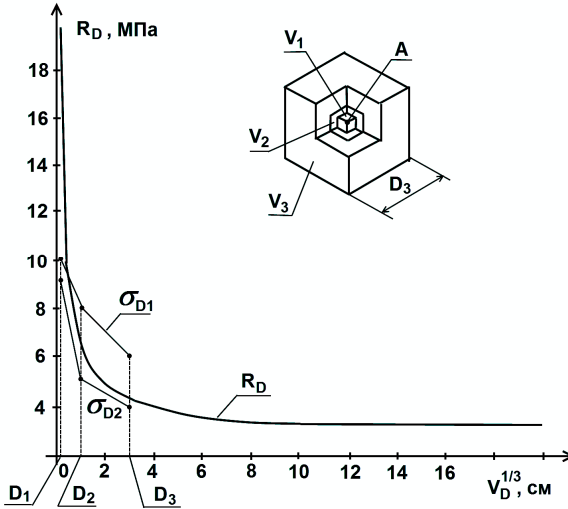


Рис. 1. Оцінка міцності бетону в зоні концентрації напружень ($R = 2 \text{ МПа}$)

Якщо криві $\sigma_{D1} = \sigma_{D1}(V_D)$ і $R_D = R_D(V_D)$ не перетинаються, то припускаємо, що градієнт напруження в околі точки A великий настільки, що ймовірність руйнування бетону нехтовно мала. Якщо криві $\sigma_{D2} = \sigma_{D2}(V_D)$ і $R_D = R_D(V_D)$ перетинаються, то вважаємо, що напружений стан в околі точки досить однорідний і ймовірність руйнування бетону велика.

Оскільки в літературі відсутні систематизовані експериментальні дані про значення граничної деформації в умовах неоднорідного напруженого стану, за перше наближення приймаємо величину ε'_D , що пропорційна збільшенню міцності згідно з рівнянням (3):

$$\frac{\varepsilon'_D}{\varepsilon'} = \frac{R'_D}{R}, \quad (5)$$

де ε' - гранична деформація бетонного зразка стандартних розмірів у випадку однорідного напруженого стану.

При чисельній реалізації розрахунків на базі МСЕ в якості мінімального елемента бетону, в межах якого осереднюється напруження, доцільно використовувати скінченні елементи. Крім того, осереднення напруження необхідно виконувати і в межах більших підобластей конструкції, що складаються із декількох СЕ.

Аналіз міцності конструкції для дискретної моделі виконується у відповідності з наступним алгоритмом:

1. осереднене в межах СЕ напруження σ_D^{fe} порівнюємо з границею міцності R_D^{fe} , що відповідає його розміру, при $\sigma_D^{fe} > R_D^{fe}$ фіксуємо утворення тріщин, в іншому випадку переходимо до процедури п. 2;

2. обчислюємо напруження σ_D^{fes} , що осереднене по набору скінченних елементів, суміжних з розглянутим (включаючи цей СЕ); можливі кілька етапів осереднення, результатом яких будуть значення $\sigma_{D1}^{fes}, \sigma_{D2}^{fes}, \dots, \sigma_{Dn}^{fes}$, відповідні до зростаючих розмірів області осереднення напружень;

3. кожне з отриманих значень напруження σ_{Dn}^{fes} порівнюємо з границею міцності R_{Dn}^{fes} , що відповідає розміру області осереднення напруження; утворення тріщин у розглянутому СЕ фіксуємо в тому випадку, якщо хоча б на одному з етапів осереднення виконується умова $\sigma_{Dn}^{fes} > R_{Dn}^{fes}$.

Природно, що в умовах складного напруженого стану під напруженням σ_D маємо на увазі деяку скалярну функцію (функцію міцності) інваріантів тензора напружень $\hat{\sigma}_D$, а під R_D - граничне значення функції міцності для розглянутого виду напруженого стану і характеристик міцності бетону, обчислених згідно (3) для відповідних розмірів області осереднення міцності σ_D . Конкретний вид функції міцності визначається обраною теорією міцності бетону.

Таким чином, викладені вище фізичні передумови і концепція опору бетону є узагальненням особливостей поведінки бетону в умовах неоднорідного напруженого стану і розвитком відомих підходів до урахування концентрації напружень і масштабного ефекту. Заснована на них математична модель опору бетону реалізується як алгоритм осереднення функції міцності в області концентрації напружень.

3. Узагальнення теорії М.І.Карпенко при моделюванні деформування та руйнування бетону з урахуванням концентрації напружень

В запропонованій роботі розрахункові співвідношення для опису деформативності і міцності бетону в умовах тривимірного напруженого стану отримані на основі теорії М.І. Карпенко [12,13], яка має низку переваг у порівнянні з іншими відомими теоріями. Наприклад, ортотропна модель нелінійного деформування дозволяє враховувати спрямований розвиток дилатації, зменшення (спадаючи гілку діаграми напруження - деформація) і особливості поведінки бетону при стисненні і розтязі. Форма поверхні міцності відповідає сучасним вимогам до феноменологічних теорій міцності матеріалів з різним опором розтягу і

стисненню [17, 25]. Крім того, вона залежить від особливостей опору конкретного виду бетону, які встановлюються при стандартних випробуваннях виготовлених з нього зразків. Умова міцності придатна для широкого класу бетонів і забезпечує достатньо близький збіг з експериментальними даними для різноманітних варіантів тривимірного напруженого стану [12]. Для важкого бетону умова міцності інтерпретується в просторі головних напружень граничною поверхнею (рис. 2), яку представимо у вигляді рівняння:

$$\frac{3\tau_{oc}^2}{3+\mu_\sigma^2} [b(3+\mu_\sigma)+a(3-\mu_\sigma)] - \frac{\tau_{oc}R_{bD}}{\sqrt{2(3+\mu_\sigma^2)}} [k_c(3-6b-\mu_\sigma)+6\delta_p] - \frac{6\tau_{oc}\sigma_{oc}}{\sqrt{2(3+\mu_\sigma^2)}} (b-a) + \sigma_{oc}k_cR_{bD} - \delta_p k_c R_{bD}^2 = 0, \quad (6)$$

де a і b - коефіцієнти матеріалу; σ_{oc} і τ_{oc} - нормальне і дотичне октаедричні напруження; μ_σ - параметр Лоде-Надаї; k_c - функція, що враховує вплив виду напруженого стану на зміну міцності бетону в області тривимірного або двовимірного стиснення; δ_p - функція, що дозволяє врахувати вплив виду напруженого стану на міцність бетону в умовах всебічного або двохосьового розтягу.

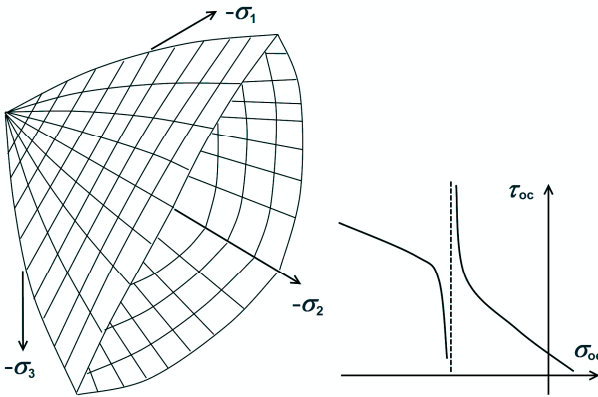


Рис. 2. Поверхня міцності бетону ($\mu_\sigma = -0.4641$)

Тут і надалі будемо використовувати параметри R_{bD} і R_{btD} , що характеризують міцність бетону в умовах неоднорідного напруженого стану згідно п.2 на відміну від [12], де за постійні матеріалу

застосовують R_b і R_{bt} - границі міцності бетону при стандартних випробуваннях на осьовий стиск і розтяг.

Особливістю критерію (6) є також використання коефіцієнта $\aleph = \sigma_{oc} / \tau_{oc}$, який поряд з параметром Лоде-Надаї характеризує вид напруженого стану, а також функції міцності $s = \sigma_{oc} / \tau_{oc}^*$, де τ_{oc} і τ_{oc}^* - досягнуте і граничне значення октаедричного дотичного напруження. Перевага такого підходу полягає в тому, що обчислення функції s дозволяє не тільки визначити чи досягнути границі міцності, але також і оцінити при $s < 1$ у скільки разів слід збільшити навантаження, для того щоб утворювалися тріщини. Значення τ_{oc}^* обчислюється за допомогою рівняння, яке отримане при підстановці $\sigma_{oc} = \aleph \tau_{oc}$ в (6):

$$A^* \tau_{oc}^2 + B^* \tau_{oc} + C^* = 0, \quad (7)$$

де

$$A^* = \frac{3}{R_{bD}(3 + \mu_\sigma^2)} \left[\aleph(b-a) \sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)} - b(3 + \mu_\sigma) - a(3 - \mu_\sigma) \right];$$

$$B^* = \frac{1}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} \left[k_c(3 - 6b + \mu_\sigma) + 6\delta_p \right] - \aleph k_c; \quad C^* = \delta_p k_c R_{bD}.$$

Рівняння (6) задовольняється при підстановці головних напружень, відповідних до одноосового розтягу ($\sigma_1 = R_{bD}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), якщо коефіцієнт b обчислюється по формулі:

$$b = \frac{\delta_p}{k_c + \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \delta_p - n \delta_p}, \quad (8)$$

де $n = a / b$.

Однак, як показав аналіз функції (6), формула (8) приводить до розриву при $\sigma_1 = 0$ в області негативних значень σ_{oc} (рис. 2). В даній роботі формулу (8) використовували лише при $\sigma_{oc} \geq 1/3 R_{bD}$, а при $0 \leq \sigma_{oc}$ згідно [11] встановлювали $b = 0.1$. В інтервалі $0 < \sigma_{oc} < 1/3 R_{bD}$ коефіцієнт обчислювали за допомогою інтерполяції:

$$b = b_c - (b_c - b_i) \frac{3\sigma_{oc}}{R_{bD}}, \quad (9)$$

де значення b_i визначалося по (8), а $b_c = 0.1$.

Перевірка міцності за критерієм (6) здійснюється як послідовність обчислювальних процедур, вихідними даними для яких є:

- константи матеріалу R_{bD} і R_{btD} , які встановлюються згідно

державним будівельним нормам або стандартним випробуванням зразків і корегуються з урахуванням концентрації напружень відповідно до п. 2;

- параметри моделі, не пов'язані з напруженим станом, а залежні лише від виду бетону, обчислюються згідно [12] по (8) і (9):

$$n = 0; a = nb;$$

$$\delta_{p(1)} = \frac{R_{bD}}{R_{bD}}; \delta_{p(2)} = \delta_{p(1)} (1 - \delta_{p(1)}); \Phi_{R(e)} = 3\delta_{p(2)};$$

$$c = \frac{1 - (1+d)e}{(1+d)(1-e)}; d = \sqrt{0.5}; e = 0.3 + \frac{R_b}{200(MПа)}; \quad (10)$$

$$\mu_3^* = -0.6; \Delta = 0.25\delta_{p(1)};$$

- головні напруження в бетоні $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, отримані з розрахунку конструкції.

Визначаємо розрахункові параметри напруженого стану $\sigma_{oc}, \tau_{oc}, \mu_\sigma, \mathfrak{K} = \sigma_{oc}/\tau_{oc}$. Обчислюємо параметри моделі, що залежать від напруженого стану:

$$k_c = 1 + \Phi_{R(e)} \left\{ 1 - \left[\frac{(1-c)(1-\mu_\sigma - 2e)}{2e + c(1-\mu_\sigma - 2e)} \right]^2 \right\};$$

$$\Phi = \frac{\Delta \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}{3\sqrt{2}}; \mu_\sigma^* = \frac{\mu_\sigma + \Phi R_{bD}/\tau_{oc}}{1 + \Phi R_{bD}/\tau_{oc}}; \quad (11)$$

$$\delta_p = \delta_{p(2)} + (\delta_{p(1)} + \delta_{p(2)}) \left[1 - \frac{(\mu_\sigma^* - \mu_p^*)\mu_\sigma^*}{1 - \mu_p^*} \right].$$

Знаходимо коефіцієнти A^*, B^*, C^* рівняння (7). Вирішуємо рівняння (7) відносно τ_{oc}^* . Перевіряємо значення функції міцності $s = \tau_{oc}/\tau_{oc}^*$: якщо $s < 1$ - міцність забезпечена; якщо $s \geq 1$ - утворюються тріщини.

Теорія М.І. Карпенко, як і інші феноменологічні теорії міцності, які ґрунтуються на критеріях, що сформульовані в інваріантах тензора напружень, не дозволяє визначити орієнтацію площини руйнування. Для розв'язку цієї проблеми застосуємо методику М.М. Филоненко-Бородича [20] до умови міцності (6) аналогічно [4].

Запишемо рівняння граничної поверхні (6) у більш загальному вигляді:

$$F(\sigma_{oc}, \tau_{oc}, \mu_\sigma) = 0. \quad (12)$$

Його можна розглядати як двопараметричну множину кіл Мору, з якої шляхом фіксації значення параметра μ_σ виділяється

однопараметрична множина і будується огинальна Мора. Фіксуючи значення μ_σ , вибираємо деякі меридіональні перетини граничної поверхні $\sigma_{oc} = \sigma_{oc}(\tau_{oc})$. По Морі, руйнування відбувається шляхом зсуву по площині, нахил якої по відношенню до головних осей тензора напружень обчислюється на основі тангенса кута нахилу дотичної до огинальної Мора у відповідній точці (рис. 3):

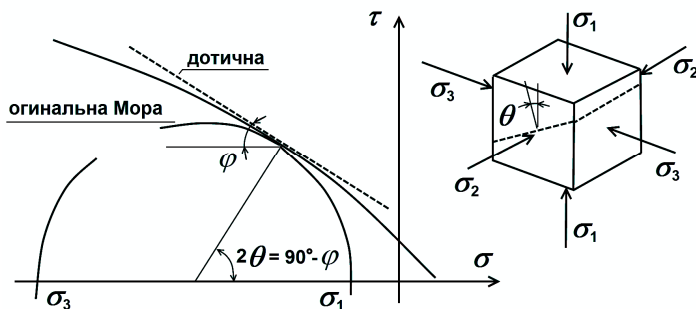


Рис. 3. Визначення орієнтації площини тріщини

$$\eta = \sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{\eta \sqrt{\left(\left| \frac{d\sigma_{oc}}{d\tau_{oc}} \right| - \frac{\mu_\sigma}{\eta} \right)^2 - \frac{9}{\eta^2}}}. \quad (13)$$

Диференціюючи (6), одержуємо:

$$\frac{d\sigma_{oc}}{d\tau_{oc}} = \frac{6\tau_{oc} [6(a+b) + (b-a)(2\mu_\sigma - \varkappa\eta)]}{6\tau_{oc}(b-a) - R_{bD}k_c\eta} + \frac{R_{bD}\eta [k_c(3-6b-\mu_\sigma) + 6\delta_p]}{6\tau_{oc}(b-a) - R_{bD}k_c\eta}. \quad (14)$$

Дослідження функції (14) показало, що підкореневий вираз в (13) завжди позитивний і (14) має сенс при будь-яких параметрах напруженого стану, що задовольняють рівнянню (6).

Порівняємо результати застосування викладеного підходу до обчислення орієнтації площини руйнування з експериментальними значеннями кутів нахилу тріщин, зафіксованими І.Г. Гончаровим [7] при випробуваннях циліндричних зразків із цементного розчину (табл.1) Наявні також експериментальні значення граничного осьового стиску при різних рівнях бічного тиску і обчислені аналітично за критеріями М.І. Карпенко (6) та Генієва-Кисюка [6].

У розрахунках фіксувався вид напруженого стану: μ_σ і \varkappa встановлювалися рівними експериментальним. Точність значень кутів нахилу тріщин, обчислених по (13) і (14), уступає результатам, що

отримані згідно з теорією Генієва-Кисюка, однак похибка обчислень розкиду кутів нахилу тріщин становить $\pm 5\%$ [10]. При цьому значення граничного осьового стиску, розраховані за критерієм М.І. Карпенко, набагато краще узгоджуються з даними випробувань, ніж ті, що обчислені по теорії Г.О. Генієва.

Таблиця 1

Г.І. Гончаров			Г.О. Генієв		М.І. Карпенко	
Бічний тиск σ_r , МПа	Осьовий тиск σ_z , МПа	θ^e , град	Осьовий тиск $\frac{\sigma_z}{\Delta}$, МПа / %	$\frac{\theta^a}{\theta^e - \theta^a}$, град	Осьовий тиск $\frac{\sigma_z}{\Delta}$, МПа / %	$\frac{\theta^a}{\theta^e - \theta^a}$, град
0.0	18.84	23.50	$\frac{18.84}{0}$	$\frac{28.3}{4.6}$	$\frac{18.84}{0}$	$\frac{22.7}{-0.8}$
2.0	27.37	29.70	$\frac{24.30}{-12.6}$	$\frac{30.8}{1.1}$	$\frac{28.67}{4.5}$	$\frac{26.5}{-3.2}$
4.0	34.64	31.80	$\frac{28.26}{-22.6}$	$\frac{32.1}{0.3}$	$\frac{36.31}{4.6}$	$\frac{28.7}{-3.1}$
6.0	40.35	32.50	$\frac{31.86}{-26.7}$	$\frac{33.1}{0.6}$	$\frac{43.32}{6.8}$	$\frac{30.3}{-2.2}$
7.7	46.96	35.70	$\frac{33.69}{-39.3}$	$\frac{33.5}{-2.2}$	$\frac{46.86}{-0.2}$	$\frac{31.0}{-4.7}$

Згідно [13] співвідношення між головними напруженнями $\{\sigma\}$ і деформаціями $\{\varepsilon\}$ можна представити за допомогою матриці податливості $[D]$ зі змінними коефіцієнтами:

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\}, \quad (15)$$

де $D_{ij} = \frac{1}{E_b \nu_{bi}}$ при $i=j$ і $D_{ij} = D_{ji} = -\frac{\nu_{nij}}{E_b \tilde{\nu}_{bj}}$ при $i \neq j$; E_b - початковий модуль пружності бетону; $\nu_{bi}, \tilde{\nu}_{bj}$ - коефіцієнти зміни січного модуля бетону; ν_{nij} - коефіцієнт поперечної деформації.

Формули, по яких обчислюються коефіцієнти D_{ij} , відрізняються для областей I і II, де поряд із стискаючими можуть бути напруження розтягу σ_1 і σ_2 . Так, виходячи з [13], записуємо:

$$\nu_{bi} = \tilde{\nu}_{bi} = \nu_{b3} = \hat{\nu}_{b3} \pm (\nu_{03} - \hat{\nu}_{b3}) \sqrt{1 - e_{13}\eta_3 - e_{23}\eta_3^2}, \quad (16)$$

де знак "+" відповідає висхідній гілці діаграми $\sigma - \varepsilon$, а знак "-" спадаючий; ν_{03} і $\hat{\nu}_{b3}$ - значення ν_{b3} на початку діаграми $\sigma - \varepsilon$ і у її вершині:

$$\begin{aligned}
 v_{03} &= v_{03}^0 - c \left| \frac{\hat{\sigma}_3}{R_{bD}} \right|^{1/3}; \quad c = \left(0.75 \left| v_R - \hat{v}_{b3} \right| \right)^S; \\
 v_R &= \frac{R_{bD}}{\varepsilon_R E_b}; \quad \hat{v}_{b3} = \frac{R_{bD}}{\varepsilon_R \left| \frac{\hat{\sigma}_3}{R_{bD}} \right|^{1/3} E_b}; \\
 5 \geq s &= \frac{R_1}{R_2 - R_{bD}}; \quad \eta_3 = \frac{\hat{\sigma}_3}{\hat{\sigma}_3}; \quad e_{13} = 2 - 2.05 \hat{v}_{b3}; \quad e_{23} = 1 - e_{13};
 \end{aligned} \tag{17}$$

$v_{03}^0 = 1$ на висхідній гілці діаграми $\sigma - \varepsilon$; $v_{03}^0 = 2.05 \hat{v}_{b3}$ - на спадаючій; R_1 і R_2 - параметри моделі; $\hat{\sigma}_3$ - граничне значення головного напруження σ_3 при заданому режимі простого навантаження; ε_R - гранична відносна деформація бетону при одноосьовому стиску.

Модифікація наведених вище формул у порівнянні з [13] полягає в заміні межі міцності при осьовому стиску R_b на міцність малого елемента бетону в зоні концентрації напружень R_{bD} .

Для моделі М.І. Карпенко значення ε_R , R_1 і R_2 приймаються постійними, а $\hat{\sigma}_3$ залежить лише від виду напруженого стану. В даній роботі при описі неоднорідного напружено-деформованого стану в малих об'ємах використовуються значення зазначених параметрів, які відкореговані згідно п. 2 відповідно до рівня концентрації напружень:

$$\varepsilon_R = 0.002 R_{bD} / R_b; \quad R_1 = (60 \text{ МПа}) R_{bD} / R_b; \tag{18}$$

$$R_2 = (70 \text{ МПа}) R_{bD} / R_b; \quad \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_3(R_{bD}, R_{bID}).$$

Коефіцієнти поперечної деформації визначаються по спрощеній формулі, згідно [13]:

$$v_{\pi ij} = v_{\pi}^0 \tilde{v}_{bi}, \tag{19}$$

де $v_{\pi}^0 = 0.175$.

Співвідношення для області II відрізняються лише формулами, по яких обчислюються коефіцієнти v_{bi} , що відповідають позитивним головним напруженням σ_i :

$$v_{bi} = \hat{v}_{bi} \pm \left(v_{0i} - \hat{v}_{bi} \right) \sqrt{1 - e_{1i} \eta_i - e_{2i} \eta_i^2}, \tag{20}$$

де $v_{0i} = 1$ для висхідної гілки діаграми $\sigma - \varepsilon$, $v_{0i} = 2.05 \hat{v}_{bi}$ - на

спадаючий:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{bi} &= \hat{v}_{bi}^+ \hat{v}_{bi}^-; \hat{v}_{bi}^+ = 1 - (1 - v_{Rt}) \left(\frac{\hat{\sigma}_i}{R_{btD}} \right)^{1/4}; \\ \hat{v}_{bi}^- &= 1 - (1 - v_{Rt}) \left(\frac{\sigma_3}{R_{btD}} \right); v_{Rt} = 0.75; \eta_i = \frac{\sigma_i}{\hat{\sigma}_i}; \\ e_{1i} &= 2 - 2.05 \hat{v}_{bi}; e_{2i} = 1 - e_{1i}; \end{aligned} \quad (21)$$

R_{btD} - міцність при осьовому розтязі малого бетонного елемента в зоні концентрації напружень.

Область III, де всі головні напруження позитивні, не розглядається в [13]. Екстраполюючи на цю область співвідношення (20), отримаємо:

$$\hat{v}_{bi} = 1 - (1 - v_{Rt}) \left(\frac{\hat{\sigma}_i}{R_{btD}} \right)^{1/4}; \tilde{v}_{bi} = v_{bi}, \quad (22)$$

Наведені вище співвідношення (15) - (22) використовуються за допомогою наступних процедур в рамках кроково-ітераційного алгоритму МСЕ в переміщеннях, які виконуються для кожного СЕ дискретної моделі залізобетонної конструкції:

- на поточному i -му кроці продовження по параметру обчислюється матриця податливості $[D]$ для вершини діаграми $\sigma - \varepsilon$ в припущенні, що вид напруженого стану мало відрізняється від попереднього кроку (на 1-му кроці матриця $[D]$ обчислюється для пружного ізотропного матеріалу);

- матриця $[D]$ і головні напруження $\{\sigma\}_{i-1}$ з попереднього кроку використовуються для обчислення головних деформацій $\{\hat{\varepsilon}\}$, віднесених до вершини діаграми $\sigma - \varepsilon$, які служать для оцінки норми вектора деформацій $\{\varepsilon\}_i$ поточного кроку; якщо $\|\{\varepsilon\}_i\| < \|\{\hat{\varepsilon}\}\|$ тоді напружено-деформований стан поточного кроку зображується точкою на висхідній гілці; а якщо ні, то - на спадаючій;

- остаточно уточнюється матриця $[D]$; знаходиться обернена до неї і використовується для обчислення головних напружень на поточному кроці продовження по параметру $\{\sigma\}_i = [D]^{-1} \{\varepsilon\}_i$.

На рис. 4 наведені діаграми $\sigma - \varepsilon$, побудовані в результаті чисельного моделювання осьового розтягу і стиску зразків стандартних розмірів. Матеріал: бетон, для якого $E_b = 36500 \text{ МПа}$, $R_b = 28 \text{ МПа}$, $R_{bt} = 2 \text{ МПа}$. Використані співвідношення (15) - (22) і викладений алгоритм.

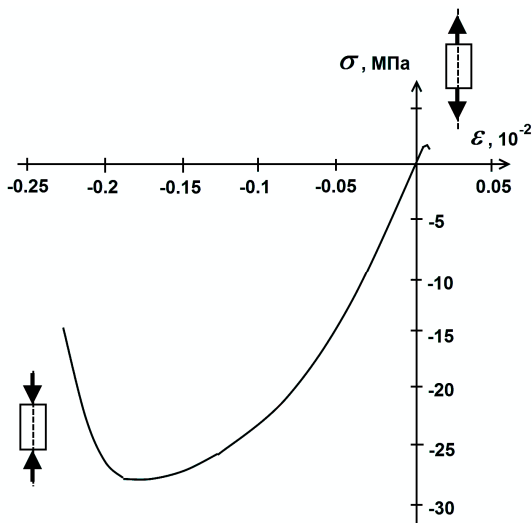


Рис. 4. Діаграми напруження-деформації при осьовому стисненні і розтязі

Тут графік характеризує спадаючі гілки та істотну (приблизно 25 кратну) відмінність деформацій бетону у вершинах відповідних діаграм. Урахування деформаційного зменшення бетону, яке проявляється у вигляді спадаючої гілки графіка $\sigma - \epsilon$, приводить до необхідності аналізу рівня деформацій при оцінці міцності бетону.

За такої критерій в умовах тривимірного напруженого стану використовується відношення норм векторів головних деформацій: досягнутих $\|\{\epsilon\}_i\|$ і відповідних до вершини діаграми $\sigma - \epsilon$ для розглянутого виду напружено-деформованого стану $\|\{\hat{\epsilon}\}\|$. Міцність бетону забезпечується, поки $\|\{\epsilon\}_i\| < \chi \|\{\hat{\epsilon}\}\|$, де $\chi \geq 1$.

Враховуючи обставини, при яких може проявитися деформаційне зменшення (п. 1), а також у зв'язку з малою вивченістю цього явища, лише при аналізі концентрації напружень у малих об'ємах в умовах стиснутого деформування бетону доцільно встановлювати $\chi > 1$.

Таким чином, наведені вище розрахункові співвідношення забезпечують узагальнення теорії опору бетону М.І. Карпенко для урахування неоднорідного напружено-деформованого стану і визначення орієнтації площин тріщин.

Висновки

Наукова новизна отриманих результатів включає: розвиток відомих

феноменологічних законів стану бетону для урахування факторів масштабного ефекту і градієнта поля напружень, які впливають на деформативність і міцність матеріалу, побудову математичних моделей високого рівня, що досить повно інтерпретують закони деформування армованого матеріалу із тріщинами.

Теорія в повній мірі задовольняє рекомендаціям державних будівельних норм у відношенні урахування нелінійних властивостей залізобетону.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Александров А.П., Журков С.Н.* Явление хрупкого разрыва. – Ленинград: ГТТИ. – 1933.
2. *Алиев Ш.А.* Сопротивление бетона раскалыванию арматурой. – Тр. НИИЖБ. – 1961. – Вып. 5.
3. *Ахвердов И.Н., Лукиа Л.К.* О характере разрушения бетона при различных напряженных состояниях //Бетон и железобетон. – 1964. - № 7. – С.297-302.
4. *Бобров Р.К., Козак А.Л.* Особенности расчета железобетонных оболочек с учетом физической нелинейности и трещинообразования по методу конечных элементов //Численные методы решения задач строительной механики. – Киев: Изд-во КИСИ. – 1978. – С.140-143.
5. *Болотин В.В.* Статистические методы в строительной механике. – М.: Стройиздат, 1965. – 279 с.
6. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.* Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
7. *Гончаров И.Г.* Прочность каменных материалов в условиях различных напряженных состояний. – Ленинград: Госстройиздат, 1960. – С.97.
8. Железобетонные конструкции /Под ред. Панарина Н.Я. – М.: Высш. Школа, 1971. – 554 с.
9. *Карпенко Н.И.* К построению модели сцепления арматуры с бетоном, учитывающей контактные трещины //Бетон и железобетон. – 1973. - № 1. – С.19-23.
10. *Карпенко Н.И.* Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
11. *Карпенко Н.И.* Об одной характерной функции прочности бетона при трехосном сжатии //Там же. – 1982. - № 2. – С.33-36.
12. *Карпенко Н.И.* К построению условия прочности бетонов при не одноосных напряженных состояниях //Бетон и железобетон. – 1985. - № 10. – С.35-37.
13. *Карпенко Н.И.* К построению общей ортотропной модели деформирования бетона //Строит. мех. и расчет сооруж. – 1987. - № 2. – С.31-36.
14. *Лукиа Л.К.* О пластическом течении бетона под нагрузкой. Изв. АН БССР. Сер. физ.-тех. наук.- 1962.- № 1.- С.132-137.
15. Новое о прочности железобетона/ Под ред.. К.В.Михайлова.- Там же, 1977.- 272 с.
16. *Новожиллов В.В.* К основам теории равновесных трещин в хрупких телах// Прикл. мат. и мех.- 1969.- Т. 33.- № 5.- С.797-812.
17. *Писаренко Г.С., Лебедев А.А.* Деформирование и прочность материалов при слоном напряженном состоянии.- Киев: Наук. Думка, 1967.- 415 с.
18. Прочность, структурные изменения и деформация бетона/ Под ред. А.А.Гвоздева.- М.: Стройиздат, 1978.- 297 с.
19. *Тимошенко С.П., Гере Дж.* Механика материалов.- М.:Мир, 1976.- 669 с.

20. *Филоненко-Бородич М.М.* Механические теории прочности.- М.: Изд-во МГУ, 1961.- 91 с.
21. *Холмянский М.М.* Закладные детали сборных железобетонных элементов.- М.: Госстройиздат, 1968.- 207 с.
22. *Холмянский М.М.* Контакт арматуры с бетоном.- М.: Стройиздат, 1981.- 184 с.
23. *Холмянский М.М., Белавин Ф.С., Ерин Н.Н.* Податливость заделки в бетоне и поперечное давление сосредоточенных анкеров// Тр. НИИЖБ.- 1967.- Вып. 13.
24. *Цискрели Г.Д.* Сопротивление растяжению неармированных и армированных бетонов.- М.: Госстройиздат, 1954.- 81 с.
25. *Argyris J.H., Faust G., Szimmat J. et. Al.* Recent development in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels// Nucl. Eng. And Des.- 1974.- 28.- N 1.- P.42-75.
26. *Bazant Z.P.* Instability, ductility, and size effect in strain softening concrete// J. Eng. Mech. Div. ASCE/- 1976.- 102. N EM2. P.331-344.
27. *Bazant Z.P., Lin Feng-Bao.* Nonlocal yield limit degradation// Int. J.Numb. Methods Eng.- 1988.- 26.- N 8.- P.1805-1823.
28. *Glucklich J.J.* Fracture of plain concrete// J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.- 1963.- 89.- N 6.- P.127-138.
29. *Rehm G.* Uber die Grundlagen des Verbundes Zwischen Stahl und Beton//Deutscher Ausschuss fur Stahlbeton.- 1961.- H. 138.
30. *Weibull W.* A statistical theory of the strength of materials// Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.- 1939.- N 151.
31. *Wright W., Byrne I.G.* Stress concentration in concrete// Nature.- 1964.- N 203.

Стаття надійшла до редакції 13.12.2012 р.

Гуляр А.И., Лизунов П.П., Солодей И.И.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОЯВИ ТА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗОН РУЙНУВАННЯ КРУГОВИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИСПЕРСНО-АРМОВАНИХ ТІЛ

Представленные исследования направлены на создание новых физических и математических моделей и алгоритмов эффективного численного моделирования нелинейной работы широкого класса пространственных железобетонных конструкций с учетом пластических деформаций, трещинообразования и совместной работы с армированием и облицовкой.

Gulyar O.I., Lizunov P.P., Solodei I.I.

THE NUMERICAL MODELS OF INITIATION AND DEVELOPMENT OF FRACTURE ZONES FOR REINFORCED HETEROGENEOUS SOLIDS OF REVOLUTION

New physical and mathematical models and algorithms of effective numerical modeling of 3D non-linear behaviour of reinforced massive solids of revolution considering plastic deformation, fracture zones and combined action with concrete reinforcement and thin-walled facings are considered.

УДК 539.3

О.В. Костіна, канд. техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З УРАХУВАННЯМ РЕАЛЬНИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ ФОРМИ

Розглядається вплив реальних недосконалостей геометричної форми на стійкість сталеві циліндричної оболонки. Використана нова методика дослідження стійкості недосконалих оболонок. Наведено результати досліджень, дані рекомендації з підвищення стійкості таких об'єктів.

Дослідження впливу недосконалостей геометрії на стійкість тонкостінних оболонок є актуальною проблемою теорії стійкості оболонок і має вікову історію. Розроблено багато різних аналітичних та чисельних методів, отримана велика кількість результатів [1-5]. Але, водночас, застосування зазначених напрацювань для оцінки нелінійної стійкості будь-якого конкретного будівельного об'єкта у вигляді тонкостінної оболонки пов'язане з цілою низкою труднощів через чуттєвість до неправильної форми, нерівномірність прикладання навантаження, недоліки технології виготовлення та неоднорідність фізичних характеристик матеріалу. Наявність малих недосконалостей форми оболонки може значно знизити значення критичного навантаження.

Існують різні методи розв'язання цієї задачі. Останнім часом широке застосування отримали чисельні методи завдяки можливостям сучасних програмних комплексів, що дозволяють будувати моделі за фактичною геометрією, задавати відповідні граничні умови, прикладати різноманітні навантаження та отримувати задовільні результати для практики. Один із розроблених методів полягає у прямому аналізі нелінійного деформування оболонки із викривленою формою серединної поверхні на основі сіткового методу дискретизації розв'язувальних співвідношень [6,7].

Методика реалізована на прикладі дослідження стійкості реальної оболонки з наступними геометричними характеристиками: діаметр $D = 5,61$ м, висота $H = 5,3$ м, товщина стінки $t = 10$ мм. Внаслідок порушення вимог експлуатації стінка оболонки зазнала деформування. Виникли проблеми з подальшою експлуатацією оболонки. Необхідно було дослідити її напружено-деформований стан і визначити несучу

спроможність при сумісній дії експлуатаційного та вітрового навантаження.

Розрахункова модель оболонки створена за допомогою програмного комплексу NASTRAN. Фактичні відхилення твірних стінки від вертикалі були отримані в результаті геодезичних вимірювань. Для побудови розрахункової моделі вихідні відхилення додавалися до відповідних координат ідеальної поверхні і по змінених координатах будувалися сплайн-криві, а потім сплайнові поверхні в циліндричній системі координат (рис. 1).

На основі оболонки із недосконалою геометрією побудована скінченноелементна модель з використанням трикутних та чотирикутних елементів. Причому зона найбільших недосконалостей задана трикутними елементами, оскільки такий підхід дає можливість точніше описати суттєво викривлену поверхню.

Кількість елементів розрахункової моделі становить 2991, кількість вузлів – 3043. Вузли вздовж нижнього контуру оболонки жорстко закріплені.

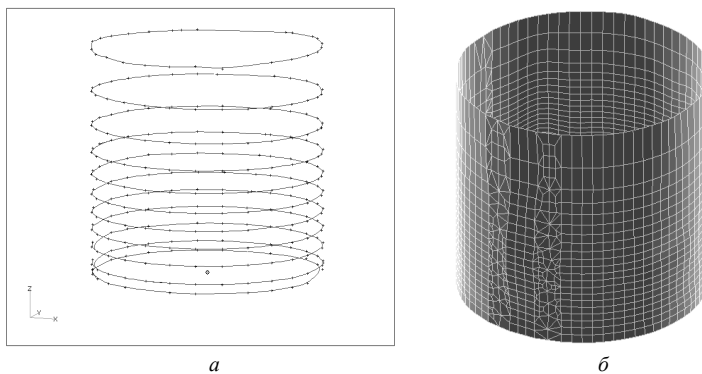


Рис. 1. Розрахункова модель оболонки з реальними недосконаlostями форми:

а) побудова сплайн-кривих; б) скінченноелементна модель

Навантаження представляє собою сумісну дію осьового стиснення та вітру, що розрахований згідно діючого нормативного документу [8]. Воно прикладається до вузлів верхньої кромки оболонки у вигляді зосереджених сил, що обчислені за формулою: $[P_{cm}^e, P_g^e]$. Експлуатаційне осьове стиснення та вітрове навантаження на один вузол верхньої кромки оболонки мають значення відповідно $P_{cm}^e = 67,36 \text{ кН}$ та $P_g^e = [0,1 \div 39,77] \text{ кН}$.

Основна задача дослідження несучої спроможності оболонки з реальними недоскональностями полягала у визначенні критичного значення навантаження та коефіцієнта запасу стійкості. Для цього було розв'язано нелінійну задачу статички, визначені критичні значення комбінованого навантаження та відповідний коефіцієнт запасу стійкості.

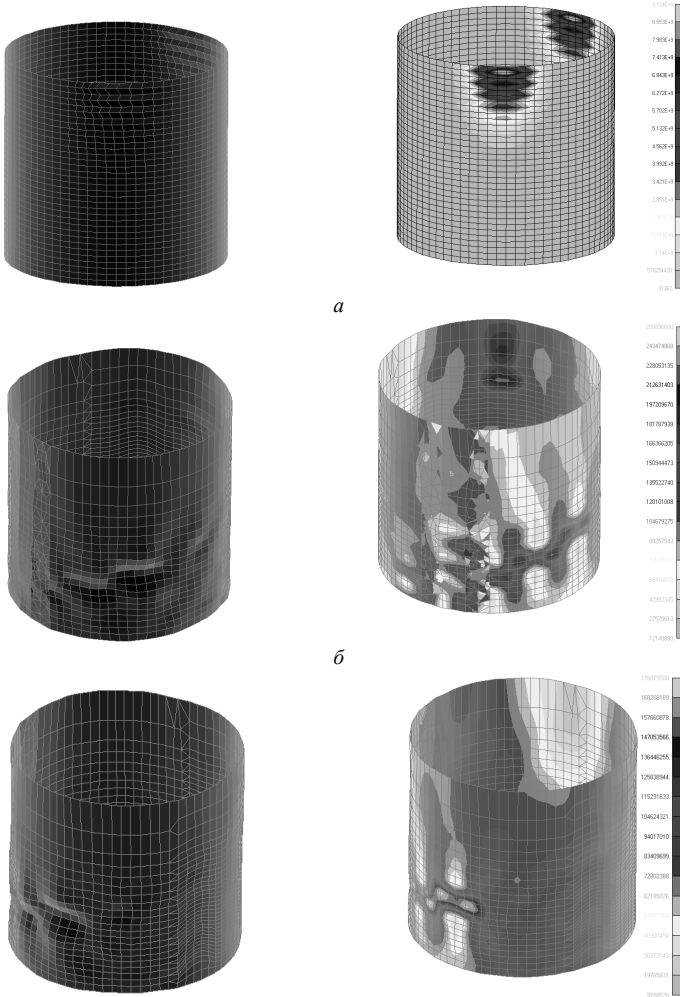


Рис. 2. Деформована схема та ізополя напружень: а) ідеального циліндра; б) циліндра з реальними недоскональностями; в) недосконалого циліндра при допустимому напруженні.

Недосконала оболонка втратила стійкість при $[P_{cm}; P_{\sigma}] = 3,809 [P_{cm}^e; P_{\sigma}^e]$, досконала – при $[P_{cm}; P_{\sigma}] = 12,309 [P_{cm}^e; P_{\sigma}^e]$. Максимальні еквівалентні напруження (Plate Top VonMises Stress) в стінці оболонки відповідно склали 259 МПа та 9,1 ГПа.

З рис. 2 видно, що недосконалість стінок вплинула і на форму деформування оболонки. Максимальні деформації в досконалій оболонці спостерігаються у верхній її частині, в недосконалій – в стінці, де має місце найбільша початкова недосконалість. Коефіцієнтами запасу по стійкості недоскодалої та доскодалої оболонок є 3,809 та 12,309 відповідно. При допустимому напруженні ($\sigma = 210$ МПа) коефіцієнт запасу стійкості склав 3,204.

Дослідження показали, що недосконалість форми оболонки значно впливає на її несучу спроможність. Оболонка з недосконалою стінкою втрачає стійкість при навантаженні, що у 4 рази менше ніж критичне навантаження оболонки з ідеальною поверхнею. Запас стійкості недоскодалої оболонки є незначним, тому треба виконати роботи з посилення її стінки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Койтер В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Сб. перев. иностр. статей. – 1960. – №5, С.99 – 110.
2. Баженов В.А., Гуляев В.И., Гоцуляк Е.О. Устойчивость нелинейных механических систем. Львов, Вища школа, 1982. – 255 с.
3. Гоцуляк Е.А., Аранчий Н.Е., Костина Е.В. Криволинейный конечный элемент в теории тонких оболочек произвольной конфигурации // Сборник трудов Международного симпозиума по проблемам тонкостенных пространственных систем.-Грузия, Тбилиси, 4-5 июля, 2001.-С.58-64.
4. Гаериленко Г.Д. Численный и аналитический подходы к исследованию несущей способности несовершенных оболочек// Прикладная механика.– 2003. – №9. – С. 44-63.
5. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури– К.: ЗАТ „Віпол”, 2010. – 316с.
6. Гоцуляк С.О., Барвинко А.Ю., Шах В.В., Костіна О.В. Дослідження стійкості циліндричної оболонки резервуара змінної товщини з урахуванням недосконалостей форми // 36. Опір матеріалів та теорія споруд. – Вип.77. – Київ: вид. КНУБА. – 2005. – С.91-96.
7. Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Гаран І.Г. Моделювання початкових недосконалостей циліндричної оболонки змінної товщини при дослідженні її стійкості при дії комбінованого навантаження// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.84. – К.:КНУБА, 2009. – С. 97 –103.
8. ДБН В.1.2-2:2006 „Навантаження і впливи”. Норми проектування.

Стаття надійшла до редакції 13.12.2012 р.

Костина Е.В.

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ РЕАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ ФОРМЫ**

Рассматривается влияние реальных несовершенств геометрической формы на устойчивость стальной цилиндрической оболочки. Используется новая методика исследования устойчивости несовершенных оболочек. Приведены результаты исследований, даны рекомендации по повышению устойчивости таких объектов.

Kostina O.V.

**STABILITY INVESTIGATION OF A CYLINDRICAL STEEL SHELL WITH REALITY
SHAPE IMPERFECTIONS**

The influence of the actual geometric shape imperfections on the stability of a steel cylindrical shell. Used new method of studying the stability of imperfect shells. The results of the research, recommendations to improve the sustainability of such facilities.

УДК 539.3

Г.М. Іванченко, д-р. техн. наук,
О.В. Шишов, канд. техн. наук

КОМП'ЮТЕРНЕ ТЕСТУВАННЯ ПРИ КОНТРОЛІ РІВНЯ ЗНАНЬ З БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Проаналізовано досвід кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури у використанні комп'ютерних технологій перевірки рівня знань студентів будівельного факультету для поточного і модульного контролю з будівельної механіки.

При підготовці бакалаврів по напрямку «Будівництво» студенти будівельного факультету Київського національного університету будівництва і архітектури протягом трьох семестрів вивчають курс «Будівельна механіка». Вивчення цього курсу зорієнтовано не лише на класичні методи розрахунку [1], а і на використання сучасних інформаційних технологій та ознайомлення із вітчизняними і зарубіжними програмними комплексами, які використовуються для міцнісного аналізу та проектування конструктивних елементів цивільних і промислових споруд [2,3]. З метою комп'ютеризації навчального процесу на кафедрі будівельної механіки університету розроблено та впроваджено до навчального процесу програмне забезпечення, яке дозволяє перевіряти рівень знань студента, а також комплекс тестових завдань з дисципліни «Будівельна механіка», який доповнює програмний комплекс. Крім програми-оболонки, що пред'являє тестові завдання і обслуговує базу результатів, також розроблено декілька допоміжних прикладних програм, які надають допомогу студентам під час тестування (комп'ютерний довідник з будівельної механіки, програма розв'язання систем алгебраїчних рівнянь тощо). До складу програмного забезпечення також входить спеціальним чином структурована база тестових білетів і рисунків до них, база результатів тестувань, програма автоматизації підготовки тестових білетів із масиву запитань, а також деякі допоміжні файли і програми.

При тестуванні відбувається перевірка відповідей, які формулюються студентом на вибрану тему з навчальної дисципліни. Кількість запитань протягом сеансу тестування може бути від 5 до 10. Запитання і рисунки до них виводяться в робоче вікно програми. Для надання відповідей програмою виділяється обмежений відрізок часу (40 хвилин). Відповіді студентів аналізуються програмою шляхом порівняння з еталонними відповідями. Наприкінці тестування програма повідомляє інтегральну оцінку рівня знань. Результати тестування зберігаються на вінчестері.

Тестові запитання згруповано в тестові білети, в кожному з яких міститься 5–10 тестових запитань. Запитання мають характер або закритих тестів (тестів з вибірковими відповідями, варіанти яких виводяться на екран разом із запитаннями) або відкритих тестів (тестів з фіксованими відповідями, які необхідно самостійно визначити в процесі тестування) [4]. Як правило, закритими тестами є певні теоретичні положення, а відкритими – числові результати, отримані при розв’язанні конкретних задач. В процесі тестування програма вибирає тестові білети випадковим чином. Крім того, для закритих тестів варіанти відповідей виводяться на екран у випадковому порядку. Програма фіксує тестові білети, які надавалися тому чи іншому студенту і пропонує лише ті білети, які цьому студенту ще не пред’являлись.

Програма тестування розроблена в двох варіантах: для роботи в автономному режимі та для роботи в мереживному режимі. В першому (автономному) варіанті програмні файли і база тестових білетів встановлюються на кожний окремих комп’ютер. На цьому ж комп’ютері зберігаються результати тестування. Цей варіант може бути застосований студентами для самотестування. Другий (мереживний) варіант може бути застосований за умови наявності локальної мережі, коли всі робочі комп’ютери підключені до сервера або до якогось певного комп’ютера, який відіграє роль сервера. В цьому випадку майже всі програмні файли, а також база тестових білетів розташовано на сервері. Тут також розміщено базу результатів тестувань.

Програмний комплекс виконує наступні дії:

1. Надає можливість вибрати одну з тем для проведення тестування.
2. Вибирає випадковим чином тестовий білет з обраної теми.
3. Дає можливість студенту вибирати в будь-якому порядку запитання білета і виводить на екран чергові тестові запитання, рисунки і, в деяких випадках, варіанти можливих відповідей.
4. Підсумовує кількість балів, набраних студентом за певними правилами, і залежно від їхньої кількості виставляє оцінку його знанням й умінням з вибраної теми.
5. Зберігає результати тестування на вінчестері.
6. У разі використання програми в мереживному варіанті створює і підтримує файли "класних журналів", в яких зберігаються результати тестувань, а також файли статистики, в яких позначено номери задач, що розв’язувались кожним студентом з кожної теми, а також отримані оцінки.

Протягом останніх семи років програму було застосовано для проведення контролю рівня знань з дисципліни "Будівельна механіка". Курс будівельної механіки був розбитий на 12 модулів (тем). Для кожної теми підготовлено по 60 тестових білетів. Протягом вивчення дисципліни студенти повинні були пройти тестування по всім модулям. Тестувались всі

студенти третього і четвертого курсів напрямку підготовки «Будівництво» на будівельному факультеті (400 осіб щороку). Робота студентів з програмою відбувалась у комп'ютерному класі кафедри в позааудиторний час, тобто в рамках самостійної роботи студента. Під час тестування присутність викладачів була не обов'язкова. Студенти приходили на тестування в будь-який зручний для себе час, сідали до будь-яких вільних на цей момент комп'ютерів, самостійно запускали до роботи програму тестування і працювали з нею індивідуально. У випадку, якщо оцінка результатів тестування не влаштувала того чи іншого студента, він мав змогу провести повторне тестування, але не більше трьох разів на день. Кількість звернень до програми кожним студентом фіксувалась програмою і при четвертому зверненні студентом до програми вона відмовлялась з ним працювати. Продовжити роботу з програмою студент міг лише наступного дня.

Практика показала, що переважна більшість студентів проходить успішне тестування не за одну, а за дві, три або й більшу кількість спроб. Якщо отримана позитивна оцінка не задовольняла студента, він мав змогу приходити й надалі для її підвищення.

Робота викладача полягала в перегляді і в фіксації один-два рази на тиждень збережених на сервері результатів тестування. Крім того, студенти, стикаючись з негативною реакцією програми на ті чи інші відповіді, часто звертались до викладачів за консультацією з тих чи інших теоретичних питань або з питань помилок, які були припущені при розв'язанні конкретних числових задач.

Зазначене програмне забезпечення може бути рекомендовано для тестування рівня знань та умінь студентів з різних інженерних дисциплін.

Аналізуючи результати використання програмного комплексу можна виділити як позитивні, так і деякі негативні моменти.

Позитивним є наступне:

- суттєво зменшується навантаження на викладача під час модульного, поточного чи вхідного контролів;
- активізується робота студентів, оскільки навчальна робота набуває ігрового характеру;
- студент може тестуватись незалежно від присутності на даний момент викладача, в зручний для себе час;
- підвищується достовірність результатів унаслідок вилучення суб'єктивізму викладача;
- за рахунок однотипності тестових білетів всі студенти перебувають у приблизно рівних умовах;
- викладач із супротивника студентів стає його помічником і консультантом.

До негативних моментів можна віднести таке:

- студент не набуває досвіду спілкування з теми тестування, не навчається формулювати свої думки і висновки;
- унаслідок обмеженої кількості комп'ютерів інколи з'являються черги студентів, які бажають пройти тестування;
- деякі студенти можуть проходити тестування за інших.

На думку авторів, зазначений комплекс слід застосовувати для поточного або модульного контролю і не доцільного використовувати для підсумкового контролю.

Комплекс програм, створений на кафедрі будівельної механіки, постійно удосконалюється в напрямку використання сучасних програмних продуктів та розширення масиву контрольних запитань. При цьому враховується досвід попередніх років її експлуатації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Иванченко Г.М., Шишов О.В.* Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування – К.: Каравела, 2007. – 344 с.
2. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерний курс / *Баженов В.А., Гранат С.Я., Шишов О.В.* – К.: ВІПОЛ, 1999. – 584 с.
3. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології / *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
4. *Журавель В.Ф.* Рекомендована практика конструювання тестів професійної компетенції випускників вищих навчальних закладів / *Журавель В.Ф. та ін.* За загал. ред. Ю.В. Сухарнікова. – К.: Аграрна освіта, 2000. – 38 с.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.

Иванченко Г.М., Шишов О.В.

КОМПЬЮТЕРНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ПРИ КОНТРОЛЕ УРОВНЯ ЗНАНИЙ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Проанализирован опыт кафедры строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры в использовании компьютерных технологий проверки уровня знаний студентов строительного факультета для текущего и модульного контроля по строительной механике.

Ivanchenko G.M., Shishov O.V.

COMPUTER-BASED TESTING AT THE CONTROL OF KNOWLEDGE IN STRUCTURAL MECHANICS

The experience of Structural Theory chair of the Kyiv National University of Construction and Architecture was analyzed in the computer technologies use of Student Achievement Test of construction department for current and module control in Structural Theory.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

А.А. Козак

О.С. Черненко

ДВОВИМІРНИЙ НДС ПРУЖНОГО МАСИВУ З ДВОМА ОТВОРАМИ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На основі співвідношень методу потенціалу побудовано чисельний алгоритм для розв'язання у двовимірній постановці задачі про нестационарні коливання пружних масивів, послаблених отворами. Розв'язана модельна задача про коливання простору з двома циліндричними отворами.

В стані плоскої деформації за відсутності об'ємних сил динамічний деформований стан тіла описується рівнянням

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2u_{k,jj} - \ddot{u}_k = -\Phi_k, \quad j,k=1,2. \quad (1)$$

Фундаментальний розв'язок задачі $U_{kj}(\bar{x}, \bar{y}, t)$, тобто j -а компонента переміщення в точці \bar{y} в момент часу t , яке відповідає дії в точці $\bar{x}\{x_1, x_2\}$ безмежної двовимірної області зосередженого миттєвого одиничного імпульсу, що мав місце в момент часу $t_0=0$ і діяв в k -му напрямі. Таке поле динамічних переміщень задовольняє рівнянню

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2u_{k,jj} - \ddot{u}_k = \delta(t)\delta(\bar{x}-\bar{y}). \quad (2)$$

$$r(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Розв'язок рівняння (2) може трактуватись як реакція на дію в тривимірному пружному просторі миттєвого імпульсного навантаження, рівномірно з одиничною інтенсивністю розподіленого вздовж прямої, яка проходить через т. $\bar{x}\{x_1, x_2\}$ паралельно осі x_3 [1]:

$$U_{kj}(r, t) = \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{H(C_1 t - r)}{C_1 r^2} f_{kj}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, t) + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2 r^2} f_{kj}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, t) \right], \quad (3)$$

де

$$f_{kj}^{(1)}(r, t) = \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} d_1,$$

$$f_{kj}^{(2)}(r, t) = \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} \left(d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right),$$

$$d_1 = \sqrt{(C_1 t)^2 - r^2}, \quad d_2 = \sqrt{(C_2 t)^2 - r^2}.$$

Гранично-часове інтегральне рівняння за нульових початкових умов і відсутності масових сил має наступний вигляд

$$\frac{1}{2} u_k(\bar{x}_0, t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t - \tau) u_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \quad (4)$$

де $T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, t)$ - узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі n_k , які виникають в пружному двовимірному просторі від дії миттєвого імпульсу, одиничної інтенсивності:

$$\begin{aligned} T_{kj}(r, t) = & \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{H(C_1 t - r)}{C_1} \left[-g_{kj}^{(1)}(r) \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) - g_{kj}^{(2)}(r) \frac{r^3}{d_1^3} \right] + \right. \\ & + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2} \left[g_{kj}^{(1)}(r) \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) + g_{kj}^{(2)}(r) \frac{r^3}{d_2^3} + g_{kj}^{(3)}(r) \frac{r}{d_2^3} \right] + \\ & \left. + \frac{\delta(C_1 t - r)}{C_1} g_{kj}^{(2)}(r) \left(2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) - \frac{\delta(C_2 t - r)}{C_2} g_{kj}^{(2)}(r) \left(2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) + g_{kj}^{(3)}(r) \frac{r}{d_2} \right\}, \quad (5) \\ g_{kj}^{(1)}(r) = & \frac{-2}{r^3} \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} - 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} r_{,j} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right), \\ g_{kj}^{(2)}(r) = & \frac{-2\mu}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} r_{,j} + \frac{1}{1-2\nu} n_j r_{,k} \right), \\ g_{kj}^{(3)}(r) = & \mu \left(\delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{2}{1-2\nu} n_j r_{,k} \right). \end{aligned}$$

Неважко побачити, що вираз узагальненої похідної $T_{kj}(r, t)$ містить в своєму складі величину

$$\frac{1}{[C_k^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}} \delta[C_k(t-r) - r], \quad (6)$$

яка є сингулярною, коли $C_k^2(t-\tau)^2 = r^2$, і з цієї причини потребує деяких додаткових перетворень для свого чисельного визначення. Зазначимо, що з'являється ця компонента в результаті диференціювання за просторовою координатою фундаментального розв'язку (3). Як і у задачі антиплоскої деформації, розглянутої в [2], диференціювання за просторовою координатою можна замінити диференціюванням за часом з подальшим

зменшенням сингулярності за допомогою інтегрування частинами. Похідну фундаментального розв'язку (3) за просторовою координатою запишемо наступним чином

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H [C_\alpha(t-\tau)-r] \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) + \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} H [c_\alpha(t-\tau)-r] \right\}. \quad (7)$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{\partial}{\partial x_j} H [c_\alpha(t-\tau)-r] = \frac{r_{,j}}{c_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} H [c_\alpha(t-\tau)-r] \quad (8)$$

та

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H [C_\alpha(t-\tau)-r] \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) + \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} H [c_\alpha(t-\tau)-r] \right\}, \quad (9)$$

похідній (7) надамо вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H [C_\alpha(t-\tau)-r] \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) - \frac{r_{,j}}{C_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{r_{,j}}{C_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{H(C_\alpha t - r)}{C_\alpha r^2} f_{kj}^{(\alpha)}(\bar{x}, \bar{y}, t) \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Якщо підставити (10) у вираз

$$T_{lk} = \left[\rho(C_1^2 - 2C_2^2) U_{lk,j} \delta_{km} + \rho C_2^2 (U_{lk,m} + U_{lm,k}) \right] n_m, \quad (11)$$

який пов'язує між собою розв'язки $T_{kj}(r, t)$ та $U_{kj}(r, t)$, то інтегруючи частинами за часом при нульових початкових умовах другий інтеграл у правій частині рівняння (4), будемо мати:

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} T_{lk}(x, y, t-\tau) u_k(y, \tau) d\tau = \\ = \int_0^{t^+} Z_{lk}(x, y, t-\tau) u_k(y, \tau) - W_{lk}(x, y, t-\tau) \dot{u}_k(y, \tau) d\tau. \quad (12) \end{aligned}$$

Тепер гранично-часове інтегральне рівняння (4) набуває такого вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\bar{x}_0, t) = \int_0^{t^+} \int_\Gamma U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ - \int_0^{t^+} \int_\Gamma \left[Z_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) u_j(\bar{y}, \tau) - W_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) \dot{u}_j(\bar{y}, \tau) \right] d\Gamma_y d\tau, \quad (13) \end{aligned}$$

де

$$W_{lk} = \frac{C_2^2}{2\pi C_1^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} 2r_{,l} r_{,k} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,l} n_{,k} \right] \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{lk} - 2r_{,l} r_{,k}) + r_{,k} n_{,l} \right] \frac{1}{R_2} \quad (14)$$

і

$$\begin{aligned} Z_{lk} = Z_{lk}^{(1)} + Z_{lk}^{(2)} = & \frac{C_2^2}{2\pi C_1} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[\delta_{lk} \left(\frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) - 2r_{,l} r_{,k} \left(\frac{C_1(t-\tau) - r}{R_1^3} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{4}{rR_1} + \frac{8R_1}{r^3} \right) \right] + n_{,l} r_{,k} \left(\frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) + n_{,k} r_{,l} \left(-\frac{\lambda}{\mu} \frac{C_1(t-\tau) - r}{R_1^3} + \frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) \right\} + \\ & + \frac{C_1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[-\delta_{lk} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} \right) + 2r_{,l} r_{,k} \left(\frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} + \frac{4}{rR_2} + \frac{8R_2}{r^3} \right) \right] - \right. \\ & \left. - n_{,l} r_{,k} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} \right) - n_{,k} r_{,l} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} \right) \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Для алгебраїзації гранично-часового інтегрального рівняння (4) за звичайною процедурою МГЕ необхідно розділити область інтегрування на окремі елементи і зробити припущення про характер зміни невідомих величин (переміщень і напружень) в межах кожного з елементів. Особливість розглядуваної задачі полягає в тому, що до складу змінних додається час. Якщо прийняти, що граничні напруження в межах кожного проміжку часу залишаються постійними, то інтегрування за часом в першому з доданків у правій частині рівняння (4) може бути виконане аналітично:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t_n - \tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\tau = \\ & = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi\rho C_\alpha^2} \left[\delta_{lk} H_\alpha + (-1)^\alpha (\delta_{lk} - 2r_{,l} r_{,k}) G_\alpha \right], \quad (16) \end{aligned}$$

де

$$H_\alpha = \ln \frac{[\eta_\alpha + (\eta_\alpha^2 - 1)^{1/2}]}{[\theta_\alpha + (\theta_\alpha^2 - 1)^{1/2}]}, \quad G_\alpha = \eta_\alpha (\eta_\alpha^2 - 1)^{1/2} - \theta_\alpha (\theta_\alpha^2 - 1)^{1/2}, \quad (17)$$

$$\eta_\alpha = \begin{cases} C_\alpha(t_n - \tau_{m-1})/r, & \text{при } r < C_\alpha(t_n - \tau_{m-1}) \\ 1, & \text{при } r \geq C_\alpha(t_n - \tau_{m-1}) \end{cases} \quad (18)$$

$$\theta_\alpha = \begin{cases} C_\alpha(t_n - \tau_m)/r, & \text{при } r < C_\alpha(t_n - \tau_m) \\ 1, & \text{при } r \geq C_\alpha(t_n - \tau_m) \end{cases}. \quad (19)$$

Аналогічні вирази можуть бути отримані і для обчислення другого інтегралу у правій частині рівняння (4) [1].

Наведені співвідношення складають основу методики чисельного дослідження нестационарних двовимірних коливань пружних масивів, яку було застосовано для аналізу динамічної поведінки двовимірного масиву, послабленого двома однаковими круговими отворами радіусу R . Границя одного з отворів рівномірно навантажена радіальним тиском (рис. 1), зміна якого в часі описується трапецеїдальним імпульсом [2].

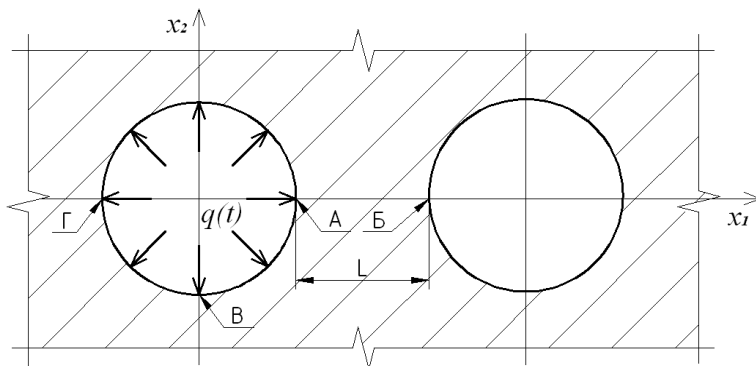


Рис. 1. Розрахункова область

Розрахунки були проведені при трьох варіантах відстані L між границями отворів - $L=2R$, $L=2R/3$ і $L=R/3$. Найменший взаємний вплив на деформацію сусіднього отвору має місце в першому випадку, коли відстань між отворами дорівнювала двом радіусам (рис. 2). На вказаному рисунку цифрою 1 позначено графік залежності від часу нормованого переміщення в т. А (точка на контурі навантаженого отвору, найближча до ненавантаженого). Цифрою 2 позначено графік залежності

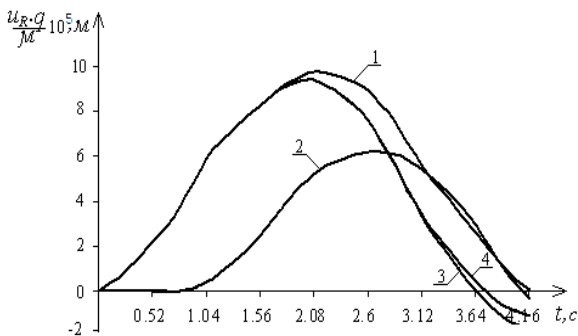


Рис. 2. Переміщення точок системи при $L=2R$

переміщення в т. B (точка на ненавантаженому отворі). Графік із позначкою 3 відповідає залежності від часу переміщення в т. B , яка є точкою перетину контуру навантаженого отвору та осі x_2 (рис. 1). І нарешті, цифрою 4 позначено графік залежності переміщення в т. Γ (точка на контурі навантаженого отвору, найвіддаленіша від ненавантаженого). Максимального значення, величиною $9.89 \cdot 10^{-5}$ м, переміщення в т. A отримує в момент часу 2.094 с., при цьому впродовж перших 0.7 с. т. B є взагалі нерухомою.

Аналогічні результати для значень $L=2R/3$ і $L=R/3$ показані відповідно на рисунках 3 і 4. Максимальні значення нормованого переміщення в т. A також мали місце в момент близько 2 с. і дорівнювали відповідно $1.79 \cdot 10^{-4}$ м і $2.99 \cdot 10^{-4}$ м.

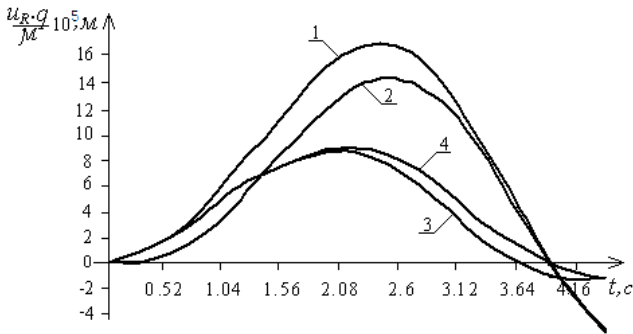


Рис. 3. Переміщення точок системи при $L=2R/3$

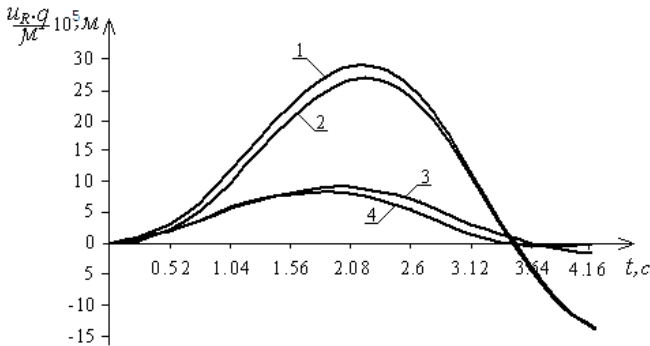


Рис. 4. Переміщення точок системи при $L=R/3$

Наведені дані наочно свідчать про роботоспроможність розробленого методологічного апарату.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dominguez J.* Boundary Elements in Dynamics. – Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1993.
2. *Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко Е.С.* Методика чисельного дослідження антиплоских нестационарних коливань масивних елементів конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – Вип. 88. – С.83–96

Стаття надійшла до редакції 14.10.2012 р.

Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко Е.С.

ДВУМЕРНОЕ НДС УПРУГОГО МАССИВА С ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

На основе соотношений метода потенциала построен численный алгоритм для решения в двумерной постановке задачи про нестационарные колебания упругих массивов, ослабленных отверстиями. Решена модельная задача про колебания пространства с двумя цилиндрическими отверстиями.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.

DEFORMING OF 2D ELASTIC SOLID WITH TWO HOLES UNDER IMPULSE LOADINGS

The boundary element technique for analysis 2D transient vibration of elastic solids with holes is developed. Oscillations of the solid with two round holes subjected to impulse loadings were investigated.

УДК 539.3

І.І. Солодей, канд. техн. наук

БАЗОВІ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНІ МОДЕЛІ НМСЕ ДЛЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

Розроблено базові неоднорідний круговий та призматичний скінченні елементи (СЕ) з чотирикутним поперечним перерізом загального вигляду, на основі яких побудовані розрахункові співвідношення напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ) для кругових та призматичних тіл неканонічної форми, що знаходяться під дією довільного стаціонарного або нестаціонарного навантаження.

Вступ

Сучасне поширення чисельних методів насамперед пов'язане з розвитком метода скінченних елементів (МСЕ), який широко увійшов у практику наукових та інженерних установ. Однак застосування традиційного МСЕ при дослідженні поведінки просторових об'єктів викликає значні математичні та обчислювальні труднощі, які пов'язані не тільки з необхідністю розв'язання систем рівнянь великих порядків, але і з необхідністю урахування різноманітних механічних факторів, що супроводжують деформування конструкцій в процесі їх експлуатації. Тому, за останній час, отримали розповсюдження альтернативні методики, які орієнтуючись на особливості форми конструкцій значно підвищують продуктивність МСЕ, охоплюючи при цьому досить широкі класи просторових об'єктів. Одним із таких підходів є напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), який дозволяє звести рішення просторової пружної задачі до ряду двовимірних, а у випадку нелінійної – побудувати вельми ефективну процедуру її розв'язання. Досягнення напіваналітичного метода скінченних елементів в статичних та квазістатичних задачах теорії пружності і пластичності [3], задачах повзучості, континуального та дискретного руйнування [1], пошуку рішень задач динаміки на основі використання алгоритмів прямого інтегрування рівнянь руху та розкладу за власними формами [2] створюють міцний базис його подальшого розвитку.

Об'єктами дослідження напіваналітичного метода скінченних елементів традиційно вважаються просторові тіла, які утворені рухом складної геометричної фігури (поперечного перерізу тіла) вздовж утворюючої довільної форми. Зважаючи на те, що реальні елементи конструкцій, у своїй масі, здебільшого є неоднорідними круговими та призматичними тілами, в рамках НМСЕ розроблено спеціальні скінченні

елементи (СЕ), що дозволяють ефективно апроксимувати окремі типи просторових об'єктів. Сучасні методики, які орієнтовані на розрахунок широкого класу конструкцій, що складаються з масивних і тонкостінних елементів, повинні поряд з високою точністю опису напружено-деформованого стану об'єктів складної форми та структури, забезпечувати високу швидкість збіжності до точного рішення при мінімальних чисельних витратах. Завдяки введенню додаткових гіпотез, що не зменшують точність апроксимації, представленню деформацій і напружень в фізичних термінах та у відповідності до моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) [5,9] вдається з однієї сторони уникнути трудомісткості процедури чисельного інтегрування по площі поперечного перетину скінченного елемента, з іншої – зберегти високу ефективність просторової дискретизації.

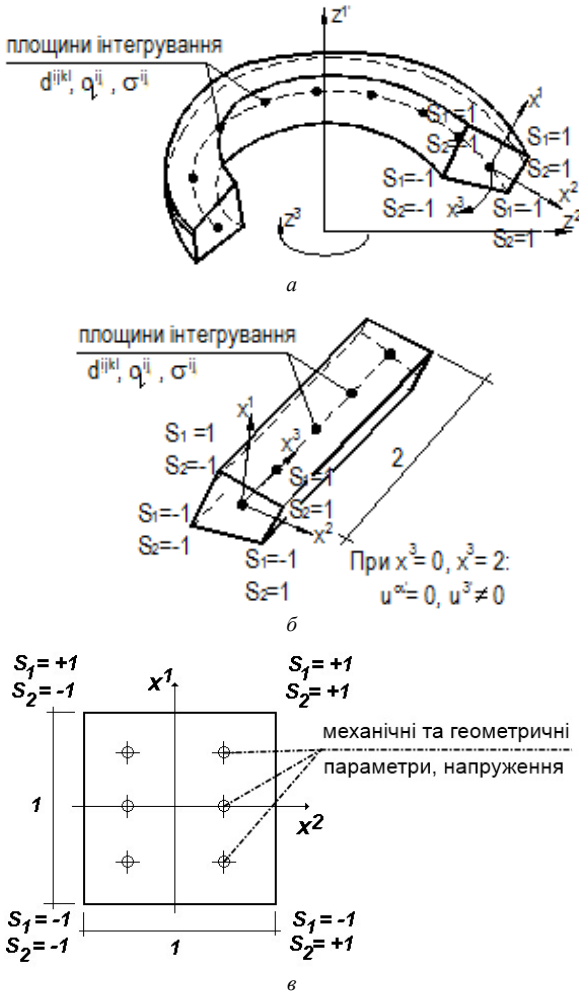
1. Круговий та призматичний скінченні елементи із змінними геометричними і фізико-механічними параметрами загального вигляду.

Для дискретизації неоднорідних просторових тіл при динамічному навантаженні застосовуються круговий та призматичний скінченні елементи з поперечним перерізом у вигляді чотирикутника довільного обрису (рис. 1). На характер розподілу фізичних, механічних та геометричних параметрів, як по довжині, так і по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування, що належать площині $x^3 = const$. В місцевій системі координат їх переріз є квадратом з одиничними сторонами. Початок місцевої системи координат x^i знаходиться у геометричному центрі елемента, вісі x^1 і x^2 направлені паралельно сторонам поперечного перерізу, а x^3 - вздовж утворюючої.

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ:

$$(u:\dot{u}:\ddot{u})_{k'} = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 \right] (u:\dot{u}:\ddot{u})_{k'(s_1, s_2)}. \quad (1)$$

Як показано в роботах [3, 6-8], застосування моментної схеми скінченних елементів [9] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження комбінованих просторових конструкцій на основі МСЕ.



а) замкнутий круговий; б) шарнірно опертий призматичний;
в) точки інтегрування у площині

Оскільки відмінною особливістю напіваналітичного метода скінченних елементів є значно більш високі порядки апроксимації переміщень вздовж напрямку x^3 , ніж по x^1 і x^2 , раціональним є використання МСЕ тільки в площині поперечного перерізу скінченного елемента, кожна точка якого визначається координатами x^1 і x^2 :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \varepsilon_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \varepsilon_{33} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} x^\alpha, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \alpha \neq i, j.\end{aligned}\quad (2)$$

Розподіл невідомих в напрямку x^3 проводиться 2π - періодичними функціями і їх вузлові значення представляються відрізками тригонометричних рядів Фур'є:

$$(u \ddot{u} \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=0}^L (u \ddot{u} \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \Psi_{(k')}^l, \quad (3)$$

де для кільцевого СЕ: $\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \cos lx^3$, $\Psi_{3'}^l = \sin lx^3$, $l_0 = 0$, $0 \leq x^3 \leq 2\pi$; призматичного: $\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3$, $\Psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3$, $l_0 = 1$, $0 \leq x^3 \leq 2$.

Визначивши вузлові переміщення $u_{k'(S_1, S_2)}$ в (1) через амплітудні значення (3) можна показати, що компоненти коефіцієнтів розкладу деформацій (2) у відповідності до [11] та при заданому законі апроксимації переміщень (1) мають наступний вигляд:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{l=0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \Psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \Psi_{3'}^l, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \sum_{l=0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \Psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \Psi_{3'}^l, \quad (\alpha \neq i, j), \quad (4)$$

де для кругового СЕ:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[(z_{,\alpha}^{\gamma'} S_\beta + z_{,\beta}^{\gamma'} S_\alpha) u_{\gamma'}^l(S_1, S_2) + z_{,\alpha}^{\beta'} z_{,\beta}^{\alpha'} Z^2 u_{2'}^l(S_1, S_2) \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(\frac{l}{2} z_{,\alpha}^{\beta'} u_{3'}^l(S_1, S_2) + z_{,\beta}^{\gamma'} S_\alpha u_{\gamma'}^l(S_1, S_2) + z_{,\beta}^{\alpha'} z_{,\alpha}^{\beta'} Z^2 u_{2'}^l(S_1, S_2) \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[l z_{,\beta}^{\alpha'} u_{3'}^l(S_1, S_2) + (z_{,\beta}^{\alpha'})^2 Z^2 u_{2'}^l(S_1, S_2) \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[(2z_{,\alpha}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,\beta}^{\gamma'} S_\alpha) u_{\gamma'}^l(S_1, S_2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(S_{(3-\alpha)} (z_{,\alpha}^{\beta'})^2 Z^2 + z_{,\alpha}^{\beta'} z_{,\beta}^{\alpha'} Z^2 + \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\beta'})^2 z_{,(3-\alpha)}^{\beta'} \right) u_{2'}^l(S_1, S_2) \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[l (2z_{,\beta}^{\alpha'} S_\alpha + z_{,\beta}^{\alpha'}) u_{3'}^l(S_1, S_2) + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(2S_{\alpha} \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 Z^{2'} + 2z_{,3\alpha}^{3'} z_{,3}^{3'} Z^{2'} + \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 z_{,\alpha}^{2'} \right) u_{2'(S_1, S_2)}^l \Big], \\
\mathring{e}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left\{ l \left(z_{,\alpha}^{3'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{3'} \right) u_{3'(S_1, S_2)}^l + \right. \\
& + \left(2z_{,3}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,3(3-\alpha)}^{\gamma'} S_{\alpha} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \\
& \left. + \left[S_{(3-\alpha)} z_{,3}^{3'} z_{,\alpha}^{3'} Z^{2'} + \frac{Z^{2'}}{2} \left(z_{,3(3-\alpha)}^{3'} + z_{,3}^{3'} z_{,12}^{3'} \right) + \frac{1}{2} z_{,3}^{3'} z_{,\alpha}^{3'} z_{,(3-\alpha)}^{2'} \right] u_{2'(S_1, S_2)}^l \right\}, \\
\mathring{e}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[z_{,\alpha}^{3'} S_{\beta} + z_{,\beta}^{3'} S_{\alpha} - \frac{1}{Z^{2'}} \left(z_{,\alpha}^{2'} z_{,\beta}^{3'} + z_{,\alpha}^{3'} z_{,\beta}^{2'} \right) \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l, \\
\mathring{e}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left\{ -\frac{l}{2} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \left[z_{,3}^{3'} S_{\alpha} - \frac{1}{Z^{2'}} \left(z_{,3}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} + z_{,3}^{3'} z_{,\alpha}^{2'} \right) \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l \right\}, \\
\mathring{e}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[-l z_{,3}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l - \frac{2}{Z^{2'}} z_{,3}^{2'} z_{,3}^{3'} u_{3'(S_1, S_2)}^l \right], \\
\mathring{e}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[2z_{,\alpha}^{3'} S_1 S_2 + z_{,12}^{3'} S_{\alpha} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{Z^{2'}} \left(2S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} + z_{,\alpha}^{2'} z_{,12}^{3'} + z_{,12}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} - \frac{1}{Z^{2'}} z_{,\alpha}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} z_{,(3-\alpha)}^{2'} \right) \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l, \\
\mathring{e}_{33, \alpha}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[-l \left(2z_{,3}^{\gamma'} S_{\alpha} + z_{,3\alpha}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l - \right. \\
& \left. - \frac{2}{Z^{2'}} \left(2S_{\alpha} z_{,3}^{2'} z_{,3}^{3'} + z_{,3\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} + z_{,3\alpha}^{3'} z_{,3}^{2'} - z_{,3}^{2'} z_{,3}^{3'} z_{,2}^{2'} \frac{1}{Z^{2'}} \right) u_{3'(S_1, S_2)}^l \right], \\
\mathring{e}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left\{ -l \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \left[2z_{,3}^{3'} S_1 S_2 + z_{,3(3-\alpha)}^{3'} S_{\alpha} - \right. \right. \\
& \left. - \frac{1}{Z^{2'}} \left[\left(z_{,3}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} + z_{,3}^{3'} z_{,\alpha}^{2'} \right) \left(S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,(3-\alpha)}^{2'}}{2Z^{2'}} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \left(z_{,3(3-\alpha)}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} + z_{,3}^{2'} z_{,12}^{3'} + z_{,3(3-\alpha)}^{3'} z_{,\alpha}^{2'} + z_{,3}^{3'} z_{,12}^{2'} \right) \right] \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l \Big\}.
\end{aligned}$$

Для призматичного СЕ:

(5)

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} S_{\alpha} \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(-\frac{\pi l}{4} z_{,\alpha}^{3'} u_{3'}^l(s_1, s_2) + z_{,\beta}^{\gamma'} S_{\alpha} u_{\gamma'}^l(s_1, s_2) \right), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} -\frac{\pi l}{2} z_{,\beta}^{3'} u_{3'}^l(s_1, s_2), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(2z_{,\alpha}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,\beta}^{\gamma'} S_{\alpha} \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{33, \alpha}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} -\frac{\pi l}{2} \left(2z_{,\beta}^{3'} S_{\alpha} + z_{,\beta}^{3'} \right) u_{3'}^l(s_1, s_2), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[-\frac{\pi l}{2} \left(z_{,\alpha}^{3'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,\beta}^{3'} \right) u_{3'}^l(s_1, s_2) + \right. \\
&\quad \left. + \left(2z_{,\beta}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,\beta}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2) \right], \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(z_{,\alpha}^{3'} S_{\beta} + z_{,\beta}^{3'} S_{\alpha} \right) u_{3'}^l(s_1, s_2), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(\frac{\pi l}{4} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'}^l(s_1, s_2) + z_{,\beta}^{3'} S_{\alpha} u_{3'}^l(s_1, s_2) \right), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \frac{\pi l}{2} z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma'}^l(s_1, s_2), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(2z_{,\alpha}^{3'} S_1 S_2 + z_{,\beta}^{3'} S_{\alpha} \right) u_{3'}^l(s_1, s_2), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{33, \alpha}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \frac{\pi l}{2} \left(2z_{,\beta}^{\gamma'} S_{\alpha} + z_{,\beta}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2), \\
\overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[\frac{\pi l}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,\beta}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2) + \right. \\
&\quad \left. + \left(2z_{,\beta}^{3'} S_1 S_2 + z_{,\beta}^{3'} S_{(3-\alpha)} \right) u_{3'}^l(s_1, s_2) \right].
\end{aligned}$$

Початкове співвідношення при побудові розрахункових рівнянь напіваналітичного метода скінченних елементів приймається у вигляді

варіаційного принципу Даламбера [11], яке записується для системи з E скінченних елементів. Розглянемо варіацію енергії деформації:

$$\delta W = \sum_{e=1}^E \delta W^e, \quad (6)$$

де δW^e - варіація енергії деформації елемента e .

В місцевій системі координат варіація енергії деформації SE записується через компоненти тензорів напружень і деформацій:

$$\delta W^e = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (7)$$

Перепишемо вираз (7) у матричному вигляді, опускаючи індекс e :

$$\delta W = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \delta \{\varepsilon\}_f^T \{\sigma\}_f \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_f^T &= \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{33}\}, \\ \{\sigma\}_f^T &= \{\sigma^{11} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{13} \quad \sigma^{23} \quad \sigma^{33}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{l=0}^L \left(\overline{[B]}_l \psi'_l + \overline{[B]}_l \psi'_3 \right) \{u\}_l, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \overline{[B]}_l &= \left[\overline{[B]}_l^{(-1,-1)} \quad \overline{[B]}_l^{(1,-1)} \quad \overline{[B]}_l^{(-1,1)} \quad \overline{[B]}_l^{(1,1)} \right], \\ \overline{\overline{[B]}}_l &= \left[\overline{\overline{[B]}}_l^{(-1,-1)} \quad \overline{\overline{[B]}}_l^{(1,-1)} \quad \overline{\overline{[B]}}_l^{(-1,1)} \quad \overline{\overline{[B]}}_l^{(1,1)} \right], \\ \{u\}_l^T &= \left[\{u\}_{l(-1,-1)}^T \quad \{u\}_{l(1,-1)}^T \quad \{u\}_{l(-1,1)}^T \quad \{u\}_{l(1,1)}^T \right], \\ \{u\}_{l(s_1, s_2)}^T &= \left[u'_{1(s_1, s_2)} \quad u'_{2(s_1, s_2)} \quad u'_{3(s_1, s_2)} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Елементи підматриць $\overline{[B]}_l^{(s_1, s_2)}$ і $\overline{\overline{[B]}}_l^{(s_1, s_2)}$ обчислюються відповідно до формул (5), на основі розкладу (2).

Підставляючи (10) в (8), запишемо варіацію енергії деформації елемента через амплітудні переміщення $\{u\}_l$ та вузлові реакції $\{r_\sigma\}_l$:

$$\delta W^e = \sum_{l=l_0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_\sigma\}_l, \quad (12)$$

де

$$\{r_\sigma\}_l = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \left(\psi'_{1'}[\overline{B}]_l^T \{\sigma\} + \psi'_{3'}[\overline{B}]_l^T \{\sigma\} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (13)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента із змінними по всім трьом координатам фізико-механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\}_l = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \left[\left(\phi'_{1'}[\overline{B}]_l^T \{\sigma\} + \phi'_{3'}[\overline{B}]_l^T \{\sigma\} \right) \sqrt{g} H_i H_j H_n \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_n^3)}, \quad (14)$$

де I, J, N - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 і x^3 відповідно, H_i, H_j, H_n - вагові функції, x_i^1, x_j^2, x_n^3 - координати точок

інтегрування. Тут для кільцевого СЕ $\phi'_{1'} = \phi'_{2'} = \cos l \frac{\pi n}{N}$, $\phi'_{3'} = \sin l \frac{\pi n}{N}$;

для призматичного $\phi'_{1'} = \phi'_{2'} = \sin l \frac{\pi n}{2N}$, $\phi'_{3'} = \cos l \frac{\pi n}{2N}$.

Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між прирощеннями напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\}. \quad (15)$$

Елементи матриці $[D]$ обчислюються з урахуванням залежності механічних характеристик матеріалу від рівня розвитку пластичних деформацій та зон контактної взаємодії [11].

Опускаючи позначку Δ , прирощення варіації енергії деформації можна записати як:

$$\delta W^e = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \delta \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (16)$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримаємо:

$$\delta W^e = \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^M \delta \{u\}_l^T [k]_{lm} \{u\}_m, \quad (17)$$

де $[k]_{lm}$ - амплітудні матриці жорсткості:

$$[k]_{lm} = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \left(\Psi_{1'}^l [\overline{B}]_l^T [D] [\overline{B}]_m \Psi_{1'}^m + \Psi_{1'}^l [\overline{B}]_l^T [D] [\overline{B}]_m \Psi_{3'}^m + \right. \\ \left. + \Psi_{3'}^l [\overline{B}]_l^T [D] [\overline{B}]_m \Psi_{1'}^m + \Psi_{3'}^l [\overline{B}]_l^T [D] [\overline{B}]_m \Psi_{3'}^m \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (18)$$

Використовуючи формулу чисельного інтегрування:

$$[k]_{lm} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \left[\left(\Phi_{1'}^l [\overline{B}]_l^T [D] [\overline{B}]_m \Phi_{1'}^m + \Phi_{1'}^l [\overline{B}]_l^T [D] [\overline{B}]_m \Phi_{3'}^m + \right. \right. \\ \left. \left. + \Phi_{3'}^l [\overline{B}]_l^T [D] [\overline{B}]_m \Phi_{1'}^m + \Phi_{3'}^l [\overline{B}]_l^T [D] [\overline{B}]_m \Phi_{3'}^m \right) \sqrt{g} H_i H_j H_n \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_n^3)}. \quad (19)$$

Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta T^e = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \dot{u}^{k'} \delta u_{k'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (20)$$

На основі (3) можна записати:

$$\delta T^e = - \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_p\}_l. \quad (21)$$

Вектор інерційних вузлових навантажень скінченного елемента має вигляд:

$$\{r_p\}_l = \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho [\tilde{g}] \{\ddot{u}\} [\psi]_l \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (22)$$

де $[\tilde{g}]$ - метричний тензор контрваріантних компонент.

На основі чисельного інтегрування:

$$\{r_p\}_l = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \left[\rho [\tilde{g}] \{\ddot{u}\} [\phi]_l \sqrt{g} H_i H_j H_n \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_n^3)}.$$

Якщо прискорення вузлів СЕ в окружному напрямку розкласти в ряд Фур'є, то виходячи з (20) отримаємо вираз:

$$\delta T^e = - \sum_{l=0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \{u\}_l^T [m]_{lm} \{\ddot{u}\}_m, \quad (23)$$

де $[m]_{lm}$ - амплітудна матриця мас, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \int \int \int_{x^1, x^2, x^3} \rho [\psi]_l^T [\tilde{g}] [\psi]_m \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (24)$$

або

$$[m]_{lm} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \left[\rho [\phi]_l^T [\tilde{g}] [\phi]_m \sqrt{g} H_i H_j H_n \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_n^3)}$$

2. Неоднорідні круговий та призматичний скінченні елементи канонічної форми із змінною площею поперечного перерізу.

Важливим частковим випадком, що має самостійне значення є неоднорідні кругові та призматичні тіла утворені рухом деякої площини вздовж утворюючої канонічної форми (коло, пряма) із змінною площею поперечного перерізу [11].

Отримані співвідношення п. 1 не накладають обмежень на розподіл фізико-механічних і геометричних параметрів вздовж будь-якої з осей x^i . Їх використання веде до необхідності виконання значного об'єму обчислень, що пов'язані з операціями чисельного інтегрування. Дослідження [1,3,4,10] показали, що більш ефективною схемою є підхід, який припускає використання усереднених значень в області поперечного перерізу у поєднанні з моментною схемою скінченного елемента на базі компонент тензора фізичних деформацій (рис. 2).

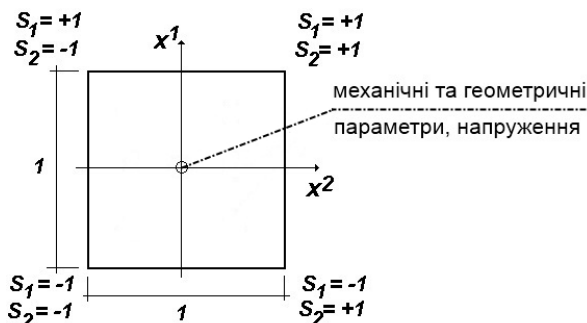


Рис. 2. Усереднення значень в області поперечного перерізу

Приймається, що щільність матеріалу ρ , компоненти тензора пружних постійних d^{ijkl} і визначник метричного тензора g незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі:

$$\overset{\circ}{\rho} = \rho|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{d}^{ijkl} = d^{ijkl}|_{x^\alpha=0}, \quad \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \sqrt{g}|_{x^\alpha=0}. \quad (25)$$

Постійні матеріалу і напруження довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування.

Особливістю представлених скінченних елементів є формулювання моментної схеми скінченного елемента в термінах компонент тензора фізичних деформацій:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}. \quad (26)$$

При цьому компоненти тензора деформацій, що розкладаються в ряд Маклорена, набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}}{2} (h_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} + h_{33,(3-\alpha)}) \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} h_{33,\alpha} \right] x^\alpha \right\}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad h_{(ii),\alpha} = \frac{g_{(ii),\alpha}}{g_{(ii)}}, \quad \alpha \neq i, j. \end{aligned} \quad (27)$$

Формули для обчислення коефіцієнтів ряду Маклорена для тензора деформацій в цьому випадку значно спрощуються. Аналогічно (5) представимо коефіцієнти розкладу деформацій (27) через амплітудні значення переміщень. Тоді для кільцевого СЕ:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (z_{,\alpha}^\gamma S_\beta + z_{,\beta}^\gamma S_\alpha) u_{,\gamma}^l(s_1, s_2), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (l u_{3'}^l(s_1, s_2) + Z^{2'} u_{2'}^l(s_1, s_2)), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} (2 z_{,\alpha}^\gamma S_1 S_2 + z_{,12}^\gamma S_\alpha) u_{,\gamma}^l(s_1, s_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[l S_\alpha u_{3'}^l(s_1, s_2) + \left(Z^{2'} S_\alpha + \frac{1}{2} z_{,\alpha}^{2'} \right) u_{2'}^l(s_1, s_2) \right], \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3}^l &= 0, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{12, (3-\alpha)}^l = 0, \\ \overset{\circ}{\bar{\epsilon}}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[-\frac{l}{2} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'}^l(s_1, s_2) + \left(S_\alpha - \frac{z_{,\alpha}^{2'}}{Z^{2'}} \right) u_{3'}^l(s_1, s_2) \right], \\ \overset{\circ}{\bar{\bar{\epsilon}}}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left\{ -l \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2) + \right. \\ &\quad \left. + \left[2S_1 S_2 - \frac{1}{Z^{2'}} \left(z_{,\alpha}^{2'} S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,\alpha}^{2'} z_{, (3-\alpha)}^{2'}}{2Z^{2'}} + \frac{1}{2} z_{,12}^{2'} \right) \right] u_{3'}^l(s_1, s_2) \right\}, \\ \overset{\circ}{\bar{\bar{\epsilon}}}_{\alpha\beta}^l &= 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\bar{\epsilon}}}_{33}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\bar{\epsilon}}}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\bar{\epsilon}}}_{33,\alpha}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\bar{\epsilon}}}_{12, (3-\alpha)}^l = 0. \end{aligned}$$

Для призматичного СЕ:

(28)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} S_\beta + z_{,\beta}^{\gamma'} S_\alpha \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2), \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} -\frac{\pi l}{2} a u_{3'}^l(s_1, s_2), \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(2z_{,\alpha}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,12}^{\gamma'} S_\alpha \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2), \\ \overset{\circ}{\bar{\epsilon}}_{33,\alpha}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} -\frac{\pi l}{2} a S_\alpha u_{3'}^l(s_1, s_2), \\ \overset{\circ}{\bar{\epsilon}}_{\alpha 3}^l &= 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\epsilon}}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\epsilon}}_{12, (3-\alpha)}^l = 0, \\ \overset{\circ}{\bar{\bar{\epsilon}}}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left(\frac{\pi l}{4} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'}^l(s_1, s_2) + a S_\alpha u_{3'}^l(s_1, s_2) \right), \\ \overset{\circ}{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[\frac{\pi l}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'}^l(s_1, s_2) + 2a S_1 S_2 u_{3'}^l(s_1, s_2) \right], \\ \overset{\circ}{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}}_{\alpha\beta}^l &= 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}}_{33}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}}_{33,\alpha}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}}_{12, (3-\alpha)}^l = 0. \end{aligned}$$

Фізичні компоненти тензора напружень визначаються співвідношенням:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}. \quad (29)$$

Зв'язок між компонентами тензора фізичних напружень та деформацій подається на основі узагальненого закону Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{d}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}. \quad (30)$$

Аналогічно (27) представимо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{(\alpha\alpha)} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}'_{,(3-\alpha)} \alpha^{\alpha} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \sqrt{g_{11} g_{22}} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}'_{,(3-\alpha)} \alpha^3 x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = g_{33} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha} \alpha^3 x^{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Компоненти $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{i(i)} (\alpha \neq i)$ відображають напруження згину і їх впливом на точність розв'язання нехтувати не можна, в особливості для оболонок і пластин. Члени ряду $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{12}$, $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{3(\alpha)}$ визначають зміну напружень зсуву. Вклад їх в енергію деформації елемента при використанні МССЕ рівний нулю. Для тонких оболонок з навантаженням, що приведене до серединної поверхні в класичній теорії запроваджуються умови рівності нулю нормальних напружень на площадках, які паралельні площині, що дотична до серединної поверхні. Цій умові відповідає наступна гіпотеза:

$$\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{(\alpha)(\alpha)} = 0, \quad (32)$$

яка визначає постійність напружень обтягу.

Зв'язок між коефіцієнтами розкладів (27) і (31) в центрі меридіонального перерізу СЕ на основі узагальненого закону Гука:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = d^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}. \quad (33)$$

Зв'язок між похідними напружень і деформацій для лінійно-пружного матеріалу, який забезпечує універсальність СЕ, що пропонуються:

$$\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{ij} = d_{\alpha}{}^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}'_{kl,\alpha}, \quad (34)$$

де

$$d_{\alpha}{}^{ijkl} = d^{ijkl} - \frac{d^{ij(\alpha)(\alpha)} d^{(\alpha)(\alpha)kl}}{d^{(\alpha)(\alpha)(\alpha)(\alpha)}}, \quad \varepsilon'_{ij,\beta} = \varepsilon_{ij,\beta} - \frac{\varepsilon_{ij}}{2} (h_{(ii),\beta} + h_{(jj),\beta}).$$

Напруження і їх похідні незалежно подаються відрізками ряду Фур'є вздовж x^3 :

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} \Psi_l^l + \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} \Psi_{3'}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \Psi_l^l + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \Psi_{3'}^l. \quad (35)$$

Для однорідних вздовж x^3 тіл амплітудні значення напружень та їх похідних в центрі поперечних перерізів СЕ можуть бути отримані безпосередньо через амплітудні значення деформацій і їх похідних:

$$\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = d^{ijk} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = d_{\alpha}^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = d_{\alpha}^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l. \quad (36)$$

В загальному випадку, компоненти тензора пружних постійних залежать від координати x^3 і значення напружень неможливо отримати через амплітудні значення деформацій. Тому, амплітудні значення напружень визначаються співвідношеннями гармонійного аналізу чисельним інтегуванням:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_l^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_l^l(n), \\ \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_{3'}^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_{3'}^l(n). \end{aligned} \quad (37)$$

Тут для кільцевого СЕ $\theta = \begin{cases} 2, & \text{якщо } l = 0 \\ 1, & \text{якщо } l > 0 \end{cases}$, для призматичного $\theta = 1$; $\overset{\circ}{\sigma}_n^{ij}$ і

$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij}$ - координатні значення напружень і їх похідні в центрі поперечних перерізів, що відповідають точкам інтегування n ; $2N$ - загальне число точок інтегування вздовж координати x^3 .

Подавши компоненти тензорів напружень та деформацій відповідно основним положенням МССЕ (27) і (31), отримаємо:

$$\delta W^e = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \left(\overset{\circ}{\sigma}^{ij} + \overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{ij} x^\alpha \right) \left(\delta \varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon'_{ij,\beta} x^\beta \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (38)$$

Виконаємо інтегування по площині поперечного перерізу СЕ з урахуванням гіпотез (25):

$$\delta W^e = \int_{x^3} \left(\overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{ij} \delta \varepsilon'_{ij,\alpha} \right) \sqrt{g} dx^3. \quad (39)$$

або в матричному вигляді:

$$\delta W^e = \int_{x^3} \left(\delta \{\mathring{\epsilon}\}^T \{\mathring{\sigma}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \delta \{\mathring{\epsilon}\}_{\alpha}^T \{\mathring{\sigma}\}_{\alpha} \right) \sqrt{g} dx^3, \quad (40)$$

де

$$\begin{aligned} \{\mathring{\epsilon}\}^T &= \left\{ \mathring{\epsilon}_{11} \quad \mathring{\epsilon}_{12} \quad \mathring{\epsilon}_{22} \quad 2\mathring{\epsilon}_{13} \quad 2\mathring{\epsilon}_{23} \quad 2\mathring{\epsilon}_{33} \right\}, \\ \{\mathring{\epsilon}\}_{\alpha}^T &= \left\{ \mathring{\epsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} \quad \mathring{\epsilon}_{33,\alpha} \quad \mathring{\epsilon}_{(3-\alpha)3,\alpha} \right\}, \\ \{\mathring{\sigma}\}^T &= \left\{ \mathring{\sigma}^{11} \quad \mathring{\sigma}^{12} \quad \mathring{\sigma}^{22} \quad \mathring{\sigma}^{13} \quad \mathring{\sigma}^{23} \quad \mathring{\sigma}^{33} \right\}, \\ \{\mathring{\sigma}\}_{\alpha}^T &= \left\{ \mathring{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \quad \mathring{\sigma}_{,\alpha}^{33} \quad \mathring{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)3} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:

$$\{\mathring{\epsilon}\} = \sum_{l=0}^L \left(\overset{\circ}{[B]}_l \psi'_l + \overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l \psi'_{3'} \right) \{u\}_l, \quad \{\mathring{\epsilon}\}_{\alpha} = \sum_{l=0}^L \left(\overset{\circ}{[B]}_{\alpha l} \psi'_l + \overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_{\alpha l} \psi'_{3'} \right) \{u\}_l. \quad (42)$$

Матриці $\overset{\circ}{[B]}_l$, $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l$, $\overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}$, $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_{\alpha l}$ за своєю структурою подібні матрицям $\overset{\circ}{[B]}_l$ і $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l$. Елементи підматриць $\overset{\circ}{[B]}_l^{(S_1, S_2)}$, $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l^{(S_1, S_2)}$, $\overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}^{(S_1, S_2)}$, $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_{\alpha l}^{(S_1, S_2)}$ обчислюються згідно (28).

Використавши (42), варіацію енергії деформації представимо через амплітудні значення переміщень та вузлових реакцій:

$$\delta W^e = \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_{\sigma}\}_l, \quad (43)$$

де

$$\{r_{\sigma}\}_l = \int_{x^3} \left\{ \left(\psi'_l \overset{\circ}{[B]}_l^T + \psi'_{3'} \overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l^T \right) \{\mathring{\sigma}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\psi'_l \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}^T + \psi'_{3'} \overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_{\alpha l}^T \right) \{\mathring{\sigma}\}_{\alpha} \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (44)$$

Закон Гука для коефіцієнтів розкладу напружень і деформацій має вигляд:

$$\{\overset{\circ}{\sigma}\} = [D]\{\overset{\circ}{\epsilon}\}, \quad \{\overset{\circ}{\sigma}\}_\alpha = [D]_\alpha \{\overset{\circ}{\epsilon}\}_\alpha. \quad (45)$$

Тоді (40) запишеться як:

$$\delta W^e = \int_{x^3} \left(\delta\{\overset{\circ}{\epsilon}\}^T [D] \{\overset{\circ}{\epsilon}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \delta\{\overset{\circ}{\epsilon}\}_\alpha^T [D]_\alpha \{\overset{\circ}{\epsilon}\}_\alpha \right) \sqrt{g} dx^3. \quad (46)$$

Використавши розклад деформацій через переміщення, варіацію енергії деформації представимо у вигляді:

$$\delta W^e = \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta\{u\}_l^T [k]_{lm} \{u\}_m, \quad (47)$$

де матриця жорсткості неоднорідного скінченного елемента визначається виразом:

$$\begin{aligned} [k]_{lm} = \int_{x^3} & \left[\psi'_{l'} [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_m \psi''_m + \psi'_{l'} [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_m \psi''_{3'} + \right. \\ & + \psi'_{3'} [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_m \psi''_m + \psi'_{3'} [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_m \psi''_{3'} + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\psi'_{l'} [\overset{\circ}{B}]_{\alpha l}^T [\overset{\circ}{D}]_\alpha [\overset{\circ}{B}]_{\alpha m} \psi''_m + \psi'_{l'} [\overset{\circ}{B}]_{\alpha l}^T [\overset{\circ}{D}]_\alpha [\overset{\circ}{B}]_{\alpha m} \psi''_{3'} + \right. \\ & \left. \left. + \psi'_{3'} [\overset{\circ}{B}]_{\alpha l}^T [\overset{\circ}{D}]_\alpha [\overset{\circ}{B}]_{\alpha m} \psi''_m + \psi'_{3'} [\overset{\circ}{B}]_{\alpha l}^T [\overset{\circ}{D}]_\alpha [\overset{\circ}{B}]_{\alpha m} \psi''_{3'} \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (48) \end{aligned}$$

У випадку, коли фізико-механічні характеристики та площа поперечного перерізу SE незмінні вздовж x^3 , інтегрування в (48) можна виконати в замкнутій формі:

$$[k]_{ll} = h \left\{ [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_l + [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_l + \right.$$

$$+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}^T \overset{\circ}{[D]}_{\alpha} \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l} + \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}^T \overset{\circ}{[D]}_{\alpha} \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l} \right) \left. \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (49)$$

Тут $\hbar = \hbar_1$ при $l \neq 0$ і $\hbar = \hbar_2$ при $l = 0$. Для кільцевого СЕ: $\hbar_1 = \pi$, $\hbar_2 = 2\pi$; для призматичного: $\hbar_1 = 1$, $\hbar_2 = 0$.

Розглянемо варіацію кінетичної енергії скінченного елемента по аналогії з п. 1.

$$\delta T^e = - \sum_{l=l_0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_p\}_l. \quad (50)$$

При формуванні коефіцієнтів матриці жорсткості беруть участь поліноми більш низького ступеня (перші похідні), ніж при формуванні коефіцієнтів матриці мас. Отже, збіжність чисельного рішення визначається збіжністю потенціальної енергії деформації. В цьому випадку доцільно зменшити ступінь поліномів, які використовуються при обчисленні коефіцієнтів матриці мас. Використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, та враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині маси елементів, які примикають до даного вузла, вектор інерційних вузлових навантажень скінченного елемента можна записати:

$$\{r_p\}_l = \frac{1}{4} \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho} [\overset{\circ}{g}] \{\overset{\circ}{u}\} [\psi]_l \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (51)$$

Якщо прискорення вузлів СЕ в окружному напрямку розкласти в ряд Фур'є, отримаємо вираз:

$$\delta T^e = - \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \{u\}_l^T [m]_{lm} \{\ddot{u}\}_m, \quad (52)$$

де $[m]_{lm}$ - амплітудна "неузгоджена" матриця мас, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \frac{1}{4} \int_{x^3} \overset{\circ}{\rho} [\psi]_l^T [\overset{\circ}{g}] [\psi]_m \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (53)$$

Для однорідних тіл із постійною площею поперечного перерізу вздовж x^3 інтегрування в (53) можна виконати в замкнутій формі:

$$[m]_{ll} = \frac{1}{4} \hbar \overset{\circ}{\rho} [\overset{\circ}{g}] \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (54)$$

Висновки

Розрахункові співвідношення напіваналітичного метода скінчених елементів, отримані в рамках просторової задачі динаміки, дозволяють розглядати неоднорідні кругові та призматичні тіла неканонічної форми із складною формою і структурою поперечного перерізу з урахуванням наявності зон нелінійної роботи матеріалу та контактної взаємодії.

При побудові рівнянь не накладалися обмеження на характер розподілу масових і механічних властивостей матеріалів. Запропонований підхід з енергією деформації на базі фізичних компонент тензорів напружень і деформацій та усередненими значеннями фізико-механічних і геометричних параметрів в області поперечного перерізу СЕ забезпечують високу швидкість збіжності результатів до точного і значне скорочення об'ємів обчислень, що пов'язані з чисельним інтегруванням.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах динаміки просторових тіл - Монографія. Київ, 2012. – 248 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Топор А.Г., Солодей І.І.* Развитие ПМКЭ применительно к задачам статики и динамики тел вращения при неосесимметричных нагрузках // Прикладная механика №1, 1998, Том 34, с. 31-38.
5. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
6. *Гуляр А.І., Козак А.Л., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Применение МСКЭ к расчету круглых пластин и оболочек вращения // Сопrotивление материалов и теория сооружений. –1978. –Вып.33. –С.81-85.
7. *Гуляр А.І., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1978, №32 – с.3-10.
8. *Кислокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А.* Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек // Проблемы прочности. –1977. -№7. –С.25-33.
9. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Сопrotивление материалов и теория сооружений. –1974. –Вып.24. –С.147-156.
10. *Солодей І.І.* Ефективність скінченноелементної бази напіваналітичного метода скінчених елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.154-163.
11. *Солодей І.І.* Постановка задачі лінійного і нелінійного деформування та руйнування просторових тіл в задачах динаміки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.89, 2012.-с.93-106.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.

Солодей И.И.

**БАЗОВЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ПМКЭ ДЛЯ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ**

Разработаны базовые неоднородные круговой и призматический конечные элементы (КЭ) с четырехугольным поперечным сечением общего вида, на основе которых получены расчетные соотношения полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) для круговых и призматических тел неканонической формы под действием произвольного стационарного или нестационарного нагружения.

Solodei I.I.

**BASIC FINITE ELEMENT MODELS SAFEM FOR THREE-DIMENSIONAL BODIES
UNDER DYNAMIC LOADING**

Basic universal finite circular and prismatic elements (FE) with quadrangular cross-section are considered. Design equations of semi-analytical finite elements method (SAFEM) for 3D uncanonical circular and prismatic bodies under dynamic loading are developed.

УДК 539.3

М.О. Соловей, д-р техн. наук
О.П. Кривенко, канд. техн. наук
О.Б. Калашніков

ВПЛИВ ПОПЕРЕДНЬОГО НАГРІВУ НА ВТРАТУ СТІЙКОСТІ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК ПРИ ДІЇ ТИСКУ

Вивчається вплив попереднього нагріву на втрату стійкості пружних пологих ізотропних оболонок при навантажуванні їх рівномірним тиском. Розглядаються круглі у плані сферична і конічна панелі та сферичні квадратні у плані панелі з центральним отвором і перехресними каналами. Досліджено вплив ексцентричного за товщиною розташування каналів на втрату стійкості квадратної у плані панелі для різних варіантів нагріву обшивки і каналів. Виконано порівняння з розв'язками, що отримані в програмному комплексі ЛІРА.

В інженерній практиці через технологічну необхідність гладкі оболонкові конструкції можуть послаблюватись отворами, каналами та виїмками. Звичайно при експлуатації оболонки знаходяться у складних умовах комбінованої дії силових і температурних навантажень. Останні можуть істотно впливати на напружено-деформований стан і стійкість конструкції. Врахування нагріву та його вплив на стійкість оболонки є складною та недостатньо вивченою задачею будівельної механіки.

У роботі [1] викладений скінченноелементний метод дослідження напружено-деформованого стану та стійкості тонких пружних оболонок неоднорідної структури при дії термосилових навантажень. Створена методика базується на співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, геометрично нелінійному формулюванні задачі в приростах і застосуванні моментної схеми скінченних елементів (МССЕ). Моделювання неоднорідної оболонки реалізується модифікованим універсальним просторовим скінченним елементом (СЕ), який, за рахунок введених додаткових змінних параметрів, може бути ексцентрично розташованим відносно серединної поверхні обшивки та змінювати свої розміри в напрямку товщини. Обґрунтування достовірності отримуваних результатів розрахунків виконано через дослідження збіжності скінченноелементних розв'язків та порівняння їх з відомими аналітичними та чисельними розв'язками, які на сьогодні не охоплюють усі розглядувані в [1] класи задач. Надалі у роботах [2 - 5] були виконані порівняння розв'язків МССЕ з розв'язками, що отримувались за допомогою програмного комплексу (ПК) ЛІРА [6]. У цих роботах була

вивчена можливість застосування нелінійного процесора ПК ЛІРА при розв'язуванні геометрично нелінійних задач стійкості тонких круглих у плані пологих сферичних панелей сталюї, лінійно- та ступінчасто-змінної товщини при силовому навантаженні – дії тиску.

Дана робота присвячена подальшому підтвердженню достовірності отримуваних за МССЕ розв'язків у задачах стійкості пружних неоднорідних оболонок при наявності температурного поля з використанням можливостей ПК ЛІРА. У геометрично нелінійному процесорі ПК ЛІРА [6] застосовується кроковий алгоритм навантаження. Для визначення критичного навантаження, що є завершенням розв'язування задачі, відслідковується вироджуваність матриці лінеаризованої системи розв'язувальних рівнянь, яка відбувається або в точці розгалуження, або у верхній критичній. Можливість дослідження закритичної поведінки конструкції - відсутня. Апроксимація пружної тонкої оболонки виконувалась плоскими трикутним СЕ № 342 і чотирикутним СЕ № 344.

1. Розглядаються пологі круглі у плані сферична (рис. 1, а) та конічна (рис. 1, б) панелі сталюї товщини. Оболонки, що рівномірно нагріті за об'ємом на $T^{\circ}\text{C}$, навантажуються зовнішнім рівномірно розподіленим тиском інтенсивністю q . Панелі жорстко затиснуті вздовж контуру. Вихідні данні наступні: модуль пружності $E = 19.6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, коефіцієнт лінійного розширення $\alpha = 0.125 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}$, товщина $h = 0.01 \text{ м}$, стріла підйому $H = 3h$, розмір опорного контуру $a = 100h$, радіус серединної поверхні сферичної оболонки $R = 12.52h$. Кантором Б.Я. ця задача розв'язана варіаційним методом у високих наближеннях із застосуванням нелінійної теорії пологих оболонок [7].

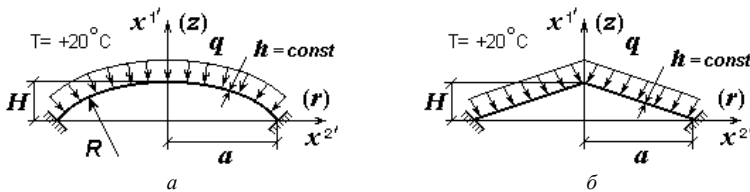


Рис. 1

Результати досліджень подані з використанням безрозмірних параметрів

$$\bar{q} = a^4 q / (Eh^4), \quad \bar{t} = \alpha T (a/h)^2, \quad k = H/h, \quad \bar{u}^1 = u^1 / h, \quad (1)$$

де $u^{1'}$ – прогин панелі вздовж осі $x^{1'}$.

При розрахунках за МССЕ та ПК ЛІРА прийнято, що панелі спочатку нагрівались до температури $T = 20^\circ\text{C}$ (що відповідає $\bar{t} = 5$), а потім при зафіксованому температурному полі навантажувались тиском.

1.1. За розрахункову скінченноелементну модель сферичної оболонки було прийнято чверть панелі з рівномірною сіткою 20×20 СЕ, яка, як показали дослідження, забезпечує збіжність розв'язків.

Результати розрахунків подані у вигляді діаграм «навантаження \bar{q} – прогин $\bar{u}^{1'}$ » центра панелі (рис. 2, а) та форм деформування на різних етапах навантаження (рис. 2, б, де вихідна форма панелі показана штрихпунктирною лінією; та рис. 3, а; б).

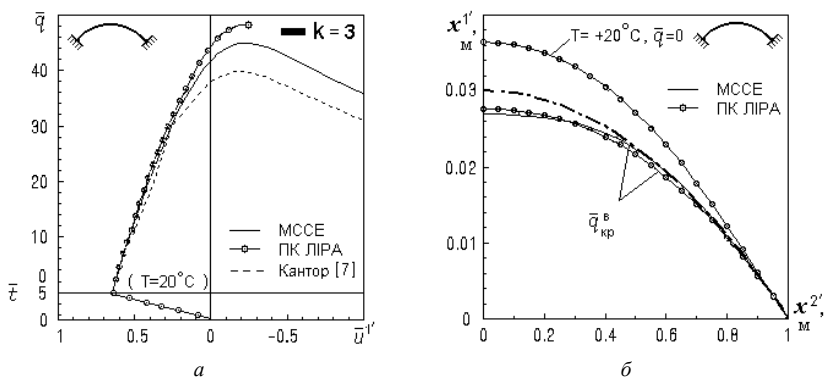


Рис. 2. Діаграми «навантаження – прогин» в центрі (а) сферичної панелі та форми деформування та втрати стійкості (б)

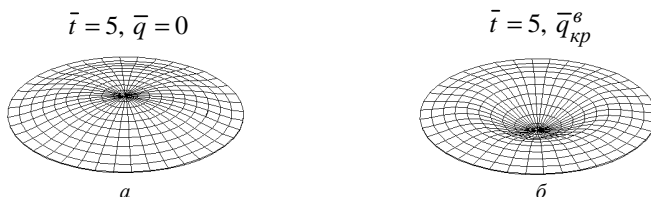


Рис. 3. Форми деформування сферичної панелі в характерних точках діаграми «навантаження – прогин»: (а) після нагріву; (б) в момент втрати стійкості

Дія попереднього нагріву спричиняє деформування оболонки в бік, протилежний дії тиску – підйом панелі в полюсі досягає $0.65h$. Маємо повний збіг діаграм та форм деформування у момент максимального

нагріву ($T = 20^{\circ}C$) та далі в докритичній області. У зоні верхнього критичного навантаження спостерігається розходження діаграм. За величиною верхнього критичного навантаження $\bar{q}_{кр}^e$ воно (порівняно з МССЕ) становить 13.4 % для ПК ЛПА і -6.7 % для [7], за прогином $\bar{u}'_{кр}$ – відповідно -5.0 і -17.4 % (табл. 1).

Форма втрати стійкості оболонки характеризуються проклацуванням її центральної частини (рис. 3, б).

Таблиця 1

Форма панелі	$\bar{q}_{кр}^e / \bar{u}'_{кр}$				
	МССЕ	ПК ЛПА	$\Delta, \%$	Кантор [7]	$\Delta, \%$
Сферична	<u>42.64</u>	<u>48.37</u>	<u>13.4</u>	<u>39.8</u>	<u>-6.7</u>
	-0.242	-0.230	-5.0	-0.200	-17.4
Конічна	<u>38.39</u>	<u>34.23</u>	<u>-10.8</u>	<u>37.00</u>	<u>-3.6</u>
	-0.147	0.024	-116.3	-0.200	36.1

1.2. Відповідно до результатів роботи [7] конічній пологій панелі обертання при дії осесиметричного навантаження характерне осесиметричне нелінійне деформування. Беручи до уваги можливу складну форму деформування оболонки з параметром кривизни $k = 3$ у закритичній області, як розрахунковий фрагмент було прийнято половину конічної панелі з сіткою 20×40 СЕ.

Порівняння розв'язків представлено на рис. 4. Як і вище, маємо повний збіг діаграм «навантаження – прогин» (а) та форм деформування (б) при навантаженні оболонки попереднім нагрівом та в докритичній області. В зоні верхнього критичного навантаження спостерігається розходження діаграм: за величиною $\bar{q}_{кр}^e$ - 10.8 % (для ПК ЛПА) та -3.6 % (для [7]), за прогином $\bar{u}'_{кр}$ – відповідно -116.3 і -36.1 % (табл. 1). Слід зауважити, що діаграми МССЕ та [7] для ненагрітої панелі ($T = 0^{\circ}C$) повністю збігаються [1].

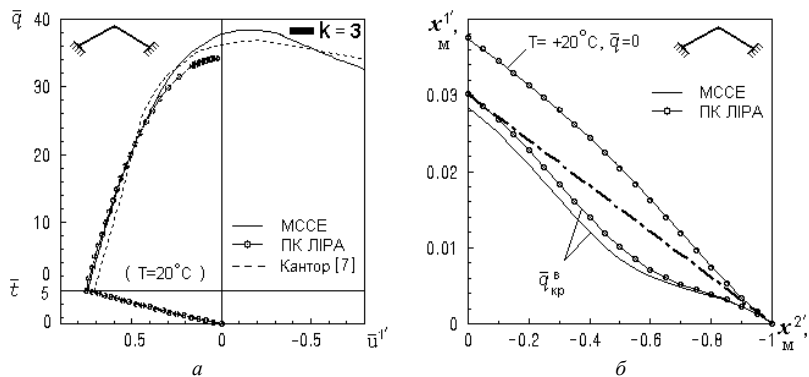


Рис. 4. Діаграми “навантаження – прогин” в центрі (а) кінцевої панелі та форми деформування і втрати стійкості (б)

Аналіз результатів підтвердив осесиметричне нелінійне деформування панелей на всіх стадіях навантаження (рис. 5) за всіма методиками розрахунку. Втрата стійкості відбувається з утворенням осесиметричної вм’ятини посередині меридіану (рис. 5, б).

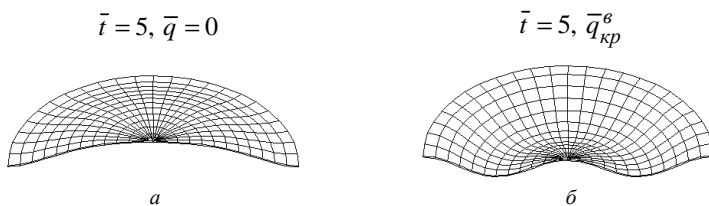


Рис. 5. Форми деформування кінцевої панелі в характерних точках діаграми “навантаження – прогин”: (а) після нагріву; (б) в момент втрати стійкості

2. Розглянуто вплив комбінованої дії термосилового навантаження на стійкість квадратної у плані сферичної панелі з послабленнями у вигляді: отворів і каналів. Попередньо нагріта шарнірно оперта вздовж контуру оболонка навантажується рівномірним нормальним тиском інтенсивністю q . Розрахунки виконано на прикладі пологої панелі з параметром кривизни $K = 32$ ($K = 2a^2/(Rh)$). Вихідні дані наступні:

$E = 20.59 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.12 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}$, $h = 0.01 \text{ м}$ – товщина панелі, $a = 60h$ – розмір у плані, радіус серединної поверхні $R = 225h$. Ці задачі при дії на панель тиску розв’язані у роботі [8].

2.1. Розглядається квадратна у плані сферична панель, що має центральний квадратний отвір шириною $b_o = 12h$ (рис. 6, а, б). За розрахункову скінченноелементну модель прийнято чверть панелі з рівномірною сіткою 20×20 СЕ, яка забезпечує збіжність розв'язків. Досліджується вплив на втрату стійкості оболонки трьох варіантів рівномірного за об'ємом нагріву на $T = -20^\circ, 0^\circ, +20^\circ\text{C}$.

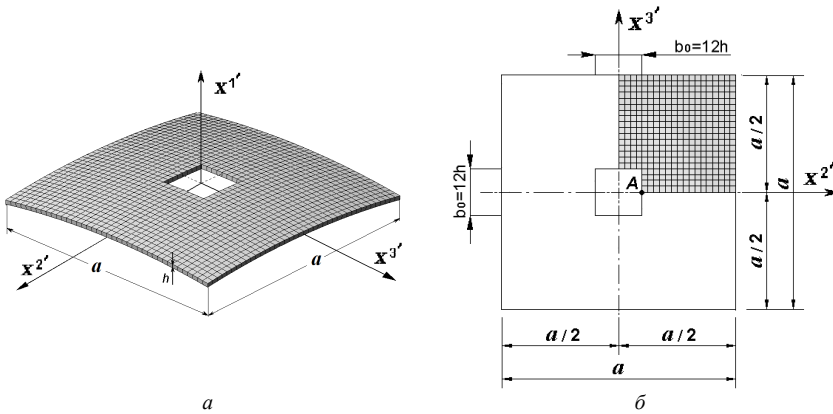


Рис. 6. Сферична панель з центральним отвором

На рис. 7 наведено діаграми « $\bar{q} - \bar{u}^1$ », що отримані за МССЕ, ПК ЛІРА і в роботі [8], для оболонок без і з отвором при навантаженні лише тиском ($T = 0^\circ\text{C}$). Варіанти задач позначено відповідними значками. Для панелі без отвору (■) діаграми побудовані для центральної точки оболонки, для панелі з отвором (■) – для точки А (рис. 6, б). Спостерігається гарний збіг діаграм МССЕ та ПК ЛІРА у докритичній області та в момент втрати стійкості. У верхній критичній точці розходження за величиною $\bar{q}_{кр}^e$ становить - 1.9 та 2.9%, а за прогином $\bar{u}_{кр}^1$ – 5.7 та 7.2% (табл. 2). Порівняння з нелінійним розв'язком роботи [8] показало збіг усіх діаграм у докритичній області та їх поступове розходження в зоні верхнього критичного навантаження. Воно порівняно з розв'язком за МССЕ для панелі без і з отвором становить: за $\bar{q}_{кр}^e$ - 3.3 і - 9.9%; за $\bar{u}_{кр}^1$ – 21.3 і - 10.5%. Більше розходження результатів порівняно з ПК ЛІРА пояснюється тим, що в [8] при розв'язанні задачі методом

Бубнова – Гальоркіна утримано недостатнє число членів у розкладі переміщень у зв'язку з відсутністю необхідних обчислювальних ресурсів.

Відмітимо, що послаблення гладкої панелі одним центральним отвором в нашому прикладі призвело до зниження $\bar{q}_{кр}^e$ на 19.2 %.

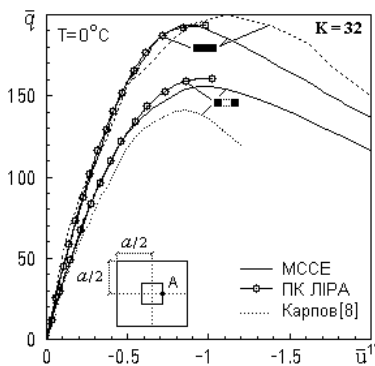


Рис. 7. Діаграми “навантаження – прогин” для панелей без і з отвором при дії тиску

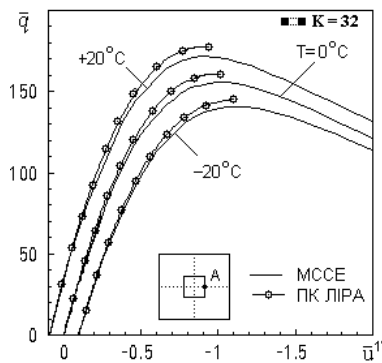


Рис. 8. Діаграми “навантаження – прогин” в т. А панелі з отвором при різних нагрівах

Таблиця 2

Варіант оболонки	$\bar{q}_{кр}^e / \bar{u}_{кр}^{I'e} (T = 0^\circ \text{C})$				
	МССЕ	ПК ЛІРА	$\Delta, \%$	Карпов [8]	$\Delta, \%$
Без отвору	<u>193.7</u>	<u>190.05</u>	<u>-1.9</u>	<u>200.0</u>	<u>3.3</u>
	-0.923	-0.976	5.7	-1.120	21.3
З отвором	<u>156.41</u>	<u>161.00</u>	<u>2.9</u>	<u>141.0</u>	<u>-9.9</u>
	-0.950	-1.018	7.2	-0.850	-10.5

Аналіз впливу трьох варіантів попереднього нагріву на втрату стійкості оболонки з отвором подано на рис. 8, 9 та в табл. 3. Для усіх варіантів нагріву розв'язки за МССЕ та ПК ЛІРА гарно збігаються за всією діаграмою « $\bar{q} - \bar{u}^I$ » (рис. 8). Для величини $\bar{q}_{кр}^e$ розбіжність знаходиться у межах 3.0 – 3.5 %, для прогину панелі в точці А $\bar{u}_{кр}^{I'e}$ - у межах 0.3 – 4.1 % (табл. 3).

Таблиця 3

Варіант розрахунку	$T = -20^{\circ}\text{C}$		$T = 0^{\circ}\text{C}$		$T = +20^{\circ}\text{C}$	
	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}'_{кр}^e$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}'_{кр}^e$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\bar{u}'_{кр}^e$
МССЕ	140.83	-1.095	156.41	-0.950	171.55	-0.904
ПК ЛІРА	145.00	-1.098	161.00	-1.018	177.56	-0.941
$\Delta, \%$	3.0	0.3	2.9	7.2	3.5	4.1

Після попереднього охолодження до $T = -20^{\circ}\text{C}$ (рис. 9, а) та попереднього нагріву до $T = +20^{\circ}\text{C}$ (рис. 9, б) для обох розв'язків маємо повний збіг форм деформування, які мало відрізняються від початкової ($T = 0^{\circ}\text{C}$, $\bar{q} = 0$). Втрата стійкості панелі відбувається через проклацування її центральної частини (рис. 10).

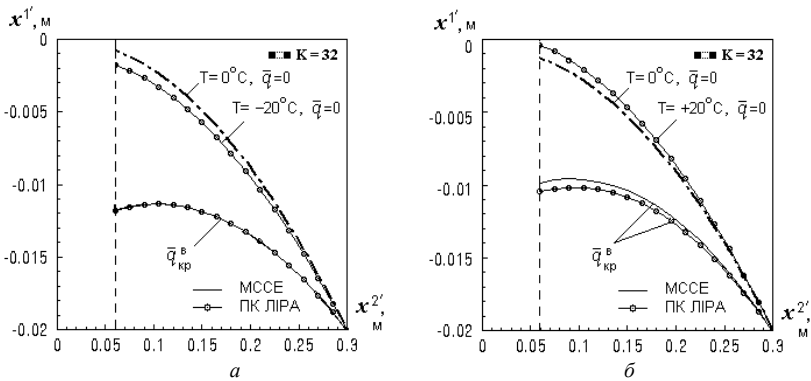


Рис. 9. Форми деформування та втрати стійкості панелі з отвором

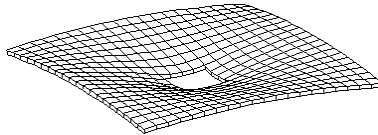


Рис. 10. Форма втрати стійкості панелі з центральним отвором

2.2. Розглядається квадратна в плані панель товщиною h , обшивка якої послаблена чотирма перехресними каналами шириною $b_k = 2h$ та

глибиною $h_k = 0.3h$ (рис. 11). Осі каналів розташовані на відстані $a/3$ від контуру оболонки. За розрахунку приймалася скінченноелементна модель у вигляді чверті оболонки з двома площинами симетрії та поділом 22×22 СЕ, що забезпечує збіжність розв'язків.

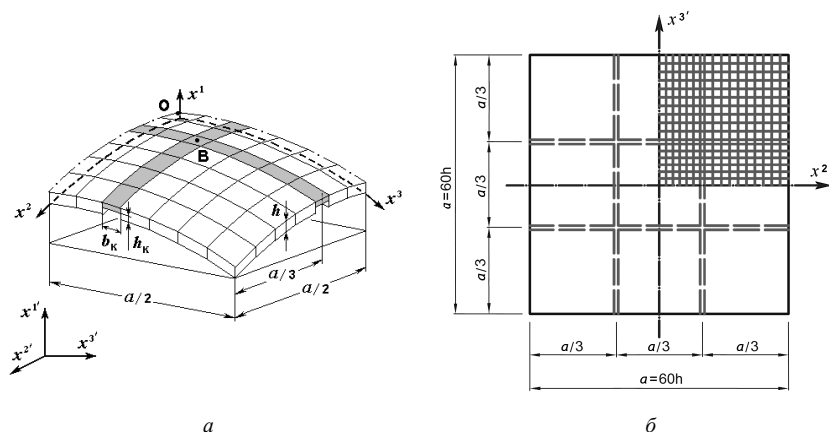


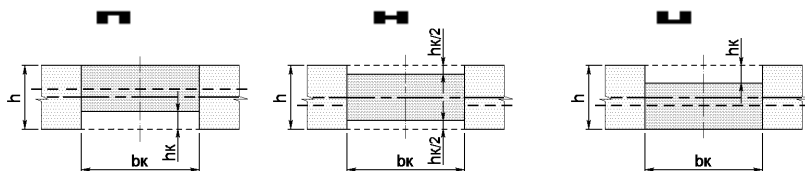
Рис. 11. Сферична квадратна в плані панель, що послаблена каналами

Вивчався вплив на нелінійне деформування та втрату стійкості пологої панелі двох факторів: розташування каналів по товщині та різних варіантів термосилового навантаження.

Порівнювались три способи ексцентричного розташування каналів відносно серединної поверхні обшивки оболонки (рис. 12, способи послаблень позначені відповідними значками):

- 1) з внутрішньої сторони (■) (а);
- 2) з внутрішньої та зовнішньої сторін симетрично до серединної поверхні (■) (б);
- 3) з зовнішньої сторони (■) (в).

Для всіх способів розташування каналів величини об'ємів послаблень були незмінними.



а б в

Рис. 12. Варіанти ексцентричного розташування каналів

Для кожного способу розташування каналів розглянуто чотири варіанти дії на панель тиску та рівномірного за об'ємом нагріву обшивки і каналів.

У першому варіанті на панель діяв лише тиск (відповідні результати позначені написом 1. q).

У другому варіанті канали нагрівались на $T^{\kappa} = 40^{\circ}\text{C}$, а обшивка залишалася ненагрітою (позначення 2. $q + T_{40^{\circ}}^{\kappa}$).

У третьому варіанті обшивка нагрівалась на $T^{\circ} = 40^{\circ}\text{C}$, а канали залишалися ненагрітими (позначення 3. $q + T_{40^{\circ}}^{\circ}$).

У четвертому варіанті канали й обшивка нагрівались разом ($T^{\kappa} = 40^{\circ}\text{C}$, $T^{\circ} = 40^{\circ}\text{C}$, позначення 4. $q + T_{40^{\circ}}^{\kappa} + T_{40^{\circ}}^{\circ}$).

Для першого варіанта навантаження та першого способу розташування каналів виконано порівняння діаграм «навантаження – прогин» центра панелі, що отримані за МССЕ, в роботі [8] та ПК ЛІРА (рис. 13). Отримано гарний збіг діаграм. Різниця величини верхнього критичного навантаження, що отримана за МССЕ, з розв'язками [8] та ПК ЛІРА становить відповідно 1.3% та 3.6%, для $\bar{u}_{кр}^{1\sigma}$ – 3.3 та 2.1%.

Для чотирьох варіантів термосилового навантаження на рис. 14 спостерігається еволюція діаграм «навантаження – прогин» центра панелі в залежності від способу розташування каналів на обшивці оболонки. При всіх варіантах нагріву розташування каналів з внутрішньої сторони обшивки (■) або симетрично (▣), мало впливає на величину верхнього критичного навантаження $\bar{q}_{кр}^{\sigma}$ (розходження знаходиться у межах 0.5 – 1.9%, табл. 4). Найбільший вплив на $\bar{q}_{кр}^{\sigma}$ справляє третій спосіб

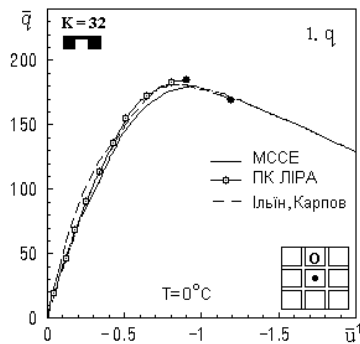


Рис. 13. Діаграми «навантаження – прогин» центра панелі при дії тиску

розташування каналів (■). У цьому випадку величина $\bar{q}_{кр}^e$ зменшується на 10 – 12% відносно перших двох способів розташування каналів. Більш наочно це видно на гістограмах (рис. 15).

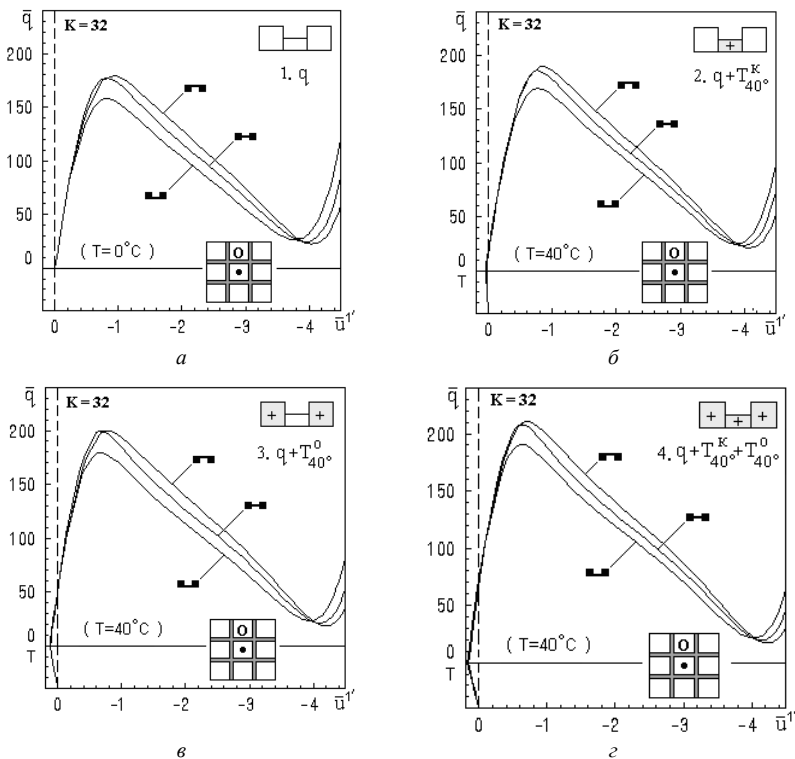


Рис. 14. Діаграми «навантаження прогин» центра панелі для трьох способів розташування каналів при чотирьох варіантах нагріву

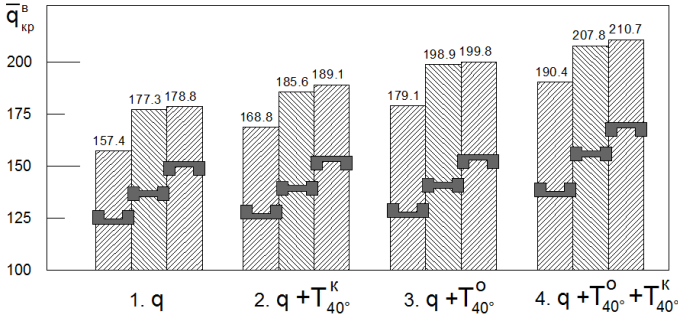




Рис. 15. Гістограми верхнього критичного навантаження для різних способів розташування каналів на обшивці при різних варіантах нагріву

Таблиця 4

Варіант навантаження	Розташування каналів на обшивці					
	з внутрішньої сторони 		симетрично 		з зовнішньої сторони 	
	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$
1. q	178.8	0	177.3	0	157.4	0
2. $q + T_{40}^k$	189.1	5.8	185.6	4.7	168.8	7.2
3. $q + T_{40}^o$	199.8	11.7	198.9	12.2	179.1	13.8
4. $q + T_{40}^k + T_{40}^o$	210.7	17.8	207.8	17.2	190.4	21.0

Для трьох способів розташування каналів на рис. 16 показана зміна діаграм «навантаження – прогин» центра панелі в залежності від варіанта термосилового навантаження. Вплив на величину $\bar{q}_{кр}^e$ чотирьох варіантів нагріву для різних способів ексцентричного розташування каналів на обшивці оболонки відображено на відповідних гістограмах (рис. 17).

Аналіз отриманих результатів показав, що всі варіанти з нагрівом приводять до збільшення жорсткості оболонки. Як і очікувалось, цей ефект найбільше проявляється при одночасному нагріві обшивки та каналів, найменше – при нагріві лише каналів.

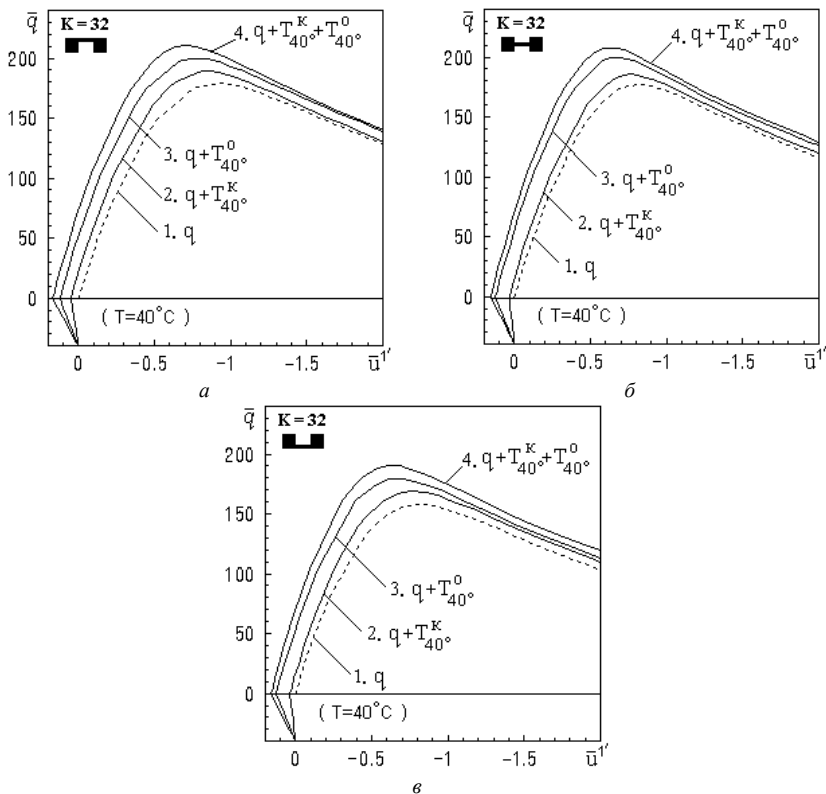


Рис. 16. Діаграми «навантаження прогин» центра панелі для чотирьох варіантів нагріву при трьох способах розташування каналів

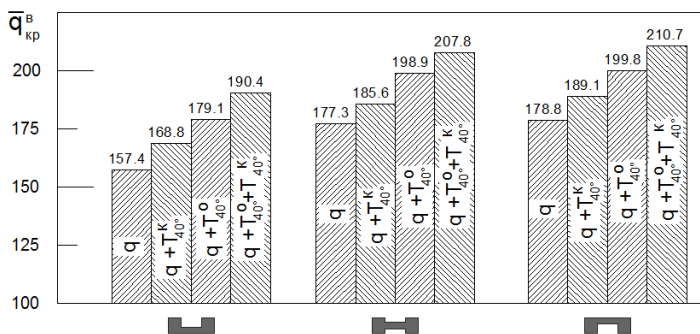


Рис. 17. Гістограми верхнього критичного навантаження для різних варіантів нагріву в залежності від способу розміщення каналів на обшивці

У всіх випадках деформування та втрата стійкості оболонок відбувається за характерною для пологих панелей формою (рис. 18).

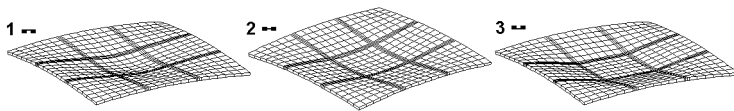


Рис. 18. Форма втрати стійкості панелі з каналами

Таким чином можна зробити висновок, що величина верхнього критичного навантаження для послабленої каналами пологої панелі зростає зі збільшенням зони нагріву незалежно від розташування розглянутих каналів.

Дослідження впливу ексцентричного розташування каналів на обшивці для різних варіантів нагріву оболонки показало, що найбільш стійкою є панель з каналами, що розташовані на її внутрішній стороні. Симетричне розташування каналів приводить до незначного зменшення величини верхнього критичного навантаження. Оболонки, у яких канали розміщені із зовнішньої сторони, мають найменшу несучу спроможність.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ “Віпол”, 2010. – 316 с.
2. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б.* Порівняльний аналіз результатів розрахунків стійкості тонких пружних оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 83. – С. 63-73.
3. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б., Тамілко О.А.* Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. – С. 89-95.
4. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О.* Порівняльний аналіз нелінійного деформування та стійкості гранованих оболонок ступінчасто-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С. 131-139.
5. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Дубина О.С.* Порівняльний аналіз розв'язків у задачах стійкості гнучких сферичних панелей сталюї товщини при дії рівномірного тиску // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 21-27.
6. *Лири 9.4* Примеры расчета и проектирования. Учебное пособие. / *Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Гераймович Ю.Д. и др.* – К.: изд-во «Факт», 2008. – 280 с.
7. *Кантор Б.Я.* Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. – К.: Наукова думка, 1974. – 136 с.
8. *Ильин В.П., Карпов В.В.* Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. – Л.: Стройиздат, 1986. – 168 с.

Стаття надійшла до редакції 17.12.2012 р.

Solovey N.A., Kryvenko O.P., Kalashnikov A.B.

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАГРЕВА НА ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ

Изучается влияние предварительного нагрева на потерю устойчивости упругих пологих изотропных панелей при нагружении их равномерным давлением. Рассматриваются круглые в плане сферическая и коническая панели и квадратные в плане сферические панели с центральным отверстием и перекрестными каналами. Исследовано влияние эксцентричного по толщине расположения каналов на потерю устойчивости квадратной в плане панели для разных вариантов нагрева обшивки и каналов. Выполнено сравнение с решениями, полученными по программному комплексу ЛИРА.

Solovey N.A., Kryvenko O.P., Kalashnikov O.B.

EFFECT OF PRE-HEATING ON THE LOSS OF STABILITY OF SHALLOW SHELLS UNDER THE ACTION OF PRESSURE

The effect of pre-heating on the loss of stability of the isotropic elastic shallow panels under loading them uniform pressure is studied. Round in plan spherical and conical panels and square in plan spherical panel with a central hole and intersecting channels are considered. The effect of eccentric over the thickness channel positions to the loss of stability square in plan panel for the different variants of heating the covering and channels has been investigated. Comparison with the solutions obtained by program complex LIRA has been performed.

УДК 539.3

О.В. Геращенко, канд.техн.наук

АНАЛІЗ МІЦНОСТІ ТА ДЕФОРМАТИВНОСТІ ПІЛОНА ІНФОРМАЦІЙНОГО НОСІЯ ПРИ ДІЇ ВІТРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Проведено аналіз міцності та деформативності пілона на дію вітрового навантаження. Зроблені висновки щодо несучої здатності пілона.

Вступ. Розробці методики розрахунку баштових споруд на динамічну дію вітру присвячені праці М.Ф. Барштейна [2], а A. Davenport та G. Solary є розробниками методики розрахунку споруд на дію вітру, що покладені в основу загальноєвропейських норм [6].

Загальні принципи нормування вітрових впливів на конструкції кардинально змінилися з введенням в дію нового українського нормативного документа [5]. Ці зміни обумовлені уточненням розрахункових значень навантажень та прагненням покращити вітчизняну нормативну базу і наблизити її до системи стандартів Eurocode.

В універсальних програмних комплексах розрахунок металевих конструкцій пов'язаний з проблемою їх коректного моделювання при створенні розрахункової моделі. В сучасних пакетах автоматизованого проектування недостатньо висвітлена теоретична база розрахунку споруд на вітрове навантаження, що ускладнює їх використання проєктувальниками. Також відчувається нестача публікацій, присвячених практичним прийомом побудови розрахункових моделей з використанням методу скінченних елементів.

Розрахунок НДС пілона на вітровий тиск виконаний за допомогою програмного комплексу SCAD 11.3 відповідно до діючих нормативних документів [5, 6]. Висота даної конструкції набагато перевищує ширину і розміри основи в плані. Маса електричного обладнання незначна у порівнянні з власною вагою конструкції. Вклад у напружено-деформований стан конструкції власної ваги і маси електрообладнання є другорядним у порівнянні з вітровим навантаженням. Таким чином, основний вплив на споруду чинить тиск вітру, що відноситься до тимчасового короткотривалого навантаження.

Вітровий тиск є істотно динамічним навантаженням, оскільки швидкість вітру та його напрямок є змінними величинами. При

коливаннях від дії вітру внаслідок пружних властивостей споруди в її елементах виникають сили інерції, які впливають на напружено-деформований стан. У залежності від співвідношення між частотами власних коливань споруди і частотою пульсації вітру в ній можуть виникнути випадки, близькі до резонансу, що призведе до значного збільшення зусиль, напружень і переміщень в елементах споруди.

§1. Побудова скінченноелементної моделі пілона. Пілон має стійку довжиною 12 м коробчатого перетину 300 x 300 мм завтовшки 5 мм, виготовлену зі сталі марки Ст 3 з наступними механічними характеристиками: $R_y=210$ МПа, $E=206$ ГПа, $\mu = 0,3$. На відмітках 11.066 м і 12 м встановлено інформаційні щити із заданими геометричними параметрами: нижній щит вагою 60 кг має розміри 1,44x0,634x0,695 м, верхній щит вагою 150 кг – 1,44x1,248x0,695 м. Основою пілона є монолітна залізобетонна плита. Пілон жорстко затиснений у фундаментній плиті.

В якості скінченноелементної моделі пілона (рис. 1) приймався консольний жорстко затиснений стержень довжиною 12 м. Стійка змодельована стержневими скінченними елементами. Щити представлялися у вигляді розбиття на плоскі оболонкові чотирикутні елементи, товщина яких визначалася залежно від їх маси і прийнятого типу матеріалу Ст 3. Для нижнього щита задана товщина 1,62 мм, для верхнього – 2.61 мм. Граничні умови приймалися у вигляді затискання нижнього вузла стійки на нульовій відмітці.

§2. Розрахункова схема пілона. Вітровий потік представлений у вигляді сумісної дії постійного (статична складова) і динамічного тиску (пульсаційна складова) відповідно до [5]. Для заданого району розташування (м. Київ) величина взята для 1-го вітрового району, типу місцевості IV.

Статична складова вітрового навантаження прийнята у вигляді розподіленого навантаження на стійку пілона $q_1 = 0,168$ кН/м та на інформаційні щити – $q_2 = 0,56$ кН/м² (рис. 2,а). Результати розрахунку на статичну дію вітру приведені на рис. 2,б і в.

Згинальний момент має максимальне значення $M=28,849$ кНм в нижньому вузлі пілона, максимальне переміщення становить 82 мм - у верхній частині пілона на висоті 13,248 м.



Рис. 1. Скінченно-елементна модель пілона

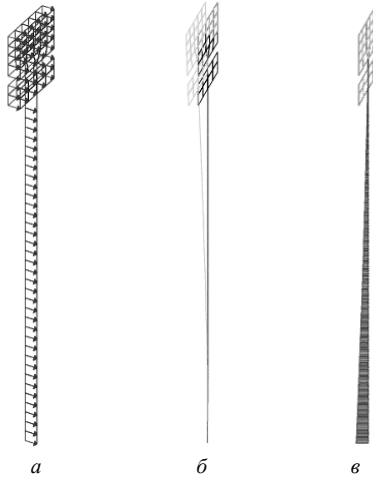


Рис. 2. Розрахунок пілона на статичну складову вітрового навантаження:
 а) статична складова навантаження, б) епюра прогинів, в) епюра згинальних моментів

Деформування пілона відбувається у площині мінімальної жорсткості. Пульсаційна складова вітру моделювалася за допомогою комплексу SCAD 11.3. Нормативне значення пульсаційної складової вітрового навантаження визначається в залежності від динамічних характеристик (власних частот, ступенів свободи і коефіцієнта внутрішнього тертя) споруди.

Постійне навантаження від власної ваги перетворено в маси. Визначено власні частоти та форми коливань пілона. Перша частота власних коливань склала $\nu_1=1,404$ Гц.

Максимальний згинальний момент від пульсації вітру має значення $M=69,797$ кНм в нижньому вузлі пілона (рис. 3,б), максимальне переміщення становить 208 мм - у верхньому вузлі пілона на висоті 13,248 м (рис. 3,а).

Результати розрахунку пілона на спільну дію статичної і пульсаційної складових вітру представлені в табл. 1 і на рис. 4.

Таблиця 1

Результати розрахунку на сумісну дію статичної та пульсаційної складових вітрового навантаження

Варіант розрахунку	Мінімальна власна частота, Гц	Максимальний прогин, мм	Максимальний згинальний момент, кНм	Максимальне напруження, МПа
Основний	1,404	289	98, 646	173

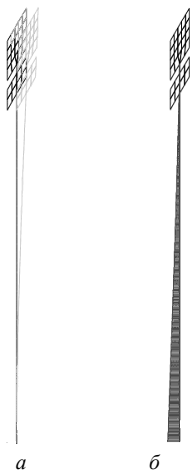


Рис. 3. Розрахунок пілона на пульсаційну складову вітрового навантаження: а) еюра прогинів, б) еюра згинальних моментів

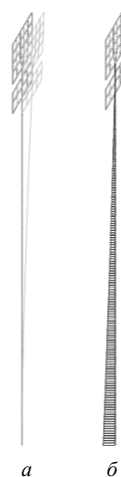


Рис. 4. Розрахунок пілона на сумісну дію статичної та пульсаційної складових вітрового навантаження: а) еюра прогинів, б) еюра згинальних моментів

Максимальне напруження від дії вітру визначено з виразу:

$$\sigma_{\max} = M/W_z = M \cdot z/J_z = 98,646 \cdot 0,15 / (8559,92 \cdot 10^{-8}) = 173 \text{ МПа.}$$

З метою перевірки електрообладнання на міцність визначено прискорення верхньої точки пілона з рівняння:

$$a = A\omega^2 \sin\omega t,$$

де A - амплітуда, що приймалася рівної максимальному відхиленню верхньої точки пілона під дією вітрового навантаження; ω - кругова частота коливань, визначена за формулою

$$\omega = 2\pi v_1 = 6,28 \cdot 1,404 = 8,822 \text{ рад/с.}$$

Максимальне значення прискорення верхньої точки пілона становить

$$a_{\max} = 0,289 \cdot 8,822^2 = 22,5 \text{ м/с}^2 = 2,23g.$$

Висновок: В результаті розрахунку пілона на вітровий вплив, видно, що максимальне напруження 173 МПа не перевищує розрахункового опору сталі Ст 3 ($R_y = 210 \text{ МПа}$). Однак, відхилення верхньої точки пілона при максимальному вітрі становить 289 мм, що більш ніж в три рази перевищує допустиме нормами відхилення $13248/150 = 88 \text{ мм}$ (табл. 47, [9]). Особливо небезпечним є прискорення верхньої точки пілона, яке породжує великі значення сили інерції, що впливають на електрообладнання. Виходячи з отриманих результатів розрахунку

пілона, потрібне збільшення моменту інерції його поперечного перерізу не менш ніж в три рази ($8559,92 - 3 = 25679,76 \text{ см}^4$).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. -Л.:Изд-во ЛГУ, 1976. -232с.
2. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия/ М. Ф. Барштейн, Н. М. Бородачев, Л. Х. Блюмина и др.; Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. — М.: Стройиздат, .1981.—215 с.
3. Кінаш Р.І., Бурнаєв О.М. Вітрове навантаження і вітроенергетичні ресурси в Україні. Монографія. - Львів: вид. науково-технічної літератури, 1998. - 1152 с.
4. Пичугин С.Ф., Махинько А.В. Ветровая нагрузка на строительные конструкции. – Полтава, 2005 - 342 с.
5. ДБН В.1.2-2:2006 „Навантаження і впливи”. К.,2006.
6. ДБН-В.1.1-12:2006. Будівництво в сейсмічних районах України. К.,2006.
7. EN 1991-1-4:2005+A1 Eurocode 1: Action on Structures – General Actions – Part 1-4: Wind Actions.– Brussels: CEN TC 250, 2005. – 148 p.
8. ENV 1993-3-1:2006 Eurocode 3: Design of steel structures – Part 3-1: Towers, masts and chimneys – Towers and masts, 2006. – 84 p.
9. СНиП II-23-81* Стальные конструкции.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.

Геращенко О.В.

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ И ДЕФОРМАТИВНОСТИ ПИЛОНА ИНФОРМАЦИОННОГО НОСИТЕЛЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВЕТРОВОЙ НАГРУЗКИ

Проведен аналіз прочності і деформативності пілона на действие ветрової навантаження. Сделаны выводы о несущей способности пилон.

Gerashchenko O.V.

STRENGTH AND DEFORMABILITY OF THE INFORMATION MEDIA PYLON UNDER WIND LOADING ANALYSIS

Strength and deformability analysis of the pylon under action of wind loading was held. The conclusions about the carrying capacity of the pylon was made.

УДК 539.3

П.П. Чеверда, канд.техн.наук,
Г.М. Іванченко, д-р техн. наук,
М.Г. Кушніренко, канд.техн.наук,
А.М. Козовенко, канд.техн.наук

АНАЛІЗ РЕАКЦІЙ В ЕЛЕМЕНТАХ ПРОСТОРОВИХ СХЕМ ПРИ РІЗНИХ СПОСОБАХ З'ЄДНАННЯ

Виконано дослідження реакції стінових панелей для двох варіантів просторового з'єднання з плитним фундаментним ростверком житлового будинку при дії двох сполучень навантажень. Будівля моделювалась як просторовий скінченно-елементний каркас зі сталими жорсткісними характеристиками. Для окремого просторового вузла за допомогою програмного комплексу SCAD досліджувався вплив способів з'єднання стінових панелей з плитним ростверком на несучу здатність. Параметри напружено-деформованого стану визначались для варіанту монолітного виготовлення елементів будинку та варіанту просторового з'єднання стінових панелей зі збірних елементів індустріального виготовлення. Аналіз дослідження результатів показав, що значення внутрішніх зусиль відрізняються, тому будівництво об'єктів промислового та цивільного призначення зі збірного залізобетону є більш економічним завдяки зменшенню витрат на армування елементів.

Будівництво багатоповерхових житлових будинків та будівель промислового призначення з використанням індустріального та монолітного залізобетону потребує постійного вдосконалення методів розрахунку з урахуванням сумісної роботи несучих елементів просторових розрахункових схем. Це обумовлено необхідністю зменшення власної ваги будівлі та збільшення її поверховості, забезпечуючи при цьому необхідну міцність, жорсткість і стійкість будівлі в цілому. При проектуванні будівель і споруд з уніфікованих елементів індустріального виробництва виникає потреба їхнього з'єднання між собою у вузлах металевими закладними деталями, забезпечуючи при цьому надійність, геометричну незмінюваність просторової схеми протягом усього періоду експлуатації. Такі з'єднання стінових панелей та відповідні об'ємно-планувальні рішення і дозволяють вирішити всі питання безпечності та довговічності. Але, оскільки автоматизоване моделювання розрахункових схем складних об'єктів будівництва з використанням існуючих програмних засобів для різних граничних умов з'єднання елементів є трудомістким, то виникає потреба у дослідженні реакції їхньої сумісної роботи з метою подальшого узагальнення граничних умов для певного класу задач.

Постановка задачі по визначенню параметрів напружено-деформованого стану розрахункової моделі багатопверхового житлового будинку від дії статичного навантаження полягає в дослідженні реакції взаємодії стінових панелей з іншими несучими елементами будівлі з монолітного залізобетону та будівлі зі збірних залізобетонних виробів індустриального виготовлення. Розрахунок двох варіантів розрахункових схем виконується з використанням методу скінчених елементів, який передбачає дискретизацію конструктивної схеми окремими скінченими елементами певних розмірів. Розв'язок статично невизначуваних задач методом скінчених елементів (МСЕ) базується на побудові функціоналу повної потенціальної енергії [1,2]. Для його побудови використаємо принцип можливих переміщень, суть якого полягає в наступному: якщо механічна система, на яку накладені кінематичні в'язі, знаходиться у рівновазі під дією прикладених сил, то сума можливих робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють у межах цієї системи, на будь-яких нескінченно малих можливих переміщеннях, дорівнює нулю. Тоді згідно з принципом можливих переміщень запишемо, що

$$\delta\Pi = \delta U + \delta W = 0. \quad (1)$$

Розглянемо скінчений елемент просторової моделі під дією довільного зовнішнього навантаження, який зображений на рис. 1.

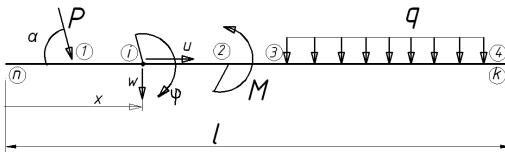


Рис. 1. Скінчений елемент просторової моделі

В кожному перерізі i скінченного елемента виникають три переміщення $\rightarrow u, w, \varphi$, з яких u, w є незалежними переміщеннями, а φ - кут повороту виражається через прогин w . Всі переміщення згідно з гіпотезою плоских перерізів є функціями одного аргументу x , тобто:

$$\begin{aligned} u &= u(x), \\ w &= w(x), \\ \varphi &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Надамо перерізу i скінченного елемента, який зображений на рис. 2, можливі переміщення і запишемо вираз для роботи внутрішніх сил

$$dU_i = N_i \cdot du_i + M_i \cdot d\varphi_i. \quad (3)$$

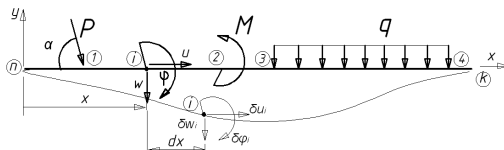


Рис. 2. Деформований скінченний елемент

Оскільки $\varepsilon = \frac{du}{dx}$, а $du = \varepsilon \cdot dx$, $d\varphi = k \cdot dx$, то після перетворення вираз для роботи внутрішніх сил (3) матиме наступний вигляд

$$dU = N \cdot \varepsilon \cdot dx + M \cdot k \cdot dx. \quad (4)$$

Проінтегруємо даний вираз і запишемо формулу для роботи внутрішніх сил

$$U = \int_0^l N \cdot \varepsilon \cdot dx + \int_0^l M \cdot k \cdot dx = \int_0^l N \frac{du}{dx} dx + \int_0^l M \frac{d^2 w}{dx^2} dx. \quad (5)$$

Тоді можлива робота внутрішніх сил на можливих переміщеннях буде обчислюватись за формулою

$$\delta U = \int_0^l N \cdot \delta \frac{du}{dx} dx + \int_0^l M \cdot \delta \frac{d^2 w}{dx^2} dx, \quad (6)$$

а робота зовнішніх сил на можливих переміщеннях за виразом:

$$\delta W = P \cdot \cos \alpha \cdot \delta u_1 + P \cdot \sin \alpha \cdot \delta w_1 + M \cdot \delta \varphi_2 + \int_{x_3}^{x_4} q(x) \delta w_x dx. \quad (7)$$

Після певних перетворень рівняння рівноваги системи матиме вигляд:

$$\int_0^l N \cdot \delta \frac{du}{dx} dx + \int_0^l M \cdot \delta \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \delta W = 0, \quad (8)$$

де $u(x)$, $w(x)$ – розв'язок даного рівняння.

Дослідження реакції взаємодії стінових панелей з іншими несучими елементами будівлі виконувалось для розрахункової моделі з вихідними даними, які наведені в роботі [3]. Параметри напружено-деформованого стану багатоповерхового житлового будинку від дії статичного навантаження визначались за допомогою програмного комплексу МОНОМАХ, що наведені у роботі [4]. Житловий будинок, який зображений на рис. 3, моделювався як просторовий збірний залізобетонний каркас з розмірами в плані по довжині (L) 32.4 м і 16.2 м по ширині (B). Стінові панелі розміром 3,60х2,8 м та плити перекриття приймалися як скінченно-елементні пластини прямокутної форми з розмірами 0,45х0,4 м та товщиною 0,16 м. Сили взаємодії між окремими

несучими елементами підвальної частини будинку визначались для двох варіантів з'єднання стінових панелей за допомогою програмного

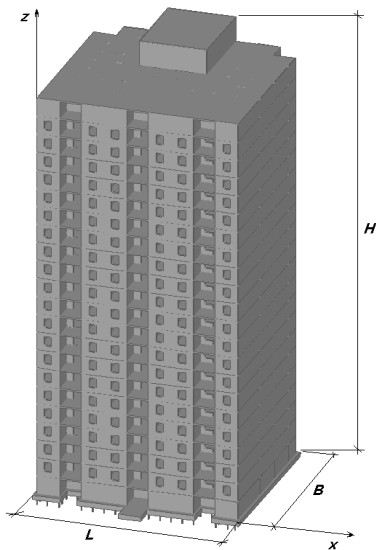


Рис. 3. Просторова модель будинку

комплексу SCAD. Для обох варіантів з'єднання стінових панелей з плитами перекриття та ростверком згідно з [5] визначалось сумарне постійне навантаження від власної ваги верхніх поверхів будинку та короткочасне вітрове навантаження, яке діяло в напрямку вісі X глобальної системи координат. Постійне навантаження інтенсивністю 500 кН/м та короткочасне вітрове навантаження інтенсивністю $1,0 \text{ кН/м}$ моделювалось як вузлове зосереджене навантаження, яке прикладалось до елементів підвальної частини будинку на умовній відмітці ± 0.00 . З'єднання палі сталі жорсткості з залізобетонним стрічковим ростверком моделювалось шарнірним.

За першим варіантом дослідження реакції сумісної роботи стінових панелей при монолітному просторовому з'єднанні з ростверком та палями в кожному вільному вузлі скінченно-елементної моделі призначались шість можливих переміщення, а у закріпленому вузлі ростверка з палями моделювалась їхня відсутність. За другим варіантом при збірному з'єднанні стінових панелей між собою та з ростверком за допомогою закладних деталей призначались наступні граничні умови: у вузлах з'єднання стінових панелей з ростверком через закладні деталі та у вузлах вільного обпирання елементів на ростверк всі кутові та лінійні переміщення моделювались такими, що можливі; у вузлах розташування палі та з'єднання стінових панелей з ростверком металевими закладними деталями всі кутові переміщення моделювались, як можливі, а всі лінійні переміщення такими, що відсутні; у вузлах з'єднання між собою стінових панелей металевими закладними деталями та у вільних вузлах всі кутові та лінійні переміщення моделювались такими, що можливі. Згідно з даними граничними умовами виконувався розрахунок двох варіантів з'єднання елементів при дії двох сполучень навантажень: за першим сполученням навантажень враховувалось тільки постійне - від власної

ваги будинку, за другим - постійне навантаження та вітрове в напрямку осі X . Для кожного варіанту з'єднання стінових панелей з ростверком та сполучення навантажень визначались максимальні значення напружень та деформацій вузлів елементів, величини яких для ростверку та стінових панелей наведені у порівняльних таблицях 1, 2 відповідно.

Таблиця 1

Максимальні значення величин напружено-деформованого стану у ростверку

№ пп	Спосіб з'єднання елементів	Максимальні значення напружено-деформованого стану у ростверку при дії									
		постійного вертикального навантаження					постійного вертикального та вітрового навантаження				
		X , <i>мм</i>	Y , <i>мм</i>	Z , <i>мм</i>	M_x , <i>кН*м</i>	M_y , <i>кН*м</i>	X , <i>мм</i>	Y , <i>мм</i>	Z , <i>мм</i>	M_x , <i>кН*м</i>	M_y , <i>кН*м</i>
1	Монолітне виготовлення елементів	0,0	0,0	-0,3	-4,1	-176,3	0,0	0,0	-0,3	-4,15	-176,3
2	Збірні елементи індустріального виготовлення	0,0	0,0	-0,3	0,0	-178,3	0,0	0,0	-0,3	-0,1	-178,3

Таблиця 2

Максимальні значення величин напружено-деформованого стану у стінових панелях

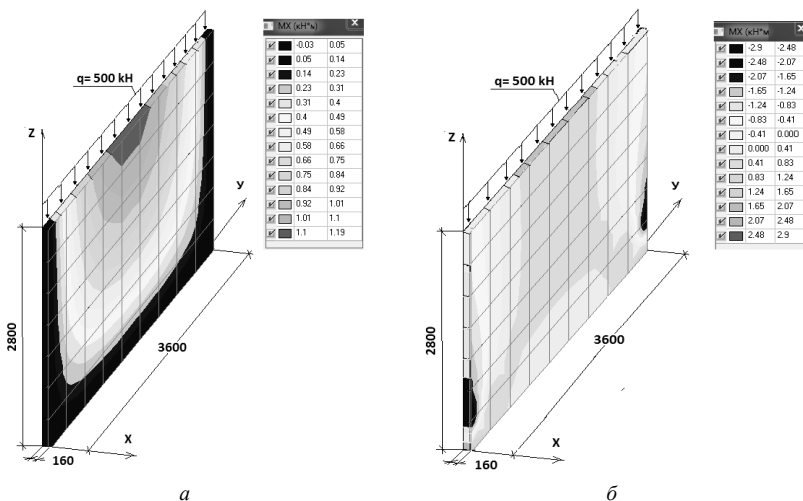
№ пп	Спосіб з'єднання елементів	Максимальні значення напружено-деформованого стану у стінових панелях дії									
		постійного вертикального навантаження					постійного вертикального та вітрового навантаження				
		X , <i>мм</i>	Y , <i>мм</i>	Z , <i>мм</i>	M_x , ₂ <i>кН*м/м</i>	M_y , ₂ <i>кН*м/м</i>	X , <i>мм</i>	Y , <i>мм</i>	Z , <i>мм</i>	M_x , ₂ <i>кН*м/м</i>	M_y , ₂ <i>кН*м/м</i>
1	Монолітне виготовлення елементів	-0,04	-0,04	-0,3	-2,82	-8,15	-0,11	-0,04	-0,3	2,9	8,09
2	Збірні елементи індустріального виготовлення	-0,04	-0,04	-0,3	-0,03	-0,32	-0,2	-0,04	-0,31	1,19	0,47

Аналіз результатів дослідження напружено-деформованого стану двох варіантів просторового з'єднання стінових панелей з ростверком, як це видно з результатів таблиці 1, показав наступне:

- переміщення вузлів скінченно-елементної моделі за напрямками осей X, Y, Z глобальної системи координат для двох варіантів з'єднання при дії двох сполучень навантажень не відрізняються. При цьому горизонтальна сила вітрового навантаження, що приймається в межах нормативних величин, не впливає на горизонтальні деформації ростверку, оскільки вона сприймається стіновими панелями, які просторово з'єднані;
- згинальні моменти M_y у ростверку при дії двох сполучень навантажень майже не відрізняються. Однак при жорсткому з'єднанні вузлів елементів, для випадку їхнього монолітного виготовлення при дії двох сполучень навантажень, у ростверку виникає крутильний момент, який необхідно враховувати при проектуванні додатковим армуванням ростверку;
- при проектуванні та будівництві будинків з'єднання стін з ростверком бажано виконувати не монолітним, а таким, де стіни будинку вільно або шарнірно (через закладні деталі) опираються на плитний або стрічковий ростверк. Таке виконання з'єднання стін з ростверком зменшить витрати на виготовлення та армування.

Результати, які наведені у таблиці 2, показали, що значення внутрішніх зусиль в стінових панелях та переміщення вузлів скінченно-елементної моделі у напрямку дії вітрового навантаження для двох варіантів з'єднання при дії двох сполучень навантажень значно відрізняються. Згинальні моменти, ортогональні осям X та Y , для жорсткого з'єднання елементів при двох сполученнях навантажень залишаються незмінними, а переміщення моделі у напрямку осі X при одночасній дії постійного і вітрового навантажень зросли майже втричі. Для елементів, які з'єднані шарнірно, згинальні моменти та переміщення для двох сполучень навантажень відрізняються. Дані результати свідчать про те, що у елементах, які з'єднані жорстко за просторовою схемою, як це показано на рис. 4,б, відбувається перерозподіл внутрішніх зусиль та деформацій і тому вплив вітрового навантаження, яке діє на будинок у межах норм є не суттєвим. При шарнірному з'єднанні кожний елемент включається в роботу окремо і просторова робота майже не впливає на загальний напружений стан стінових панелей.

Тому, з урахуванням зазначеного можна зробити висновок, що будівництво об'єктів промислового та цивільного призначення зі збірного залізобетону є більш економічним завдяки меншим витратам на армування елементів.

Рис. 4. Ізолінії згинальних моментів M_x , кНм :

- а) фрагмент стінової панелі для варіанту з'єднання елементів зі збірного залізобетону;
 б) фрагмент стінової панелі для варіанту монолітного з'єднання залізобетонних виробів

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерна технологія: Підручник/ За заг. ред. д.т.н., проф. В.А.Баженова.-К.: Каравела, 2009. -696 с.
2. *Легостасв А.Д.* Метод скінчених елементів. Конспект лекцій.-К.:КНУБА, 2004.-112с.
3. *Чеверда П.П., Геращенко О.В., Міценко О.О.* Дослідження динамічної реакції просторового каркасу висотної будівлі при дії сейсмічного навантаження. Сб. Опір матеріалів і теорія споруд. Вип.86.-Київ, КНУБА.-2010.-С.140-147 .
4. *Чеверда П.П., Геращенко О.В.* Вплив дії сейсмічного навантаження на несучу здатність пальового ростверку житлового будинку. Сб. Опір матеріалів і теорія споруд. Вип.88.-Київ, КНУБА. -2011.-С.97-101 .
5. *ДБН В.1.2-2:2006.* Навантаження і впливи. Норми проектування. Мінбуд України, 2006.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.

Чеверда П.П., Иванченко Г.М., Кушніренко Н.Г., Козовенко А.М.

АНАЛИЗ РЕАКЦИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СХЕМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ СОЕДИНЕНИЯ

Выполнены исследования реакции стеновых панелей для двух вариантов пространственного их соединения с плитным фундаментным ростверком жилого дома при действии двух сочетаний нагрузок. Здание моделировалась как пространственный конечно-элементный каркас с элементами постоянной жесткости. Для отдельного пространственного узла с помощью программного комплекса SCAD исследовалось влияние способов соединения стеновых панелей с ростверком на несущую способность. Параметры напряженно-деформированного состояния определялись для варианта монолитного изготовления элементов дома и варианта пространственного соединения стеновых панелей из сборных элементов индустриального изготовления. Анализ исследования результатов показал, что значения внутренних усилий отличаются, поэтому строительство объектов промышленного и гражданского назначения из сборного железобетона является более экономичным, поскольку уменьшаются затраты на армирование элементов.

Cheverda P.P., Ivanchenko G.M., Kushnirenko M.G., Kozovenko A.M.

ANALYSIS OF REACTIONS IN THE ELEMENTS OF SPATIAL PATTERNS AT DIFFERENT BONDING TECHNIQUES

Investigation of the reaction wall panels for two variants of spatial connection plate foundation raft house with two combinations of loads. The building is modeled as a spatial finite-element frame with constant stiffness characteristics. To separate spatial node using software package SCAD studied the effect of connection methods of wall panels with plate raft on their carrying capacity. Parameters of the stress-strain state determined for variant monolithic manufacturing building elements and variant spatial connection of wall panels with prefabricated elements of industrial production. Analysis showed that the values of internal forces are different, so the construction of industrial and civil use of precast concrete is more economical because of the reduced costs of reinforcement elements.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О., Богдан Д. В.</i> Визначення тріщиностійкості лопатки газової турбіни з напівеліптичною тріщиною	3
<i>Шульга М.О., Тробюк О.М.</i> Побудова розв'язку рівнянь типу тимошенка в гамільтоновій формі гармонічних коливань періодично-неоднорідних пластин	9
<i>Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Застосування методу продовження розв'язку за параметром до аналізу динамічної поведінки віброударної системи	16
<i>Легостаєв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.</i> Колівання оболонкових конструкцій з приєднаними масами	31
<i>Киричук О.А., Кузько О.В., Лук'янченко О.О.</i> Динамічний аналіз системи двох з'єднаних циліндричних оболонок	40
<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Мицюк С.В.</i> Розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінченних елементів для неоднорідних кругових і призматичних тіл складної форми	47
<i>Лук'янченко О.О., Рудинок О.М., Ашмаріна Г.Р.</i> Вирішення проблеми запобігання подальшого руйнування цегляної димової труби	62
<i>Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В., Сизевич Б.І.</i> Особливості розв'язку двовимірних задач стаціонарної теплопровідності і повзучості з урахуванням геометричної не лінійності	73
<i>Гуляр О.І., Лізунов П.П., Солодей І.І.</i> Математичні моделі появи та розповсюдження зон руйнування кругових неоднорідних дисперсно-армованих тіл	90
<i>Костіна О.В.</i> Дослідження стійкості циліндричної оболонки з урахуванням реальних недосконалостей форми	108

Іванченко Г.М., Шишов О.В.

Комп'ютерне тестування при контролі рівня знань з будівельної механіки 113

Ворона Ю.В., Козак А.А, Черненко О.С.

Двовимірний НДС пружного масиву з двома отворами при імпульсному навантаженні 117

Солодей І.І.

Базові скінченно-елементні моделі НМСЕ для просторових тіл в задачах динаміки 124

Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашніков О.Б.

Вплив попереднього нагріву на втрату стійкості пологих оболонок при дії тиску 143

Геращенко О.В.

Аналіз міцності та деформативності пілона інформаційного носія при дії вітрового навантаження 158

Чеверда П.П., Іванченко Г. М., Кушніренко М. Г., Козовенко А. М.

Аналіз реакцій в елементах просторових схем при різних способах з'єднання 163

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 90

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку .12. Формат 60x90 ¹/₁₆. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10.
Тираж 100. Зам. № 12-550К

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

Віддруковано на ЗАТ “ВПІОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.