

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

---

## Випуск 91

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.  
(видається 2 рази на рік)

КИЇВ 2013

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*Ю.В. Верюжський*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*О.І. Гуляр*, д-р техн. наук  
*Г.М. Іванченко*, д-р техн. наук

*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*С.О. Пискунов*, д-р техн. наук  
*М.О. Соловей*, д-р техн. наук  
*І.І. Солодей*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 91 / Відп. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2013. – 194 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробничників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: Україна, 03680, м. Київ-37, Повітрофлотський пр., 31  
тел.: (044) 248-3040

Збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» включено у перелік фахових видань з технічних наук (Постанова Президії ВАК України № 1-05/1 від 10.02.2010 р.)

Збірник зареєстровано у Міністерстві юстиції України (свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ № 15384-3956Р від 26.06.2009 р.)

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61



УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук,  
**О.І. Гуляр**, д-р техн. наук,  
**О.С. Сахаров**, д-р техн. наук,  
**О.О. Шкриль**, канд. техн. наук

## ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ ДЛЯ НАПІВАНАЛІТИЧНОГО ВАРІАНТА ПРИЗМАТИЧНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА

Наведені основні співвідношення просторової задачі теорії пружності для призматичних тіл в місцевій криволінійній системі координат. На основі основних положень моментної схеми скінченних елементів отримано співвідношення між переміщеннями, деформаціями і напруженнями.

**Вступ.** При розробці скінченно-елементної бази для розв'язання просторових задач теорії пружності суттєве значення має вибір відповідної схеми отримання розв'язувальних співвідношень. В даній роботі за основу прийняті положення моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) для призматичних тіл. В рамках напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) виведені співвідношення між переміщеннями, деформаціями та напруженнями, представленими в базисній декартовій і місцевій фізичній системі координат.

**1. Вихідні співвідношення просторової задачі теорії пружності для призматичних тіл.** Для дослідження процесів деформування та руйнування призматичних тіл доцільно використовувати наступні системи координат: базисну декартову  $z^j$ , яка є незмінною і призначена для задання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (вісі  $z^1$  та  $z^2$  базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь  $z^3$  орієнтована вздовж напрямної) і місцеву систему координат  $x^i$ , природньо пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта, при цьому вісь  $x^3$  збігається за напрямком з  $z^3$  (рис.1).

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення  $z_{,j}^{i'}$  місцевої та базисної систем координат [3]:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z_{,3}^{\alpha} = z_{,\alpha}^{3'} = 0$$

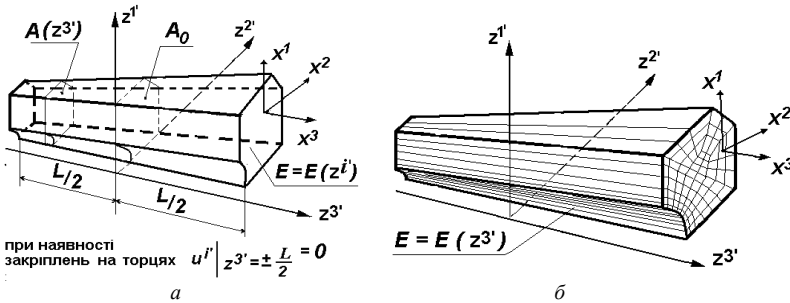


Рис. 1. Неоднорідне призматичне тіло із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами (а) і дискретна модель НМСЕ (б)

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

Компоненти метричного тензора  $g_{mn}$  в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензору базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'}$$

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат відмінними від нуля будуть такі компоненти метричного тензора:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}, \quad g_{33} = (z_{,3}^{3'})^2$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій  $\varepsilon_{ij}$  через переміщення  $u_i$  в місцевій системі координат [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (1.1)$$

де  $\Gamma_{ij}^k$  – символи Крістофеля другого роду.

Враховуючи, що в декартовій системі координат всі символи Крістофеля дорівнюють нулю, а переміщення в місцевій системі координат визначаються через переміщення в базисній за формулою:

$$u_k = u_{s'} z_{,k}^{s'}$$

одержимо деформації місцевої системи координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\gamma',\alpha} z_{,\beta}^{\gamma'} + u_{\delta',\beta} z_{,\alpha}^{\delta'}) ; \quad \varepsilon_{33} = u_{3',3} z_{,3}^{3'} \quad (1.2)$$

Предбачається, що пружні деформації малі та пов'язані з

напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (1.3)$$

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних сталей  $C^{ijkl}$  визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}),$$

де величини  $\lambda$  та  $\mu$  визначаються через коефіцієнт Пуассона  $\nu = \nu(z^i, T)$  і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E = E(z^i, T)$ :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

де  $T$  – температура.

Фізичні компоненти тензорів деформацій  $\tilde{\epsilon}_{kl}$ , напружень  $\tilde{\sigma}^{ij}$  та пружних констант  $\tilde{C}^{ijkl}$  визначаються співвідношеннями:

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}$$

$$\tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \quad (1.4)$$

**2. Просторовий призматичний скінчений елемент загального типу.** Розглянемо скінченні елементи загального вигляду. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

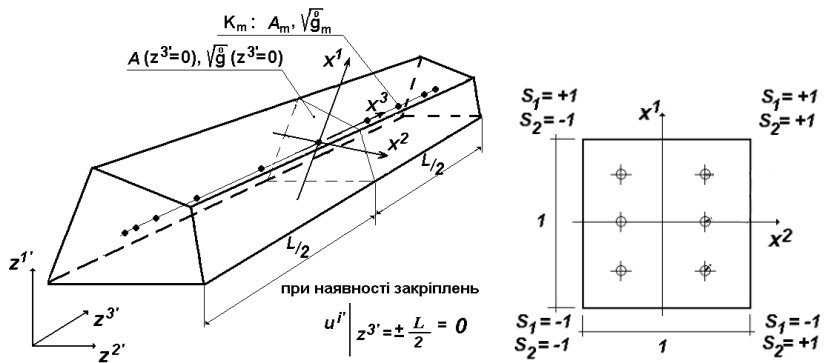


Рис. 2. Просторовий призматичний скінчений елемент загального типу

Визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора  $g_{ij}$ , є змінним за напрямною і обчислюється на основі вихідних даних про геометрію досліджуваного об'єкта – заданого закону змінення площі поперечного перерізу – із використанням співвідношення:

$$\sqrt{g(z^{3'})} = \frac{A(z^{3'})}{A_0} \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} = f(z^{3'}) \sqrt{g|_{z^{3'}=0}}. \quad (2.1)$$

Розподілення переміщень в межах поперечного перерізу SE описується білінійним законом [1,2]:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (2.2)$$

де  $u_{m'(S_1 S_2)}$  – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат  $x^i$ .

Визначимо похідні від переміщень в центрі поперечного перерізу SE виходячи з прийнятого закону їх розподілення (2.2):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_1 S_2; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3} S_\alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В напрямку твірної переміщення та їх похідні по напрямку  $x^3$  апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій  $\varphi^{(l)}$  – поліномам Лагранжа ( $l=0,1$ ) і Міхліна ( $l=2, \dots, L$ ):

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L u_{m'}^l \varphi^{(l)}; \quad u_{m',3} = \sum_{l=0}^L u_{m',3}^l \varphi_{,3}^{(l)}; \quad (2.4)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{1}{2} (1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2} (1+x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}}, \end{aligned}$$

$$p^{(l)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[ (1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right].$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

Скінченні елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу призматичних тіл. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного розв'язку. Як показано в роботах [1,2], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище "хибного зсуву", що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Подамо компоненти тензору фізичних деформацій в поперечних перерізах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до МССЕ [4] відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\epsilon}_{12} &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12}; \\ \tilde{\epsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\epsilon}_{33} &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta} x^\beta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

У випадку лінійного зв'язку між фізичними компонентами тензора напружень та деформацій використовуємо узагальнений закон Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (2.6)$$

Запишемо вираз для компонент тензора напружень (2.6) через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена (2.5):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij11} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij22} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} x^1 \right) + 2 \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij13} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} x^2 \right) + \\ &+ 2 \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij23} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} x^1 \right) + \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij33} \left( \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} x^2 \right). \end{aligned}$$

Після перегрупування складників, що містять величини деформацій та їх похідних, застосовуючи позначення



$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl} ; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} + \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij13} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} + \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} ; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} &= \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij23} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} + \overset{\circ}{\tilde{C}}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1},\end{aligned}$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена в термінах фізичних величин:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} x^1. \quad (2.7)$$

Відкидаючи з (2.7) члени вигляду  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{i\alpha}_{,\alpha}$  як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елемента, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha},\end{aligned} \quad (2.8)$$

де значення коефіцієнтів  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}$  і  $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,\alpha}$  обчислюються в точках інтегрування  $K_m$ , що розташовані в поперечних перерізах вздовж вісі  $x^3$  (рис. 2).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент тензора напружень в місцевій системі координат:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{12} = g_{12} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33} = g_{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} = \sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{33}_{,\alpha} &= g_{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,(3-\alpha)}.\end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена матимуть наступний вигляд:

$$\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{12};$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3}; & \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33}; \\
\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta=0}} = \frac{\partial (\epsilon_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta=0}} = \\
&= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left( \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \\
\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left( \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \\
\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta} &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\beta},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

де

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} &= \epsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha=0}}, & \overset{\circ}{\epsilon}_{ij,\beta} &= \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha=0}}, & \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}, \\
\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)} \Big|_{x^{\beta=0}}, & \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial g_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\beta=0}}.
\end{aligned}$$

Коефіцієнтом розкладення  $\frac{\partial^2 \overset{\circ}{\epsilon}_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^{\beta=0}}$  нехтуємо, як величиною більш

високого порядку малості.

Запишемо ненормовані величини деформацій в криволінійній місцевій системі координат, через які подані фізичні коефіцієнти розкладу деформацій (2.10), через переміщення в базисній системі координат із використанням (2.3):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( u_{m',i} z_{,j}^{m'} + u_{m',j} z_{,i}^{m'} \right) \Big|_{x^{\alpha=0}}; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \epsilon_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\alpha=0}} = \frac{\partial (u_{\gamma,\alpha} z_{,\alpha}^{\gamma})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^{\alpha=0}} = u_{\gamma,12} z_{,\alpha}^{\gamma} + u_{\gamma,\alpha} z_{,12}^{\gamma} \Big|_{x^{\alpha=0}}; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \left( u_{\gamma,3(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + u_{\gamma,3} z_{,12}^{\gamma} + u_{3',12} z_{,3}^{3'} \right) \Big|_{x^{\alpha=0}};
\end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} = u_{3',3\alpha} z_{,3}^{\prime} \Big|_{x^{\alpha}=0}.$$

Введемо наступні позначення для значень похідних від переміщень і компонент тензора перетворення  $z_{,i}^{m'}$  в центрі СЕ:  $u_{m',i} \Big|_{x^{\gamma}=0} = \overset{\circ}{u}_{m',i}$ ,

$$z_{,i}^{m'} \Big|_{x^{\gamma}=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'}. \text{ Тоді:}$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{u}_{m',i} z_{,j}^{m'} + \overset{\circ}{u}_{m',j} z_{,i}^{m'} \right);$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \overset{\circ}{u}_{\gamma,12} z_{,\alpha}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{\gamma,\alpha} z_{,12}^{\gamma};$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{u}_{\gamma,3(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{\gamma,3} z_{,12}^{\gamma} + \overset{\circ}{u}_{3',12} z_{,3}^{\prime} \right);$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} = \overset{\circ}{u}_{3',3\alpha} z_{,3}^{\prime}.$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень в поперечному перерізі СЕ (2.2):

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{\gamma(S_1 S_2)} \left( S_{\alpha} z_{,\beta}^{\gamma} + S_{\beta} z_{,\alpha}^{\gamma} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2)} S_{\alpha} z_{,3}^{\prime} + \frac{1}{2} u_{\gamma(S_1 S_2),3} z_{,\alpha}^{\gamma} \right];$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{33} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2),3} z_{,3}^{\prime} \right];$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{\gamma(S_1 S_2)} \left( 2S_1 S_2 z_{,\alpha}^{\gamma} + S_{\alpha} z_{,12}^{\gamma} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2)} \left( 2S_1 S_2 z_{,3}^{\prime} \right) + u_{\gamma(S_1 S_2),3} \left( S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2),3} \left( 2S_{\alpha} z_{,3}^{\prime} \right) \right].$$

Із урахуванням розкладу переміщень в напрямку твірної (2.4), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left( S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L \left( u_{3'(S_1 S_2)}^l S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \Phi^{(l)} + u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \Phi_{,3}^{(l)} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{3'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \Phi_{,3}^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left( 2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L \left\{ u_{3'(S_1 S_2)}^l \left( 2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right) \Phi^{(l)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left( S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right\} \right]; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{3'(S_1 S_2)}^l \left( 2S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right]. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Наведені співвідношення, які визначають зв'язок між переміщеннями і деформаціями а також між деформаціями і напруженнями в рамках моментної схеми СЕ, дозволяють отримувати розв'язувальні співвідношення НМСЕ для різних модифікацій призматичного СЕ з перемінними геометричними і механічними параметрами.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
4. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.

*Стаття надійшла до редакції 27.04.2013 р.*

*Баженов В.А., Гуляев А.И., Сахаров А.С., Шкрель А.А.*

**ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ  
ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО ВАРИАНТА ПРИЗМАТИЧЕСКОГО КОНЕЧНОГО  
ЭЛЕМЕНТА**

Приведены основные соотношения пространственной задачи теории упругости для призматических тел в местной криволинейной системе координат. На основании основных положений моментной схемы конечных элементов получены соотношения между перемещениями, деформациями и напряжениями.

*Bazhenov V.A., Guliar A. I., Sakharov A.S., Shkril' A.,*

**SUBSTANTIVE PROVISIONS OF MOMENTARY SCHEME FOR SEMIANALYTICAL  
VARIANT OF PRISMATIC FINITE ELEMENT**

Basic correlations of theory of elasticity spatial problem are resulted for prismatic bodies in the local curvilinear system of co-ordinates. On the basis of substantive provisions of momentary scheme of finite elements the relations between displacements, eformations and stress values are obtained.

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук,  
**О.С. Погорелова**, канд. фіз.-мат. наук  
**Т.Г. Постнікова**, канд. техн. наук

## УДАРНІ СИЛИ В ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМАХ

В статті представлений аналіз динамічної поведінки ударних контактних сил в двохмасових віброударних системах з двома ступнями вільності в залежності від параметрів зовнішнього періодичного навантаження та характеристик жорсткості самих систем. Показано, що при зміні  $T$ -періодичного одноударного режиму коливальних  $nT$ -періодичними багатударними ( $T$  – період зовнішнього навантаження) величина ударної сили, як правило, збільшується, інколи значно збільшується. Аналіз виконаний методом продовження розв'язку за параметром, який застосовується в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем та моделюванням удару нелінійною силою контактної взаємодії на базі квазістатичної теорії Герца, що в сукупності є потужним чисельним інструментом для дослідження динаміки віброударних систем.

### Вступ.

Віброударні машини та обладнання широко застосовуються в техніці, тому вивчення їхньої динамічної поведінки, ударних сил взаємодії між елементами в різних умовах роботи викликає значний інтерес і бурно розвивається в останні десятиріччя [1,2]. Однією з важливіших характеристик віброударного руху механічної системи є величина ударної сили.

Віброударні системи – це сильно нелінійні системи, що змінюють свою структуру внаслідок багатократних співударів їхніх елементів. Моделювання удару в таких системах з використанням хвильової теорії удару викликає значні труднощі. Хвильова теорія не вважає зв'язки між різними точками твердого тіла абсолютно жорсткими і допускає їхні відносні переміщення, тобто розглядає деформівне тіло. Кожна точка має три ступня вільності, загальна кількість незалежних координат дорівнює  $3K$ , система суттєво ускладнюється. Застосування для моделювання удару дискретної моделі з представленням твердого тіла як деякої кількості кінцевих елементів також дуже складно внаслідок багатократності співударів. Тому при дослідженні динаміки віброударних систем часто застосовуються більш грубі моделі, що пов'язано з «компромісом між простотою і реалістичністю, досягнути якого на практиці, однак, вдається рідко» [1]. Розповсюдженим є використання класичної стереомеханічної теорії, яка ґрунтується на моделі абсолютно твердого тіла та ньютонівського коефіцієнта відновлення, котрий вважається постійним, визначається матеріалами тіл і не залежить ні від швидкості зближення, ні від яких-небудь інших обставин. Удар вважається миттєвим, в момент удару складаються

граничні умови про рівність переміщень тіл та стрибкоподібне змінення швидкостей. Ця теорія не дозволяє визначити такі важливі характеристики процесу удару, як величина контактної ударної сили та тривалість удару. Використання дискретних моделей локальних деформацій, зокрема моделі, що базується на використанні квазістатичної теорії Герца, є «більш реалістичним підходом» [3].

Теорія Герца розглядає лише локальні деформації тіл, що співударяються, в зоні контакту, вважає удар пружним, низько швидкісним, колінеарним, без тертя (хоча теорію можна узагальнити додаванням в'язкого тертя), поверхні тіл в зоні контакту – гладкими, криволінійними, «Герцевими». Дія удару моделюється нелінійною контактною силою [4], яка вводиться в рівняння руху віброударної системи. Ця сила присутня лише під час удару, в решту часу руху вона відсутня. Моделювання удару контактною силою Герца дозволяє отримати закон руху тіл віброударної системи на всій часовій осі, включаючи час удару, дає можливість врахувати механічні характеристики тіл, що співударяються, визначити тривалість удару і величину ударної контактної сили, як її максимум, так і графік змінювання за часом.

Для побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь руху застосовується метод продовження розв'язку за параметром [5]. При дослідженні еволюції усталених періодичних режимів коливань нелінійних механічних систем він використовується в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем [6]. Ці методи в сукупності є потужним чисельним інструментом розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь. Їхнє використання дозволяє знаходити розв'язки крок за кроком для кожного значення параметру, який обраний ведучим, обходячи перехідний процес та скорочуючи час побудови розв'язків рівнянь руху в усталених режимах коливань в десятки разів. При цьому забезпечується можливість достатньо простого розпізнавання зон нестійкості знайдених режимів коливань. Цю методику вдалося застосувати для дослідження динаміки віброударних систем. Алгоритми, які розроблені, забезпечують побудову залежностей напіввзмахів коливань тіл, ударних сил контактної взаємодії та інших динамічних характеристик сильно нелінійних віброударних систем від обраного ведучого параметру, зокрема, інтенсивності зовнішнього навантаження та його частоти. Аналіз стійкості отриманих режимів коливального руху дозволяє знайти зони нестійких рухів, тобто такі зони, де  $T$ -періодичний коливальний рух в дійсності не реалізується ( $T$  – період зовнішнього навантаження), точно визначити точки біфуркації. Теорія та методика застосування розроблених алгоритмів до двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності докладно описані в [7 – 11].

### Постановка задачі.

Динамічна поведінка ударної контактної сили досліджується на прикладі двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності, яка складається із основного та приєднаного тіл, що зв'язані між собою лінійними пружними пружинами та демпферами (рис.1). На основне тіло діє періодичне зовнішнє навантаження

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

де  $\lambda$  – параметр його інтенсивності.

Удар моделюється силою контактної взаємодії на основі квазістатичної теорії Герца:

$$F_{con}(z) = K[H(z)z(t)]^{3/2}, \quad K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}},$$

$$\delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi}, \quad \delta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2 \pi}, \quad (2)$$

де  $z(t)$  – відносне зближення тіл завдяки місцевій деформації в зоні контакту,  $H(z)$  - ступінчата функція Хевісайда,  $\mu_i$  та  $E_i$  – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для матеріалів контактуючих тіл,  $A, B$  та  $q$  – характеристики місцевої геометрії зони контакту.

Рівняння руху віброударної системи мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 = -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{con}(x_2 - x_1),$$

$$\ddot{x}_2 = -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2x_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{con}(x_2 - x_1)], \quad (3)$$

де  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ ;  $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$ ,  $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$ ;  $\chi = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $\omega_1, \omega_2$  - парціальні частоти,  $F_{con}(x_2 - x_1)$  – сила контактної взаємодії, яка моделює удар і діє лише під час удару. Вихідні умови задачі такі:

$$x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

Чисельні параметри віброударної системи приведені [10,11].

### Аналіз динамічної поведінки ударної сили.

Нелінійні диференціальні рівняння руху (3) інтегруються чисельним методом продовження розв'язку за параметром, котрий застосовується в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем [6]. Розв'язки, які крок за кроком знаходяться для кожного зна-

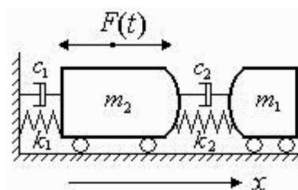


Рис. 1. Розрахункова схема віброударної системи



чення ведучого параметра, забезпечують побудову залежностей сил контактної взаємодії від цього параметра, зокрема, від інтенсивності зовнішнього навантаження та його частоти. Зони стійкого та нестійкого  $T$ -періодичного руху визначаються за значеннями мультиплікаторів – власних чисел матриці монодромії. В момент втрати стійкості хоча б один з мультиплікаторів виходить за рамки одиничного кола. При відшукуванні періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь руху віброударної системи методом продовження за параметром матриця монодромії збігається з матрицею лінеаризованої алгебраїчної системи, що побудована для знаходження приростів вихідних значень змінних. Тому обчислення значень мультиплікаторів та розшук зон нестійкості виконується достатньо просто. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху підтверджує, що в зонах нестійкого руху в дійсності реалізуються  $nT$ -періодичні багатударні чи неперіодичні, хаотичні режими коливань. Аналіз побудованих залежностей сили контактної взаємодії від параметра інтенсивності зовнішнього навантаження та його частоти виконаний в зонах як стійких коливальних режимів, так і нестійких, де в дійсності реалізуються багатударні регулярні та хаотичні режими. Аналізується також вплив параметрів жорсткості віброударної системи на величину максимальної контактної сили та на поведінку контактної сили під час удару.

Залежність максимальної величини контактної сили від параметра інтенсивності зовнішнього навантаження  $\lambda$  представлена на рис. 2.

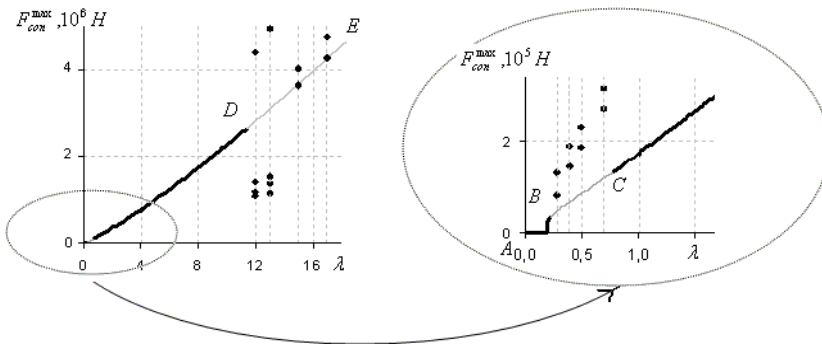


Рис. 2. Залежність максимальної величини контактної сили від інтенсивності зовнішнього навантаження

В зонах нестійкості  $T$ -періодичного руху (ділянки кривої  $BC, DE$ ) реалізуються  $nT$ -періодичні багатударні режими, зокрема  $4T$ -періодичний 4-х ударний ((4,4)-періодичний) і  $5T$ -періодичний 2-х ударний ((5,2)-періодичний), при малому зовнішньому навантаженні (ділянка кривої

AB) рух  $T$ -періодичний безударний. В  $k$ -ударному режимі за цикл стає  $k$  співударів, в кожному з них діє контактна сила. На рис. 2 значення їхніх максимумів показані точками при таких значеннях  $\lambda$ , де розв'язки рівнянь руху отримані прямим чисельним інтегруванням методом Рунге-Кутта 4-го порядку. С ростом інтенсивності навантаження сила контактної взаємодії збільшується, характер коливального руху змінюється. В багатуударних режимах контактна сила збільшується в порівнянні з одноударним.

Залежність максимальної величини контактної сили від частоти зовнішнього навантаження  $\omega$  приведена на рис. 3.

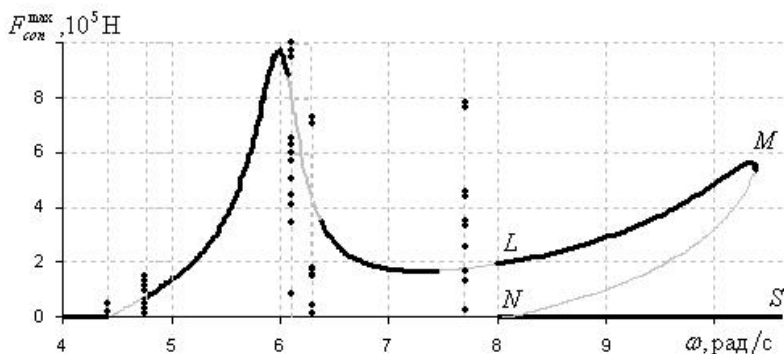


Рис. 3 Залежність максимальної величини контактної сили від частоти зовнішнього навантаження.

В зоні резонансу (парціальні частоти  $\omega_1 = 4,73 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2 = 6,28 \text{ рад/с}$ ) контактна сила різко зростає. В зонах нестійкого руху значення максимумів контактної сили показані точками при тих значеннях  $\omega$ , де розв'язки рівнянь руху були отримані прямим чисельним інтегруванням. З рисунка видно, що при зміні частоти палітра зон нестійкого коливального руху достатньо різноманітна. В усіх цих зонах реалізуються  $nT$ -періодичні багатуударні чи неперіодичні режими коливальних систем, контактна сила в таких режимах зростає. Особливо цікавий діапазон частот  $8,0 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 10,39 \text{ рад/с}$ . На рис. 3 бачимо, що тут існують три різні гілки кривої. Дві гілки відповідають стійким режимам: гілка  $LM$  – одноударному, а гілка  $SN$  – безударному, а третя гілка  $MN$  – нестійкому стану віброударної системи. Наявність трьох різних режимів в цьому діапазоні частот наочно демонструє залежність динамічного стану сильно нелінійної системи від її вихідного стану. Отримані ці ділянки кривої наступним чином. При русі вздовж кожної гілки розв'язків в точках біфуркацій нев'язка ставала такою великою, що подальший рух вздовж цієї гілки був неможливим.

Щоб не змінювати ведучого параметра, доводилося не тільки змінювати крок за ведучим параметром, а й обирати інші вихідні умови та продовжувати рух, починаючи з цієї точки. Таким чином бачимо, що в віброударній системі можуть реалізуватися різні стійкі  $T$ -періодичні коливальні стани – одноударний та безударний – і який з них реалізується в дійсності, залежить від вихідних умов, тобто від того стану, в якому знаходилася віброударна система перед тим, як вона продовжила коливатися при незначній зміні частоти зовнішнього навантаження [10,11].

Подивимось зараз, як впливають характеристики жорсткості тіл, що співударяються, на контактну силу. Характеристики жорсткості відносяться до важливіших параметрів віброударної системи, саме жорсткість визначає тривалість удару, міру його «м'якості». Залежність максимальної величини контактної сили від жорсткості сполучної пружини представлена на рис. 4.

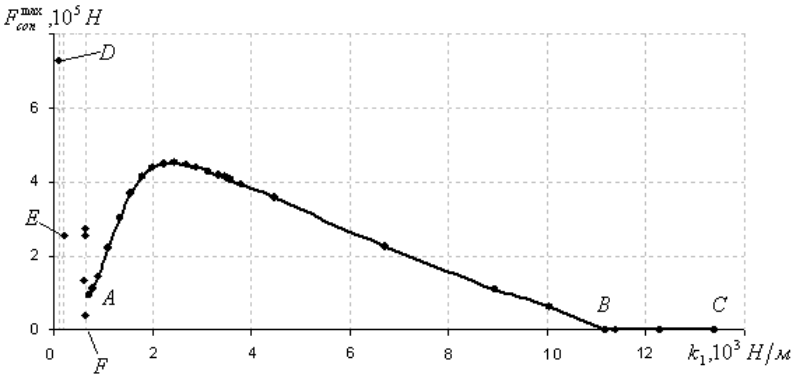


Рис. 4. Залежність максимальної величини контактної сили від жорсткості пружини

При малій жорсткості  $T$ -періодичний режим втрачає стійкість і замінюється  $nT$ -періодичними багатударними ( $n, k$ -періодичними). Для наочності сприймання на рис. 5-8 докладно наведені характеристики цих режимів: переміщення і фазові траєкторії обох тіл та графік зміни контактної сили в часі. Максимальне значення контактної сили з рис. 5 відповідає точці  $D$  на рис. 4, з рис. 6 – точці  $E$ , з рис. 7 – точкам на вертикалі  $F$ .

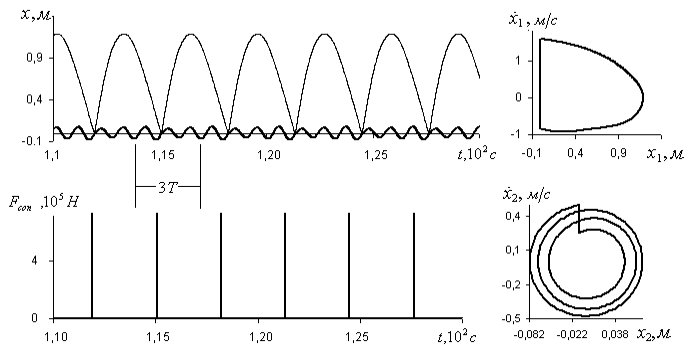


Рис. 5 Характеристики (3,1)-періодичного режиму коливань ( $k_1 = 111,72 \text{ H/м}$ )

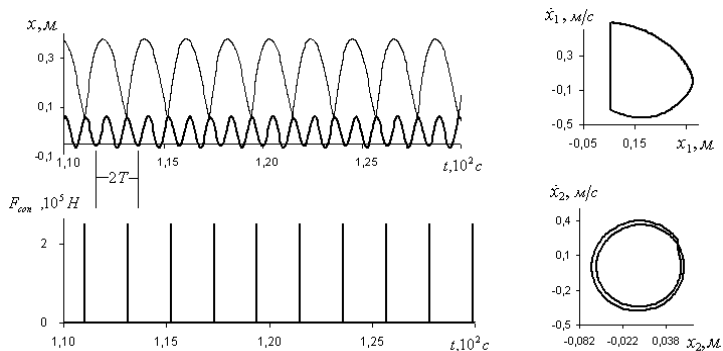


Рис. 6. Характеристики (2,1)-періодичного режиму коливань ( $k_1 = 223,45 \text{ H/м}$ )

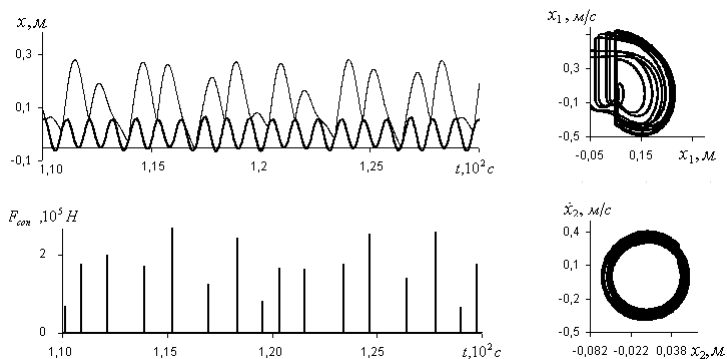


Рис. 7. Характеристики (n,k)-періодичного режиму коливань ( $k_1 = 670,34 \text{ H/м}$ )

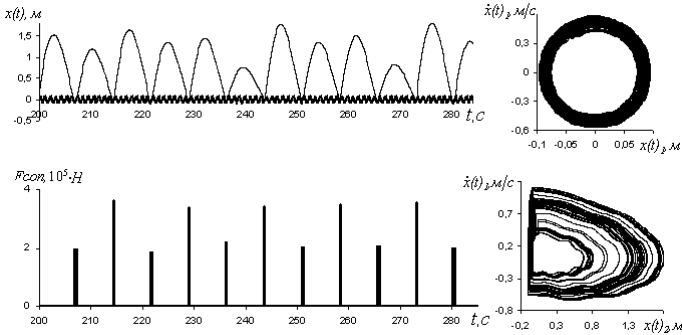


Рис. 8. Характеристики хаотичного режиму коливань ( $k_1 = 22,3 \text{ Н/м}$ )

В одноударному  $T$ -періодичному режимі контактна сила має найбільше значення при деякій жорсткості сполучної пружини ( $k_1 = 2234 \text{ Н/м}$ ), при інших значеннях жорсткості вона зменшується. При збільшенні жорсткості (ділянка кривої  $BC$  на рис. 4) режим коливань стає безударним. Це логічно: жорсткість пружини настільки велика, що задана зовнішня сила не забезпечує співударання тіл.

На рис. 9 в великому масштабі часу зображені графіки контактної сили за один удар при різних значеннях жорсткості сполучної пружини. За початок відліку часової осі приймається момент початку удару в різних чисельних експериментах.

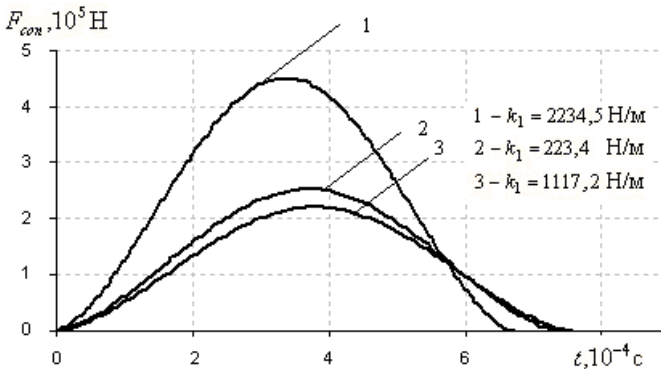


Рис. 9. Графіки контактної сили при різних значеннях жорсткості пружини  $k_1$

Значно впливають на величину максимальної контактної сили величини модулів пружності матеріалів контактуючих тіл. Ми прийняли, що матеріал обох тіл однаковий, тобто  $E_1 = E_2$ . В таблиці 1 приведені значення максимальної контактної сили для чотирьох різних матеріалів. Відмітимо цікавий результат – модуль пружності каучуку в 26000 разів менше, ніж сталі, контактна сила менше в 70 разів, при цьому напіврозмах основного тіла зменшився тільки в 1,24 рази!

Таблиця 1

Матеріал	Сталь	Мідь	Алюміній	Каучук
Модуль Юнга, $10^{11} \text{ Н/м}^2$	2,10	1,11	0,69	0,00008
$F_{con}^{max}, 10^5 \text{ Н}$	4,51	3,49	2,89	0,065

### Ударна контактна сила в віброударній системі з м'яким ударом.

Для узагальнення картини розглянемо динамічну поведінку ударної контактної сили в іншій моделі віброударної системи (рис. 10).

Ця модель відповідає розрахунковій схемі віброударного майданчика, що широко використовується в будівельному виробництві для ущільнення бетонних сумішей та формування бетонних виробів. Вона докладно описана в [12,13], там же приведені її чисельні параметри і параметри зовнішнього навантаження та рівняння руху. Коротко скажемо: на стіл майданчика масою  $m_1$  діє періодичне зовнішнє навантаження вигляду (1) від двигунів, що встановлені під ним. До столу прикріплена гумова прокладка, на якій без кріплення лежить форма з бетоном величезної маси  $m_2$ . Коли двигуни працюють, стіл здійснює коливальний рух вздовж осі  $y$  і підкидає форму з бетоном. Вона відривається від столу, а потім падає на прокладку, діється удар, форма відскакує знову і т.д. Як бачимо, ця модель має суттєві особливості та відмінності від попередньої, а саме: величезну масу верхнього тіла, його відрив від нижнього, м'якість, піддатливість гумової прокладки в порівнянні зі сталюю формою, а також значно більшу частоту зовнішньої сили ( $\omega = 157 \text{ рад/с}$ ), ніж в попередньої моделі ( $\omega = 7,23 \text{ рад/с}$ ).

Удар моделюється силою контактної взаємодії на базі квазістатичної теорії Герца (2), що, як і раніше, забезпечує отримання законів руху тіл

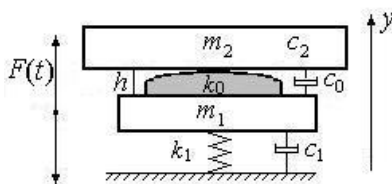


Рис. 10. Розрахункова схема моделі з м'яким ударом

віброударної системи на всій часовій осі, включаючи період удару, дає можливість одержати величину максимальної контактної сили та закон її зміни в часі, обчислити тривалість удару.

Розв'язки рівнянь руху та характеристики контактної сили отримані прямим чисельним інтегруванням методом Рунге-Кутта 4-го порядку в окремих точках.

Залежність максимальної величини контактної ударної сили від інтенсивності зовнішнього навантаження  $\lambda$  представлена на рис.11.

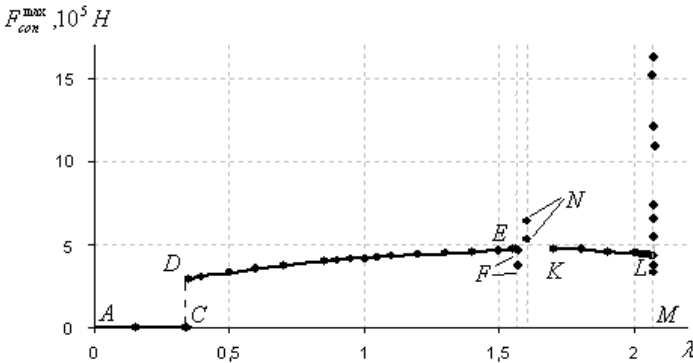


Рис. 11. Залежність максимального значення контактної сили від інтенсивності зовнішнього навантаження для моделі з м'яким ударом

При малому зовнішньому навантаженні (ділянка кривої AC) рух безударний – зовнішня сила недостатня, щоб відірвати форму від прокладки, і тіла рухаються спільно. Зі збільшенням зовнішньої сили режим стає одноударним  $T$ -періодичним, характеристики якого при  $\lambda=1,05$  для наочності приведені на рис. 12. Тонкою лінією тут і далі на графіках сили показана зовнішня періодична сила. Тривалість дії контактної сили, тобто тривалість удару, в порівнянні з її періодом дуже значна (на графіку контактна сила має вигляд дзвона, а не «ціпка» при кожному ударі). Такий удар вважається м'яким, і ми вважаємо модель віброударного майданчика моделлю з м'яким ударом.

З подальшим зростанням зовнішнього навантаження характер коливального руху змінюється, він стає  $nT$ -періодичними багатударними ( $n,k$ -періодичними). Ударна контактна сила в таких режимах, як правило, збільшується, інколи значно збільшується. Для кращого уявлення на рис. 13–15 представлені характеристики деяких з них. Максимальне значення контактної сили з рис. 13 відповідає точці N на рис. 11, з рис. 14 – точці L, з рис. 15 – точкам на вертикалі M, де показані величини ударних сил при хаотичному русі.

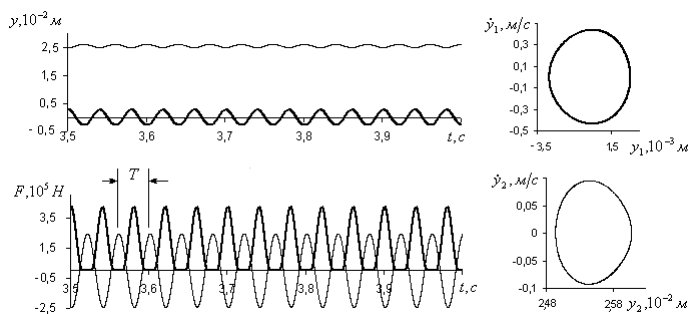


Рис. 12. Характеристики (1,1)--періодичного режиму коливань системи з м'яким ударом ( $\lambda=1,05$ )

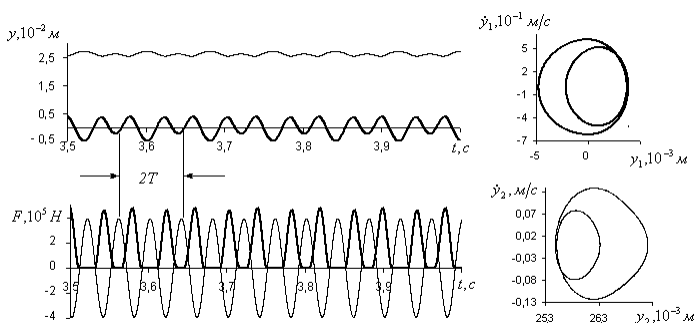


Рис. 13. Характеристики (2,2)--періодичного режиму коливань системи з м'яким ударом ( $\lambda=1,6$ )

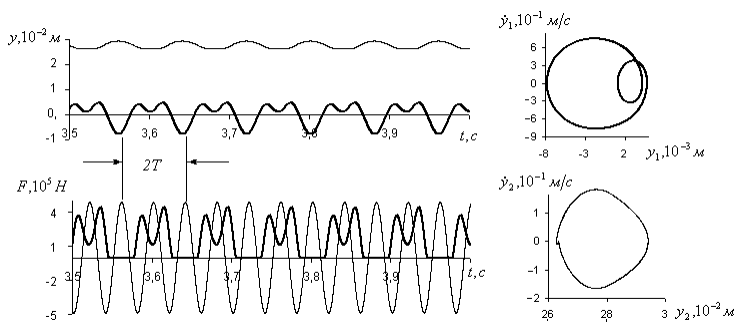


Рис. 14. Характеристики (2,1)--періодичного режиму коливань системи з м'яким ударом ( $\lambda=2$ )



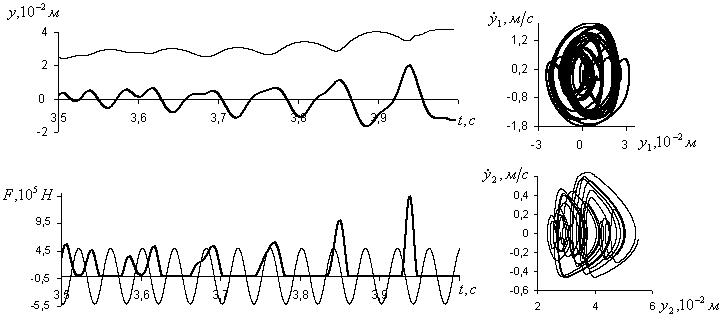


Рис. 15. Характеристики хаотичного режиму коливаль системи с м'яким ударом ( $\lambda=2,07$ )

Залежність максимальної величини контактної ударної сили від частоти зовнішнього навантаження представлена на рис. 16. При малій частоті режим коливаль хаотичний, контактна сила показана точками на вертикалі А, вона досягає великих значень. При великій частоті відрив відсутній, удару немає.

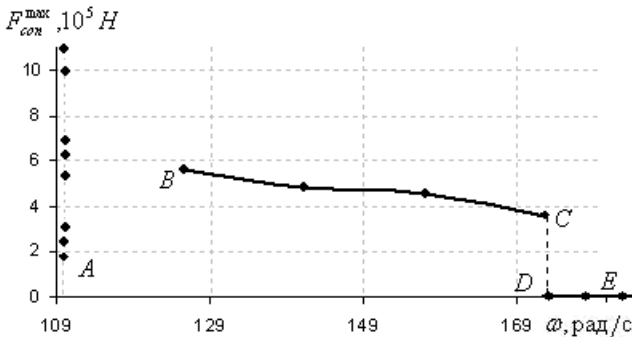


Рис. 16. Залежність максимального значення контактної сили від частоти зовнішнього навантаження для моделі з м'яким ударом

Залежність максимальної величини контактної ударної сили від жорсткості прокладки зображена на рис. 17.

При малій жорсткості відрив відсутній, стіл та форма рухаються спільно. При збільшенні жорсткості встановлюється одноударний  $T$ -періодичний режим, в якому величина ударної сили не змінюється при деякій зміні жорсткості. Але в деяких діапазонах значень жорсткості виникає  $3T$ -періодичний 2-х ударний ((3,2)-періодичний) режим, що показав

ний на рис. 18. Величина ударної сили в цьому режимі значно перевищує її величину в (1,1)-періодичному.

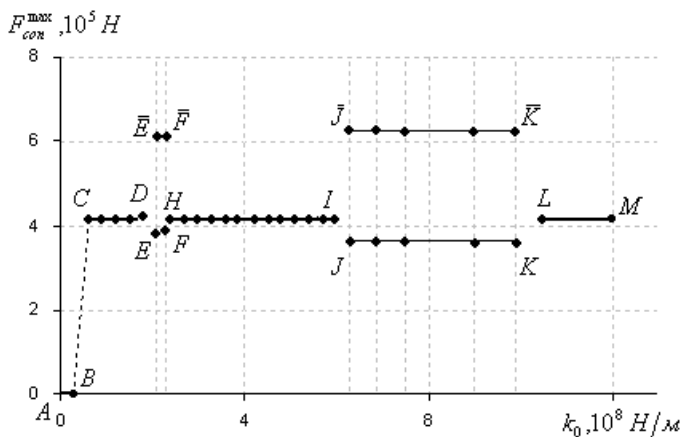


Рис. 17. Залежність максимального значення контактної сили від жорсткості прокладки для моделі з м'яким ударом

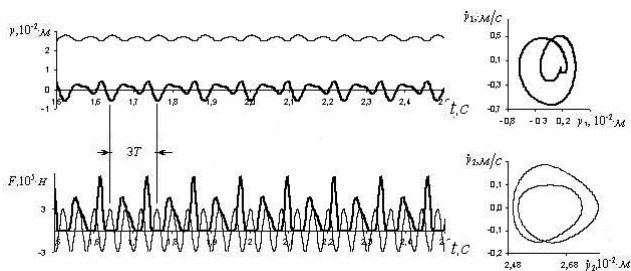


Рис. 18 Характеристики (3,2)-періодичного руху системи з м'яким ударом  
( $k_0 = 6,3 \cdot 10^8 \text{ H/M}$ )

Величина модуля пружності матеріалу прокладки як одна з характеристик жорсткості також сильно впливає на режим коливань віброударного майданчика та на величину ударної контактної сили. Форма з бетоном вважається сталлюю, модуль пружності сталі  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2$ , прокладка гумова. В деякому діапазоні значень модуля пружності матеріалу прокладки (1,1)-періодичний режим змінюється (3,2)-періодичним, при цьому ударна контактна сила приймає значення, які приведені в таблицях 2 та 3.

Таблиця 2

Режим коливань (1,1)-періодичний								
Модуль Юнга прокладки, $10^8 \text{ Н/м}^2$	3,0	4,0	4,3	4,35	5,7	6,0	7,0	8,0
$F_{\text{кон}}^{\text{max}}, 10^5 \text{ Н}$	4,15	4,72	4,86	4,89	5,47	5,59	5,95	6,28

Таблиця 3

Режим коливань (3,2)-періодичний (2 удари за цикл)									
Модуль Юнга прокладки, $10^8 \text{ Н/м}^2$	4,4	4,5	5,0	5,1	5,2	5,5	5,6	5,65	5,68
$F_{\text{кон}}^{\text{max}}, 10^5 \text{ Н}$	7,46	7,90	7,53	7,97	8,03	8,24	8,31	8,34	8,35
	5,11	5,18	5,60	5,70	5,78	6,00	6,05	6,13	6,14

Для наочності на рис. 19 приведені графіки контактної ударної сили в цих режимах коливань.

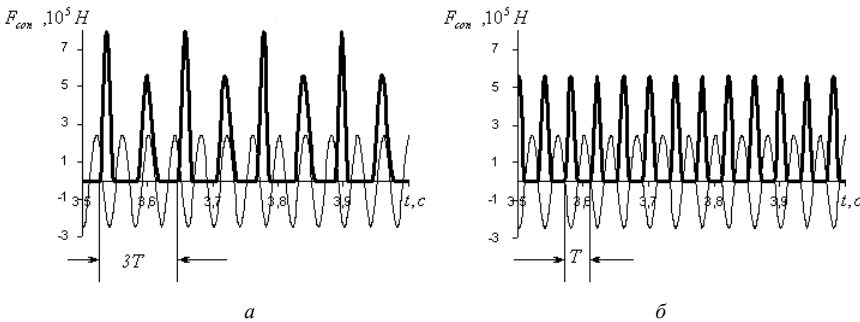


Рис. 19 Характеристики (3,2)-періодичного при  $E = 5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  (а) та (1,1)-періодичного при  $E = 6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  (б) руху системи з м'яким ударом

### Висновок.

В роботі виконаний аналіз динамічної поведінки однієї з важливіших характеристик віброударного руху, а саме ударної контактної сили. Показана її залежність від параметрів зовнішнього періодичного навантаження та від характеристик жорсткості самої віброударної системи. Характерно, що при зміні  $T$ -періодичного одноударного режиму коливань на  $nT$ -періодичні багатударні та хаотичні максимальна контактна сила, як правило, збільшується, інколи значно збільшується.

Для дослідження поведінки ударної сили в двохмасовій віброударній системі з двома ступнями вільності використаний потужний чисельний інструмент методу продовження розв'язку за параметром, який застосовується в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем та моделюванням удару нелінійною силою контактної взаємодії на базі квазістатичної теорії Герца. Застосування цієї методики забезпечує побудову залежностей будь-яких динамічних характеристик сильно нелінійних віброударних систем, зокрема, ударних сил контактної взаємодії, від обраного ведучого параметра при значному скороченні обчислювального процесу. Розроблені алгоритми також дають можливість достатньо просто виконати аналіз стійкості віброударного руху та визначити зони нестійкого руху.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Междунар. прогр. образования, 1997. – 336 с.
2. *Ibrahim R.J.* Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications // *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. № 43. – P.31–54.
3. *Foale S., Bishop S.R.* Bifurcations in impact oscillations // *Nonlinear Dynamics*. – 1994. – Т. 6. – №. 3. – С. 285–299.
4. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
5. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.
6. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П.* Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах. – Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
7. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2011.-Вип. 87. – С. 63–73.
8. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Реалізація методу продовження за параметром для віброударних систем при побудові кривих навантаження. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2011. – Вип. 88. – К.: КНУБА, 2011. – С. 56–64.
9. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Теоретичні основи аналізу динамічної поведінки віброударних систем. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2012. – Вип. 89. – К.: КНУБА, 2012. – С.39–49.
10. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Застосування методу продовження розв'язку за параметром до аналізу динамічної поведінки віброударної системи. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2012. –Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.16–30.

11. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Анализ динамического поведения виброударных систем разных типов. – LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH & Co. KG Dudweiler, Germany, 2013. – 132 с.
12. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах. // Пробл. прочности. – 2009. – №4. – С. 69–77.
13. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Влияние конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику. // Пробл. прочности. – 2011. - №1. – С. 122-133.

*Стаття надійшла до редакції 02.05.2013 р.*

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

### **УДАРНЫЕ СИЛЫ В ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ**

В статье представлен анализ динамического поведения ударных контактных сил в двухмассовых виброударных системах с двумя степенями свободы в зависимости от параметров внешней периодической нагрузки и характеристик жесткости самих систем. Показано, что при замене  $T$ -периодического одноударного режима колебаний  $nT$ -периодическими многоударными ( $T$  – период внешней нагрузки) величина ударной силы, как правило, увеличивается, иногда значительно увеличивается. Анализ выполнен методом продолжения решения по параметру, который применяется в синтезе с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем и моделированием удара нелинейной силой контактного взаимодействия на базе квазистатической теории Герца, что в совокупности является мощным численным инструментом для исследования динамики виброударных систем.

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

### **IMPACT FORCES IN VIBROIMPACT SYSTEMS**

Analysis of impact contact forces dynamic behaviour is presented in this article. We examine two-mass two-degree-of-freedom vibroimpact systems. Forces behaviour is examined as dependence from external periodical loading parameters and hardness system characteristics. It is shown that the impact force increases when  $T$ -periodical one-impact regime changes by  $nT$ -periodical regimes with many impacts during the cycle. Sometimes this increase is considerable. Analysis is fulfilled by parameter continuation method which is used in synthesis with method of periodical solutions creation for essentially nonlinear systems and with impact simulation by nonlinear contact interactive force based at quasistatic Hertz's theory. These methods in totality give powerful numerical instrument for vibroimpact systems dynamic investigation.

УДК 539.375

С.О. Пискунов, д-р техн. наук,

О.І. Гуляр, д-р техн. наук,

С.В. Мицюк, канд. техн. наук.

## ОГЛЯД СПІВВІДНОШЕНЬ КОНТИНУАЛЬНОЇ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ ОПИСУ ПРОЦЕСІВ ПОВЗУЧОСТІ І ВТОМИ

Проведено огляд рівнянь накопичення пошкодженості, наведено загальні алгоритми підсумовування пошкодженості і вирази для визначення ресурсу при втоми, повзучості, а також при їх одночасному виникненні.

**Вступ.** Конструкційні елементи відповідальних об'єктів часто функціонують в умовах тривалого сталого або циклічного силового навантаження в тому числі при підвищених температурах. В цих умовах відбуваються відповідно процеси повзучості або втоми, характерним для яких є поступове погіршення фізико-механічних характеристик матеріалу та накопичення розсіяних пошкоджень, утворення і зростання зон руйнування (макроскопічних дефектів), яке має бути враховано для достовірного аналізу тривалої міцності і величини ресурсу.

Для опису зазначених процесів накопичення розсіяних пошкоджень широкого розповсюдження набули підходи, що ґрунтуються на концепції механіки континуального руйнування і полягають у введенні до розгляду параметра пошкодженості матеріалу.

Механіка континуального руйнування була ініційована роботами Л.М. Качанова і Ю.Н. Работнова. Її розвиток стосовно процесів багаточиклового деформування здійснений в роботах С.В. Серенсона, В.П. Голуба, Т. Нішіхари, В.А. Кузьменка, І.М. Сільвестрова та інших учених.

Для опису зміни параметрів пошкодженості використовуються кінетичні рівняння, при побудові яких припускається, що прирощення функції  $\omega(t)$ , що описує параметр пошкодженості за малий проміжок часу  $t$  залежить від поточного стану матеріалу (значення параметра пошкодженості) та навантажень (силових, деформаційних і температурних впливів) [2, 6]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \Phi(\omega, p_j), \quad (1.1)$$

де  $\Phi(\omega, p_j)$  – деяка функція;  $p_j$  – вектор навантажень, що характеризує перелічені впливи.

Значення  $\omega(t=0)=\omega_0$  відповідає початковому стану матеріалу (зокрема, наявності початкових пошкоджень, у випадку відсутності яких  $\omega(t=0)=0$ ), а значення  $\omega(t^*)=1$  – критичне значення пошкодженості, що відповідає повністю пошкодженому стану, в якому несуча здатність є вичерпаною,  $t^*$  – час до досягнення цього стану.

Кінетичне рівняння типу (1.1) дозволяє описувати режими стаціонарного і нестаціонарного навантаження елементів конструкцій і доповнює класичну систему рівнянь механіки, що містить рівняння рівноваги, граничні умови, рівняння сумісності деформацій і стану матеріалу.

У випадку припущення незалежності процесу накопичення пошкоджень від історії навантаження, тобто пропорційності величини накопиченої пошкодженості величині часу навантаження та її незалежності від послідовності прикладення навантажень, час до початку руйнування матеріалу  $t^*$  може бути визначений на основі безпосереднього інтегрування рівняння (1.1) з урахуванням умови [2]:

$$\int_0^{t^*} \Phi(\omega, q_i) dt = 1. \quad (1.2)$$

Однак, таке припущення лінійності підсумовування пошкодженості не враховує низки факторів, які суттєво впливають на процес навантаження [14].

При розв'язанні задач континуального руйнування важливим є коректний вибір співвідношень для опису пошкодженості з точки зору урахування неоднорідного напружено-деформованого стану. З іншого боку серед рівнянь визначення пошкодженості найбільшого розповсюдження набули рівняння, які містять скалярний а не векторний чи тензорний параметри пошкодженості, що пояснюється простотою визначення констант кінетичних рівнянь. Метою даної роботи є огляд рівнянь накопичення пошкодженості при різних умовах деформування – окремії дії повзучості та втоми, а також у випадку їх одночасного виникнення та формулювання загальних алгоритмів визначення пошкодженості при розв'язанні задач континуального руйнування.

**1. Фізичні співвідношення механіки континуального руйнування при циклічному навантаженні.** При циклічному навантаженні для параметру пошкодженості в більшості випадків використовується позначення  $D$ , а параметром, що визначає ресурс є кількість циклів навантаження  $N$ . Серед рівнянь відомі рівняння із визначення пошкодженості при багато- та малоциклового навантаженні. Зокрема при

малокцикловому наванатженні використовується модифікований підхід Менсона [2]:

$$D_i = (n_i / N_i)^{q(\omega)},$$

де  $q(\omega) = \left(\frac{N}{N_r}\right)^\alpha + \frac{2\omega}{\pi} \left[1 - \left(\frac{N}{N_r}\right)^\alpha\right]$ ;  $\omega = \arctg\left(\frac{\gamma_a \times \varepsilon_{fs}}{\varepsilon_a \gamma_{fs}}\right)$  – кут орієнтації

траєкторії деформування, який визначає домінуючий вид деформованого стану;  $\gamma_{fs}$  – гранична та амплітуда деформації зсуву в умовах чистого кручення для заданої довговічності;  $\varepsilon_{fs}$  – гранична амплітуда осьової деформації в умовах розтягу-стиску для цієї ж довговічності [16].

У випадку багатоциклового навантаження в роботі [15] В.В. Болотіним був запропонований вираз наступного вигляду:

$$F(D, \sigma) = \frac{\eta(\sigma)}{B} \sigma^b D^{\frac{1}{\eta(\sigma)}}, \quad (1.3)$$

де  $B$  і  $b$  – параметри рівняння кривої втоми,  $\eta(\sigma)$  – незростаюча функція  $\sigma$ , що визначається по результатам програмних досліджень з урахуванням граничних умов.

Зазначений вираз дозволяє врахувати вплив послідовності прикладання програмного навантаження на довговічність.

Для опису монотонної зміни інтенсивності накопичення пошкодженості із збільшенням кількості циклів в роботі [11] був запропонований вираз вигляду:

$$\frac{dD}{dN} = k(\sigma) m(\sigma) N^{m(\sigma)-1}, \quad (1.4)$$

де  $k(\sigma)$  і  $m(\sigma)$  – залежні від напруження  $\sigma$  коефіцієнти; пошкодженість в даному випадку залежить як від рівня напружень, так і від накопиченої кількості циклів навантаження.

В роботі [12] із посиланням на [13] зазначено, що для певного класу конструкційних матеріалів процес накопичення пошкодженості при циклічному навантаженні характеризується уповільненням із зростанням кількості циклів. Урахування цього ефекту запропоновано здійснювати

введенням в вираз для  $\frac{dD}{dN}$  спадаючої функції  $\psi(\sigma, N)$ :

$$\frac{dD}{dN} = e^{A\sigma+B} \psi(\sigma, N), \quad (1.5)$$



де  $\psi(\sigma, N) = e^{-m\sigma(N-1)}$ ,  $\sigma$  – амплітудне значення напружень;  $A$  і  $B$  експериментальні константи які визначаються по кривій втоми, поданої рівнянням  $\frac{1}{N} = e^{A\sigma+B}$  [12].

В роботі [3] для обчислення пошкоджень анізотропних композитних матеріалів вводяться визначальні рівняння у вигляді кінетичних рівнянь еволюційного типу:

$$\frac{dD_{ij}}{dN} = k(R) * (W^e)^n * M_{ijkl} * \check{\sigma}_{kl}, \quad (1.6)$$

де  $k(R)$  - функція, яка залежить від параметра циклу;  $M_{ijkl}$  - симетричний тензор четвертого рангу, компоненти якого відображають вплив напрямку головних осей тензора напруження відносно площини симетрії пружних властивостей композиту;  $W^e$  - максимальна за цикл питома енергія пружної деформації.

При плоскому напруженому стані кінетичне рівняння пошкоджуваності спрощується й його можна переписати в матричній формі як:

$$\begin{pmatrix} \frac{dD_{11}}{dN} \\ \frac{dD_{22}}{dN} \\ \frac{dD_{12}}{dN} \end{pmatrix} = k(R) * (W^e)^n * \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{12} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \check{\sigma}_{11} \\ \check{\sigma}_{22} \\ \check{\sigma}_{12} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

В роботі [3] вигляд рівняння накопичення пошкодженості передбачає урахування зменшення ефективного перерізу елемента конструкції, що відповідає первісному фізичному трактуванню пошкодженості, запропонованому Ю.Н. Работновим [11]. Для урахування циклічного навантаження вираз для пошкодженості містить номінальне значення напруження  $\sigma_1^0$ :

$$\frac{dD}{dN} = \begin{cases} B \left( \frac{\sigma_1^0}{1-D} \right)^m & (\sigma_1^0 > 0); \\ 0 & (\sigma_1^0 < 0); \end{cases} \quad (1.8)$$

де  $\sigma_1^0 = \sigma_{m0} + \sigma_{a0} \sin(2\pi ft)$  – номінальне напруження,  $f$  – частота прикладання навантаження. При конкретизації величини  $\sigma_1^0$  для окремих випадків вираз (1.8) отримаємо у вигляді:

для симетричного навантаження ( $\sigma_m = 0$ ,  $\sigma_a \neq const$ ):

$$\frac{dD}{dN} = C \frac{(\sigma_{a0} \sin 2\pi N)^m}{2^m (1-D)^m}, \quad (1.9)$$

для асиметричного навантаження ( $\sigma_m = const$ ,  $\sigma_a = const$ ):

$$\frac{dD}{dN} = C \frac{(\sigma_{m0} + \sigma_{a0} \sin 2\pi N)^m}{2^m (1-D)^m}, \quad (1.10)$$

де  $m$  і  $C$  константи матеріалу,  $\sigma_a$ ;  $\sigma_{m0}$ ,  $\sigma_{a0}$  – номінальні значення статичної та циклічної компонент відповідно.

Вираз, що ґрунтується на концепції пошкодженості Ю.Н.Работнова [11], запропонований також в роботі [13]:

$$\frac{dD}{dN} = A \left( \frac{\sigma}{\sigma_B (1-D)} \right)^n, \quad (1.11)$$

де  $A$  та  $n$  – експериментально визначені константи;  $\sigma_B$  – межа міцності матеріалу.

В роботі [13] вище наведене рівняння було розв'язане в замкненому вигляді, що дозволило отримати вираз для величини пошкодженості у вигляді:

$$D = 1 - (n+1) \sqrt[1 - \frac{A}{(n+1)\sigma_B^n} \int_0^{N^*} \sigma^n dN], \quad (1.12)$$

де  $N^*$  - кількість циклів навантаження в даний момент часу ( $0 \leq N^* \leq N$ ).

При відомій історії навантаження  $\sigma(N)$  цей вираз дозволяє обчислити пошкодженість  $D$  в будь-який момент часу. У випадку коли  $\sigma = \sigma_a = const$ , вираз (1.12) матиме вигляд [13]:

$$D = 1 - (n+1) \sqrt[1 - \frac{A}{(n+1)\sigma_B^n} \sigma^n N], \quad (1.13)$$

з цього виразу може бути знайдена кількість циклів для початку руйнування :

$$N^* = \frac{(n+1)\sigma_B^n (1 - (1-D)^{n+1})}{A\sigma^n}. \quad (1.14)$$

Даний вираз містить скалярний параметр пошкодженості і характеризується простотою визначення констант кінетичних рівнянь

У випадку коли  $D = 1$  кількість циклів навантаження дорівнює кількості циклів до руйнування. Використовуючи відоме рівняння кривої втоми вигляду  $N = C \sigma^{-m}$  і можна визначити константи рівняння (1.12) у вигляді:

$$n = m, \quad A = ((n+1)\sigma_B^n) / C. \quad (1.15)$$

В загальному випадку процес циклічного навантаження може здійснюватись із змінними параметрами циклу (середнім значенням напруження і амплітуди). Для моделювання процесу деформування, континуального руйнування та повзучості чи сумісної дії даних процесів процес навантаження необхідно розділити на певну кількість етапів – кроків розв'язання задачі –  $S^*$ , при цьому в межах кожного етапу  $s$  навантаження відбувається із сталим середнім напруженням  $\sigma_{0s}$  і сталою амплітудою  $\sigma_{as}$  протягом  $N_s$  циклів. При визначених таким чином параметрах навантаження на кожному кроці виконується визначення напружено-деформованого стану. Величина пошкодженості  $D_s$ , за всю попередню історію навантаження (кількість циклів навантаження  $N_s = \sum_{s=1}^S N_s$ ) визначається за формулою (1.13), поданою із урахуванням покрокової дискретизації процесу навантаження:

$$D_s = 1 - (n+1) \sqrt[1 - \frac{A}{(n+1)\sigma_B^n} \sum_{s=1}^S (\sigma_{as})^n N_s]{1} \quad (1.16)$$

У випадку циклічного навантаження із сталими параметрами циклу визначення напружено-деформованого стану достатньо виконати лише один раз, а визначення кількості циклів до початку руйнування  $N^*$  виконується за формулою (1.14) при  $D = D^* = 1$ :

$$N^* = \frac{(n+1)\sigma_B^n}{A\sigma^n}, \quad (1.17)$$

При необхідності моделювання перебігу процесу накопичення пошкодженості здійснюється послідовним використанням формули (1.17) при значеннях  $N$ :  $0 \leq N \leq N^*$ .

Такий підхід не потребує додаткових експериментальних випробувань для визначення рівнянь накопичення пошкодженості при циклічному навантаженні і в подальшому використовується для моделювання виникнення дефектів, пов'язаних із зміною фізико-механічних характеристик матеріалу.

**2. Фізичні співвідношення механіки континуального руйнування в умовах повзучості.** Серед рівнянь визначення моделювання пошкодженості у випадку повзучості також відомі рівняння що потребують складних експериментів для визначення констант рівнянь пошкодженості так і ті, де визначення констант є простішим.

У зв'язку з тим, що процес накопичення пошкодженості відбувається за двома механізмами – виникнення і росту дефектів [1, 5], в роботі [5] було запропоновано обчислювати скалярну величину пошкодженості як функцію

двох величин  $\frac{d\omega}{dt} = f\left(\frac{d\omega_1}{dt}, \frac{d\omega_2}{dt}\right)$ , одна з яких пов'язана з величиною інтенсивності дотичних напружень  $\tau_i$ , що визначають інтенсивність зародження тріщин, а друга – з величиною найбільшого головного напруження  $\sigma_1$ , що визначає швидкість їх росту:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = A_1 \frac{\tau_i^n}{(1-\omega_1)^{n_1}}, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = A_2 \frac{\sigma_1^k}{(1-\omega_2)^{n_2}},$$

$$(1-\omega)^{-q} = (1-\omega_1)^{-f} + (1-\omega_2)^{-p},$$

де  $A_1, n, n_1, A_2, k, n_2, q, f, p$  – константи матеріалу

Найбільш простим є ізотропний параметр пошкоженості. У цьому випадку функція  $\Phi(\omega, q_j)$ , як зазначено в роботі [4], найбільш часто приймається у вигляді ступеневої функції напруження, або у вигляді рівняння Качанова [7], Работнова [11], Шестерикова [5], Леметра [17], або рівнянь, що містять додаткові параметри, які враховують характер складного напруженого стану  $q_j$  [10]:

$$\frac{d\omega}{dt} = B f(q_j) \left(\frac{\sigma_e}{1-\omega}\right)^k. \quad (2.1)$$

Узагальненням цих та подібних рівнянь є наведений в роботах [4] вираз:

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[\frac{\sigma_e}{1-\omega^r}\right]^m \frac{1}{(1-\omega)^q} \omega^\beta, \quad (2.2)$$

де  $C, B, m, q, k, r, \beta$  – константи матеріалу.

Величина  $\sigma_e$ , що входить до кінетичних рівнянь пошкоженості є значенням еквівалентного напруження, обчисленого відповідно до обраного критерію міцності [6]: максимального нормального напруження  $\sigma_e = \sigma_1$ , інтенсивності дотичних напружень  $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3$ , критерію Сдобирева:

$$\sigma_e = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_i); \text{ Труніна: } \sigma_e = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_i) e^{1-2\eta}, \quad \eta = \frac{3\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_i}; \text{ Г.С.Писаренка-}$$

$$\text{О.О.Лебедєва: } \sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{\text{окт}} + (1-\chi) \sigma_1.$$

Згідно з роботою [4] найбільш загальною структурою виразу для еквівалентного напруження при ізотропному характері накопичення пошкоженості є

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}), \quad (2.3)$$

де  $I_1(\sigma_{ij}), I_2(s_{ij})$  – відповідно перший і другий інваріанти тензора  $\sigma_{ij}$  і діватора напружень  $s_{ij}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  – константи матеріалу,  $\alpha+\beta+\gamma=1$ .

Конкретизація виразу (2.3) для практичних розрахунків має вигляд:

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + (1-\alpha) \sigma_i.$$

Рекомендації щодо використання критеріїв міцності надаються залежно від характеру напружено-деформованого стану. При розв'язанні задач повзучості час процесу навантаження  $t$  подається у вигляді сукупності кроків  $t = \sum \Delta t_i$ . На кожному кроці здійснюється розв'язання нелінійної (з урахуванням деформацій повзучості) задачі із визначення напружено-деформованого стану. Після чого виконується покрокове інтегрування [9] рівнянь пошкодженості за часом:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \Delta \omega_i = \omega_{i-1} + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_i * \Delta t_i$$

де  $T^* = t(\omega=1)$ ,  $i$  – номер кроку,  $\Delta \omega_i$  – прирощення пошкодженості на кроці навантаження.

Таким чином, для проведення математичного моделювання процесу деформування і континуального руйнування матеріалу в умовах повзучості доцільно використовувати скалярний параметр пошкодженості, а для опису його зміни в часі – кінетичні рівняння вигляду (2.1) – (2.2). Такий спосіб подання пошкодженості є найбільш використовуваним у розрахунковій практиці і найбільш перспективним [2; 4; 8], тому орієнтація на нього при побудові алгоритму розв'язання задач континуального руйнування при повзучості дозволяє проводити чисельні дослідження, використовуючи наявні експериментальні дані про властивості матеріалів у розглядуваних умовах деформування.

**3. Фізичні співвідношення механіки континуального руйнування при взаємодії повзучості та втоми.** У випадку сумісного виникнення втоми і повзучості модель накопичення сумарної пошкодженості  $\omega_\Sigma$  здебільшого задається системою рівнянь, яка містить окремі доданки, що описують складові пошкодження від повзучості  $\omega_c$  і втоми  $\omega_f$ . При цьому швидкість накопичення кожної із силових пошкодженості залежить від параметрів напруженого стану (сталих та амплітудних напружень) та величини сумарно накопиченої пошкодженості  $\omega_\Sigma$  [3].

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega_c(\sigma_m, \omega_\sigma)}{dt} + \frac{1}{v} \frac{d\omega_f(\sigma_a, \omega_\Sigma)}{dt}.$$

Рівняння визначення пошкодженості при взаємодії повзучості та втоми при багатоцикловому навантаженні можна подати у такому вигляді:

$$\frac{d\omega_{\Sigma}}{dt} = B \left( \frac{\sigma_m}{1-\omega_{\Sigma}} \right)^n \left( \frac{1}{1-\omega_{\Sigma}} \right)^{q(\sigma_m)} + \frac{C}{v} \left( \frac{\sigma_m}{1-\omega_{\Sigma}} \right)^m \left( \frac{1}{1-\omega_{\Sigma}} \right)^{q(\sigma_a)},$$

$$\omega_{\Sigma} = \omega_c + \omega_f = \int_0^{t_c} \frac{d\omega_c}{dt} d\tau + \frac{1}{v} \int_{t_c}^{t_c+t_f^*} \frac{d\omega_f}{dt} d\tau,$$

де  $t_c$  – час дії попередньої повзучості,  $t_f$  – залишкова втомна довготривалість.

У випадку малоциклового навантаження розрахунок довговічності в умовах одночасного розвитку процесів повзучості і втоми здійснюється на основі нелінійної моделі методом покрокового інтегрування відповідних рівнянь пошкодженості

$$\omega = D \frac{(g_1 g_2 \sigma_e^0)^r}{(1-\omega^0)^1}, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \omega(t^*) = 1,$$

$$g_1 = \left( \int_0^1 \left( 1 + M \left( \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos(2\pi k \xi) \right) \right)^s d\xi \right)^{1/s};$$

$$g_2 = \left( \int_0^1 (1 + A_2 \sin(2\pi k \xi))^s d\xi \right)^{1/s}, \quad A_2 = \frac{A}{g_1}.$$

Таким чином, для проведення математичного моделювання процесу руйнування матеріалу в умовах одночасної дії повзучості та втоми доцільно використовувати скалярний параметр пошкодженості, а для опису його зміни в часі – кінетичні рівняння вигляду (2.1)–(2.2).

Таким чином, при наявності визначених параметрів напружено-деформованого стану використання вищенаведених рівнянь і визначених за викладеним підходом констант цих рівнянь дозволяє визначити величину пошкодженості при мало- та багатоциклового навантаженні та умовах повзучості.

Розв'язання задач деформування в умовах сумісного виникнення повзучості і втоми також здійснюється на основі крокових алгоритмів.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бойл Дж.*. Аналіз напружень в конструкціях при ползучості. / *Бойл Дж., Спенс Дж.* // – М.: Мир, 1976. – 360 с.
2. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. / *Болотин В.В.* // – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
3. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложения к задачам ползучести и усталости / *Голуб В.П.* // Прикл. механика – 2000. – №3. – С. 31-66.

4. Голуб В.П. Определяющие уравнения в нелинейной механике поврежденности // Голуб В.П. // Прикладная механика.– 1993. – № 10. – С. 37–49.
5. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под ред. С.А. Шестерикова – М.: Машиностроение, 1983. –101 с.
6. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. / Качанов Л.М. // – М.: Наука, 1974.– 312 с.
7. Качанов Л.М. Теория ползучести. / Качанов Л.М. //– М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
8. Колмогоров В.М.. Феноменологическая модель накопления повреждений и разрушения при различных условиях нагружения./ Колмогоров В.М., Мигалев Б.А. // – Екатеринбург, 1994.– 105 с.
9. Анализ критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии / Локощенко А.М., Назаров В.В., Платонов Д.Д., Шестериков С.А. // Известия РАН: Механика твердого тела. – 2003. – №2. – С. 139–149.
10. Любарт Е.Л. Об одном параметре состояния при ползучести с учетом разрушения. / Любарт Е.Л. // Известия АН СССР. Механика твердого тела.– 1974. – № 1.– С. 141–142.
11. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Работнов Ю.Н.// – М.: Наука, 1966. – 752с.
12. Серенсон С.В. Усталость материалов и элементов конструкций / С.В. Серенсон - К.:Наук. думка, 1985. с.424
13. Сильверстов И.Н. Расчет ресурса и длительной прочности с использованием критерия повреждаемости / Сильверстов И.Н. – Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2006. - №6. – С.116-118.
14. Справочное пособие по расчету машиностроительных конструкций на прочность / Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Уманский С.Э.и др. – К.: Техника, 1990. – 240 с.
15. Троценко В.Т.. Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении./ Троценко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В. //– К.: Наук. думка, 1987. – 257 с.
16. Шукаев С., Кінетика накопичення розсіяних пошкоджень у металах при короткочасному і тривалому навантаженні / Шукаев С.,Панасовский К., Назаренко І.// Машинознавство. – 2006. – №9-10. – С. 27–29.
17. Lemaitre J. Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1985. – № 51. – P. 31–49.

*Стаття надійшла до редакції 27.04.2013 р.*

*Гуляр О.І., Пискунов С.О., Мицюк С.В.*

#### **ОБЗОР СООТНОШЕНИЙ КОНТИНУАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ И УСТАЛОСТИ**

Выполнен обзор уравнений накопления повреждаемости, приведены общие алгоритмы суммирования повреждений и выражения для определения ресурса при усталости, ползучести, а также при их одновременном возникновении.

*Gulyar O.I., Pyskunov S.O., Mytsyuk S.V.*

#### **REVIEW OF CORRELATIONS OF CONTINUAL DAMAGE MECHANICS FOR PROCESSES OF CREEP AND FATIGUE DESCRIPTION**

The review of the equations of damage accumulation is carried out, the general algorithms of damage summation and expression for life-time definition are given at fatigue, creep, and also at their simultaneous emergence.

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук

О.В. Глушакова, канд. фіз.-мат. наук

С.М. Глазунов

## ТОРСІОННІ АВТОКОЛИВАННЯ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ В РІДКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Поставлена задача про самозбудження крутильних коливань бурильної колони в циліндричній порожнині вертикальної свердловини, що містить рідке середовище. Розглянуто моделі механічної взаємодії колони з в'язкою рідиною. Розроблена модель крутильних автоколивань однорідної бурильної колони в формі осциляційного маятника. Сформульовано розв'язувальне нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними, що дозволяє описувати коливання долота бурильної колони з урахуванням сил в'язкого тертя. Запропоновано алгоритм чисельного інтегрування цього рівняння як по просторовій, так і часовій координатам.

**1. Вступ.** В даний час в практиці проходки нафтових і газових свердловин найбільше розповсюдження отримав роторний спосіб буріння. Для його здійснення застосовуються спеціальні бурові установки, які являють собою комплекс бурового обладнання і споруд.

Бурова установка для розвідки і розробки родовищ нафти і газу в загальному вигляді містить: бурові споруди (бурова вишка); спускопідіймальне обладнання (лебідка); силове обладнання для приводу лебідки, ротора і бурових насосів, обладнання для обертання бурильної колони (обертальний стіл); промивну рідину, що циркулює в порожнині свердловини, та долото (рис. 1).

Одним з динамічних явищ, що сприяє виникненню позаштатної ситуації в процесі буріння, є самозбудження крутильних коливань обертової бурильної колони (БК). Оскільки БК являє собою торсіонний маятник, в нижній частині якого за рахунок дисипативної взаємодії між долотом і породою, яка руйнується, відбувається відтік енергії від приводного механізму в навколишнє середовище, при порушенні умов

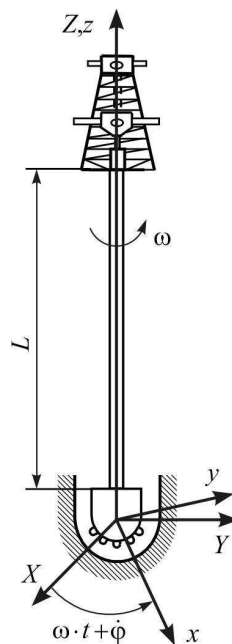


Рис. 1. Конструктивна схема бурової установки



цього відтоку колона може переходити від режиму стаціонарного рівноважного стану обертання в режим крутильних автоколивань. В даній роботі ставиться задача про комп'ютерне моделювання самозбуджуваних крутильних коливань.

В бурових установках причиною самозбудження торсіонних коливань є біфуркаційне порушення балансу моментів сил пружності в колоні і нелінійних сил тертя між долотом і стінкою свердловини [1,2].

В задачах динаміки БК параметром, що визначає їх стаціонарні і автоколивальні режими, є кутова швидкість  $\omega$  обертання колони. Застосовно до явищ, які супроводжують обертання БК, дослідження можливості генерування їх автоколивань дозволяє відповісти на три важливих питання: при яких значеннях параметрів системи і її функціонування можливе генерування крутильних автоколивань; який тип режиму самозбудження коливань (м'який чи жорсткий) має місце; які заходи можуть усунути можливі режими крутильних автоколивань [3-8].

Для БК у порівняно неглибоких свердловинах відповіді на ці питання можуть бути отримані за допомогою спрощеної математичної моделі осцилятора з одним ступенем свободи, яка побудована на основі торсіонного маятника, що обертається, до маховика – долота якого прикладені нелінійні сили тертя його фрикційної взаємодії з породою, яка руйнується [9].

Однак якщо довжина БК не мала, застосування моделі торсіонного осциляційного маятника для аналізу її динаміки не є виправданим, оскільки коливання її елементів перестають бути синфазними і їх моделювання повинно проводитись на основі хвильової теорії. Про необхідність застосування такої теорії вказується в роботах [1,3 - 5].

**2. Постановка задачі.** В реальних умовах, в загальному випадку, ускладненню форм рухів маховика в значній мірі може сприяти ефект залипання його коливань, властивих системам з сухим тертям. Він полягає в короткочасних зупинках руху маховика в проміжки часу, в які сума всіх моментів активних сил і моментів сил інерції виявляється меншою за деякий пороговий момент сил тертя, який потрібно подолати, щоб маховик почав повертатись.

В ці проміжки привідна установка на верхньому кінці БК продовжує обертатись з кутною швидкістю  $\omega$ , БК закручується і в ній накопичується потенціальна енергія пружних деформацій. Після досягнення пружним моментом в БК значення, рівного пороговому значенню моменту сил тертя, нижній маховик (долото) починає обертатись, БК розкручується, і її потенціальна енергія починає перетворюватись в кінетичну енергію обертання колони і маховика. Це обертання продовжується до тих пір, поки сума пружного моменту в БК і моменту сил інерції долота знову не стане

меншою за порогове значення сил тертя, в результаті чого маховик знову зупиняється і так далі.

При аналізі автоколивань долота суттєвий вплив на форми його рухів можуть здійснити сили в'язкої силової взаємодії між трубою бурильної колони та промивною рідиною. Відомо, що ця рідина, як і багато інших глинистих розчинів та паст, відносяться до реологічних середовищ з неньютонівськими властивостями [10-14]. Тому особливості їх властивостей повинні бути враховані при постановці задачі щодо автоколивань бурильних колон.

Метою статті є розробка математичної моделі, що описує стаціонарні обертання та періодичні автоколивання бурильних колон в порожнинах свердловин, що заповнені промивною рідиною.

Розглянемо випадок стаціонарного обертання верхнього кінця БК з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Введемо інерційну систему координат  $OXYZ$  з початком в центрі мас долота, вісь  $OZ$  якої співпадає з осью лінії БК (рис. 2). Відносно неї зі швидкістю  $\omega$  обертається система  $Ox_1y_1z_1$ . Пов'яжемо з долотом систему координат  $Oxyz$ , яка обертається разом з ним, вісь  $Oz$  якої співпадає з віссю  $OZ$ . Тоді кут повороту долота відносно системи  $OXYZ$  складе  $\omega t + \phi$ , де  $\omega t$  – кут повороту верхнього кінця БК і системи координат  $Ox_1y_1z_1$ ,  $t$  – час,  $\phi(z, t)$  – кут пружного закручування БК, а  $\phi(0, t)$  – кут пружного закручування долота.

Динаміку крутильних коливань БК необхідно вивчати на основі рівняння

$$\rho I_z \partial^2 \phi / \partial t^2 + f(\partial \phi / \partial t) - G I_z \partial^2 \phi / \partial z^2 = 0. \quad (1)$$

Тут  $\rho$  – щільність матеріалу БК;  $I_z$  – момент інерції площі поперечного перерізу;  $G$  – модуль пружності матеріалу при зсуві;  $k$  – коефіцієнт, що характеризує момент сил в'язкого тертя між промивною рідиною та зовнішньою стінкою труби БК.

Як вказано в роботі [15], глинисті та цементні розчини, що застосовуються на нафто- та газопромислах для промивки свердловин, мають властивості неньютонівських рідин. Тому коефіцієнт  $k$  необхідно обчислювати через значення дотичні напруження у течії Куетта між двома циліндричними поверхнями. При цьому в'язкість промивної рідини з части-

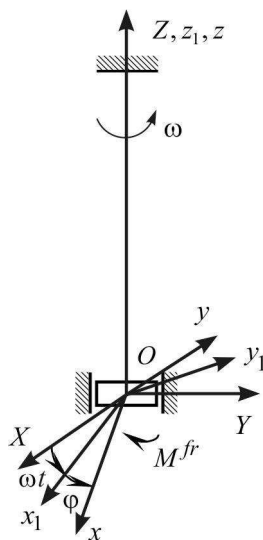


Рис. 2. Розрахункова схема бурильної колони

нками роздрібненої породи, як і для будь-якої дисперсної системи, залежить від таких основних факторів:

- концентрації дисперсної фази;
- в'язкості рідкої фази;
- розміру і конфігурації частинок;
- агрегації частинок;
- розчинених в рідкому середовищі макромолекулярних речовин;
- вмісту емульгаторів і поверхнево-активних речовин.

У реології розрізняють так звані ньютонівські рідини, які характеризуються тим, що при незмінній температурі їх в'язкість залишається постійною незалежно від швидкості зсуву, при якій проводиться вимірювання в'язкості [16]. Для них дотична напруга зсуву  $\tau$  визначається через динамічний коефіцієнт в'язкості  $\mu$  та швидкість зсуву  $\dot{\epsilon} = du/dy$  по формулі

$$\tau = \mu \cdot \dot{\epsilon} = \mu du/dy. \quad (2)$$

При ньютонівській течії рідких середовищ швидкість зсуву завжди прямо пропорційна дотичній напрузі зсуву.

У природі величезна кількість рідин не підкоряється закону течії рідини Ньютона, тому що їх в'язкість залежить від швидкості зсуву (полімерні розчини, суспензії, емульсії, мастила). Ці види рідин відносяться до класу неньютонівських, для яких зв'язок між градієнтом швидкості зсуву та дотичною напругою описується нелінійними складними залежностями.

Унаслідок взаємодії частинок неньютонівські рідини мають складну будову та тією чи іншою мірою структуровані залежно від характеру взаємодії складових компонентів.

Розрізняють декілька видів неньютонівських рідин. В прикладних дослідженнях широкого розповсюдження набули моделі пластичної рідини (рідина або тверде тіло Бінгама). У таких видах рідин потрібно докласти деяке початкове зусилля для того, щоб почалася їх течія, після чого залежність у координатах напруга зсуву – швидкість зсуву стає прямолінійною. В'язкість таких рідин при низьких швидкостях зсуву дуже велика, а при зростанні цього параметра швидко зменшується і характеризується двома константами, а саме: пластичною в'язкістю і граничною напругою зсуву. Прикладом таких систем є пластичне тверде тіло, наприклад, мастило, яке характеризується текучістю тільки при напрузі зсуву, що перевищує граничну межу текучості  $\tau_0$ .

Задовольняючись найпростішим випадком плоского зсувного прямолінійного руху вздовж осі  $Ox$  зі швидкістю зсуву  $\dot{\epsilon} = du/dy$ , приведемо реологічне рівняння такої в'язкопластичної рідини в формі:

$$\tau = \tau_0 + \mu' \dot{\epsilon} \text{ при } \tau > \tau_0, \quad (3)$$

де  $\tau_0$  - граничне напруження зсуву,  $\mu'$  - динамічний коефіцієнт структурної в'язкості (точка над літерою – похідна за часом). При  $\tau < \tau_0$  текучість відсутня, тобто середовище поводить ся як тверде тіло.

Суттєво нелінійними властивостями володіють псевдопластичні рідини, у яких в'язкість змінюється відповідно до швидкості зсуву і будь-яка зміна в'язкості характеризує так звану в'язкість, що здається тільки для даної швидкості зсуву. В'язкість псевдо пластичної рідини здається високою при низьких швидкостях зсуву і зменшується при збільшенні швидкості зсуву. Такими властивостями характеризуються каучуки і пластичні матеріали, що містять анізотропні несиметричні компоненти, взаємодія між якими ослаблюється при зростанні швидкості зсуву.

Псевдопластичні рідини позбавлені граничного напруження текучості, але їх приведена в'язкість визначається коефіцієнтом, що залежить від швидкості зсуву. Такі «нелінійні» рідини (суспензії асиметричних часток, розчини високополімерів) підпорядковуються реологічним рівняння типу (Оствальд, Рейнер)

$$\tau = k \dot{\epsilon}^n, \quad (4)$$

де  $k$  і  $n < 1$  майже постійні в широких інтервалах напружень та швидкостей деформацій, а приведений коефіцієнт в'язкості  $\tau / \dot{\epsilon} = k \dot{\epsilon}^{n-1}$  зменшується зі зростанням  $\dot{\epsilon}$ .

Відсутність граничного напруження наближує псевдопластичні рідини до так званих «ділатантним» рідинам, у яких, на відміну від псевдопластичних, приведена в'язкість зі збільшенням напруження збільшується ( $n > 1$ ). Така закономірність характерна для суспензій твердих частинок при їх високих концентраціях, а також крохмальних клейстерів, які не можна віднести до концентрованих суспензій твердих частинок.

Вибір законів для дотичних напружень у вигляді відношень (3),(4) при  $n < 1$  та  $n > 1$  суттєво ускладнює рівняння крутильних коливань (1). Однак якщо врахувати, що коливання долота та БК відбуваються в околі стану їх простого обертання з кутовою швидкістю  $\omega$ , де обертальних рух рідини наближається до руху Куетта між двома обертовими циліндрами, то рівняння (1) можна спростити. Для цього достатньо лінеаризувати це рівняння в околі розглянутого стану обертання з розглянутою швидкістю  $\omega$ , і врахувати відношення (2) для ньютонівської рідини, однак коефіцієнт в'язкості  $\mu$  в формулі (2) обчислювати при вибраній величині  $\omega$ . При такій постановці задачі рівняння (1) стає лінійним:

$$\rho I_z \partial^2 \varphi / \partial t^2 + \mu d \varphi / \partial t - G I_z \partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0, \quad (5)$$

однак коефіцієнт  $\mu$  в рівнянні обирається в залежності від швидкості  $\omega$ .

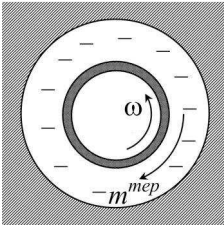


Рис. 3. До розрахунку коефіцієнту в'язкого тертя і моменту  $m^{mep}$

Для того щоб вивести граничні умови для рівняння (5) на краях  $z=0$  та  $z=L$ , необхідно розглянути динаміку долота в точці  $z=0$ , і врахувати, що при  $z=L$  колона не защемлена, тобто  $\varphi(L)=0$ . Він визначається шляхом обчислення гідродинамічного моменту  $m^{mep}$  розподілених сил тертя при обертанні внутрішнього циліндру в порожнині зовнішнього циліндру, заповненого рідиною (рис. 3).

Якщо умовно відокремити долото від БК і розглянути його динамічну рівновагу, то рівняння пружних торсійних коливань маятника можна представити в формі принципу Д'Аламбера

$$M^{in} + M^{mep} + M^{np} = 0. \quad (6)$$

Тут  $M^{in} = M^{in}(\ddot{\varphi})$  – момент сил інерції, що діють на долото;  $M^{mep} = M^{mep}(\omega + \dot{\varphi})$  – момент сил тертя між долотом і породою, яка руйнується;  $M^{np} = M^{np}(\varphi)$  – момент сил пружності, що діють на долото при закручуванні БК. Точками над  $\varphi$  позначено диференціювання по часу  $t$ .

Величина  $M^{in}$  підраховується за формулою:

$$M^{in} = -J \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (7)$$

де  $J$  – момент інерції долота. Момент  $M^{np}$  визначається рівністю

$$M_{np} = GI_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (8)$$

де  $G$  – модуль пружності матеріалу БК при зсуві,  $I_z$  – момент інерції площі перерізу БК відносно осі  $Oz$ .

Задача про визначення моменту  $M^{mep}$  є більш складною. В залежності від трибологічних властивостей матеріалів тіл, що стискаються, і умов їх фрикційної взаємодії вибирають різні моделі зв'язку між  $M^{mep}$  і швидкістю  $\omega + \dot{\varphi}$  їх відносного руху. Їх формулювання виконується окремо.

Виконав заміни (7), (8), рівняння (6) перепишемо в формі

$$J \cdot \partial^2 \varphi / \partial t^2 - M^{mep}(\omega + \partial \varphi / \partial t) + GI_z \cdot \partial \varphi / \partial z = 0. \quad (9)$$

Це диференціальне рівняння з частковими похідними має другий порядок і просту структуру.

Його розв'язок при заданому  $\omega$  залежить від функції  $M^{mep}(\omega+\phi)$ . Він може бути побудований чисельно для конкретних початкових умов відносно  $\phi(0)$ .

На основі описаної методики розроблено комплекс програм, що дозволяє моделювати явища самозбудження коливань в широких діапазонах характерних параметрів.

**3. Результати розрахунків.** По розробленій методиці виконано комп'ютерне моделювання автоколивань БК довжиною  $L=1000\text{ м}$  при значенні коефіцієнта тертя  $k=100\text{ Н}\cdot\text{с}$ . Розрахунки виконані за допомогою неявної кінцево-різницевої схеми інтегрування по часу. Крок інтегрування взято рівним  $\Delta t=7,5\cdot 10^{-4}\text{ с}$ .

В результаті досліджень встановлено, що урахування дисипативних властивостей рідкого середовища, в якому обертається колона, призводить до звуження інтервалу значень  $\omega$  при яких генеруються автоколивання.

Так, для розглянутого випадку виявилось, що біфуркація народження циклу реалізується при  $\omega_n=0,725\text{ рад/с}$ , а біфуркація втрати циклу – при  $\omega_g=3,45\text{ рад/с}$ . Відмітимо, що у випадку неврахування дисипативних властивостей рідкого середовища вказані значення складають  $\omega_n=0,71\text{ рад/с}$  і  $\omega_g=3,775\text{ рад/с}$ .

На рис. 4 приведена діаграма зміни кута  $\phi$  крутильних коливань долота від часу  $t$ . Вважалось, що при  $t < 0$  колона оберталась з кутовою швидкістю  $\omega=0,725\text{ рад/с}$ , проте долото було виведено із контакту з породою, яка руйнується. Потім, при  $t=0$  долото вводилось в контакт з породою, після чого починався перехідний процес пружного закручування колони, що змінився її стаціонарними автоколиваннями з періодом  $T=45,8\text{ с}$ . Ці коливання мають релаксаційний характер, оскільки містять зони з майже ломаними обрисами функції  $\phi(t)$ . На рис. 5

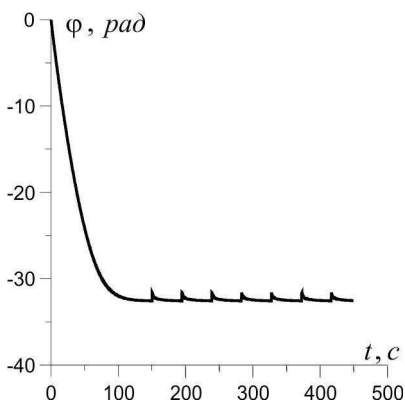


Рис. 4. Форма релаксаційних автоколивань долота при  $\omega_n=0,725\text{ рад/с}$

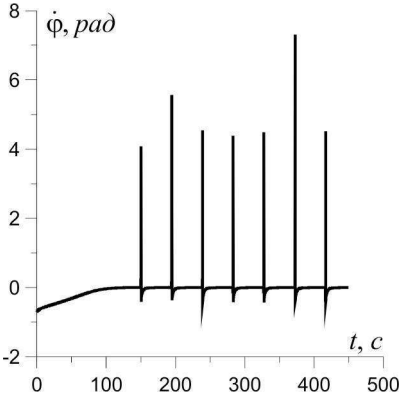


Рис. 5. Графік зміни кутової швидкості долота при  $\omega_n = 0,725 \text{ рад/с}$

представлений графік зміни кутової швидкості колони  $\dot{\phi}(t)$ . Для нього характерна наявність зон залипання, при яких  $\dot{\phi}(t)$  приблизно рівне нулю, і досить коротких відрізків часу на яких виникають гострі піки.

В стані втрати циклу при  $\omega = 3,45 \text{ рад/с}$  реалізуються більш високочастотні коливання з періодом  $T = 7,1 \text{ с}$  (рис. 6). Для встановлення форми цих автоколивань на рис. 7 вони представлені в збільшеному масштабі по часу.

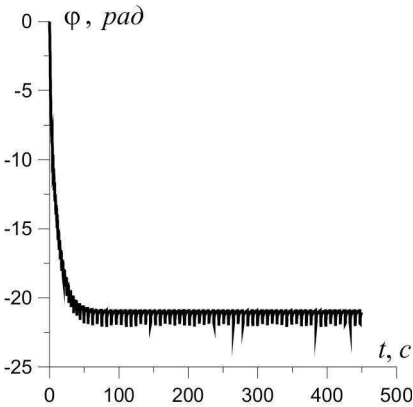


Рис. 6. Форма автоколивань долота при  $\omega_s = 3,45 \text{ рад/с}$

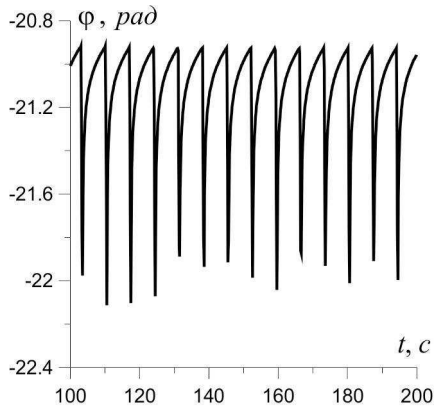


Рис. 7. Фрагмент автоколивань долота в збільшеному масштабі при  $\omega_s = 3,45 \text{ рад/с}$

Відмітимо, що вони також мають релаксаційний характер і містять ділянки швидких і повільних рухів. Такі режими руху представляють значну небезпеку для системи в реальних умовах, оскільки можуть супроводжуватись відкручуванням долота, викрошуванням з нього алмазних різців і загальним руйнуванням колони.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *В.И. Гуляев, О.В. Глушакова, С.Н. Худолій.* Квантованные аттракторы в волновых моделях торсионных колебаний колонн глубокого бурения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.-2010. - №2. С. 134-147.
2. *Борщ Е.И., Вацилина Е.В., Гуляев В.И.* Спиральные бегущие волны в упругих стержнях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела- 2009. - №2. С. 143-149.
3. *V.Gulyayev, O.Glushakova,* Large-scale and small-scale self-excited torsional vibrations of homogeneous and sectional drill strings // Interaction and Multiscale Mechanics. – V. 4, №4. – P. 139 – 152.
4. *V.I.Gulyayev, S.N. Hudoliy, O.V. Glushakova.* Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment.// Journal of Multi-body Dynamics. – V.225, - P. 139 – 152.
5. *Gulyayev V.I., Borshch O.I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011. – V.78, - P. 759-764.
6. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V.* The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – 67. – P.140-148.
7. *Gulyayev V.I., Hudoly S.N., Glovach L.V.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.
8. *Gulyayev V.I., Khudoliy S.V., Andrusenko E.N.* Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes // Interaction and Multiscale Mechanics. – 2011. – V.4. – No.1. – P.1-16.
9. *Ford Brett J.* The genesis of torsional drillstring vibrations // SPE Drilling Engineering. – 1992, v.7, September. – P. 168-174.
10. *Рабинович М.К., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн – М.: Наука, 1984.-432с.
11. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309с.
12. *Лодж А.* Эластичные жидкости. – М.: Наука, 1969. – 463с.
13. *Уилкинсон У.Л.* Неньютоновские жидкости. – М.: Мир, 1964. – 318с.
14. *Костецкий Б.И., Натансон М.Э., Бершадений Л.И.* Механико-химические процессы при граничном трении. – М.: Наука, 1972. – 173 с.
15. *Мирзаджанадзе А.Х., Мирзоян А.А., Гевинян Г.М., Сейд-рза М.К.* Гидравлика глинистых и цементных растворов. – М.: Недра, 1966. – 386с.
16. *Дмитриченко Н.Ф.* Эластогидродинамика: теория и практика. – Львів, Львівська політехніка, 2000. – 224 с.

Стаття надійшла до редакції 14.02.2013 р.



*Гайдайчук В.В., Глушакова О.В., Глазунов С.Н.*

### **ТОРСИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В ЖИДКОЙ СРЕДЕ**

Поставлена задача про самовозбуждение крутильных автоколебаний бурильной колонны в цилиндрической полости вертикальной скважины, содержащей жидкую среду. Рассмотрены модели механического взаимодействия колонны с вязкой жидкостью. Разработана модель крутильных автоколебаний однородной бурильной колонны в форме осцилляционного маятника. Сформулировано разрешающее нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными, позволяющее описывать колебания долота бурильной колонны с учетом сил вязкого трения. Предложен алгоритм численного интегрирования этого уравнения, как по пространственной, так и временной координатам.

*Gaidaichuk V.V., Glushakova O.V., Glazunov S.N.*

### **TORSIONAL AUTO-VIBRATION OF A DRILL STRING IN LIQUID MEDIUM**

The problem about self-excitation of torsion vibration of a drill string in a vertical cylindrical cavity of a bore-hole with liquid medium is stated. The models of mechanical interaction of the drill string with viscous liquid are considered. The oscillation model of torsional autovibration of homogeneous drill string in the form of oscillation pendulum is elaborated, the constitutive nonlinear differential equation with partial derivatives is formulated which permits one to describe vibrations of the drill string bit with allowance made for viscous friction. the algorithm for numeric integration of this equation by spatial and time variables is proposed.

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук**О.О. Лук'яненко**, канд.техн.наук**О.В. Костіна**, канд. техн. наук**О.В. Герашенко**, канд. техн. наук

## **ВПЛИВ НАВАНТАЖЕННЯ НА ЧАСТОТИ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СКЛАДНОЇ ОБОЛОНКОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ**

Виконано математичне моделювання динаміки складної оболонкової конструкції при дії нерівномірно розподіленого навантаження від ваги рідини. Розрахункова дискретна динамічна модель конструкції побудована за допомогою методів скінченних елементів та можливих переміщень, які реалізовані в програмному комплексі NASTRAN. Виконано модальний аналіз навантаженої конструкції за допомогою методу Ланцоша. Оцінено вплив навантаження на власні коливання конструкції. Порівняні частоти та форми власних коливань конструкції при дії ваги рідини різного об'єму.

**Вступ.** Розвиток комп'ютерного моделювання на основі методу скінченних елементів обумовив інтенсивну розробку чисельних методів для розв'язання задач динаміки, стійкості, геометричної та фізичної нелінійності конструкцій, удосконалення скінченних елементів та програмних комплексів [1-4]. Можливість формувати модель конструкції, процеси навантаження та аналізувати поведінку конструкції мають існуючі програмні комплекси скінченноелементного аналізу: МИРАЖ, ЛИРА, SCAD, MOHOMAX, ANSYS, Cosmos і т.п. Програмний комплекс MSC.NASTRAN [5], який застосований в роботі для дослідження динамічної поведінки складної оболонкової конструкції, відомий в сучасному світовому проектуванні будівельних об'єктів. За допомогою математичних методів теорії пружності та математичної фізики, які реалізовані в комплексі, відкриваються широкі можливості комп'ютерного моделювання різних динамічних процесів складних конструкцій. Динаміка оболонкових тонкостінних конструкцій, які є системами з нескінченим числом ступенів вільності, складна. Кількість частот власних коливань є нескінченим. Якщо відомий характер власних коливань конструкції, то можна говорити про її внутрішні властивості, які мають місце при зовнішніх динамічних впливах. Небезпечним для тонкостінних оболонкових конструкцій є поєднання статичних навантажень з різними типами динамічних навантажень. Тому важливо врахувати вплив статичного навантаження на частоти власних коливань конструкції. В роботі виконаний модальний аналіз складної оболонкової конструкції із врахуванням її напружено-деформованого стану, який отриманий за допомогою нелінійно-

го статичного розрахунку конструкції при дії навантаження, яке є нерівномірно розподіленим тиском від ваги рідини різного об'єму. Оцінено вплив навантаження на власні частоти коливань конструкції. Отримані результати дадуть змогу в подальшому дослідити поведінку складної оболонкової конструкції при різних динамічних впливах.

### **1. Розрахункова математична модель конструкції**

Складна оболонкова конструкція представляє собою систему двох циліндричних оболонок, які з'єднані трубопроводами. Внутрішня оболонка приймається висотою 5,96 м і діаметром 6,63 м, зовнішня – висотою 6,58 м і діаметром 6,96 м. Товщина стінок оболонок складає 5 мм. Обидві оболонки виготовлені зі сталі Ст.3пс.2. Труби, які з'єднують оболонки, мають довжину 0,16 м і діаметр 7,62 см. Розрахункова дискретна модель конструкції містить 2692 двомірних плоских скінченних елементів зі шістьма степенями вільності, кількість вузлів дорівнює 2575. Дві труби, що з'єднують оболонки, моделюються стержневими елементами. У вузлах нижньої кромки внутрішньої оболонки обмежені переміщення по твірній і радіусу, повороти навколо радіусу і дотичної. Вузли нижньої кромки зовнішньої оболонки жорстко закріплені.

### **2. Частоти власних коливань навантаженої конструкції**

Для визначення частот і форм власних коливань навантаженої складної оболонкової конструкції спочатку було виконано її нелінійний статичний розрахунок із використанням покрокового методу Ньютона-Рафсона. Потім за допомогою методу Ланцоша виконаний модальний аналіз навантаженої конструкції. У зв'язку зі щільним розташуванням частот власних коливань оболонкових конструкцій в роботі досліджувались перші 40-к форм та частот коливань при дії ваги рідини, яка займає 1/4, 1/2, 3/4 та 4/4 частину об'єму внутрішньої оболонки. В таблицях 1-4 представлені частоти власних коливань навантаженої конструкції, кількість хвиль вздовж кіл оболонок та твірної зовнішньої оболонки.

При дії ваги палива, що складає 1/4 частину внутрішньої оболонки, частоти навантаженої конструкції мають щільно розташовані значення і лежать в діапазоні від 15,1995 Гц до 29,1655 Гц. На цих частотах спостерігаються коливання як з регулярними так і нерегулярними деформаціями внутрішньої і зовнішньої оболонок одночасно, або коливання з деформаціями лише однієї з оболонок. Мають місце локальні деформації в місцях з'єднання оболонок. На власній частоті системи 18,4430 Гц вперше відбуваються коливання з регулярними деформаціями внутрішньої оболонки, зовнішня залишається незмінною. Власна частота ненавантаженої системи, при якій спостерігаються коливання лише внутрішньої оболонки, має менше значення і складає 15,8081 Гц [4]. Тобто, власна частота системи

збільшується за рахунок навантаження. Деформований стан при коливанні навантаженої внутрішньої оболонки відрізняється тим, що вздовж кола кількість півхвиль складає 11, а це на 1 півхвилю більше порівняно з деформацією оболонки без врахування навантаження. Вздовж твірної має місце одна півхвиля як для ненавантаженої так і навантаженої внутрішньої оболонки. На більш високих частотах 29,0792 Гц та 29,1655 Гц вздовж твірної зовнішньої оболонки спостерігаються дві півхвилі.

Таблиця 1

Частоти власних коливань конструкції при заповненні рідиною 1/4 частини внутрішньої оболонки					
№	Частота, Гц	Кількість хвиль (внутр./зовн./твірна зовн.)	№	Частота, Гц	Кількість хвиль (внутр./зовн./ твірна зовн.)
1	15,1995	-/9/1	21	20,5967	12/-/1
2	15,2250	-/*/1	22	20,6084	12/*/1
3	15,2540	-/10/1	23	21,1157	-/13/1
4	15,3947	*/*/1	24	21,1935	*/12/1
5	16,3930	-/11/1	25	21,4505	7/-/1
6	16,4206	*/*/1	26	21,4893	7/*/1
7	16,4505	-/8/1	27	23,5358	13/-/1
8	16,6137	*/-/1	28	23,5445	13/*/1
9	17,2726	*/12/1	29	23,9039	-/6/1
10	17,2813	*/-/1	30	23,9657	*/6/1
11	17,2815	*/-/1	31	24,4304	-/14/1
12	17,3124	*/-/1	32	24,5001	*/14/1
13	18,4024	-/12/1	33	25,7334	6/-/1
14	18,4430	11/12/1	34	25,7900	6/*/1
15	18,4515	11/*/1	35	27,1539	14/-/1
16	18,5029	9/12/1	36	27,1622	14/*/1
17	18,6361	8/-/1	37	28,2943	-/15/1
18	18,6658	8/*/1	38	28,3357	*/15/1
19	19,2327	-/7/1	39	29,0792	-/12/2
20	19,3299	*/7/1	40	29,1655	-/*/2

\* - нерегулярні деформації; - - деформації відсутні.

Таблиця 2

Частоти власних коливань конструкції при заповненні рідиною 1/2 частини внутрішньої оболонки					
№	Частота, $Gz$	Кількістьхвиль (внутр./зовн./ твірна зовн.)	№	Частота, $Gz$	Кількістьхвиль (внутр./зовн./ твірна зовн.)
1	15,1995	-/9/1	21	21,1157	-/13/1
2	15,2249	-/*/1	22	21,1976	*/13/1
3	15,2540	-/10/1	23	22,6373	12/-/1
4	15,3964	*/*/1	24	22,6528	12*/1
5	16,3930	-/11/1	25	22,6788	7/-/1
6	16,4206	*/*/1	26	22,7078	7*/1
7	16,4505	-/8/1	27	23,9039	-/6/1
8	16,6216	*/*/1	28	23,9655	*/6/1
9	18,4024	-/12/1	29	24,4304	-/14/1
10	18,4839	*/12/1	30	24,5005	*/14/1
11	19,2179	9/-/1	31	25,3802	13/-/1
12	19,2213	9*/1	32	25,3978	13*/1
13	19,2327	-/7/1	33	26,6356	6/-/1
14	19,3227	*/7/1	34	26,6840	6*/1
15	19,4154	10*/1	35	28,2943	-/15/1
16	19,4458	10*/1	36	28,3352	*/15/1
17	20,2388	8/-/1	37	28,7867	14/-/1
18	20,2590	8*/1	38	28,7952	14*/1
19	20,6134	11/-/1	39	29,0323	-/12/2
20	20,6296	11*/1	40	29,1641	-/*/2

Власні частоти навантаженої конструкції при дії ваги палива, що складає 1/2 частину внутрішньої оболонки, також мають щільно розташовані значення і лежать в діапазоні від 15,1995  $Gz$  до 29,1641  $Gz$ . Коливання спостерігаються одночасно як з регулярними так і з нерегулярними деформаціями внутрішньої і зовнішньої оболонок, або з деформаціями лише однієї з оболонок. Локальні деформації стінок оболонок спостерігаються в місцях їх з'єднання. На власній частоті системи 19,2179  $Gz$  вперше деформується лише внутрішня оболонка, зовнішня залишається незмінною. Власна частота системи збільшується за рахунок навантаження. 9 півхвиль спостерігаються вздовж кола, вздовж твірної – одна півхвиля.

Таблиця 3

Частоти власних коливань конструкції при заповненні рідиною 3/4 частини внутрішньої оболонки					
№	Частота, Гц	Кількість хвиль (внутр./зовн./ твірна зовн.)	№	Частота, Гц	Кількість хвиль (внутр./зовн./твірна зовн.)
1	15,1995	-/9/1	21	25,4051	9/-/1
2	15,2250	-*/1	22	25,1248	9*/1
3	15,2540	-/10/1	23	25,9799	10/-/1
4	15,3977	*/*/1	24	25,9999	10*/1
5	16,3930	-/11/1	25	26,2297	7/-/1
6	16,4206	-*/1	26	26,2527	7*/1
7	16,4505	-/8/1	27	27,4052	11/-/1
8	16,6249	-*/1	28	27,4265	11*/1
9	18,4024	-/12/1	29	28,2943	*/*/15/1
10	18,4873	*/*/12/1	30	28,3350	*/*/15/1
11	19,2327	-/7/1	31	29,0099	6*/1
12	19,3255	-*/1	32	29,0510	6*/1
13	21,1157	-/13/1	33	29,0792	-/12/2
14	21,1939	*/*/13/1	34	29,1616	*/*/1
15	23,9039	-/6/1	35	29,2941	*/*/12/1
16	23,9617	*/*/6/1	36	29,3109	12*/2
17	24,4304	-/14/1	37	29,3670	*/*/13/1
18	24,4953	*/*/14/1	38	29,5336	*/*/1
19	25,0497	8/-/1	39	30,1204	-/11/2
20	25,0655	8*/1	40	30,2727	*/*/1

При дії ваги палива, що складає 3/4 частину внутрішньої оболонки, частоти навантаженої конструкції щільно розташовані в діапазоні від 15,1995 Гц до 30,2727 Гц. Власні коливання відбуваються з регулярними і нерегулярними деформаціями окремо внутрішньої і зовнішньої оболонок. В місцях кріплення патрубків спостерігаються локальні деформації стінок оболонок. Внутрішня оболонка вперше деформується на частоті 25,0497 Гц. Бачимо, що власна частота системи надалі збільшується за рахунок збільшення навантаження. Вздовж кола мають місце 8 півхвиль, вздовж твірної - 1 півхиля.

Таблиця 4

Частоти власних коливань конструкції при повному заповненні рідиною внутрішньої оболонки					
№	Частота, <i>Гц</i>	Кількість хвиль (внутр./зовн./ твірна вн.)	№	Частота, <i>Гц</i>	Кількість хвиль (внутр./зовн./ твірна вн.)
1	15,1995	-/9/1	21	29,0793	-/24/2
2	15,2250	-/*/1	22	29,1663	-/*/2
3	15,2540	-/10/1	23	29,3670	-/27/2
4	15,3995	*/*/1	24	30,8376	-/*/2
5	16,3930	-/11/1	25	30,8529	-/23/2
6	16,4206	-/*/1	26	30,8613	*/*/2
7	16,4505	-/8/1	27	30,8376	7/-/1
8	16,6278	-/*/1	28	30,8529	7/*/1
9	18,4023	-/12/1	29	30,8613	-/28/2
10	18,4886	*/12/1	30	31,0184	-/*/2
11	19,2327	-/7/1	31	31,1892	8/5/1
12	19,3275	-/*/1	32	31,2373	/0/0/
13	21,1157	-/13/1	33	31,2625	8/-/1
14	21,1957	*/*/1	34	31,3060	8/*/1
15	23,9038	-/6/1	35	32,0916	6/*/1
16	23,9647	*/6/1	36	32,1282	6/*/1
17	24,4304	-/14/1	37	32,6022	-/0/2
18	24,5006	-/14/1	38	32,6732	-/*/1
19	28,2943	-/15/1	39	32,6884	-/*/1
20	28,3352	*/15/1	40	32,7911	*/*/1

При повному заповненні паливом внутрішньої оболонки частоти навантаженої конструкції щільно розташовані в діапазоні від 15,1995 *Гц* до 32,7911 *Гц*. Мають місце коливання з регулярними і нерегулярними деформаціями внутрішньої і зовнішньої оболонок одночасно. Також спостерігаються деформації лише однієї з оболонок. Локальні деформації бачимо в місцях з'єднання оболонок. Внутрішня оболонка вперше деформується на частоті 30,8376 *Гц*. Власна частота системи знов збільшується за рахунок збільшення ваги рідини. На цій частоті вздовж кола мають місце 7 півхвиль, вздовж твірної - 1 півхвиля.

На рис. 1 представлені графіки, які показують зростання частот власних коливань оболонкової конструкції при дії ваги рідини, яка займає різний об'єм внутрішньої оболонки.

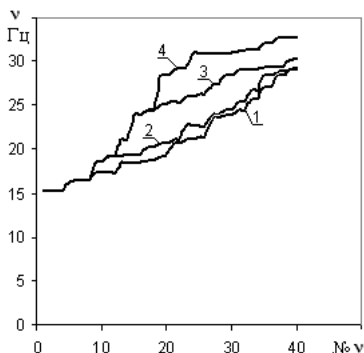


Рис. 1 Частоти власних коливань навантаженої складної конструкції (при заповненні рідиною 1 – 1/4, 2 – 1/2, 3 – 3/4, 4– 4/4 об'єму внутрішньої оболонки)

В табл. 4 наведені частоти власних коливань конструкції при дії різної ваги рідини, при яких вперше спостерігається деформація стінок внутрішньої оболонки або зовнішньої.

Модальний аналіз складної оболонкової конструкції показав, що при дії розподіленого навантаження на внутрішню оболонку конструкції, власна частота збільшується у 1,17-1,95 разів відповідно зі збільшенням ваги рідини. Це свідчить про те, що навантаження збільшує жорсткість системи, а при параметричних коливаннях може їх стабілізувати. Коливання констру-

кції, при яких вперше спостерігається деформація лише зовнішньої оболонки, відбуваються при дії різних об'ємів рідини на однаковій частоті 15,1995 Гц. Ця частота більше у 1,08 разів за частоту ненавантаженої конструкції.

Таблиця 4

Об'єм внутрішньої оболонки, що заповнений рідиною	Частоти власних коливань навантаженої конструкції, на якій вперше спостерігаються деформації оболонок	
	внутрішньої	зовнішньої
0	15,8081	14,0568
1/4	18,4430	15,1995
1/2	19,2179	15,1995
3/4	25,0497	15,1995
4/4	30,8376	15,1995

На рис. 2 представлені форми коливань складної оболонкової конструкції на частотах, що наведені в табл. 4.

Колівання складної конструкції з нерегулярними та локальними деформаціями зовнішньої оболонки, які відповідають 2-ій формі власних коливань конструкції при заповненні рідиною 1/2 об'єму внутрішньої оболонки, представлені на рис. 3.



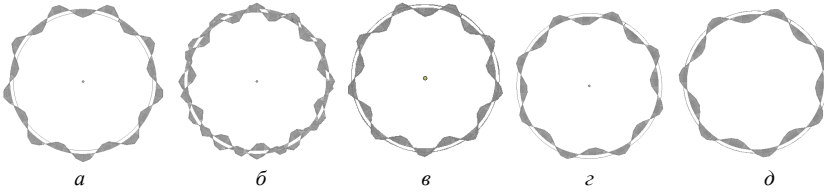


Рис. 2. Форми власних коливань складної оболонкової конструкції *а* - 15,1995 Гц; *б* - 18,4430 Гц; *в* - 19,2179 Гц; *г* - 25,0497 Гц; *д* - 30,8376 Гц

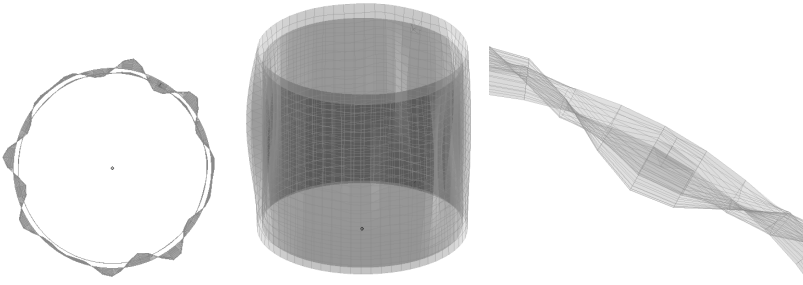


Рис. 3

На рис. 4 представлена 10-а форма власних коливань конструкції з нерегулярними деформаціями внутрішньої оболонки при заповненні рідиною 1/4 об'єму внутрішньої оболонки.

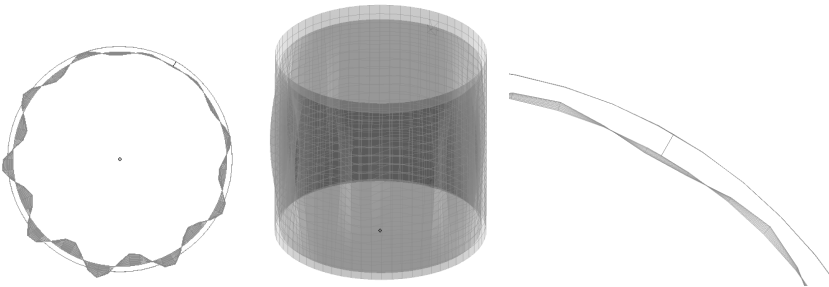


Рис. 4

На рис. 5 показана 40-а форма власних коливань конструкції при заповненні рідиною 3/4 об'єму внутрішньої оболонки з регулярними деформаціями зовнішньої оболонки і двома півхвилями вздовж твірної.

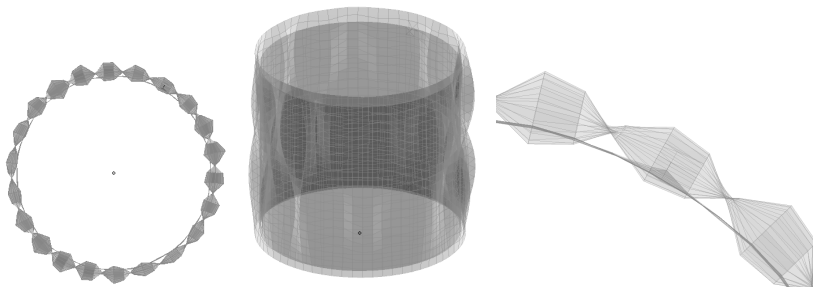


Рис. 5

Результати модальних аналізів системи з'єднаних оболонок без урахування [4] та з урахуванням навантаження показали, що власні частоти та форми коливань відрізняються. Має місце збільшення частот власних коливань конструкції за рахунок збільшення навантаження від ваги рідини на внутрішню оболонку конструкції. Коливання в обох випадках відбувається як з регулярними так і нерегулярними деформаціями оболонок. Часто спостерігаються локальні деформації стінок обох оболонок в місцях кріплення труб.

**Висновок.** Вплив навантаження на частоти та форми власних коливань складної оболонкової конструкції суттєвий і повинен бути врахований при дослідженні поведінки даної конструкції при дії різних динамічних навантажень.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Ворона Ю.В.* Динаміка споруд. – К.: ПАТ Віпол, 2012. – 342 с.
2. *Гоцуляк Є.О., Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Гаран І.Г.* Побудова геометрично нелінійних МСЕ моделей для тонких оболонок довільної форми та методи їх розрахунку// Theoretical Foundation of Civil Engineering: – Міжнар. наук. журнал. – Дніпр.: ПДАБА, 2010. – С.107-114.
3. *Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Шах В.В.* Оцінка рівня конструкційної безпеки нафтоналивного резервуара// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.86. – К.: КНУБА, 2010. – С. 22 –29.
4. *Киричук О.А., Лук'янченко О.О.* Динамічний аналіз системи двох з'єднаних оболонок// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.90. – К.:КНУБА, 2012. – С. 40 –46.
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с.

*Стаття надійшла до редакції 27.05.2013 р.*

*Баженов В.А., Лукьянченко О.А., Костина Е.В., Геращенко О.В.*

### **ВЛИЯНИЕ НАГРУЗКИ НА ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОЖНОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ**

Выполнено математическое моделирование динамики сложной оболочечной конструкции при действии неравномерно распределенной нагрузки от веса жидкости. Расчетная дискретная динамическая модель конструкции построена с помощью методов конечных элементов и возможных перемещений, которые реализованы в программном комплексе NASTRAN. Выполнен модальный анализ нагруженной конструкции с помощью метода Ланцоша. Оценено влияние нагрузки на собственные колебания оболочечной конструкции. Сравнены частоты и формы собственных колебаний конструкции при действии веса жидкости разного объема.

*Bazhenov V.A., Lukianchenko O.A., Kostina E.V., Gerashchenko O.V.*

### **IMPACT LOADS FREQUENCY OF NATURAL OSCILLATIONS OF COMPLEX SHELL STRUCTURES**

The mathematical modeling of the dynamics of complex shell structure under the action of uniformly distributed load on the weight of the liquid. Estimated discrete dynamical model of the design is built using finite element methods and possible displacements that are implemented in the software package NASTRAN. Modal analysis loaded structure using the Lanczos method is performed. The effect of pressure on the natural oscillations of a complex shell structure is assessed. The frequency and form of natural oscillations of structures under the weight of liquid in various capacities are compared.

УДК 539.3

С.О. Пискунов, д-р. техн. наук,  
 І.І. Солодей, д-р. техн. наук,  
 Ю.В. Максим'юк, канд. техн. наук,  
 А.Д. Солоденко

## ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МССЕ) ПРИ ЛІНІЙНИХ РОЗРАХУНКАХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН

На основі МССЕ створений оболонковий СЕ з використанням співвідношень вісесиметричної задачі теорії пружності, яка дозволяє проводити аналіз напружено-деформованого стану вісесиметричних оболонок. Проведені чисельні дослідження для обґрунтування достовірності отриманих результатів при використанні по товщині оболонки одного СЕ, а також показано що його ефективність не поступається оболонковим СЕ.

**Вступ.** Проблема використання СЕ, що базуються на співвідношеннях теорії пружності для розрахунку тонкостінних об'єктів знайшла відображення в багатьох публікаціях, детальний огляд яких міститься в монографії [2]. Його аналіз свідчить, що найбільш актуальним напрямком є розробка СЕ, які дозволяли б розраховувати з позицій теорії пружності тонкостінні об'єкти, не поступаючись по ефективності оболонковим елементам. В роботі [4] наведені основні засади концепції такого елемента. В даній роботі основна увага спрямована на їх конкретизацію для розрахунку вісесиметричних оболонок і пластин і обґрунтуванню достовірності та ефективності отриманих результатів.

**1. Основні співвідношення вісесиметричної задачі теорії пружності для розрахунку оболонок і пластин.** Розглянемо в базисній круговій циліндричній системі координат  $Z^{\alpha}$  ( $\alpha=1,2$ )

вісесиметричну оболонку напружено деформований стан якої описується в місцевій криволінійній системі координат  $x_{\alpha\beta}$  органічно пов'язаною з геометрією оболонки (рис. 1).

Будемо вважати, що в кожній точці меридіонального перетину зв'язок між базисною і місцевою системою координат однозначно визначається тензором перетворень,

$$\text{де } z_{\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}.$$

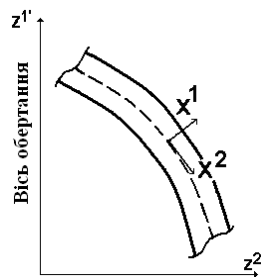


Рис. 1

Зв'язок між переміщеннями  $u^{\gamma}$  в базисній системі координат і компонентами тензора деформацій  $\epsilon_{\alpha\beta}$  і  $\epsilon_{33}$  визначаються відомими співвідношеннями Коші:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha}), \quad \epsilon_{33} = z' u'^2. \quad (1)$$

Зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}^e, \quad (2)$$

де  $C^{ijkl}$  - тензор пружних констант.

Відповідно до статичних гіпотез теорії оболонок напруження обтіснення по товщині оболонок повинне дорівнювати 0.

$$\sigma_{11} = 0. \quad (3)$$

Виходячи з цього визначаються компоненти тензора пружних констант  $C^{11\alpha\beta}$  і  $C^{1133}$  на основі їх корекції:

$$\sigma^{11} = C^{1111} \epsilon_{11} + C^{1112} \epsilon_{12} + C^{1122} \epsilon_{22} + C^{1133} \epsilon_{33} = 0, \quad (4)$$

звідки визначимо  $\epsilon_{11}$ :

$$\epsilon_{11} = -\epsilon_{12} \frac{C^{1112}}{C^{1111}} - \epsilon_{22} \frac{C^{1122}}{C^{1111}} - \epsilon_{33} \frac{C^{1133}}{C^{1111}} = 0. \quad (5)$$

Виразимо деяку компоненту тензора напружень, наприклад  $\sigma^{22}$  через деформації з урахуванням виразу (5):

$$\sigma^{22} = C^{2211} \left( -\epsilon_{12} \frac{C^{1112}}{C^{1111}} - \epsilon_{22} \frac{C^{1122}}{C^{1111}} - \epsilon_{33} \frac{C^{1133}}{C^{1111}} \right) + C^{2212} \epsilon_{12} + C^{2222} \epsilon_{22} + C^{2233} \epsilon_{33}.$$

Зведемо подібні:

$$\begin{aligned} \sigma^{22} = & \left( C^{2212} - \frac{C^{2211} C^{1112}}{C^{1111}} \right) \epsilon_{12} + \left( C^{2222} - \frac{C^{2211} C^{1122}}{C^{1111}} \right) \epsilon_{22} + \\ & + \left( C^{2233} + \frac{C^{2211} C^{1133}}{C^{1111}} \right) \epsilon_{33}. \end{aligned} \quad (6)$$

У загальному вигляді при наявності умови (3) закон Гука можна записати:

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (7)$$

де  $D^{ijkl} = C^{ijkl} - \bar{C}^{ijkl}$ ,  $\bar{C}^{ijkl} = \frac{C^{ij11} C^{11kl}}{C^{1111}}$ .

**2. Оболонковий скінчений елемент загального типу.** Розглянемо скінченні елементи загального вигляду. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу SE

ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

Апроксимуємо функції переміщень у межах елемента за допомогою поліномів Лагранжа:

$$u^{\alpha'} = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n u_{(pq)}^{\alpha'} \Phi_{(pq)},$$

де

$$\Phi_{(pq)} = R_{1(p)}^{(m)} R_{2(q)}^{(n)},$$

$$R_{1(p)}^{(m)} = \frac{\prod_{l=1}^m (x^1 - x_{(l)}^1)}{(x^1 - x_{(p)}^1) \prod_{r=1}^m (x_{(p)}^1 - x_{(r)}^1 - \delta_{(p)}^{(r)})} R_{2(q)}^{(n)} \quad (8)$$

Наближені значення фізичних компонентів тензора деформацій представимо відрізком ряду Маклорена:

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = \sum_{s=0}^{M_{\alpha\beta}} \sum_{t=0}^{N_{\alpha\beta} \circ (st)} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}^{\circ (st)} \varphi^{(st)}, \quad \tilde{\epsilon}_{33} = \sum_{s=0}^{M_{33}} \sum_{t=0}^{N_{33} \circ (st)} \tilde{\epsilon}_{33}^{\circ (st)} \varphi^{(st)}.$$

де

$$\varphi^{(st)} = \frac{(x^1)^s \cdot (x^2)^t}{s! \cdot t!}$$

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}^{\circ (st)} = \left. \frac{\partial^{(s+t)} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}}{(\partial x^1)^s (\partial x^2)^t} \right|_{x^\gamma=0}, \quad \tilde{\epsilon}_{33}^{\circ (st)} = \left. \frac{\partial^{(s+t)} \tilde{\epsilon}_{33}}{(\partial x^1)^s (\partial x^2)^t} \right|_{x^\gamma=0}.$$

Згідно положень моментної схеми скінченних елементів [11] величини  $M_{\alpha\beta}$ ,  $M_{33}$ ,  $N_{\alpha\beta}$  і  $N_{33}$  знаходяться в строгій відповідності з індексами  $m$ ,  $n$  і  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$M_{11} = M_{12} = M_{21} = m-1, \quad M_{22} = M_{33} = m, \quad (8)$$

$$N_{11} = N_{12} = N_{21} = n-1, \quad N_{22} = N_{33} = n.$$

Обмежимося білінійним розподілом переміщень у межах елемента.

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + \frac{1}{4} S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (9)$$

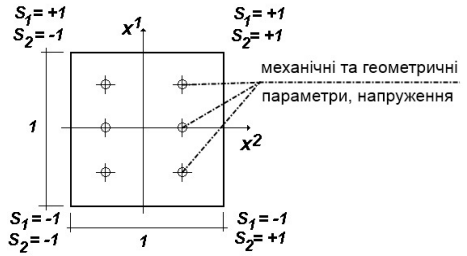


Рис. 2

де  $u_{m'(S_1S_2)}$  – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат  $x^i$ .

У цьому випадку  $m=n=1$ ,  $M_{\alpha\beta}$ ,  $M_{33}$ ,  $N_{\alpha\beta}$  і  $N_{33}$  приймають наступні значення:

$$\begin{aligned} M_{11}=M_{12}=M_{21}=0, \quad M_{22}=M_{33}=1, \\ N_{11}=N_{12}=N_{21}=0, \quad N_{22}=N_{33}=1. \end{aligned}$$

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [11] компоненти тензора деформацій скінченного елемента подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} x^\beta, \quad (10)$$

де

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0} \quad (\beta \neq i).$$

Переміщення та їх похідні в центрах елементів дорівнюють:

$$\begin{aligned} u_{\alpha'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{\alpha'(S_1S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{\beta',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{\beta'(S_1S_2)} S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{\beta',12} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{\beta'(S_1S_2)} S_1 S_2; \quad (11) \end{aligned}$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u'_{(S_1S_2)} \left( S_\alpha z'_{,\beta} + S_\beta z'_{,\alpha} \right) \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ z' u'_{2'(S_1S_2)} \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u'_{(S_1S_2)} \left( 2S_1 S_2 z'_{,\alpha} + S_\alpha z'_{,12} \right) \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ \frac{z'_{,\alpha}}{2} u'_{2'(S_1S_2)} + z' u'_{2'(S_1S_2)} S_\alpha \right], \quad (12) \end{aligned}$$

Напруження в межах елемента визначимо співвідношенням:

$$\sigma^{\alpha\alpha} = \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha} + \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\alpha}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \sigma^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \quad \sigma^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha}, \quad (13)$$

де

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\sigma}^{i(i)}_{,\alpha} = \frac{\partial \sigma^{i(i)}}{\partial x^{\alpha}} \Big|_{x^{\alpha}=0} \quad (\alpha \neq i)$$

напруження і їх похідні в центрі елемента.

Точність представлення напружень визначається нульовими членами розкладання в ряд Маклорена, тому що лінійні члени деформацій не містять усіх компонентів розкладання. Розглянемо вплив різних лінійних членів при розкладі напружень у ряд Маклорена.

Компоненти  $\overset{\circ}{\sigma}^{i(i)}_{,\alpha}$  ( $\alpha \neq i$ ) відображують згинні напруження та їх впливом на точність розв'язку нехтувати не можна, а особливо для оболонок і пластин.

Члени ряду типу  $\overset{\circ}{\sigma}^{12}_{,\alpha}$  визначають зміну напружень зсуву. Їх внесок в енергію деформації елемента незначний, тому цими членами можна нехтувати.

Опис процесу деформування вісесиметричних оболонок здійснюється відповідно до варіаційного принципу Лагранжа. Рівняння рівноваги системи, що складається з  $N$  СЕ, які апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0. \quad (14)$$

В місцевій системі координат варіацію енергії деформації СЕ записується через компоненти тензорів напружень і деформацій:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \sigma^{ij} \delta \epsilon \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (15)$$

Перепишемо вираз (15) у матричному вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \delta \{\epsilon\}^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2, \quad (16)$$

де

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad 2\epsilon_{12} \quad \epsilon_{33}\}, \quad \{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{33}\}.$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:



$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}, \quad (17)$$

де

$$\{u\}^T = \left[ \{u\}'_{(-1;-1)} \{u\}'_{(1;-1)} \{u\}'_{(1;-1)} \{u\}'_{(1;-1)} \{u\}'_{(-1;1)} \{u\}'_{(-1;1)} \{u\}'_{(1;1)} \{u\}'_{(1;1)} \right].$$

Для зручності представлення розділимо матрицю  $[B]$  на блоки:

$$[B] = \left[ [B]^{(-1;-1)} [B]^{(+1;-1)} [B]^{(-1;+1)} [B]^{(+1;+1)} \right]. \quad (18)$$

Елементи підматриць  $[B]^{(s_1, s_2)}$  обчислюються відповідно до формул (4).

$$[B]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z'_{,1} S_1 + (z'_{,12} S_1 + 2z'_{,1} S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} z'_{,1} S_1 + (z'_{,12} S_1 + 2z'_{,1} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (z'_{,1} S_2 + z'_{,2} S_1) & \frac{1}{4} (z'_{,1} S_2 + z'_{,2} S_1) \\ \frac{1}{2} z'_{,2} S_2 + (z'_{,12} S_2 + 2z'_{,2} S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} z'_{,2} S_2 + (z'_{,12} S_2 + 2z'_{,2} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} z'_{,2} + \frac{1}{2} \left( \frac{z'_{,2}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + z'_{,2} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix}.$$

Підставляючи (18) в (16), запишемо варіацію енергії деформації елемента через переміщення  $\{u\}$  та вузлові реакції  $\{r_\sigma\}$ :

$$\delta W = \delta \{u\}^T \{r_\sigma\}, \quad (19)$$

де

$$\{r_\sigma\} = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (20)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}, \quad (21)$$

де  $I, J$  - кількість точок інтегрування по  $x^1, x^2$  відповідно,  $H_i, H_j$  - вагові функції,  $x_i^1, x_j^2$  - координати точок інтегрування.

Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (22)$$

де

$$[D] = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1122} & D^{1133} \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1222} & D^{1233} \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2222} & D^{2233} \\ D^{3311} & D^{3312} & D^{3322} & D^{3333} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці  $[D]$  визначаються згідно формул (4).

Варіація енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} \delta\{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (23)$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримаємо:

$$\delta W = \delta\{u\}^T [k] \{u\}, \quad (24)$$

де  $[k]$  - матриця жорсткості:

$$[k] = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{x^1 = \frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{x^2 = \frac{1}{2}} [B]^T [D] [B] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (25)$$

Використовуючи формулу чисельного інтегрування:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ [B]^T [D] [B] \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}. \quad (26)$$

де  $I, J$  - кількість точок інтегрування по  $x^1, x^2$  відповідно,  $H_i, H_j$  - вагові функції,  $x_i^1, x_j^2$  - координати точок інтегрування.

### 3. Обґрунтування достовірності результатів.

Результати дослідження швидкості збіжності МССЕ при розрахунках тонких круглих пластин представлені на рис. 3,а й 3,б. Залежно від граничних умов, навантаження й конфігурації розглянуто шість розрахункових схем (рис. 3,а).

1. Вільно оберта пластина під дією рівномірного навантаження.
2. Жорстко затиснена пластина під дією рівномірного навантаження.
3. Вільно оберта пластина під дією зосередженої сили.
4. Жорстко затиснена пластина під дією зосередженої сили.
5. Жорстко затиснена кільцева пластина під дією рівномірного навантаження.
6. Жорстко затиснена кільцева пластина змінної товщини під дією рівномірного навантаження.

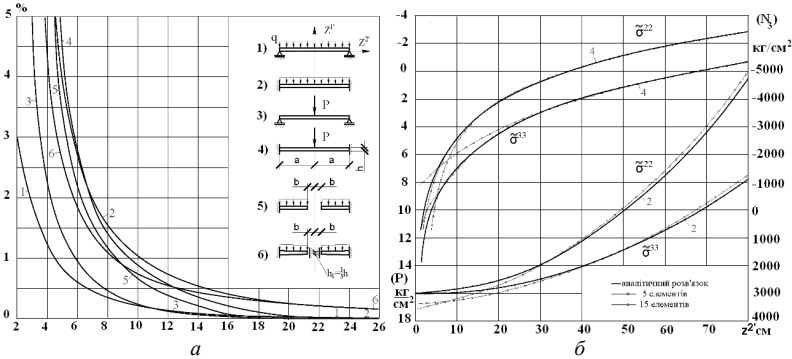


Рис. 3

Перші чотири розрахункові схеми реалізовані для пластини товщиною  $h = 1 \text{ см}$  і радіусом  $a = 80 \text{ см}$ . Коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,25$ . Схеми №5 відповідає пластина товщиною  $h = 1 \text{ см}$ , радіусом  $a = 60 \text{ см}$  і радіусом отвору  $b = 20 \text{ см}$ ,  $\nu = 0,3$ . У розрахунковій схемі №6 радіус пластини прийнятий  $a=60 \text{ см}$ , отвору  $b=20 \text{ см}$ , а товщина зменшується за лінійним законом уздовж радіуса до центру пластини від  $h = 1 \text{ см}$  до  $h=1/3 \text{ см}$ ,  $\nu=1/3$ . Зосереджена сила прийнята рівною  $P = 2\pi \text{ кг}$ ; рівномірне навантаження інтенсивністю  $q = 1 \text{ кг/см}^2$ .

На рис. 3,а зображені графіки, що характеризують збіжність максимального переміщення в центрі пластини ( $Z^2=0$ ). Уздовж осі ординат відкладений відсоток похибки розв'язку, отриманого методом кінцевого елемента, уздовж осі абсцис - кількість СЕ в радіальному напрямку з урахуванням осі симетрії й рівномірного розподілу. По товщині пластини прийнято один елемент. Відсоток похибки визначений щодо аналітичного розв'язку для тонких круглих пластин [12]. Цифри, якими позначені криві, відповідають номеру розрахункової схеми.

На рис. 3,б представлений епюри напружень на нижній поверхні жорстко затисненої пластини під дією рівномірного навантаження (розрахункова схема №2) і зосередженої сили (розрахункова схема №4). Суцільна лінія відображає аналітичний розв'язок [12], пунктирна й штрихпунктирна - розв'язки, отримані за МССЕ відповідно при п'ятьох і п'ятнадцятьох кінцевих елементах. Значення напружень, визначені методом кінцевого елемента, позначені на епюрах ромбиками й кружками.

Результати дослідження збіжності МССЕ при розрахунках оболонок обертання представлені на рис. 5-6. Розглянуто три типи оболонок.

1. Сферичний затиснений по контуру купол під дією рівномірного нормального навантаження.

2. Розсічений уздовж утворюючої нескінченний циліндр, один край у якого затиснений, а до іншого прикладене рівномірне розподілене навантаження.

3. Торосферична посудина під дією внутрішнього тиску, що складається з елементів сфери, тора й циліндра.

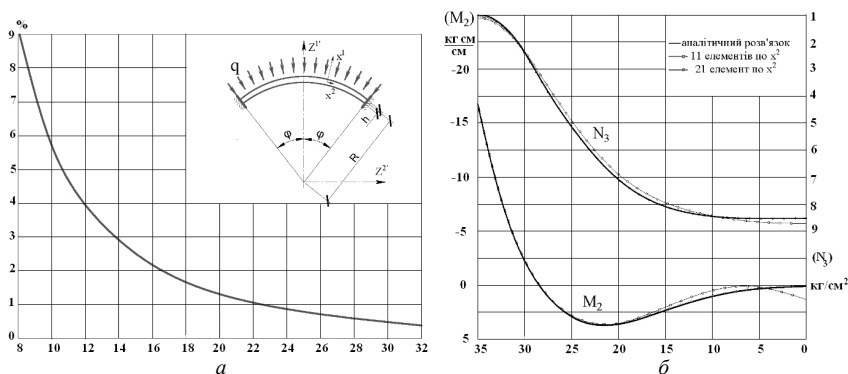


Рис. 4

По товщині оболонок прийнято один елемент. Вісь  $X^1$  місцевої системи координат збігається за напрямком з нормаллю до серединної поверхні,  $X^2$  - дотична до неї.

Радіус серединної поверхні сферичного купола (рис. 4,а)  $R=228$  см, товщина  $h=7,6$  см, кут розхилу  $\varphi=35^\circ$ ,  $\nu=1/6$ . Інтенсивність рівномірного нормального навантаження  $q=0,07$  кг/см<sup>2</sup>. Результати розрахунку сферичного купола, отримані методом скінченного елемента, дорівнюють розв'язку, який наведений в роботі [12]. На рис. 4,а зображена крива, що характеризує збіжність нормального зсуву в центрі оболонки залежно від числа елементів при рівномірній розбивці меридіана. Епюри мембранних кільцевих зусиль  $N_3$  і меридіальних згинальних моментів  $M_2$  представлені на рис. 4,б.

Суцільні лінії відповідають розв'язку, наведеному в роботі [12], пунктирна й штрихпунктирна - розв'язку, отриманому за МССЕ при 11 і 21 скінченних елементах. Щоб визначити значення згинального моменту якнайближче до затисненого краю купола, в опори застосовувався приграничний елемент розчином  $0,1^\circ$ . На іншій дузі меридіана зберігалася рівномірна розбивка. Значення напружень, визначені МСЕ, позначені на епюрах ромбиками й кружками.

Радіус серединної поверхні нескінченного розсіченого циліндра (рис. 5)  $R=20$  см, товщина  $h=1$  см,  $\nu=0$ . Інтенсивність розподіленої уздовж утворюючої навантаження  $P=1$  кг/см.

На рис. 6 зображені графіки збіжності переміщення  $u^{1'}$  у точці A ( $Z^{1'}=R, Z^{2'}=0$ ) і максимального згинаючого меридіонального моменту в точці B ( $Z^{1'}=0, Z^{2'}=R$ ). Результати збіглися з аналітичним розв'язком.

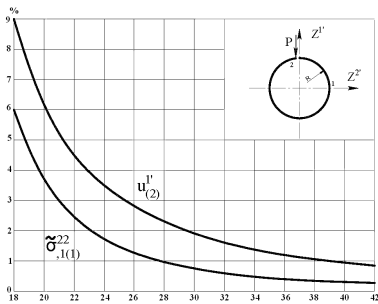


Рис. 5

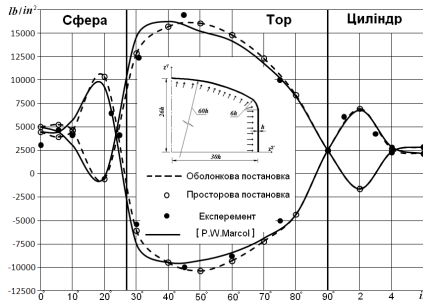


Рис. 6

Розрахункова схема торосферичної посудини представлена на рис. 6. Товщина посудини  $h=1/4$  дюйма,  $\nu=0,31$ , інтенсивність внутрішнього тиску 100 фунтів на один квадратний дюйм, результати розрахунків за МССЕ однакові з розв'язком, отриманим у роботі [7] методом кінцевого елемента на базі теорії тонких оболонок і даними експерименту.

На рис. 6 наведені епюри напружень  $\sigma^{22}$  на зовнішній і внутрішній поверхні торосферичної посудини. Суцільною лінією представлені результати роботи [7], пунктирною й штрихпунктирною - результати, отримані на базі МССЕ при 21 і 42 скінченних елементах. Відношення числа елементів на сферичній, тороїдальній і циліндричній ділянках оболонки становить 4:1:2. Дані експерименти на рисунку позначені кружками.

Аналізуючи збіжність МССЕ в процесі розрахунків оболонок обертання, можна зробити висновок, що для всіх розглянутих об'єктів розв'язок сходиться до еталонного. Зокрема, використання 20 скінченних елементів дозволяє визначити максимальний нормальний зсув у центрі сферичного купола з точністю до 1%. Епюри зусиль і моментів вже при 10 СЕ на більшій частині графіка збігаються із кривими, отриманими на основі класичної теорії оболонок, і дозволяють із точністю до 1,5% визначити максимальні напруження. Найбільші відхилення - в зоні мінімальних (близьких до нуля) величин і в міру згущення сітки до 20 елементів практично відсутні.

Задача про напружено-деформований стан розрахункового нескінченного циліндра характерна особливою чутливістю до врахування зсуву кінцевого елемента як жорсткого цілого. На відміну від розглянутих раніше прикладів збіжність переміщень у цій задачі трохи повільніша, чим по зусиллях. Наприклад, визначення максимального меридіонального

згинального моменту точністю порядку 1% досягається при розчині одного елемента  $13^\circ$  для визначення переміщення в точці прикладання навантаження з тою же точністю необхідний кут розчину  $9^\circ$ .

Порівняння МССЕ з іншими схемами МСЕ підтверджує її високу ефективність і при розрахунках оболонок обертання. Так, точність визначення згинального моменту біля опори сферичного купола в роботі [13] становить 5,1% (8 СЕ уздовж меридіана). При такій же кількості невідомих і ширині стрічки матриці погрішність розв'язку по МССЕ становить 3%. Особливо помітні переваги МССЕ в порівнянні із просторовими елементами. У монографії [5] для одержання розв'язку розглянутої оболонки використано 24 СЕ третього ступеня. У цьому випадку трудомісткість обчислень у кілька разів перевищує затрати МССЕ. Показово також зіставлення точності розв'язку при тому самому числі просторових СЕ різних типів. Наприклад, у завданні про розсічений нескінченний циліндр використання 30 СЕ (МССЕ) забезпечує точність результатів по переміщеннях не нижче 2%. При даному числі елементів, МЖ яких виведені відповідно до методики роботи [5], лінійний закон розподілу переміщень призводить до похибки порядку 90%, а квадратичний – 40%.

На закінчення зупинимося на результатах розрахунків торосферичної посудини. Геометрія розглянутих раніше конструкцій не відрізняється особливою складністю і їх розв'язок не дозволяє судити про спільний вплив таких факторів як складність форми, зміна відношення товщини оболонки до радіуса кривизни й т.п.

Окремі елементи меридіана торосферичної посудини мають канонічну форму, однак у цілому оболонка має складну геометрію. Її не можна віднести до класу пологих, крім того на тороїдальній ділянці відношення товщини до радіуса кривизни становить 1:8. У цьому випадку застосування класичної теорії оболонок може до деякої міри спотворити реальну картину напружено-деформованого стану, що тим більше небажане, тому що тут розташована зона максимальних напружень.

Досліджуючи напружений стан пластин і оболонок, фізичні компоненти тензора напружень природно визначати в місцевій системі координат  $X^i$ , вісь  $X^i$  якої спрямована по товщині пластини або оболонки, а  $X^e$  - у меридіональному напрямку. При розрахунках пластин напрямком осей місцевої й базисної системи координат збігаються й  $\sigma^{22}$  відповідає радіальним напруженням  $\sigma^{33}$  - кільцевим.

Аналіз наведених результатів дослідження збіжності МССЕ при розрахунках тонких пластин дозволяє зробити наступні висновки:

1. Значення максимального переміщення збігається до аналітичного для різних варіантів граничних умов і навантаження пластин, причому,

починаючи з 5 СЕ, похибка незалежно від розрахункової схеми становить менш 4%.

2. Епюри побудовані при п'ятьох елементах, добре передають якісну картину розподілу напружень у радіальному напрямку й на більшій частині графіків близькі до аналітичних (максимальна похибка не перевищує 1%, а при п'ятнадцятих елементах практично з ними збігаються).

Зіставлення ефективності різних модифікацій МСЕ свідчить про те, що збіжність МССЕ не поступається оболонковим варіантам СЕ при розрахунках круглих плит. Так, у роботі [13] наведений розв'язок вільно обпертої пластини під дією рівномірного навантаження, отриманий на основі змішаного оболонкового СЕ. Точність визначення згинального моменту в центрі пластини становить 8%. При тому ж числі невідомих і ширині стрічки матриці розв'язних рівнянь похибка за МССЕ не перевищує 2,5%.

В деяких випадках доцільне застосування нерівномірної апроксимуючої сітки. Наприклад, уведення в зоні прикладання зосередженої сили приграничного елемента рівного двом товщинам, дозволяє одержувати значення максимальних переміщень із точністю не нижче 0,1% уже при трьох СЕ, а похибка напружень у всіх елементах, крім приграничного, не перевищує при цьому 2%. Використання біля опори приграничного елемента рівного  $H/5$  дає можливість визначити напруження в зоні защемлення з точністю до 0,15% при трьох СЕ, причому на збіжність переміщень це практично не впливає.

Точність розв'язку залежить не тільки від кількості СЕ, якими апроксимується конструкція, але й від співвідношення розмірів окремого елемента. Значна відмінність товщини елементів від їхньої довжини приводить до погано обумовленої матриці системи розв'язних рівнянь і явищу чисельної нестійкості, що в остаточному підсумку погіршує збіжність. Така проблема може виникнути якщо необхідно здійснити розрахунок досить тонкої пластини, або, якщо з яких-небудь міркувань нетовсту пластину доводиться розглядати з позицій теорії пружності. У цьому випадку важливо знати граничне відношення розмірів елемента, що працює на згин. Чисельні експерименти показали, що при відношенні товщини елемента до його довжини  $\varphi=15$  явище чисельної нестійкості на точність розв'язку не позначається, при  $\varphi=20$  похибка не перевищує 0,3%, а при  $\varphi=30$  - 1,3%.

Зі збільшенням відносної товщини пластин рівняння класичної теорії приводять до спотворення реальної картини напружено-деформованого стану конструкції. Тому для розрахунків нетонких пластин знаходять широкі застосування різні уточнені теорії, що враховують обгиск й поперечний зсув. Рівняння МССЕ у випадку апроксимації пластини одним елементом по товщині за своїм характером близькі до рівнянь уточнених те-

орій. У табл. 3.1 наведені значення безрозмірних прогинів, у центрі вільно обертої рівномірно навантаженої круглої пластини, визначені за допомогою МССЕ й на основі застосування різних уточнених теорій [3].

Таблиця 1

	[1, 14]	[6]	[9, 10]	[8]	МССЕ
$h/a=1/5$	1,0345	1,0362	1,0368	1,0361	1,0346
$h/a=1/3$	1,0958	1,1005	1,1030	1,1004	1,0952

Підрахунки зроблені для відносних товщин  $h/a=1/5$  і  $h/a=1/3$ . В основному, усі уточнені теорії й МССЕ дають близькі результати. У даній задачі найбільш повний збіг відзначається між МССЕ й теоріями [1, 14]. На основі проведеного порівняння можна зробити висновок про те, що МССЕ при використанні одного елемента по товщині дозволяє отримати результати, що наближаються до розв'язків, визначених по теорії нетонких оболонок.

З метою визначення меж застосовності подібної апроксимації були вирішені задачі згину вільно обертої й жорстко затисненої круглих пластин під дією рівномірного поперечного навантаження при збільшенні відносної товщини до  $h/a=1/2$ . Відмінність розв'язку, отриманого з використанням одного елемента по товщині від розв'язку пластини як масивного тіла (10 елементів по товщині) склало 4,1% у випадку жорсткого защемлення й 3,5% - для вільного обпирання.

Дослідження збіжності показали, що застосування більше шести елементів на тороїдальній ділянці практично не змінює картину напруженого стану. Епюри меридіональних напружень, отримані різними схемами СЕ й дані експерименту близькі між собою, однак, напруження, визначені методом СЕ, основанийому на застосуванні моментної схеми, якісно й кількісно ближче до експериментальних результатів. Очевидно, це неправильно пояснити більш досконалою структурою рівнянь МССЕ, що дозволяє вирішувати нетонкі пластини й оболонки.

**4. Обґрунтування ефективності МССЕ при розрахунку оболонок і пластин.** Для дослідження характеру збіжності, достовірності і ефективності результатів, отримуваних із використанням двовимірних елементів МССЕ при розрахунку тонкостінних об'єктів, розглянуто тестовий приклад про згин шарнірно опертої круглої пластини (рис. 7,а), навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням.

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними:  $D=0.8$  м,  $h=0.01$  м модуль пружності  $E=10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0$ . В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок.



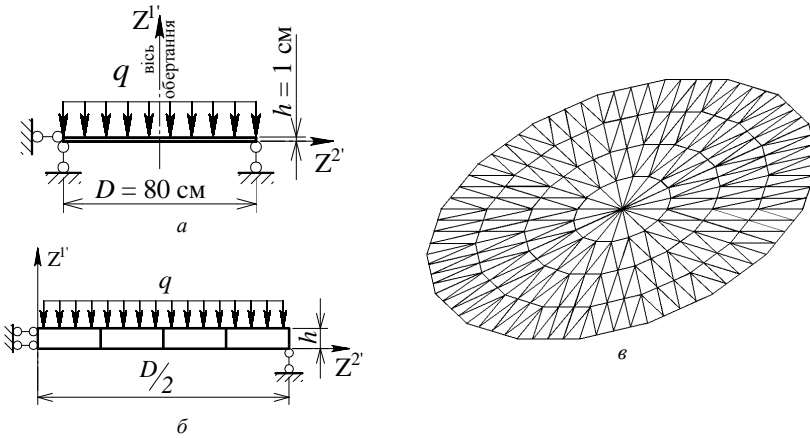


Рис. 7

Порівняння із скінчено елементною базою програмного комплексу SCAD (рис. 7,в) розроблених елементів МССЕ (рис. 8,б), показали, що вони не поступаються по ефективності оболонковим СЕ при розрахунку тонкостінних об'єктів.

Для порівняння ефективності двовимірних елементів МССЕ і програмного комплексу SCAD було розглянута шарнірно оперта балка під дією рівномірно розподіленого навантаження (рис. 8,а), скінченоелементна модель, якої наведена на рис. 8,б.

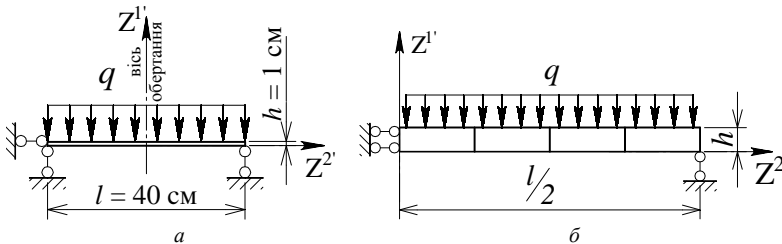


Рис. 8

Також використовувалися дискретні моделі  $1 \times N$ , де  $N=8,16,20,32$  кількість СЕ по довжині балки. Механічні параметри балки є наступними: модуль пружності  $E=10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0$ .

Швидкість збіжності результатів показана на рис. 9,а для напруження та рис. 9,б для прогинів.

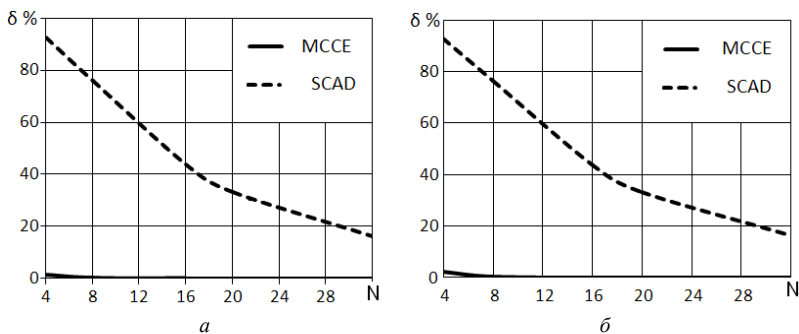


Рис. 9

Як видно, двовимірні елементи MCCE забезпечують значно кращу збіжність при розрахунку тонкостінних об'єктів ніж двовимірні елементи програмного комплексу SCAD.

**5. Циліндричний резервуар зі стінками постійної товщини [12].** Геометричні і механічні параметри резервуару є наступними: радіус  $r=9.15$  м, висота  $h=7.93$  м, товщина стінки  $d=0.356$  м, густина речовини, яка наповняє резервуар  $\gamma=0,001$  кг/см<sup>3</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,25$  (рис. 10,а).

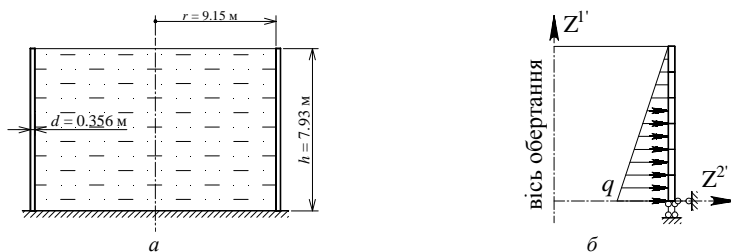


Рис. 10

Аналітичні результати розв'язку цієї задачі показали що максимальний момент  $M_0=6338$  кг/м, а максимальна перерізуючи сила  $Q_0=-10074$  кг/м.

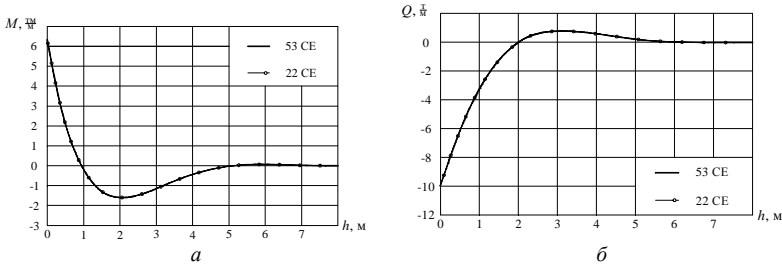


Рис. 11

При розв'язанні даного прикладу результати отримані за допомогою двовимірних елементів МССЕ (рис. 10,б) і оболонкових СЕ програмного комплексу LIRA повністю співпали(рис. 11,а,б) і відрізняються від аналітичних значень в межах 2%.

**Висновок.** Таким чином наведені приклади дослідження збіжності СЕ, які базуються на співвідношеннях теорії пружності в поєднанні з методикою МССЕ забезпечують отримання достовірних результатів для широкого кола вісесиметричних і плоско-деформованих тонкостінних об'єктів і не поступаються по ефективності оболонковим СЕ.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. "Наука", М., 1967.
2. Баженов В. А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей.– К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.
3. Галимов Ш. К. Симметричный изгиб круглой пластины средней толщины. Труды семинара по теории оболочек (АН, СССР, Казанский физико-технический институт). Вып. III., 1973.
4. Гуляр О.І., Солодей І.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В. Ефективність МССЕ в задачах згину та з концентраторами напружень // Опір матеріалів і теорія споруд, № 89, 2012. – С.143-157.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
6. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.-Л., 1935.
7. Маркол. Определение больших прогибов упругопластических оболочек вращения. Ракетная техника и космонавтика, .1970, № 9.
8. Муштарі Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. Изв. АН СССР. Мех. и Машин. 1959, № 2.
9. Понятовский В. В. Уравнения теории анизотропных пластинок. Исследования по упругости и пластичности. Сб. 4, Изд. ЛГУ, 1965.
10. Понятовский В. В. Уточненная теория трансверсально изотропных пластин. Исследования по упругости и пластичности. Сб. 6, изд. ЛГУ, 1967.
11. Сахаров А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислюкий, В. В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.

12. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский–Кригер.– М.: Наука, 1966. – 456 с.
13. Elias Z. M. Mixed finite element method for axisymmetric shells. Int. J. Num. Meth. in Eng. V.4, 1972, №2.
14. Reissner E. On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math. V.5, 1947, N1.

*Стаття надійшла до редакції 03.05.2013 р.*

*Пискунов С.О., Солодей И.И., Максимюк Ю.В., Солоденко А.Д.*

#### **ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МСКЭ) ПРИ ЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТАХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН**

На основе МСКЭ создан оболочечный КЭ с использованием соотношений осесимметричной задачи теории упругости, что позволяет проводить анализ напряженно-деформированного состояния осесимметричных оболочек. Проведены многочисленные исследования для обоснования достоверности полученных результатов при использовании по толщине оболочки одного КЭ, а также показано, что его эффективность не уступает оболочечному КЭ.

*Piskunov S.O., Solodey I.I., Maksymiuk Y.V., Solodenko A.D.*

#### **FEATURES APPLICATION MOMENT FINITE ELEMENT SCHEME (MSSE) FOR LINEAR CALCULATIONS OF PLATES AND SHELLS**

On the basis on MSSE and using the axisymmetrical problem of elasticity theory ratios a shelled FE is created, which allows stress-strain analysis of axisymmetrical shells. The numerical study to justify the validity of the results when used on the thickness of the shell of one FE, and shows that its performance is not inferior shelled FE.

УДК 539.3

О.А. Киричук, д-р.техн.наук

О.О. Лук'яненко, канд.техн.наук

О.В. Кузько

## НЕСУЧА СПРОМОЖНІСТЬ ПАЛИВНОГО РЕЗЕРВУАРА В СИСТЕМІ З ЗАХИСНОЮ ЄМНІСТЮ

Досліджено напружено-деформований стан та стійкість паливного резервуару ємністю 200 куб. м, в системі з захисною ємністю. За допомогою методу скінченних елементів побудована математична модель конструкції у вигляді системи двох з'єднаних циліндричних оболонки. Розв'язані задачі статичної та стійкості системи при дії ваги палива різного об'єму. Виявлено вплив захисної ємності та елементів з'єднання на несучу спроможність паливного резервуару. Дана оцінка запасу міцності та стійкості системи.

**Вступ.** В рамках оцінювання технічного стану інфраструктури української антарктичної станції Академік Вернадський з урахуванням важливості забезпечення її життєдіяльності та екологічної безпеки в Антарктиці [1] Національним антарктичним науковим центром України разом з Київським Політехнічним Інститутом в лютому 2011 р. був проведений моніторинг резервуару з дизельним паливом та захисної циліндричної ємності, які з'єднані між собою технологічним обладнанням [2]. Технічний проект на паливний резервуар розроблений ВАТ УкрНДПроектстальконструкція ім. В.Н. Шимановського. Будівельно-монтажні роботи виконані організацією ТОВ «Завод технологічного обладнання» м. Кіровоград в сезон 2006-2007 рр. Весною 2007 р. паливний і захисний резервуари введені в експлуатацію. Виявлено, що як на стадії їх проектування, так і при монтажі були допущені відхилення від діючих нормативних документів [3]. В результаті технічного огляду двох резервуарів систематизовано шість головних характеристик, які становлять конкретні загрози для життя персоналу станції, навколишнього середовища та інфраструктури станції, що можуть призвести до аварій зі значним розливом палива [4]:

1. Невідповідність марки сталі, з якої виготовлено паливний резервуар, умовам його експлуатації.
2. Відсутність технічної документації на реальну конструкцію системи двох з'єднаних резервуарів.
3. Відсутність розрахунку несучої спроможності реальної конструкції системи двох з'єднаних резервуарів на дію статичних та динамічних навантажень.

4. Неможливість контролю технічного стану зварних швів в просторі між зовнішньою і внутрішньою ємностями резервуару (тобто половини всіх зварних швів резервуару).

5. Підвищене навантаження на зварні шви в критичних елементах паливного резервуару.

6. Невиконання необхідних регламентних, профілактичних, ремонтних робіт на резервуарах протягом всього часу його експлуатації.

Зроблено висновок про те, що для запобігання аварій на антарктичній станції і оцінки конструкційної безпеки резервуару потрібно дослідити його напружено-деформований стан та стійкість при дії статичних та динамічних навантажень. Після семи років експлуатації реальна конструкція резервуара зазнала деформацій, які на теперішній час ще не досліджені. Тому важливим кроком в оцінюванні технічного стану інфраструктури станції є дослідження несучої спроможності та стійкості паливного резервуара без урахування недосконалостей його форм.

В статті [4] за допомогою програмного комплексу скінченно-елементного аналізу MSC.NASTRAN [5] авторами побудована математична модель конструкції у вигляді системи двох з'єднаних циліндричних оболонок і виконаний її модальний аналіз. Доведено, що на поведінку паливного резервуара впливає характер його з'єднання з захисною ємністю. В даній роботі досліджено напружено-деформований стан та стійкість системи двох з'єднаних циліндричних оболонок при дії ваги палива, яке займає різний об'єм резервуара. Визначені елементи конструкції, в яких спостерігаються максимальні напруження та деформації. Отримано форми втрати стійкості системи та критичні значення навантаження. Обчислені коефіцієнти запасу міцності та стійкості паливного резервуару.

### **§1. Дослідження напружено-деформованого стану конструкції при дії ваги палива**

Напружено-деформований стан системи двох циліндричних оболонок при статичній дії ваги палива, яке заповнює 4/4, 3/4, 1/2 та 1/4 частину об'єму паливного резервуару (експлуатаційне навантаження), досліджений за допомогою процедури Linear Static програмного комплексу NASTRAN. Навантаження від палива моделюється у вигляді розподіленого за трикутником бокового тиску на внутрішню поверхню паливного резервуара з урахуванням питомої ваги дизельного палива у  $1000 \text{ кг/м}^3$ . На рис. 1-4 представлені деформації (а) та напруження, що виникають при дії ваги палива в стінках паливного резервуара (б) і захисної ємності (в).

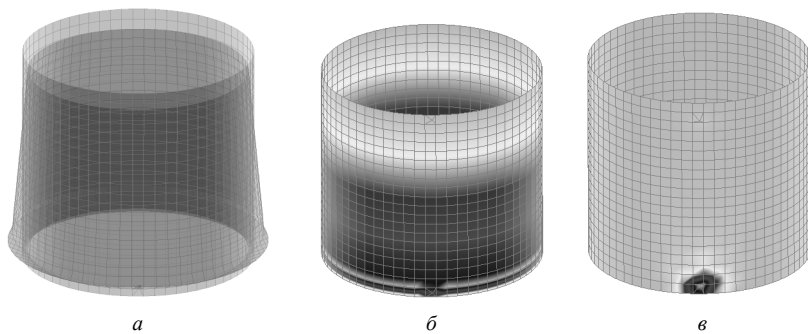


Рис. 1

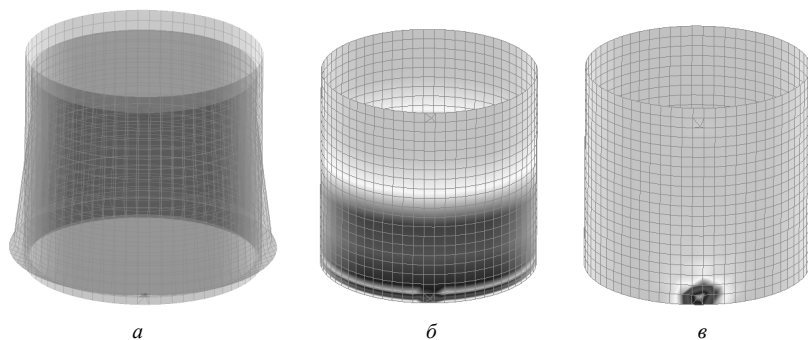


Рис. 2

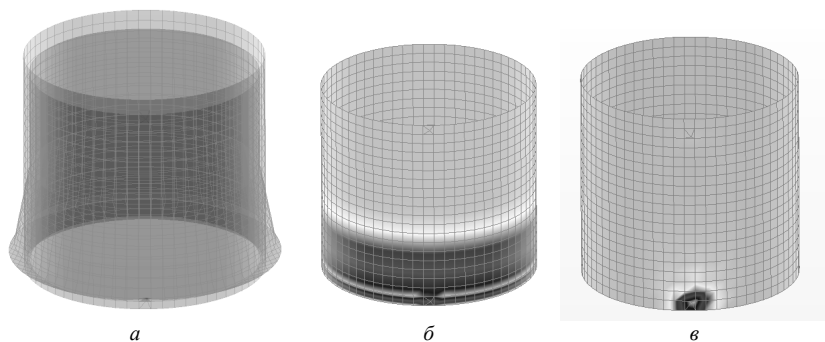


Рис. 3

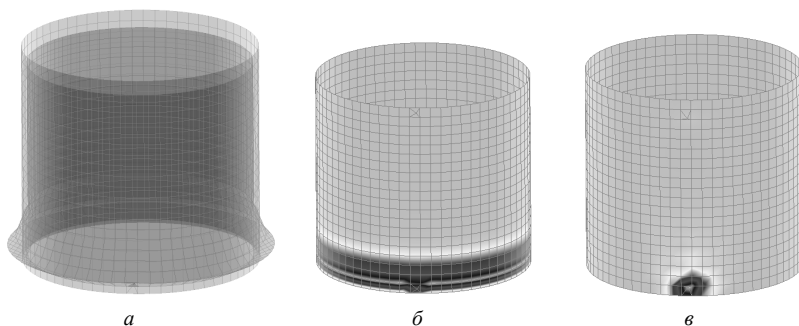


Рис. 4

Для чотирьох видів заповнення резервуара максимальні напруження та деформації спостерігалися в елементах його стінки біля нижньої кромки. В стінці захисної ємності мала місце концентрація напружень. Отримані результати наведені в табл. 1. Максимальні напруження змінювались від 87,39 МПа до 19,63 МПа в стінці паливного резервуара та від 2,65 МПа до 0,41 МПа в стінці захисної ємності. Максимальні деформації набували значення від 1,4 мм до 0,4 мм та від 0,04 до 0,01 мм відповідно в стінках внутрішньої та зовнішньої оболонок.

На рис. 5 наведено деформації (рис. 5,а) та напруження в стінці паливного резервуару (рис. 5,б) і захисної ємності (рис. 5,в) в місцях кріплення патрубків для зливу палива, які виникли при навантаженні 1/4 об'єму резервуара.

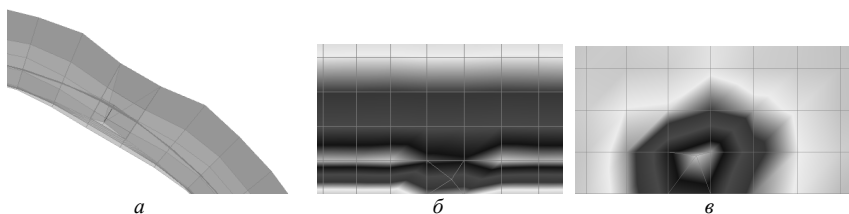


Рис. 5

Для визначення коефіцієнтів запасу міцності паливного резервуара розв'язана нелінійна задача статички, яка реалізована за допомогою процедури Nonlinear Static у програмному комплексі NASTRAN [5]. Застосований метод покрокового навантаження Ньютон-Рафсона до досягнення напруження у 210 МПа в стінці паливного резервуара. Отримано коефіцієнт запасу міцності (табл. 1), який показує у скільки разів навантаження, при якому виникає напруження у 210 МПа в стінці паливного резервуара, перевищує експлуатаційне.



Таблиця 1

Характеристики НДС системи двох з'єднаних оболо- нок	Навантаження від палива, яке складає частину від об'єму внутрішньої оболонки			
	4/4	3/4	1/2	1/4
<b>Лінійний розрахунок</b>				
Напруження, МПа (внутр./зовн.)	87,39/2,65	64,58/1,89	41,78/1,24	19,63/0,41
Деформація, мм (внутр./зовн.)	1,4/0,044	1,1/0,032	0,65/0,027	0,4/0,01
<b>Нелінійний розрахунок</b>				
Напруження, МПа (внутр./зовн.)	210/10,33	210/10,84	210/11,13	210/12,45
Деформація, мм (внутр./зовн.)	2,85/0,19	2,26/0,18	3,71/0,25	2,46/0,21
Коеф. запасу міцн. внутр. циліндра	2,7	3,4	5,6	6,5

Видно, що при всіх варіантах завантаження паливом запас міцності резервуара забезпечений.

## §2. Дослідження стійкості системи двох з'єднаних циліндричних оболонок при статичній дії ваги палива

Стійкість системи з'єднаних циліндрів досліджена за допомогою процедури Bucling програмного комплексу NASTRAN. Форми втрати стійкості та критичні значення бокового тиску визначені при розв'язанні задачі на власні значення методом Ланцоша. На рис. 6-9 представлені перші форми втрати стійкості системи двох з'єднаних оболонок при заповненні паливом 1/4, 1/2 та 2/3 частин об'єму резервуара, які є найбільш небезпечними.

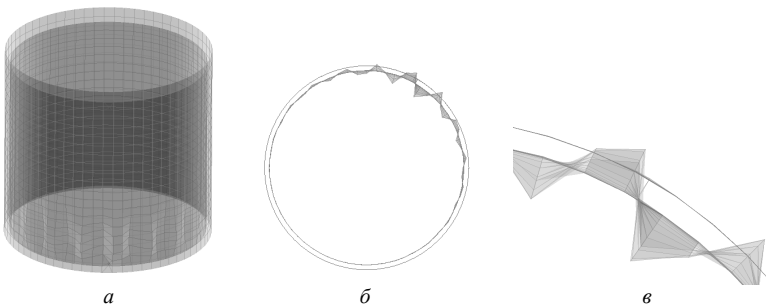


Рис. 6

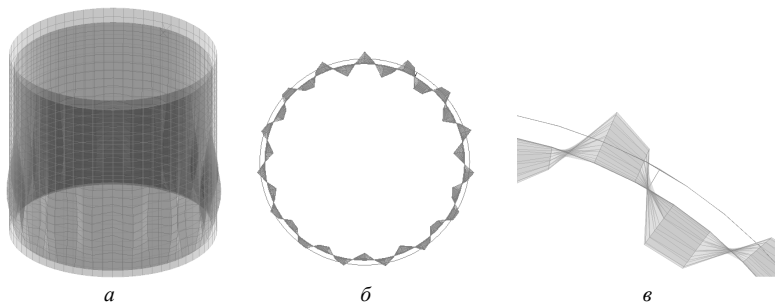


Рис. 7

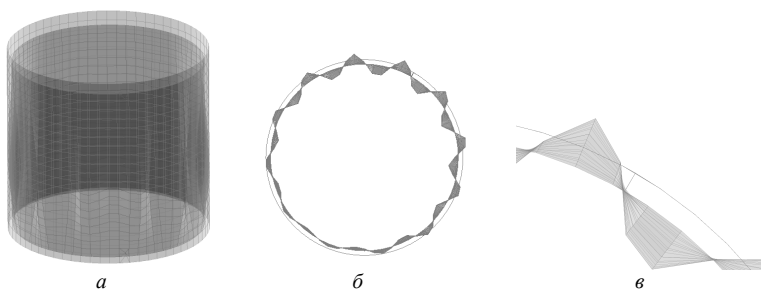


Рис. 8

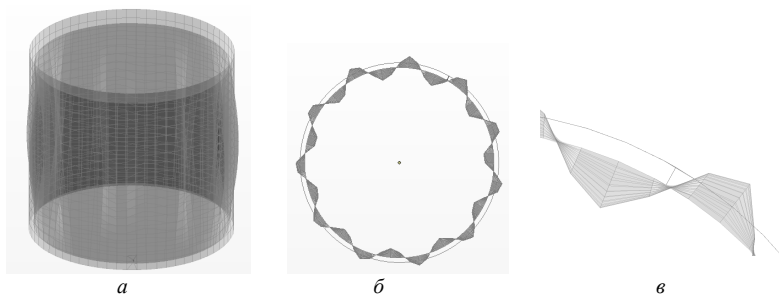


Рис. 9

З аналізу результатів можна простежити, що по першій формі деформується лише внутрішня оболонка, її стінка має як випучини так і вм'ятини. Деформації мають нерегулярний характер вздовж кола при заповненні  $1/4$ ,  $1/2$  та  $2/3$  об'єму резервуара, а при повному заповненні спостерігаються циклічні деформації. Вздовж твірної стінка внутрішньої оболонки деформується у вигляді півхвилі, довжина якої збільшується

при збільшенні об'єму палива. В місцях з'єднання трубопроводів з оболонками спостерігаються незначні локальні деформації.

Критичні значення навантаження, при яких система втрачає стійкість, наведені в таблиці 2 у вигляді коефіцієнтів втрати стійкості, які показують у скільки разів критичне навантаження перевищує або менше за експлуатаційне.

Таблиця 2

№	Значення коефіцієнту запасу стійкості системи при заповненні паливом частини об'єму резервуара			
	1/4	1/2	3/4	4/4
1	4,8816	1,0592	0,4450	0,2420
2	5,0337	1,0624	0,4455	0,2423
3	5,0352	1,0706	0,4455	0,2425
4	5,0521	1,0734	0,4461	0,2429
5	5,0840	1,0776	0,4575	0,2547
6	5,1178	1,0802	0,4580	0,2549
7	5,1368	1,1158	0,4641	0,2648
8	5,1671	1,1192	0,4649	0,2654
9	5,2439	1,1193	0,4796	0,2729
10	5,2818	1,1220	0,4802	0,2731

Результати дослідження паливного резервуара в системі із захисною ємністю за допомогою побудованої математичної моделі підтвердили, що міцність системи при наповненні паливом забезпечена. Стійкість системи забезпечена лише при заповненні паливом 1/4 та 1/2 частин об'єму резервуара.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Протокол про охорону навколишнього середовища до Договору про Антарктику (Мадрид, 4жовтня 1991р.) Закон України №2284 – III від 22.02.2001р.
2. ВБН В.2.2-58.2-94. Резервуари вертикальні сталеві для зберігання нафти і нафтопродуктів з тиском насичених парів не вище 93.3 кПа. – Чинний з 1994.10.01 – К.: Держкомнафтогаз України, 1994. - 98с.
3. Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Шах В.В. Оцінка рівня конструкційної безпеки нафтоналивного резервуара// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.86. – К.:КНУБА, 2010. – С. 22 –29.
4. Киричук О.А., Кузько О.В., Лук'янченко О.О. Динамічний аналіз системи двох з'єднаних циліндричних оболонок// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.90. – К.:КНУБА, 2012. – С. 40 –46.
5. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

Стаття надійшла до редакції 17.04.2013 р.

*Киричук А.А., Лукьянченко О.А., Кузько О.В.*

### **НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ТОПЛИВНОГО РЕЗЕРВУАРА В СИСТЕМЕ С ЗАЩИТНОЙ ЁМКОСТЬЮ.**

Исследовано напряженно-деформированное состояние и устойчивость топливного резервуара объемом 200 куб.м в системе с защитной ёмкостью. На основе метода конечных элементов построена математическая модель конструкции в виде системы двух соединенных цилиндрических оболочек. Решены задачи статики и устойчивости системы при действии веса топлива различного объема. Выявлено влияние защитной ёмкости и элементов соединения на несущую способность топливного резервуара. Дана оценка запаса прочности и устойчивости системы.

*Kyrychuk A.A., Lukianchenko O.O., Kuzko O.V.*

### **CARRYING CAPACITY IN THE FUEL RESERVOIR WITH PROTECTIVE CAPACITY**

The stress-strain state and the stability of the fuel reservoir capacity of 200 m<sup>3</sup> in the system with the protective capacity is investigated. Using the finite element method a mathematical model of the design as a system of two coupled cylindrical shells is constructed. The problems of statics and stability of the system under the action of fuel weight of various sizes are solved. Revealed the influence of the protective capacity and connection elements on the bearing capacity of the fuel reservoir. The estimation of safety and stability of the system is given.

УДК 539.3

П.П. Лізунов, д-р техн. наук

## ПРУЖНА РІВНОВАГА СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ СИЛОВОМУ ПОЛІ

Отримані співвідношення, які описують напружено-деформований стан безмоментної сферичної оболонки, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі.

Розглянемо задачу про напружено-деформований стан безмоментної сферичної оболонки, що є частиною споруди, центр мас якої рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі. Введемо наступні праві прямокутні системи координат:  $O_a X_a Y_a Z_a$  – абсолютну систему координат з початком в центрі гравітації;  $OXYZ$  – орбітальну систему координат, вісь  $OZ$  якої є продовженням радіуса-вектора  $\vec{\rho}_{(o)}$ , проведеного з гравітаційного центру  $O_a$  в центр мас споруди, а вісь  $OX$  лежить в площині, що проходить через радіус-вектор  $\vec{\rho}_{(o)}$  та вектор швидкості центру мас споруди. Будемо використовувати також систему координат  $O_{xyz}$ , осі якої направлені вздовж головних центральних осей інерції споруди. У випадку стаціонарного руху споруди в центральному силовому полі осі  $OZ$  та  $O_z$  співпадають. Введемо також криволінійну систему координат  $O_1 x_1 x_2 x_3$ , пов'язану з недеформованою поверхнею оболонки.

Під час руху в центральному силовому полі на кожний елемент оболонки діє навантаження, що складається з гравітаційних та інерційних сил

$$\vec{q} = \vec{q}^g + \vec{q}^j. \quad (1)$$

Вектор гравітаційного навантаження, що діє на одиничний елемент поверхні оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^g = -\frac{\gamma \rho h \vec{r}^*}{r^2}, \quad (2)$$

де  $\gamma = f M_0$ ;  $f$  – гравітаційна стала;  $M_0$  – маса гравітаційного центру;  $\rho$  – щільність матеріалу оболонки;  $h$  – її товщина;  $\vec{r}^*$  – одиничний вектор, який визначається співвідношенням  $\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{r}^*$ ;  $\vec{r}$  – радіус-вектор елемента оболонки в системі координат  $O_a X_a Y_a Z_a$ ;  $r = |\vec{r}|$ .

Модуль радіуса-вектора  $\vec{r}$  визначається формулою [1]

$$r = \left[ \rho_{(o)}^2 - 2\rho_{(o)} (R \cos x_1 - e) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

де  $R$  – радіус кривизни оболонки;  $e$  – відстань між центром кривизни оболонки і центром мас споруди.

Підставивши (3) в формулу (2), маємо вираз для модуля гравітаційної сили, що діє на одиничний елемент серединної поверхні оболонки

$$q^g = \gamma \rho h [\rho_{(o)}^2 - 2\rho_{(o)}(R \cos x_1 - e)]^{-1}. \quad (4)$$

Складові гравітаційної сили, що діють в напрямі координатних ліній  $x_1, x_2, x_3$  криволінійної системи координат, мають такий вигляд [1]:

$$\begin{aligned} q_{x_1}^g &= -\frac{\gamma \rho h}{\rho_{(o)}^2} \left[ 1 + \frac{2}{\rho_{(o)}} (R \cos x_1 - e) \right] \sin x_1; \\ q_{x_2}^g &= 0; \\ q_{x_3}^g &= -\frac{\gamma \rho h}{\rho_{(o)}^2} \left[ 1 + \frac{2}{\rho_{(o)}} (R \cos x_1 - e) \right] \cos x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Вектор інерційного навантаження, діючого на елемент оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^J = -\rho h \vec{a}, \quad (6)$$

де  $\vec{a}$  – вектор абсолютного прискорення елемента оболонки, проекції якого на координатні лінії  $x_1, x_2, x_3$  криволінійної системи координат мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= -\omega_0^2 (\rho_{(o)} + e - R \cos x_1 \sin^2 x_2) \sin x_1; \\ a_{x_2} &= \omega_0^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2; \\ a_{x_3} &= -\omega_0^2 \left[ \rho_{(o)} + e - R (\sin^2 x_1 \cos x_2 + \cos x_1) \cos x_2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень (7) отримуємо проекції вектора інерційного навантаження, діючого на елемент оболонки в напрямі координатних ліній  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned} q_{x_1}^J &= \rho h \omega_0^2 (\rho_{(o)} + e - R \cos x_1 \sin^2 x_2) \sin x_1; \\ q_{x_2}^J &= -\rho h \omega_0^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2; \\ q_{x_3}^J &= \rho h \omega_0^2 [\rho_{(o)} + e - R (\sin^2 x_1 \cos x_2 + \cos x_1)] \cos x_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Додаючи відповідні праві частини виразів (5) і (8), з урахуванням умови  $\gamma/\rho_{(o)}^3 = \omega_0^2$  рівноваги гравітаційних та інерційних навантажень в центрі мас споруди, отримуємо складові вектора повного навантаження, що діє на елемент оболонки вздовж координатних ліній  $x_1, x_2, x_3$ :

$$q_{x_1} = \rho h \omega_0^2 [3(e - R \cos x_1) + R \cos x_1 \cos^2 x_2] \sin x_1;$$

$$q_{x_2} = -\rho h \omega_o^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2;$$

$$q_{x_3} = \rho h \omega_o^2 [(e - R \cos x_1)(2 \cos x_1 + \cos x_2) - R \sin^2 x_1 \cos^2 x_2]. \quad (9)$$

Диференціальні рівняння руху безмоментної сферичної оболонки мають вигляд [1, 2]

$$\frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + 2N_{12} \operatorname{ctg} x_2 + Rq_{x_1} = 0,$$

$$\frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + (N_{22} - N_{11}) \operatorname{ctg} x_2 + Rq_{x_2} = 0,$$

$$-N_{11} - N_{22} + Rq_{x_3} = 0, \quad (10)$$

де  $N_{11}$ ,  $N_{22}$ ,  $N_{12}$  – зусилля в серединній поверхні оболонки, які визначаються наступними формулами:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22});$$

$$N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11});$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}, \quad (11)$$

де  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$  – компоненти тензора деформацій, які виражаються через складові вектора переміщень елемента оболонки  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вздовж координатних ліній  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  таким чином:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \operatorname{ctg} x_2 + w \right);$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + w \right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \operatorname{ctg} x_2 + \frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \quad (12)$$

$E$  – модуль пружності матеріала оболонки;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Система диференціальних рівнянь, що описують пружну рівновагу безмоментної сферичної оболонки в центральному силовому полі, з урахуванням вирізів (9) – (12), має вигляд:

$$\frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1+\nu}{2 \sin x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\nu-3}{2} \frac{\operatorname{ctg} x_1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} - (\nu + \operatorname{ctg}^2 x_1) u + \frac{1-\nu}{2 \sin^2 x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \omega_0^2 \left[ 3(R \cos x_1 - e) - R \cos x_1 \cos^2 x_2 \right] \sin x_1, \\
&\frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left[ \frac{1+\nu}{2 \sin x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \right. \\
&\left. + \frac{3-\nu}{2} \frac{\operatorname{ctg} x_1}{\sin x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{1+\nu}{\sin x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{(1-\nu)(1-2 \cos^2 x_1)}{2 \sin^2 x_1} v \right] = \rho \omega_0^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2, \\
&\frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \left( \frac{1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + u \operatorname{ctg} x_1 \right) - \right. \right. \\
&\left. \left. -(1+\nu) w \right] \left[ 1 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right] + \left[ v \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + u \operatorname{ctg} x_1 - \right. \right. \\
&\left. \left. -(1+\nu) w \right] \left[ 1 + \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin^2 x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right] \right\} = \\
&= \rho \omega_0^2 \left[ (R \cos x_1 - e)(2 \cos x_1 + \cos x_2) + R \sin^2 x_1 \cos^2 x_2 \right]. \quad (13)
\end{aligned}$$

Інтегруючи рівняння (13), можна визначати внутрішні зусилля розтягу, які підтримують задану форму сферичної оболонки, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляев В.И., Лизунов П.П. Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. – К.: Вища школа, 1989. –199 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. –314 с.

*Стаття надійшла до редакції 10.06.2013 р.*

*Лизунов П.П.*

#### **УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ**

Получены соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние безмоментной сферической оболочки, движущейся по круговой траектории в центральном силовом поле.

*Lizunov P.*

#### **EQUILIBRIUM ELASTIC SPHERICAL SHELL IN A CENTRAL FORCE FIELD**

These ratios, which describe the stress-strain state moment free spherical shell that moves on a circular path in a central force field.



УДК 531.31

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

М.В. Гончаренко, канд. техн. наук

## СТАБІЛІЗАЦІЯ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ПЛЯХОМ ЗМІНИ ПАРАМЕТРІВ НАВЕДЕНИХ ПОЛІВ ДОДАТКОВОЇ ВІБРАЦІЇ

Розглядаються питання, пов'язані з впливом стохастичної складової в параметричному навантаженні на стабілізацію стійкості динамічних пружних систем. Межі областей динамічної стійкості будуються, виходячи з означення стійкості відносно моментних функцій. Розглядаються задачі стійкості плоскої форми згину балки і трубопровідних систем при періодично нестационарному параметричному навантаженні. Побудовані області стійкості для різних випадків, що дозволяє узагальнити вплив стохастичної складової параметричного збудження на структуру областей динамічної стійкості і зробити висновки щодо можливості стабілізації коливальних процесів.

### Вступ

Вперше питання про можливість підвищення стійкості пружних систем за допомогою періодичних вібрацій було поставлене В.Н.Челомеєм [7], який досліджував поведінку авіаційних конструкцій. Було показано, що дана проблема актуальна в цій галузі, оскільки такі типові для авіаційної техніки елементи як циліндричні замкнені оболонки, панелі різного обрису та інші, часто знаходяться під дією динамічного параметричного навантаження.

На принципову можливість підвищення стійкості за рахунок випадкових вібрацій вказано в роботах М.Ф. Діментберга і К.В.Фролова [6]. Аналогічні питання розглядалися в дослідженнях S.T.Agiaratnam [8]. Але у вказаних роботах були використані асимптотичні підходи, область використання яких обмежена.

У даній роботі досліджується вплив стохастичної складової параметричного навантаження на конфігурацію областей динамічної стійкості системи. В представлених дослідженнях використовується метод моментів, що передбачає складання детерміністичних рівнянь відносно моментів різних порядків на основі стохастичних рівнянь руху цієї системи. Задача формулюється таким чином. Розглядається два види параметричного збудження, яке діє на пружну механічну систему: гармонійчне збудження і сума гармонічного і випадкового збудження. Якщо при певних параметрах додаткового випадкового навантаження область динамічної стійкості, що відповідає комбінованому збудженню, ширше області динамічної стійкості, що відповідає детермінованому

збудженню, то має місце ефект стабілізації, обумовлений додатковим стохастичним навантаженням. Аналогічна задача розглядалась для циліндричної оболонки [1].

### Рівняння руху системи

Нехай динамічний стан системи описується рівнянням

$$M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C \frac{d \bar{x}}{dt} + (K + \mu K_g \cos vt) \bar{x} = 0. \quad (1)$$

де  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - динамічні змінні, що характеризують стан системи,  $M$ ,  $C$  і  $K$  - відповідно матриці мас, демпфірування і жорсткості,  $K_g$  - матриця геометричної жорсткості,  $\nu$  та  $\mu$  - частота і амплітуда гармонійного параметричного збудження відповідно. Вважається, що сили опору руху, які визначаються матрицею  $C$ , що відповідають  $i$ -ій формі власних коливань, ортогональні  $j$ -ій формі власних коливань ( $i \neq j$ ).

Після переходу до нормальних координат рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C^* \frac{d \bar{x}}{dt} + (K^* + \mu K_g^* \cos vt) \bar{x} = 0, \quad (2)$$

де  $C^* = \Phi^T C \Phi = \text{diag}(2\xi_1 \omega_1, 2\xi_2 \omega_2, \dots, 2\xi_n \omega_n)$ ,

$$K^* = \Phi^T K \Phi = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2),$$

$$K_g^* = \Phi^T K_g \Phi = (k_{ij}^g)_{i,j=1}^n.$$

Матриця  $\Phi$  створена з  $n$  ортонормованих по масі власних векторів,  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  - власні частоти системи,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - модальні параметри затухання. Далі будемо вважати, що усі модальні параметри затухання однакові і визначаються логарифмічним декрементом споруди

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = \xi = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Якщо серед власних частот  $\omega_i$  немає близьких до величини  $\omega_i - \omega_j$ , то частина доданків рівняння (2) біля резонансних частот, що досліджуються, будуть мати більш високий порядок малості по відношенню до основних "резонансних" доданків. В такому випадку при  $\nu \approx \omega_i$  втрата стійкості буде відбуватись по  $i$ -тій нормальній формі [2]. Тоді зони нестійкості знаходяться біля значень частот, що визначаються виразом

$$\nu = \frac{2\omega_i}{m}, \quad \left( \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n \\ m=1, 2, \dots \end{array} \right), \quad (3)$$

і називаються простими резонансами. Межі таких зон при гармонічному навантаженні визначаються виразом [3]

$$v \approx 2\omega_i \left( 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\mu^2 (k_{ii}^g)^2 - 4\xi_i^2} \right). \quad (4)$$

Аналогічно у випадку комбінаційного резонансу – при  $v \approx (\omega_i \pm \omega_j) / 2$  в рівняннях першого наближення, отриманих з (2), залишаються тільки два рівняння, що описують коливання по  $i$ -ій і  $j$ -ій нормальним формам [2]. В даній роботі досліджуються межі стійкості в зонах простих головних резонансів для різних систем.

На практиці дуже часто до періодичного збудження додається ще стохастична складова. Наприклад, це може бути пов'язано з тим, що на вібрацію конструкції крім періодичності роботи обладнання впливає неврівноваженість певних елементів. Такий характер навантаження можна представити сумою гармонічної та стохастичної складових. Система (2) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + C^* \frac{d \bar{x}}{dt} + (K^* + K_g^* (\mu \cos vt + f(t))) \bar{x} = 0. \quad (5)$$

де  $f(t)$  - центрований стаціонарний випадковий процес.

Досліджується стійкість системи, коли частота періодичного параметричного навантаження лежить в зоні головного простого резонансу (3). У першому наближенні приймається, що при побудові областей стійкості в зоні простого резонансу достатньо розглянути одне рівняння системи (5). При цьому доданки, що містять недіагональні елементи матриці геометричної жорсткості, будуть більш високого порядку малості і не враховуються. За допомогою методу усереднення для зазначених випадків будуються моментні рівняння і задача побудови областей стійкості зводиться до задачі на власні значення [3].

Для різних задач будуються області стійкості при параметричному навантаженні, яке представляється гармонічним навантаженням і як сума гармонічного і стохастичного, причому стохастична складова є випадковим процесом з прихованою періодичністю, а кореляційну функцію можна представити виразом:

$$\langle f(t) f(t+\tau) \rangle = \left[ \cos(\theta_\alpha |\tau|) + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin(\theta_\alpha |\tau|) \right] \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|), \quad \theta^2 = \theta_\alpha^2 + \alpha^2, \\ S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha \theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}; \quad \Psi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\omega(\omega^2 - \theta^2 + 4\alpha^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}, \quad (6)$$

де  $\theta$  - прихована частота,  $\sigma^2$  - дисперсія,  $\alpha$  - радіус кореляції.

### Динамічна стійкість плоскої форми згину балки

Області стійкості побудовані при параметрах при параметрах  $\omega_1=0,6 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2=2,4 \text{ рад/с}$ ,  $h_1=12$ ,  $h_2=4$ ,  $\alpha=k(\omega_1+\omega_2)$ ,  $\theta_\alpha=1$ ,  $\xi=0,01$ .

На рис. 1 межі стійкості показані відносно перших моментів, на рис. 2 – відносно других. Суцільна товста лінія відповідає межах стійкості при гармонічному параметричному навантаженні. Інші графіки на рис. 1,а і рис. 2,а побудовані при  $\sigma^2=1.0$ ; на рис. 1,б і рис. 2,б – при  $\sigma^2=2.0$ . Штрихові лінії відповідають  $k=2$ , суцільні тонкі -  $k=0.5$ , штрихпунктирні -  $k=0.25$ . З наведених графіків видно, що врахування додаткового випадкового навантаження змінює конфігурацію областей нестійкості.

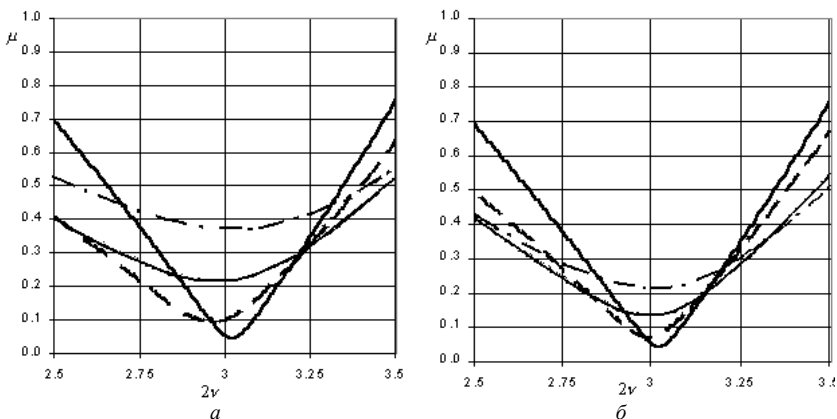


Рис. 1

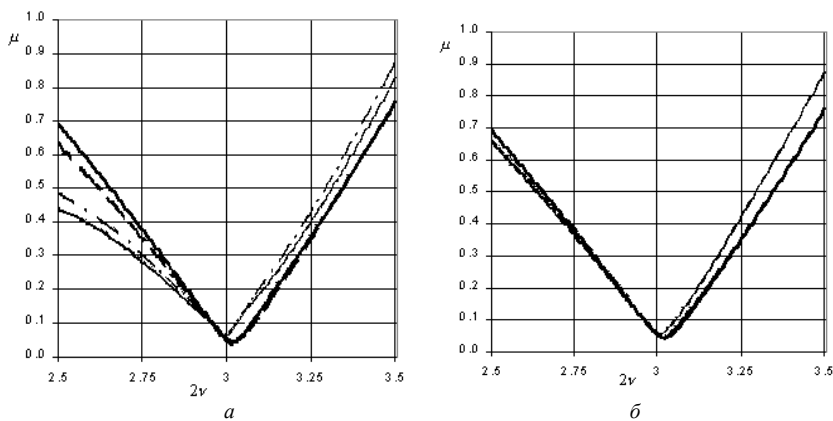


Рис. 2

### Головна балка робочої площадки

Області динамічної нестійкості в зоні простого головного резонансу наведені на графіках рис. 3 [4]. Суцільною лінією показані межі стійкості при гармонічному параметричному навантаженні, інші графіки відповідають випадку, коли в параметричному навантаженні присутня стохастична складова.

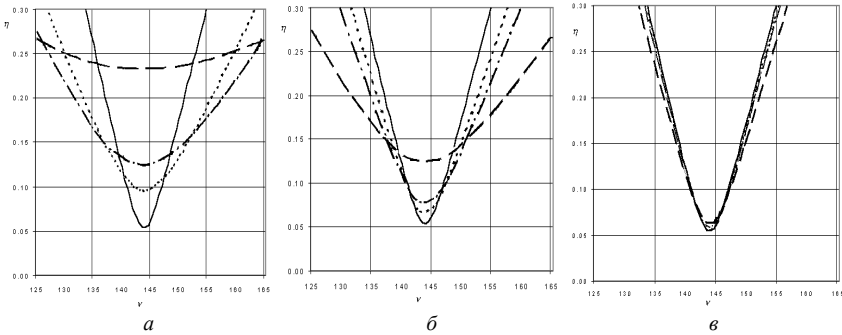


Рис. 3. Області стійкості балки робочої площадки

На рис. 3,а межі стійкості в зоні головного резонансу  $2\tilde{\omega}_1$  побудовані для різних значень радіуса кореляції при  $\theta=10\text{rad/s}$ . Стандарт стохастичного навантаження  $\sigma$  прийнятий 10% від значення  $N_0$ . Штриховою лінією показані межі стійкості при радіусі кореляції  $\alpha=2\tilde{\omega}_1$ , штрихпунктирною – при  $\alpha=0.5\tilde{\omega}_1$ , пунктирною – при  $\alpha=0.25\tilde{\omega}_1$ . На рис. 3,б) аналогічним чином показані межі стійкості в зоні головного резонансу для різних значень радіуса кореляції при  $\theta=20\text{rad/s}$ . При збільшенні частоти прихованої періодичності стабілізуюча дія стохастичної складової зменшується. Це видно з рис. 3,в), де показані межі стійкості при  $\theta=\tilde{\omega}_1 \approx 72\text{rad/s}$ , а при  $\theta=100\text{rad/s}, 144\text{rad/s}(2\tilde{\omega}_1)$ ... графіки практично не відрізняються один від одного.

### Трубопровідні системи

На рис. 4 на всіх графіках суцільною лінією показані межі областей стійкості при гармонічному параметричному навантаженні [5]. Графіки, що зображені на рис. 4,а) побудовані при  $\theta=5\text{rad/s}$  і  $\sigma^2=0,01$ , на рис. 4,б – при  $\theta=5\text{rad/s}$  і  $\sigma^2=0,02$ , на рис. 3,в – при  $\theta=10\text{rad/s}$  і  $\sigma^2=0,02$ ; на рис. 3,г – при  $\theta=20\text{rad/s}$  і  $\sigma^2=0,02$ . Штриховою лінією

показані межі стійкості при  $\alpha=2\omega_0$ , пунктирними при  $\alpha=0,5\omega_0$  і  $\alpha=0,25\omega_0$ .

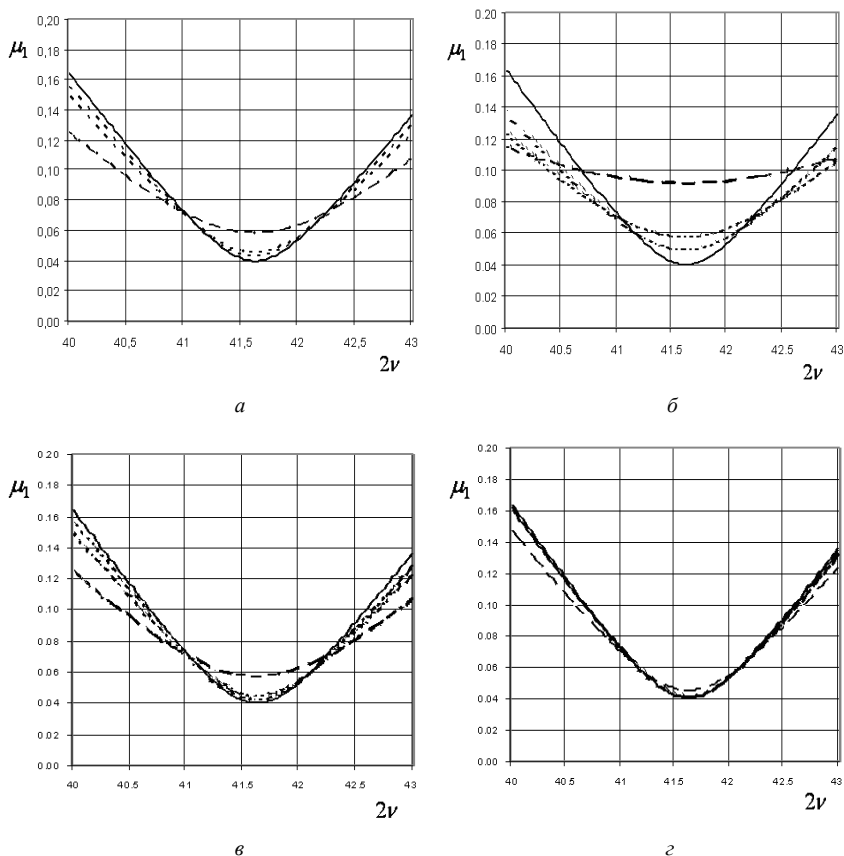


Рис. 4. Межі областей стійкості при періодично нестационарному навантаженні

### Висновки

Аналіз результатів показує, що стохастичні флуктуації створюють стабілізуючий ефект. При збільшенні несучої частоти випадкового процесу межа стійкості при періодично нестационарному навантаженні наближається до межі стійкості при гармонічному параметричному навантаженні. При збільшенні параметра кореляції випадкового процесу стійкість системи збільшується безпосередньо у зоні резонансу і

зменшується зі зростанням різниці між частотами гармонічної і стохастичної складових. Збільшення дисперсії збільшує стабілізуючий ефект флуктуацій випадкового процесу. Таким чином підбравши параметри додаткової вібрації можна збільшити динамічну стійкість системи.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В., Гончаренко М.В.* Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні // *Авиационно-космическая техника и технология*, 2004. – вып.3(11). – с.51-58.
2. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем /* Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.
3. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Аналіз стійкості пружних систем в зонах простих і комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні // *Опір матеріалів і теорія споруд*. - К.: КНУБА, 2004, Вип. 74. - с.115-123.
4. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Дослідження параметричних резонансів комбінованої пластинчато-стержевої системи // *Опір матеріалів і теорія споруд*. - К.: КНУБА, 2004, Вип. 75. – с.47-56.
5. *Гончаренко М.В.* Динамічна стійкість трубопровідних систем при періодично нестационарному параметричному навантаженні // *Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-тех. збірн.* - К.: КНУБА, 2010 р. – Вип. 85. – с. 153-163.
6. *Диментберг М.Ф., Фролов К.В.* Колебания системы с одной степенью свободы при действии периодической силы и изменении собственной частоты по случайному закону // *Машиноведение*, 1966. - №4
7. *Челомей В.Н.* Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. – М.: Редиздат Аэрофлота, 1939. – 79с.
8. *Ariaratnam S.T., Tam D.S.* Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator// *ZAMM*, 56, 1976. – p.449-452.

*Стаття надійшла до редакції 28.06.2013 р.*

*Ворона Ю.В., Гончаренко М.В.*

#### **СТАБИЛИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПУТЕМ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НАВЕДЕННЫХ ПОЛЕЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВИБРАЦИИ**

Рассматриваются вопросы, связанные с влиянием стохастического характера параметрической нагрузки на стабилизацию устойчивости динамических упругих систем. Границы областей динамической устойчивости строятся, исходя из определения устойчивости относительно моментных функций. Рассматриваются задачи устойчивости плоской формы изгиба балки и трубопроводных систем при периодически нестационарном параметрическом воздействии. Построены области устойчивости для разных случаев, что позволяет обобщить влияние стохастической составляющей параметрического возбуждения на структуру областей динамической устойчивости и сделать выводы касательно возможности стабилизации колебательных процессов.

*Vorona Y., Goncharenko M.*

**STABILIZATION DYNAMIC SYSTEMS STABILITY BY PARAMETERS VARIATION OF INDUCED FIELD ADDITIONAL VIBRATION**

The stabilization effect of parametric additional random excitation on the dynamic stability of elastic systems is studied. The boundaries of dynamic regions of stability are constructed with regard to moment functions. Cases of dynamic stability of a beam uniplanar bending and pipeline system is considered when parametric load to represent by periodical non stationary process. Regions of dynamic probability stability is obtained for various example that is allowed to abstract influence of stochastic parametric load on dynamic stability regions structure and draw a conclusion about stabilization possibility of vibrating process.



УДК 539.4

С.В. Кобельський, канд. техн. наук

## ВИКОРИСТАННЯ КОНЦЕПЦІЇ $J$ -ІНТЕГРАЛА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ВЕЛИЧИН КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ КОРПУСА РЕАКТОРА ВВЕР-1000 ПРИ АВАРІЙНОМУ ОХОЛОДЖЕННІ

Для характерного режиму аварійного охолодження корпусу реактора ВВЕР-1000 проаналізовано результати визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень з використанням концепції  $J$ -інтеграла на сітках скінченних елементів різної густини.

**Вступ.** Забезпечення умов безпечної експлуатації атомних енергетичних установок і, зокрема корпусів реакторів (КР), як найбільш важливих їх елементів, - одне з важливих науково-практичних завдань. Одним з перспективних шляхів вирішення цього завдання є математичне моделювання кінетики термомеханічного стану корпусу реактора, що потребує розв'язання нестационарних нелінійних задач термомеханіки. Розрахункове обґрунтування міцності КР проводиться на основі аналізу визначальних величин параметрів механіки руйнування – коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

Складність задачі, що розглядається, значний об'єм розрахунків, необхідність проведення багатоваріантних розрахунків практично унеможливлене під час розв'язання практичних задач методом скінченних елементів (МСЕ) обґрунтування збіжності отриманих результатів. У більшості випадків для конструкцій складної форми розрахунки проводяться на сітках скінченних елементів з величиною кроку в околиці точок фронту тріщини 0,5–1 мм.

Метою роботи є аналіз результатів визначення КІН, які розраховуються з використанням концепції  $J$ -інтеграла на різних сітках скінченних елементів.

**Постановка задачі.** Для характерного режиму аварійного охолодження (термошоку) проаналізовані дві розрахункові моделі КР ВВЕР-1000 – з вбудованою та без вбудованої тріщини (рис. 1). Постулюється кільцева напівеліптична піднаплавочна тріщина глибиною  $a=15$  мм зі співвідношенням напівосей  $a/c=1/3$  [1, 2], яка розташована на рівні зварного з'єднання № 4. Використовується процедура вбудовування тріщини в скінченноелементну модель фрагмента корпусу.

**Метод розрахунку та використане програмне забезпечення.** Задача вирішується у тривимірній постановці з використанням змішаної схеми методу скінченних елементів (ЗМСЕ) [3]. Схема реалізована у розрахунковому коді **SPACE-RELAX**, який за розпорядженням НАЕК “Енергоатом” № 124-р від 12.02.2010 включено до переліку розрахункових кодів, дозволених до використання при обґрунтуванні безпеки ядерних енергетичних установок.

У рамках ЗМСЕ розроблено нові просторові змішані скінченні елементи - у формі шестигранної 8-вузлової призми (ЗКЕ-1) та у формі тетраедра (ЗТЕ-1), з апроксимацією напружень і деформацій за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно вершин і центру елементів [4, 5]. Як показано в [4], сумісне використання елементів ЗТЕ-1 і ЗКЕ-1 забезпечує можливість отримання розв'язку задачі в пружнопластичній постановці, що не суперечить теоретичним положенням мілкомасштабної пластичної течії для розподілу напружень в околиці вершини тріщини.

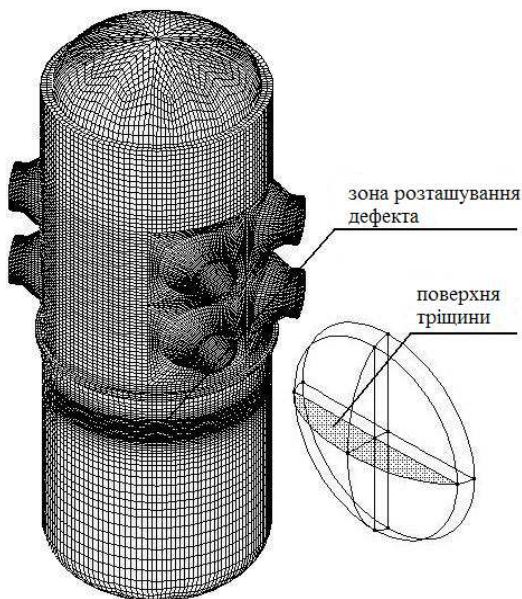


Рис. 1. Розрахункова модель корпусу реактора ВВЕР-1000

При розв'язанні задачі в пружнопластичній постановці процес навантаження розбивається на окремі часові етапи, в межах кожного з яких розв'язується пружнопластична задача з урахуванням залишкових пластичних деформацій, визначених на попередньому етапі. Для

розв'язання пружнопластичної задачі на поточному етапі навантаження використовується двохступеневий ітераційний процес. Задача теорії пластичності розв'язується методом змінних параметрів пружності, а на внутрішніх кроках по пружності задачі розв'язуються з використанням методу спряжених градієнтів з нульовим початковим наближенням.

Визначення величин коефіцієнтів інтенсивності напружень. Для визначення величин КІН використовується концепція  $J$ -інтеграла. В задачах лінійної та нелінійної теорії пружності, а також деформаційної теорії пластичності, величина  $J$ -інтеграла характеризує швидкість вивільнення енергії при віртуальному нескінченно малому підростанні тріщини [6, 7]. Можливість використання концепції  $J$ -інтеграла обмежена наступними вимогами: матеріал є нелінійно-пружним та однорідним, при пружнопластичному деформуванні навантаження зростає пропорційно одному параметру, тобто можливо використовувати деформаційну теорію пластичності. Використання  $J$ -інтеграла в теорії течії теоретично не обґрунтовано.

В представленій роботі для обчислення величини  $J$ -інтеграла використано запропонований Г.П. Нікішковым метод еквівалентного об'ємного інтегрування (ЕОІ) [8]. В методі ЕОІ енергетичний  $J$ -інтеграл визначається як інтеграл по поверхні  $A_\varepsilon$  малої трубки радіусу  $\varepsilon$  та довжиною  $\Delta$ , коаксіальної до лінії фронту тріщини (рис. 2) і, після перетворень, представляється у вигляді

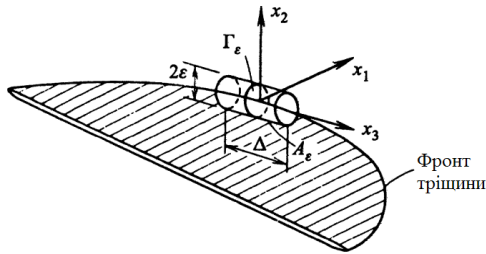


Рис. 2. Сегмент фронту тріщини та система координат

$$J_k = -\frac{1}{f} \int_{V-V_\varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} (W_s) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} s) \right) dV + \\ + \frac{1}{f} \int_{A_1+A_2} (W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j) s dA + \frac{1}{f} \int_{A_c} (W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j) s dA. \quad (1)$$

Тут  $V$  – об'єм трубки;  $V_\varepsilon$  – об'єм отвору навколо фронту тріщини;  $A_1$ ,  $A_2$  – бокові поверхні трубки;  $A_c$  – поверхня тріщини;  $s$  – неперервна

безрозмірна функція;  $f = \int_0^\Delta s dx_3$ ;  $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}^{ep}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{ep}$  – щільність енергії деформації (робота напружень на механічній частині деформацій) (рис. 3).

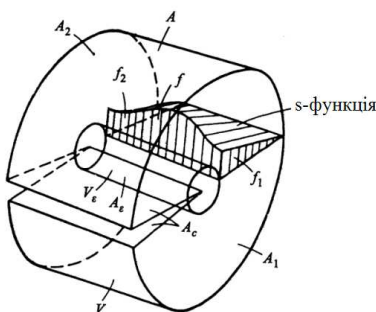


Рис. 3. Об'єм у вигляді диска довкола сегменту фронту тріщини

використовується також формула інтегрування від початкового (нульового) стану до кінця етапу навантаження, що розглядається (3) (інтегрування по трикутнику, рис. 4).

$$\tilde{W}_1 = \frac{1}{2} \{\sigma_1\} \{\varepsilon_1\}, \quad \tilde{W}_2 = \frac{1}{2} \{\sigma_2\} \{\varepsilon_2\}, \quad \dots \quad (3)$$

В подальшому, “ $J$ -інтеграл, трикутник”, “ $J$ -інтеграл, трапеція” означає, що при обчисленні КІН за допомогою  $J$ -інтеграла, величина  $W$  обчислюється інтегруванням по трикутнику (трапеції). Якщо інше не обумовлено, вважається, що обчислення щільності енергії деформації виконується інтегруванням по трапеції.

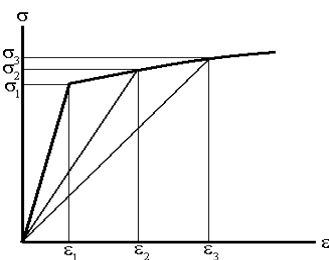


Рис. 4. Два способи обчислення щільності енергії деформації

Для обчислення величини  $W$ , що входить в (1), використана формула інтегрування по трапеції (2) в межах етапу навантаження, яка дозволяє враховувати зміну напружень і деформацій в процесі навантаження (рис. 4)

$$W_i = \frac{1}{2} \sum_i (\{\sigma_i\} + \{\sigma_{i+1}\}) (\{\varepsilon_{i+1}\} - \{\varepsilon_i\}). \quad (2)$$

Тут та надалі індексами позначені номери етапів навантаження.

Але в практиці розрахунків

але в практиці розрахунків  $J$ -інтеграла може проводитися при різному виборі об'єму  $V_\varepsilon$  отвору навколо фронту тріщини  $i$ , відповідно, поверхні  $A_\varepsilon$  малої трубки. На рис. 5 показано ряд контурів елементів навколо точки на фронті тріщини. В подальшому, “обчислення  $J$ -інтеграла по  $n$ -му контуру” означає, що об'єм  $V_\varepsilon$  охоплює контури елементів  $1 \dots n-1$  навколо точки на фронті тріщини.

**Розв'язання задачі в пружній постановці та в пружнопластичній без урахування історії навантаження.** На рис. 6 наведені графіки температурної залежності відносних значень КІН, обчислених для найбільш глибокої точки тріщини на різних сітках, для різних об'ємів  $V_\varepsilon$ . Наведені на всіх графіках величини КІН нормувались величиною КІН, що

була визначена для тріщини з параметрами сітки  $21 \times 5.5$  мкм при розбитті на тетраедри 5 шарів скінченних елементів навколо точки її фронту.

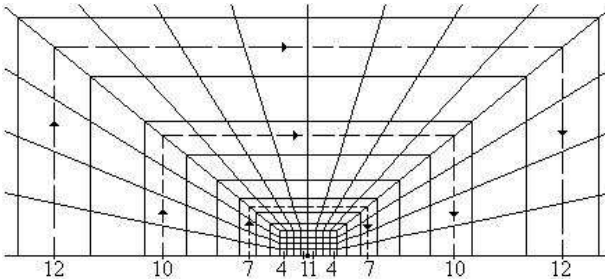
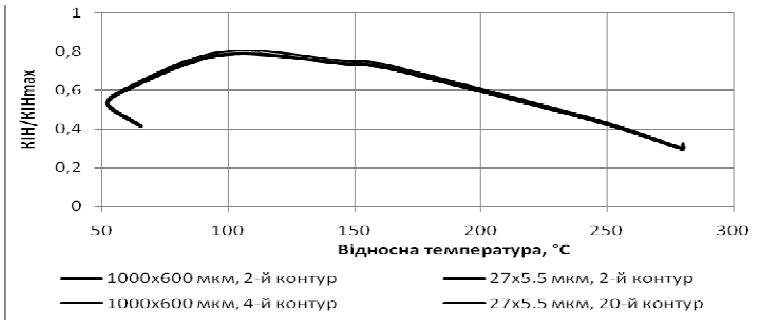
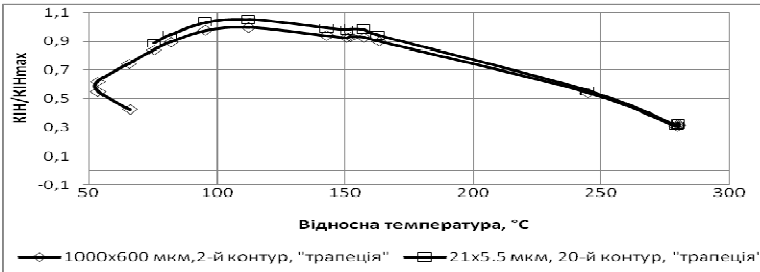


Рис. 5. Контури елементів навколо точки на фронті тріщини



*a*



*b*

Рис. 6. Температурна залежність відносних значень КІІ в найбільш глибокій точці тріщини: *a* – в задачі теорії пружності; *b* – в задачі теорії пластичності без урахування історії навантаження

З аналізу даних випливає, що при розв'язанні задачі в пружній постановці різниця у відносних величинах КІІ, обчислених на ближчих

та дальших контурах, не перевищує 3%. В задачі теорії пластичності без урахування історії навантаження для дальніх контурів (4-й для сітки 1000×600 мкм, 20-й для сітки 21×5.5 мкм) ця різниця склала 7%. Це узгоджується з рекомендаціями [8] стосовно того, що в якості  $V_e$  слід обирати шар елементів, що безпосередньо прилягає до фронту тріщини.

**Розв'язання задачі в пружнопластичній постановці з урахуванням історії навантаження.** При розв'язанні задачі в пружнопластичній постановці з урахуванням історії навантаження аналізувалась чуттєвість величин КІН, що визначались, до наступних факторів:

- вплив способу обчислення щільності енергії деформації;
- використання вихідної моделі КР з вбудованою тріщиною та без неї;
- використання сіток скінченних елементів різної густини;
- різна триангуляція зони в околиці фронту тріщини.

Аналіз впливу способу обчислення щільності енергії деформації. На графіках, наведених на рис. 7, аналізується вплив способу обчислення щільності енергії деформації на величину КІН при використанні концепції  $J$ -інтеграла.

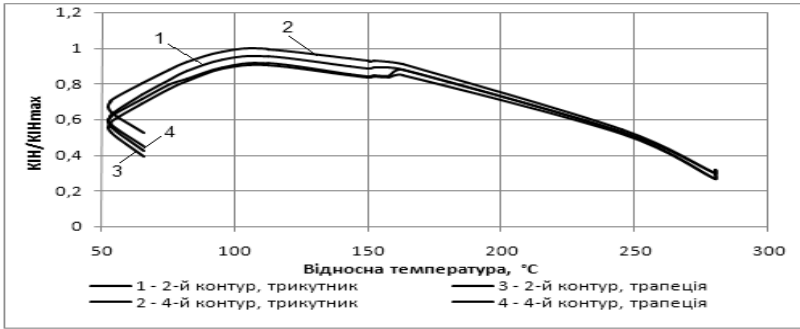
Розглядаються сітки 1000×600 мкм (рис. 7,а), 47,5×27,5 мкм (рис. 7,б), 21×5,5 мкм (рис. 7,в), результати зіставлені для різних варіантів вибору об'ємів  $V_e$ . Аналіз показав, що для всіх сіток і практично всіх розглянутих варіантів вибору об'ємів  $V_e$ , величини КІН, отримані при обчисленні щільності енергії деформації інтегруванням по трикутнику, виявились більшими від отриманих при обчисленні інтегруванням по трапеції. Відмінність тим більша, чим далі розташований вибраний об'єм  $V_e$  від точки на фронті тріщини. Під час вибору у вигляді  $V_e$  шару елементів, найближчого до точки фронту, найбільша відмінність становила для сітки 21×5,5 мкм  $\approx 3\%$ , для сітки 47,5×27,5 мкм  $\approx 4\%$ , для сітки 1000×600 мкм  $\approx 9\%$ .

Аналіз впливу наявності тріщини у вихідній моделі КР. На рис. 8 для задач, які розв'язували на трьох сітках (1000×600 мкм, 400×275 мкм, 47,5×27,5 мкм) за наступних умов:

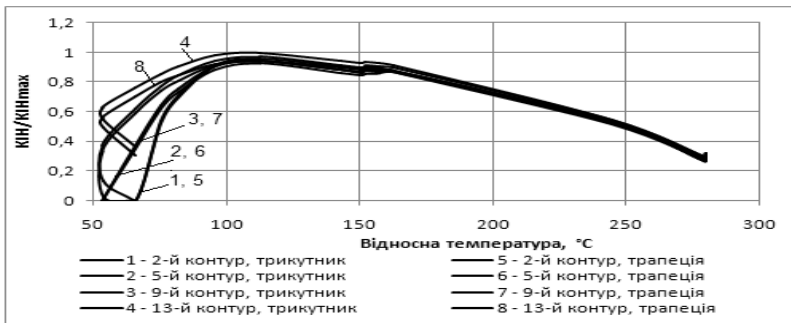
- 1 - вихідна модель КР з вбудованою тріщиною;
- 2 - вихідна модель КР без вбудованої тріщини,

представлені результати визначення параметрів руйнування – розкриття та КІН.

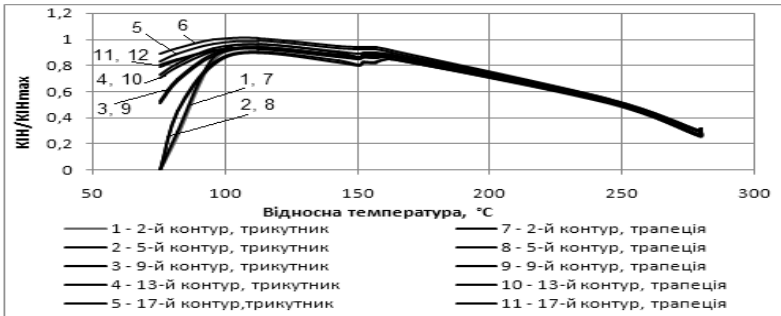
Аналіз результатів дозволяє зробити висновки про недоцільність вбудовування тріщини у вихідну повну модель КР.



a

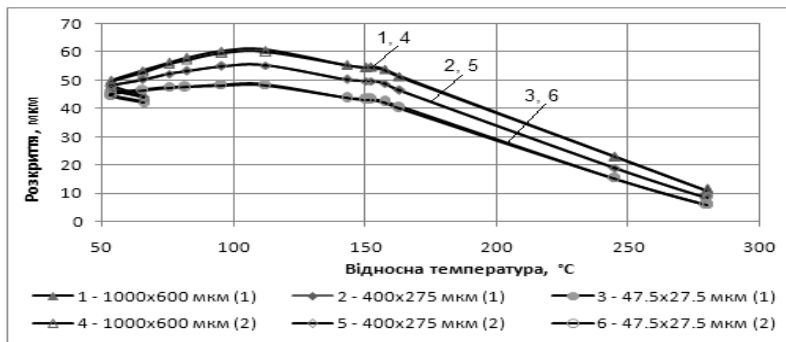


б

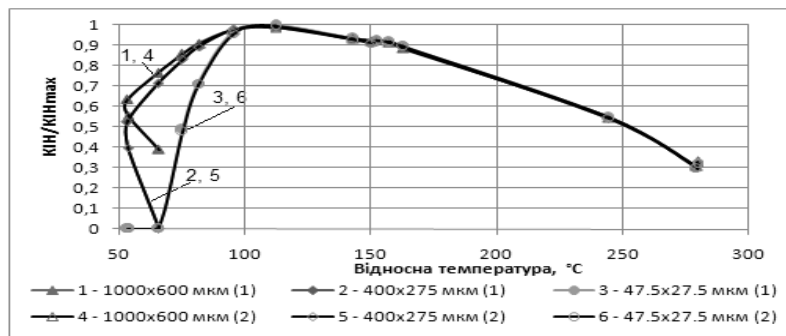


в

Рис. 7. Графіки відносних значень КІН, отримані для різних способів обчислення щільності енергії деформації: а – сітка 1000×600 мкм, б – сітка 47,5×27,5 мкм, в – сітка 21×5,5 мкм



а



б

Рис. 8. Графіки результатів розрахунку параметрів руйнування:  
а – розкриття; б – відносних значень КІН

Характер графіків зміни КІН (рис. 8,б) показує, що на етапах активного навантаження вплив величини кроку сітки є мінімальним. Однак зі зменшенням кроку гілка графіка, що спадає, відхиляється все більше в правий бік та має тенденцію до перетворення у вертикальну. Так, для сітки  $21 \times 5,5$  мкм останнє значення КІН отримане для моменту часу 2000 с, тоді як для сітки  $1000 \times 600$  мкм отримані значення КІН до часу 6400 с. Очевидно, що результати визначення температури крихкості металу [2, 10], отримані при використанні цих даних, будуть різнитись.

Аналіз впливу розміру зони триангуляції в околиці фронту тріщини.  
Триангуляція – це розбиття на тетраедри скінченних елементів в околиці фронту тріщини.

Для аналізу використані результати, отримані на сітці  $21 \times 5,5$  мкм при розбитті на тетраедри 3, 5 і 9 шарів скінченних елементів, які оточують точку фронту тріщини (рис. 5).



Для етапів активного навантаження результати практично співпадають (відмінність не перевищує 1%). При розвантаженні зі збільшенням числа шарів тетраедрів гілка графіка, що спадає, стає менш крутою в області, яка не є важливою, наприклад, при визначенні температури крихкості металу.

Отже, можна стверджувати, що при розв'язанні задач достатньо розбивати на тетраедри три шари елементів в околиці точки фронту тріщини.

На рис. 9 зіставлені відносні значення КІН, розраховані за допомогою  $J$ -інтеграла для різних варіантів вибору об'ємів  $V_e$  при розбитті на тетраедри 3 і 9 шарів скінченних елементів, які оточують точку фронту тріщини.

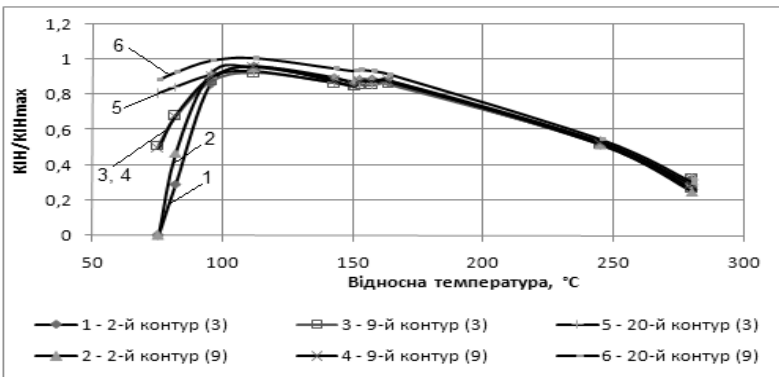


Рис. 9. Графіки відносних значень КІН, розрахованих при розбитті на тетраедри різного числа шарів елементів

Видно, що найбільше відрізняються результати, отримані при виборі в якості  $V_e$  шару елементів, розташованого якнайдалі від фронту тріщини, причому це справедливо як для етапів активного навантаження, так і для розвантаження.

Використання сіток різної густини. На рис. 10 співставлені відносні значення КІН, обчислені на сітках  $1000 \times 600$  мкм,  $47,5 \times 27,5$  мкм,  $21 \times 5,5$  мкм. На етапах активного навантаження найбільша різниця в величинах КІН між сітками  $1000 \times 600$  мкм та  $21 \times 5,5$  мкм становить  $\approx 5\%$ . Але на етапах розвантаження результати суттєво відрізняються - чим використовується більш густа сітка, тим більше відхиляється вправо графік КІН.

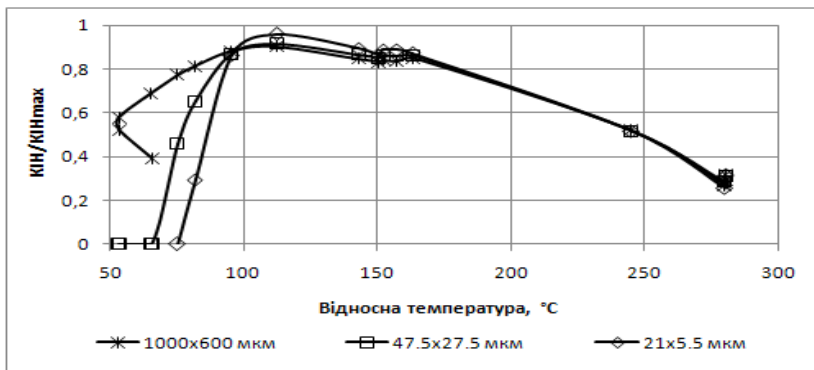


Рис. 10. Графіки відносних значень КІН, розрахованих на різних сітках

*Розрахунок КІН вздовж фронту тріщини.* На рис. 11 співставлені графіки розподілу відносних значень КІН вздовж фронту тріщини, які побудовані для сітки з кроком 600 мкм в площині, перпендикулярній до фронту тріщини та з рівномірним кроком вздовж фронту (без коефіцієнта згущення), і також для двох сіток з кроком 5,5 мкм у площині, перпендикулярній до фронту тріщини, одна з яких мала рівномірний крок вздовж фронту тріщини (величина кроку  $\approx 1400$  мкм), а інша згущувалась до глибокої точки та до кінця тріщини. Величини КІН, розраховані на сітці зі згущенням, виявились вищими за розрахованих на рівномірній сітці. Результати, отримані для сітки з дуже великою різницею в кроках (5,5 $\times$ 1400 мкм) можна вважати неконсервативними, а такі сітки неприйнятними для використання.

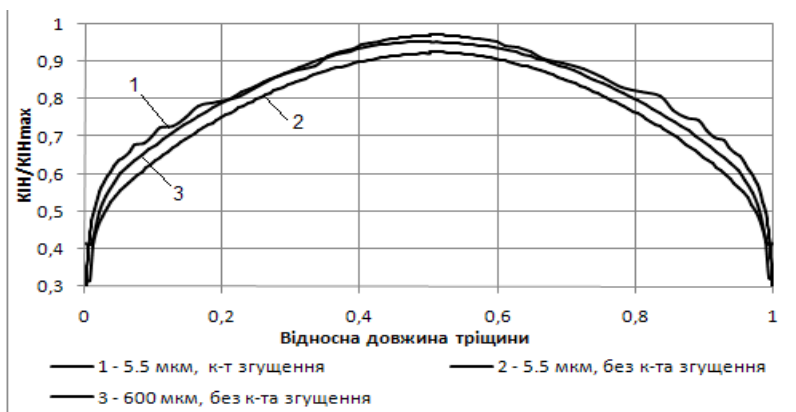


Рис. 11. Графіки розподілу відносних значень КІН вздовж фронту тріщини

### Висновки.

1. Для характерного режиму аварійного охолодження корпусу реактора ВВЕР-1000 проаналізовані способи визначення коефіцієнтів інтенсивності навантажень, які ґрунтуються на використанні концепції  $J$ -інтеграла.

2. При розв'язанні задачі в пружній постановці та в пружнопластичній постановці без урахування історії навантаження різниця в значеннях КІН несуттєва незалежно від того, який контур інтегрування обирається.

3. Результати обчислення КІН, отримані при використанні вихідної повної моделі КР з вбудованою та без вбудованої тріщини, практично співпадають, що свідчить про недоречність вбудовування тріщини до вхідної повної моделі КР, однак, згідно з вимогами МАГАТЕ, тріщина має бути вбудована у фрагмент КР, який розглядається.

4. При використанні концепції  $J$ -інтеграла в 3D постановці у якості отвору навколо фронту тріщини потрібно вибирати шар елементів, які є безпосередньо суміжними з фронтом тріщини.

5. При використанні концепції  $J$ -інтеграла в 3D постановці розрахунок щільності енергії деформації інтегруванням по трапеції призводить до отримання менш консервативних результатів у порівнянні з розрахунком інтегрування за трикутником.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. МТ-Д.0.03.391-09. Методика оценки прочности и ресурса корпусов реакторов ВВЭР в процессе эксплуатации. – Киев, 2009. – 50 с.
2. РД ЭО 0606-2005. Методика расчёта на сопротивление хрупкому разрушению корпусов реакторов АЭС с ВВЭР (МРКР – СХР – 2004). – СПб.; М., 2004. – 65 с.
3. Чирков А.Ю. Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – К.: Изд-во Ин-та пробл. прочности, 2003. – 250 с.
4. Кобельський С.В. Чисельний аналіз просторових задач теорії тріщин на основі змішаної схеми метода скінчених елементів. - Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 88. – К.: КНУБА, 2011. – С. 147-156.
5. Кобельський С.В. Аналіз змішаних скінчених елементів стосовно задач пружнопластичного деформування та механіки руйнування. - Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 89. – К.: КНУБА, 2012. – с.131-142.
6. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974.– 640 с.
7. deLorenzi H.G. On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations. – Int. Journ. of Fracture 19 (1982). – P.182-193.
8. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.

*Стаття надійшла до редакції 19.06.2013 р.*

*Кобельский С.В.*

**ПРИМЕНЕНИЕ КОНЦЕПЦИИ  $J$ -ИНТЕГРАЛА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЕЛИЧИН  
КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ КОРПУСА  
РЕАКТОРА ВВЭР-1000 ПРИ АВАРИЙНОМ ОХЛАЖДЕНИИ**

Для характерного режима аварийного охлаждения корпуса реактора ВВЭР-1000 проанализированы результаты определения коэффициентов интенсивности напряжений с использованием концепции  $J$ -интеграла на сетках конечных элементов различной густоты.

*Kobelsky S.V.*

**APPLICATION OF THE  $J$ -INTEGRAL CONCEPTION TO EVALUATION OF STRESS  
INTENSITY FACTORS FOR THE WWER-1000 RPV UNDER SIMULATED  
EMERGENCY COOLING REGIME**

Results of numerical evaluation of stress intensity factors using the  $J$ -integral conception are being analyzed for the finite element meshes of various densities.

УДК 539.3

І.В. Жупаненко, канд. техн. наук

## ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ НЕОДНОРІДНОГО ПОРОЖНИННОГО ТОВСТОСТІННОГО ЦИЛІНДРА

З позиції просторової задачі теорії пружності досліджено власні вісесиметричні коливання неоднорідного товстостінного циліндра скінченної довжини при різних граничних умовах на торцях. Вихідні рівняння теорії пружності в частинних похідних узагальненим методом скінчених інтегральних перетворень зведено до задачі на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку, яку розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації спільно з методом покрового пошуку. Достовірність результатів, отриманих по запропонованій методиці, досліджено при розв'язанні тестових задач.

**Вступ.** Актуальність задачі про визначення динамічних характеристик порожнинних циліндрів скінченної довжини визначається широким застосуванням конструктивних елементів і деталей циліндричної форми в будівництві, машинобудуванні, авіаційній, нафтовій і газовій промисловості, багатьох інших галузях сучасної техніки.

Разом з тим, останнім часом створюються і впроваджуються нові композитні матеріали, фізичні властивості яких можна регулювати, задаючи необхідний плавно змінний розподіл модуля пружності в заданому напрямку. При цьому підвищуються вимоги до точності оцінки міцності тіла, виникає потреба більш повного врахування реальних властивостей конструктивного матеріалу і дослідження впливу фізичних властивостей матеріалу на динамічні характеристики об'єкта.

Дослідженню вільних коливань циліндричних тіл присвячена значна кількість робіт, наприклад [1], проте лише в окремих з них розглядається задача про коливання циліндричних тіл зі змінними фізико-механічними властивостями вздовж деякого напрямку. В даній статті неоднорідні порожнинні циліндри розглядаються з позиції теорії товстостінних оболонок обертання сталої товщини. Для розв'язання задачі про власні коливання таких об'єктів застосовано узагальнений метод скінчених інтегральних перетворень в поєднанні з методом покрового пошуку.

**Постановка задачі.** Розглядається пружне тіло, внутрішня та зовнішня поверхні якого є круговими циліндрами радіусом відповідно  $R_0$  та  $R$ . Товщина  $h = R - R_0$  співрозмірна з його довжиною  $L$ .

В якості вихідних рівнянь прийнято співвідношення лінійної динамічної теорії пружності в вісесиметричній постановці, записані відносно компонент вектора переміщень та напружень в циліндричній системі координат [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{R_0+r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + F_r &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{R_0+r} \sigma_{rz} + F_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{R_0+r} u_r; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda + 2\mu}{R_0+r} u_r; \\ \sigma_{zz} &= \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{R_0+r} u_r; \\ \sigma_{rz} &= \mu \frac{\partial u_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial u_r}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\lambda = E(r) \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mu = E(r) \frac{1}{2(1+\nu)}$ .

**Методика розв'язання задачі.** Редукція по товщині оболонки здійснюється шляхом застосування узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень [3], що базується на розкладі шуканих функцій напружено-деформованого стану оболонки в ряди по системі нормованих поліномів Лежандра:

$$P_i^H(\xi) = \sqrt{\frac{2i+1}{h}} \cdot P_i(\xi) \quad (i=0, 1, 2, \dots, N),$$

де  $P_i(\xi)$  – поліноми Лежандра;  $\xi = \frac{2(r-h_{cp})}{h} (-1 \leq \xi \leq 1)$ ,  $h_c = \frac{R+R_0}{2}$ .

В результаті цього задача зводиться до одновимірної (по просторових координатах) і описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних (по просторовій – поздовжній – і часовій координатах) відносно функціональних коефіцієнтів розкладу по системі нормованих поліномів Лежандра (моментів невідомих функцій напружено-деформованого стану).

За часовою координатою при гармонійному збуджуючому навантаженні приймаємо стаціонарні коливання системи у вигляді стоячих хвиль виду:

$$u_z^i(z, t) = u_{z,0}^i(z) \cdot \sin(\theta \cdot t) \quad (u_z^i \Leftrightarrow u_r^i \Leftrightarrow \sigma_z^i \Leftrightarrow \sigma_r^i \Leftrightarrow \sigma_{zz}^i), \quad (3)$$

в результаті чого після редукції і виключення характеристик, що входять в редуковані рівняння алгебраїчно, задача про власні коливання неоднорідних товстостінних оболонок формулюється як задача на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, записаної в нормальній формі Коші:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot (b^{ij} + \frac{2}{h} \cdot m^{ij}) \cdot u_r^j + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} [b_*^{ij}]^{-1} \cdot \sigma_{zz}^j; \\ \frac{\partial u_r^i}{\partial z} &= -\frac{2}{h} \cdot m^{ij} \cdot u_z^j + [b_*^{ij}]^{-1} \cdot \sigma_{rz}^j; \\ \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= -\frac{\rho \cdot \omega^2}{\mu} \cdot u_z^i - (b^{ij} - \frac{2}{h} \cdot m^{ji}) \cdot \sigma_{rz}^j; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} &= \left( 2 \cdot b^{i\alpha} \cdot b_*^{\alpha k} \cdot b^{kj} - \frac{4}{h} \cdot b^{i\alpha} \cdot b_*^{\alpha k} \cdot m^{kj} + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h} \cdot b^{i\alpha} \cdot b_*^{\alpha k} \cdot m^{jk} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{4}{h^2} \cdot m^{i\alpha} \cdot b_*^{\alpha k} \cdot m^{jk} - \frac{\rho \cdot \omega^2}{\mu} \cdot \delta^{ij} \right) \cdot u_r^j + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \frac{2}{h} \cdot m^{ji} \cdot \sigma_{zz}^j, \quad (4) \end{aligned}$$

з граничними умовами для невідомих вектор-функцій, записаними у вигляді алгебраїчних співвідношень.

Матричні коефіцієнти, що входять в редуковані рівняння (4), описані в [3]. Елементи матриці  $B_* = [b_*^{ij}]$  визначаються для кожного окремого випадку функції  $E(r)$  за формулою:

$$b_*^{ij} = \int_{R_0}^R E(r) \cdot P_i^H(\xi) P_j^H(\xi) dr.$$

У випадку, коли функція  $E$  є поліномом по координаті  $r$ , елементи матриці  $B_* = [b_*^{ij}]$  визначаються точно [4].

Чисельний етап методики полягає в застосуванні для розв'язання отриманих на попередньому етапі редукованих одновимірних крайових задач на власні значення алгоритму покрокового пошуку з розв'язанням двох-точкових лінійних крайових задач  $n$ -го порядку методом ортогональної прогонки С.К. Годунова при інтегруванні відповідних задач Коші за алгоритмом Рунге–Кутта–Мерсона четвертого порядку точності. Докладно алгоритм знаходження частот і форм власних коливань по запропонованій методиці описано в [5].

**Тестові задачі.** Для якісної і кількісної оцінки достовірності запропонованого алгоритму розв'язано тестові задачі, розв'язки яких

порівняно з відомими результатами, отриманими методом сплайн-коллокації.

**Задача 1.** В якості першого прикладу розв'язана задача про визначення частот власних коливань порожнинного циліндра з полімерного функціонально градієнтного матеріалу, що відповідає квадратичному закону зміни модуля Юнга по товщині:

$$E(r)=26,5 \cdot r^2 - 278,5 \cdot r + 839,5$$

$$(E(R-H)=243,0 \text{ МПа}, E(R)=150,0 \text{ МПа}, E(R+H)=110,0 \text{ МПа}).$$

На торцях циліндра змодельовано два варіанти закріплень: умови шарнірного опираючого та жорсткого защемлення.

Щільність матеріалу вважається постійною і рівною усередненому по товщині значенню, коефіцієнт Пуассона  $\nu=0,4$ . Геометричні параметри циліндра: довжина –  $L=5$ , внутрішній радіус –  $R_{\text{внут}}=R-H=3$ , зовнішній радіус –  $R_{\text{зовн}}=R+H=5$ .

В табл. 1 наведено порівняння безрозмірних значень частот власних коливань  $\bar{\omega}=\omega H \sqrt{\rho/E_0}$ , визначених по запропонованій вище методиці на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень (УМСІП) та значень частот, отриманих в роботі [6] на основі методу сплайн-коллокації (МСК). Для більш повної картини наведено також визначені обома методами частоти власних коливань циліндра, матеріал якого має усереднений по товщині модуль пружності  $E_{\text{ср}}=158,33 \text{ МПа}$ .

Таблиця 1

	Модуль Юнга	Метод	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_6$
Шарнірне опираюче	$E_{\text{ср}}$	УМСІП	0,311	0,610	0,673	0,935	1,170	1,200
		МСК	0,302	0,597	0,679	0,962	1,184	1,186
	$E(r)$	УМСІП	0,248	0,538	0,710	0,914	0,944	1,185
		МСК	0,309	0,598	0,654	0,956	1,127	1,700
Защемлення	$E_{\text{ср}}$	УМСІП	0,408	0,633	0,725	1,003	1,177	1,265
		МСК	0,401	0,618	0,722	0,983	1,175	1,264
	$E(r)$	УМСІП	0,409	0,591	0,752	0,968	1,177	1,269
		МСК	0,407	0,605	0,693	0,978	1,150	1,196



**Задача 2.** Для тестування розробленого підходу у випадку лінійного закону зміни модуля пружності по товщині циліндра розглядалась задача про власні вісесиметричні коливання порожнинного ізотропного ( $\nu=0,34$ ) неоднорідного жорстко защемленого по торцях циліндра, матеріал якого має змінний по радіальній координаті модуль пружності:

$$E = \frac{E_0}{1+\alpha} \left[ 1 + \alpha \left( \frac{r}{R-H} \right) \right].$$

Щільність матеріалу вважається постійною. Товщина циліндра –  $2H$ ; радіус серединної поверхні –  $R$ ;  $H/R=0,25$ , довжина –  $L=10$ .

В табл. 2 наведено порівняння безрозмірних значень частот власних коливань  $\bar{\omega} = \omega H \sqrt{\rho/G_0}$ , визначених по запропонованій вище методиці (УМСІП) та значень частот, отриманих в роботі [7] на основі методу сплайн-коллокації (МСК), при різній кількості півхвиль деформації  $m$ , що укладаються на довжині циліндра при коливаннях.

Таблиця 2

$\alpha$	$m^*$	УМСІП	МСК	
0	1	0,464	0,465	
	2	0,501	0,497	
	1	0,622	0,620	
	3	0,769	0,765	
	4	1,027	1,025	
	2	1,104	1,099	
	5	1,310	1,311	
	1	1	0,558	0,4964
		2	0,586	0,5353
		1	0,684	0,6706
3		0,874	0,8217	
4		1,141	1,1036	
2		1,193	1,1947	
2	5	1,440	1,4144	
	1	0,587	0,507	
	2	0,626	0,547	
	1	0,707	0,686	
	3	0,916	0,839	
	4	1,182	1,128	
	2	1,250	1,224	
	5	1,486	1,447	

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Loy C.T. and Lam K.Y. Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // J. Sound and Vibration. – 1999. – 226, № 4. – P. 719 – 737.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. – Лен.: Судпромгиз, 1958.–372 с.
3. Чибіряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонкок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
4. Исаханов Г.В., Чибиряков В.К. Исследование напряженно-деформированного состояния и динамического поведения толстых пластин. Сообщение 1. Методика построения разрешающих уравнений // Проблемы прочности. – 1987. – № 2. – С. 89 – 95.
5. Жуваненко І.В. Власні коливання товстої кільцевої пластини. // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вып. 83. – К.: КНУБА. – 2009.
6. Григоренко А.Я. и др. О свободных осесимметричных колебаниях цилиндров конечной длины из полимерных функционально градиентных материалов // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вып. 8. – С. 92 – 99.

7. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 10. – С. 74 – 85.

*Стаття надійшла до редакції 12.07.2013 р.*

*Жупаненко И.В.*

**ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА С ПОЛОСТЯМИ**

С позиции трехмерной теории упругости исследованы свободные осесимметричные колебания толстостенного цилиндра конечной длины при различных граничных условиях на торцах. Исходные уравнения теории упругости в частных производных обобщенным методом конечных интегральных преобразований сведены к задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, которая решена устойчивым численным методом дискретной ортогонализации совместно с методом пошагового поиска. Достоверность полученных по предложенной методике результатов исследована при решении тестовых задач.

*Zhupanenko I.V.*

**APPLICATION OF THE GENERALIZED METHOD OF FINITE INTEGRAL TRANSFORMATIONS FOR SOLUTION OF NATURAL VIBRATIONS OF THE HETEROGENEOUS THICK-WALLED CYLINDER WITH CAVITIES**

A problem on natural axisymmetric vibrations of finite-length inhomogeneous thick-walled cylinder under various boundary conditions is considered on the basis of 3D theory of elasticity. The original partial equations of the theory of elasticity, using the generalized method of finite integral transforms are reduced to the problem for eigen values for the high order system of ordinary differential equation. The problem is decided by the study-state numerical method of discrete orthogonalization with incremental search. The reliability of the technique has been checked by solving of the test problems.

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук  
**О.П. Кривенко**, канд. техн. наук  
**М.О. Соловей**, д-р техн. наук

## **МАТРИЦЯ МАС МОДИФІКОВАНОГО ПРОСТОРОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА НЕОДНОРІДНОЇ ОБОЛОНКИ**

Розглянута побудова матриці мас універсального просторового скінченного елемента, який призначений для дослідження процесів геометрично нелінійного деформування пружних неоднорідних оболонок при дії навантаження, що змінюється у часі.

Реальні оболонкові конструкції можуть поєднувати у собі різноманітні види неоднорідностей: підкріплення ребрами та накладками; послаблення отворами, виїмками, каналами; потовщення, зміну товщину, зломи та складну форму серединної поверхні обшивки оболонки; багат шарову структуру матеріалу. Потреби практики висувають задачу удосконалення методів дослідження напружено-деформованого стану (НДС) подібних неоднорідних тонкостінних конструкцій.

У роботах [1-5] прийнято, що структура неоднорідної оболонки визначається: 1) наявністю геометричних особливостей за товщиною у вигляді ділянок ступінчасто-змінної та гладко-змінної товщини зі зломом серединної поверхні та отворами; 2) неоднорідністю матеріалу конструктивних елементів оболонки за товщиною та в плані у вигляді комбінації різних багат шарових пакетів, шари яких виготовлені з традиційних і композитних матеріалів [6]. Виходячи з положень геометрично нелінійної тривимірної теорії термопружності, на основі розробленого універсального модифікованого просторового скінченного елемента (СЕ) побудовано розрахункову математичну модель, що враховує вказані неоднорідності оболонкової конструкції, яка розглядається як тривимірне тіло. Розроблено скінченноелементний метод з алгоритмами дослідження геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки тонких пружних оболонок неоднорідної структури при дії статичного термосилового навантаження. Враховуючи, що нелінійне деформування та втрата стійкості оболонок звичайно відбувається як динамічний процес, природньою постає проблема розвитку методик [1-6] для розрахунків неоднорідних оболонок при дії навантажень, що змінюються у часі. Останнє веде до необхідності врахування в рівняннях динаміки членів, що пов'язані з силами інерції.

Розглядаються тонкі пружні змінної товщини неоднорідні оболонки (рис. 1). Оболонка як тривимірним тіло займає в глобальній декартовій системі координат  $x^1, x^2, x^3$  область, що обмежена двома граничними і контурною поверхнями. Фрагменти оболонки розглядаються як ділянки обшивки неперервно-змінної товщини з гладкою серединною поверхнею та зі зломами, або ступінчасто-змінної товщини, на яких розміщені обшивка, ребра, накладки, виїмки, канали, отвори. За товщиною обшивка оболонки та її конструктивні елементи можуть мати багатшарову структуру матеріалу. Вважаємо, що на оболонку діє динамічне навантаження, задане як функція часу.

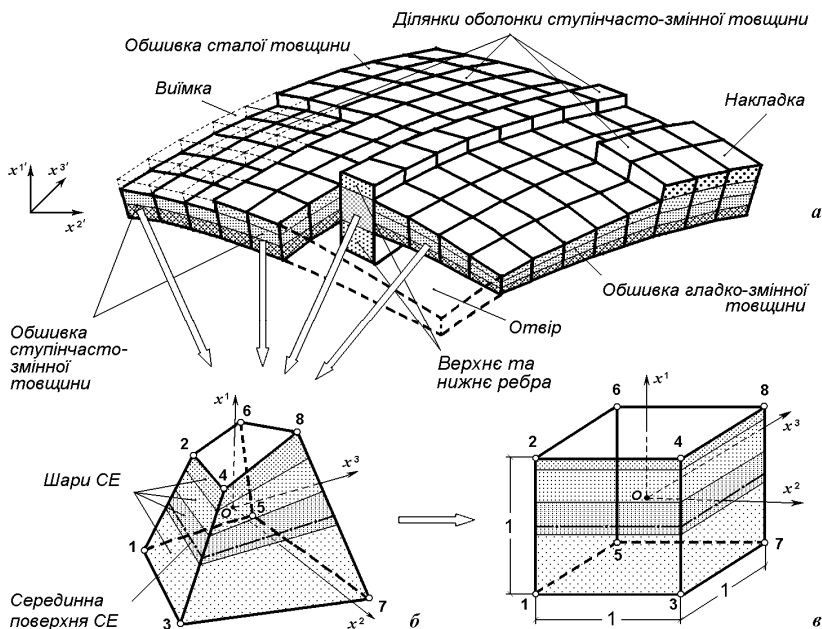


Рис. 1. Моделювання тонкої оболонки неоднорідної структури універсальним просторовим CE

При побудові скінченноелементної моделі [1-5] тонка неоднорідна оболонка на всіх її ділянках для усіх її конструктивних елементів (рис. 1, а). апроксимується за товщиною одним і тим самим універсальним ізопараметричним просторовим CE з полілінійними функціями форми (рис. 1, б). Введені для модифікованого CE додаткові змінні параметри дозволяють враховувати геометричні особливості

конструктивних елементів оболонки і неоднорідність її матеріалу: змінність товщини, зломи обшивки, ребра, накладки, виїмки, отвори, вставки, ексцентричне розташування СЕ щодо серединної поверхні обшивки оболонки, багатшарову структуру матеріалу.

В області СЕ введена нормалізована косокутна місцева система координат  $x^i$  ( $i=1, 2, 3$ ) (рис. 1, б). Прийнято, що координатна вісь  $x^1$  спрямована у напрямку товщини оболонки, але не обов'язково за нормаллю до її серединної поверхні. Місцеву систему координат СЕ можна умовно інтерпретувати як топологічне відображення області СЕ на куб з одиничними ребрами (рис. 1, в), у центрі якого точці  $O$  поміщено початок місцевої системи координат з направленими вздовж ребер куба осями. В масштабах місцевої системи координат відстані між найближчими вузлами (довжини ребер СЕ) дорівнюють одиниці, а координатні осі між собою є ортогональними (рис. 2).

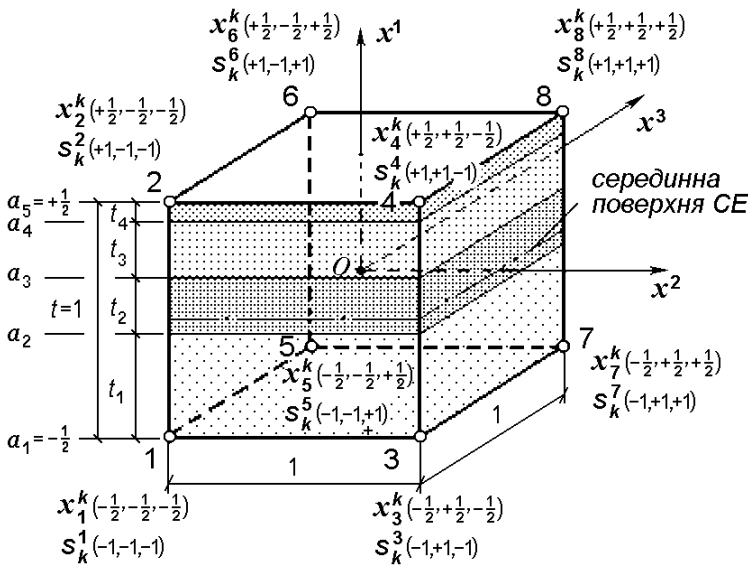


Рис. 2. Місцеві  $x^k$  та сіткові  $s_k$  координати вузлів СЕ

Введені в кожному СЕ місцеві безрозмірні координати  $x^i$  ( $-1/2 \leq x^i \leq +1/2$ ) тотожно співпадають з криволінійними лагранжевими координатами. Таке ототожнення виправдане, оскільки координати кожної матеріальної точки мають сталі значення в будь-який момент часу.

Прийнятий підхід дозволяє за допомогою двох СЕ точно апроксимувати в просторовій скінченноелементній моделі оболонки (СЕМО) геометрію зломів (рис. 3).

Розглядається геометрично нелінійне деформування при великих переміщеннях і малих деформаціях, яке описується тензором скінчених деформацій Коши-Гріна [7]. У

кожному шарі кожного СЕ матеріал може бути лінійно пружним, анізотропним та різним. Прийнято, що проковзування між шарами відсутнє. Співвідношення між компонентами тензорів напружень та деформацій описуються узагальненим законом Гука. У просторовому СЕ за невідомі приймаються вузлові переміщення у декартовій системі координат. Співвідношення МСЕ в [1-5] отримані у формі метода переміщень.

Особливості НДС тонкої неоднорідною оболонки враховані неklasичними кінематичною та статичною гіпотезами. Кінематична гіпотеза сформульована як гіпотеза деформівної прямої - пряма у напрямку товщини оболонки до деформування залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Зазначена пряма не обов'язково є нормаллю до середньої поверхні оболонки. Вона спрямована вздовж осі  $x^1$  місцевої системи координат. У цьому напрямку розподіл переміщень прийнятий лінійним, що є загальноприйнятим припущенням у теорії тонких оболонок. Гіпотеза деформівної прямої дозволяє природнім шляхом виконувати стиковку просторових елементів у зломах та на ділянках ступінчасто-змінної товщини.

Відповідно до статичної гіпотези напруження обтиснення  $\sigma^{11}$  кожного  $n$ -го шару в напрямку товщини оболонки є сталими:  $\partial\sigma_n^{11}/\partial x^1=0$ . На відміну від класичної гіпотези  $\sigma^{11}=0$ , прийняття гіпотези про сталість напружень обтиснення в шарі не позбавляє напружений стан СЕ просторових властивостей і дозволяє використовувати його для моделювання тонких і середньої товщини оболонок.

Розглядання тонкої оболонки з позицій тривимірної теорії пружності без використання класичних гіпотез теорії оболонок відносно геометрії та НДС оболонки дає змогу розширити коло досліджуваних задач та

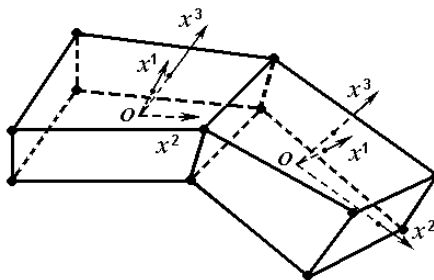


Рис. 3. Моделювання злому в оболонці

спрошує чисельну реалізацію. При цьому відпадає необхідності у виведенні та аналізі складних і громіздких рівнянь різних теорій неоднорідних оболонок, з'являється можливість чисельної оцінки наближених теорій оболонок та пластин.

Розглядаємо просторовий ізопараметричний скінченний елемент об'ємом  $V_{CE}$  з масовою густиною  $\rho = \rho(x^k)$ . Визначаємо прийнятий полілінійний закон зміни функцій координат, переміщень та прискорень в об'ємі CE як

$$x^{i'}(x^k) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left( s_{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right) x_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \quad (1)$$

$$u^{i'}(x^k) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left( s_{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right) u_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \quad (2)$$

$$\ddot{u}^{i'}(x^k) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \prod_{k=1}^3 \left( s_{(k)} x^{(k)} + \frac{1}{2} \right) \ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \quad (3)$$

де  $x^{i'}(x^k)$ ,  $u^{i'}(x^k)$ ,  $\ddot{u}^{i'}(x^k)$  – функції координат, переміщень, та прискорень довільної точки CE в глобальній декартовій системі координат;  $x^k$  – місцеві координати точки CE;  $s_k = \text{sign}(x_{s_1 s_2 s_3}^k)$  – умовні сіткові координати вузлів CE;  $\ddot{u}^{i'} = \partial^2 u^{i'} / \partial t^2$ ,  $t$  – параметр часу;  $x_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$ ,  $u_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$ ,  $\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{i'}$  – вузлові координати, переміщення та прискорення.

Таким чином, стан CE визначаємо значеннями його вузлових координат, переміщень та прискорень, маючи на увазі, що функції  $x^{i'}$ ,  $u^{i'}$ ,  $\ddot{u}^{i'}$  залежать від часу.

При побудові розв'язувальних рівнянь для дослідження динамічного деформування оболонок методом скінченних елементів звичайно використовують принцип можливих переміщень Лагранжа у поєднанні з принципом Даламбера [8], який має вигляд

$$\sum_{CE} (\delta W_{CE} - (\delta K_{CE} + \delta A_{CE})) = 0,$$

де  $K_{CE}$ ,  $W_{CE}$  та  $A_{CE}$  – роботи сил інерції, внутрішніх і зовнішніх сил CE.

Співвідношення для обчислення віртуальної роботи внутрішніх  $\delta W_{CE} = \int_{V_{CE}} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV_{CE}$  та поверхневих і масових зовнішніх сил  $\delta A_{CE}$  для

багатощарового елемента наведені в [3, 5].

При постановці динамічної задачі та для забезпечення збіжності розв'язків будемо використовувати узгоджену матрицю розподілених мас. Вона отримується зведенням розподілених інерційних сил до еквівалентних вузлових зусиль. Коефіцієнти узгодженої матриці мас визначаються при застосуванні апроксимуючих поліномів, що використовуються при побудові матриці жорсткості.

Віртуальну роботу сил інерції СЕ визначаємо як

$$\delta K_{CE} = - \int_{V_{CE}} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dV_{CE} = - \int \int \int \sqrt{g} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dx^1 dx^2 dx^3. \quad (4)$$

Процедура інтегрування (4) здійснюється звичайним для МСЕ чином. Приймаємо величину  $\sqrt{g}$  сталою в межах СЕ. Функції (2) та (3) підставляємо в (4) та виконуємо інтегрування за місцевими координатами у межах СЕ (від  $x^i = -\frac{1}{2}$  до  $x^i = +\frac{1}{2}$ ) з урахуванням його багат шарової структури:

$$\begin{aligned} \delta K_{CE} &= -\sqrt{g} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= -\sqrt{g} \sum_{n=1}^m \int_{x^1=a_n}^{a_{n+1}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \rho_n \ddot{u}^i \delta u^i dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_1=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^i \delta u_{p_1 p_2 p_3}^i (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n (a_{n+1} - a_n) + (s_1 + p_1) \sum_{n=1}^m \rho_n (a_{n+1}^2 - a_n^2) + 4s_1 p_1 \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

де  $a_n$  та  $a_{n+1}$  – координати  $x^1$  вузлових точок на нижній та верхній границях  $n$ -го шару; через багат шаровість елемента густина  $\rho$  прийнята ступінчасто-сталою функцією координати  $x^1$ :

$$\rho = \rho(x^1) = \rho_n, \quad a_n \leq x^1 \leq a_{n+1}.$$

Простий трилінійний вигляд функцій форми (1) – (3) дозволив виконати процедуру інтегрування в (4) аналітично. Введемо позначення:  $x_{O_n}^1 = (a_{n+1} + a_n)/2$  – координата  $x^1$  центра  $n$ -го шару;  $t_n = (a_{n+1} - a_n)$  – товщина  $n$ -го шару.

Тоді (5) набуває вигляду



$$\delta K_{CE} = -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_1 s_2 s_3} \sum_{p_1 p_2 p_3} \ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{i'} \delta u_{p_1 p_2 p_3}^{i'} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n t_n + 2(s_1 + p_1) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 + 4s_1 p_1 \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \right\}. \quad (6)$$

Доведено [3, 5, 8], що при апроксимації тонкої оболонки просторовими СЕ доцільно переходити від вузлових змінних на обмежуючих поверхнях СЕ до розв'язувальних функцій на його серединній поверхні. Такий підхід підвищує стійкість обчислювального процесу до накопичення помилок округлення. В якості нових змінних приймаємо сукупність переміщень і прискорень відповідних вузлових точок на серединній поверхні СЕ  $v_{s_2 s_3}^{k'}$ ,  $\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}$  та їхньої різниці на обмежуючих поверхнях елемента  $v_{s_2 s_3}^{k'}$ ,  $\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}$ . Таким чином

$$v_{s_2 s_3}^{k'} = \frac{u_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} + u_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}}{2}, \quad v_{s_2 s_3}^{k'} = u_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} - u_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}, \quad (7)$$

$$\ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} = \frac{\ddot{u}_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} + \ddot{u}_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}}{2}, \quad \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} = \ddot{u}_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} - \ddot{u}_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}; \quad (8)$$

$$u_{s_1 s_2 s_3}^{k'} = v_{s_2 s_3}^{k'} + \frac{s_1}{2} v_{s_2 s_3}^{k'}, \quad (9)$$

$$\ddot{u}_{s_1 s_2 s_3}^{k'} = \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'} + \frac{s_1}{2} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{k'}. \quad (10)$$

Введені в такий спосіб заміни (9), (10) можна трактувати, як перехід від восьми-вузлового просторового СЕ до чотири-вузлового оболонкового СЕ, що віднесений до його серединної поверхні.

Підставивши співвідношення (9), (10) у (6) та виконавши підсумовування за сітковими координатами  $s_1$  та  $p_1$ , варіацію  $\delta K_{CE}$  подамо як

$$\delta K_{CE} = -\frac{\sqrt{g}}{144} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} (s_2 p_2 + 3)(s_3 p_3 + 3) \times \left\{ \sum_{n=1}^m \rho_n t_n \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 \left( \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right) + \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right\} = - \sum_{\substack{s_2, s_3=\pm 1 \\ p_2, p_3=\pm 1}} \left( m_{\ddot{v} v} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \right.$$

$$\left. + m_{\ddot{u}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} \ddot{u}^{i'} \delta v^{i'}_{p_2p_3} + m_{\ddot{v}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} \ddot{v}^{i'} \delta u^{i'}_{p_2p_3} + m_{\ddot{v}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} \ddot{v}^{i'} \delta v^{i'}_{p_2p_3} \right). \quad (11)$$

Отримані в (11) аналітичні розрахункові формули для коефіцієнтів чотирьох блоків узгодженої матриці мас СЕ  $m_{\ddot{u}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3}$ ,  $m_{\ddot{u}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3}$ ,

$m_{\ddot{v}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3}$ ,  $m_{\ddot{v}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3}$  мають вигляд

$$\begin{aligned} m_{\ddot{u}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\rho}, \\ m_{\ddot{u}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}, \\ m_{\ddot{v}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1 = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}, \\ m_{\ddot{v}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} &= \frac{\sqrt{g}}{144} (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}. \quad (12) \end{aligned}$$

Отримані аналітичні співвідношення для узгодженої матриці мас багат шарового СЕ приводять до істотного зменшення трудомісткості чисельних обчислень. Введення в (12) наступних позначень

$$\hat{\rho} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n t_n, \quad \hat{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n t_n x_{O_n}^1, \quad \hat{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{g}}{36} \sum_{n=1}^m \rho_n \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3},$$

дозволило схематично подати структуру матриці мас та її блоків (рис. 4, 5). На рис. 5, як приклад, наведено перший блок матриці мас  $m_{\ddot{u}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3}$ , де пусті клітинки відповідають нульовим коефіцієнтам.

Зазначимо, що матриця мас є симетричною, має розмірність  $24 \times 24$  та за своєю структурою подібна матриці жорсткості цього ж СЕ.

	$\ddot{u}^{i'}_{s_2s_3}$	$\ddot{v}^{i'}_{s_2s_3}$
$\delta u^{i'}_{p_2p_3}$	$m_{\ddot{u}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\rho}$	$m_{\ddot{u}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}$
$\delta v^{i'}_{p_2p_3}$	$m_{\ddot{v}\ddot{u}}^{s_2s_3p_2p_3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}$	$m_{\ddot{v}\ddot{v}}^{s_2s_3p_2p_3} = (s_2p_2+3)(s_3p_3+3) \hat{\bar{\rho}}$

Рис. 4. Загальний вигляд блоків узгодженої матриці мас багат шарового СЕ

				$\ddot{u}_{s_2 s_3}^{i'}$																										
				s1			-1																							
				s2			-1						+1																	
				s3			-1			+1			-1			+1														
$\delta u_{s_2 s_3}^{i'}$		p1	p2	p3	$i'$	1'	2'	3'	1'	2'	3'	1'	2'	3'	1'	2'	3'													
																		1'	4 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$		
																			2'	4 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$	
		3'	4 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$																		
			-1	+1	-1	1'	2 $\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$														
		2'					2 $\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$														
							3'	2 $\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$													
		-1	+1	-1	1'	2 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$															
						2'	2 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$														
							3'	2 $\bar{\rho}$			$\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$													
		+1	+1	-1	1'	$\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$															
						2'	$\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$														
3'	$\bar{\rho}$						2 $\bar{\rho}$			2 $\bar{\rho}$			4 $\bar{\rho}$																	

Рис. 5. Приклад першого блоку матриці мас CE  $m_{\ddot{u}0}^{i'} s_2 s_3 p_2 p_3$

Отримані співвідношення для матриці мас є універсальними, оскільки вони відповідають загальному варіанту розробленого просторового багатопарового CE. Модифікація скінченного елемента обшивки (CEO) у скінчений елемент зі зміненими параметрами (CEM) виконана в [3, 5] за товщиною обшивки вздовж місцевої осі  $x^1$ .

Коефіцієнти матриці мас для різних варіантів CE (CEO та CEM), з яких складається конкретна СЕМО, обчислюються за одними й тими ж співвідношеннями (12). Узагальнені вузлові змінні для загального варіанта CE (CEM) надалі будемо позначати відміткою “тильда”  $\tilde{u}_{s_2 s_3}^{i'}$ ,

$\tilde{v}'_{s_2s_3}$  та  $\tilde{\ddot{v}}'_{s_2s_3}$ ,  $\tilde{v}'_{s_2s_3}$ . Вони на різних ділянках ступінчасто-змінної товщини СЕМО розуміються в (11) і (12) як різні змінні в СЕО та СЕМ, що віднесені до серединної поверхні свого СЕ.

Для СЕМ варіація сил інерції  $\delta\tilde{K}_{CE}$  відповідно до (11) має наступний вигляд

$$\delta\tilde{K}_{CE} = - \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \tilde{m}_{\ddot{v}\ddot{v}}'_{s_2s_3p_2p_3} \tilde{v}''_{s_2s_3} \delta\ddot{v}''_{p_2p_3} + \tilde{m}_{\ddot{v}\ddot{v}}'_{s_2s_3p_2p_3} \tilde{v}''_{s_2s_3} \delta\ddot{v}''_{p_2p_3} + \tilde{m}_{\ddot{v}\ddot{v}}'_{s_2s_3p_2p_3} \tilde{v}''_{s_2s_3} \delta\ddot{v}''_{p_2p_3} \right). \quad (13)$$

При формуванні системи розв'язувальних рівнянь СЕМО виникає проблема узгодження різних змінних (вузлових переміщень і прискорень різних типів СЕ) при об'єднанні комбінацій СЕО та СЕМ у єдиний ансамбль елементів. Ця проблема вирішується шляхом визначення залежностей між відповідними коефіцієнтами матриць мас СЕО та СЕМ.

Як єдині невідомі прийняті узагальнені вузлові переміщення та прискорення серединної поверхні СЕО  $v'_{s_2s_3}$ ,  $v''_{s_2s_3}$  та  $\ddot{v}'_{s_2s_3}$ ,  $\ddot{v}''_{s_2s_3}$ . На основі прийнятих положень зв'язок узагальнених вузлових переміщень і прискорень серединних поверхонь СЕО та СЕМ є таким самим як і для їхніх узагальнених вузлових координат [3, 5]. Тому маємо:

$$\tilde{v}'_{s_2s_3} = v'_{s_2s_3} + a_{s_2s_3} v''_{s_2s_3}, \quad \tilde{v}''_{s_2s_3} = b_{s_2s_3} v''_{s_2s_3}, \quad (14)$$

$$\tilde{\ddot{v}}'_{s_2s_3} = \ddot{v}'_{s_2s_3} + a_{s_2s_3} \ddot{v}''_{s_2s_3}, \quad \tilde{\ddot{v}}''_{s_2s_3} = b_{s_2s_3} \ddot{v}''_{s_2s_3}, \quad (15)$$

де  $b_{s_2s_3}$  – коефіцієнти зміни довжин ребер СЕ при перетворенні СЕО в СЕМ;  $a_{s_2s_3}$  – коефіцієнти зміщення ребер СЕ в напрямку його товщини ( $a_{s_2s_3} > 0$ , якщо цей напрямок збігається з напрямком осі  $x^1$ ).

Співвідношення (14), (15) забезпечують умову сумісності та нерозривності вузлових переміщень і прискорень між усіма скінченними елементами СЕМО на різних ділянках оболонки гладко-змінної та ступінчасто-змінної товщини. З залежностей (14), (15) випливає, що СЕО є частковим випадком СЕМ, для якого коефіцієнти  $b_{s_2s_3} = 1$ ,  $a_{s_2s_3} = 0$ .

Підставляючи (14), (15) у (13), визначаємо  $\delta\tilde{K}_{CE}$  СЕМ через єдині невідомі - узагальнені вузлові переміщення  $v'_{s_2s_3}$ ,  $v''_{s_2s_3}$  та прискорення  $\ddot{v}'_{s_2s_3}$ ,  $\ddot{v}''_{s_2s_3}$ , що віднесені до серединної поверхні СЕО:

$$\delta \tilde{K}_{CE} = - \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \sum_{p_2=\pm 1} \sum_{p_3=\pm 1} \left( \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} + \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \ddot{v}_{s_2 s_3}^{i'} \delta v_{p_2 p_3}^{i'} \right). \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{u}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3}, \\ \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} &= a_{s_2 s_3} a_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + a_{s_2 s_3} b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + \\ &+ a_{p_2 p_3} b_{s_2 s_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} + b_{s_2 s_3} b_{p_2 p_3} \tilde{m}_{\ddot{v}v}^{s_2 s_3 p_2 p_3} \end{aligned} \quad (17)$$

– коефіцієнти узгодженої матриці мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Прикладная механика, 2009. – Том 45, №9. – С. 3-40.
2. *Vazhenov V.A., Solovei N.A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // International Applied Mechanics, 2009. – Vol. 45. – №9. – Pp. 923-953.
3. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ “Віпол”, 2010. – 316 с.
4. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Успехи механики. В 6-ти томах / Под. ред. А.Н. Гузя. Том 6 (кн. 2). – К.: Литера ЛТД, 2011. С. 609-645.
5. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 336 с.
6. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Мищенко О.О., Калашиников О.Б.* Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 172-180.
7. *Блох В.И.* Теория упругости. - Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. - 483 с.
8. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислюцкий, В.В. Киричевский и др. – К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. – 480 с.

Стаття надійшла до редакції 21.07.2013 р.

*Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.*

**МАТРИЦА МАСС МОДИФИЦИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО  
КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА НЕОДНОРОДНОЙ ОБОЛОЧКИ**

Рассматривается построение матрицы масс пространственного конечного элемента, предназначенного для исследования процессов геометрически нелинейного деформирования упругих неоднородных оболочек при действии нагрузок, изменяющихся во времени.

*Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A.*

**MASS MATRIX OF THE MODIFIED SOLID FINITE ELEMENT FOR  
INHOMOGENEOUS SHELLS**

Construction of a solid finite element mass matrix is considered. The element is intended for research of geometrically nonlinear deformation of elastic inhomogeneous shells under loads, changing in time.

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук  
**І.І. Солодей**, д-р техн. наук  
**М.О. Вабішевич**, канд. техн. наук  
**А.О. Ярош**

## ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДЕМПФЕРНОГО ПРИСТРОЮ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРИЩИНОЮ НА ОСНОВІ НМСЕ

Досліджено особливості динамічного деформування демпферного пристрою з поздовжньою тріщиною при її апроксимації спеціальними скінченими елементами та застосуванням методик обчислення динамічних параметрів механіки руйнування на основі НМСЕ.

### Вступ

Питання обмеження рівня вібрацій шляхом використання віброізолюючих пристроїв або різного роду віброгасителів тісно пов'язані з динамічним розрахунком. Найбільш розповсюдженою проблемою таких пристроїв, що призводить не тільки до зміни їх проектних характеристик, але і до виходу з ладу, є утворення та розповсюдження тріщин. Як наслідок виникає необхідність обчислення динамічних параметрів механіки руйнування для запобігання виникнення загрози появи аварійних ситуацій.

За геометричними характеристиками значну кількість означених конструкцій можна класифікувати як призматичні просторові тіла з довільною формою та структурою поперечного перерізу. На прикладі демпферного пристрою, що являє собою коробчасту конструкцію, підсилену двома поздовжніми ребрами (рис. 1), наочно ілюструються переваги використання напіваналітичного методу скінчених елементів при розв'язанні означеного класу задач. Скінченноелемента дискретизація об'єкту виконана на основі прямолінійних призматичних скінчених елементів з апроксимаціями

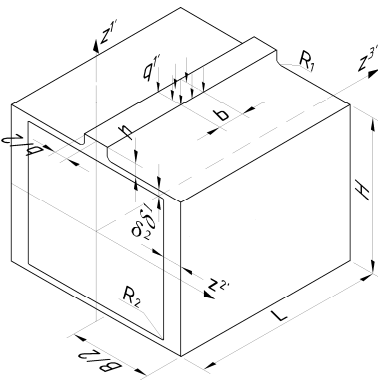


Рис. 1. Демпферний пристрій

невідомих в напрямку  $x^3$   $2\pi$  - періодичними функціями тригонометричних рядів Фур'є [1]. При вирішенні задачі динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень визначались на основі методу реакцій [4]. Для апроксимації поздовжньої тріщини використані спеціальні скінченні елементи з тріщинами, ефективність використання яких була показана в попередніх роботах авторів [5].

### 1. Дослідження динамічного напружено-деформованого стану демпферного пристрою

Демпферний елемент складається із тонкостінних і стрижневих елементів, об'єднаних галтельними переходами, в області яких реалізується просторовий напружено-деформований стан. Граничні умови на торцях відповідають обпиранню на абсолютно жорстку у своїй площині та гнучку вздовж напрямної діафрагму. Розрахункова схема об'єкта приведена на рис. 1.

Довжина  $L=30\delta_1$ , висота  $H=24\delta_1$ , ширина  $B=30\delta_1$ , радіуси галтельних переходів  $R_1=\delta_1$ ,  $R_2=0.25\delta_1$ , розміри поперечного перерізу ребер  $b=4\delta_1$ ,  $h=2\delta_1$ , товщина бокових стінок  $\delta_2=3\delta_1$ , верхньої кришки та днища  $\delta_1$ . Модуль пружності матеріалу конструкції  $E=2.1 \times 10^5$  МПа, коефіцієнт  $\nu=0.3$ , щільність матеріалу  $\rho=7.8 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Зовнішнє навантаження приймається у вигляді миттєво прикладеного імпульсу тиску  $q$  в центральній частині  $b \times b$  верхнього ребра та залишається постійним на протязі всього інтервалу дослідження.

Фрагменти розбивки для однієї із досліджуваних скінченно-елементних конфігурацій представлені на рис. 2.

Дослідження збіжності результатів розрахунку по максимальним параметрам напруженого стану показало, що достатнім є утримання 5 гармонік (членів ряду Фур'є) та використання часового кроку  $\Delta t=10^{-4}$  с.

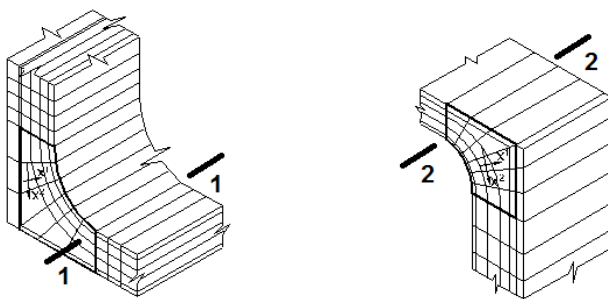


Рис. 2. Скінченноелементна модель



Для виявлення найбільш напружених частин конструкції, на першому етапі розглянуто коливання демпферного пристрою без тріщини. Аналіз еволюції напружено-деформованого стану показав, що в інтервалі часу  $t \in [2.1, 2.5] \times 10^{-3} \text{ с}$  при  $Z^3 = 0.5L$  досягаються максимальні розтягуючі значення  $\sigma^{22}$ ,  $\sigma^{33}$  та  $\sigma_i$  для обох перерізів 1-1 та 2-2. Результати розрахунку, виконаного в пружній постановці, зображені у вигляді визначальних нормованих напружень  $\sigma^{22}/q$ ,  $\sigma^{33}/q$  та  $\sigma_i/q$  (рис. 3).

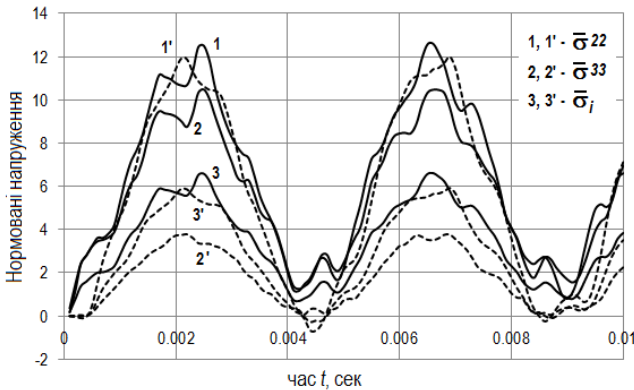


Рис. 3. Напружено-деформований стан тіла без тріщини

Пунктирною лінією позначені графіки, побудовані в перерізах 2-2, суцільною – в перерізі 1-1. Спостерігається практично повна ідентичність як в характері розподілення так і в кількісних значеннях для компоненти  $\sigma^{22}$  тензора напружень та  $\sigma_i$ . Однак компоненти  $\sigma^{33}$  приблизно у 2.5 рази менші для перерізу 2-2, що пояснюється впливом примикаючої жорсткої опорної стінки (рис. 1).

Розподіл напружень вздовж координати  $Z^3$  конструкції для моментів часу  $t = 2.5 \times 10^{-3} \text{ с}$  (переріз 1-1) і  $t = 2.1 \times 10^{-3} \text{ с}$  (переріз 2-2), коли вони досягають своїх максимальних значень, показано на рис. 4.

Деформована схема та ізолінії нормованих напружень  $\sigma^{22}/q$  ( $t = 2.5 \times 10^{-3} \text{ с}$ ,  $Z^3 = 0.5L$ ) представлені на рис. 5 та 6.

Як можна було очікувати, зони максимальних стискаючих напружень знаходяться на внутрішній частині галтельних переходів (області А і В), які виконують роль концентраторів. Максимальні розтягуючі напруження розташовані у протилежних шарах матеріалу верхньої кришки (області С

і D). Виходячи з проведеного аналізу можна припустити, що області С і D є найбільш ймовірними місцями виникнення тріщин в умовах багаторазового динамічного навантаження.

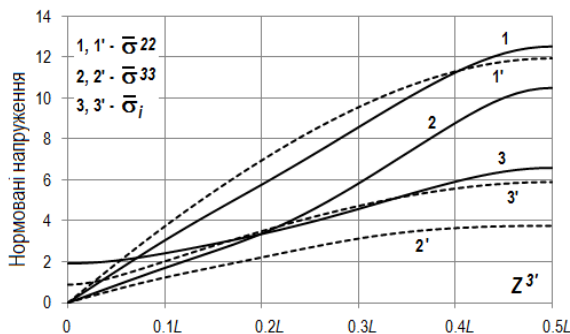


Рис. 4. Розподіл напружень вздовж довжини конструкції

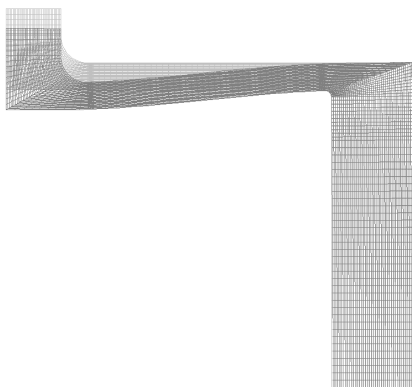


Рис. 5. Деформована схема

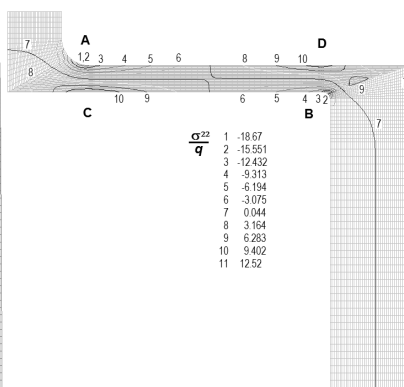


Рис. 6. Ізолінії напружень

## 2. Аналіз параметрів механіки руйнування

Розглянемо модель із тріщиною довжиною  $l_{cr} = 0.25\delta_1$ , яка розташована в області С (рис. 7).

Спостерігається характерний для привершинної області розподіл інтенсивності напружень. Ізолінії показані для моменту часу, коли напруження досягають своїх максимальних значень.

Обчислення КІН проводилося двома методами: прямим (ліній) та на основі енергетичного підходу (метод реакцій, марки). Результати показані на рис. 8 у вигляді нормованих значень динамічного КІН  $K_{\zeta}/q$  ( $\zeta = I, II$ ).

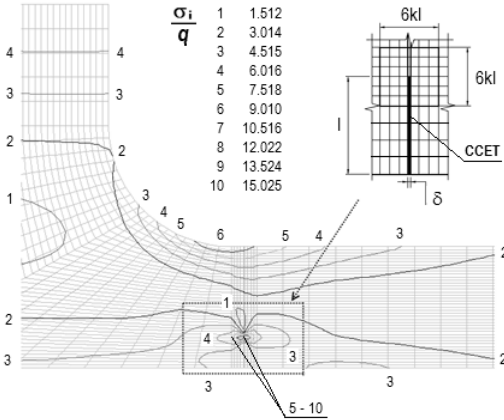


Рис. 7. Модель із тріщиною

Коефіцієнт інтенсивності напружень другого роду  $K_{II}$  (пунктирна лінія, квадрати) складає приблизно 10÷12% від  $K_I$  (суцільні лінія, кружки).

Виходячи з відомої формули для руйнування змішаного типу, при  $K_I \neq 0$  і  $K_{II} \neq 0$  умова росту тріщини набуває вигляду:

$$K_{Ic} \geq \tilde{K}, \text{ де } \tilde{K} = \sqrt{K_I^2 + 1.78K_{II}^2}.$$

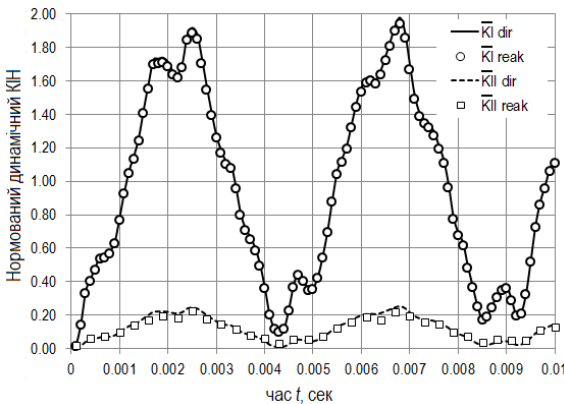


Рис. 8. Еволюція динамічного КІН

На рис. 9 показано розподіл динамічного КІН  $\bar{K}$  вздовж напрямку  $Z^3$  в момент часу  $t=2.5 \times 10^{-3}$  с для двох довжин тріщин  $l_{cr}=0.25\delta_1$  (суцільна лінія) та  $l_{cr}=0.5\delta_1$  (пунктир).

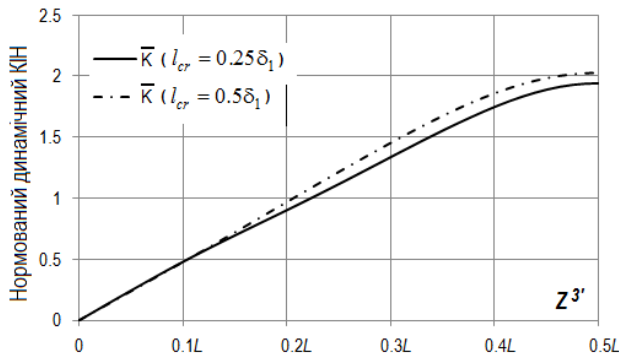


Рис. 9. Розподіл ДКІН вздовж направляючої

### Висновки

Таким чином, на прикладі дослідження динамічного деформування демферного пристрою показана зручність та ефективність використання розробленого підходу до апроксимації просторових призматичних тіл з тріщинами та алгоритмів обчислення динамічних параметрів механіки руйнування на основі НМСЕ.

За результатами розрахунку визначені особливості еволюції у часі динамічних КІН I і II-го роду та розподіл значень узагальненого КІН вздовж направляючої для різних довжин тріщин.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень при динамічному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.39-47.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
4. *Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І., Сахаров О.С.* Обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень в нестационарних задачах динаміки просторових тіл на основі енергетичного підходу // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.83, 2009.-с.93-109.

5. *Солодей І.І., Вабищевич М.О., Гуляр О.І.* Використання спеціальних скінченних елементів з тріщиною в задачах механіки руйнування при нестационарних динамічних навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.84, 2009.-с.49-64.

*Стаття надійшла до редакції 05.08.2013 р.*

*Bazhenov V.A., Solodei I.I., Vabischevich M.O., Yarosh A.O.*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДЕМПФЕРНОГО УСТРОЙСТВА С ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ НА ОСНОВЕ ПМКЭ**

Исследованы особенности динамического деформирования демпферного устройства с продольной трещиной при ее аппроксимации специальными конечными элементами и применением методик вычисления динамических параметров механики разрушения на основе ПМКЭ.

*Bazhenov V.A., Solodei I.I., Vabischevich M.O., Yarosh A.O.*

**DYNAMIC DEFORMATION RESEARCH OF VIBRATION DAMPER WITH LONGITUDINAL CRACK BASED ON SAFEM**

The features of dynamic strain damping device with longitudinal cracks in its special finite element approximation and the use of methods calculate the dynamic parameters of fracture mechanics based on SAFEM was investigated.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд.техн.наук

А.А. Козак

О.С. Черненко

## ДОСЛІДЖЕННЯ ДВОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ МАСИВІВ З ОТВОРАМИ

Шляхом співставлення з чисельно-аналітичним розв'язком задачі про імпульсне навантаження масиву з циліндричним отвором показана працездатність чисельного алгоритму, що базується на переході в частотну область. За допомогою такого підходу в поєднанні з методом граничних елементів досліджена динамічна реакція пружного масиву, послабленого двома отворами, один з яких піддається дії раптово прикладеного тиску.

В даній статті вивчаються особливості дослідження НДС лінійно пружних масивів при імпульсному навантаженні, яке подається початковим відрізком ряду Фур'є. Наближений розв'язок задачі розшукується у вигляді суперпозиції гармонічних коливань, тому перш за все необхідно шляхом порівняння з відомим розв'язком встановити залежність точності результатів від кількості утриманих гармонік. Для побудови еталонного розв'язку розглянемо в стані плоскої деформації задачу про розповсюдження від кругової порожнини радіусу  $R$  осесиметричних пружних хвиль, що спричинені прикладеним до контуру отвору тиском, залежність якого від часу має вигляд трапецеїдального імпульсу:

$$q(t) = q_0 f(t) = q_0 \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ або } t \geq T_q, \\ \frac{t}{t_1}, & 0 \leq t < t_1, \\ 1, & t_1 \leq t < t_2, \\ \frac{T_q - t}{T_q - t_2}, & t_2 \leq t < T_q. \end{cases} \quad (1)$$

Оскільки мають місце тільки радіальні переміщення  $u_r(r, t)$ , то рівняння руху в полярній системі координат  $(r, \theta)$ , полюс якої співпадає із центром отвору, записується наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (2)$$

де  $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  – швидкість поздовжньої пружної хвилі,  $\lambda$  і  $\mu$  – константи

Ламе,  $\rho$  – густина матеріалу.

Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} -q(t), r=R, \\ 0, r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r}$  – радіальні напруження.

Тангенціальні напруження визначаються виразом

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda+2\mu) \frac{u_r}{r}. \quad (4)$$

Для зручності введемо безрозмірні параметри

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \bar{t} = \frac{C_1 t}{R}, \bar{u}_r = \frac{(\lambda+2\mu)}{q_0 R} u_r, \bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{q_0}, \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}, \quad (5)$$

з урахуванням яких співвідношення (2)-(4) набувають вигляду

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{t}^2}, \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \begin{cases} -f(\bar{t}), \bar{r}=1, \\ 0, \bar{r} \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \kappa \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \kappa \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}}, \quad (8)$$

де  $\kappa = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = \frac{\nu}{1-\nu}$ ,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Крім того помітимо, що функцію  $f(\bar{t})$ , яка описує залежність тиску від часу, можна шляхом тотожних перетворень подати наступним чином:

$$f(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{\bar{t}}{t_1}, & 0 \leq \bar{t} < \bar{t}_1, \\ \frac{\bar{t}}{t_1} - \frac{(\bar{t}-\bar{t}_1)}{t_1}, & \bar{t}_1 \leq \bar{t} < \bar{t}_2, \\ \frac{\bar{t}}{t_1} - \frac{(\bar{t}-\bar{t}_1)}{t_1} - \frac{(\bar{t}-\bar{t}_2)}{T_q - t_2}, & \bar{t}_2 \leq \bar{t} < \bar{T}_q, \\ \frac{\bar{t}}{t_1} - \frac{(\bar{t}-\bar{t}_1)}{t_1} - \frac{(\bar{t}-\bar{t}_2)}{T_q - t_2} + \frac{(\bar{t}-\bar{T}_q)}{T_q - t_2}, & \bar{t} \geq \bar{T}_q. \end{cases} \quad (9)$$

Тепер стає зрозуміло, що достатньо знайти пружну реакцію від навантаження, яке змінюється за лінійним законом  $f(\bar{t}) = \bar{t}/\bar{t}_1$  на всьому часовому інтервалі  $\bar{t} \geq 0$ , після чого результат можна отримати як суперпозицію такого розв'язку і ще одного або декількох розв'язків, отриманих із першого шляхом множення на деякий коефіцієнт та зсуву на деяку величину  $\bar{t}_1$ , або  $\bar{t}_2$ , або  $\bar{T}_q$  в залежності від того, якій ділянці трапецеїдального імпульсу відповідає розглядуваний момент часу.

До рівняння (6) застосуємо перетворення Лапласа за часом. За нульових початкових умов отримаємо

$$\frac{d^2 \bar{u}_r^L(\bar{r}, s)}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d \bar{u}_r^L(\bar{r}, s)}{d\bar{r}} - \left( \frac{1}{\bar{r}^2} + s^2 \right) \bar{u}_r^L(\bar{r}, s) = 0, \quad (10)$$

де  $s$  – параметр перетворення, а верхній індекс  $L$  означає лапласове зображення відповідної величини.

В свою чергу, перетворення граничних умов (7) з урахуванням припущення про лінійний характер навантаження дає

$$\bar{\sigma}_{rr}^L = \frac{\partial \bar{u}_r^L}{\partial \bar{r}} + \kappa \frac{\bar{u}_r^L}{\bar{r}} = \begin{cases} -(\bar{t}_1 s^2)^{-1}, & \bar{r} = 1, \\ 0, & \bar{r} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Розв'язок рівняння (10), який задовольняє граничні умови (11), згідно [1] має вигляд

$$\bar{u}_r^L(\bar{r}, s) = \frac{K_1(s\bar{r})}{\bar{t}_1 s^3 \left[ K_0(s) + (1-\kappa) \frac{K_1(s)}{s} \right]} = \frac{Z_0^L(\bar{r}, s)}{\bar{t}_1 N^L(s)}, \quad (12)$$

де  $K_n$  – модифіковані функції Бесселя другого роду (циліндричні функції Макдональда) порядку  $n$ ,

$$Z_0^L(\bar{r}, s) = \frac{e^s K_1(s\bar{r})}{s^3}, \quad N^L(s) = e^s \left[ K_0(s) + (1-\kappa) \frac{K_1(s)}{s} \right].$$

Як зазначено в [2], відновлення оригіналу  $\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t})$ , тобто обернення виразу (12), шляхом безпосереднього обчислення відповідного контурного інтеграла є дуже трудомісткою задачею. Тому в згаданій роботі запропоновано скористатись тим, що оригінали окремих компонентів, які входять до складу правої частини виразу (12), є відомими [3], або їх неважко отримати, використовуючи властивості перетворення Лапласа:

$$Z_0(\bar{r}, \bar{t}) = L^{-1} \left\{ Z_0^L(\bar{r}, s) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{e^s K_1(s\bar{r})}{s^3} \right\} =$$



$$= H(\bar{t} - \bar{r} + 1) \left\{ \frac{[(\bar{t} + 1)^2 + 2\bar{r}^2] \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}}{6\bar{r}} - \frac{(\bar{t} + 1)\bar{r}}{2} \ln \frac{\bar{t} + 1 + \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}}{\bar{r}} \right\}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} N(t) &= L^{-1} \{ N^L(s) \} = L^{-1} \left\{ e^s \left[ K_0(s) + (1 - \kappa) \frac{K_1(s)}{s} \right] \right\} = \\ &= H(\bar{t}) \left[ \frac{1}{\sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - 1^2}} + (1 - \kappa) \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - 1^2} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

де  $H(t)$  – одинична ступінчаста функція (функція Хевісайда).

Тепер, якщо переписати співвідношення (12) у вигляді

$$\bar{u}_r^L(\bar{r}, s) N^L(\bar{r}, s) = \frac{1}{t_1} Z_0^L(\bar{r}, s)$$

і скористатись теоремою про згортку оригіналів, отримаємо рівняння Вольтерра першого роду відносно  $u_r(r, t)$ :

$$\int_0^{\bar{t}} \bar{u}_r(\bar{r}, \tau) N(\bar{t} - \tau) d\tau = \frac{1}{t_1} Z_0(\bar{r}, \bar{t}). \quad (15)$$

Для розв'язання рівняння (15) необхідно розбити часовий інтервал на окремі ділянки і прийняти гіпотезу про характер зміни шуканої функції в межах кожної з них, після чого можна скористатись кроковою процедурою послідовного визначення  $\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_k)$  в задані моменти часу. У тому випадку, коли часовий інтервал поділено на  $N$  рівних ділянок величиною  $\Delta \bar{t}$ , і використовується лінійна апроксимація переміщень, тобто на  $k$ -й ділянці

$$\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_{k-1}) \left( 1 - \frac{\bar{t}}{\Delta \bar{t}} \right) + \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_k) \frac{\bar{t}}{\Delta \bar{t}},$$

маємо

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_1) &= \frac{Z_0(\bar{r}, \bar{t}_1)}{t_1 W_1}, \\ \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_j) &= \frac{\frac{1}{t_1} Z_0(\bar{r}, \bar{t}_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t}_k) (W_{j-k+1} + V_{j-k})}{W_1}, \quad j=2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$W_k = \int_0^{\Delta \bar{t}} \frac{\tau}{\Delta \bar{t}} N(k\Delta \bar{t} - \tau) d\tau, \quad V_k = \int_0^{\Delta \bar{t}} \left( 1 - \frac{\tau}{\Delta \bar{t}} \right) N(k\Delta \bar{t} - \tau) d\tau. \quad (17)$$

Оскільки інтеграли (17) можуть бути обчислені точно, то і нормовані переміщення за формулою (16) можна знайти з будь-якою точністю.

Диференціювання виразу (15) по  $\bar{r}$  із подальшою підстановкою у (8) дозволяє отримати інтегральне рівняння відносно напружень

$$\int_0^{\bar{t}} \bar{\sigma}_{00}(\bar{r}, \tau) N(\bar{t} - \tau) d\tau = \frac{1}{t_1} Z_1(\bar{r}, \bar{t}), \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} Z_1(\bar{r}, t) = & \kappa \frac{\partial Z_0(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} + \frac{Z_0(\bar{r}, t)}{\bar{r}}, \\ \frac{\partial Z_0(\bar{r}, \bar{t})}{\partial \bar{r}} = & H(\bar{t} - \bar{r} + 1) \left\{ - \frac{[(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2]^2 + 3\bar{r}^4}{6\bar{r}^2 \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}} + \right. \\ & + \frac{\bar{t} + 1}{2} \left[ \frac{\bar{r}^2}{(\bar{t} + 1 + \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}) \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}} + 1 \right] - \\ & \left. - \frac{\bar{t} + 1}{2} \left[ - \ln \frac{\bar{t} + 1 + \sqrt{(\bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^2}}{\bar{r}} \right] \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Чисельна крокова процедура послідовного визначення  $\bar{\sigma}_{00}(\bar{r}, \bar{t}_k)$  в задані моменти часу є аналогічною до процедури визначення переміщень:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{00}(\bar{r}, \bar{t}_1) = & \frac{Z_1(\bar{r}, \bar{t}_1)}{t_1 W_1}, \\ \bar{\sigma}_{00}(\bar{r}, \bar{t}_j) = & \frac{\frac{1}{t_1} Z_1(\bar{r}, \bar{t}_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\sigma}_{00}(\bar{r}, \bar{t}_k) (W_{j-k+1} + V_{j-k})}{W_1}, \quad j=2, 3, \dots, N. \quad (20) \end{aligned}$$

Отже, за допомогою співвідношень (16) та (20) можна побудувати еталонні розв'язки задачі про динамічний НДС пружного простору з круговою циліндричною порожниною, до границі якої прикладений тиск, що змінюється із часом за законом трапецеїдального імпульсу (1).

Розв'яжемо тепер цю задачу за допомогою розвинення навантаження в ряд Фур'є. Для цього будемо вважати навантаження періодичною функцією з періодом  $4T_q$ , причому на проміжку  $0 \leq t \leq T_q$  навантаження являє собою трапецеїдальний імпульс, заданий виразом (1), тоді як при  $T_q < t \leq 4T_q$  величина навантаження дорівнює нулю.

Комплексні амплітуди складових навантаження знаходимо шляхом інтегрування

$$q_0 = \frac{1}{2T_q} \int_0^{T_q} q(t) dt, \quad q_k^* = \frac{1}{2T_q} \int_0^{T_q} q(t) e^{-i\omega_k t} dt, \quad k=1, 2, \dots$$

де  $\omega_k = \frac{k\pi}{2T_q}$  - частота коливань.

Тоді, оскільки розв'язок задачі про вимушені гармонічні коливання є відомим:

$$u_0(r) = \frac{q_0 R^2}{2\mu r}, \quad \sigma_{\theta,0}(r) = \frac{q_0 R^2}{r^2}, \quad (21)$$

$$u_k^*(r) = \frac{q_k^*}{\mu} \frac{H_1^{(1)}(\varphi_k r)}{\varphi_k \left\{ \left[ 2 \frac{H_1^{(1)}(\varphi_k R)}{\varphi_k R} - H_0^{(1)}(\varphi_k R) \right] - \frac{\lambda}{\mu} H_0^{(1)}(\varphi_k R) \right\}}, \quad k=1, 2, \dots,$$

$$\sigma_{\theta,k}^*(r) = \frac{q_k^*}{\mu} \frac{\lambda H_0^{(1)}(\varphi_k r) + 2\mu H_1^{(1)}(\varphi_k r)}{\varphi_k r \left\{ \left[ 2 \frac{H_1^{(1)}(\varphi_k R)}{\varphi_k R} - H_0^{(1)}(\varphi_k R) \right] - \frac{\lambda}{\mu} H_0^{(1)}(\varphi_k R) \right\}}, \quad (22)$$

де  $H_m^{(1)}$  - функція Ганкеля 1-го роду порядку  $m$ ,  $\varphi_k = \frac{\omega_k}{C_1}$ , то наближену реакцію на імпульсне навантаження знаходимо, використовуючи наступні співвідношення:

$$u_r(r) = \frac{1}{2} u_0(r) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K u_k^*(r) e^{i\omega_k t} \right\}, \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{1}{2} \sigma_{\theta,0}(r) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \sigma_{\theta,k}^*(r) e^{i\omega_k t} \right\}. \quad (24)$$

На рис. 1 наведені графіки нормованих значень величин  $u_r^{\text{норм.}} = \frac{u_r(R)\mu}{q_0 R}$  (криві 3 і 4) та  $\sigma_{\theta\theta}^{\text{норм.}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(R)}{q_0}$  (криві 1 і 2), обчислених в точках границі отвору. Графіки 1 і 3 побудовані за допомогою чисельно-аналітичного підходу, тобто з використанням співвідношень відповідно (20) та (16). Для побудови графіків 2 і 4 застосовані наближені співвідношення (24) та (23) відповідно, причому при розрахунках було використано вісім перших членів ряду ( $K=7$ ). Навантаження у вигляді трапецеїдального імпульсу мало параметри  $\bar{t}_1=4.44$ ,  $\bar{t}_2=15.56$ ,  $\bar{T}_q=20$ , тоді як пружне середовище характеризувалось коефіцієнтом Пуассона  $\nu=0.25$  ( $\lambda=\mu$ ), модулем зсуву  $\mu=80000$  МПа та густиною  $\rho=7850$  кг/м<sup>3</sup>.

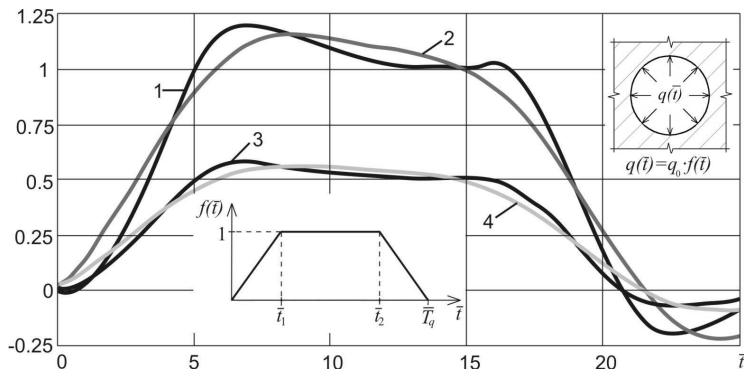


Рис. 1

Як свідчать дані розрахунків за формулами (16) та (20), і радіальні переміщення, і тангенціальні напруження досягають на границі найбільших значень при  $\bar{t}=7$ , а найменших – при  $\bar{t}=22.5$ . В околі  $\bar{t}=15$  обидва параметри практично не відрізняються від своїх значень при статичному навантаженні. Крім того, слід відмітити, що граничні напруження мають локальний максимум при  $\bar{t}=15.95$ .

Бачимо, що при використанні в другому підході восьми членів ряду Фур'є (графіки 2 і 4) отримуємо досить приблизну картину динамічного НДС. Детальніше співставлення нормованих радіальних переміщень, отриманих за двома підходами, міститься в табл. 1.

Таблиця 1

$\bar{t}$	Еталонне значення $u_r^{норм.}$	Наближені значення за формулою (23)					
		$K = 7$		$K = 11$		$K = 15$	
		$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %	$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %	$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %
7	0.574	0.543	5.4	0.585	1.9	0.577	0.5
15	0.502	0.483	3.8	0.518	3.2	0.505	0.6
22.5	-0.0725	-0.0568	21.7	-0.0793	9.4	-0.0749	3.3

Результати обчислення і порівняння нормованих тангенціальних напружень наведені в таблиці 2.

Як бачимо, при збільшенні кількості членів ряду Фур'є наближений розв'язок прямує, хоча і досить повільно, до еталонного. Зазначимо, що вже при 12 членах ряду ( $K = 11$ ) розбіжність максимальних значень параметрів НДС не перевищує 2%, а відповідні графіки візуально майже не

відрізняються між собою. Отже, за наявності надійного інструменту для визначення переміщень і напружень при вимушених гармонічних коливаннях такий підхід може успішно застосовуватись при дослідженні реакції двовимірних пружних об'єктів, послаблених різного роду отворами.

Таблиця 2

$\bar{t}$	Еталонне значення $\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Наближені значення за формулою (24)					
		$K = 7$		$K = 11$		$K = 15$	
		$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %	$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %	$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %
7	1.198	1.109	7.4	1.213	1.3	1.205	0.6
15	1.005	0.990	1.5	1.055	5.0	1.016	1.1
15.95	1.020	0.917	10.1	1.020	0.1	1.011	0.9
22.5	-0.193	-0.130	32.9	-0.120	3.4	-0.198	2.6

За допомогою цього підходу розв'яжемо задачу про динамічний НДС пружного простору, послабленого двома циліндричними отворами круглого перерізу (рис. 2), границя одного з яких зазнає дії тиску, що змінюється із часом за законом, заданим виразом (1).

Ефективним засобом дослідження гармонічних вимушених коливань пружних об'єктів, що займають нескінченну область, є метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), який дозволяє знайти амплітуди переміщень і напружень на границі, не піддаючи дискретизації саму розрахункову область.

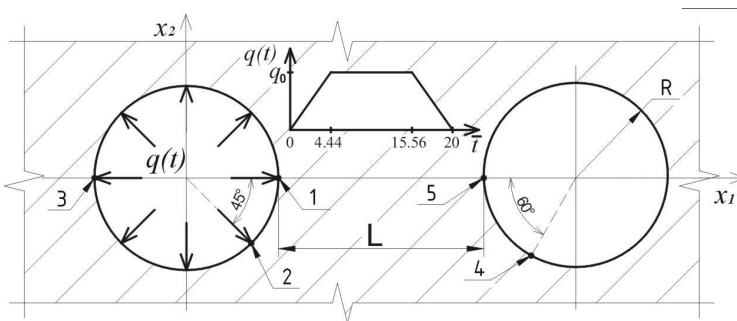


Рис. 2

В якості алгоритмічної основи обчислювального процесу будемо використовувати граничний аналог формули Соміліани для переміщень:

$$\frac{1}{2}u_{jk}^*(\bar{x}, \omega) = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\bar{y}, \omega) U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k^*(\bar{y}, \omega) T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\Gamma_y, \quad j, k = 1, 2, \quad (25)$$

де  $u_{jk}^*(\bar{x}, \omega)$  –  $j$ -а компонента комплексної амплітуди коливань з круговою частотою  $\omega$ ;  $\bar{x}\{x_1, x_2\}, \bar{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$ ;  $\Gamma$  – границя області  $V$ ;  $\tau_j(\bar{y}, \omega) = \lambda n_j(\bar{y}) \frac{\partial u_m(\bar{y}, \omega)}{\partial x_m} + \mu \left( \frac{\partial u_j(\bar{y}, \omega)}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k(\bar{y}, \omega)}{\partial y_j} \right) n_k(\bar{y})$  – компоненти комплексної амплітуди напружень на площинці з нормаллю  $\bar{n}\{n_1, n_2\}$ ;  $U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$  – фундаментальний розв'язок задачі (амплітуди переміщень в пружному двовимірному просторі від дії зосередженої одиничної сили, яка прикладена в точці  $\bar{x}$  в напрямку осі  $Ox_j$ ) [4]:

$$U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \frac{i}{4\mu} \left[ \delta_{jk} U_0(r, \omega) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega) \right]; \quad (26)$$

$$U_0(r, \omega) = H_0^{(1)}(k_1 r) - \frac{H_1^{(1)}(k_2 r)}{k_2 r} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(k_1 r)}{k_1 r};$$

$$U_2(r, \omega) = H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r);$$

$$k_j = \frac{\omega}{C_j}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad \alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r};$$

$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$  – відстань між точками  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$ ;  $T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)$  – узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили [5]:

$$T_{kj}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) = \lambda n_j(\bar{y}) \frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)}{\partial y_m} + \mu \left( \frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)}{\partial y_m} \right) n_m(\bar{y}).$$

Чисельна процедура розв'язання системи ГР (25) базується на представленні границі розрахункової області сукупністю граничних елементів (ГЕ), в межах кожного з яких задані точки колокації, а невідомі змінюються за призначеним законом. Після цього алгебраїзація системи ГР зводиться до обчислення відповідних інтегралів при послідовному суміщенні т.  $\bar{x}$  з кожним колокаційним вузлом. Ситуація ускладнюється, коли інтегрування проводиться по тому самому елементу, на якому розташована т.  $\bar{x}$ . В цьому випадку відстань між точками  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$  може стати нескінченно малою, а підінтегральні вирази набути нескінченно великих значень, що робить неможливим безпосереднє обчислення діагональних коефіцієнтів алгебраїчного аналога системи. Для подолання вказаної пе-

решкоди функції Ханкеля, що входять до складу ядер ГР, наближено замінюються початковими відрізками ряду Маклорена. При цьому компоненти ядер набувають вигляду сум, перший доданок яких виявляється рівним компоненті відповідного статичного потенціалу, тоді як інші доданки при  $r = 0$  мають скінченні значення:

$$\begin{aligned}
 U_0(r, \omega) &= \frac{i(1+\alpha)}{\pi} \ln(r) + i \left[ \frac{(1+\alpha)}{2} - \left( \frac{k_2 r}{4} \right)^2 (3+\alpha^2) \right] - \\
 & - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1-\alpha}{2} + \gamma(1+\alpha) + \alpha \ln \left( \frac{k_1}{2} \right) + \ln \left( \frac{k_2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{k_2 r}{2} \right)^2 \left[ \gamma(3+\alpha^2) - \frac{11+5\alpha^2}{4} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha^2 \ln \left( \frac{k_1 r}{2} \right) + 3 \ln \left( \frac{k_2 r}{2} \right) \right] \right\} + O(r^4), \\
 U_2(r, \omega) &= -\frac{i(1-\alpha)}{\pi} + \frac{i(1-\alpha^2)}{2} \left( \frac{k_2 r}{2} \right)^2 - \\
 & - \frac{1}{\pi} \left( \frac{k_2 r}{2} \right)^2 \left[ \left( \gamma - \frac{3}{4} \right) (1-\alpha^2) - \alpha^2 \ln \left( \frac{k_1 r}{2} \right) + \ln \left( \frac{k_2 r}{2} \right) \right] + O(r^4).
 \end{aligned}$$

Оскільки інтегрування ядер статичної задачі труднощів не викликає, то проблему алгебраїзації системи ГР можна вважати вирішеною.

При чисельному розв'язанні задачі границя кожного отвору апроксимувалась за допомогою 24 ізопараметричних квадратичних елементів. Розв'язок тестової задачі про розповсюдження гармонічних хвиль від кругового отвору показав, що при такій густині сітки похибка чисельного визначення радіальних переміщень в порівнянні із точним значеннями, заданими виразом (21), не перевищує 0.6% в широкому діапазоні частот. Відстань  $L$  між контурами дорівнювала радіусу отворів. Характеристики середовища (коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , модуль зсуву  $\mu$  та густина  $\rho$ ) були такими самими, як і в задачі про розповсюдження пружних осесиметричних хвиль від одиничної порожнини.

На рис. 3 наведені графіки залежності від часу нормованих радіальних переміщень у точках навантаженого (криві 1, 2, 3) і ненавантаженого (криві 4, 5) контурів. Номери точок на рис. 2 відповідають номерам кривих на рис. 3. Переміщення обчислені з використанням виразу (23) при  $K = 11$ .

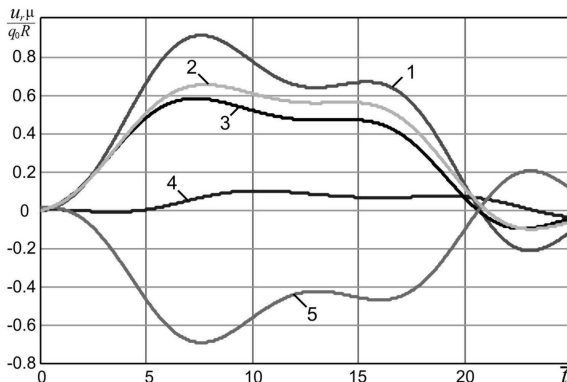


Рис. 3

Як бачимо, переміщення у всіх точках мають локальні максимуми і мінімуми приблизно в одні й ті самі моменти безрозмірного часу:  $\bar{t}_1=7$ ,  $\bar{t}_2=15.4$  і  $\bar{t}_3=22.6$ . Значення нормованих радіальних переміщень  $u_r^{норм.} = u_{r,\mu} / (q_0 R)$  у вказані моменти часу, а також при статичному прикладенні тиску  $q_0$  містяться в таблиці 3. Для порівняння в останньому стовпчику таблиці наведені результати обчислення за формулою (16) переміщень на границі простору з одним циліндричним отвором.

Таблиця 3

Момент часу	Нормовані радіальні переміщення $u_r^{норм.}$ в точках границі					
	т. 1	т. 2	т. 3	т. 4	т. 5	Один отвір
$\bar{t}_1$	0.898	0.643	0.579	0.051	-0.682	0.574
$\bar{t}_2$	0.666	0.552	0.462	0.064	-0.464	0.502
$\bar{t}_3$	-0.206	-0.096	-0.098	0.015	0.195	-0.073
Статичне навантаж.	0.686	0.549	0.480	0.059	-0.481	0.500

Розподіл радіальних переміщень вздовж границі навантаженого отвору в моменти часу  $\bar{t}_1$ ,  $\bar{t}_2$  і  $\bar{t}_3$  показаний на рисунку 4,а (криві 1, 2, 3 відповідно). На рисунку 4,б наведений розподіл переміщень на границі ненавантаженого отвору.



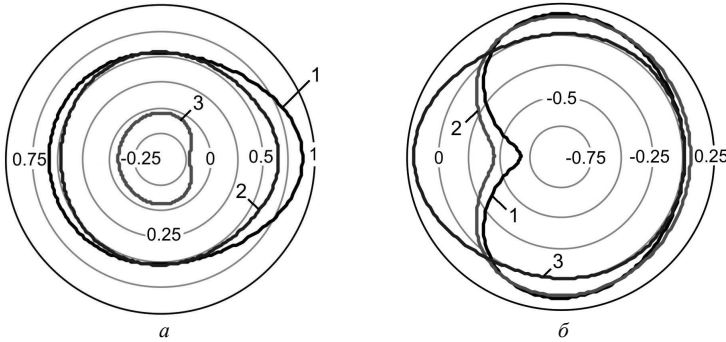


Рис. 4

На рис. 5 приведені графіки залежності від часу нормованих тангенціальних напружень  $\sigma_{ss}^{норм.} = \sigma_{ss} / q_0$  в тих самих п'яти точках границі (рис. 2). Величини нормованих напружень в характерні моменти часу, а також при статичному прикладенні тиску містяться в табл. 4. Знову для порівняння в останньому стовпчику таблиці наведені результати обчислення за формулою (17) напружень на границі простору з одним отвором. Зазначимо, що всі чисельні результати були отримані з використанням виразу (24) при  $K=11$ .

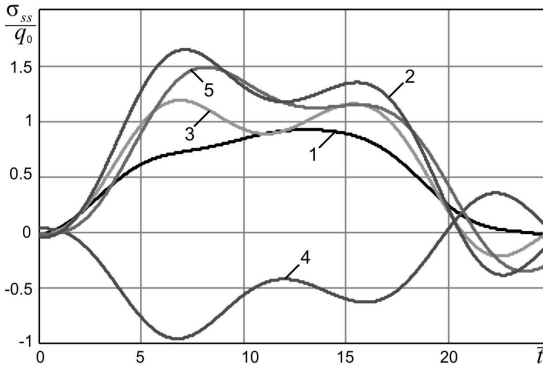


Рис. 5

Розподіл тангенціальних напружень в моменти часу  $\bar{t}_1, \bar{t}_2$  і  $\bar{t}_3$  (криві 1, 2, 3 відповідно) показаний на рисунках 6,а (границя навантаженого отвору) та 6,б (границя ненавантаженого отвору).

Максимальні тангенціальні напруження на навантаженому контурі спостерігаються в околі  $t$ . 2 в момент часу  $\bar{t}_1$ , причому їх значення пере-

вищують величини напружень при статичному прикладенні навантаження приблизно на 30%. В околі т. 3 найбільші напруження також мають місце в момент  $\bar{t}_1$ , але тут перевищення статичного рівня становить приблизно 20%. Водночас, найбільші напруження біля т. 1 виникають в момент  $\bar{t}_2$ , а їх перевищення порівняно із статичним рівнем становить 13%. Зазначимо також, що досить великі тангенціальні напруження спостерігаються на ненавантаженому контурі в околі т. 5 в моменти  $\bar{t}_1$  і  $\bar{t}_2$ .

Таблиця 4

Момент часу	Нормовані тангенціальні напруження $\sigma_{ss}^{норм.}$ в точках границі					
	т. 1	т. 2	т. 3	т. 4	т. 5	Один отвір
$\bar{t}_1$	0.723	1.638	1.182	-0.957	1.410	1.205
$\bar{t}_2$	0.867	1.343	1.152	-0.620	1.142	1.018
$\bar{t}_3$	0.021	-0.387	-0.218	0.343	-0.280	-0.200
Статичне навантаж.	0.768	1.260	0.985	-0.609	1.111	1.00

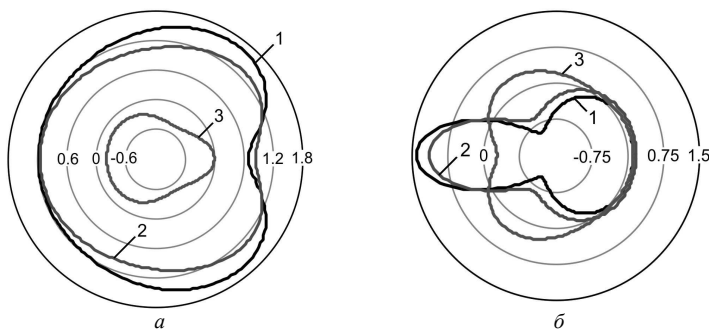


Рис. 6

Отже, наведені результати свідчать про те, що розроблений підхід може бути застосований для детального дослідження динамічного двовимірного НДС пружних масивів з різного роду отворами при імпульсному навантаженні.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 5. Динамика упругих тел / Головач В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н., Гринченко В.Т.* – Киев: Наук. думка, 1986. – 288 с.

3. Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. М.: Наука, 1979. – 830 с.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
5. Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А. Дослідження за методом граничних інтегральних рівнянь усталених коливань пластин з послабленнями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 89.– С.158–164.

*Стаття надійшла до редакції 17.07.2013 р.*

*Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С.,*

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ МАССИВОВ С ОТВЕРСТИЯМИ**

Путем сопоставления с численно-аналитическим решением задачи про импульсное нагружение массива с цилиндрическим отверстием показана работоспособность численного алгоритма, основанного на переходе в частотную область. С помощью такого подхода в сочетании с методом граничных элементов исследована динамическая реакция упругого массива, ослабленного двумя отверстиями, одно из которых подвергается действию внезапно приложенного давления.

*Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.*

### **TRANSIENT VIBRATIONS ANALYSIS OF 2D ELASTIC SOLIDS WITH HOLES**

Efficiency of the transition to the frequency domain is shown on the problem of impulse loading of the array with a cylindrical hole. The analysis of the 2D elastic space with two holes, one of which is exposed suddenly applied pressure, was performed using this approach combined with boundary element method.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

І.І.Солодей, д-р техн. наук

## НАПІВАНАЛІТИЧНИЙ КІЛЬЦЕВИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ АРМОВАНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ

В представленій роботі для чисельного моделювання процесу руйнування залізобетонних конструкцій [1] розглянуто кільцевий скінченний елемент із меридіональним перерізом у вигляді випуклого чотирикутника, в межах якого використано полілінійний закон апроксимації переміщень на основі поліномів Лагранжа. Вздовж кільцевої координати невідомі представлені у вигляді рядів Фур'є. Для побудови рівнянь застосовується моментна схема скінченного елемента.

Для тіл обертання при невісесиметричному навантаженні за глобальну систему координат  $z^i$  використовується циліндрична (рис. 1).

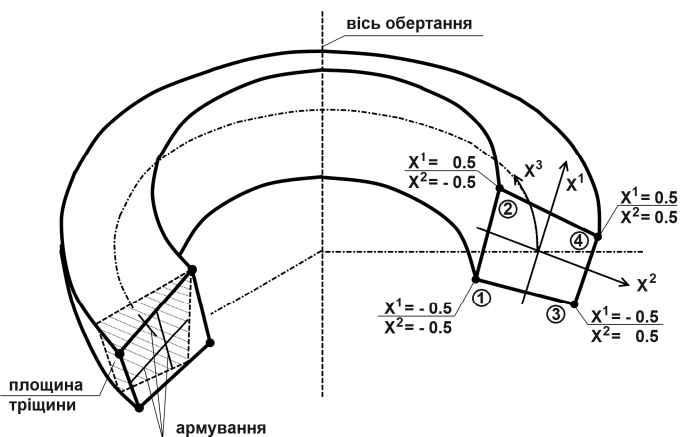


Рис. 1. Кільцевий напіваналітичний армований СЕ з тріщинами

Вісь  $z^1$  - збігається з віссю обертання досліджуваного об'єкта, вісь  $z^2$  спрямована по радіусу, а вісь  $z^3$  є окружною координатою в площині, що перпендикулярна  $z^1$ , причому  $z^3 = \pi t$  - площина симетрії системи

зовнішніх навантажень. Координатні лінії  $x^1$  і  $x^2$  локальної криволінійної системи координат  $x^i$  розташовані в площині  $z^1 z^2$ , а  $x^3 = z^3$ .

Вираз для компонент лінійного тензора деформацій  $\epsilon_{ij}$ , як симетричної частини градієнта переміщень  $\nabla_i u_j$  [3], запишемо з урахуванням відмінних від нуля символів Кристофеля циліндричної системи координат:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (z'_{\beta\gamma} u_{\gamma,\alpha} + z'_{\alpha\gamma} u_{\gamma,\beta}); \\ \epsilon_{\alpha 3} &= \epsilon_{3\alpha} = \frac{1}{2} (u_{3,\alpha} + z'_{\alpha\gamma} u_{\gamma,3} - \frac{2}{z^2} z'_{\alpha} u_3); \\ \epsilon_{33} &= u_{3,3} + z^2 u_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Дискретизація досліджуваного тіла обертання здійснюється за допомогою ізопараметричних кільцевих СЕ, меридіональним перерізом яких є довільні випуклі чотирикутники (рис. 1). В межах меридіонального перерізу СЕ приймається полілінійний закон апроксимації переміщень  $u_k$ , у вигляді:

$$u_k = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 U_{k(s)} \left( 1 + \frac{x^1}{x^1(s)} \right) \left( 1 + \frac{x^2}{x^2(s)} \right), \quad (3)$$

де  $U_{k's}$  - глобальні переміщення  $s$ -го вузла СЕ з місцевими координатами  $x_s^\alpha$ . У зв'язку з тим, що розглядаються системи навантажень, що мають принаймні одну площину симетрії ( $z^3 = n\pi$ ) та враховуючи сталість геометричних параметрів кільцевого СЕ в окружному напрямку, доволі ефективно апроксимувати закон зміни вузлових переміщень  $U_{k's} = U_{k's}(x^3)$  відрізками ряду Фур'є [4]:

$$U_{\alpha's} = \frac{1}{2} U_{\alpha's}^0 + \sum_{l=1}^L U_{\alpha's}^l \cos lx^3; \quad U_{3's} = \frac{1}{2} U_{3's}^0 + \sum_{l=1}^L U_{3's}^l \sin lx^3. \quad (4)$$

Амплітудні значення вузлових переміщень  $U_{k's}^l$  пов'язані з координатними  $U_{k's}$  наступними співвідношеннями [2]:

$$U_{\alpha's}^l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{\alpha's} \cos lx^3 dx^3; \quad U_{3's}^l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{3's} \sin lx^3 dx^3; \quad l=1,2,\dots,L. \quad (5)$$

Вирази елементарної роботи внутрішніх сил  $\delta'A_m^i$  для  $m$ -го СЕ запишемо, використовуючи місцеві фізичні компоненти варіації тензора деформацій  $\delta\tilde{\epsilon}_{pq}$  і тензора напружень  $\tilde{\sigma}^{pq}$ . Як передбачено моментною схемою скінченних елементів, представимо їх у межах меридіонального перетину СЕ відрізком ряду Маклорена в місцевій системі координат  $x^1$  і  $x^2$ , залишаючи кількість членів ряду відповідно до порядку апроксимації переміщень (3):

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\epsilon}_{pq} &= (h_p h_q \delta\epsilon_{pq})_0 + \left[ (h_p h_q)_{,\alpha} \delta\epsilon_{pq} \right]_0 x^\alpha + (h_p h_q \delta\epsilon_{pq,\alpha})_0 x^\alpha; \\ \tilde{\sigma}^{pq} &= \left\{ (h_u h_v \sigma_{uv})_0 + \left[ (h_u h_v)_{,\alpha} \sigma_{uv} \right]_0 x^\alpha + (h_u h_v \sigma'_{uv,\alpha})_0 x^\alpha \right\} \tilde{g}^{pu} \tilde{g}^{qv}.\end{aligned}\quad (6)$$

Проінтегрувавши вираз  $\delta'A_m^1$  по  $x^1$  і  $x^2$ , одержимо:

$$\begin{aligned}\delta'A_m^1 &= -\tilde{G}_0^{pquv} \sqrt{(g_m)_0} \int_{-0.5}^{0.5} \left\{ (h_p h_q \sigma_{pq})_0 (h_u h_v \delta\epsilon_{uv})_0 + \frac{1}{12} \bar{\delta}_p^\beta \bar{\delta}_q^\beta \bar{\delta}_u^\beta \bar{\delta}_v^\beta \times \right. \\ &\times \left[ (h_p h_q)_{,\beta} \sigma_{pq} (h_u h_v)_{,\beta} \delta\epsilon_{uv} + h_p h_q \sigma_{pq,\beta} (h_u h_v)_{,\beta} \delta\epsilon_{uv} + \right. \\ &\left. \left. + (h_p h_q)_{,\beta} \sigma_{pq} h_u h_v \delta\epsilon_{uv,\beta} + h_p h_q \sigma_{pq,\beta} h_u h_v \delta\epsilon_{uv,\beta} \right] \right\} dx^3.\end{aligned}\quad (7)$$

Представимо варіації деформацій  $(\delta\epsilon_{pq})_0$ ,  $(\delta\epsilon_{pq,\beta})_0$  і напруження  $(\sigma_{uv})_0$ ,  $(\sigma'_{uv,\beta})_0$  у вигляді розкладу в ряд Фур'є по окружній координаті  $x^3$ , причому число утримуваних членів ряду приймемо рівним тому, яке прийнято для апроксимації переміщень:

$$\begin{aligned}(\delta\epsilon_{pq})_0 &= \frac{1}{2} (\delta\bar{\epsilon}_{pq})_0^0 + \sum_{l=1}^L \left[ (\delta\bar{\epsilon}_{pq})_0^l \cos lx^3 + (\delta\bar{\epsilon}_{pq})_0^l \sin lx^3 \right]; \\ (\delta\epsilon_{pq,\beta})_0 &= \frac{1}{2} (\delta\bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^0 + \sum_{l=1}^L \left[ (\delta\bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^l \cos lx^3 + (\delta\bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^l \sin lx^3 \right];\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}(\sigma_{uv})_0 &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{uv})_0^0 + \sum_{l=1}^L \left[ (\bar{\sigma}_{uv})_0^l \cos lx^3 + (\bar{\sigma}_{uv})_0^l \sin lx^3 \right]; \\ (\sigma_{uv,\beta})_0 &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^0 + \sum_{l=1}^L \left[ (\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^l \cos lx^3 + (\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^l \sin lx^3 \right].\end{aligned}\quad (9)$$

Підставивши вираз (8) і (9) в (7) і виконавши інтегрування по  $x^3$  з

урахуванням сталості тензорів  $\tilde{g}^{pu}$  і  $\tilde{g}^{qv}$ , що характеризують метричні властивості меридіональних перерізів кільцевого СЕ, і ортогональності базисних тригонометричних функцій, можна виділити вирази:

$$\int_0^{2\pi} \cos lx^3 \cos nx^3 dx^3 = \delta_n^l \pi; \quad \int_0^{2\pi} \cos lx^3 \sin lx^3 dx^3 = 0; \\ \int_0^{2\pi} \sin lx^3 \sin nx^3 dx^3 = \delta_n^l \pi; \quad \int_0^{2\pi} dx^3 = 2\pi; \quad l, n=1, 2, \dots, L. \quad (10)$$

Представимо відмінні від нуля коефіцієнти розкладу варіацій деформацій  $(\delta \bar{\epsilon}_{pq})_0^l$ ,  $(\delta \bar{\epsilon}_{pq})_0^l$ , їх похідних  $(\delta \bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^l$ ,  $(\delta \bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^l$  та відповідні їм коефіцієнти розкладу напружень  $(\bar{\sigma}_{uv})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{uv})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^l$  в матричній формі:

$$\begin{aligned} (\delta \epsilon_1^l)^T &= \left\{ (\delta \bar{\epsilon}_{11})_0^l (2\delta \bar{\epsilon}_{12})_0^l (\delta \bar{\epsilon}_{22})_0^l (\delta \bar{\epsilon}_{33})_0^l \right\}; \quad (\delta \epsilon_2^l)^T = \left\{ (2\delta \bar{\epsilon}_{13})_0^l (2\delta \bar{\epsilon}_{23})_0^l \right\}; \\ (\sigma_1^l)^T &= \left\{ (\bar{\sigma}_{11})_0^l (\bar{\sigma}_{12})_0^l (\bar{\sigma}_{22})_0^l (\bar{\sigma}_{33})_0^l \right\}; \quad (\sigma_2^l)^T = \left\{ (\bar{\sigma}_{13})_0^l (\bar{\sigma}_{23})_0^l \right\}; \\ (\delta \epsilon_{1,1}^l)^T &= \left\{ (\delta \bar{\epsilon}_{22,1})_0^l (\delta \bar{\epsilon}_{33,1})_0^l \right\}; \quad (\delta \epsilon_{1,2}^l)^T = \left\{ (\delta \bar{\epsilon}_{11,2})_0^l (\delta \bar{\epsilon}_{33,2})_0^l \right\}; \\ (\delta \epsilon_{2,1}^l)^T &= \left\{ (2\delta \bar{\epsilon}_{23,1})_0^l \right\}; \quad (\delta \epsilon_{2,2}^l)^T = \left\{ (2\delta \bar{\epsilon}_{13,2})_0^l \right\}; \\ (\sigma_{1,1}^l)^T &= \left\{ (\bar{\sigma}_{22,1})_0^l (\bar{\sigma}_{33,1})_0^l \right\}; \quad (\sigma_{1,2}^l)^T = \left\{ (\bar{\sigma}_{11,2})_0^l (\bar{\sigma}_{33,2})_0^l \right\}; \\ (\sigma_{2,1}^l)^T &= \left\{ (\bar{\sigma}_{23,1})_0^l \right\}; \quad (\sigma_{2,2}^l)^T = \left\{ (\bar{\sigma}_{13,2})_0^l \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

З урахуванням (11) результат інтегрування (7) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta A_m^i &= -\pi \sqrt{(g_m)} \sum_{l=0}^L \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha^l \left\{ \left\{ \sigma_\alpha^{lh} \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_\alpha \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_\alpha^l \right\}_0 + \frac{1}{12} \sum_{\beta=1}^2 \left[ \left\{ \sigma_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0 + \right. \right. \\ &+ \left. \left\{ \sigma_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_\alpha^\beta \right\}_0 + \left\{ \sigma_\alpha^\beta \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0 + \left\{ \sigma_\alpha^\beta \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_\alpha^\beta \right\}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

де верхній індекс  $h$  означає те, що елементи відповідної матриці стовпця виду (11) або (12) помножені на коефіцієнти  $(h_p h_q)_0$ , а верхній індекс  $\beta$  -

на коефіцієнти  $\left[ (h_p h_q)_{,\beta} \right]_0$ . Компоненти матриць  $[\tilde{G}_\alpha]$  і  $[\tilde{G}_{\alpha\beta}]$  обчислюються у такий спосіб:

$$\tilde{G}^{pucv} = \tilde{g}^{pu} \tilde{g}^{qv}, \quad (14)$$

причому, індекси  $p, q$  відповідають номеру рядка, а  $u, v$  - стовпця. Для компактності запису у вираз (13) введені коефіцієнти:

$$k_1^l = 1 - \frac{1}{2} \delta_0^l; \quad k_2^l = 1 - \delta_0^l \quad (15)$$

або

$$k_\alpha^l = 1 - \frac{\alpha}{2} \delta_0^l. \quad (16)$$

Беручи до уваги змінність фізико-механічних характеристик матеріалу по окружній координаті, наприклад завдяки появі локальних зон пластичності або тріщиноутворення, коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є напружень  $(\bar{\sigma}_{ij})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{ij})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{ij,\alpha})_0^l$  і  $(\bar{\sigma}_{ij,\alpha})_0^l$  у формулі (9) не можуть бути виражені через відповідні коефіцієнти розкладу деформацій  $(\bar{\epsilon}_{ij})_0^l$ ,  $(\bar{\epsilon}_{ij})_0^l$ ,  $(\bar{\epsilon}_{ij,\alpha})_0^l$ ,  $(\bar{\epsilon}_{ij,\alpha})_0^l$  з (8). Тому виникає необхідність обчислення їх шляхом чисельного інтегрування функцій  $(\sigma_{ij})_0$  і  $(\sigma_{ij,\alpha})_0$  по окружній координаті  $x^3$ , використовуючи, наприклад, квадратурну формулу трапецій [5]:

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_{ij,\alpha})_0^l &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} (\sigma_{ij,\alpha})_0^n \cos l \frac{n\pi}{N}; \quad (\bar{\sigma}_{ij,\alpha})_0^l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} (\sigma_{ij,\alpha})_0^n \sin l \frac{n\pi}{N}; \\ (\bar{\sigma}_{ij})_0^l &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} (\sigma_{ij})_0^n \cos l \frac{n\pi}{N}; \quad (\bar{\sigma}_{ij})_0^l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} (\sigma_{ij})_0^n \sin l \frac{n\pi}{N}, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $(\sigma_{ij})_0^n$  й  $(\sigma_{ij,\alpha})_0^n$  координатні значення напружень і їх "похідних" в  $n$ -й точці чисельного інтегрування по окружній координаті  $x^3$ :

$$x_n^3 = \frac{n\pi}{N}; \quad n=0,1,2,\dots,(2N-1). \quad (18)$$

Виразимо амплітуди варіацій деформацій  $(\delta\epsilon_\alpha^l)$  і їх похідних  $(\delta\epsilon_{\alpha,\beta}^l)$  для центрів меридіональних перетинів СЕ в (13) через амплітуди варіацій переміщень вузлів відповідних меридіональних перетинів СЕ. Для цього на підставі (2) і (3) виведемо співвідношення:

$$\{\delta\epsilon\} = [B]\{\delta U\}. \quad (19)$$

Запишемо компоненти координатної матриці  $[B]$ , яка поєднує варіації координатних вузлових переміщень  $\{\delta U\}$  із варіаціями координатних деформацій  $\{\delta\epsilon\}$  для деякого меридіонального перерізу кільцевого СЕ,



розбивши матрицю-стовпець  $\{\delta\epsilon\}$  на два за аналогією з (11):

$$\{\delta\epsilon\} = [B_\alpha] \{\delta U\}, \quad (20)$$

де матриці  $[B_\alpha]$  складаються із блоків  $[B_{s\alpha}]$ , які є результатом диференціювання матриць  $N_s[E]$ .

Аналогічно (12) запишемо:

$$\{\delta\epsilon_{\alpha,\beta}\} = [B_{\alpha,\beta}] \{\delta U\}, \quad (21)$$

де підматриці  $[B_{s\alpha,\beta}]$  - складові матриці  $[B_{s\alpha,\beta}]$ , отримані шляхом повторного диференціювання матриць  $[B_{s\alpha}]$ .

Подамо деформації, їх похідні і вузлові переміщення відрізками ряду Фур'є:

$$\{\epsilon_{1j}\} = \frac{1}{2} \{\epsilon_1^0\} + \sum_{l=1}^L \{\epsilon_1^l\} \cos lx^3 = [B_1] \{U\}; \quad (22)$$

$$[B_{S1}] \{U_S\} = [B_{S1}] \left\{ \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} U_{S1}^0 \\ U_{S2}^0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{l=1}^L \begin{Bmatrix} U_{S1}^0 \cos lx^3 \\ U_{S2}^0 \cos lx^3 \\ U_{S3}^0 \cos lx^3 \end{Bmatrix} \right\} = \sum_{l=0}^L k_1^l [B_{S1}^l] \{U_S^1\} \cos lx^3; \quad (23)$$

$$\{\epsilon_2\} = \sum_{l=1}^L \{\epsilon_2^l\} \sin lx^3 = [B_2] \{U\}; \quad (24)$$

$$[B_{S2}] \{U_S\} = [B_{S2}] \sum_{l=1}^L \begin{Bmatrix} U_{S1}^0 \cos lx^3 \\ U_{S2}^0 \cos lx^3 \\ U_{S3}^0 \cos lx^3 \end{Bmatrix} = \sum_{l=0}^L k_2^l [B_{S2}^l] \{U_S^1\} \sin lx^3. \quad (25)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових базисних функціях у відрізках рядів Фур'є (22) і (24), маємо:

$$\{\epsilon_\alpha^l\} = [B_\alpha^l] \{U^l\}. \quad (26)$$

Аналогічні співвідношення виконуються і для амплітуд похідних деформацій:

$$\{\epsilon_{\alpha,\beta}^l\} = [B_{\alpha,\beta}^l] \{U^l\}. \quad (27)$$

Запишемо компоненти амплітудних матриць  $[B_{s\alpha}^l]$  і  $[B_{s\alpha,\beta}^l]$ , наприклад при  $x^1 = x^2 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 [B_{S1}^l] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{16x_S^1} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^1}{x_t^1} & \frac{1}{16x_S^1} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^1} & 0 \\ \frac{1}{16} \sum_{t=1}^4 Z_t^1 \left( \frac{1}{x_t^1 x_S^2} + \frac{1}{x_S^1 x_t^2} \right) & \frac{1}{16x_S^1} \sum_{t=1}^4 Z_t^{2'} \left( \frac{1}{x_t^1 x_S^2} + \frac{1}{x_S^1 x_t^2} \right) & 0 \\ \frac{1}{16x_S^2} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^1}{x_t^2} & \frac{1}{16x_S^2} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \sum_{t=1}^4 Z_t^{2'} & \frac{1}{4} l \end{bmatrix}; \\
 [B_{S2}^l] &= \begin{bmatrix} -\frac{l}{16} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^1}{x_t^1} & -\frac{l}{16} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^1} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2x_S^1} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^1} \Big/ \sum_{t=1}^4 Z_t^{2'} \right) \\ -\frac{l}{16} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^1}{x_t^2} & -\frac{l}{16} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^2} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2x_S^2} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^2} \Big/ \sum_{t=1}^4 Z_t^{2'} \right) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

При обчисленні в (13) матриць-стовпців:

$$\{\delta \varepsilon_{\alpha}^{lh}\} = [B_{\alpha}^{lh}] \{U^l\}; \{\delta \varepsilon_{\alpha}^{l\beta}\} = [B_{\alpha}^{l\beta}] \{U^l\}; \{\delta \varepsilon_{\alpha,\beta}^{lh}\} = [B_{\alpha,\beta}^{lh}] \{U^l\}. \quad (28)$$

необхідні матриці  $[B_{\alpha}^{lh}]$ ,  $[B_{\alpha}^{l\beta}]$  і  $[B_{\alpha,\beta}^{lh}]$  виходять із амплітудних матриць  $[B_{S\alpha}^l]$  і  $[B_{S\alpha,\beta}^l]$  шляхом множення  $i$ -го рядка на відповідний коефіцієнт  $t_i$ .

Так, для матриць  $[B_{S\alpha}^{lh}]$  і  $[B_{S\alpha,\beta}^{lh}]$  коефіцієнти будуть приймати наступні значення:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= (h_1^2)_0; \quad t_2 = (h_1 h_2)_0; \quad t_3 = (h_2^2)_0; \\
 t_4 &= (h_3^2)_0; \quad t_5 = (h_1 h_3)_0; \quad t_6 = (h_2 h_3)_0.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Для матриць  $[B_{\alpha}^{l\beta}]$  слід прийняти:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \delta_{\beta}^2 [(h_1^2)_{,2}]_0; \quad t_2 = 0; \quad t_3 = \delta_{\beta}^2 [(h_2^2)_{,1}]_0; \\
 t_4 &= [(h_3^2)_{,\beta}]_0; \quad t_5 = \delta_{\beta}^2 [(h_1 h_3)_{,2}]_0; \quad t_6 = \delta_{\beta}^2 [(h_2 h_3)_{,1}]_0.
 \end{aligned} \quad (30)$$

Підстановка амплітудних матриць  $[B_{\alpha}^{lh}]$ ,  $[B_{\alpha}^{l\beta}]$  і  $[B_{\alpha,\beta}^{lh}]$  в рівняння (13) приводить до виразу:

$$\delta' A_m^i = \pi \sum_{l=0}^L \left\{ \delta U^l \right\}^T \left\{ R_m^l \right\}, \quad (31)$$

де  $\left\{ R_m^l \right\}$  - матриця-стовпець амплітуд вузлових реакцій СЕ, яка обчислюється за формулою:

$$\left\{ R_m^l \right\} = -\sqrt{(g_m)_0} \sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha}^l \left\{ \left[ B_{\alpha}^{lh} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha}^{lh} \right\}_0 + \frac{1}{12} \sum_{\beta=1}^2 \left[ \left[ B_{\alpha,\beta}^{lh} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0 + \left[ B_{\alpha}^{lh} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0 + \left[ B_{\alpha,\beta}^{lh} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha}^{l\beta} \right\}_0 + \left[ B_{\alpha}^{l\beta} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha}^{l\beta} \right\}_0 \right\}. \quad (32)$$

Вираз для віртуальної роботи зовнішніх сил для m-го СЕ запишемо у вигляді:

$$\delta' A_m^i = \sum_{l=0}^L \int_0^{2\pi} P_S^{k'} \delta U_{sk'} \sqrt{(g_m)_0} dx^3, \quad (33)$$

де  $P_S^{k'}$  - питомі (тобто віднесені до одиниці об'єму СЕ) координатні вузлові навантаження в меридіональному перетині СЕ, до яких приводяться об'ємні і поверхневі розподілені навантаження в результаті інтегрування по місцевих координатах  $x^1$  і  $x^2$  в площині відповідного меридіонального перерізу  $x^3$ . Аналогічно (33) представимо  $P_S^{k'}$  на основі розкладу рядами Фур'є по окружній координаті:

$$\left\{ P_S \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} P_S^{1'0} \\ P_S^{2'0} \\ 0 \end{array} \right\} + \sum_{l=1}^L \left\{ \begin{array}{c} P_S^{1'l} \cos lx^3 \\ P_S^{2'l} \cos lx^3 \\ P_S^{3'l} \sin lx^3 \end{array} \right\}. \quad (34)$$

Згідно (17) знайдемо коефіцієнти розкладу  $P_S^{k'l}$  шляхом чисельного інтегрування:

$$P_S^{\alpha'l} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} P_S^{\alpha'}(x_n^3) \cos lx_n^3; \quad l=0,1,2,\dots,L;$$

$$P_S^{3'l} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} P_S^{3'}(x_n^3) \sin lx_n^3; \quad l=1,2,\dots,L,$$

де  $x_n^3 = \frac{n\pi}{N}$ .

Для інтегрування виразу (33) по окружній координаті  $x^3$  підставляємо в нього  $P_S^{k'}$  і  $U_S^k$  у вигляді відрізків ряду Фур'є (34) і (23), відповідно, з урахуванням (10) маємо:

$$\delta' A_m^e = \pi \sum_{l=0}^L \{ \delta U^l \}^T \{ Q^l \}, \quad (35)$$

де

$$Q_s^{k'l} = a_k^l \cdot P_s^{k'l} \sqrt{(g_m)_0}; \quad a_k^l = 1 - \frac{1}{2} (1 + \delta_k^{3'}) \delta_o^l.$$

Підставивши (31) і (35) в рівняння рівноваги, склавши по всіх скінченних елементах дискретної моделі та виносячи варіації амплітуд вузлових переміщень за дужки, приходимо до системи рівнянь:

$$\pi \sum_{l=0}^L \{ \delta U^l \}^T \left( \{ R^l \} + \{ Q^l \} \right) = 0, \quad (36)$$

де елементами матриць-стовпців  $\{ \delta U^l \}$ ,  $\{ R^l \}$  і  $\{ Q^l \}$  є відповідно амплітуди переміщень, реакцій і навантажень для всіх вузлів дискретної моделі.

Якщо загальне число вузлів дискретної моделі  $M$ , то розмірність матриць-стовпців, що входять в (36) -  $3M \times 1$ . Для того щоб рівняння (36) виконувалося при довільній варіації амплітуд вузлових переміщень  $\{ \delta U^l \}$  необхідно, щоб напруження в бетони і метали задовольняли системі з  $3M(L+1)$  рівнянь:

$$\{ R^l \} + \{ Q^l \} = 0, \quad (37)$$

яка являє собою систему рівнянь рівноваги в напруженнях.

Таким чином, на основі моментної схеми скінченних елементів розроблено новий тип просторового ізопараметричного скінченного елемента, який дозволяє враховувати фізичну нелінійність і тріщиноутворення в бетони, пластичне деформування стержневої та листової арматури.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляр О.І., Лізунов П.П., Солодей І.І. Математичні моделі появи та розповсюдження зон руйнування кругових неоднорідних дисперсно-армованих тіл. // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.90, 2012.-с.94-112
2. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. -512с.
4. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл / [Баженів В. А., Гуляр О. І., Сахаров О. С., Солодей І. І.]. – К., КНУБА, 2012. – 248с.
5. Хемминг Р.В. Численные методы. М.: Наука, 1972. -400с.

Стаття надійшла до редакції 02.09.2013 р.

Баженів В.А., Гуляр А.И., Солодей І.И.

**ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ КОЛЬЦЕВОЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ**

**МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
АРМИРОВАННЫХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ**

В настоящей работе для численного моделирования процесса разрушения железобетонных конструкций рассмотрен кольцевой конечный элемент с меридиональным сечением в виде выпуклого четырехугольника, в пределах которого использован полилинейный закон аппроксимации перемещений на основе полиномов Лагранжа. Вдоль кольцевой координаты неизвестные представлены в виде рядов Фурье. Для вывода уравнений применяется моментная схема конечного элемента.

*Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Solodei I.I.*

**SEMI-ANALYTICAL CIRCULAR FINITE ELEMENT TO MODEL 3D STRESS STATE  
OF REINFORCED SOLIDS WITH CRACKS**

New semi-analytical circular finite element (FE) to model three-dimensional formulation of reinforced solids with cracks are developed. Meridional section of FE is quadrangle with multilinear function to describe displacements. Fourier series are used to approximate decision variables along the circular direction. In order to build equilibrium equation, the moment scheme of finite element are considered.

УДК 539.3

О.К. Гревцев

О.В. Герашенко, канд. техн. наук

## ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПОЛОГО ДИСКА ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Отримане точне розв'язання диференціальних рівнянь теорії пружності для полого диска змінної товщини при осесиметричному навантаженні на його внутрішні і зовнішні криволінійні поверхні.

Формули для напружень отримані вперше і дозволяють визначити їх величину у будь-якій точці розглянутого тіла обертання. При цьому бічна поверхня та поверхня полості диска може мати будь-який профіль.

**Вступ.** Відомо [1,2], що в літературі не наведено точних методів розв'язання задачі теорії пружності для тіл обертання змінної товщини. Зокрема дисків. Наприклад, для тонкого диска змінної товщини, що обертається, припускають, що напруга є плоскою, граничними кривими на криволінійній бічній поверхні нехтують в силу малої товщини [3]. Для полого диска змінної товщини з осесиметричним навантаженням немає аналітичного методу розв'язання з точки зору теорії пружності.

**Основна частина.** У пропонованій роботі розглядається точне розв'язання задачі теорії пружності для полого диска змінної товщини симетричного відносно площин  $z=0$  і  $r=0$ , навантаженого рівномірно розподіленим тиском на його внутрішній та зовнішній криволінійних поверхнях без спрощених гіпотез, що використовуються в плоскій задачі, крім загальних гіпотез лінійної теорії пружності для осесиметричної деформації.

Розглянемо аксіальне тіло обертання, зокрема полий диск, чверть якого показана на рис. 1.

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах  $(r, z)$  мають вигляд [1]:

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{e_{s1}}{1-2\nu} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta_1 = 0; \quad \Delta u_3 - \frac{u_3}{r^2} + \frac{e_{s3}}{1-2\nu} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta_3 = 0 \quad (1)$$

і напруженнях

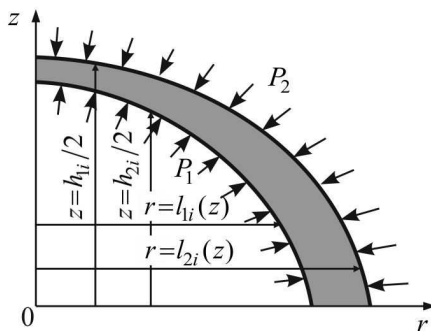


Рис. 1

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0; \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \frac{\sigma_{13}}{r} = 0. \quad (2)$$

У наведених рівняннях індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою  $r$  або  $z$ ,  $u_1, u_3$  - компоненти відповідно радіального і осевого переміщень,  $\Delta u$  - оператор Лапласа від переміщень  $u_i$  ( $i=1,3$ ),  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$  - компоненти відповідно радіальних, окружних, осевих і дотичних напружень.

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [1]:

$$\sigma_{ij} = 2G(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta \delta_{ij}) = 0, \quad i, j=1, 2, 3 \quad (3)$$

при відомих залежностях між деформаціями і переміщеннями:

$$e_{11} = u_{1,1}; \quad e_{22} = \frac{1}{r} u_1; \quad e_{33} = u_{3,3}; \quad 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1}. \quad (4)$$

Тут  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера;  $\alpha$  і  $\nu$  - коефіцієнти теплового лінійного розширення і Пуасона;  $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  - об'ємне розширення;  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль зсуву;  $E$  - модуль пружності.

Розв'язок системи рівнянь (1) у вигляді:

$$u_1(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ \psi_{,1} + \frac{1}{r} (A_5 z - A_3) \right] + r (A_4 z - \frac{1}{2} A_6);$$

$$u_3(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} (\psi_{,3} - A_5 \ln r) - A_4 \left( \frac{\nu}{1-\nu} z^2 + \frac{r^2}{2} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} z A_6 + A_7, \quad (5)$$

де  $A_i$  - довільні сталі інтегрування, а  $\psi(r, z)$  - функція, яку треба знайти.

Далі по переміщенням (5) за законом Гука (3) визначаємо напруження

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu} \psi_{,13}; \quad \sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} (r \psi_{,1})_{,1};$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu} \left[ -\frac{1}{r} \psi_{,1} - \psi_{,33} - \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + \frac{1}{2} A_6 \right];$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu} \left[ -\psi_{,11} - \psi_{,33} + \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + \frac{1}{2} A_6 \right]. \quad (6)$$

Вирази (5) і (6) є точним розв'язанням рівнянь рівноваги (1) і (2), оскільки після підстановки останні утворюють тотожності.

Граничні умови для напружень при осесиметричній деформації полого диска змінної товщини такі:

$$\sigma_{13} = 0 \text{ при } r = l_{1i}(z), \quad \sigma_{13} = 0 \text{ при } r = l_{2i}(z),$$

$$\sigma_{13}=0 \text{ при } z=\frac{h_{1i}(r)}{2}, \quad \sigma_{13}=0 \text{ при } z=\frac{h_{2i}(r)}{2}, \quad (7)$$

$$\sigma_{11}=-P_{2i} \text{ при } r=l_{2i}(z), \quad \sigma_{11}=P_{1i} \text{ при } r=l_{1i}(z), \quad (8)$$

$$\sigma_{33}=-P_{2i} \text{ при } z=\frac{h_{2i}(r)}{2}, \quad \sigma_{33}=P_{1i} \text{ при } z=\frac{h_{1i}(r)}{2}, \quad (9)$$

де  $l_{1i}(z), l_{2i}(z)$  - рівняння профілю внутрішньої та зовнішньої поверхонь диску;  $\frac{h_{1i}(r)}{2}, \frac{h_{2i}(r)}{2}$  - внутрішня довжина порожнини і зовнішня довжина диска;  $i$  - фіксоване значення будь-якої точки тіла диска в перетині осям  $Ox$  та  $Oz$  і розташованої від неї на цю величину.

Для виконання граничних умов візьмемо частинну похідну по  $r$  від функції переміщень  $\psi(r, z)$  у вигляді:

$$\psi_{,1}(r, z) = \varphi(z) \frac{1}{r} (r^2 - l_{1i}^2(z)) (r^2 - l_{2i}^2(z)), \quad (10)$$

де  $\varphi(z)$  - довільна функція, яку необхідно визначити з граничних умов.

Диференціюючи похідну по  $z$  і підставляючи у дотичну напругу  $\sigma_{13}$  з (6) знаходимо:

$$\sigma_{13i} = \frac{E}{1-\nu} \psi_{,13} = \frac{E}{1-\nu} \varphi_{,3} \frac{1}{r} (r^2 - l_{1i}^2(z)) (r^2 - l_{2i}^2(z)), \quad (11)$$

при цьому

$$\varphi_{13}(z) \Big|_{z=\frac{h_{1i}(r)}{2}} = 0; \quad \varphi_{13}(z) \Big|_{z=\frac{h_{2i}(r)}{2}} = 0 \quad (12)$$

і граничні умови (7) виконуються.

Підставляючи похідні (10) в осову напругу  $\sigma_{33}$  з (6), знаходимо

$$\sigma_{33i} = -\frac{E}{1-\nu} \varphi(z) \left[ 4r^2 - 2(l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)) \right]. \quad (13)$$

Граничні умови (9) буде задовільнено, якщо

$$\varphi(z) \Big|_{z=\frac{h_{1i}(r)}{2}} = -P_{1i}; \quad \varphi(z) \Big|_{z=\frac{h_{2i}(r)}{2}} = P_{2i}. \quad (14)$$

Для визначення радіальної напруги з (6) знаходимо функцію  $\psi(r, z)$ , для чого інтегруємо похідну (10) по  $r$

$$\psi(r, z) = \varphi(z) \int_{l_{1i}(z)}^r \frac{1}{r} (r^2 - l_{1i}^2(z)) (r^2 - l_{2i}^2(z)) dr + f(z), \quad (15)$$

де  $f(z)$  - довільна функція інтегрування.

Використовуючи похідну (10) і двічі диференціюючи функцію (15) по  $z$ , а потім підставляючи у формулу (6), отримаємо:



$$\begin{aligned} \sigma_{11i} = & \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\varphi(z) \frac{1}{r^2} (r^2 - l_{1i}^2(z)) (r^2 - l_{2i}^2(z)) - \right. \\ & -\varphi_{,33}(z) \int_{l_{1i}(z)}^r \frac{1}{r} (r^2 - l_{1i}^2(z)) (r^2 - l_{2i}^2(z)) dr - \\ & \left. - f_{,33}(r) - \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + \frac{1}{2} A_6 \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо виконані граничні умови (8), то знайдемо рівняння для визначення функцій  $\varphi_{,33}(z)$  і  $f_{,33}(r)$

$$-\varphi_{,33}(z) = \frac{1-\nu}{E\beta} \frac{P_{1i} + P_{2i}}{l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z)} + \frac{A_5 z - A_3}{l_{2i}^2(z) \cdot l_{1i}^2(z) \beta}, \quad (17)$$

де

$$\beta = \frac{l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)}{l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z)} \ln \frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)} - \frac{l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)}{4} \quad (18)$$

та

$$-f_{,33}(r) = -P_{1i} + \frac{1}{l_{1i}(z)} (A_5 z - A_3) - (A_4 z + \frac{1}{2} A_6). \quad (19)$$

Підстановка похідної (19) у формулу (16) дає:

$$\begin{aligned} \sigma_{11i} = & -P_{1i} + \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\varphi(z) \frac{1}{r^2} (r^2 - l_{1i}^2(z)) (r^2 - l_{2i}^2(z)) - \right. \\ & \left. -\varphi_{,33}(z) \int_{l_{1i}(z)}^r \frac{1}{r} (r^2 - l_{1i}^2(z)) (r^2 - l_{2i}^2(z)) dr + \frac{(A_5 z - A_3)}{l_{1i}^2(z) (1 - \frac{l_{1i}^2(z)}{r^2})} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогічно для окружного напруження будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma_{22i} = & -P_{1i} + \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\varphi(z) \left[ 3r^2 (l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)) - \frac{l_{1i}^2(z) l_{2i}^2(z)}{r} \right] - \right. \\ & \left. -\varphi_{,33}(z) \int_{l_{1i}(z)}^r \frac{1}{r} (r^2 - l_{1i}^2(z)) (r^2 - l_{2i}^2(z)) dr + \frac{(A_5 z - A_3)}{l_{1i}^2(z) (1 + \frac{l_{1i}^2(z)}{r^2})} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Далі інтегруючи рівняння (17), отримаємо:

$$\varphi_{,3}(z) = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{P_{1i} + P_{2i}}{(l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z))\beta} z + \frac{A_5 z}{l_{2i}^2(z) \cdot l_{1i}^2(z)\beta} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{A_3}{l_{2i}^2(z) \cdot l_{1i}^2(z)\beta} \cdot z + C_1 \quad (22)$$

та

$$\varphi(z) = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{P_{1i} + P_{2i}}{(l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z))\beta} \frac{z^2}{2} + \frac{A_5}{l_{2i}^2(z) \cdot l_{1i}^2(z)\beta} \frac{z^3}{6} - \frac{A_3}{l_{2i}^2(z) \cdot l_{1i}^2(z)\beta} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2, \quad (23)$$

де  $A_3, A_5, C_1, C_2$  - довільні сталі інтегрування.

Скористаймося граничними умовами (12), виконання яких дає:

$$A_5 = \frac{8C_1}{h_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)} \cdot l_{2i}^2(z) \cdot l_{1i}^2(z)\beta,$$

$$A_3 = \frac{1-\nu}{E} (P_{1i} + P_{2i}) \cdot \frac{l_{2i}^2(z) \cdot l_{1i}^2(z)}{l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z)} + \frac{2(h_{1i}(r) + h_{2i}(r))}{h_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)} \cdot l_{2i}^2(z) \cdot l_{1i}^2(z)\beta C_1. \quad (24)$$

Після підстановки  $A_3, A_5$  у вираз (23), отримаємо:

$$-\varphi(z) = \frac{4z^3}{3h_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)C_1} - \frac{(h_{1i}(r) + h_{2i}(r))z^2}{h_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)C_1} + C_1 z + C_2, \quad (25)$$

Задовільняючи граничні умови (9), знаходимо:

$$C_1 = -\frac{1-\nu}{E} \cdot (P_{1i} + P_{2i}) \frac{12h_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))}, \quad (26)$$

$$C_2 = -\frac{1-\nu}{E} \cdot P_{1i} \left\{ 1 - \frac{2h_{2i}^3(r) - 3h_{2i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}{2h_{1i}^3(r) - 3h_{1i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)} \right\} -$$

$$-\frac{1-\nu}{E} \cdot P_{2i} \left\{ 1 - \frac{2h_{1i}^3(r) - 3h_{1i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}{2h_{2i}^3(r) - 3h_{2i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)} \right\}. \quad (27)$$

Після підстановки (25) у (13), з урахуванням (26) та (27), отримаємо вираз для осового напруження  $\sigma_{33i}$ :

$$\sigma_{33i} = 4r^2 - 2(l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)) \left\{ P_{1i} \left[ 1 - \frac{16z^3 - 12z(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 12zh_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} \right] - \right.$$

$$\left. \frac{2h_{2i}^3(r) - 3h_{2i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}{2h_{1i}^3(r) - 3h_{1i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)} \right] -$$

$$-P_{2i} \left[ 1 + \frac{16z^3 - 12z(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 12zh_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} - \frac{2h_{1i}^3(r) - 3h_{1i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}{2h_{2i}^3(r) - 3h_{2i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)} \right] \quad (28)$$

Знаходимо дотичне напруження  $\sigma_{13i}$  з (11), враховуючи вирази (22) і (26):

$$\sigma_{13i} = (P_{1i} + P_{2i}) \frac{1}{r} (r - l_{1i}(z))(r - l_{2i}(z)) \times \frac{12[4z^2 - 2z(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + h_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)]}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} \quad (29)$$

Підставляючи функції  $\varphi(z)$  і  $\varphi_{33}(z)$  з (25) і (17), враховуючи вирази (18), (24), (26) і (27), знаходимо радіальні напруження  $\sigma_{11i}$  з рівняння (20):

$$\sigma_{11i} = P_{1i} + \left[ P_{1i} \left( 1 - \frac{16z^3 - 12z(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 12zh_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} - \frac{2h_{2i}^3(r) - 3h_{2i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}{2h_{1i}^3(r) - 3h_{1i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)} \right) - P_{2i} \left( 1 + \frac{16z^3 - 12z(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 12zh_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} - \frac{2h_{1i}^3(r) - 3h_{1i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}{2h_{2i}^3(r) - 3h_{2i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)} \right) \right] \left[ r^3 - r(l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)) + \frac{l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z)}{r} \right] - (P_{1i} + P_{2i}) \frac{24z - 6(h_{1i}(r) + h_{2i}(r))}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} \times \left[ r^4 + l_{1i}^4(z) - 2r^2(l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)) + 2l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z) \left( 1 + \ln \frac{r}{l_{1i}(z)} \right) \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -(P_{1i} + P_{2i}) \left[ \frac{24}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} \times \right. \\
& \left. \frac{z(r^2 + l_{1i}^2(z)) \left[ 4l_{1i}^2(z) \ln \frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)} - (l_{2i}^4(z) - l_{1i}^4(z)) \right]}{r^2 (l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z))} \right] - (P_{1i} + P_{2i}) \frac{r^2 + l_{1i}^2(z)}{l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z)} \cdot \frac{l_{2i}^2(z)}{r^2} + \\
& + (P_{1i} + P_{2i}) \frac{6(h_{1i}(r) + h_{2i}(r))}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} \times \\
& \times \frac{(r^2 + l_{1i}^2(z)) \left[ 4l_{1i}^2(z) \ln \frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)} - (l_{2i}^4(z) - l_{1i}^4(z)) \right]}{r^2 (l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z))}. \tag{30}
\end{aligned}$$

Аналогічно для окружного напруження будемо мати:

$$\begin{aligned}
\sigma_{22i} = & P_{1i} + \left\{ P_{1i} \left( 1 - \frac{16z^3 - 12z(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 12zh_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2h_{2i}^3(r) - 3h_{2i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}{2h_{1i}^3(r) - 3h_{1i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)} \right) \right. \\
& \left. - P_{2i} \left( 1 + \frac{16z^3 - 12z(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 12zh_{1i}(r) \cdot h_{2i}(r)}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2h_{1i}^3(r) - 3h_{1i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}{2h_{2i}^3(r) - 3h_{2i}^2(r)(h_{1i}(r) + h_{2i}(r)) + 6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)} \right) \right] \left[ 3r^2 - (l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)) + \frac{l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z)}{r^2} \right] - \\
& - (P_{1i} + P_{2i}) \frac{24z - 6(h_{1i}(r) + h_{2i}(r))}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} \times \\
& \times \left[ r^4 + l_{1i}^4(z) - 2r^2 (l_{1i}^2(z) + l_{2i}^2(z)) + 2l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z) \left( 1 + \ln \frac{r}{l_{1i}(z)} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(P_{1i} + P_{2i}) \left[ \frac{24}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} \right] \times \\
& \times \frac{z(r^2 + l_{1i}^2(z)) \left[ 4l_{1i}^2(z) \ln \frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)} - (l_{2i}^4(z) - l_{1i}^4(z)) \right]}{r^2 (l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z))} \left[ -(P_{1i} + P_{2i}) \frac{r^2 + l_{1i}^2(z)}{l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z)} \cdot \frac{l_{2i}^2(z)}{r^2} + \right. \\
& \left. + (P_{1i} + P_{2i}) \frac{6(h_{1i}(r) + h_{2i}(r))}{2(h_{2i}^3(r) - h_{1i}^3(r)) - 3(h_{2i}^2(r) - h_{1i}^2(r)) + 6(h_{2i}(r) - h_{1i}(r))} \right] \times \\
& \times \frac{(r^2 + l_{1i}^2(z)) \left[ 4l_{1i}^2(z) \ln \frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)} - (l_{2i}^4(z) - l_{1i}^4(z)) \right]}{r^2 (l_{2i}^2(z) - l_{1i}^2(z))}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Отже запропонований у статті метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності, на думку авторів, може знайти застосування при конструюванні апаратів, які знаходяться під дією гідростатичного тиску на великій глибині. Зокрема, при відсутності внутрішнього тиску ( $P_i = 0$ ) та оптимізації внутрішнього та зовнішнього профілей полого диска змінної товщини, можна отримати таку конструкцію апарата, яка витримає гідростатичне навантаження на будь-якій глибині. При цьому немає потреби урівноваження зовнішнього тиску внутрішнім. Останнє дуже важливо, оскільки знімає питання кесонної хвороби екіпажу підводного апарата при різкому винуренні.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
2. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наукова думка, 1972. – 501 с.
3. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.

Стаття надійшла до редакції 21.02.2013 р.

*Гревцев А.К., Геращенко О.В.*

**ПРО ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

Получено точное решение дифференциальных уравнений теории упругости для полого диска переменной толщины при осесимметричном нагружении его внутренних и внешних криволинейных поверхностей.

Формулы для напряжений получены впервые и позволяют определить их величину в любой точке рассматриваемого тела обертанья. При этом боковая поверхность и поверхность полости диска может иметь произвольный профиль.

*Grevtsev O.K., Gerashchenko O.V.*

**ONE OF THE METHODS OF SOLUTION OF AXIALLY SYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR HOLLOW DISK WITH VARIABLE THICKNESS**

It was recieved an exact solution of differential equations of the theory of elasticity for hollow disk with variable thickness under axially symmetric loading of its internal and external curvilinear surfaces. Formulas of stress were recieved for a first time. These formulas allow to determine stress value at any point of the examined body of revolution. Meanwhile the side face and surface of disk cavity may have an arbitrary section.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук  
Н.А. Гречух  
О.О. Яковенко

## РОЗРАХУНОК НА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНЧАСТО-ОБОЛОНКОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ НЕРЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ ЗА МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Наведені результати розв'язання задачі про власні коливання комбінованої нерегулярної конструкції, дискретна модель якої побудована на основі методу скінчених елементів. Розв'язок задачі виконано з використанням методу підконструкцій і редукованих моделей фрагментів.

Різноманітні інженерні конструкції широкого кола призначення розглядаються як складні структури, аналіз яких навіть при використанні сучасних програмних систем для ЕОМ залишається трудомісткою і нетривіальною задачею. Рівень розвитку чисельних методів розрахунку складних структур дає змогу використовувати розрахункові моделі з докладним поданням їх геометричних і фізико-механічних характеристик із забезпеченням високої надійності результатів розрахунків.

Розглянемо розв'язання задачі про власні коливання просторової пластинчато-оболонкової конструкції (рис. 1), складеної з тонкостінних континуальних фрагментів, дискретні моделі яких будуються на основі методу скінчених елементів (МСЕ).

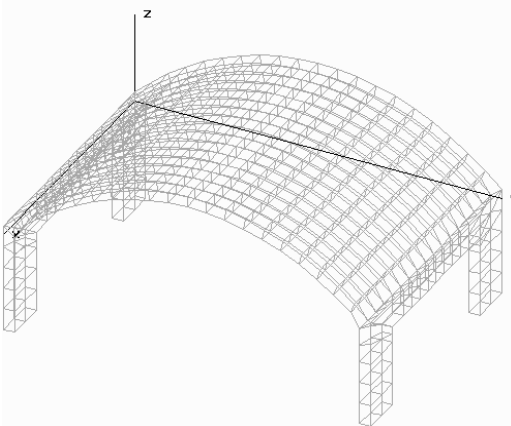


Рис. 1. Загальний вигляд комбінованої конструкції

Співвідношення МСЕ формулюються в переміщеннях. Розв'язання задачі динаміки виконується на основі методу підконструкцій з використанням редукованих моделей фрагментів, побудова яких здійснюється за методикою, викладеною в роботах [1,2].

Розмірність редукованих матриць фрагментів визначається кількістю переміщень базисних вузлів, що вважаються узагальненими координатами редукованих моделей фрагментів. Ідентифікація координат виконується їх номерами. Кожному фрагменту призначається свій набір узагальнених координат. Номери їх визначаються шляхом наскрізної нумерації узагальнених координат редукованих моделей усіх фрагментів конструкції. Слід наголосити на тому, що стиковочні вузли на границі суміжних фрагментів повинні мати однакові глобальні номери. Редуковані матриці цілої конструкції складаються з редукованих матриць фрагментів. Зшивка матриць відбувається у відповідності із співпадаючими номерами стиковочних вузлів.

В математичному аспекті задача про власні коливання конструкції зводиться до узагальної проблеми про власні значення редукованих матриць в результаті чого отримуємо власні числа і власні вектори редукованої моделі конструкції. Власні числа, кількість яких відповідає кількості ступенів вільності моделі, визначають колові і технічні частоти власних коливань редукованої моделі цілої конструкції. Власні вектори складаються з переміщень базисних вузлів моделі.

Побудова форми коливань скінченноелементної моделі (СЕМ) фрагмента виконується у відповідності з формулою, що пов'язує узагальнені координати редукованої моделі і СЕМ фрагмента.

$$\{u\}=[U]\{q\}, \quad (1)$$

де  $\{u\}$  - вектор переміщень вузлів СЕМ фрагмента,  $\{q\}$  - узагальнені координати редукованої моделі фрагмента,  $[U]$  - матриця базисних векторів (конфігурацій СЕМ фрагмента від одиничних переміщень базисних вузлів).

Таким чином отримуємо форми власних коливань СЕМ фрагмента. Вибір складових матриці  $[U]$  виконується у відповідності з глобальними номерами узагальнених координат фрагмента. Отже, використання базисних вузлів забезпечує перше наближення при розв'язанні задачі про власні коливання складної оболонкової конструкції.

Реалізація алгоритму уточнення виконується в ітераційному процесі, починаючи з побудови нових редукованих моделей фрагментів і формування їх редукованих матриць та матриць цілої конструкції відносно нових узагальнених координат – конфігурацій границь суміжних фрагментів і наближених форм власних коливань фрагментів, отриманих за допомо-



гою набору базисних вузлів. Як вже відмічалось, форми коливань для кожного фрагмента формуються для їх СЕМ моделей в єдиній системі координат, пов'язаній з конструкцією у відповідності з формулою (1). Конфігурація границі визначається набором переміщень вузлів, які їй належать, для тієї чи іншої форми коливань.

У відповідності з прийнятими співвідношеннями методу скінченних елементів, у кожному вузлі на серединній поверхні оболонкової конструкції враховуються три поступальні і три кутові переміщення в глобальній системі координат. Кожна границя має шість ступенів вільності, які визначаються шістьма узагальненими координатами - переміщеннями граничних вузлів для кожного виду (три поступальних і три кутових), які послідовно вилучаються з набору переміщень, наприклад, першої форми коливань і зберігаються в файлах узагальнених координат, а на границю накладаються абсолютно жорсткі в'язі. Таким чином створюється основна система методу переміщень у якої базисним вектором є конфігурація стиковочної границі фрагмента, складена з переміщень групи вузлів на цій границі.

Наступним кроком створення редукованої моделі фрагмента є обчислення нових базисних векторів, як результат розрахунку основної системи на змушені переміщення границь для кожної узагальненої координати і збереження їх в файлах базисних векторів.

До числа базисних векторів нової редукованої моделі включаються вектори форм коливань внутрішньої області фрагмента, визначені на першому кроці обчислювального процесу. Вони не включають переміщень вузлів на границі. Кількість таких базисних векторів призначається суб'єктивно, з подальшим уточненням при створенні альтернативних моделей.

Новим узагальненим координатам призначаються номери у відповідності з наскрізною нумерацією координат нової редукованої моделі. Введення у якості узагальнених координат конфігурацій границь автоматично забезпечує нерозривність переміщень на границях СЕМ фрагментів. Зшивка редукованих матриць уточненої моделі виконується тільки для граничних узагальнених координат, які повинні мати однакові глобальні номери.

Наявність базисних векторів забезпечує побудову редукованих матриць фрагментів і цілої конструкції, обчислення частот і форм власних коливань конструкції, вибираючи для кожного кроку алгоритму уточнені узагальнені координати моделі (конфігурації границь і форми власних коливань).

Процес уточнення результатів розв'язку задачі про власні коливання завершується тоді, коли власні частоти попереднього кроку алгоритму співпадають з власними частотами поточного кроку з наперед заданою точністю.

Розглянемо конструкцію, розрахункова модель якої складена з трьох фрагментів – оболонки і двох рам. В межах кожного фрагменту будемо регулярну сітку скінченних елементів із забезпеченням співпадання вузлів сітки на границях фрагментів.

Розміри оболонки в плані  $10 \times 6$  м, радіус 9.083 м, стріла підйому 1.5 м. Товщина оболонки 0.2 м. Розміри сітки  $17 \times 21$  вузлів. Рама складається з двох стійок та ригеля, що об'єднані в однозв'язну конструкцію. Розміри стійок  $0.3 \times 1 \times 2$  м, а ригеля  $0.3 \times 0.5 \times 6$  м. Розміри сітки рами  $21 \times 3$  вузла. Для кожного стику рами з оболонкою введено шістнадцять узагальнених координат (переміщень базисних вузлів) (рис. 2) у якості яких призначені одинадцять поступальних (у крайньому верхньому вузлі враховано три поступальні переміщення, а у всіх інших по два) і п'ять кутових переміщень, які забезпечують нерозривність переміщень в зоні контакту.

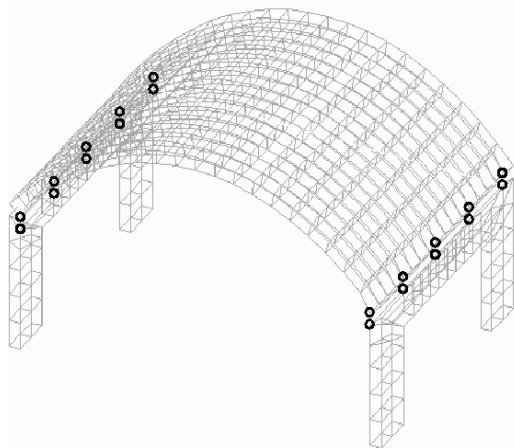


Рис. 2. Фрагменти комбінованої конструкції зі стиковочними (базисними) вузлами на границях

Додатково до зазначених вузлів в межах оболонки призначені ще п'ять базисних вузлів. В кожному з них враховується одна ступінь вільності - переміщення по нормалі до поверхні оболонки, тобто в напрямку її мінімальної жорсткості. В межах стійки рами призначені ще два базисних вузла – по нормалі до осі стійки, тобто ті що відповідають згину. Призначення таких базисних вузлів виконується за умов, щоб вони рівномірно

(не скупчено) розміщувалися в сітковій області. Включення до числа базисних вузлів, ще й тих, що належать внутрішній області дає можливість більш повно описувати інерційні властивості фрагмента, що важливо при розв'язанні задач динаміки.

Форми коливань і значення відповідних власних частот приведені на рис. 3 та рис. 4.

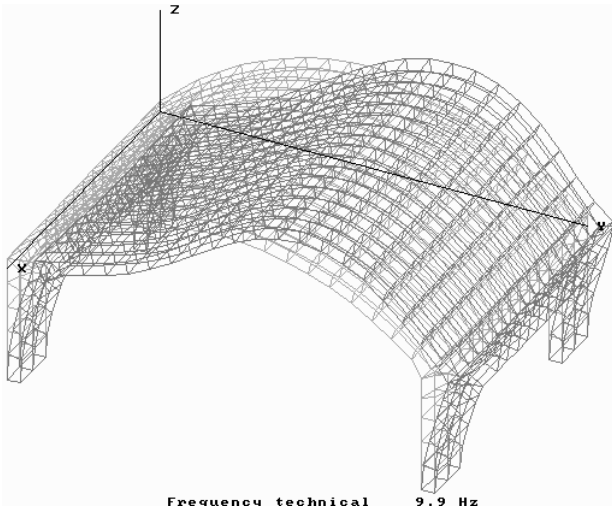
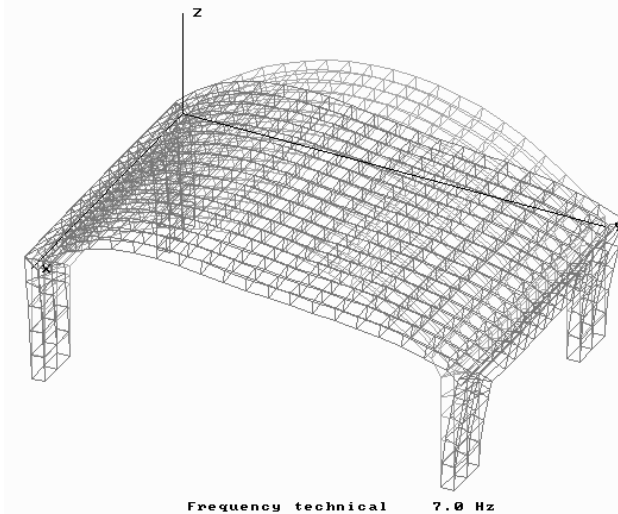


Рис. 3. Перша та друга форма коливань комбінованої конструкції

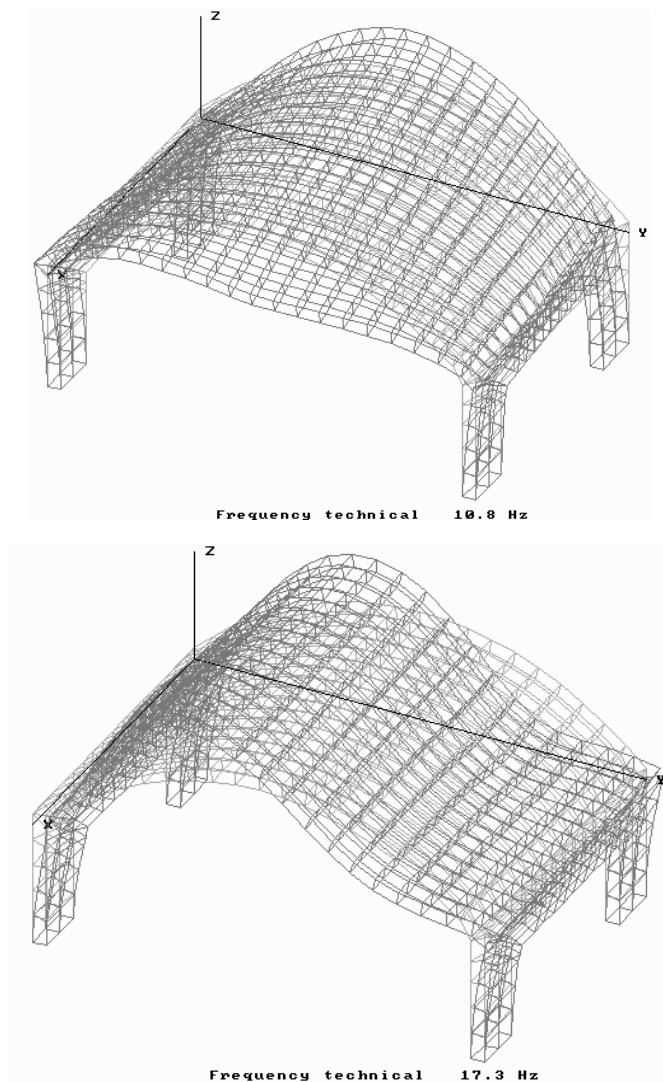


Рис. 4. Третя та четверта форма коливань комбінованої конструкції

**Висновки.** Оболонкові конструкції відчувають на собі суттєвий вплив динамічних навантажень, а тому визначення частот і форм власних коливань таких конструкцій запобігає виникненню явища резонансу від дії гармонічних навантажень. Для розв'язання задач про власні коливання

найчастіше використовують розрахункові моделі з докладним поданням їх геометричних і фізико-механічних характеристик. Число ступенів вільності їх досягає сотень тисяч. В той же час практичну цінність мають десятки власних частот нижньої частини спектру. А тому актуальною є проблема редукції моделі без погіршення результатів визначення її динамічних характеристик.

Один із способів вирішення цієї проблеми є декомпозиція дискретної моделі шляхом розділення її на окремі фрагменти з подальшим склеюванням їх. Підбір функцій, які забезпечують нерозривність переміщень на границях залишається актуальною і на сьогодні.

В роботі запропонована методика розв'язання цієї проблеми. На першому кроці будується спрощена редукована модель з використанням методу базисних вузлів – деякої сукупності вузлів дискретної моделі, частина яких розміщується на границях фрагментів. Переміщення базисних вузлів виступають у якості нових узагальнених координат, кількість яких значно менша числа ступенів вільності дискретної моделі. За допомогою такої моделі отримуються наближені результати з забезпеченням нерозривності переміщень на границях фрагментів при побудові форм власних коливань.

Запропонована методика уточнення отриманих результатів шляхом введення нових узагальнених координат – переміщень границь суміжних фрагментів, які штучним чином згладжуються і наближених форм коливань фрагментів, які формуються в єдиній для цілої конструкції системі координат.

Уточнення результатів виконується в ітераційному процесі, на кожному кроці якого використовуються конфігурації границь для форм коливань і самі форми коливань, які будуються для вихідної дискретної моделі методу скінченних елементів. Процес уточнення завершується за умов співпадання визначених частот попереднього і поточного кроку із заданою точністю.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Легостасв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.* Узагальнені координати редукованих моделей в задачах динаміки оболонкових конструкцій нерегулярної структури // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех.зб.-К.: КНУБА, 2010.-Вип. 85.- С.124-131
2. *Легостасв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.* Побудова розрахункових моделей МСЕ різноманітних конструкцій при визначенні їх динамічних характеристик і напруженого стану від дії статичних і динамічних навантажень // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.- К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 88-98.

*Стаття надійшла до редакції 12.08.2013 р.*

*Легостаев А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.*

**РАСЧЕТ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЧАТО-ОБОЛОЧЕЧНОЙ  
КОНСТРУКЦИИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ**

Приведены результаты решения задачи о собственных колебаниях комбинированной нерегулярной конструкции, дискретная модель которой построена на основе метода конечных элементов. Расчет выполнен с использованием метода подконструкций и редуцированных моделей фрагментов.

*Legostaev A.D., Grechukh N.A., Iakovenko O.O.*

**CALCULATION ON FREE VIBRATIONS OF PLATE-SHELL CONSTRUCTION OF  
IRREGULAR STRUCTURE USING METHOD OF FINITE ELEMENTS**

There are given results of solution of free vibrations of combined irregular construction, discrete model of which is made on the basis of finite elements method. A calculation is executed on the basis of method of subconstructions using reduced models of fragments.

УДК 539.3

Д.В. Левківський

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ ПРЯМИХ З ВИКОРИСТАННЯМ РЯДІВ ФУР'Є

В статті розглядається плоска деформація товстої пластини. Для зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь використовується метод прямих у поєднанні з методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. При шарнірному закріпленні по торцевих площинах  $x=0$ ,  $x=l$  можливе використання рядів Фур'є по координаті  $x$ . Це зводить вихідну систему редукованих диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь.

Розглядається плоска деформація пластини, кожна точка торцевої поверхні при  $x=0$ , та  $x=l$  закріплена вертикальними в'язями. Оскільки навантаження діє вздовж осі  $y$ , таку систему можна вважати геометрично незмінюваною (рис. 1).

Використовуючи рівняння узагальненого закону Гука та рівняння рівноваги, отримаємо систему вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують напружено-деформований стан розрахункової моделі (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_x(x, y) \\ \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial y} + \tau_{xy}(x, y) \\ \frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} - X(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial y} - Y(x, y) \\ \sigma_y(x, y) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial y}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $u^*(x, y) = u(x, y) \cdot \mu$ ,  $v^*(x, y) = v(x, y) \cdot \mu$  - компоненти вектора переміщень;  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  - компоненти вектора напружень;  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  - об'ємні навантаження;  $\lambda$ ,  $\mu$  - коефіцієнти Ляме.

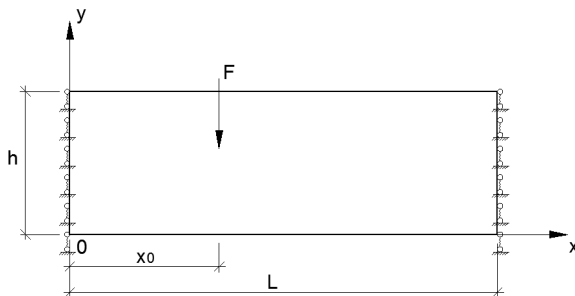


Рис. 1. Розрахункова модель – товста пластина (плоска деформація)

Для зниження вимірності диференціальних рівнянь (1), використовується метод прямих. По координаті  $y$  пластина розбивається на  $(n-1)$  ділянок за допомогою  $n$  прямих. По поперечній координаті обираємо локальні базисні функції  $\varphi_i(y)$  (рис. 2). Дана система базисних функцій косокутна, лінійна незалежність забезпечується локальністю.

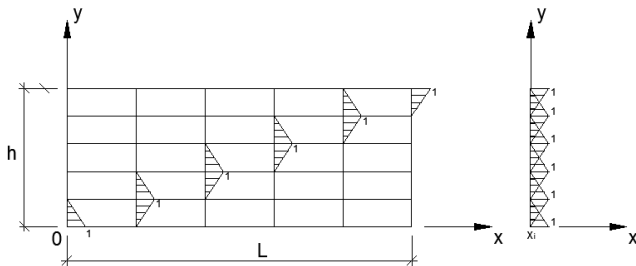


Рис. 2. Локальні базисні функції

Використовуючи метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова [2], будь-яку функцію  $f(x, y)$  можна представити у вигляді лінійної комбінації (2), індексна форма запису та операції над індексами детально описані у статті [1]:

$$f(x, y) = f^k(x) \cdot \varphi_k(y). \quad (2)$$

Отже, домножуючи систему (1) на  $\varphi_i(y)$  та інтегруючи по  $y$ , ми отримуємо систему редукованих диференціальних рівнянь (3):



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^*(x)}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha^*(x) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \delta_i^\alpha \sigma_{x\alpha}(x) \\ \frac{\partial v_i^*(x)}{\partial x} = -b_{ij} g^{j\alpha} u_\alpha^*(x) + \delta_i^\alpha \tau_{xy\alpha}(x) \\ \frac{\partial \sigma_{xi}(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \tau_{xy}^1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -\tau_{xy}^n(x) \\ \sigma_x^1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_x^n(x) \end{bmatrix} + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha}(x) - \delta_i^\alpha X_\alpha(x) \\ \frac{\partial \tau_{xyi}(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \tau_{xy}^1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -\tau_{xy}^n(x) \\ \sigma_x^1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_x^n(x) \end{bmatrix} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta k} g^{k\alpha} v_\alpha^*(x) - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha}(x) - \delta_i^\alpha Y_\alpha(x) \\ \sigma_y^j(x) = \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} g^{j\beta} b_{\beta k} g^{k\alpha} v_\alpha^*(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha} \end{array} \right. \quad (3)$$

Тут з'являються 3 основні метричні тензори:

$\{g_{ij}\} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y))$  - двічі коваріантний метричний тензор;

$\{g^{ij}\} = (\varphi^i(y), \varphi^j(y))$  - двічі контраваріантний метричний тензор;

$\{\delta_i^j\} = (\varphi_i(y), \varphi^j(y))$  - мішаний метричний тензор, символ Кронекера.

Функції системи (3) представлені у вигляді моментів:  $u_i^*(x), v_i^*(x), \sigma_{xi}(x), \tau_{xyi}(x)$ . Для розв'язання даної системи можна використовувати ряди Фур'є, невідомі функції розкладаються в ряд по синусам та косинусам. Оскільки пластина по бічним граням закріплена вертикальними в'язями (рис. 3), то невідомі функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_i^*(x) &= u_{im}^* \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right), & v_i^*(x) &= v_{im}^* \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \\ \tau_{xyi}(x) &= \tau_{xyim} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right), & \sigma_{xi}(x) &= \sigma_{xim} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для даних умов закріплення, навантаження  $X_i(x)$  розкладається в ряд Фур'є за косинусами,  $Y_i(x)$  - за синусами.

Оскільки навантаження представлене у вигляді вертикальної зосередженої сили, то функція  $Y(x, y)$  при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  набуває певного значення  $F$ , у всіх інших точках - 0. Для моделювання роботи сили використовується дельта функція Дірака двох змінних  $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ . Основна властивість дельта функції:

$$\int_0^h f(y) \delta(y-y_0) dy = f(y_0).$$

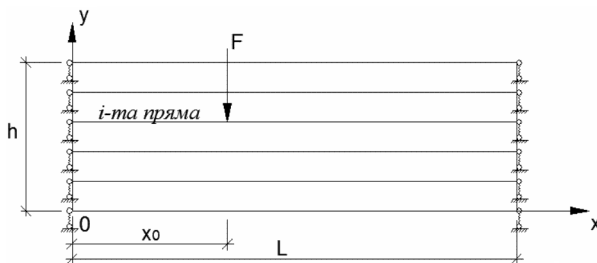


Рис. 3. Шарнірно закріплена пластина

Для даних умов закріплення, навантаження  $X_i(x)$  розкладається в ряд Фур'є за косинусами,  $Y_i(x)$  - за синусами.

Оскільки навантаження представлено у вигляді вертикальної зосередженої сили, то функція  $Y(x, y)$  при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  набуває певного значення  $F$ , у всіх інших точках - 0. Для моделювання роботи сили використовується дельта функція Дірака двох змінних  $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ . Основна властивість дельта функції:

$$\int_0^h f(y)\delta(y-y_0)dy=f(y_0).$$

Домножуючи дельта функцію на  $\Phi_i(y)$  та інтегруючи по  $y$ , отримаємо:

$$Y_i(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F\delta(x-x_0) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далі функція розкладається в ряд Фур'є по синусам:

$$F\delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\left(\int_0^l F\delta(x-x_0)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)=F\cdot\sin\left(\frac{m\pi x_0}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right).$$

Графік такої функції при  $F=1$ ,  $l=1$ , та  $x_0=0,5l$ , зображений на рис. 4.

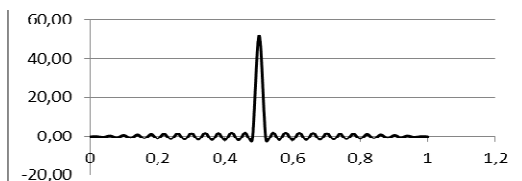


Рис. 4. Апроксимація одиничної сили, прикладеної посередині прольоту пластини

Підставляючи функції (4) в систему (3), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (5):

$$\begin{cases} \frac{m\pi}{l} u_{\alpha m}^* - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v_{\alpha m}^* + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \sigma_{x\alpha m} + 0 \cdot \tau_{xy\alpha} = 0 \\ b_{ij} g^{j\alpha} u_{\alpha m}^* + \frac{m\pi}{l} v_{\alpha m}^* + 0 \cdot \sigma_{x\alpha m} - \tau_{xyim} = 0 \\ 0 \cdot u_{\alpha m}^* + 0 \cdot v_{\alpha m}^* + \frac{m\pi}{l} \sigma_{x\alpha m} - b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha m} = X_{\alpha}(x) \\ 0 \cdot u_{\alpha m}^* + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta k} g^{k\alpha} v_{\alpha m}^* - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha m} + \frac{m\pi}{l} \tau_{xy\alpha m} = Y_{\alpha}(x). \end{cases} \quad (5)$$

Дана система була чисельно розв'язана та в залежності від кількості прямих, гармонік і навантаження, отримуємо матрицю, що відповідає напружено-деформованому стану пластини.

Для перевірки достовірності запропонованого підходу, розглянемо пластину  $l = 1\text{ м}$  та  $x_0 = 0,5\text{ м}$ , навантажену одиничною силою посередині прольоту (рис. 5),  $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ МПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , візьмемо 5 прямих та  $m = 50$  гармонік.

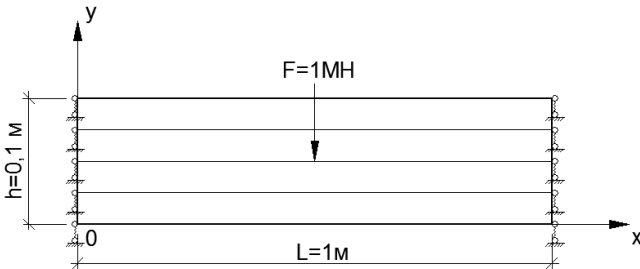


Рис. 5. Розрахункова схема

$$\text{Вектор } X_{\alpha}(x)=0, Y_{\alpha}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \sin(m\pi \cdot 0,5) \cdot \sin(m\pi x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вертикальний прогин посередині прольоту на центральній прямій  $v^3 = 1,13 \cdot 10^{(-5)} \text{ м}$ . Оскільки пластина досить тонка, прогин в будь-якій точці можна знайти, використовуючи балочну теорію з циліндричною жорсткістю  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{0,1^3 \cdot 2,1 \cdot 10^7}{12(1-0,09)} = 1923,077 \text{ МНм}$ .

Прогин посередині прольоту балки  $w=1,08 \cdot 10^{(-5)}$  м. Отримані результати відрізняються на 4% в більшу сторону.

В роботі [1] був розглянутий схожий підхід до розв'язання поставленої задачі, але система (3) в подальшому розв'язувалась чисельно методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова з використанням метода Рунге-Кутта-Мерсона. На графіках (рис. 6, 7) наочно показана збіжність отриманих результатів за двома підходами.



Рис. 6. Графік залежності вертикального переміщення від координати  $x$



Рис. 7. Графік залежності дотичних напружень від координати  $x$

Дана розрахункова модель є миттєво змінюваною і використовується тільки за умови рівноваги конструкції в горизонтальній площині. Отримані результати показали високу збіжність – до 5% , але при зміні умов закріплення не завжди функція розкладається в ряд Фур'є, тоді потрібно використовувати інші функції, які задовольнятимуть граничним

умовам. Даний підхід можна використовувати для тестування інших методик і програм.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с. 413 – 423.
2. С. М. Михлин Вариационные методы в математической физике// Гос-ное из-во технико-теоретической л-ры: М 1957 – 476 с
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171 - 174.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. – 2-е изд., перераб. – М – 1957, 250 с.
5. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М: «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы, 1979.-392 с.

*Стаття надійшла до редакції 06.06.2013 р.*

*Левковський Д.В.*

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ПРЯМЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ ФУРЬЕ**

В статье рассматривается плоская деформация толстой пластины. Для понижения размерности дифференциальных уравнений используется метод прямых совместно с методом Бубнова-Галеркина-Петрова. При шарнирном закреплении по торцевых плоскостях  $x = 0$ ,  $x = l$  возможно использование рядов Фурье по координате  $x$ . Это приводит редуцированную систему дифференциальных уравнений до системы алгебраических уравнений.

*Levkivskiy D.V.*

#### **DEFINITION STRESS-STRAIN STATE OF PLATES BY USING LINES OF FOURIER SERIES**

In this paper we consider the planar deformation of the thick plate. To reduce the dimension of differential equations using the method of lines with the Bubnov-Galerkin-Petrov. At the end of simply supported by planes  $x = 0$ ,  $x = l$ , you can use Fourier series in the coordinate  $x$ . This causes a reduced system of differential equations to systems of algebraic equations.

УДК 539.3

С.М. Банько

## **АНАЛІЗ ВПЛИВУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ КАВЕРНИ В ГАЛТЕЛІ ВУЗЛА З'ЄДНАННЯ КОЛЕКТОРА З КОРПУСОМ ПАРОГЕНЕРАТОРА ПГВ-1000М НА ЙОГО НАПРУЖЕНИЙ СТАН**

Виконано розрахунковий аналіз тривимірного пружно-пластичного напруженого стану вузла з'єднання «гарячого» колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М з дефектом у вигляді плоскої напівеліптичної каверни, розташованої на внутрішній поверхні патрубку вузла з'єднання в області галтельного переходу. Проведено оцінювання впливу глибини каверни на напружений стан в її вершині при моделюванні режиму гідравлічних випробувань парогенератора. Виконано оцінювання впливу історії навантаження на напружений стан вузла з'єднання.

**Вступ.** На парогенераторах ПГВ-1000М атомних станцій України та Росії в процесі експлуатації протягом останніх 10 років виявлено дефекти у вигляді каверн та тріщин, які розташовувались на внутрішній поверхні патрубку вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора в зоні галтельного переходу та обумовлені впливом корозійного середовища і високим рівнем експлуатаційних напружень. У зв'язку з виявленням такого типу дефектів у вузлах з'єднання при експлуатації в межах розрахункового терміну служби актуальною є задача проведення детального розрахункового аналізу напруженого стану вузла з'єднання з дефектом при моделюванні експлуатаційних режимів навантаження з врахуванням пружно-пластичної поведінки матеріалу в околиці дефекту.

В публікаціях фахівців провідних підприємств, які займаються проектуванням і експлуатацією обладнання атомних електростанцій (АЕС), розрахунки напруженого стану вузла з'єднання при дії експлуатаційних навантажень представлені переважно в пружній постановці без врахування дефектності в області галтельного переходу [1-3]. В роботах [4, 5] вперше в розрахунковій практиці на основі тривимірного чисельного моделювання показано суттєво неоднорідний характер розподілу напружень на внутрішній поверхні галтельного переходу вздовж колової координати вузла з'єднання при моделюванні експлуатаційних навантажень. Результати чисельного аналізу напруженого стану (НС) вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М з каверною представлено в роботах [6, 7]. Розрахунки проводились в пружно-пластичній постановці з використанням тривимірної моделі парогенератора.

**Мета роботи.** Провести розрахунковий аналіз пружно-пластичного напруженого стану вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М з дефектом у вигляді плоскої напівеліптичної каверни, розташованої в області галтельного переходу. Дослідити вплив геометричних параметрів каверни та історії навантаження на НС вузла з'єднання.

Розрахунки проводили з використанням програмного комплексу SPACE-RELAX [8]. Задачу розв'язували в пружно-пластичній постановці з застосуванням тривимірної скінченно-елементної моделі 1-го контуру АЕС, яка включала корпус парогенератора, «гарячий» колектор, головний циркуляційний трубопровід (ГЦТ) і корпус реактора [7]. Моделювали плоску каверну з еліпсоїдальною вершиною, яка розташована в галтелі вузла в зоні максимальних розтягуючих осьових напружень. Розрахунки проводили для режиму гідравлічних випробовувань (ГВ). Тиск в першому контурі приймали 24.5 МПа, тиск в другому – 10.78 МПа. Розглядали каверни наступних розмірів: радіус  $r$  у вершині каверни приймали 2.5 мм, співвідношення напівосей  $a/b$  - 1/3, глибину  $a$  каверни змінювали в діапазоні від 10 до 60 мм з кроком 10 мм. При проведенні розрахунків використовували процедуру фрагментації дискретної моделі парогенератора [7], яка передбачає розв'язання задачі в два етапи. На першому етапі розв'язували пружно-пластичну задачу для основної розрахункової моделі, на другому – задачу для фрагмента вузла з'єднання з каверною. Для визначення НС в околиці каверни розроблено спеціальну процедуру побудови регулярної сітки скінченних елементів з локальним згущенням її вузлів до вершини каверни. Для всього тіла застосовували спеціальні змішані скінченні елементи у формі шестигранних призм, а вздовж фронту каверни - тетраедри [9]. Основна розрахункова модель 1-го контуру складалась із 445716 елементів і 492845 вузлів, розрахункова модель фрагмента містила 783992 елементів і 466739 вузлів. При розв'язанні задачі використовували рівняння теорії пластичної течії з ізотропним зміцненням [10]. Приймали модель ідеально пружно-пластичного матеріалу.

**Результати.** Встановлено, що при гідравлічних випробовуваннях каверна глибиною 20 мм є найбільш небезпечною з точки зору віртуального росту, оскільки для неї осьові і колові напруження досягають максимальних значень, які становлять відповідно 553 і 282 МПа (рис. 1, 2). В подальшому для каверни глибиною 20 мм розв'язок отримали для наступної послідовності експлуатаційних навантажень вузла з'єднання: ГВ – розвантаження – нормальні умови експлуатації (НУЕ). При моделюванні НУЕ тиск в першому контурі приймали 16.0 МПа, тиск в другому – 6.0 МПа. Для оцінки впливу історії навантаження на напружений стан в околиці каверни результати розрахунків напруженого стану для режиму НУЕ порівнювали з розрахунками без врахування історії навантаження.

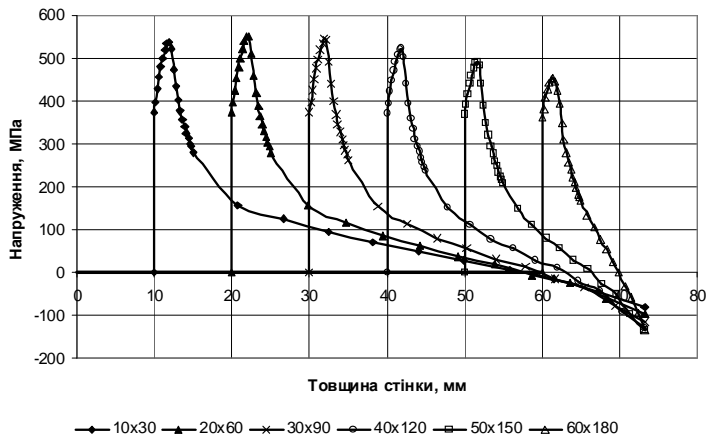


Рис. 1. Розподіл осьових напружень  $S_z$  по товщині стінки для різних глибин каверн при ГВ

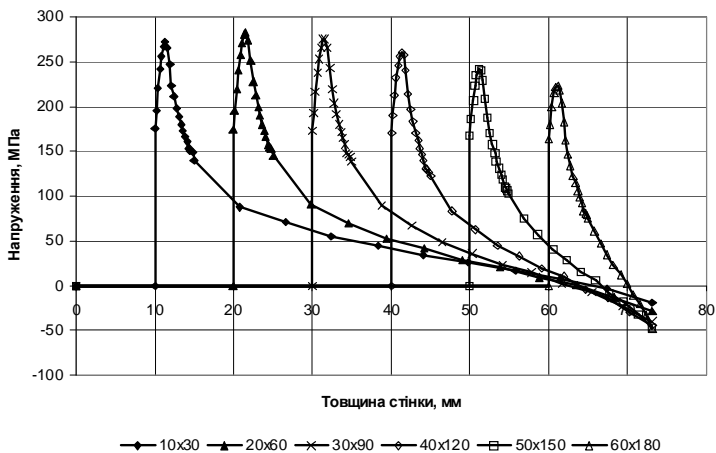


Рис. 2. Розподіл колових напружень  $S_f$  по товщині стінки для різних глибин каверн при ГВ

Значення максимальних осьових та колових напружень в залежності від глибини каверни представлені на рис. 3.

На рис. 4, 5 для режиму ГВ показано характер розподілу осьових та колових напружень у площині, що проходить через вісь колектора і верхину каверни глибиною 20 мм.



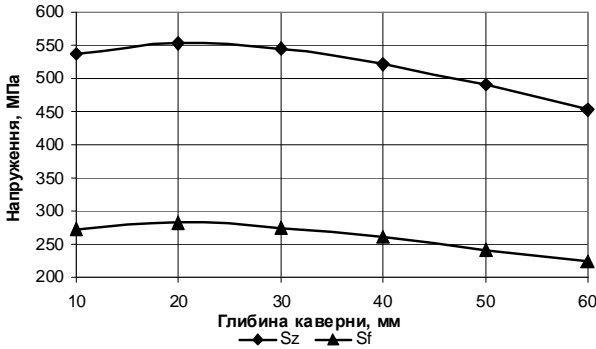


Рис. 3. Максимальні напруження Sz та Sf в залежності від глибини каверни при ГВ

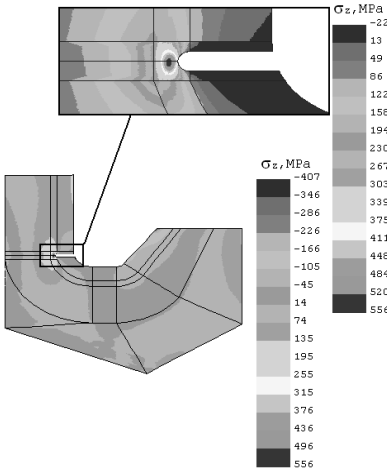


Рис. 4. Розподіл осьових напружень для каверни глибиною 20 мм при ГВ

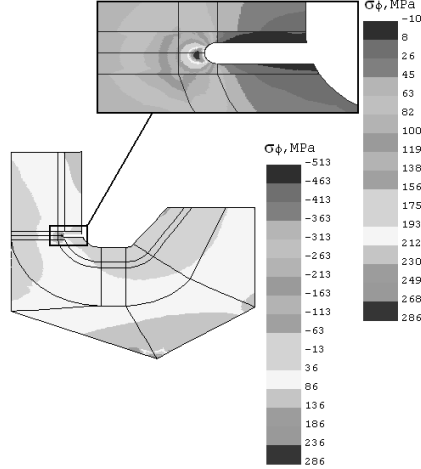


Рис. 5. Розподіл колових напружень для каверни глибиною 20 мм при ГВ

На рис. 6, 7 представлені графіки розподілу осьових та колових напружень для каверни глибиною 20 мм на відрізьку 5 мм перед її вершиною з врахуванням та без врахування історії навантаження. Із приведених результатів розрахунків слідує, що для режиму НУЕ при врахуванні історії навантаження максимальні осьові та колові напруження складають відповідно 408 і 191 МПа, без врахування історії навантаження - відповідно 442 і 188 МПа. При врахуванні історії навантаження точка локалізації максимальних напружень зміщується від вершини каверни.

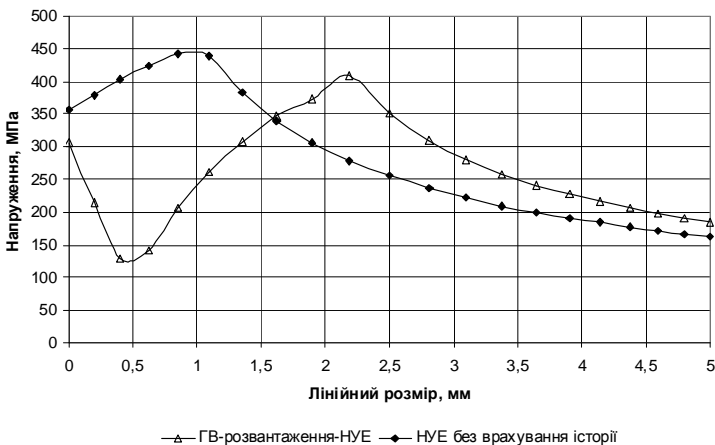


Рис.6. Розподіл осьових напружень перед вершиною каверни глибиною 20 мм для різних варіантів навантаження

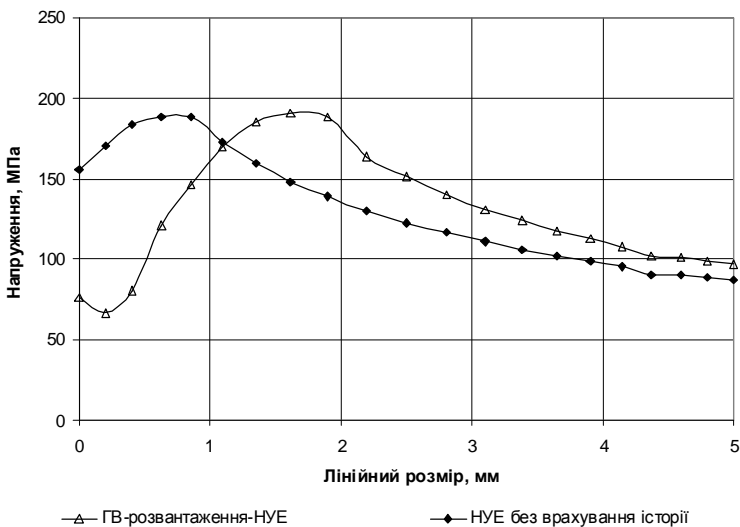


Рис. 7. Розподіл колових напружень перед вершиною каверни глибиною 20 мм для різних варіантів навантаження

**Висновки.** Проведено аналіз впливу глибини каверни в галтелі вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М на його пружнопластичний напружений стан. Показано, що найбільші напружен-

ня в галтелі при моделюванні режиму ГВ мають місце для каверни глибиною 20 мм.

Розрахунки напруженого стану вузла з'єднання з врахуванням і без врахування історії термосилового навантаження показали, що неврахування історії навантаження призводить до завищених значень максимальних осьових напружень (на 8%) і незначного зниження колових (на 1.5%). При врахуванні історії навантаження точка локалізації максимальних напружень зміщується від вершини каверни.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Драгунов Ю.Г., Петрова О.Ю., Лякишев С.Л. и др. Повышение надежности эксплуатации коллекторов парогенераторов ПГВ-1000, -1000М //Атомная энергия. – 2008, Том 104, №1. с.9-13.
2. Лякишев С.Л., Харченко С.А., Кучерявченков А.В., Коротаев Н.Ф. Оптимизация конструкции узла приварки коллектора к корпусу парогенератора. //Сб.трудов 7-го Международного семинара по горизонтальным парогенераторам. – 2006.- ФГУП ОКБ «Гидропресс», Подольск, Россия.
3. Лякишев С.Л., Трунов Н.Б., Харченко С.А. и др. Разработка и обоснование мероприятий по обеспечению надежной и безопасной эксплуатации сварных соединений № 111 парогенератора ПГВ-1000М //Труды 6-й Международной научно-технической конференция «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР». – 2009.- ФГУП ОКБ «Гидропресс», Подольск, Россия.
4. Степанов Г.В., Харченко В.В., Бабуцкий А.И. и др. Оценка напряженно-деформированного состояния узла сварного соединения “горячего” коллектора с патрубком парогенератора ПГВ-1000 АЭС// Пробл. прочности.- 2003, №5. с.142-153.
5. Степанов Г.В., Харченко В.В., Бабуцкий А.И. и др. Влияние компоновки реакторов ВВЭР «малой» и «большой» серий атомных электростанций на напряженно-деформированное состояние узла приварки коллектора к патрубку парогенератора // Пробл. прочности.- 2007, №5. с.114-120
6. Банько С.Н., Кобельский С.В., Кравченко В.И. Численный анализ напряженно-деформированного состояния в вершине каверны, расположенной в галтели узла приварки коллектора к корпусу парогенератора ПГВ-1000М // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2012. – Вып. 35. – С. 214 – 220.
7. Банько С.М. Напружений стан вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М з каверною // Вісник Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя. – 2012. – №3 (67). – С. 56 – 63.
8. Програмне забезпечення «Тривимірне скінченноелементне моделювання теплового і термонапруженого стану елементів машинобудівних конструкцій» (SPACE) / Система сертифікації УкрСЕПРО. Сертифікат відповідності № UA1.017.0054634-04. – 2004.
9. Чирков А. Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А. Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надёжность и долговечность машин и сооружений. – 2008. – Вып. 31. – С. 118 – 123.
10. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

Стаття надійшла до редакції 03.05.2013 р.

*Банько С.М.*

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КАВЕРНЫ В ГАЛТЕЛИ УЗЛА СОЕДИНЕНИЯ КОЛЛЕКТОР С КОРПУСОМ ПАРОГЕНЕРАТОРОВ ПГВ-1000М НА ЕГО НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ**

Выполнен расчетный анализ трехмерного упруго-пластического напряженного состояния узла соединения «горячего» коллектора с корпусом парогенератора ПГВ-1000М с дефектом в виде плоской полуэллиптической каверны, расположенной на внутренней поверхности патрубка узла соединения в области галтельного перехода. Проведена оценка влияния глубины каверны на напряженное состояние в ее вершине при моделировании режима гидравлических испытаний парогенератора. Выполнено оценку влияния истории нагружения на напряженное состояние узла соединения.

*Ban'ko S.N.*

**ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF GEOMETRIC PARAMETERS OF THE CAVITY IN THE FILLET REGION OF THE HEADER-TO-PGV-1000M STEAM GENERATOR CONNECTOR WELDMENT ON ITS STRESS STATE**

The computational analysis of the three-dimensional elastoplastic stress state for the hot header-to-PGV-1000M steam generator connector weldment with a defect in the form of a semi-elliptical planar cavity on the inner surface of the connector weldment in the fillet region is carried out. The assessment of the influence of the cavity depth on the stress state at its tip in simulating hydraulic testing conditions for the steam generator is performed. The effect of the loading history on the stress state of the connector weldment is assessed.

УДК 539.3

О.О. Міщенко

## МОЖЛИВОСТІ БАГАТОШАРОВОГО СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА ПК SCAD

На прикладі задачі про згин тонкої квадратної пластини досліджуються можливості багатошарового скінченного елемента, реалізованого в програмному комплексі SCAD.

Розвиток техніки і будівництва ставить перед вченими і інженерами задачу розробки і впровадження нових матеріалів і конструкцій, які дозволяють зменшити матеріалоємність і водночас підвищити економічність виробів і споруд при забезпеченні необхідних міцності, жорсткості і стійкості. Значні перспективи при цьому відкриває застосування багатошарових пластин і оболонок, виготовлених із композитних матеріалів.

Зазначимо, що реальні багатошарові елементи конструкцій можуть мати ряд особливостей: складну форму поверхні, різноманітні граничні умови і навантаження, посилення у вигляді ребер, послаблення у вигляді отворів і вирізів тощо. Для наближення розрахункової моделі багатошарової конструкції до реальної необхідно враховувати ці особливості, що значно ускладнює задачу. Як наслідок її розв'язання стає можливим тільки при використанні сучасних чисельних методів, серед яких завдяки універсальності і ефективності виділяється метод скінченних елементів (МСЕ).

В бібліотеці програмного комплексу (ПК) SCAD наявні два типи багатошарових скінчених елементів (СЕ) №71-74 і №81-84 [1,2] (рис. 1). Ці СЕ розроблені за допомогою прикладної теорії багатошарових ортотропних пологих оболонок, сформульованої О.О. Рассказовим [3,4], і застосовуються при розрахунку ортотропних шаруватих оболонкових елементів конструкцій.

Матеріал шарів може бути ізотропним, трансверсально-ізотропним і ортотропним. Багатошарові елементи типів №71-74, що враховують поперечний зсув та обтиснення шарів кривизни, мають по дванадцять ступенів вільності в вузлі. Перші шість ступенів вільності вузла являються основними і відповідають мембранним і згинним деформаціям, інші шість – деформаціям поперечного зсуву і обтиснення. Багатошарові елементи типів №81-84, що враховують міжшарові зсуви і кривизни, мають по дванадцять ступенів вільності у вузлі. Перші шість ступенів вільності вузла являються основними і відповідають мембранним і згинним деформаціям, інші шість – деформаціям поперечного зсуву.

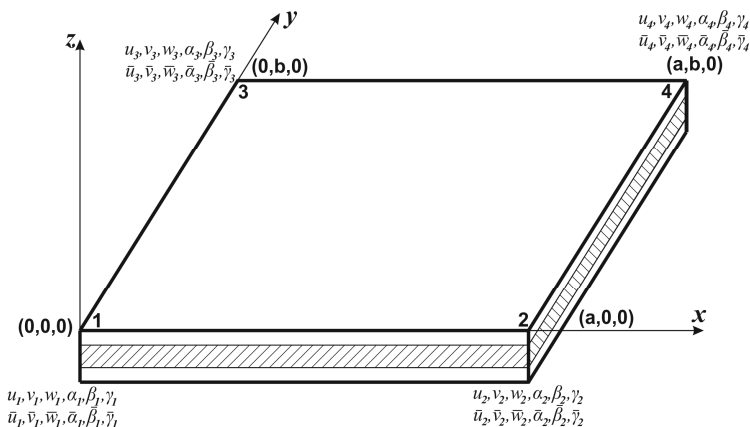


Рис.1. Багатошаровий СЕ ПК SCAD

Для визначення можливостей багатошарових скінченних елементів №73 і №83 ПК SCAD чотирикутної форми, була розглянута задача про згин тонкої жорстко затиснутої по контуру квадратної пластини (рис. 2),

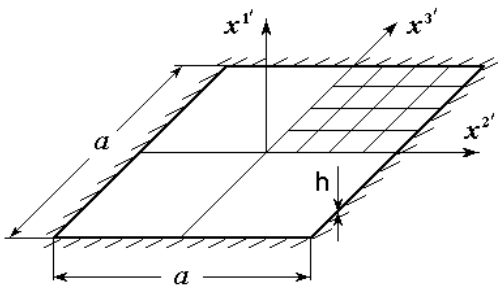


Рис. 2. Тонка квадратна жорстко затиснута пластинка

навантаженої рівномірним нормальним тиском [5]. В якості розрахункового фрагмента прийнята чверть конструкції. Для порівняння була обрана величина прогину  $u_{\max}^1$  в центрі пластини. В якості точного було використано відомий розв'язок С.П.Тимошенка [6], що отриманий за теорією

тонких пластин. Прийняті наступні вихідні дані:  $a=200$  см,  $h=1$  см,  $E=2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\nu=0.3$ . Задавалася величина інтенсивності тиску  $q=u_{\max}^1 E h^3 / [0.01512 a^4 (1-\nu^2)]$  кг/см<sup>2</sup>, при якій згідно до [6]  $u_{\max}^1 = 1$  см. Прийнята сітка СЕ - 6×6. До складу пластини входило від 1-го до 50-ти ізотропних шарів, причому загальна товщина пластини  $h=1$  см залишалась постійною. При розрахунку за допомогою ПК SCAD окрім багатошарових СЕ №73 і №83 було також використано плоский прямокутний

одношаровий СЕ №44. Крім того із застосуванням СЕ №44 було проведено розрахунок за допомогою ПК ЛІРА [7]. І нарешті, розв'язок задачі було отримано в рамках моментної схеми скінчених елементів (МССЕ), причому модель пластини була складена із просторових СЕ [5]. Результати розрахунків занесені до табл. 1.

Таблиця 1

Кількість шарів	Розрахунок за ПК SCAD (СЕ № 73)		Розрахунок за ПК SCAD (СЕ № 83)	
	$u'_{max}$ , см	$\Delta$ , %	$u'_{max}$ , см	$\Delta$ , %
1	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
2	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
3	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
4	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
5	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
6	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
7	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
8	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
9	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
10	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
20	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
30	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
40	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
50	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
60	0.992820964	-0.72	0.994301019	-0.57
Розрахунок за МССЕ	1.001400000	-0.86	1.001400000	-0.71
Розрахунок за ПК ЛІРА (СЕ № 44)	1.017965794	-2.51	1.017965794	-2.37
Розрахунок за ПК SCAD (СЕ № 44)	1.017965703	-2.51	1.017965703	-2.37
Точний розв'язок	1.000000000	0	1.000000000	0

Як видно з таблиці, при використанні СЕ №71-73 і №81-83 кількість ізотропних шарів не впливає на величину прогину пластини. Похибка величини прогину пластини, обчисленої за ПК SCAD, становить порівняно із величиною, отриманою в рамках МССЕ, менше 1%. При порівнянні з результатами, отриманими при використанні елементів для тонких оболонок №44, спостерігалась похибка - 2.51%.

Таким чином, проведені дослідження дозволяють зробити висновок про те, що багатошарові СЕ №71-73 і №81-83 можна застосовувати до

розрахунку задач про деформування багатошарових пластинчастих та оболонкових елементів конструкцій.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD. / Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. – М.: изд-во «СКАД СОФТ», 2009. – 656 с.
2. Рассказов А.О., Карпиловский В.С., Харченко Н.Г. Конечный элемент многослойной ортотропной пологой оболочки. – Киев, 1984. – 38 с. – Деп. В УкрНИИНТИ 14.02.84.; №223 Ук-Д84.
3. Рассказов А.О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек // Прикладная механика. - 1976. - Т. 12. - № 11. - С. 50-56.
4. Рассказов А.О. К теории колебаний многослойных ортотропных пологих оболочек // Прикладная механика. - 1977. - Т. 13. - № 8. - С. 23-29.
5. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ “Віпол”, 2010. – 316 с.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.
7. Лира 9.4 Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие. / Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Гераймович Ю.Д. и др. – К.: изд-во «Факт», 2008. – 164 с.

*Стаття надійшла до редакції 03.09.2013 р.*

*Мищенко О.А.*

#### **ВОЗМОЖНОСТИ МНОГОСЛОЙНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПК SCAD**

На примере задачи про изгиб тонкой квадратной пластины исследуются возможности многослойного конечного элемента, реализованного в программном комплексе SCAD.

*Myschenko O.A.*

#### **POSSIBILITIES OF THE MULTI-LAYERED FINITE ELEMENT OF PK SCAD**

On the example of square laminated plate bending problem the possibilities of the multi-layered Finite Element used in the program SCAD are investigated.



## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Шкриль О.О.</i> Основні положення моментної схеми для напіваналітичного варіанта призматичного скінченного елемента . . . . .	3
<i>Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Ударні сили в віброударних системах . . . . .	13
<i>Пискунов С.О., Гуляр О.І., Мицюк С.В.</i> Огляд співвідношень континуальної механіки руйнування для опису процесів повзучості і втоми . . . . .	29
<i>Гайдайчук В.В., Глушакова О.В., Глазунов С.М.</i> Торсіонні автоколивання бурильної колони в рідкому середовищі . . . . .	39
<i>Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Геращенко О.В.</i> Вплив навантаження на частоти власних коливань складної оболонкової конструкції . . . . .	49
<i>Пискунов С.О., Солодей І.І., Максим'юк Ю.В., Солоденко А.Д.</i> Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин . . . . .	59
<i>Киричук О.А., Лук'янченко О.О., Кузько О.В.</i> Несуча спроможність паливного резервуара в системі з захисною ємністю . . . . .	76
<i>Лізунов П.П.</i> Пружна рівновага сферичної оболонки в центральному силовому полі . . . . .	84
<i>Ворона Ю.В., Гончаренко М.В.</i> Стабілізація стійкості динамічних систем шляхом зміни параметрів наведених полів додаткової вібрації . . . . .	88
<i>Кобельський С.В.</i> Використання концепції $J$ -інтеграла для визначення величин коefficientів інтенсивності напружень для корпусу реактора ВВЕР- 1000 при аварійному охолодженні . . . . .	96

<i>Жупаненко І.В.</i> Застосування узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень для розв'язання задачі про власні коливання неоднорідного порожнинного товстостінного циліндра . . . . .	108
<i>Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.</i> Матриця мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки . . . . .	114
<i>Баженов В.А., Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Ярош А.О.</i> Дослідження динамічного деформування демпферного пристрою з поздовжньою тріщиною на основі НМСЕ . . . . .	126
<i>Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А.</i> Дослідження двовимірних нестационарних коливань пружних масивів з отворами . . . . .	133
<i>Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.</i> Напіваналітичний кільцевий скінченний елемент для моделювання просторового напруженого стану армованих тіл з тріщинами . . . . .	147
<i>Гревцев О.К., Геращенко О.В.</i> Про один метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для полого диска змінної товщини . . . . .	157
<i>Легостаєв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.</i> Розрахунок на власні коливання пластинчасто-оболонкової конструкції нерегулярної структури за методом скінченних елементів . . . . .	166
<i>Левківський Д.В.</i> Визначення напружено-деформованого стану пластини методом прямих з використанням рядів Фур'є . . . . .	174
<i>Банько С.М.</i> Аналіз впливу геометричних параметрів каверни в галтелі вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000м на його напружений стан . . . . .	181
<i>Мищенко О.О.</i> Можливості багатопарового скінченного елемента ПК SCAD . . . . .	188

Наукове видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

Випуск 91

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку .13. Формат 60x90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір друк №1.

Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10.

Тираж 100. Зам. № \_\_\_\_\_

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

---

Віддруковано на ЗАТ “ВІПОЛ”

03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру

Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.