

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

---

Випуск 93

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2014

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник відповідального редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

<i>Ю.В. Верюжський</i> , д-р техн. наук	<i>С.Н. Кривошапко</i> , д-р техн. наук (Росія)
<i>В.В. Гайдайчук</i> , д-р техн. наук	<i>С.Ю. Фіалко</i> , д-р техн. наук (Польща)
<i>О.І. Гуляр</i> , д-р техн. наук	<i>Чак Дик Тін</i> , д-р техн. наук (В'єтнам)
<i>Г.М. Іванченко</i> , д-р техн. наук	<i>С.В. Заблоцький</i> , канд. техн. наук (Австралія)
<i>П.П. Лізунов</i> , д-р техн. наук	<i>А.А. Зверев</i> , канд. техн. наук (Німеччина)
<i>С.О. Пискунов</i> , д-р техн. наук	
<i>І.І. Солодей</i> , д-р техн. наук	

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 93 / Відп. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2014. – 144 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31  
м. Київ, 03037  
тел.: (044) 248-3040

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

© КНУБА, 2014

УДК 539.3

**В.А. Баженов**<sup>1</sup>, д-р техн. наук  
**О.С. Сахаров**<sup>2</sup>, д-р техн. наук  
**О.І. Гуляр**<sup>1</sup>, д-р техн. наук  
**С.О. Пискунов**<sup>1</sup>, д-р техн. наук  
**Ю.В. Максим'юк**<sup>1</sup>, канд. техн. наук

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

<sup>2</sup>*Київський національний університет „КПІ”  
проспект Перемоги, 37, м. Київ. 03056*

## ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МССЕ) ПРИ НЕЛІНІЙНИХ РОЗРАХУНКАХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН

На основі МССЕ створений оболонковий СЕ загального типу, який дозволяє проводити аналіз напружено-деформованого стану вісесиметричних оболонок і пластин в задачах фізичної і геометричної нелінійності. Наведені основні положення нелінійної теорії пружності, алгоритми розв'язання системи нелінійних рівняння для визначення температурних і пластичних деформацій.

**Ключові слова:** метод скінчених елементів, температурні деформації, деформації пластичності, геометрично нелінійне деформування.

**Вступ.** В роботі [3] основна увага спрямована на проблему використання СЕ, що базуються на співвідношеннях теорії пружності та їх конкретизацію для розрахунку вісесиметричних оболонок і пластин і обґрунтуванню достовірності і ефективності отриманих результатів на основі МССЕ. В даній роботі було розширено скінчено елементну базу і створено оболонковий СЕ загального типу для розв'язання задач фізичної і геометричної нелінійності вісесиметричних оболонок та пластин.

**1. Основні положення нелінійної теорії пружності.** При великих деформаціях можливі значні повороти частин конструкцій, які не повинні змінювати пружно-деформований стан тіла. В цьому випадку необхідно, щоб величини, які входять в визначальні співвідношення, задовольняли вимогам індиферентності. В зв'язку з цим в роботі використані тензор напружень Коші і міра деформацій Фінгера. Обидва тензора і їх інваріанти задовольняють властивості індиферентності [6].

Опис напружено-деформованого стану об'єктів в процесах, що супроводжуються великими подовженнями і поворотами, як правило, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій  $x_0^i$  і актуальній  $X^i$  (рис. 1).

Введемо проміжну перемінну відрахункову конфігурацію  $x^i$  (рис.1), компоненти метричного тензора якої позначимо через  $g^{ij}$ . Перемінну відрахункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора  $\Delta G^{ij}$  був малою величиною порівняно з компонентами метричного тензору в актуальній конфігурації  $G^{ij}$ .

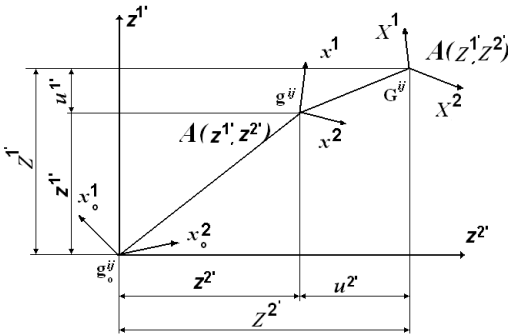


Рис. 1

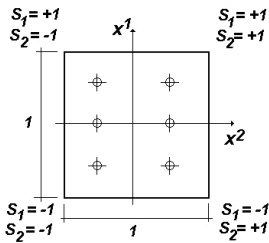


Рис. 2

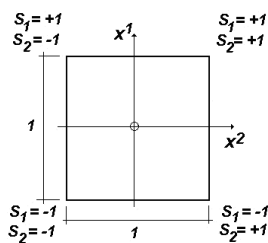


Рис. 3

Геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних компонент приросту деформації в актуальній конфігурації визначаються через переміщення відносно проміжної відрахункової конфігурації:

$$\Delta \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} + u'_{,\alpha} u'_{,\beta}), \quad \Delta \epsilon_{33} = \frac{1}{2}(2z' u'^2 + (u'^2)^2). \quad (1)$$

Лінійний тензор деформації обчислюємо за формулою:

$$\Delta \epsilon^{\wedge}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha}), \quad \Delta \epsilon^{\wedge}_{33} = z'^2 u'^2. \quad (2)$$

Коваріантні компоненти тензора приросту нелінійних деформацій в актуальній конфігурації (1) можна подати співвідношеннями аналогічними за формулою з (2):

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{z}_{,\beta}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + \bar{z}_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'}), \quad \Delta \varepsilon_{33} = \bar{z}^{\nu'} u^{\nu'}. \quad (3)$$

де коефіцієнти перетворень подамо у вигляді:

$$\bar{z}^{\nu'} = z^{\nu'} + \frac{1}{2} u^{\nu'}, \quad \bar{z}_{,\beta}^{\nu'} = z_{,\beta}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{\nu'}, \quad (4)$$

Можна показати, що вираз (3) тотожно дорівнює (1):

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} ((z_{,\alpha}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}^{\nu'}) u_{,\beta}^{\nu'} + (z_{,\beta}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{\nu'}) u_{,\alpha}^{\nu'}) = \\ &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'}) = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}). \\ \Delta \varepsilon_{33} &= (z^{\nu'} + \frac{1}{2} u^{\nu'}) u^{\nu'}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогічно можна представити варіацію деформацій. Обчислимо варіацію приросту нелінійних деформацій (1):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} + 2 \delta u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= (z^{\nu'} \delta u^{\nu'} + u^{\nu'} \delta u^{\nu'}). \end{aligned} \quad (6)$$

Представимо варіацію нелінійних деформацій аналогічно (3):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} (Z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + Z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= Z^{\nu'} \delta u^{\nu'}, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$Z^{\nu'} = z^{\nu'} + u^{\nu'}, \quad Z_{,\beta}^{\nu'} = z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}, \quad (8)$$

При їх підстановці в (7) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} ((z_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'}) \delta u_{,\beta}^{\nu'} + (z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}) \delta u_{,\alpha}^{\nu'}) = \\ &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'}) = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} + 2 u_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= (z^{\nu'} + u^{\nu'}) \delta u^{\nu'} = (z^{\nu'} \delta u^{\nu'} + u^{\nu'} \delta u^{\nu'}). \end{aligned} \quad (9)$$

**2. Вихідні співвідношення двовимірної задачі термопружнопластичності.** При наявності незворотних деформацій пластичності прирощення повних деформацій  $d\varepsilon_{ij}$ , обумовлених переходом від проміжної відрахункової конфігурації до актуальної, може бути подане сумою прирощень пружних деформацій  $d\varepsilon_{ij}^e$ , прирощень деформацій пластичності  $d\varepsilon_{ij}^p$ , та прирощень температурних деформацій  $d\varepsilon_{ij}^T$  тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^T. \quad (10)$$

Матеріал пластично нестисливий і зміна його об'єму лінійно-пружна:

$$\varepsilon_{ii}^p = 0, \quad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e. \quad (11)$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою [1]:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (12)$$

де  $\alpha_T = \alpha_T(z^k, T)$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу,  $\Delta T = T - T_0$  – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при  $T = T_0$ .

Передбачається, що пружні деформації є малими. Повні напруження  $\sigma^{ij}$  визначаються через компоненти тензора пружних констант відповідно до узагальненого закону Гука [4]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e. \quad (13)$$

Для ізотропного тіла тензор пружних констант  $C^{ijkl}$  визначається через коефіцієнти Ляме  $\lambda$  та  $\mu$ :

$$C^{ijkl} = \mu(g^{jl}g^{ik} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}, \quad (14)$$

які можуть бути подані через коефіцієнт Пуассона  $\nu$  і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E$ :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (15)$$

При наявності деформацій пластичності зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями теорії пластичної течії для ізотропного зміцнення матеріалу [5]. Область пружних деформацій обмежена поверхнею течії, рівняння якої в просторі напружень має вигляд:

$$f_p(\sigma^{ij}, \vartheta_p) = 0, \quad (16)$$

де  $\vartheta_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$  – параметр зміцнення Одквіста.

У відповідності до асоційованого закону пластичної течії, пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні течії [1]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s_{ij}} = d\lambda_p s_{ij}, \quad (17)$$

де  $f_p$  – функція текучості;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  – компоненти девіатора напружень, а  $\sigma_0 = \sigma^{ij} g_{ij} / 3$ .

Для ізотропного зміцнюваного матеріалу при умові текучості Мізеса поверхня текучії описується рівнянням:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - \tau_s^2 (\vartheta_p) = 0, \quad (18)$$

де  $\tau_s(\vartheta_p)$  – межа течії при чистому зсуві, яка є функцією параметра зміцнення Одквіста.

Виконуючи диференціювання виразу (13), встановлюємо взаємозв'язок між прирощеннями напружень і прирощеннями пружних деформацій в актуальній конфігурації:

$$d\sigma^{ij} = [\mu(g^{jl}g^{ik} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}] d\varepsilon_{kl}^e. \quad (19)$$

Для визначення зв'язку між прирощеннями напружень і деформацій при наявності пластичності запишемо рівняння [2]:

$$df_p = \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} ds^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} d\vartheta_p = 0. \quad (20)$$

Для прийнятої поверхні течії (18) маємо:

$$df_p = s_{ij} ds^{ij} - 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} = 0. \quad (21)$$

Приймаючи до уваги, що  $s_{ij} ds^{ij} = s_{ij} d\sigma^{ij}$ , а прирости компонент тензора напружень:

$$d\sigma^{ij} = C^{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p), \quad (22)$$

перепишемо рівняння (21) у вигляді:

$$S_{ij} [C^{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)] = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \frac{\sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_p^{ij}}}{\sqrt{3}}. \quad (23)$$

Виразивши в (23) прирощення пластичних деформацій через компоненти девіатора напружень у відповідності з (17):

$$S_{ij} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl} = \left( S_{ij} C^{ijkl} S_{kl} + \frac{4}{\sqrt{3}} \tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right) d\lambda_p \quad (24)$$

і врахувавши, що для ізотропного матеріалу  $S_{ij} C^{ijkl} = 2GS^{kl}$ , де  $G$  – модуль зсуву, знайдемо невизначений множник  $d\lambda_p$ :

$$d\lambda_p = \frac{S_{ij} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\gamma^p}, \quad (25)$$

де

$$\gamma^p = 4\tau_s^2 \left( G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right).$$

Виключивши прирощення пластичних деформацій в виразі (22), напишемо зв'язок між прирощенням напружень і деформацій у вигляді:

$$d\sigma^{ij} = C_e^{ijkl} d\varepsilon_{kl}, \quad (26)$$

$$C_e^{ijkl} = C^{ijkl} - \frac{4G^2 S^{ij} S^{kl}}{\gamma_p}.$$

Тут  $C_e^{ijkl}$  – тензор миттєвих жорсткостей пружно-пластичного матеріалу.

**3. Матриця жорсткості геометрично нелінійного оболонкового SE загального типу.** Формула для визначення вузлових реакцій в актуальній конфігурації геометрично нелінійного SE загального типу (рис. 2) за формою співпадає з виразом для визначення вузлових реакцій в лінійній постановці [3]:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}, \quad (27)$$

де  $I, J$  - кількість точок інтегрування по  $x^1, x^2$  відповідно,  $H_i, H_j$  - вагові функції,  $x_i^1, x_j^2$  - координати точок інтегрування.

В формулі (27) при визначенні напружень використовується матриця  $[B]$ , яка пов'язує переміщення і нелінійні деформації в актуальній конфігурації:

$$[\bar{B}]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{z}_{,1}^r S_1 + (\bar{z}_{,12}^r S_1 + 2\bar{z}_{,1}^r S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} \bar{z}_{,1}^{r'} S_1 + (\bar{z}_{,12}^{r'} S_1 + 2\bar{z}_{,1}^{r'} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (\bar{z}_{,1}^r S_2 + \bar{z}_{,2}^r S_1) & \frac{1}{4} (\bar{z}_{,1}^{r'} S_2 + \bar{z}_{,2}^{r'} S_1) \\ \frac{1}{2} \bar{z}_{,2}^r S_2 + (\bar{z}_{,12}^r S_2 + 2\bar{z}_{,2}^r S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} \bar{z}_{,2}^{r'} S_2 + (\bar{z}_{,12}^{r'} S_2 + 2\bar{z}_{,2}^{r'} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} \bar{z}^{r'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{z}^{r'}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + \bar{z}^{r'} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix}$$

де  $\bar{z}^{v'}$ ,  $\bar{z}_{, \beta}^{v'}$  - обчислюються по формулам (4).

Матриця  $[B]$  в формулі (27) визначається за допомогою виразу:

$$[B]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} Z_{,1}^r S_1 + (Z_{,12}^r S_1 + 2Z_{,1}^r S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} Z_{,1}^{r'} S_1 + (Z_{,12}^{r'} S_1 + 2Z_{,1}^{r'} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (Z_{,1}^r S_2 + Z_{,2}^r S_1) & \frac{1}{4} (Z_{,1}^{r'} S_2 + Z_{,2}^{r'} S_1) \\ \frac{1}{2} Z_{,2}^r S_2 + (Z_{,12}^r S_2 + 2Z_{,2}^r S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} Z_{,2}^{r'} S_2 + (Z_{,12}^{r'} S_2 + 2Z_{,2}^{r'} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} Z^{r'} + \frac{1}{2} \left( \frac{Z^{r'}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + Z^{r'} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix}$$

де  $Z^{v'}$ ,  $Z_{, \beta}^{v'}$  - обчислюються по формулам (8).



Матриця жорсткості геометрично нелінійного оболонкового СЕ загального типу обчислюється за формулою:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ [b]^T [D] [b] \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}. \quad (28)$$

де  $I, J$  - кількість точок інтегрування по  $x^1, x^2$  відповідно,  $H_i, H_j$  - вагові функції,  $x_i^1, x_j^2$  - координати точок інтегрування.

$$[b]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z'_{,1} S_1 + (z'_{,12} S_1 + 2z'_{,1} S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} z'_{,2} S_1 + (z'_{,12} S_1 + 2z'_{,1} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (z'_{,1} S_2 + z'_{,2} S_1) & \frac{1}{4} (z'_{,1} S_2 + z'_{,2} S_1) \\ \frac{1}{2} z'_{,2} S_2 + (z'_{,12} S_2 + 2z'_{,2} S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} z'_{,2} S_2 + (z'_{,12} S_2 + 2z'_{,2} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} z'_{,2} + \frac{1}{2} \left( \frac{z'_{,2}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + z'_{,2} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix}$$

Матриця  $[b]$  обчислена в проміжній відрахунковій конфігурації.

#### 4. Алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь.

**Розв'язання систем нелінійних рівнянь.** У загальному випадку при розв'язку нелінійних задач використано кроковий алгоритм за параметрами навантаження і часу в поєднанні з ітераційною процедурою Ньютона-Кантаровича по формулі:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1} \left( \{Q\}_n^m - \{R\}_n^m \right), \quad (29)$$

де  $[K]$  - лінералізована матриця жорсткості в системі рівнянь МСЕ, обчислена в проміжній відрахунковій конфігурації з урахуванням корекції тензора пружних констант згідно формули (тензор миттєвих констант) і координат вузлів дискретної моделі по формулі  $z_m^\alpha = z_{m-1}^\alpha + \Delta u_m^\alpha$ ;  $\{Q\}_n^m, \{R\}_n^m$  - вектори вузлових зусиль і реакцій, визначені в актуальній конфігурації. Компоненти вектора вузлових реакцій обчислюються з урахуванням, як фізичної так і геометричної нелінійності.

Обчислення здійснюються до виконання умови:

$$\left\| \{Q\}_n^m \right\| - \left\| \{R\}_n^m \right\| \leq \zeta \left\| \{Q\}_n^m \right\|, \quad (30)$$

де  $\zeta$  - параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь;  $\left\| \{Q\}_n^m \right\|$  - сума квадратів вузлових зусиль СЕМ;  $\left\| \{R\}_n^m \right\|$  - сума квадратів реакцій СЕМ.

Для зменшення обчислюваних витрат при розв'язанні задач пружно-пластичності, пов'язаних з необхідністю перерахунку на кожному кроці коефіцієнтів матриці жорсткості, широко використовується спрощений алгоритм (31), з матрицею жорсткості, елементи якої обчислюються без урахування корекції тензора пружних сталей. Тоді формулу (39) можна записати у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (31)$$

де матриця  $[K]$  обчислюється один раз на першому кроці з використанням тензора пружних констант  $C^{ijkl}$ .

**Визначення температурних деформацій.** Фізичні компоненти тензора температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^T = \frac{\varepsilon_{ij}^T}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (32)$$

У відповідності до МССЕ [7] в поперечному перетині, що відповідає точці інтегрування температурні деформації, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T; \quad \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^T = 0; \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^T = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T x^\beta. \quad (33)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням їх подання в місцевій системі координат за (12):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T; & \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial (\alpha_T \Delta T)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,(3-\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}; & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^\beta} = \frac{\partial (\alpha_T \Delta T)}{\partial x^\beta} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,\beta}; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Коефіцієнтом розкладання  $\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^T}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$  нехтуємо, як величиною більш

високого порядку малості.

Згідно формули (32) та підставляючи (34) знаходимо:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{12}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{33}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,\beta} \overset{\circ}{g}_{33}.\end{aligned}\quad (35)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент температурних деформацій через вузлові температури та їх похідні:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T = \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_{\beta}.\end{aligned}\quad (36)$$

Співвідношення (36), що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\{\overset{\circ}{\varepsilon}^T\} = [B^T] \{T\} \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned}\{T\}^T &= \{T_{(-1;-1)} \quad T_{(1;-1)} \quad T_{(-1;1)} \quad T_{(1;1)}\}; \\ \{\overset{\circ}{\varepsilon}^T\}^T &= \{\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T\}; \\ [B^T] &= \left[ [B^T]^{(-1;-1)} \quad [B^T]^{(1;-1)} \quad [B^T]^{(-1;1)} \quad [B^T]^{(1;1)} \right].\end{aligned}\quad (38)$$

Значення компонент підматриць  $[B^T]^{(S_1, S_2)}$ , у виразі (38) для неоднорідних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (36) з урахуванням обчислених за (11) значеннями компонент метричного

тензору для призматичних тіл:

$$[B^T]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{11} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} x^2 \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{12} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{22} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} x^1 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{33} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{\alpha} \overset{\circ}{g}_{33} x^{\alpha} \end{bmatrix}$$

**Визначення деформацій пластичності.** В загальному випадку при розв'язанні системи нелінійних рівнянь, на початку кожної ітерації  $n$  кроку  $m$  компоненти тензора напружень  $(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m$ , що входять до використовуваного в (29) вектора вузлових реакцій, обчислюються за формулою:

$$(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m = (\tilde{\sigma}^{ij})_{n-1}^m + (\Delta \tilde{\sigma}^{ij})_n^m, \quad (39)$$

де  $(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m$  – приращення напружень, які визначаються згідно з законом Гука (19) за величиною приращення повних деформацій.

Дійсні значення напружень  $(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m$ , при наявності фізично нелінійних деформацій, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій  $\{R\}_n^m$ , обчислюються за формулою:

$$(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\tilde{\sigma}^{ij})_n^m + \overline{(s^{ij})}_n^m = (\overline{\sigma}_o)_n^m + \overline{(s^{ij})}_n^m, \quad (40)$$

де  $\overline{(s^{ij})}_n^m$  – компоненти девіатора напружень, що враховують наявність деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора  $\overline{(s^{ij})}_n^m$  тензора дійсних напружень, що входять до формули (40), при розв'язку задачі пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості  $\tau_s$  [9]:

$$\overline{(s^{ij})}_n^m = (s^{ij})_n^m \frac{\tau_s}{\tau} \quad (41)$$

де  $\tau = \sqrt{s_{ij} s^{ij}} / 2$  – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

Пластичне течіння описується шляхом зберігання девіатора напружень на границі пружності. На рис. 4 показані напруження в

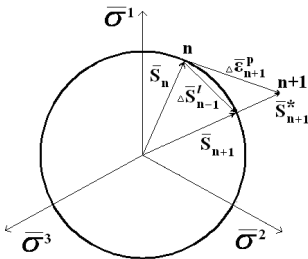


Рис. 4

стані  $n$ . В просторі головні напруження  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$  у відповідно з умовою текучості Мізеса поверхню текучості являє собою прямиий круговий циліндр, слід якого на девіаторній площині ( $S_1+S_2+S_3=0$ , де  $S_1, S_2, S_3$  - девіатори головних напружень) - коло радіусом  $\tau_s$ .

Після збільшення деформацій напружень змінюються і переходять у стан  $(n+1)$ . Проте стан  $(n+1)$  знаходиться за колом текучості і у відповідності з прийнятою умовою текучості досягатися не може. Замість цього в матеріалі відбувається пластичне течіння, а напруження перебувають на межі пружності, тобто на колі текучості.

Пластична частина деформацій перпендикулярна до кривої текучості і необхідно обмежити саме ті напруження, які пов'язані з цією частиною деформацій. Тому новий напружений стан замість стану  $(n+1)$  відповідатиме точці, яка знаходиться на перпендикуляре до окружності, проведеному з точки, що відповідає стану  $(n+1)$ .

Порядок виконання операцій при вирішенні завдання пластичного деформування з урахуванням великих переміщень, в основному, збігається з порядком вирішення геометрично нелінійної задачі, описаним раніше. Додатковою операцією є корекція напружень відповідно до формули (41). Корекція проводиться на кожній ітерації тільки в тих випадках, коли виконується умова

$$\tau_s < T. \quad (42)$$

Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій пластичності  $(\Delta \epsilon_{ij}^p)_m$ :

$$(\epsilon_{ij}^p)_m = (\epsilon_{ij}^p)_{m-1} + (\Delta \epsilon_{ij}^p)_m = (\epsilon_{ij}^p)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) (\bar{s}_{ij})_m / G_1. \quad (43)$$

Для з'ясування можливості визначення розвитку зон пластичності в тонкостінних конструкціях, апроксимуючи по товщині одним скінченим елементом, виконаний пружно-пластичний розрахунок шарнірно опертої балки завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 5) при наступних механічних характеристиках:  $E=1.0$ ;  $\nu=0.3$ . За товщиною скінченного елемента приймалося п'ять Гаусових точок інтегрування.

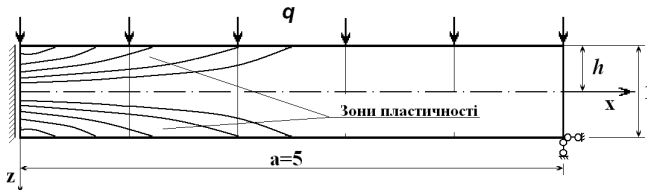


Рис. 5

Аналітичне рішення задачі наведене в роботі [8], де зв'язок координат між зонами пластичності з інтенсивністю заданого розподіленого навантаження  $q$  представлена у вигляді:

$$Z^2 - 3h^2 = 2h^2 \frac{q}{q_0} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right). \quad (44)$$

Тут  $h$  - половина висоти балки;  $a$  - половина довжини балки;  $q_0$  - величина розподіленого навантаження, при якій з'являються пластичні деформації,

$$q_0 = \frac{4M}{3a^2},$$

де  $M$  - значення згинального моменту.

На рис. 6 зображена отримана за допомогою рівності (44) крива

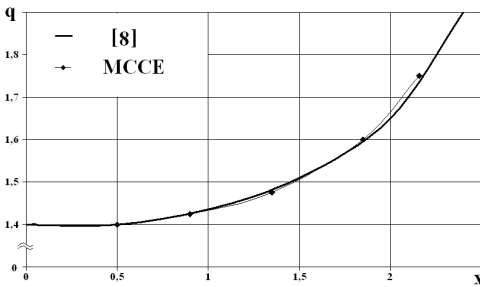


Рис. 6

залежності абсиси  $X$  зони пластичності від величини інтенсивності навантаження  $q$  при фіксованих значеннях ординати  $Z$ , рівним 0.4531 (координата Гаусової точки). Ромбиками нанесені результати MCCE рішення.

На рис. 7 зображені графіки напруг  $\sigma$  залежно від  $X$  по перетину  $Z=0.4531$  при різних значеннях навантаження  $q$ . Гранічна величина  $\sigma$  відповідна  $q_0=1.267$ , що не викликає пластичних деформацій дорівнює 95.

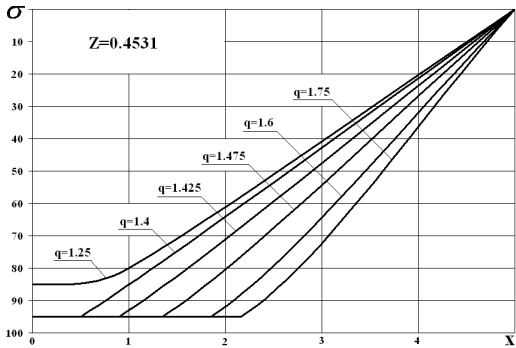


Рис. 7

На графіку видно хорошу узгодженість рішення за пропонованою методикою МССЕ та аналітичних результатів.

**Висновок.** Розроблена методика дозволяє з високою точністю визначати напружено-деформований стан тонкостінних конструкцій у фізичній і геометрично нелінійних постановках при використанні одного СЕ по товщині.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел – К. : НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В. А., Гуляр О.И., Сахаров О.С., Пискунов С.О.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл : Монографія – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Пискунов С. О.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С. О. Пискунов, І. І. Солодей, Ю. В. Максим'юк, А. Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2013. – Вип. 91. – С. 59-75.
4. *Блох В.И.* Теория упругости / В. И. Блох. – Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. – 484 с.
5. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости/ А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512с.
7. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислоцкий, В. В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
8. *Соколовский В.В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
9. *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений / М. Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидротехнике. – М. : Мир, 1967. – С. 212–263.

#### REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Hulyar A.Y., Sakharov A.S., Topor A.H.* Poluanalytycheskyy metod konechnykh elementov v mekhanyke deformyruemykh tel (Semi-analytical finite element method in the mechanics of deformable bodies) – K. : NYYSM, 1993. – 376s.
2. *Bazhenov V. A., Hulyar O.I., Sakharov O.S., Pyskunov S.O.* Napivanalitchnyy metod skinchennykh elementiv v zadachakh ruynuvannya prostorovykh til: Monohrafiya – K. : KNUBA, 2005. – 298 s.
3. *Pyskunov S.O.* Osoblyvosti vykorystannya momentnoyi skhemy skinchennykh elementiv (MSSE) pry liniynykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn (Features of torque finite element scheme (MSSE) with linear calculations of shells and plates) / S.O. Pyskunov, I.I. Solodey, Yu.V. Maksym"yuk, A.D. Solodenko // Opir materialiv i teoriya sporud. 2013. – Vyp. 91. – S. 59 75.
4. *Blokh V.Y.* Teoryya upruhosti „Theory of elasticity” / V.Y. Blokh. – Kh.: Yzd. Khar'kovsk. Hos. Unyversyteta, 1964. – 484 s
5. *Kachanov L.M.* Osnovy teoryy plastychnosti (Fundamentals of the theory of plasticity) / L. M. Качанов. – М.: Fyzmathyz, 1960. – 456 s.
6. *Lur'e A.Y.* Nelyneynaya teoryya upruhosti (Nonlinear theory of elasticity) / A.Y. Lur'e. – М.: Nauka, 1980. – 512s.

7. *Sakharov A.S. Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) / A.S. Sakharov, V.N. Kyslookyy, V.V. Kyrychevskyy. – К.: Vyshcha shk., 1982. – 480 s.*
8. *Sokolovskyy V.V. Teoryya plastychnosti (Theory of Plasticity) / V.V. Sokolovskyy. – М.: Vyssh. shk., 1969. – 608 s.*
9. *Uylkyns M.L. Raschet upruho-plasticheskykh techeny / M.L. Uylkyns // Vychyslytel'nye metody v hidrotekhnike (Calculation of elastic-plastic flows) – М.: Myr, 1967. – S. 212–263.*

*Стаття надійшла до редакції 03.12.2013 р.*

*Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Guliar A.I., Pyskunov S.O., Maksymiuk Y.V.*

#### **ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МСКЭ) ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТАХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН**

На основе МСКЭ создан оболочечный КЭ общего типа, который позволяет проводить анализ напряженно-деформированного состояния осесимметричных оболочек и пластин в задачах физической и геометрической нелинейности. Приведены основные положения нелинейной теории упругости, алгоритмы решения системы нелинейных уравнения для определения температурных и пластических деформаций.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, температурные деформации, деформации пластичности, геометрически нелинейное деформирование.

*Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Guliar A. I., Pyskunov S.O., Maksymiuk Y.V.*

#### **FEATURES APPLICATION CIRCUIT MOMENT FINITE ELEMENT (MSSE) NONLINEAR CALCULATIONS OF PLATES AND SHELLS**

Based MSSE created shell CE general type, which allows you to analyze the stress-strain state of axisymmetrical shells and plates in problems of physical and geometric nonlinearity. The principal nonlinear elasticity theory, algorithms for solving systems of nonlinear equations for determining the temperature and plastic deformation.

**Keywords:** finite element method, temperaturational strain, plastic strain, geometrically nonlinear deformation.



УДК 539.3

**П.П. Лізунов**<sup>1</sup>, д-р техн. наук,**О.І. Гуляр**<sup>1</sup>, д-р техн. наук,**І.І. Солодей**<sup>1</sup>, д-р техн. наук

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

## **УНІВЕРСАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ДЕФОРМУВАННЯ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ**

Розроблено чисельний алгоритм та реалізуючі його програмні засоби для дослідження нелінійного деформування і тріщиноутворення просторових залізобетонних конструкцій. Використовується метод скінчених елементів. Чисельне моделювання нелінійного деформування та руйнування матеріалів здійснюється згідно з феноменологічними теоріями. Алгоритм розрахунку ґрунтується на методі Ньютона-Канторовича. Достовірність результатів підтверджена шляхом порівняння з експериментальними даними і чисельними розрахунками, виконаними за іншими методиками.

**Ключові слова:** залізобетонні просторові конструкції, нелінійне деформування, тріщиноутворення, феноменологічні теорії, метод скінчених елементів.

### **Вступ**

Дослідження нелінійного деформування та прогресуючого руйнування залізобетонних конструкцій і металевих елементів конструкцій в рамках єдиного алгоритму потребує спеціальних алгоритмічних і програмних розробок. Їх складність зумовлена різним характером прояву граничного стану бетону і металу (перший руйнується крихко, другий "тече"), застосуванням деформаційної теорії пластичності для опису роботи бетону, що передує його руйнуванню та асоційованого закону теорії пластичного плину для металу, використанням великого обсягу різномірної по змісту оперативної інформації.

Розглянуті процеси відносяться до класу еволюційних у тому розумінні, що для одержання достовірної картини напружено-деформованого стану досліджуваних конструкцій необхідне урахування історії навантаження. Розв'язок таких задач найкраще здійснюється на базі кроково-ітераційних алгоритмів методу продовження за параметром. Розроблений у даній роботі алгоритм відноситься до зазначеного типу і передбачає наявність як силових так і кінематичних (вимушені переміщення) впливів. Рівень кожного з них задається як функція ведучого параметра алгоритму - номера кроку інтегрування нелінійних рівнянь, що описують стан дискретної моделі метода скінчених

елементів МСЕ розглянутого об'єкта.

Обґрунтування і побудова математичної та скінченноелементної моделей, які використовуються в представлених дослідженнях, розглянуті у попередніх роботах авторів [1, 2].

### **1. Реалізація алгоритму чисельного моделювання нелінійної роботи залізобетонних конструкцій**

Прийнята в даній розробці модель даних відповідає квазірегулярній структурі дискретної моделі [8] і реалізує всі переваги такого підходу в плані економії ресурсів ЕОМ і простоти алгоритмів керування даними.

Алгоритм чисельного моделювання нелінійної роботи залізобетонних конструкцій містить у собі наступні основні етапи (рис. 1):

1. Формування і наповнення бази даних, що відображають топологічні та фізико-механічні характеристики скінченноелементної моделі об'єкта розрахунків.

2. Розв'язання фізично нелінійної задачі.

3. Модифікація даних про дискретну модель з урахуванням утворення тріщин у бетоні.

Розв'язання фізично нелінійної задачі реалізовано шляхом організації внутрішнього циклу. Для визначення напружено-деформованого стану з урахуванням пластичних деформацій усіх конструктивних матеріалів виконуються наступні процедури:

1. Обчислення вузлових реакцій  $\{R^i\}$  на даній ітерації ( $i$  - номер поточної ітерації) по напруженнях  $\tilde{\sigma}^{j-1}$ , накопичених на попередньому кроці ( $j$  - номер поточного кроку), і приростах напружень  $\Delta\tilde{\sigma}^{i-1}$ , що є наслідком приросту переміщень  $\{\Delta U^{i-1}\}$ , які накопичені на попередніх ітераціях поточного кроку  $j$ :

$$\{R^i\} = \{R^i(\tilde{\sigma}^{ji})\}, \quad \tilde{\sigma}^{ji} = \tilde{\sigma}^{j-1} + \Delta\tilde{\sigma}^{i-1}(\{\Delta U^{i-1}\}). \quad (1)$$

При обчисленні напружень для кожного матеріалу використовуються специфічні рівняння стану, які описують його пружнопластичне деформування.

2. Обчислення вузлових навантажень  $\{P^i\}$ , що інтерпретують зовнішні силові впливи.

3. Перевірка рівноваги дискретної моделі шляхом порівняння значень вузлових навантажень і реакцій, тобто обчислення вузлових нев'язок:

$$\{r^i\} = \{P^i\} - \{R^i\}. \quad (2)$$

4. Обчислення приростів переміщень  $\{\Delta U^i\}$  на даній ітерації. Вузлові нев'язки використовуються як „додаткові навантаження” (права частина лінеаризованої системи рівнянь):



$$\|r^i\|^2 < \varepsilon \|P^j\|^2, (\varepsilon = 0.001). \quad (5)$$

Якщо умова (5) не виконується, здійснюється перехід до процедури 1.

По закінченні ітераційного процесу накопичуються прирости компонент вектору переміщень  $\{\Delta U^j\}$ , деформацій  $\Delta \tilde{\varepsilon}^j$  бетону і арматури, а також напружень  $\Delta \tilde{\sigma}^j$ . Для СЕ, що моделюють металоконструкції накопичуються значення параметру Одквіста.

Для всіх скінченних елементів в межах залізобетонної конструкції виконується перевірка прийнятого критерію міцності бетону. Якщо хоча б в одному СЕ порушується умова міцності, проводиться "нанесення тріщин". Ця процедура полягає в обчисленні та збереженні ознак наявності і стану (відкриття або закриття) тріщин, а також косинусів кутів направляючих нормалей відповідних площин. Крім того, для відкритих тріщин напруження корегуються з урахуванням рівності нулю нормальних і дотичних напружень у площині руйнування.

Для перерозподілу зусиль, які сприймалися зруйнованим бетоном, знову вирішується фізично нелінійна задача. Чергове збільшення ведучого параметра алгоритму, тобто  $(j + 1)$ -й крок інтегрування, виконується лише тоді, коли, з одного боку, дотримується умова рівноваги, а з іншого - у жодному скінченному елементі не порушується критерій міцності бетону.

Урахування геометричної нелінійності не вимагає модифікації алгоритму, представленого на рис. 1. У цьому випадку при обчисленні вузлових реакцій СЕ використовується тензор кінцевих деформацій, а по закінченню ітераційного процесу виконується корекція координат вузлів на величину приросту переміщень  $\{\Delta U^j\}$ .

Матриця коефіцієнтів при невідомих розрахункової системи алгебраїчних рівнянь (лінеарізована матриця жорсткості  $[K]$ ) формується на першому кроці інтегрування, а потім - по мірі необхідності: при зміні жорсткості конструкції, що може бути викликано утворенням тріщин або моделюванням процесу укладання та твердіння бетону, а також при істотній зміні геометрії розрахункової схеми.

Таким чином, опис нелінійної роботи конструкції, що зумовлена фізичною нелінійністю бетону і металу на поточному кроці інтегрування, базується на методі додаткових навантажень. В той же час для опису нелінійності, що викликана тріщиноутворенням і накопиченням великих деформацій, використовується метод змінних жорсткостей. Такий комбінований алгоритм (модифікований метод Ньютона-Канторовича [5]) є найбільш ефективним при прогнозуванні спільної роботи залізобетонних та металевих конструкцій.

Чисельні експерименти показали, що використання початкових модулів пружності при формуванні лінеаризованої матриці жорсткості  $[K]$  є більш переважним у порівнянні з варіантами використання січних і дотичних модулів, оскільки забезпечує стійку збіжність результатів до точного і в остаточному підсумку дозволяє досягти економії процесорного часу ЕОМ.

Розрахункові співвідношення теорії деформації залізобетону з тріщинами М.І. Карпенко [6, 7] дозволяють врахувати спільність роботи арматури і розтягнутих блоків бетону («смуг») між тріщинами. Супротив смуг бетону розтягу моделюється за допомогою коефіцієнта Мурашова  $\psi_s$ . До утворення тріщин, коли робота кожної з компонент залізобетону (бетону і арматури) враховується окремо приймається, що  $\psi_s=1$ . Безпосередньо після утворення тріщин модуль пружності арматури  $E_s$  умовно зменшується в  $\psi_s$  разів ( $\psi_s < 1$ ). Подальше навантаження поступово веде до повного порушення зчеплення арматури з бетоном. Такий стан відповідає коефіцієнту  $\psi_s=1$ . Відомі різні види функції  $\psi_s = \psi_s(\epsilon_s)$ , наприклад [10, 11, 13, 14]. Серед них залежності, наведені в [10, 14], орієнтовані на застосування в чисельних дослідженнях континуальних об'єктів і викладені детально для реалізації, але показують значні розбіжності при кількісній оцінці роботи смуг бетону між тріщинами. У зв'язку з цим, на основі розробленої математичної моделі опору бетону з урахуванням концентрації напружень і методики чисельного моделювання руйнування залізобетонних конструкцій, було виконано чисельне дослідження розтягу залізобетонного зразка, в результаті якого встановлена функція  $\psi_s(\epsilon_s)$ . За об'єкт дослідження прийнятий зразок із стрижнем періодичного профілю, що розташований вздовж вісі зразка [3] (рис. 2).

На основі отриманої діаграми  $Q=Q(U)$  була побудована функція Мурашева  $\psi_s(\epsilon_s)$ , що характеризує спільну роботу арматури і бетону за наявності тріщин шляхом умовного збільшення жорсткості арматури:

$$\psi_s = \frac{\mu_s \pi r^2 E_s U}{QL}, \quad (6)$$

де  $\mu_s=0.02$  - коефіцієнт армування; радіус і довжина циліндричного зразка:  $r = 7$  см,  $L = 20$  см. Графік отриманої таким чином функції  $\psi_s(\epsilon_s)$  наведено на рис. 2, крива 1.

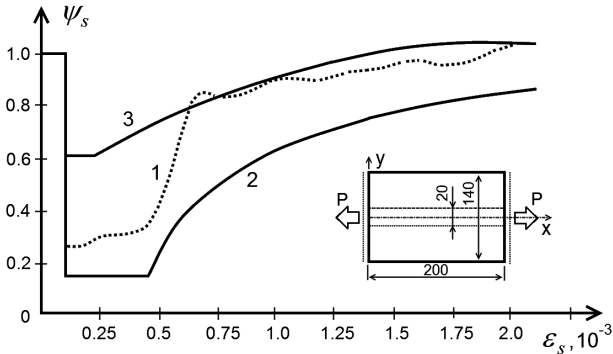


Рис. 2. Графіки коефіцієнта  $\psi_s$  як функції деформації арматури

Крива 2 – графік функції  $\psi_s(\epsilon_s)$ , обчисленої відповідно до [10]:

$$\psi_s = 1 - s \frac{N_{bt}}{\sigma_s f_s} = 1 - s \frac{R_{bt}}{\mu_s E_s \epsilon_s}, \quad (7)$$

де  $s=1.1$  - коефіцієнт, що враховує профіль арматури;  $N_{bt}$  - зусилля, що відповідає утворенню тріщин у бетоні;  $f_s$  - площа поперечного перерізу арматурного стрижня. На рис. 2, крива 3 відповідає функції  $\psi_s(\epsilon_s)$ , яка запропонована авторами [14] і в даному дослідженні приймалася в дещо спрощеному вигляді:

$$\psi_s = 1 - B(\bar{\epsilon}_s - \epsilon_s)^2, \quad (8)$$

де

$$B = (1 - \bar{\psi} \bar{\epsilon}_s \bar{\epsilon}_s) / (\bar{\epsilon}_s - \bar{\epsilon}_s)^2, \quad \bar{\epsilon}_s = 1.5 \epsilon_{RT}, \quad \bar{\epsilon}_s = \frac{\sigma_i}{E_s},$$

$$\bar{\psi} = 0.383 + 62.5 \mu_s + 208 \mu_s^2, \quad 0.1 \leq \bar{\psi} < 1.$$

Тут  $\epsilon_{RT} = 8 \cdot 10^{-5}$  - гранична деформація бетону при осьовому розтязі.

При цьому  $\mu_s$  обчислюється як відношення площі поперечного перерізу арматури до усієї площі вертикального перерізу балки-стілки. Таким чином, застосування формули (8) припускає використання характерного для інженерних розрахунків прийому обчислення коефіцієнта армування  $\mu_s$ . Це не узгоджується з підходом, заснованим на дискретизації досліджуваного об'єкту по МСЕ, коли  $\mu_s$  обчислюється як відношення площі поперечного перерізу арматури до площі СЕ, в якому вона розташована.

Порівняння графіків, представлених на рис. 2, дозволяє зробити висновок про те, що отримана в результаті чисельного моделювання функція  $\psi_s(\epsilon_s)$  якісно узгоджується з її варіантами у вигляді (7) та (8), забезпечуючи значення  $\psi_s$ , які лежать в області, що обмежена знизу функцією (7), а згори - (8). На початковій ділянці (при  $\epsilon_s < 0.5 \cdot 10^{-3}$ ) графік запропонованої функції  $\psi_s(\epsilon_s)$  (крива 1) ближче до функції (7 - крива 2). Потім крива 1 наближається до кривої 3 - графіку функції (8) і слідує за нею до кінця області визначення  $\epsilon_s = 2.1 \cdot 10^{-3}$ .

Викладений вище чисельний спосіб отримання функції  $\psi_s(\epsilon_s)$  заснований на детальному математичному моделюванні процесів взаємодії арматури періодичного профілю і бетонного масиву, яке супроводжується пластичною деформацією сталі і бетону та утворенням тріщин. Перевагою такого підходу є ясна інтерпретація характеру функції  $\psi_s(\epsilon_s)$ , тобто можливість провести аналогію між закономірностями її зміни і тими фізичними явищами, які відбуваються при навантаженні зразка.

## **2. Дослідження деформативності та несучої здатності залізобетонної балки-стілки**

Для дослідження можливостей розробленої методики чисельного моделювання нелінійної роботи залізобетонних конструкцій в цілому і зокрема такого важливого її аспекту, як опис деформування залізобетону із тріщинами з урахуванням роботи розтягнутих смуг бетону в зонах тріщиноутворення, виконано розрахунки балки-стілки [4]. Вибір об'єкту розрахунків зумовлений тим, що, як показали чисельні експерименти [14], введення змінних величин  $\psi_s$  позначається лише на результатах розрахунків слабоармованих конструкцій. Так при  $\mu_s > 0.01$ , як правило, досить прийняти  $\psi = 1$ .

Коефіцієнти армування розглянутої балки-стілки БО-1-1: у поперечному напрямку  $\mu_1 = 0.008$ , а в поздовжньому -  $\mu_2 = 0.0033$ . Посилене поперечне армування мало на меті запобігти утворенню похилих тріщин і забезпечити руйнування балки-стілки вздовж нормальних перерізів.

На рис. 3 наведені розміри конструкції і схема армування. Ступінь дискретизації і розмір кроку по навантаженню встановлені на основі попередніх розрахунків.

Плоский напружений стан виключав необхідність урахування деформаційного зменшення міцності бетону - спадаючої гілки діаграми  $\sigma - \epsilon$ . Згідно [4], при виготовленні балки-стілки використовувався бетон

проектного класу В30, міцність якого в момент випробувань становила  $R_b = 32.2 \text{ МПа}$ . Для визначення межі міцності бетону при одноосьовому розтязї  $R_{bt}$  використовувалися формули [12], які пов'язують призмову міцність  $R_b$  із кубиковою  $R$ , і як слідство з  $R_{bt} (\text{кг/см}^2)$  - міцністю при розтязї:

$$\frac{R_{bt}}{R} = 0.8 - 0.0001R; R_{bt} = \frac{50R}{450 + R}. \quad (9)$$

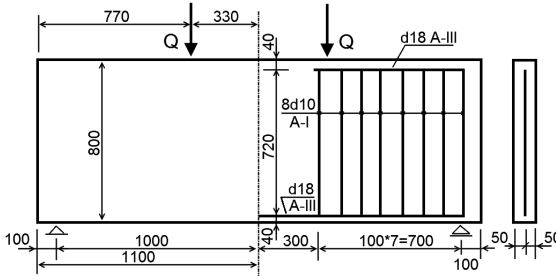


Рис. 3. Розміри конструкції та схема армування

Звідси  $R_{bt} = 2.43 \text{ МПа}$ . Початковий модуль пружності бетону з урахуванням теплової обробки виробу приймався  $E_b = 3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ . Поздовжнє армування здійснювалося стрижнями діаметром 18 мм класу А-Ш, а поперечне – 10 мм А-І. Пружнопластична робота арматури моделювалася відповідно до дволанцюгової діаграми  $\sigma$ – $\epsilon$ . Межа пластичності арматурної сталі обчислювалася на основі нормативних опорів  $R_{sn}$  [13] з урахуванням коефіцієнта варіації  $v_a = 0.067$  [9]:  $\sigma_i = 440 \text{ МПа}$  для поздовжнього армування і  $\sigma_i = 260 \text{ МПа}$  для поперечного. Модуль пружності арматури приймався  $E_s = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , а нахил діаграми  $\sigma$ – $\epsilon$  після досягнення межі пластичності в 10 разів менший, ніж для пружної ділянки.

По результатам чисельних експериментів побудовані графіки залежності навантаження  $Q$  від прогину  $U_A$  серединної точки прольоту (рис. 4). Криві 1, 2 відображають деформування без урахування роботи розтягнутого бетону в зонах тріщиноутворення, при цьому крива 1 отримана з припущення лінійно-пружної роботи бетону, а крива 2 - з урахуванням його фізичної нелінійності. Криві 3, 4 та 5 враховують пластичні деформації і тріщиноутворення в бетоні, а також спільну роботу бетону і арматури після утворення тріщин. Вид функції  $\psi_s(\epsilon_s)$



приймався для кривої 3 згідно рис. 2 (графік 2), кривої 4 згідно рис. 2 (графік 3), 5 - на основі чисельного експерименту рис. 2 (графік 1).

У всіх постановках задачі враховували пружнопластичну роботу арматурної сталі. Експериментальний графік  $Q-U_A$  позначено на рис. 3 цифрою 0. В роботі [4] як руйнівне зазначено навантаження  $Q=290$  кН, якому на графіку  $Q-U_A$  відповідає прогин  $U_A = 2.0$ .

Порівняння результатів різних розрахунків і випробувань для розглянутої конструкції показало, що нехтування роботою розтягнутого бетону в зонах тріщиноутворення веде до значної похибки.

Характерно, що урахування фізичної нелінійності дуже мало вплинуло на результати розрахунків балки-стілки, де головну роль відіграли розтягувальні напруження.

Для всіх трьох функцій  $\psi_s(\epsilon_s)$ , що були використані, урахування спільної роботи бетону і арматури при наявності тріщин дозволило суттєво збільшити точність результатів розрахунків. Найкраще узгодження з даними випробувань показує крива 5, як за значенням несучої здатності, так і по характеру графіка  $Q-U_A$  (рис. 4,б).

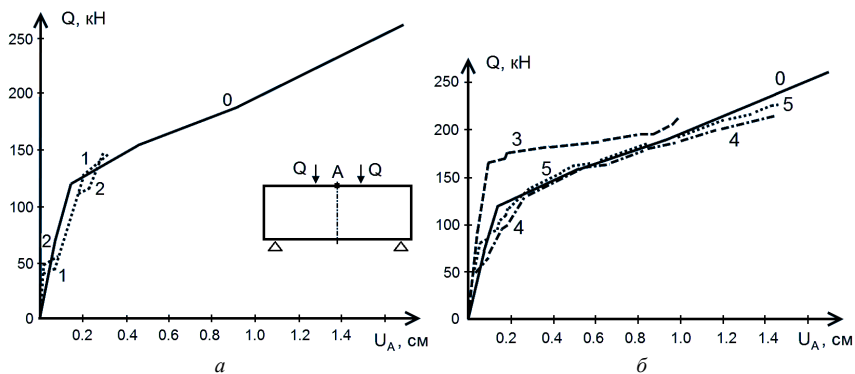


Рис. 4. Графіки функції навантаження  $Q$  - вертикальне переміщення точки  $A$  при різних  $\psi_s$  :

а: 0 – експеримент; 1 – бетон пружний; 2 – бетон пружнопластичний ( $\psi_s = 1$ );

б: 0 – експеримент; 3, 4, 5 – бетон пружнопластичний при різних  $\psi_s = \psi_s(\epsilon_s)$

На рис. 5 показано розвиток зон тріщиноутворення в процесі навантаження балки-стілки.

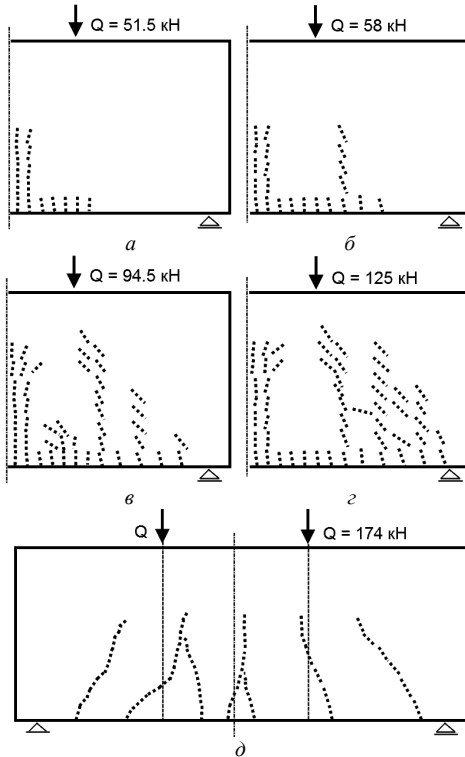


Рис. 5. Розвиток тріщиноутворення ( $a \div г$  – чисельне моделювання,  $д$  – експеримент)

Руйнування бетону починається в нижній центральній частині конструкції (рис. 5,а). В межах фрагмента, де відсутнє армування, зона тріщиноутворення прогресує по товщині вздовж осі симетрії подібно магістральній тріщині. А у фрагменті з наявністю поздовжньої арматури утворення тріщин не спричиняє розвантаження бетону в сусідніх областях і зона тріщин з невеликим кутом нахилу до вертикалі розташовується вздовж стрижня в горизонтальному напрямку до опори. Потім, на відстані 1/4 прольоту від осі симетрії з'являється друга зона магістральних тріщин, яка стрімко просувається по товщині на таку ж висоту, як і зона тріщиноутворення біля осі симетрії (рис. 5,б). Подальше навантаження веде до появи третьої зони вертикальних магістральних тріщин на відстані 1/7 прольоту від краю балки-стілки (рис. 5,в). Дві області тріщин, що з'явилися на той час, розвивалися в напрямку до місця прикладання навантаження. Наступні етапи характеризуються появою

похилих тріщин біля опори, які просувалися до навантаженої області (рис. 5,з).

Порівняння характеру тріщиноутворення, зафіксованого в експерименті (рис. 5,д), і розрахункових картин тріщин (наприклад, рис. 5,е) свідчить про їх добре узгодження на половині прольоту.

Слід однак визнати, що руйнування бетону по результатам розрахунку проходило більш інтенсивно ніж у реальному експерименті. Це призвело до того, що отримане на основі розрахунків граничне навантаження виявилось менше за експериментальне і забезпечило запас міцності деяким більше 20%.

З усіх розглянутих факторів, тріщиноутворення проявляє найбільший вплив на піддатливість досліджуваної конструкції балки-стілки, яке будемо оцінювати як відношення характерного прогину  $U_A$  відповідного до величини навантаження  $Q$ .

На початку навантаження це відношення дорівнювало  $3.46 \cdot 10^{-4} \text{ см/кН}$ . Перед початком утворення тріщин  $U_A/Q = 3.62 \cdot 10^{-4} \text{ см/кН}$  (збільшення лише на 4.6%), а безпосередньо перед вичерпанням несучої здатності  $U_A/Q = 6.28 \cdot 10^{-3} \text{ см/кН}$ , що на порядок більше початкового значення  $U_A/Q$ .

### Висновки

Отже, використання теорії деформування залізобетону із тріщинами М.І. Карпенко та функції  $\psi_s(\epsilon_s)$  у вигляді, встановленому на основі попередніх розрахунків, дозволило достовірно та ефективно моделювати нелінійну роботу конструкції від початку утворення тріщин до вичерпання нею несучої здатності.

Результати розрахунків, очевидно, можна ще більше наблизити до експериментальних даних, якщо вдосконалити теорію деформування залізобетону із тріщинами в частині опису опору арматурних стрижнів зрушенню берегів тріщин. Однак моделювання роботи реальних споруд при такому значному ступені руйнування не представляється доцільним.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Напіваналітичний кільцевий скінченний елемент для моделювання просторового напруженого стану армованих тіл з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.91, 2013.-с.147-156.
2. *Гуляр О.І., Лізунов П.П., Солодей І.І.* Математичні моделі появи та розповсюдження зон руйнування кругових неоднорідних дисперсно-армованих тіл // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.90, 2012.-с.94-112.
3. *Гараи Т.* Исследование анкеровки арматуры в бетоне // Исследование прочности элементов железобетонных конструкций. – М.: Тр./НИИЖБ, 1959. – Вып. 5. – с.78-109.

4. Доценко А.В. Работа железобетонных балок стенок при длительных знакопеременных нагрузках. – Дис. канд. тех. наук., 05.23.01 – строительные конструкции, Киевский инженерно-строительный институт. – Киев, 1986. – 203 с.
5. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975, - 541 с.
6. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
7. Карпенко Н.И. К построению теории расчета массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Строит. мех. и расчет сооруж. – 1980. - № 2. – с.28-35.
8. Кислюкий В.Н., Козак А.Л., Отрашевская В.В. и др. ПРОЧНОСТЬ-75. Система математического обеспечения расчетов пространственных конструкций. Т.12. Раздел КОМБИК. Исследование оболочечных и комбинированных конструкций. – Киев, 1975. – 108 с. – Рукопись деп. в РФАП АН УССР, № 3884.
9. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций / Под ред. А.А. Гвоздева. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с.
10. Новое о прочности железобетона / Под ред. К.В. Михайлова. – М.: Стройиздат, 1977. – 272 с.
11. Пересыпкин Е.Н. Расчет стержневых железобетонных элементов. – М.: Стройиздат, 1988. – 168 с.
12. Прочность, структурные изменения и деформация бетона / Под ред. А.А. Гвоздева. – М.: Стройиздат, 1978. – 297 с.
13. СНиП 2.03.01.84. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР. –М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. – 79 с.
14. Шматков С.Б., Казанцев Е.Ю. Слоистая модель железобетонной пластинки и ее использование для расчета плитных фундаментов // Конструкции и методы расчета зданий сельскохозяйственного назначения. – М.: ЦНИИЭПС, 1988. – с.37-48.

## REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Solodei I.I. Napivanalitychnyy kil'tsevyi skinchennyi element dlya modelyuvannya prostorovoho napruzhenoho stanu armovanykh til z trishchynamy (Semi-analytical circular finite element to model 3d stress state of reinforced solids with cracks) // Strength of materials and structural theory. –К.:KNUSA, N 91, 2013.-pp.147-156.
2. Gulyar O.I., Lizunov P.P., Solodei I.I. Matematychni modeli poyavy ta rozpovsyudzhennya zon ruynuvannya kruhovyykh neodnorodnykh dyspersno-armovanykh til (The numerical models of initiation and development of fracture zones for reinforced heterogeneous solids of revolution) // Strength of materials and structural theory. –К.:KNUSA, N 90, 2012.-pp.94-112.
3. Garai T. Issledovanie ankerovki armatury v betone (Study of anchorage of reinforcement in concrete) // Investigation of the Strength reinforced concrete structures. – М.: RSRI, 1959. – N 5. – pp.78-109.
4. Docenko A.V. Rabota zhelezobetonnykh balok stенок pri dlitelnykh znakoperemennykh nagruzkakh (State of reinforced concrete beam-walls under long alternating loads). – PhD, 05.23.01 – constructions, KNUSA. – Kyiv, 1986. – 203 p.
5. Zenkevich O.K. Metod konechnykh elementov v tekhnike (The finite element method in the engineering). – М.: Mir, 1975, - 541 p.
6. Karpenko N.I. Teoriya deformirovaniya zhelezobetona s treshchynamy (Deformation theory of reinforced concrete with cracks). – М.: Stroyizdat, 1976. – 208 p.
7. Karpenko N.I. K postroeniyu teorii rascheta massivnykh zhelezobetonnykh konstruksiy s uchedom treshchynoobrazovaniya (The theory of calculation of massive concrete structures subject to cracking) // Structural mechanics and analysis of structure. – 1980. – N 2. – pp.28-35.
8. Kislookiy V.N., Kozak A.L., Otrashvskaya V.V. et al. PROCHNOST'-75. Sistema matematicheskoho obespecheniya raschetov prostranstvennykh konstruksiy (PROCHNOST'-75. System software of computation of 3D constructions). Т.12. Paragraph КОМБИК. Study of shell and combined designs. – Kyiv, 1975. – 108 p., N 3884.

9. Novoe v proektyrovanyy betonnykh i zhelezobetonnykh konstruksyy (New in the design of concrete and reinforced concrete structures) / A.A. Hvozdev. – M.: Stroyizdat, 1978. – 208 p.
10. Novoe o prochnosty zhelezobeta (New results in the strength of concrete) / K.V. Mykhaylov. – M.: Stroyizdat, 1977. – 272 p.
11. *Peresypkin E.N.* Raschet sterzhnevyykh zhelezobetonnykh elementov (Calculation of reinforced concrete core bits and pieces). – M.: Stroyizdat, 1988. – 168 p.
12. Prochnost', strukturnye izmeneniya i deformatsyya betona (Strength, structural changes and deformation of concrete) / A.A. Hvozdev. – M.: Stroyizdat, 1978. – 297 p.
13. SNIP 2.03.01.84. Betonnyye i zhelezobetonnyye konstruksyy (SNIP 2.03.01.84. Concrete and reinforced concrete structures) / State building USSR. – M.: CIMD, 1985. – 79 p.
14. *Shmatkov S.B., Kazantsev E.Y.* Sloistaya model' zhelezobetonnoy plastinki i eyo ispol'zovanie dlya rascheta plitnykh fundamentov (Layered model of reinforced concrete plates and its use to calculate the slab foundation) // Design and calculation methods of buildings for agricultural purposes. – M.: CSRDIPB, 1988. – pp.37-48.

*Стаття надійшла до редакції 02.12.2013 р.*

*Лизунов П.П., Гулярь А.И., Солодей И.И.*

#### **УНИВЕРСАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Разработан численный алгоритм и реализующие его программные средства для исследования нелинейного деформирования и трещинообразования пространственных железобетонных конструкций. Используется метод конечных элементов. Численное моделирование нелинейного деформирования и разрушения материалов выполняется согласно феноменологическим теориям. Алгоритм расчета основан на методе Ньютона-Канторовича. Достоверность результатов подтверждена путем сравнения с экспериментальными данными и численными расчетами, выполненными с использованием других методик.

**Ключевые слова:** железобетонные пространственные конструкции, нелинейное деформирование, трещинообразование, феноменологические теории, метод конечных элементов.

*Lizunov P.P., Gulyar O.I., Solodei I.I.*

#### **UNIVERSAL ALGORITHM OF NONLINEAR PROCESS NUMERICAL MODELLING OF REINFORCED CONSTRUCTION DEFORMATION**

A numerical algorithm and software tools for the study of nonlinear deformation and fracture spatial concrete structures are developed. Finite element method is used. Numerical simulation of nonlinear deformation and fracture of materials is performed according to the phenomenological theories. Calculation algorithm is based on the Newton-Kantorovich method. The accuracy of the results was confirmed by comparison with experimental data and numerical calculations performed using other methods.

**Key words:** reinforced concrete 3D structure, nonlinear deformation, crack formation, phenomenological theories, finite element method

УДК 539.3

**М.О. Соловей**<sup>1</sup>, д-р техн. наук  
**О.П. Кривенко**<sup>1</sup>, канд. техн. наук  
**О.О. Міщенко**<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

## **ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОСПРЯМОВАНОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ**

Розглянуто відомі методики прогнозування пружних сталей для моделі композитного матеріалу, що армований односпрямованими волокнами, через мікромеханічні параметри його складових. Запропоновано методику врахування отриманих ефективних характеристик для цього типу композитного матеріалу у шарах розробленого багатошарового скінченного елемента тонкої неоднорідної оболонки.

**Ключові слова:** тонка пружна оболонка, багатошаровий скінченний елемент, композитний матеріал, мікромеханічні параметри.

**Вступ.** В останній час у багатьох галузях техніки та будівництві все більшого застосування знаходять конструкції та їх елементи, які виготовлені з композитних матеріалів (КМ). Аналіз та виконані оцінки застосування КМ у різних галузях техніки, зокрема в авіабудуванні України, Росії та США, доводять їх ефективність [1]. Композитний матеріал характеризується можливістю проектування його з наперед заданими властивостями, що дозволяє покращити економічність і надійність несучих конструкцій. Наприклад, широке впровадження КМ на Державному підприємстві «Антонов» на протязі останніх сорока років дозволило знизити вагу літальних апаратів на 20% - 25% [1, 2]. Питання виробництва в Україні композитних матеріалів, наприклад, таких як вуглецево-вуглецевих КМ, відноситься до пріоритетних напрямків, що визначають обороноздатність і науково-технічний потенціал країни [3]. Для реалізації цієї проблеми необхідно створювати підприємства з потужними науково-дослідними відділами аналогічні російській холдинговій компанії «Композит» [3, 4].

**Вихідні положення.** Найбільш дослідженими в теорії композитів та розповсюдженими на практиці композитними матеріалами є матеріали з волокнистою структурою (рис. 1) [5-8]. Ці матеріали ефективно використовуються в тонкостінних оболонкових конструкціях, що мають невелику масу і різноманітні геометричні форми [2, 8-13]. У даній роботі автори розглянули деякі існуючі в теорії механіки композитів моделі

односпрямованого волокнистого композитного матеріалу та методики визначення його ефективних фізико-механічних характеристик.

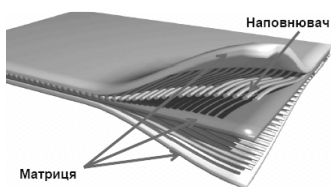


Рис. 1. Односпрямований волокнистий КМ

Волокнисті композити, як мікроструктуровані КМ, характеризуються тим, що у якості армуючого в них використовуються одновимірні компоненти (їх називають волокнами, рідше фібрами та наповнювачами), один з розмірів яких значно перевищує два інших. Товщина волокна має порядок мікрометра. Зазвичай ці КМ

армуються високоміцними волокнами товщиною, що знаходиться в межах  $5\div 300$  мкм [14].

У якості армуючих волокон (у залежності від виду матеріалу матриці, яку ще називають в'язучим) можуть використовуватись отримані за спеціальними технологіями волокна як металів та їх сплавів, так і неметалів [15, 16]. Наприклад, неметалевими наповнювачами можуть бути вуглецеві волокна, волокна з бору, скловолокна, органічні волокна та інші. Одними з найбільш перспективних для КМ видів волокон, які використовуються в Україні, Росії та закордоном, вважаються вуглецеві волокна [1, 3, 13, 15], що стимулює їх використання у наших дослідженнях.

Прикладом односпрямованого волокнистого матеріалу є стандартна вуглецева стрічка FibARM 200/300 ЗАТ "ХК «Композит»" [4]. Стрічка складається зі сукупності пасом волокон, що поєднанні між собою паралельно в матриці. У середньому кількість пасом на 10 см складає 35

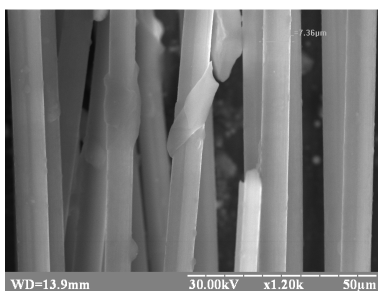


Рис. 2. Мікрофотографія вуглецевих волокон

штук. Кожне пасмо має приблизно 1000 волокон. На рис. 2 надана мікрофотографія пасма вуглецевих волокон, яка зроблена за допомогою електронного мікроскопу РЕММА-102-02 зі збільшенням у 1200 разів. Діаметр волокна у пасмі складає  $7,36$  мкм.

Загалом КМ є неоднорідним матеріалом. Однак, армовані волокнисті матеріали, через їхню регулярну структуру та наявність великої кількості волокон, можна

розглядати, слідуючи підходу В.В. Болотіна [9], як однорідне суцільне середовище. Цей підхід називають методом енергетичного згладжування.

Згідно з цим методом неоднорідний композитний матеріал замінюється еквівалентним однорідним тілом з так званими *ефективними* механічними характеристиками. Ефективні (макроскопічні) характеристики визначаються шляхом усереднення по об'єму відповідних мікроскопічних властивостей компонентів композиту. Питаннями визначення цих характеристик займається механіка композитних матеріалів. В останні роки визначенню пружних ефективних характеристик КМ присвячено багато робіт, у яких наводяться різної точності дані для оцінки пружних сталих матеріалу. Вибір тієї чи іншої методики розрахунку ефективних характеристик КМ залежить від точності кінцевого результату та його узгодженості з експериментальними даними.

**Постановка задачі та її вирішення.** У монографіях [19, 20] висвітлено питання розробки з єдиних методологічних позицій тривимірної теорії термопружності скінченноелементного методу розв'язування статичних задач геометрично нелінійного термопружного деформування, стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких пружних неоднорідних оболонок складної структури. На базі універсального ізопараметричного просторового скінченного елемента (СЕ) з полілінійними функціями форми та введеними додатковими змінними параметрами побудовано розрахункову модель методу скінчених елементів, що враховує одним СЕ за товщиною геометричні особливості конструктивних елементів (змінність товщини, зами та гранованість обшивки, ребра, накладки, виїмки, отвори) і неоднорідності матеріалу (вставки та багатошарову структуру) тонкої оболонки. Застосована моментна схема скінчених елементів. Досліджуються малі термопружні деформації. Задача геометрично нелінійного деформування сформульована в приростах. Зв'язок між компонентами тензорів деформацій і напружень для анізотропного матеріалу встановлений узагальненим законом Дюамеля–Неймана. Для моделювання термопружних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки застосовано підхід, що базується на структуруванні неоднорідностей матеріалу за товщиною та у плані оболонки за допомогою багатошарового просторового СЕ. Матеріали шарів представляються як однорідні анізотропні матеріали з заданими термопружними властивостями. Прийнято [21], що будь-які матеріали шарів, термопружні властивості яких задаються безпосередньо через відомі технічні сталі, відносяться до класу традиційних матеріалів. Ті матеріали, властивості яких визначаються через мікромеханічні характеристики їхніх компонентів, відносяться до класу композитних матеріалів.



У нашому випадку в скінченноелементній моделі тонкої пружної неоднорідної оболонки [21] під “ефективними фізико-механічними характеристиками композитного матеріалу” розуміються технічні сталі матеріалу шару КМ, які визначаються за розробленими в механіці композитів методиками. У зв'язку цим з'являється можливість моделювання фізико-механічних характеристик як одношарового, так і багатошарового композитного матеріалу. У рамках створеної моделі багатошаровий скінченний елемент можна використовувати як СЕ, що дозволяє моделювати матеріал оболонки різними типами традиційних і композитних матеріалів шарів [21]. У межах одного СЕ волокнистий матеріал природно приймається як односпрямований, тобто всі волокна прямі, паралельні та спрямовані в одному напрямку. В різних СЕ прямі волокна можуть мати різні напрямки. За рахунок цього можна моделювати криволінійну анізотропію матеріалу шару неоднорідної оболонки. Враховуючи, що визначення ефективних характеристик реалізується за структурними параметрами компонентів матеріалу, тому на цьому етапі розроблену методику можна розглядати власне як мікромеханічну модель.

Традиційним матеріалом шару у загальному випадку є ортотропний матеріал, параметрами якого виступають термпружні технічні сталі:  $E_1, E_2, E_3$  – модулі пружності при розтягу-стиску в напрямку відповідних координатних осей  $x^a$ ;  $G_{1'2}, G_{1'3}, G_{2'3}$  – модулі зсуву;  $\nu_{1'2}, \nu_{1'3}, \nu_{2'3}$  – коефіцієнти Пуассона;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – коефіцієнти термічного розширення [19, 20]. Розглядувані параметри з точки зору одношарового композитного матеріалу можна розуміти як “ефективні фізико-механічні характеристики”.  $x^a$  – система криволінійних триортонормованих координат, напрямки яких збігаються з головними напрямками ортотропії матеріалу.

Прикладом композитного матеріалу шару є односпрямований волокнистий матеріал, до мікромеханічних параметрів компонентів якого відносяться:  $E_f, E_m$  – модулі пружності матеріалу волокна та матриці;  $G_f, G_m$  – модулі зсуву матеріалу волокна та матриці;  $\nu_f, \nu_m$  – коефіцієнти Пуассона матеріалу волокна та матриці;  $d_f$  – діаметр волокон;  $h_0$  – товщина армованого шару;  $i_f$  – частота армування;  $\alpha_f, \alpha_m$  – коефіцієнти термічного розширення волокна та матриці.

Для визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композитного матеріалу в механіці композитних матеріалів існують різні мікромеханічні методики прогнозування

констант пружності волокнистих композитів [9, 17, 22 - 25]. В мікромеханічних методиках використовуються такі основні *гіпотези* [5]:

1) матриця та волокна вважаються жорстко зв'язаними між собою, вони деформуються спільно без проковзування;

2) кожний компонент КМ являє собою однорідний ізотропний матеріал;

3) волокна і матриця при деформування ведуть себе як лінійно-пружні матеріали;

4) справедлива гіпотеза про регуляризацію структури;

5) припускається, що напружений стан вздовж орієнтації волокон в кожному представницькому елементі матеріалу є однорідним.

На основі цих припущень матеріал в шарі СЕ вважається трансверсально-ізотропним. Ефективними пружними сталими для трансверсально-ізотропної моделі КМ є [19, 20]:

$E$ ,  $E'$  – модулі пружності для розтягу-стиску в площині ізотропії та в напрямку нормальному до неї (в напрямку волокон);

$\nu$ ,  $\nu'$  – коефіцієнти Пуассона, які характеризують скорочення в площині ізотропії при розтягу в цій площині та напрямку нормальному до неї;

$G = E/[2(1+\nu)]$  – модуль зсуву для площини ізотропії;

$G'$  – модуль зсуву для площин, які нормальні до площини ізотропії.

У системі триортонормованих координат  $x^{a''}$  для трансверсально-ізотропного КМ, у якого волокна направлені вздовж осі  $x^{2''}$ , а площина ізотропії проходить через осі  $x^{1''}$  та  $x^{3''}$ , маємо [19, 20]

$$\begin{aligned} E_{2''} = E_{3''} = E, \quad E_{1''} = E', \quad G_{2''3''} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad G_{1''2''} = G_{1''3''} = G', \\ \nu_{2''3''} = \nu_{3''2''} = \nu, \quad \nu_{1''2''} = \nu_{1''3''} = \nu', \quad \nu_{2''1''} = \nu_{3''1''} = \nu' \frac{E}{E'}, \\ \alpha_{1''} = \alpha', \quad \alpha_{2''} = \alpha_{3''} = \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Для другого варіанта односпрямованого волокнистого КМ, коли волокна направлені вздовж осі  $x^{2''}$ , а площина ізотропії проходить через осі  $x^{1''}$  та  $x^{3''}$ , можна необхідним чином задати термпружні сталі ортотропного матеріалу, як трансверсально-ізотропного

$$\begin{aligned} E_{1''} = E_{3''} = E, \quad E_{2''} = E', \quad G_{1''3''} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad G_{1''2''} = G_{2''3''} = G', \\ \nu_{1''3''} = \nu_{3''1''} = \nu, \quad \nu_{2''1''} = \nu_{2''3''} = \nu', \quad \nu_{1''2''} = \nu_{3''2''} = \nu' \frac{E}{E'}, \\ \alpha_{1''} = \alpha_{3''} = \alpha, \quad \alpha_{2''} = \alpha'. \end{aligned} \quad (2)$$

Для третього варіанта односпрямованого волокнистого КМ, коли волокна направлені вздовж осі  $x^{3''}$ , а площина ізотропії проходить через осі  $x^{1''}$  та  $x^{2''}$ , залежності набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} E_{1''} &= E_{2''} = E, & E_{3''} &= E', & G_{1''2''} &= \frac{E}{2(1+\nu)}, & G_{1''3''} &= G_{2''3''} = G', \\ \nu_{1''2''} &= \nu_{2''1''} = \nu, & \nu_{3''1''} &= \nu_{3''2''} = \nu', & \nu_{1''3''} &= \nu_{2''3''} = \nu' \frac{E}{E'}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\alpha_{1''} = \alpha_{2''} = \alpha, \quad \alpha_{3''} = \alpha'.$$

Розглянемо деякі найбільш відомі моделі деформування односпрямованого композита [5, 9, 17, 18, 22 - 25]. Прийняті вище позначення доповнимо параметром  $c_f$  – коефіцієнтом армування (або інтенсивності армування) композиту, що характеризує відносний об'ємний вміст волокон у матеріалі

$$c_f = \frac{V_f}{V} \cdot i_f, \quad (4)$$

де  $V$  – об'єм елементарної комірки КМ ( $V = h_0 \cdot b_0 \cdot l_0$ ),  $V_f$  – об'єм волокон ( $V_f = S_f \cdot l_0$ ),  $S_f$  – площа перерізу волокна,  $h_0$ ,  $b_0$ ,  $l_0$  – товщина, ширина, довжина армованої комірки,  $i_f$  – частота армування (кількість волокон на одиницю ширини перерізу елементарної комірки).

Таким чином, коефіцієнт  $c_f$  є відносним об'ємним вмістом волокон у комірці, який є безрозмірною величиною. Для волокон круглого перерізу з діаметром  $d_f$  коефіцієнт  $c_f$  обчислюється за формулою [9, 11]:

$$c_f = \frac{\pi d_f^2}{4 h_0} \cdot i_f. \quad (3')$$

Вміст волокон у матриці може змінюватися у досить широких межах. Теоретично максимальний вміст волокон може досягати 91% об'єму комірки. Однак у реальних умовах об'ємна частка волокон в 80% вже призводить до погіршення властивостей волокнистого композиту [16].

Максимально можлива концентрація циліндричних волокон  $c_{\max}$  визначається наявністю геометричних обмежень. Величина  $c_{\max}$  залежить від типу упаковки волокон і відповідає такому стану, коли волокна торкаються одне одного (рис. 3, а, б) [16]. Для тетрагональної упаковки (рис. 3, а)  $c_{\max} \approx 0,785$ ; для гексагональної (рис. 3, б) –  $c_{\max} \approx 0,907$  [15, 16]. Однак, у реальних КМ концентрація волокон менша

ніж  $c_{\max}$ , оскільки між волокнами завжди є прошарок матриці товщиною  $\delta_{\min}$  (рис. 3, з, д).

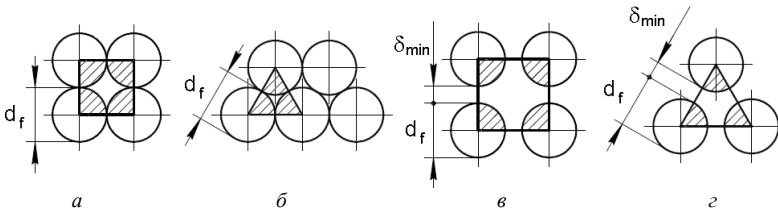


Рис. 3. Схеми упаковки односпрямованих волокон діаметром  $d_f$ : а – тетрагональна та б – гексагональна при безпосередньому контакті; в – тетрагональна та з – гексагональна з прошарками матриці  $\delta_{\min}$  [16]

Окрім того, при  $c_f > 0,70-0,75$  у більшості КМ виявляється схильність до утворення тріщин і розшарувань [16], тому ці значення вважаються верхньою межею для більшості матеріалів. При дуже малих значеннях  $c_f$  крихіткі волокна не можуть обмежити деформацію матриці та руйнуються. При цьому матриця ще має запас міцності та сприймає навантаження. У цьому випадку міцність КМ нижча за міцність неармованої матриці, оскільки наявність волокна рівнозначна введенню в матрицю ниткоподібних пор.

**Модель Е. Рейсса і В. Фойгта** [5, 9, 18, 22, 23, 26]. Для найпростішої моделі композиту – системи жорстко пов'язаних ізотропних стержнів, які рівномірно розташовані в ізотропній матриці – Фойгт запропонував обчислювати параметри КМ шляхом усереднення відповідних параметрів компонентів за об'ємом і за орієнтацією. Пізніше Рейсс запропонував усереднювати компоненти зворотного тензора. Розроблена модель КМ отримала назву *правило суміші* або модель Рейсса–Фойгта

$$E' = E_f c_f + E_m (1 - c_f), \quad \nu' = \nu_f c_f + \nu_m (1 - c_f),$$

$$G' = \frac{\chi_m + c_f + (1 - c_f) g}{(1 - c_f) \chi_m + (1 + c_f \chi_m) g} G_m,$$

$$E = \frac{E_f E_m}{E_m c_f + E_f (1 - c_f)}, \quad G = \frac{G_f G_m}{G_m c_f + G_f (1 - c_f)}, \quad (4)$$

$$\alpha' = c_f \alpha_f + (1 - c_f) \alpha_m, \quad \alpha = \frac{c_f \alpha_f E_f + (1 - c_f) \alpha_m E_m}{c_f E_f + (1 - c_f) E_m},$$

де  $\chi_f = 3 - 4\nu_f$ ,  $\chi_m = 3 - 4\nu_m$ ,  $g = G_m / G_f$ .

**Модель Р. Хілла** [3, 23]. За цією моделлю композит складається із волокна, яке знаходиться в коаксіальному циліндрі – матриці (модель коаксіальних циліндрів)

$$E' = E_f c_f + E_m (1 - c_f) + \frac{2c(v_f - v_m)^2 (1 - v_f) E_f E_m}{E_m c_f L_f + [L_m (1 - c_f) + (1 - v_m)] E_f},$$

$$v' = v_m - \frac{2 \cdot (v_m - v_f) \cdot (1 - v_m^2) \cdot E_f \cdot c_f}{E_m \cdot (1 - c_f) \cdot L_f + [L_m \cdot c_f + (1 + v_m)] \cdot E_f},$$

$$G' = G_m \frac{(1 - c_f) G_m + (1 + c_f) G_f}{(1 + c_f) G_m + (1 - c_f) G_f}, \quad E = \frac{2K(1 - v') \cdot E'}{E' + 4Kv'^2}, \quad (5)$$

де

$$L_m = 1 - v_m - 2v_m^2, \quad L_f = 1 - v_f - 2v_f^2,$$

$$K = \frac{(K_f + G_m) K_m + (K_f - K_m) c_f G_m}{K_f + G_m - c_f (K_f - K_m)}, \quad K_f = \frac{E_f}{3(1 - 2v_f)}, \quad K_m = \frac{E_m}{3(1 - 2v_m)}.$$

Тут  $K$  – модуль об'ємного стиснення, що відповідає дилатації в площині, яка є перпендикулярною до напрямку волокна;  $K_f$  і  $K_m$  – об'ємні модулі волокна і матриці. Зазначимо, що за цим підходом важко визначити модуль зсуву в площині ізотропії [5].

**Модель О.А. Кільчинського, З. Хашіна і Б. Розена** [5, 18, 23, 24]. КМ розглядається як волокно у вигляді циліндра, яке поміщено в циліндричну оболонку – матрицю, яка в свою чергу знаходиться в необмеженому середовищі з пружними параметрами, що дорівнюють ефективним параметрам композита. Цю модель прийнято називати моделлю Кільчинського-Хашіна-Розена

$$E' = E_f c_f + E_m (1 - c_f) + \frac{4c_f (1 - c_f) (v_f - v_m)^2}{\frac{(1 - c_f)}{K_f} + \frac{c_f}{K_m} + \frac{1}{G_m}},$$

$$v' = c_f v_f + (1 - c_f) v_m + \frac{c_f (1 - c_f) (v_f - v_m) (1/K_m - 1/K_f)}{(1 - c_f)/K_f + c_f/K_m + 1/G_m}, \quad (6)$$

$$G' = G_m \cdot \frac{(\eta + \delta_m c_f) \cdot (1 + \rho c_f^3) - 3c_f \cdot (1 - c_f)^2 \delta_m^2}{(\eta - c_f) \cdot (1 + \rho c_f^3) - 3c \cdot (1 - c_f)^2 \delta_m^2},$$

$$\gamma = \frac{G_f}{G_m}, \quad \delta_f = \frac{1}{3 - 4v_f}, \quad \delta_m = \frac{1}{3 - 4v_m}, \quad \eta = \frac{\gamma + \delta_m}{\gamma - 1}, \quad \rho = \frac{\delta_m - \gamma \delta_f}{1 + \gamma \delta_f},$$

$$E = \frac{4 \cdot K \cdot G}{K + G \left[ 1 + \frac{4 \cdot K \cdot (v')^2}{E'} \right]}, \quad G = G_m \frac{(1 - c_f) G_m + (1 + c_f) G_f}{(1 + c_f) G_m + (1 - c_f) G_f}.$$

**Підхід Д.С. Аболінша** [18, 25]. Аболінша доповнив передумови моделі Кільчинського-Хашіна-Розена двома додатковими передумовами, в результаті отримавши залежності

$$E' = E_f c_f + E_m (1 - c_f), \quad v' = v_f c_f + v_m (1 - c_f), \quad G' = \frac{G_f / G_m}{c_f + \frac{G_f}{G_m} (1 - c_f)} \cdot G_m, \quad (7)$$

$$E = \frac{E_f}{E_m} E' \left( \left( c_f + \frac{E_f}{E_m} (1 - c_f) \right) \left( \frac{E_f}{E_m} c_f + (1 - c_f) \right) - c_f (1 - c_f) \left( \frac{E_f}{E_m} v_m - v_f \right)^2 \right),$$

$$G = G_m \frac{(1 - c_f) G_m + (1 + c_f) G_f}{(1 + c_f) G_m + (1 - c_f) G_f}.$$

**Модель Г.А. Ваніна** [5, 9, 17, 23]. Для визначення ефективних механічних характеристик односпрямованих композитів Ванін застосував теорію еліптичних функцій Вейерштрасса і спеціальні мероморфні функції. Г.М. Савін, Л.А. Фільштинський та інші також використовували двоперіодичні функції для дослідження волокнистих КМ.

$$E' = E_f c_f + E_m (1 - c_f) + \frac{8 c_f (1 - c_f) (v_f - v_m)^2 G_m}{2 - c_f + c_f (3 - 4 v_m) + (1 - c_f) (2 - 4 v_f) g},$$

$$v' = v_m - \frac{(\chi_m + 1) (v_m - v_f) c_f}{2 - c_f + \chi_m c_f + (1 - c_f) (\chi_f - 1) g}, \quad (8)$$

$$G' = \frac{\chi_m + c_f + (1 - c_f) g}{(1 - c_f) \chi_m + (1 + c_f) \chi_m} G_m,$$

$$\frac{1}{E} = \frac{(v')^2}{E'} + \frac{1}{4 G_m} \left\{ \frac{\chi_m + g}{\chi_m + 4 c_f \cdot (1 - v_m) + [1 - 4 c_f \cdot (1 - v_m)] g} + \frac{(1 - c_f) \cdot (1 - 2 \cdot v_m) + (1 - 2 \cdot v_f) \cdot g}{[1 + c_f \cdot (1 - 2 \cdot v_m)] + (1 - 2 \cdot v_f) \cdot (1 - c_f) \cdot g} \right\},$$

$$G = G_m \frac{(1 - c_f) G_m + (1 + c_f) G_f}{(1 + c_f) G_m + (1 - c_f) G_f}.$$

Аналізу та порівнянню мікромеханічних методик прогнозування ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого КМ

присвячено низку робіт [5, 18, 26, 27 та ін.]. Проведені розрахунки дають підставу зробити висновки, що для оціночних розрахунків можна застосовувати модель Рейсса–Фойгта (4). Поздовжні пружні характеристики, що розраховані різними методами, як правило, характеризуються незначними відхиленнями значень, на відміну від поперечних, де різниця може бути великою. У роботі [5], аналізуючи похибки при використанні кожної з моделей, відмічено, що модель Ваніна (8) показує кращу кореляцію розрахункових і експериментальних даних. Однак, наявність великої кількості моделей КМ та значний розкид експериментальних даних ускладнює вибір тієї чи іншої з них, яку б загалом можна було вважати найкращою.

У табл. на прикладі полімерного вуглепластика наведено чисельне порівняння між собою ефективних характеристик односпрямованого волокнистого КМ, що обчислені за розглянутими методиками для різного вмісту волокон  $c_f = 0.35, 0.55, 0.78$ . Вихідні дані [5]: епоксидна матриця ЭД-20  $E_m = 3,5 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_m = 0.32$ ; вуглецеві волокна ЛУ-3  $E_f = 250 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_f = 0,3$ . Оціночні порівняння отриманих ефективних характеристик виконані з відповідними розрахунками за моделлю (4). При  $c_f = 0.55$  спостерігається задовільна для даного матеріалу відповідність розрахункових і експериментально визначених ефективних характеристик.

Таблиця

Ефектив. сталі	$c_f$	Експерим. дані [5]	(4) «Р–Ф»	(5) «Х»	(6) «К–Ч–Р»	(7) «А»	(8) «В»
1	2	3	4	5	6	7	8
$E', \text{ ГПа}$	0.35	–	89,775	89,776 (0,001%)	89,775 (0%)	89,775 (0%)	89,775 (0%)
	0.55	154,1±7,3 (-11±-16%)	139,08	139,08 (0%)	139,08 (0%)	139,08 (0%)	139,08 (0%)
	0.78	–	195,77	195,77 (0%)	195,77 (0%)	195,77 (0%)	195,77 (0%)
1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu'$	0.35	–	0,313	0,312 (-0,32%)	0,311 (-0,64%)	0,312 (-0,32%)	0,312 (-0,32%)
	0.55	0,310±0,03 (0,32±1,29%)	0,309	0,308 (-0,32%)	0,307 (-0,65%)	0,307 (-0,65%)	0,307 (-0,65%)
	0.78	–	0,304	0,303 (-0,33%)	0,303 (-0,33%)	0,303 (-0,33%)	0,303 (-0,33%)
$G', \text{ ГПа}$	0.35	–	2,025	2,811 (38,81%)	2,695 (33,09%)	2,695 (33,09%)	2,695 (33,09%)
	0.55	4,4±0,3 (51,9±62,2%)	2,897	4,649 (60,48%)	4,377 (51,09%)	4,377 (51,09%)	4,377 (51,09%)
	0.78	–	5,745	10,895 (89,64%)	9,666 (68,3%)	9,666 (68,3%)	9,666 (68,3%)

1	2	3	4	5	6	7	8
$E, ГПа$	0.35	–	5,344	7,552 (41,32%)	7,324 (37,05%)	5,915 (10,68%)	6,129 (14,69%)
	0.55	9,2±0,2 (20,3±22,9%)	7,647	11,584 (51,48%)	12,103 (58,27%)	8,468 (10,74%)	7,762 (1,50%)
	0.78	–	15,157	24,18 (59,53%)	26,707 (76,20%)	16,741 (10,45%)	10,149 (-33,0%)
$G, ГПа$	0.35	–	2,417	–	2,749 (13,74%)	2,025 (-16,22%)	2,417 (0%)
	0.55	–	3,768	–	4,741 (25,82%)	2,897 (-23,12%)	3,768 (0%)
	0.78	–	8,080	–	10,851 (34,29%)	5,745 (-28,90%)	8,080 (0%)

Видно, що поздовжні пружні сталі, розраховані різними методами, мають незначні відхилення значень у межах 0,001-0,65%. Для поперечних різниця може досягати 10,45-76,20%.

**Результати розрахунку та аналіз розв'язків.** Застосування в розробленій методиці [19, 20] методів прогнозування ефективних пружних характеристик (мікромеханічних методик) вимагає проведення спеціальних досліджень по обґрунтуванню достовірності та точності отримуваних розв'язків. У роботі виконано порівняльний аналіз результатів розрахунку неоднорідних пластин за моментною схемою скінченних елементів (МССЕ) та з використанням програмного комплексу (ПК) NASTRAN [28, 29].

Наведено результати численних досліджень збіжності та точності розв'язків лінійних задач статички згину тонких композитних пластинок. Розглянуто одно-, дво-, три- та чотиришарові пластинки, що виготовлені з волокнистого односпрямованого КМ з перехресною схемою армування. Шари багат шарової пластинки однакової товщини. Квадратні, жорстко затиснуті по контуру пластинки, навантажені рівномірним нормальним тиском інтенсивністю  $q$ . За розрахунковий фрагмент прийнято чверть пластини (рис. 4), вісь  $x^{1'}$  направлена за товщиною. Взяті такі вихідні дані:  $a = 2 \text{ см}$ ,  $h = 0.01 \text{ см}$ ,  $q = 1 \text{ кг/см}^2$ ; матеріал – полімерний

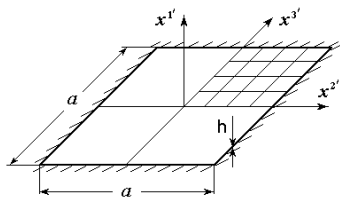


Рис. 4

вуглепластик з описаними вище мікромеханічними характеристиками.

Розв'язки за МССЕ і ПК NASTRAN швидко збігаються. Дослідження їхньої збіжності показало практичний збіг результатів для сіток  $8 \times 8$  СЕ та  $12 \times 12$  СЕ. За розрахункову для чверті пластини прийнято сітку  $8 \times 8$  СЕ. Для



розв'язування задач визначення НДС тонких пластин в ПК NASTRAN [28, 29] застосовуються плоскі чотири-вузлові CE Plate, які можуть мати різну товщину та багатошарові CE Laminate, які подібні до Plate, але складаються з декількох шарів.

1. *Одношарова композитна пластинка*, для якої волокна направлені вздовж осі  $x^2$ . Порівняння результатів розрахунку за MCCE і NASTRAN для форм деформування (рис. 5) та напружень (рис. 6) виконано вздовж середніх діагоналей пластини (вздовж осі  $x^2$  та осі  $x^3$ ). Напруження  $\sigma^{22}$  на рисунках приведені в центрі відповідних CE. Для кожної з чотирьох мікромеханічних моделей прогнозування пружних характеристик порівнювались розв'язки для трьох значень коефіцієнту  $c_f = 0.35, 0.55, 0.78$ . Отримано повний збіг розв'язків, що підтверджує достовірність і точність розрахунків за MCCE.

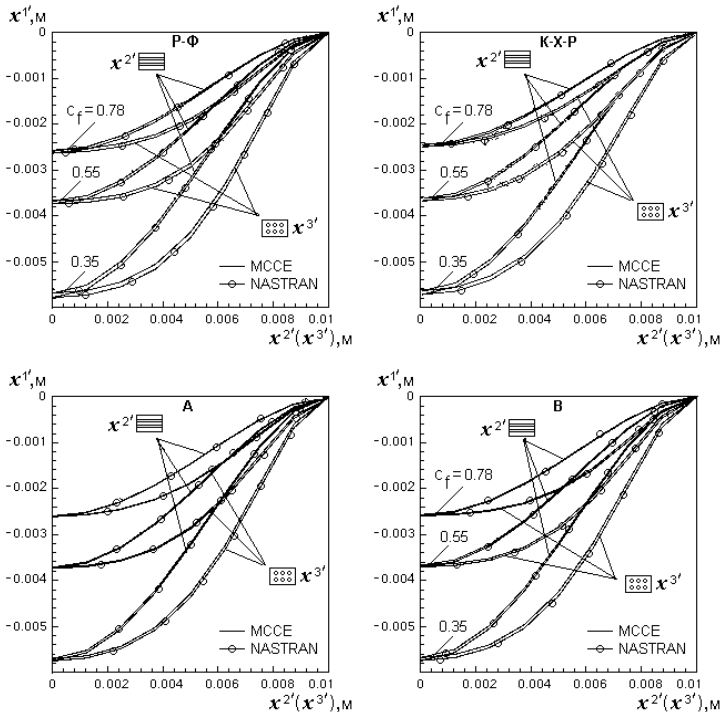


Рис. 5. Порівняння форм деформування одношарової пластинки вздовж напрямку волокон ( $x^2$ ) та в поперечному напрямку ( $x^3$ ) для чотирьох мікромеханічних моделей прогнозування

Оцінка впливу на напружено-деформований стан (НДС) пластинки використання різних мікромеханічних моделей виконана за МССЕ для трьох значень коефіцієнта відносного об'ємного вмісту волокон  $c_f$  (рис. 7, 8). Можна констатувати, що при низькій  $c_f=0.35$  та середній  $c_f=0.55$  концентрації волокон використання типу моделі (4), (6)-(8) практично не впливає на розв'язки. При високій частці волокон  $c_f=0.78$  спостерігається незначна розбіжність розв'язків, найбільше це проявляється для моделі Кільчинського-Хашіна-Розена. Незначний вплив використовуваних моделей КМ на НДС одношарової пластинки можна мабуть пояснити однорідною за товщиною структурою матеріалу. Розбіг розв'язків вздовж осі  $x^3$  пояснюється наявністю великої різниці у визначенні величин поперечних ефективних характеристик.

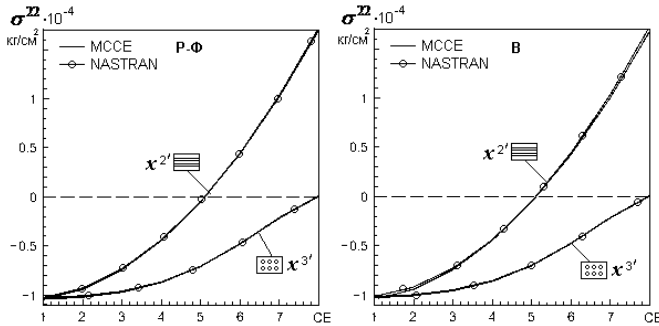


Рис. 6. Порівняння розподілу напружень  $\sigma^{22}$  в одношаровій пластинці вздовж напрямку волокон ( $x^{2'}$ ) та в поперечному напрямку ( $x^{3'}$ )

Оцінка впливу на напружено-деформований стан (НДС) пластинки використання різних мікромеханічних моделей виконана за МССЕ для трьох значень коефіцієнта відносного об'ємного вмісту волокон  $c_f$  (рис. 7, 8). Можна констатувати, що при низькій  $c_f=0.35$  та середній  $c_f=0.55$  концентрації волокон використання типу моделі (4), (6)-(8) практично не впливає на розв'язки. При високій частці волокон  $c_f=0.78$  спостерігається незначна розбіжність розв'язків, найбільше це проявляється для моделі Кільчинського-Хашіна-Розена. Незначний вплив використовуваних моделей КМ на НДС одношарової пластинки можна мабуть пояснити однорідною за товщиною структурою матеріалу. Розбіг

розв'язків вздовж осі  $x^3$  пояснюється наявністю великої різниці у визначенні величин поперечних ефективних характеристик.

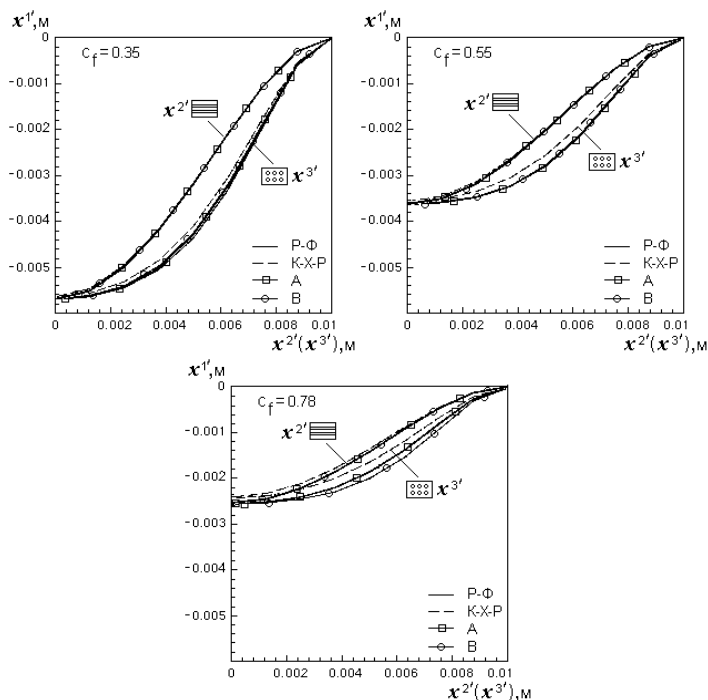


Рис. 7. Форми деформування одношарової пластинки для різного вмісту волокон при використанні чотирьох мікромеханічних методик прогнозування пружних сталей

2. *Двошарова композитна пластинка*, для якої волокна в шарах направлені перехресно: у першому шарі армування є вздовж осі  $x^2$ , у другому – вздовж осі  $x^3$ . Дослідження проведені при  $c_f = 0.55$ . Порівняння результатів розрахунку за MCCE і NASTRAN показало їх повний збіг. Характер збігу розв'язків такий самий, як для одношарової пластинки (рис. 5, 6).

На рис. 9 наведені результати розрахунків за MCCE, які дозволили проаналізувати вплив використання різних методик прогнозування ефективних сталей на форму деформування двошарової пластинки. Як і очікувалось, оскільки напрямки армування в шарах рівноправні, тому деформування за осями  $x^2$  та  $x^3$  у всіх випадках є однаковим. Використання моделі Кільчинського-Хашіна-Розена підвищує жорсткість

пластинки, а використання моделі Рейсса–Фойгта зменшує її жорсткість. Моделі Аболінша та Ваніна є проміжними. Відчутний вплив на НДС двохшарової пластинки від використання моделі КМ можна мабуть пояснити значними відхиленнями для них величин поперечних ефективних фізико-механічних характеристик, що проявилось при істотній неоднорідності матеріалу за товщиною пластинки.

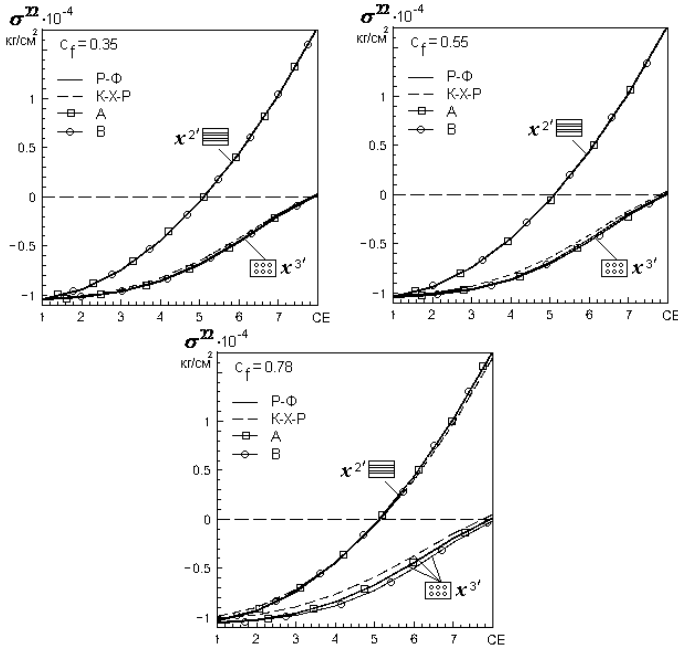


Рис. 8. Розподілу напружень  $\sigma^{22}$  в одношаровій пластинці для різного вмісту волокон при використанні чотирьох мікромеханічних методик прогнозування пружних сталей

3. *Тришарова композитна пластина*, для якої волокна в шарах направлені перехресно: у першому та третьому шарі – вздовж осі  $x^{2'}$ , у другому – вздовж осі  $x^{3'}$ . Дослідження проведені при  $c_f=0.55$ . Маємо повний збіг розв’язків отриманих за MCCE і NASTRAN.

Для тришарової пластинки використання методик прогнозування ефективних характеристик практично не впливає на розв’язки – форми деформування збігаються (рис. 10). Як у випадку одношарової пластинки, для моделі Кільчинського-Хашіна-Розена спостерігається незначне

відхилення форми деформування в поперечному напрямку від форми, що отримана при використанні інших моделей.

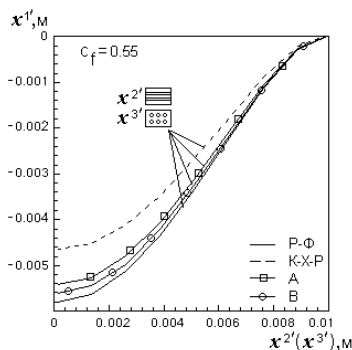


Рис. 9. Форми деформування двохшарової пластинки

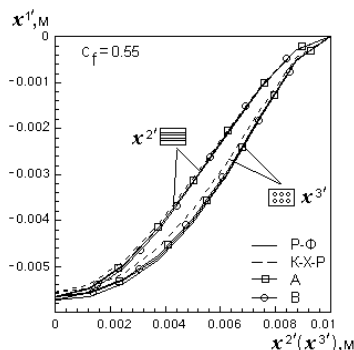


Рис. 10. Форми деформування тришарової пластинки

4. Чотиришарова композитна пластина, для якої волокна в шарах направлені перехресно: у першому та третьому шарі – вздовж осі  $x^2$ , у другому та четвертому – вздовж осі  $x^3$ . Дослідження проведені при  $c_f=0.55$ . Маємо повний збіг розв'язків отриманих за MCCE і NASTRAN.

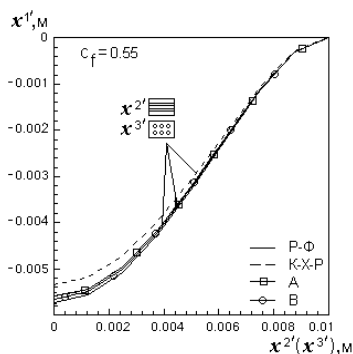


Рис.11. Форми деформування чотиришарової пластинки

Зіставлення форм деформування (рис. 11), що отримані при використанні різних мікромеханічних методик прогнозування ефективних характеристик КМ, дало практично повний збіг форм, за винятком моделі Кільчинського-Хашіна-Розена, яка для всіх розглянутих багатошарових пластинок підвищує їхню жорсткість.

## Висновки

Розроблену в [19, 20] методику поширено на задачі дослідження тонких неоднорідних оболонок, шари яких виконані з композитного матеріалу волокнистої структури. У рамках створеної моделі багатошаровий скінченний елемент можна використовувати як СЕ, що дозволяє моделювати матеріал оболонки різними типами традиційних і композитних матеріалів шарів. Визначення ефективних характеристик

реалізується за структурними параметрами компонентів матеріалу на основі відомих мікромеханічних моделей прогнозування фізико-механічних сталей.

Наведено результати численних досліджень збіжності та точності розв'язків лінійних задач статички згину тонких одно-, дво-, три- та чотиришарових композитних пластинок. Наступним етапом роботи є розв'язання задач нелінійного деформування та стійкості неоднорідних пружних оболонок з композитного матеріалу.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Добриденко О.М., Скляр О.І., Турчин В.М., Белінська Р.Б.* Аналіз існуючих композитних матеріалів та оцінка їх застосування у конструкціях планерів літальних апаратів військової авіації України // Зб. наук. праць Державного науково-дослідного інституту авіації, 2012. – Вип. №15. – С. 147-152.
2. *Бондарь В.Г., Бычков С.А., Король В.Н.* Решение проблемы создания авиаконструкций из полимерных композиционных материалов на АНТК "Антонов" // Авиационно-космическая техника и технология: научно-техн. журнал. Вип. 8(43). Нац. аэрокосмич. ун-т им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Харьков: ХАИ, 2003. – С. 5-13.
3. *Гайдачук А.В.* Предпосылки для полного цикла производства углерод-углеродных композиционных материалов в Украине / А.В. Гайдачук, А.В. Чесноков, И.В. Гурин, А.М. Потапов // Авиационно-космическая техника и технология, 2013. – № 2 (99). – С. 4-13.
4. ЗАО "ХК Композит" [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.compozit.su>. – 5.12.2012.
5. *Кучер М.К.* Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів / М.М. Заразовский, Кучер М.К. // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія Машинобудування. – 2010. – №58. – С.24 – 29.
6. Углеродные волокна и углекомпозиты: Пер. с англ. / Под ред. Э.Фитцера. – М.: Мир, 1988. – 336 с.
7. *Мелешко А.И., Половников С.П.* Углерод. Углеродные волокна. Углеродные композиты. – М.: Сайнс-пресс, 2007. – 192 с.
8. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1984. - 264 с.
9. *Болотин В.В., Новичков Ю.И.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
10. *Андреев А.Н., Немировский Ю.В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
11. *Нарусберг В.Л., Тетерс Г.А.* Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. – Рига: Зинатне, 1988. – 299 с.
12. Композиционные материалы. В 8-ми т. / Т. 3. Применение композиционных материалов в технике / Под ред. Б. Нотона. – М.: Мир, 1978. – 511 с.
13. *Кондратенко А.Н.* Полимерные композиционные материалы в изделиях зарубежной ракетно-космической техники (Обзор) / А.Н. Кондратенко, Т.А. Голубкова // Конструкции из композиционных материалов. – 2009. – № 2. – С. 24-35.
14. Композитные материалы: Справочник / *Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В.* и др.; Под общей ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнапольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

15. Новые материалы / Колл. авторов. Под научной редакцией Ю.С. Карбасова. – М.: МИСИС, 2002. – 736 с.
16. Юскаев В.Б. Композиційні матеріали: Навчальний посібник. – Суми: Видавництво СумДУ, 2006. – 199 с.
17. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971 – 304 с.
18. Гоменюк С.И. Применение различных теорий определения упругих характеристик композиционного материала при расчете конструкций / С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, В.Е. Ольшевский, А.С. Лавренко // Вестн. двигателестроения. - 2009. - № 2. - С. 139-142.
19. Баженев В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
20. Баженев В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
21. Соловей М.О., Кривенко О.П., Мищенко О.О., Калашиников О.Б. Врахування характеристик композитного матеріалу в скінченноелементній моделі неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. - С. 172-180.
22. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир. – 1982. – 334 с.
23. Композиционные материалы. В 8-ми т./Под ред. Л.Браутмана и Р.Крока./Т. 2. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж.Сендецкого. – М.: Мир, 1978. – 568 с.
24. Кильчинский А.А. Об одной модели для определения термоупругих характеристик материалов, армированных волокнами // Прикл. механика, 1965. – Т.12, №1 – С. 65-75.
25. Аболиньш Д.С. Тензор податливости однонаправлено армированного упругого материала / Д.С.Аболиньш // Механика полимеров, 1965. – №4. – С. 52-59.
26. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса, АН УССР. Ин-т проблем материаловедения. – К: Наукова думка, 1985. – 592 с.
27. Яковенко О.О. Аналіз окремих методів визначення ефективних характеристик композиційних матеріалів // Вісн. Полтав. держ. аграр. акад., 2006. – № 4. – С. 96-99.
28. Рычков С.П. MSC.visualNASTRAN для Windows – М.:ИТ Пресс, 2004. – 552 с.
29. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows – М.:ДМК Пресс, 2003. – 448 с.

## REFERENCES

1. Dobrydenko A.M., Sklar A.I., Turchin V.M., Belinsky R.B. Analysis of existing composite materials and evaluation of their use in the construction of glider aircraft air force Ukraine // Coll. sciences. papers of the State Research Institute of Aviation, 2012. - Vol. Number 15. - P. 147-152.
2. Bondar V.G., Bychkov S.A., Korol V.N. Solving the problem of creating aviakonstruktsy polymer composites ASTC "Antonov" // Aerospace and Technology Scientific and Technical . magazine. Vip . 8 (43). Nat. Aerospace. Univ. NE Zhukovsky" HAI". - Kharkov: HAI, 2003. - P.5-13.
3. Gaydachuk A.V. Prerequisites for the complete cycle of production of carbon-carbon composite materials in Ukraine / A.V. Gaydachuk, A.V. Chesnokov, I.V. Gurin, A.M. Potapov // Aerospace Engineering and Technology, 2013. - № 2 (99). - P. 4-13.
4. JSC "Holding Composite" [electronic resource]. - Mode of access : <http://www.compozit.su>. - 05.12.2012.
5. Kucher M.K. Evaluation of micromechanical models predict effective elastic constants of fiber composites / M.M. Zarazovskyy, N.K. Kucher // Proceedings of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute". Line Engineering. - 2010. - № 58. - P.24 - 29.

6. Carbon fiber and uglekompozity: Per. from English. / Ed. E.Fittsera. - New York: Wiley, 1988. - 336.
7. *Myaleshka A.I., Polovnikov S.P.* Carbon. Carbon fiber. Carbon composites. - M. Sainz Press, 2007. - 192.
8. *Alfjotov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G.* Sheet of laminated plates and shells made of composite materials. - M.: Mechanical Engineering, 1984. - 264.
9. *Bolotin V.V., Beginners Y.I.* Mechanics of multilayer structures . - M.: Mechanical Engineering, 1980. - 375.
10. *Andreev A.N., Nemirovsky Y.V.* Multilayered anisotropic shells and plates: Bending, stability, oscillation. - Novosibirsk: Nauka, 2001. - 288.
11. *Narusberg V.L., Teterev G.A.* Stability and optimization of composite membranes. - Riga Zinatne, 1988. - 299 p.
12. Composites. In 8-t / T.3. Use of composite materials in engineering / Ed. B. Naughton. - New York: Wiley, 1978. - 511.
13. *Kondratenko A.N.* Polymer composite materials in products overseas rocket and space technology (Review) / A.N. Kondratenko, T.A. Golubkova // composite structures. - 2009. - № 2. - P. 24-35.
14. Composite Materials Handbook / V.V. Vasiliev, V.D. Protasov, V.V. Bolotin etc.; Under the general editorship. V.V. Vasiliev, Y.M. Tarnapolskogo. - M.: Mechanical Engineering, 1990. - 512 p.
15. New materials / Coll. authors. Under the editorship of Y.S. Karabasova. - M.: MISA, 2002. - 736 p.
16. *Yuskayev V.B.* Composite materials: Textbook. - Amounts: SSU Publishing, 2006. - 199 p.
17. *Vanin G.A.* Micromechanics of composite materials. - Kiev: Naukova Dumka, 1971 - 304 p.
18. *Homenyuk S.I.* Application of various theories of elastic characteristics of the composite material in the calculation of structures / S.I. Homenyuk, S.N. Grebenuk, V.E. Olshanetsky, A.S. Lavrenko // Vestn. engine. - 2009. - № 2. - P. 139-142.
19. *Bazhenov V. A., Krivenko O. P., Solovei N. A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure [in Ukraine] – ZAT «Vipol», (Kyiv), 2010. – 316 p.
20. *Bazhenov V. A., Krivenko O. P., Solovei N. A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure: Models, Methods, Algorithms, Poorly Studied and New Problems [in Russian]. – Book House "LIBRIKOM" (Moscow), 2013. – 336 p.
21. *Solovei N. A., Krivenko O. P., Mishchenko O.A., Kalashnikov A.B.* Taking into account the characteristics of the composite material in skinchennoelementniy model heterogeneous membrane // Strength of materials and theory of structures. - K.: KNUBA, 2012. - Vol. 89 - P. 172-180.
22. *R. Christensen,* Mechanics of Composite Materials. - New York: Wiley. - 1982. - 334.
23. Composites. In 8-t / Ed. L. Brautmana and R. Kroka. / T. 2. Mechanics of Composite Materials / Ed. Dzh.Sendetski. - New York: Wiley, 1978. – 568.
24. *Kilchinsky A.A.* On a model for determining the thermoelastic properties of materials reinforced with fibers // J. Appl. Mechanics, 1965. - v.12 , № 1 - P. 65-75.
25. *Abolinsh D.S.* Compliance tensor unidirectionally reinforced elastic material / D.S.Abolinsh // Mechanics of Polymers, 1965. - № 4. - P. 52-59.
26. Composite Materials Handbook / Ed. *D.M. Karpinos*, Ukrainian Academy of Sciences. Inst of Materials. - By : Naukova Dumka, 1985. - 592 p.
27. *Yakovenko O.O.* Analysis of some methods for determining the effective characteristics of composite materials // Bulletin. Poltava. state. agrarian. Acad., 2006. - № 4. – P. 96-99.
28. *Rychkov S.P.* MSC.visual NASTRAN for Windows – M.: NT Press, 2004. – 552 p.
29. *Shimkovich D.G.* Calculation konstruktivnyy in MSC / NASTRAN for Windows - M.: DMK Press, 2003. - 448.

Стаття надійшла до редакції 09.12.2013 р.



*Соловей Н.А., Кривенко О.П., Мищенко О.А.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА**

Рассмотрены известные методики прогнозирования упругих постоянных для модели композитного материала, армированного однонаправленными волокнами, по микромеханическим параметрам его составляющих. Предложена методика учета полученных эффективных характеристик для этого типа композитного материала в слоях разработанного многослойного конечного элемента тонкой неоднородной оболочки.

**Ключевые слова:** тонкая упругая оболочка, многослойный конечный элемент, композитный материал, микромеханические параметры.

*Solovei N.A., Krivenko O.P., Mishchenko O.A.*

**DETERMINATION OF THE EFFECTIVE PHYSICOMECHANICAL  
CHARACTERISTICS OF UNIDIRECTIONAL FIBER COMPOSITE MATERIAL**

The known technique of forecasting the elastic constants for the model composite material reinforced with unidirectional fibers by micromechanical parameters of its components is considered. The method of effective characteristics accounting for this type of composite material in layers of the developed the multilayer finite element of an inhomogeneous thin shell is proposed.

**Key words:** thin elastic shell, multilayer finite element, composite material, micromechanical parameters.

UDC 539.3, 539.4

**V.A. Bazhenov**<sup>1</sup>, Doctor of Sciences**O.I. Gulyar**<sup>1</sup>, Doctor of Sciences**S.O. Pyskunov**<sup>1</sup>, Doctor of Sciences

<sup>1</sup>*Kyiv National University of Construction and Architecture  
31 Povitroflotsky Avenue, Kyiv, Ukraine. 03680*

## AN ESTIMATION OF RESIDUAL LIFETIME OF SPATIAL STRUCTURAL ELEMENTS UNDER CONTINUAL FRACTURE CONDITION

The techniques of modeling of continual fracture process for space circular and prismatic bodies under prolonged load condition and some results of determining of the estimated lifetime (up to local loss of material bearing capacity) and the residual (additional) lifetime (time of continual fracture zone growth) is presented in this paper. The Kachanov-Rabotnov's scalar damage parameter to describe the continual fracture of the material and the semianalytic finite element method (SFEM) as numerical method of boundary problem solution is used. It's shown, that the value of residual lifetime could be differ significantly for different loading condition and object configuration.

**Key words:** creep, cyclic loading, damage, continual fracture, lifetime, spatial problem, semianalytic finite element method (SFEM).

**Introduction.** Structural elements of responsible objects function often under long-term static or cyclic force loading. The process of creep or fatigue, accompanied by the gradual accumulation of scattered damage, the formation and growth of macroscopic defects (fracture zones) under these conditions there are occurs. Its consideration is necessary for a reliable analysis of long-term strength and lifetime estimation.

A description of this processes, which took the name «continual fracture» based on widely known concept of continual damage accumulation process, which set out the works of V.Bolotin, L. Kachanov and Yu. Rabotnov and used phenomenological damage parameter. It is developed and implemented for different loading conditions in the publication of M.Bobyr, V.Golub, G.Lvov, Yu.Shevchenko [1-4] and in other publication of Ukrainian and many foreign scientists. However, as noted in [5], the one is actual problem is the determining the residual lifetime - time of fracture zone growth after the local loss of the material bearing capacity because of reaching the damage parameter critical values. Solving this problem in the spatial stating have not reflected enough in scientific publications. On the other hand, such as highlighted in [6], the residual lifetime value can various significantly for different objects and may be up to half of the total time of structure element operation.

The purpose of this paper is to highlight the main provisions of the developed technique for modelling of continual fracture zone growth of spatial bodies and presentation of the results of residual lifetime determination for critical structural elements under different loading conditions.

**1. Semianalytic finite element method (SFEM).** The solution of evolutionary problems of spatial bodies deformation process requires significant computational cost and special algorithms for damaged accumulation process and fracture zones growth simulation. It is not always possible to solve these problems using modern powerful finite element software systems (ANSYS, ABAQUS, etc.).

The semianalytic finite element method (SFEM) is an effective instrument for finite element modeling of stress-strain state and deformation process of canonical form spatial bodies - inhomogeneous circle and prismatic bodies. Being based SFEM, a discrete calculation model suggests the finite element mesh in the cross section of the examined object, and one finite element (FE) to be used in the orthogonal towards the cross sectional plane (along the forming, i.e.  $z^3$  coordinates), thus the FE size in the  $z^3$  direction is the same as the body one. The term "inhomogeneous" is used in the sense of the variability of the physical, mechanical properties and geometrical dimensions of the body along the forming. SFEM can significantly reduce the computational expenses for solving the problem, particularly on the stages of stiffness matrix calculating and FEM linear equations systems solving. The efficiency and accuracy of the method is shown for a wide range of linear and nonlinear problems in mechanics [7-9], where readers can also find a more detailed description of the method features, its implementation and links to additional author's publications.

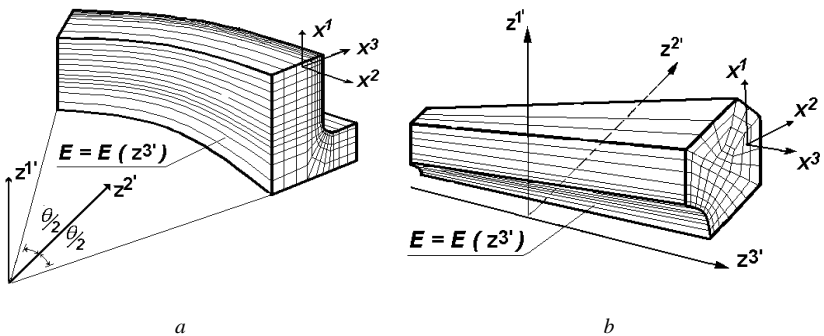


Fig. 1. Circle (a) and prismatic (b) inhomogeneous body

**2. Continuum fracture mechanics relations and algorithms for damaged parameter determining.** The damage accumulation process described with kinetic equations, which associated an augment of phenomenological damage parameter (DP)  $\omega$  to the stress, strength, or deformation parameters. Herewith DP changed in time from  $\omega(t=0)=\omega_0=0$  to  $\omega(t^*)=1$ , where  $t^*$  – is the time of the local loss of material bearing capacity.

The next view of kinetic equation for DP calculation is most simply for the multi-cyclic force loading [10]:

$$\frac{d\omega}{dN} = A \left( \frac{\sigma}{\sigma_B(1-\omega)} \right)^n, \quad (1)$$

where  $A$  and  $n$  – experimentally determined constants;  $\sigma_B$  – tensile strength of the material.

It is expected, that under multi-cyclic loading condition process of material deforms elastically and the loading process can be carried out with variable parameters of the cycle (mean middle stress and amplitude). Therefore, it is provided for construction of DP value determining algorithm, that load process must be divided into a number of steps - steps for problem solving -  $S^*$ . Within each stage  $s$  ( $s=1, 2, \dots, S^*-1, S^*$ ) load means constant stress  $\sigma_{0_s}$  and constant amplitude  $\sigma_{as}$  during the some quantity of cycles  $N_s$ . Using this assumption, the DP value by previous load history (up  $N_S$  cycles,  $N_S = \sum_{s=1}^S N_s$ ) is determined by a formula which obtained in [10] as a closed form solution of equation (1):

$$\omega_S = 1 - (n+1) \sqrt[n+1]{1 - \frac{A}{(n+1)\sigma_B^n} \sum_{s=1}^S (\sigma_{as})^n N_s}. \quad (2)$$

A DP value description under long-term static loading condition (when a creep process presence) conducted using the follow expression [2]:

$$\frac{d\omega}{dt} = C \left[ \frac{\sigma_e}{(1-\omega)^r} \right]^m \frac{1}{(1-\omega)^q} \omega^\beta, \quad (3)$$

where  $C, m, q, r, \beta$  – experimentally determined material constants, which are functions of temperature,  $\sigma_e$  – equivalent stresses calculated according to the chosen strength criterion.

Creep problem solution considering damage accumulation process is performed by the algorithm based on the use of the implicit integration over the time scheme with help of Newton-Kantorovich iterative procedure. When

starting each iteration  $n$  of a time interval  $m$ , stress values  $\sigma_{ij}$  are calculated considering creep deformation process by the formula:

$$(\sigma_{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\bar{\sigma}_{ij})_n^m + (s^{ij})_n^m. \quad (4)$$

Components of stress tensor  $\bar{\sigma}_{ij}$  are defined in compliance with the Hook's law considering an increment of total deformation:

$$(\bar{\sigma}_{ij})_n^m = (\sigma_{ij})_{n-1}^m + (\Delta \bar{\sigma}_{ij})_n^m,$$

while the components of stress deviator  $(s^{ij})_n^m$  relate to an increment in creep deformation  $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ :

$$(\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m = (\xi_{ij}^c)_n^m \Delta t_m, \quad (s^{ij})_n^m = (\bar{s}^{ij})_n^m - G_1 (\Delta \varepsilon_{ij}^c)_n^m, \quad (5)$$

where  $(\xi_{ij}^c)_n^m = \frac{3}{2} \left[ \xi_i^c \right]_m^n \frac{(s_{ij})_n^m}{(\sigma_i)_m^n}$  – components of creep deformation rate tensor;

$\xi_i^c = \frac{d\varepsilon}{dt}$ ;  $G_1 = E / (1 - 2\mu)$  – elastic constant;  $\Delta t_m$  – time interval value.

The DP values addition  $(\Delta \omega)_m$  and accumulated DP values  $\omega_m$  on a time interval  $m$  calculated with next relation:

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta \omega)_m = \omega_{m-1} + \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_m \Delta t_m. \quad (6)$$

The criterion of local loss of the material bearing capacity is  $\omega(t^*) > \omega^*$ , where  $\omega^* \approx 1$  – critical DP value. It's fulfillment in the some point of studied object  $K$  with coordinates  $(z^{i'})_K = z^{i'*} = \{z^{1*}, z^{2*}, z^{3*}\}$ , indicates the transition of the scattered damages accumulation process, which accounted integrally using DP, to occurrence of macroscopic defects – initial areas of continual fracture. This points in time determining the value of the estimated lifetime of studied object.

**3. Algorithm for modeling of continual fracture zone growth.** To simulate the initial macroscopic defects occurrence at the point  $K$  the area with volume  $V_0$  introduced there at the time point  $t = t^* + \Delta t$  (Fig. 2, a). The size of this area in plane  $z^1 - z^2$  is the same of size of FE, in which condition  $\omega > \omega^*$  reached, and its size  $\Delta z^{3'}$  in the  $z^{3'}$  direction defined as the sum of half the

distance from the point  $K$  to neighboring integration points in FE (named as  $K-1$  and  $K+1$ ,  $\Delta z^{3'} = \frac{a_{k-1}}{2} + \frac{a_k}{2}$ , Fig. 2,*b*). Values of stress and elastic modulus of the material taken as being equal to zero within a specified area:

$$\sigma_{ij}(t = t^* + \Delta t, z_i = z_i^*) = 0, E(z_i = z_i^*) = 0. \quad (7)$$

Volume  $V_0$ , the value of which is caused by the discrete model parameters, defines the minimum increment of the characteristic size of the fracture zone in the course of its growth.

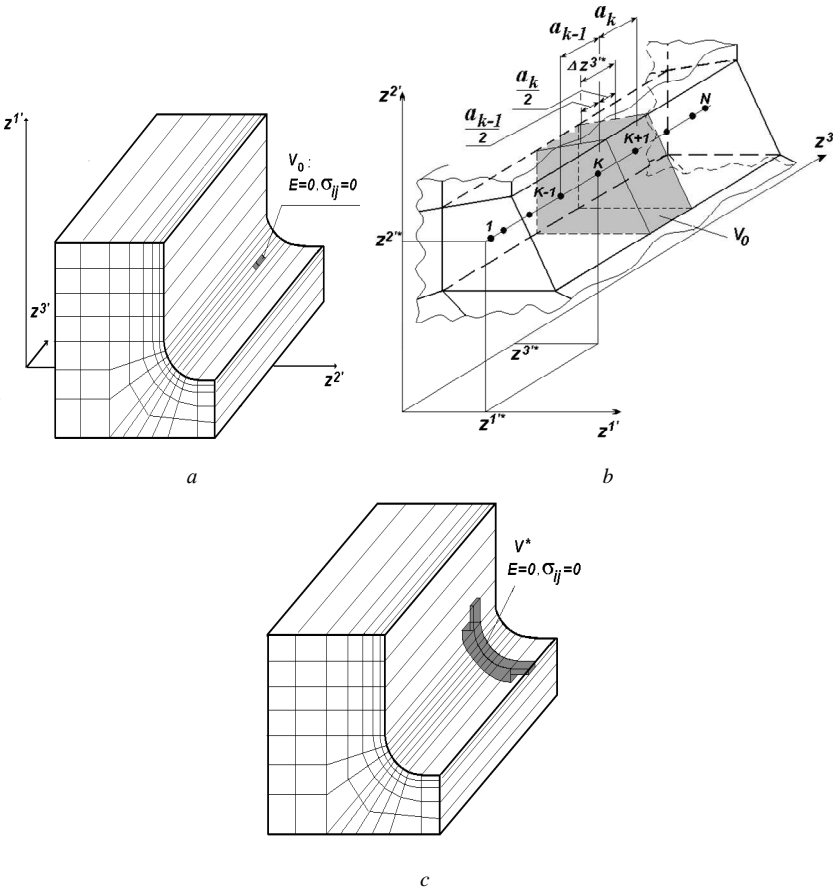


Fig. 2. Procedure of modeling of continual fracture zone growth (*a,c*) and special finite element (*b*)

Implementation of (7) is carried out using special finite elements with adjusted values of physical and mechanical constants. The stress-strain state parameters and DP values determine by (3) - (6) during following point of time. This is accompanied by a gradual increase of fracture zone by acceding to it of new volume  $V_m$  at time intervals  $t_m$  after fulfillment of condition  $\omega > \omega^*$  in appropriate points. The procedure of continual fracture zone growth modeling is performed to achieve a zone of critical size (volume)  $V^*$  (Fig. 2,c). The appropriate time interval (number of cycles) determines residual lifetime (vitality) of the object after the of fracture zones occurrence.

**4. Results of finite-element modeling of continual fracture zone growth and residual lifetime definition.** The allowed approaches being spent to solving of practical problems of residual lifetime definition of responsible structure element – the connecting union under multi-cyclic loading condition and the blade of a gas turbine under creep.

The connecting union (choke) of valve settings for high pressure polyethylene synthesis is a massive circle (cylindrical) body loaded with cyclic internal pressure. The initial defect is available on the inner surface of the choke - an weakened area of degraded material physical and mechanical properties. General view of the object and the FE discrete model, used for solving and describing the defect presence, shown in Fig. 3. The initial elastic stresses distribution in the absence of defect is uniform on choke's height and variable along the it's radius.

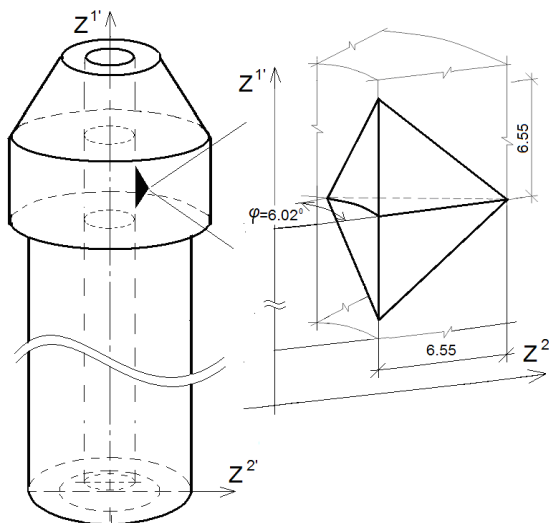


Fig. 3. The connecting union with initial defect

The description of the damage accumulation process performed with eq. (2) using  $\sigma_B = 1300 \text{ MPa}$ ,  $A = 1.5495 \times 10^{-2}$  and  $n = 4,267$ . The degradation of material mechanical properties within the defect area performed with linearly change of  $n$  in the range 4,267-4,4 (increase of the value  $n$  indicates more intensive damage accumulation at the same level of stress). Estimated lifetime of the choke (until the local loss of the material bearing capacity) in the absence of the defect was  $4.9 \times 10^9$  cycles, and  $N^* = 3.89 \times 10^9$  for defect presence. The obtained DP values rapidly decreases at choke wall thickness with distance from the inner surface and at the distance of 3 mm DP value is less then 0,1. Thus, after the local loss of the material bearing capacity on the inner surface the wall remains virtually intact and the choke may be used stay in operation.

The simulation of fracture zone growth was conducted in axisymmetrical and spatial statement. Finite element model is shown on Fig. 4,a. Time for zone growth in the radial direction (of the wall thickness) to depth 1-5 mm, which obtained in axisymmetrical statement, is half less than one obtained in spatial statement. This difference gradually decreases and at a zone depth 12 mm (corresponding to half of the wall thickness) it is only near 5%. But in any case, the magnitude of the residual life after the fracture zone growth is almost an order greater than the time to zone occurs. Wherein, it should be noted, that during all of time of the fracture zone growth the detail keeps tight and relevant performance properties [9] (Fig. 4,b).

Stationary gas turbine blade is a spatial body of complicated shape. The blade is swirled at the vertical axis, has a variable at height cross-sectional area. It is influenced by centrifugal forces in a heterogeneous, both in height and in cross-section, temperature field. Based on results of elastic deformation modeling of blade based on three-dimensional FEM, a dangerous cross section  $R_0$  was chosen. This section characterized with combination of average strain  $\sigma_0$  and average temperature  $T_0$ , which leads to the most intensive creep process and damage accumulation. Listed values ( $\sigma_0$  and  $T_0$ ) are used further to describe the design scheme and the results of the problem solving. Creep deformation process modeling is made for a blade fragment with size  $0,94 R_0 < R < 1,06 R_0$ . Fragment is loaded with its own centrifugal load  $p$ . The simulation of the upper part of blade in section  $R = 1,06 R_0$  implemented with unevenly distributed load  $q = q(z^1, z^2)$  that meets strain values, been applied in this cross-section (Fig. 5,b).



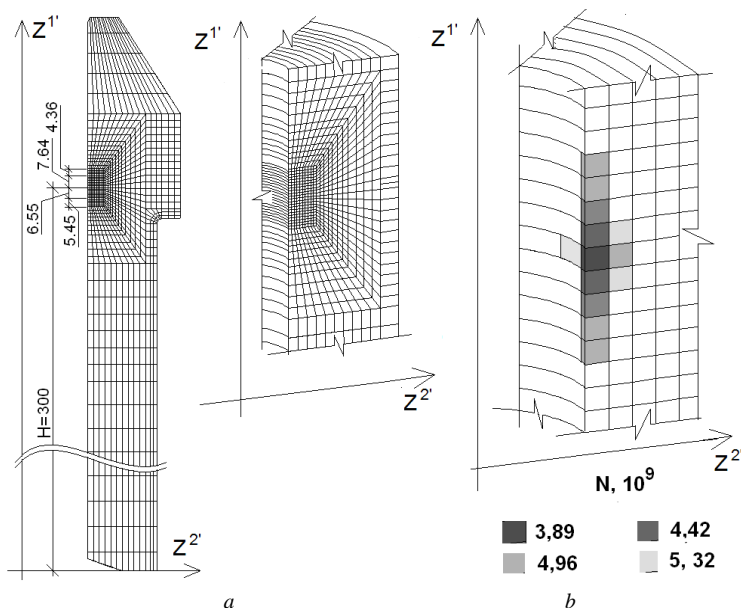


Fig. 4. SFEM discret model connecting pipe with defects (a), configuration of continual fracture zone after different number of cycles (b)

The description of creep and damage accumulation processes of the blade material is carried out with the following equation:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q}, \quad (8)$$

where  $B = B(T)$ ,  $C = C(T)$ ,  $m = m(T)$ ,  $n = n(T)$ ,  $r = r(T)$ ,  $q = q(\sigma, T)$  – material constants,  $T$  – temperature.

The location of initial fracture zone within the fragment corresponding to the maximum value damage parameter (Fig. 5,c) was determined due to modeling of blade deformation under creep. Its location is aligned with the zone of maximum values of the DP at height of blade fragment (Fig. 5,d). It was required to use a finite element models with a significant number of nodes in a cross-section to determine of fracture zone's size and shape in the process of it's growth (Fig. 5,e). The fracture zone growth modeling results up to complete loss of bearing capacity showed, that the proposed facility value of residual lifetime is low and is about 5% of the estimated lifetime (Fig. 6). This suggests that the actual value of the blade lifetime is determined by local loss of bearing capacity in fact.

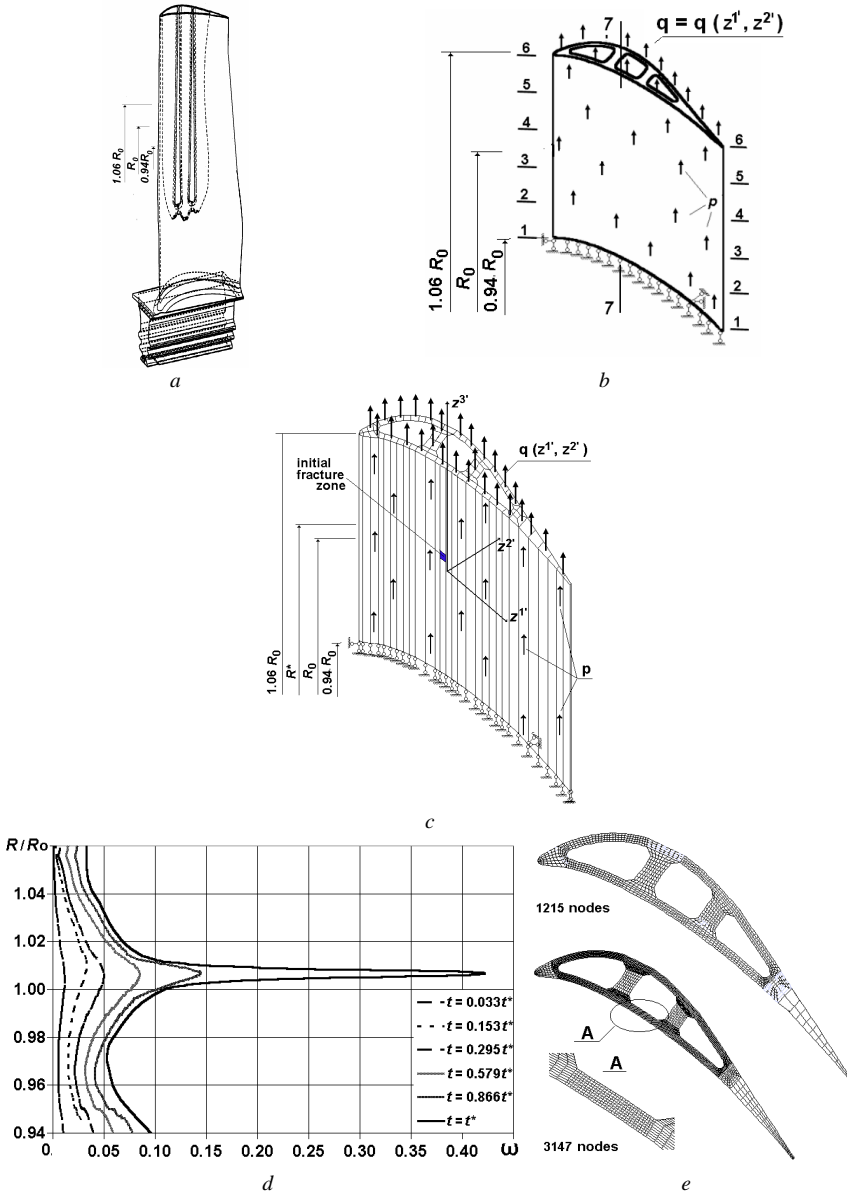


Fig. 5. Gas turbine blade (a), design scheme (b) general view of base SFEM discretized model and initial fracture zone (c), DP distribution in different moment of time at the height of blade fragment (d), cross-sections of used SFEM discretized models been used for fracture zone growth (e)

**Conclusions.** Developed in this paper methods for modeling of continual fracture process and fracture zone growth allows to determine of estimated and residual lifetime values for responsible structural elements that work under long-term static and high-cycle loading condition. It is shown that for different objects and loading conditions values of residual lifetime may differ significantly. Thus, it's need to study a problem of extending of details operation time after local loss of bearing capacity in each individual case.

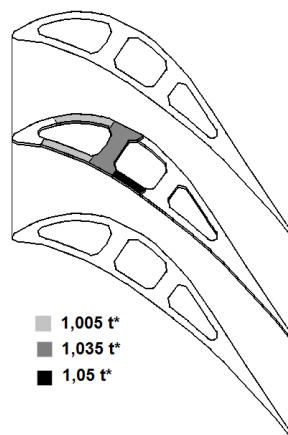


Fig. 6. Continual fracture zone configuration in blade fragment

#### REFERENCES

1. Бобир М.І. Пошкоджувальність та руйнування елементів конструкцій / М.І. Бобир, А.П. Грабовський, О.П. Халімон. – К.: Наук. думка, 2009. – 392 с.
2. Голуб В.П. Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости / В.П. Голуб // Прикл. механика. – 2000. – т.36, № 3. – С. 31–66.
3. Львов Г.И. Ползучесть и длительная прочность компонентов газовых турбин с учетом неоднородного распределения температур / Г.И. Львов, С.В. Лысенко, Е.Н. Гораш // Пробл. прочности. – 2008. – № 5. – С. 37-44.
4. Лелюх Ю.И. О конечно-элементном решении пространственных задач термовязкоупругопластичности / Ю. И. Лелюх, Ю.Н. Шевченко // Прикл. механика. – 2006. – т.42, № 5. – С. 16–25.
5. Никитенко А.Ф. Оценка времени распространения фронта разрушения в элементах конструкций / А.Ф. Никитенко // Пробл. прочности. – 2007. – № 6. – С. 13–24.
6. Никитенко А.Ф. Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщ. 3. Верхняя и нижняя оценки времени начала разрушения неравномерно нагретых элементов конструкций / А. Ф. Никитенко, И. В. Любашевская // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 32–40
7. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл : Монографія / [Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.]. – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
8. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл : Монографія / [Баженов В. А., Гуляр О. І., Сахаров О. С., Солодей І.І. – К.: КНУБА, 2012. – 248 с.
9. Гуляр О.І. Визначення ресурсу приєднувального штуцера в умовах багаточиклового навантаження при наявності початкових дефектів / [ Гуляр О.І., Пискунов С.О., Мицюк С.В] // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. С.28-52/

10. Сильверстов И.Н. Расчет ресурса и длительной прочности с использованием критерия повреждаемости / Сильверстов И.Н. – Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. – №6. – С.116-118.
1. Bobyr M.I. Poshkodzhuvanist' ta ruynuvannya elementiv konstruksiy / M.I. Bobyr, A.P. Hrabovs'kyy, O.P. Khalimon. – K. : Nauk. dumka, 2009. – 392 s.
2. Holub V.P. Nelyneynaya mekhanika kontynual'noy povrezhdennosti y ee prylozhenye k zadacham polzuchesty y ustalosty / V.P. Holub // Prykl. mekhanika. – 2000. – t.36, # 3. –S. 31–66.
3. L'vov H.Y. Polzuchest' y dlytel'naya prochnost' komponentov hazovykh turbyn s uchedom neodnorodnoho raspredeleniya temperatur / H. Y. L'vov, S. V. Lysenko, E. N. Horash // Probl. prochnosti. – 2008. – # 5. – S. 37–44.
4. Lelyukh Yu. Y.O konechno-elementnom resheniy prostranstvennykh zadach termovyazkoupruhoplastychnosti / Yu.Y. Lelyukh, Yu.N. Shevchenko // Prykl. mekhanika. – 2006. – t.42, # 5. – S. 16–25.
5. Nykytenko A.F. Otsenka vremeny rasprostraneniya fronta razrusheniya v elementakh konstruksiy / A.F. Nykytenko // Probl. prochnosti. – 2007. – # 6. – S. 13–24.
6. Nykytenko A.F. Kynetycheskaya teoriya polzuchesty y raschet elementov konstruksiy na dlytel'nyuy prochnost'. Soobshch. 3. Verkhnyaya y nyzhnyaya otsenky vremeny nachala razrusheniya neravnomerno nahretykh elementov konstruksiy / A. F. Nykytenko, Y. V. Lyubashevskaya // Probl. prochnosti. – 2006. – # 1. – S. 32–40
7. Napivanalitichnyy metod skinchennykh elementiv v zadachakh ruynuvannya prostorovykh til : Monohrafiya / [Bazhenov V.A., Hulyar O.I., Pyskunov S.O., Sakharov O.S.]. – K. : KNUBA, 2005. – 298 s.
8. Napivanalitichnyy metod skinchennykh elementiv v zadachakh dynamiky prostorovykh til : Monohrafiya / [Bazhenov V.A., Hulyar O.I., Sakharov O.S., Solodey I.I. – K. : KNUBA, 2012. – 248 s.
9. Hulyar O.I. Vyznachennya resursu pryednuval'noho shtutsera v umovakh bahatotsyklovoho navanatazhennya pry nayavnosti pochatkovykh defektiv / [Hulyar O.I., Pyskunov S.O., Mytsyuk S.V.] // Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tekhn. zbirn. – K.: KNUBA, 2011. – Vyp. 87. S.28-52/
10. Syl'verstov Y.N. Raschet resursa i dlytel'noy prochnosti s yspol'zovaniem kryteryaya povrezhdaemosti / Syl'verstov Y.N. – Problemy mashynostroeniya y nadezhnosti mashyn. 2006. #6. – S.116-118.

*Стаття надійшла до редакції 16.12.2013 р.*

*Баженов В.А., Гулярь О.І., Пискунов С.О.*

## **ВИЗНАЧЕННЯ ДОДАТКОВОГО РЕСУРСУ ПРОСТОРОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ В УМОВАХ КОНТИНУАЛЬНОГО РУЙНУВАННЯ**

Представлено методику моделювання процесів континуального руйнування кругових та призматичних тіл складної форми в умовах тривалого статичного і багаточисельного навантаження та результати визначення додаткового ресурсу (часу зростання зони континуального руйнування). Для опису процесу континуального руйнування використано скалярний параметр пошкодженості Качанова-Работнова, для чисельного моделювання просторового напружено-деформованого стану використано напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ). Показано, що величини додаткового ресурсу можуть суттєво відрізнятися для різних об'єктів і умов навантаження.

**Ключові слова:** повзучість, циклічне навантаження, пошкодженість, континуальне руйнування, ресурс, просторова задача, напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ).

*Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О.*

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО РЕСУРСА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В УМОВАХ КОНТИНУАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ**

Представлена методика моделирования процессов континуального разрушения круговых и призматических тел сложной формы в условиях длительного статического и многоциклового нагружения и результаты определения дополнительного ресурса (времени роста зоны континуального разрушения). Для описания процесса континуального разрушения использован скалярный параметр повреждаемости КачановаРаботнова, для численного моделирования пространственного напряженно-деформированного состояния использован полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ). Показано, что величины дополнительного ресурса могут существенно отличаться для разных объектов и условий нагружения.

**Ключевые слова:** ползучесть, циклическое нагружение, повреждаемость, континуальное разрушение, ресурс, пространственная задача, полуаналитический метод конечных элементов (ПМКЭ).

UDC 539.3

**V.A. Bazhenov**<sup>1</sup>, Doctor of Sciences**O.S. Pogorelova**<sup>1</sup>, Ph.D**T.G. Postnikova**<sup>1</sup>, Ph.D

<sup>1</sup>*Kyiv National University of Construction and Architecture  
31 Povtroflotsky Avenue, Kyiv, Ukraine. 03680*

## INFLUENCE OF SYSTEM STIFFNESS PARAMETERS AT CONTACT SOFTNESS IN VIBROIMPACT SYSTEM

The possibility of contact character changing by system parameters changing is researching. It is investigated the contact between two bodies in two-degree-of-freedom vibroimpact system. We show which parameters changing can transform the rigid impact in system into the soft one. In the main these parameters are the Young's modulus and geometrical characteristics of the contact zone for both bodies.

**Key words:** vibroimpact system, impact duration, rigid impact, soft impact, stiffness, Hertz theory, optimization.

### Introduction

Vibroimpact machines and equipment are often encountered in many applications of engineering practice. In general systems in which impacts of matching elements occur play an important role in the theory of vibration of mechanical systems. Therefore the study of their dynamic behaviour and vibroimpact movement characteristics in different work condition has got the special interest. Such investigations are developed extensively during the last decades [1-3].

S.G. Kryzhevich writes for ground the actuality of his Doctor's dissertation theme [4]: “Несмотря на потребность прикладной механики и техники в развитии методов исследования инвариантных множеств сильно нелинейных динамических систем, устойчивости их решений и механизмов возникновения хаотических колебаний, а также в исследованиях по анализу конкретных виброударных систем, работы в этих направлениях на настоящий момент еще находятся в начальной стадии” (“The applied mechanics and technique need in development of methods for investigations of invariant strongly nonlinear dynamic systems and their solution stability. The mechanism of chaotic vibration rise and analysis of specific vibroimpact systems are required too. In spite of such necessity the works after these directions are at initial stage at present”).

There is the vibroimpact systems (VIS) classifications by different aspects [5]. One of them is impact type characteristic – rigid or soft. Some principal difference between rigid and soft contact were formulated in [6]. The main sign

is its duration. Just impact duration dictates the way of its simulation. If impact duration is large impact isn't instantaneous. Its simulation by boundary conditions with Newton's restitution coefficient using based on stereomechanic theory isn't possible [7]. The stiffness of VIS elements causes the impact softness.

The soft impacts take place in engineering very often. The authors write in [8]: "Soft impacts occur in many practical mechanical systems where there is some "cushioning" at the impacting surfaces – meant for reducing the noise and chatter. It can be visualized as a mass impacting not with a hard wall, but with a spring-damper support in front of a wall. The existence of the spring-damper type cushion introduces some special features in the system dynamics".

The investigation of systems which constituted by softly impacting beams and rods of non-negligible mass is fulfilled in [9]. The impact is simulated by force which depends linearly from bodies penetrations one into another. Some virtual spring imitates this force. The values of bodies' displacements and penetrations characterize the impact softness. The authors investigate the influence of virtual spring stiffness at system dynamic behaviour and vibrative motion character.

In our works we studied two models of VIS. The first model is VIS with rigid impact. Its calculation scheme is corresponding to the system with percussive or nonpercussive dynamic damper [10] (Fig. 1,a). Another model is VIS with soft impact. Its calculation scheme is corresponding to vibroimpact platform, which is widely used in building industry for concrete mix compaction and concrete products forming [7] (Fig. 1,b).

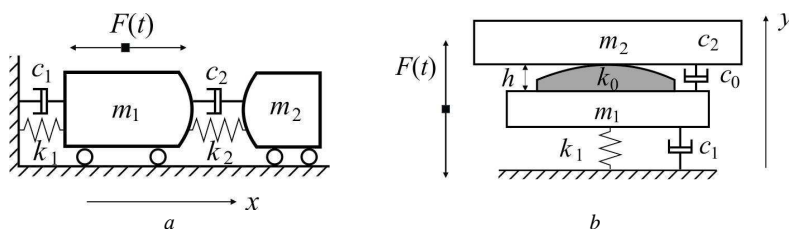


Fig. 1. Calculation schemes of VIS: *a* – with rigid impact; *b* – with soft impact

Contact impact forces in these systems in dependence from time have got the forms that is shown at Fig. 2,*a,b,c*. Numerical parameters values have been written in [7, 10]. The rigid impact is almost instantaneous because its duration is very small. Therefore the contact force graphic in every impact has the form of "stick". On the contrary the duration of soft impact is large; the contact force graphic in every impact has the form of "bell" [11]. It should be noted that the frequency of external loading at vibroimpact platform is larger to 20 times then

the frequency of external loading at vibroimpact system with rigid impact. Therefore the scale of time axis at Fig. 2,*a,b* is different for these two models. Fig. 2,*b* shows “stick” in the same time scale which is used for “bells” at Fig. 2,*c* in order the comparison of contact force character to be correct, pure.

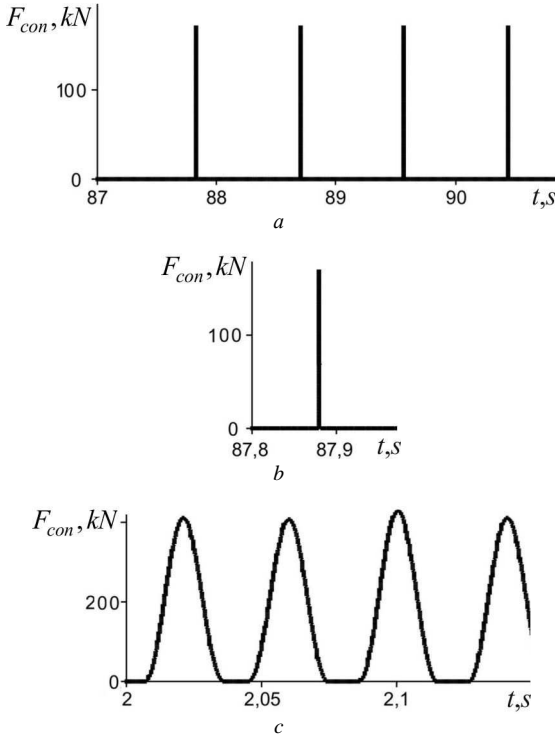


Fig. 2. Character of contact force which gets exited in VIS:  
*a,b* – with rigid impact, *c* – with soft impact

The bodies displacements in independence from time are shown at Fig. 3,*a,b*.

Let us look attentively at the Fig. 3. For the system with rigid impact it is seen well as attached body (thin curve) jumps away from the main one (thick curve) in a moment. It doesn't penetrate into the main body. On the contrary in the system with soft impact the upper body when falling and shocking the lower one causes its considerable deformation and penetrates into it.

Is it possible to select the parameters of VIS with rigid impact like that the impact in it will become the soft one? This article searches the answer at this question. The parameters influence at the impact duration was also studied in [12].



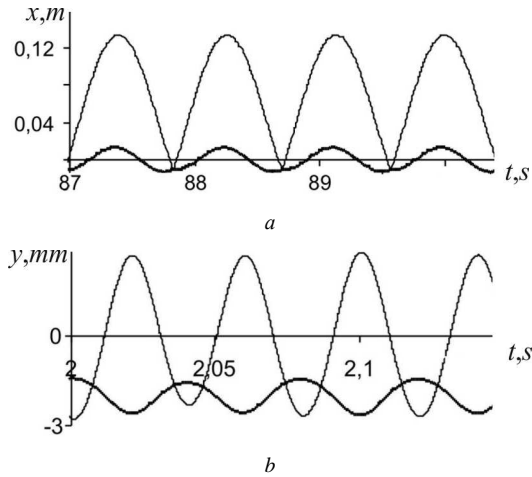


Fig. 3. Bodies displacements in independence from time in VIS:  
*a* – with rigid impact, *b* – with soft impact

### 1. The main equations

We'll study the problem about impact softening using the scheme of two-of-degree-freedom VIS of two bodies which is shown at Fig. 1,*a*. This VIS is described in [11]. Let us remind of it shortly. The system is formed by the main body and attached one. Bodies are connected by linear elastic springs and dampers. The main body is subjected to the action of periodical external force:

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

where  $\lambda$  is parameter of its intensity. We consider the elastic collinear impacts with low velocities. The contact surfaces are smooth, curvilinear, without roughness. For impact simulation we use the Hertz's contact interaction force based on quasistatic Hertz's theory [13]:

$$F_{con}(z) = K[H(z)z(t)]^{\frac{3}{2}}, \quad (2)$$

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad \delta_2 = \frac{1-\mu_2^2}{E_2\pi},$$

where  $z(t)$  is the relative closing in of bodies due the local deformation in contact zone,  $z(t) = x_1 - x_2$ ,  $H(z)$  is the Heaviside step function:

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

$\mu_i$  and  $E_i$  are respectively Poisson's ratios and Young's modulus for both bodies,  $A$ ,  $B$  and  $q$  are the characteristics of contact zone local geometry. We

consider that these surfaces are spherical, then  $A=B=1/2R_1+1/2R_2$ , where  $R_1, R_2$  are the contact surfaces radiuses. The Hertz/s theory takes into account only local deformations in contact zone.

In [14] the authors examine the limitations for using of Hertz's theory in different individual cases. For example the contact surfaces aren't Herzian, impact velocities are large and the plastic deformations occur, there is conformal contact between bodies, the impacts aren't pure elastic and energy dissipation has to take into account. The authors write: "The Hertzian contact theory remains the foundation for almost all of the available force models, but by itself, it is not appropriate for most impacts in practice, due to the amount of energy dissipated during the impact". In [14] there are the set of contact forces models which enlarge and define more precisely the Hertz's theory. They complete the expression for contact force by additional terms that take into account damping. The authors write in conclusions: "There is no doubt that the biggest landmark in contact mechanics was the work of Hertz for static elastic contacts. The Hertzian contact approach is based on the theory of elasticity and still remains the foundation for elastic and dissipative contact force models available in the literature". The using of less rough impact models for VIS (for example the wave theory) causes considerable difficulties due to repeated impacts. Therefore Hertz's theory is widely used for analysis of VIS dynamics now too. The words of Prof. Ivanov A.P. are proper here: "Выбор той или иной модели удара для решения конкретной задачи связан с компромиссом между простотой и реалистичностью, достигнуть которого на практике, однако, удается редко" ("The choice of one or another impact model for specific problem solution is connected with compromise between simplicity and reality. You can rarely to reach such compromise in practice") [3].

Movement equations of the system have the form:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & -2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 - \omega_1^2 x_1 - 2\xi_2\omega_2\chi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) + \\ & + \frac{1}{m_1}[F(t) - F_{con}(x_1 - x_2)], \\ \ddot{x}_2 = & -2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) + \frac{1}{m_2}F_{con}(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2}$ ;  $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$ ,  $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$ ;  $\chi = \frac{m_1}{m_2}$ ,  $\omega_1, \omega_2$  - partial vibration frequency,  $F_{con}(x_1 - x_2)$  - contact interaction force, it simulates the impact and works only during the impact. Initial conditions are:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = D, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0.$$

Numerical parameters of VIS are given in [10] and in Table 1 further.

## 2. Impact softening by system parameters changing

The clear criterion of impact rigidity or softness is absent. The typical trait of impact softness is its duration. Is it instantaneous or not? Let us examine the value – the coefficient of the relative impact duration  $k_{con} = T/T_{con}$ , where  $T$  – period of external loading (1),  $T = 2\pi \cdot \omega^{-1}$ ,  $T_{con}$  – the time of impact i.e. the time of contact between bodies.

The impact duration  $T_{con} = 7,81 \cdot 10^{-4} s$ , the coefficient of the relative impact duration  $k_{con} = T/T_{con} = 1113,3$  for the motion with rigid impact that is shown at Fig. 2,a, Fig. 3,a. Here VIS has parameters that are in Table 1.

Table 1

Bodies' characteristics	Main body	Attached body
Mass $m_i, kg$	1000,0	100,0
Partial vibration frequency $\omega_i, rad \cdot s^{-1}$	6,283	5,646
Young's modulus $E_i, H \cdot m^{-2}$	$2,099 \cdot 10^{11}$	$2,099 \cdot 10^{11}$
Contact surface radius $R_i, m$	2	2
Coefficients $A, B, m^{-1}, q$	$A=0,5 \quad B=0,5 \quad q=0,319$	
External loading amplitude $F_0, H$	500,0	
External loading frequency $\omega, rad \cdot s^{-1}$	7,23	

Let us examine what way can be chosen for decrease the coefficient of the relative impact duration  $k_{con}$  (i.e. increase the impact duration  $T_{con}$ ) by changing the parameters of VIS, in the main the stiffness parameters. For this problem decision we use numerical effective method based on theory and techniques of nonlinear programming for solution the problem of parameters optimization. We use the modified steepest descent method – gradient projection method with correction of residual with constraints [10,15,16]. We formulate the minimax problem like that: to find such parameters of VIS which will provide the smallest value of relative impact duration coefficient  $k_{con}$ , i.e. the largest value of impact duration  $T_{con}$ . We seek for the objective function  $k_{con} = T/T_{con}$  by deciding the problem about steady-state exiting vibrations of VIS under the concrete system parameters. Numerical integration of motion equations (3) was fulfilled by Runge-Kutta 4<sup>th</sup> order method. The calculation of objective function gradient takes into account the constraints laid on the parameters. The obtained value determines the next optimization step. We investigated the influence of such parameters at impact duration: the attached body's mass  $m_2$ ; the joining spring's stiffness  $k_2$  (it comes into the partial

frequency expression (3)); Young's modulus of both system bodies  $E_1, E_2$ ; the radiuses of contact surfaces for both bodies  $R_1, R_2$  in assumption that these surfaces are spherical (these radiuses comes into expressions of coefficients  $A$  and  $B$  in formula for Hertz's force (2)). The other parameters weren't changed. We have obtained such results. The impact duration was enlarged considerably under influence of these parameters changing. The graphics of displacements and contact force are shown at Fig. 4 for parameters values which are given in Table 2.

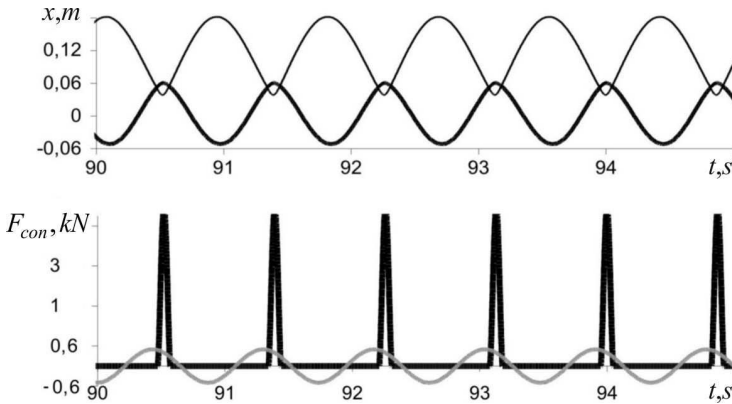


Fig. 4. Characters of (1,1)-periodical vibration regime ( $k_{con} = 8,868$ )

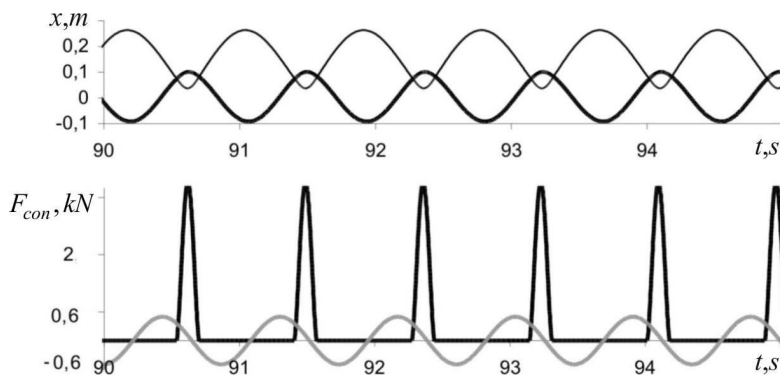
Table 2

<b>Bodies' characteristics</b>	<b>Main body</b>	<b>Attached body</b>
Mass $m_i$ , kg	1000,0	310,0
Partial vibration frequency $\omega_i$ , $rad \cdot s^{-1}$	6,283	3,606
Young's modulus $E_i$ , $H \cdot m^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{10}$	$1,0 \cdot 10^6$
Contact surface radius $R_i$ , m	2	2
Impact duration $T_{con}$ , s		0,098
Coefficient of impact duration $k_{con}$		8,868

At the displacement graphic (Fig.4) we see how attached body (thin curve) penetrates into the main one (thick curve) due their local deformation. The contact force graphic (black curve) can be compared with the external loading graphic (grey curve). It isn't similar at "stick" already, it draws near the "bell". The same picture is observed under the other parameters values obtained after VIS optimization (Table 3, Fig. 5).

Table 3

<b>Bodies' characteristics</b>	<b>Main body</b>	<b>Attached body</b>
Mass $m_i, kg$	1000,0	231,0
Partial vibration frequency $\omega_i, rad \cdot s^{-1}$	6,283	3,606
Young's modulus $E_i, H \cdot m^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{10}$	$2,44 \cdot 10^5$
Contact surface radius $R_i, m$	1	0,5
Impact duration $T_{con}, s$		0,164
Coefficient of impact duration $k_{con}$		5,301

Fig. 5. Characters of (1,1)-periodical vibration regime ( $k_{con} = 5,301$ )

The best result (i.e. the biggest value of impact duration) for  $T$ -periodic one-blow vibration regime was obtained for such VIS parameters values (Table 4, Fig. 6).

Table 4

<b>Bodies' characteristics</b>	<b>Main body</b>	<b>Attached body</b>
Mass $m_i, kg$	1000,0	310,0
Partial vibration frequency $\omega_i, rad \cdot s^{-1}$	6,283	3,606
Young's modulus $E_i, H \cdot m^{-2}$	$2,44 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^{11}$
Contact surface radius $R_i, m$	0,1	0,09
Impact duration $T_{con}, s$		0,233
Coefficient of impact duration $k_{con}$		3,732

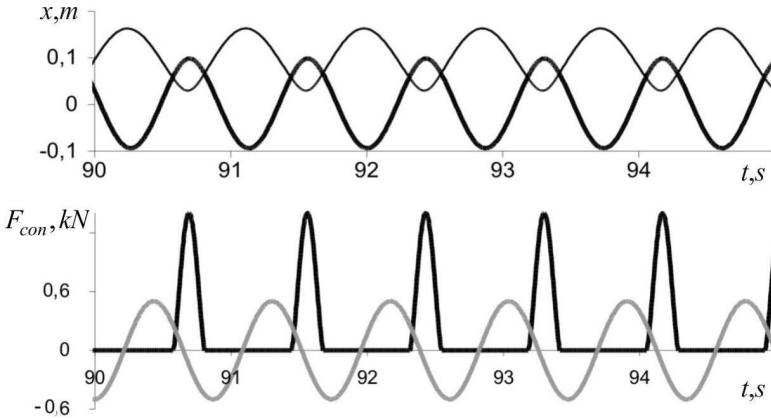


Fig. 6. Characters of (1,1)-periodical vibration regime ( $k_{con} = 3,732$ )

Let us notice some unexpected result obtained during researches: decrease of joining spring stiffness doesn't provide the considerable impact softening. The contact forces changing during one impact at different values of joining spring stiffness are shown at Fig. 7.

Decrease of stiffness twice and ten times diminishes the contact impact force almost equally and practically doesn't increase the impact duration.

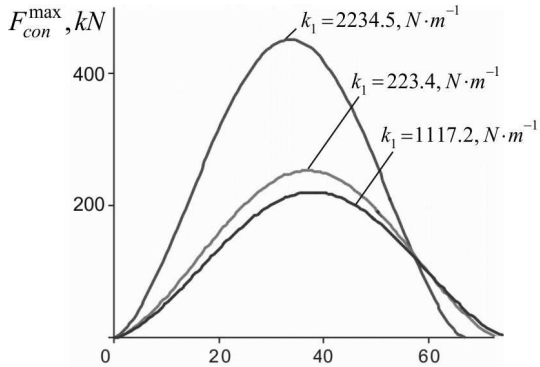


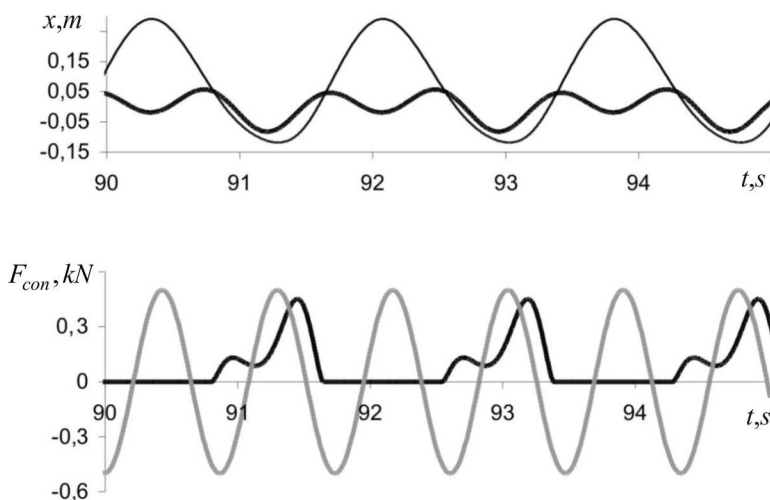
Fig. 7. Contact force dependence from joining spring stiffness

Further decrease of stiffness causes the loss of stability for  $T$ -periodic one-blow regime and rise of  $nT$ -periodic multi-blow regimes. Let us notice by the way that phenomenon of existence of periodical regimes with large (in the limiting case infinity) number of impacts per period has got the name "chatter" ("rattle") or infinity impact regime (in Russian literature "црык"). It is one of the significant reasons of appearance strange attractor i.e. rise of the chaotic vibrations [4].

For further impact softening we can increase the impact duration some more when decreasing bodies' materials Young's modulus and changing the contact surfaces radiuses. But then the motion character changes too – motion becomes  $nT$ -periodic. Such regime is shown for example (Table 5, Fig. 8).

Table 5

Bodies' characteristics	Main body	Attached body
Mass $m_i$ , kg	1000,0	310,0
Partial vibration frequency $\omega_i$ , rad · s <sup>-1</sup>	6,283	3,606
Young's modulus $E_i$ , H · m <sup>-2</sup>	2,0 · 10 <sup>4</sup>	8 · 10 <sup>10</sup>
Contact surface radius $R_i$ , m	1,5	0,9
Impact duration $T_{con}$ , s	0,837	
Coefficient of impact duration $k_{con}$	1,039	

Fig. 8. Characters of (2,1)-periodical vibration regime ( $k_{con} = 1,039$ )

The impact is very soft. The penetration of the attached body into the main one is significant. The contact force graphic is pronounced “bell”. The motion is  $2T$ -periodic.

The impact duration is increasing but the contact force is decreasing when the impact is becoming more soft. Fig. 9 shows this phenomenon for third values of relative impact duration coefficient very clearly.

Let us pay attention that the using of nonlinear contact Hertz's force provides the possibility of simulation both rigid and soft impact, the possibility

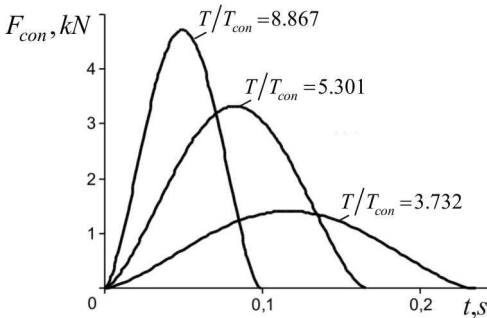


Fig. 9. Contact force during one period of impact in dependence from its duration

of finding the contact force value and its change law in time, the possibility of impact duration calculation. The using of the boundary conditions with Newton's restitution coefficient based at stereomechanic theory doesn't provide such possibility [17, 18]. The using of Hertz's force provides also to take into account more diversified influence of system

parameters then the using of force which depends linearly from bodies' rapprochements and has got only one proportional coefficient characterized the stiffness.

## Conclusions

The investigations fulfilled in this work allow to make the next conclusions.

1. Parameters of VIS with rigid impact may be changed like that the impact will become the soft one. Gradient projection method with correction of residual with constraints gives the possibility to find the optimal system parameters which will provide the maximum impact duration.

2. The using of nonlinear contact force based on quasistatic Hertz's theory allows simulating the impact in VIS with both rigid and soft impact. Its using gives the possibility to find not only maximum value of contact force but its changing in time too, provides the calculation of impact duration. The using of this force provides also the diversified taking into account of the system parameters influence at its dynamic behaviour.

## Acknowledgment

The authors would like to thank the Senior Researcher Candidate of Technical sciences Olga Alekseyevna Luk'yanchenko for consultations and big assistance in using of soft ware for parameters optimization by gradient projection method.



## REFERENCES

1. *Babitsky V.I.* Theory of Vibro-Impact Systems and Applications, Berlin: Springer-Verlag, 1998.
2. *Ibrahim R.J.* Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2009. № 43. – P.31–54.
3. *Ivanov A.P.* Dynamics of Systems with Mechanical Impacts, Int. Education Program, Moscow, 1997. (in Russian)
4. *Kryzhevich S.G.* Invariant lots and bifurcations of dynamical systems with impact : doctoral dissertation: 01.01.02.- Moscow, 2012.- 282 p. (in Russian)
5. *Blazejczyk-Okolewska B., Czolczynski K., Kapitaniak T.* Classification principles of types of mechanical systems with impacts–fundamental assumptions and rules //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2004. – T. 23. – №. 3. – C. 517-537.
6. *Andreus U., Casini P.* Dynamics of SDOF oscillators with hysteretic motion-limiting stop //Nonlinear Dynamics. – 2000. – T. 22. – №. 2. – C. 145-164.
7. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Goncharenko S.N.* "Comparative analysis of modeling methods for studying contact interaction in vibroimpact systems." Strength of materials 41(4) (2009): 392-398.
8. *Yue Ma, Manish Agarwal, Soumitro Banerjee* Border collision bifurcations in soft impact system, Physics Letters A 354 (2006) 281-287.
9. *Andreus Ugo, Chiaia Bernardino, Placidi Luca* Soft-impact dynamics of deformable bodies// Continuum Mechanics and Thermodynamics // March 2013, Volume 25, Issue 2-4, pp 375-398.
10. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Luk'yanchenko O.A.* Numerical Studies of Dynamic Processes in the Vibroimpact Systems during Impact Simulation by the Contact Interaction Force, Strength of Materials 40(6) (2008) 656-662.
11. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Impact forces in vibroimpact systems// Strength of Materials and Theory of Structures 91 (2013): 13-28. (in Ukrainian)
12. *Baukov A.U., Pavlov S.V., Gouliaeva N.A.* Optimization of the impact system at vibroacoustic control of multi-layered constructions of underground buildings of city building. Mountain informacionno-analiticheskyy byuleten'. 2006. (5): 127-132. (in Russian)
13. *Goldsmith W.* Impact: The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids, Edward Arnold, London, 1960.
14. *Machado M., Moreira P., Flores P., Lankarani H.M.* Compliant contact force models in multibody dynamics: evolution of the Hertz contact theory. Mechanism and Machine Theory, Vol.53, 99-121, 2012.
15. *Gouliaev V.I., Bazhenov V. A., Koshkin V.L.* Optimization Methods in structural mechanics.- K.:UMK BO, 1988.-192 p. (in Russian)
16. *Luk'yanchenko O.A., Postnikova T.G.* Parameters optimization of impact oscillation damper// Collection of scientific papers of Ministry of the Emergency Situations, 2003: 23–28. (in Ukrainian)
17. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Comparison of Two Impact Simulation Methods Used for Nonlinear Vibroimpact Systems with Rigid and Soft Impacts, Journal of Nonlinear Dynamics, vol. 2013, Article ID 485676, 12 pages, 2013. doi:10.1155/2013/485676.
18. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Dynamic behaviour analysis of different types vibroimpact systems. LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH and Co. KG Dudweiler, Germany, 2013. (in Russian)

Стаття надійшла до редакції 17.12.2013 р.

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.*

### **ТВЕРДЫЙ ТА М'ЯКИЙ УДАР В ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМАХ**

Досліджується можливість зміни характеру контакту між тілами двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності шляхом зміни її параметрів. Показано, яка зміна параметрів може перетворити твердий удар в системі на м'який. В основному, ці параметри такі: модулі пружності Юнга та геометричні характеристики зони контакту для обох тіл.

**Ключові слова:** віброударна система, тривалість удару, твердий удар, м'який удар, жорсткість, теорія Герца, оптимізація.

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.*

### **ТВЕРДЫЙ И МЯГКИЙ УДАР В ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ**

Исследуется возможность смены характера контакта между телами в двухмассовой виброударной системе с двумя степенями свободы путем изменения её параметров. Показано, какое изменение параметров может преобразовать твердый удар в системе в мягкий. В основном, эти параметры таковы: модули упругости Юнга и геометрические характеристики зоны контакта для обоих тел.

**Ключевые слова:** виброударная система, длительность удара, твердый удар, мягкий удар, жесткость, теория Герца, оптимизация.

УДК 539.3

Г.М. Іванченко<sup>1</sup>, д-р техн. наук

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

## ВЗАЄМОДІЯ ХВИЛЬ СИЛЬНИХ РОЗРИВІВ У ВОДІ З ПРУЖНИМ ЕКРАНОМ

Використовуючи нульове наближення променевого методу чисельно досліджена перебудова геометрії сферичних фронтів підводної хвилі сильних розривів та зміну імпульсу, що переноситься ними, при подоланні хвилею пружного екрану. Виявлено, що в ідеально пружних екранах поблизу місць повного внутрішнього відображення променів на межі середовищ вода-екран додаткові внутрішні напруження стрімко зростають.

**Ключові слова:** пружне середовище, хвилі сильних розривів, взаємодія, критичні стани.

**Вступ.** Інженерна практика з використанням вибухів під водою обумовлює необхідність з'ясування впливу хвиль сильних розривів на підводні об'єкти, а також розробку засобів захисту останніх. Традиційні аналітичні та чисельні методи дослідження напружено-деформованого стану занурених у воду пружних тіл при швидкоплинних динамічних впливах ускладнюються побудовою профілів полів напружень та деформацій, які належать до класу розривних функцій. Більш ефективним для аналізу геометрії поверхонь розриву польової функції, які утворюють fronti розповсюдження хвиль, а також для визначення інтенсивності імпульсів, які переносяться ними, виявляється нульове наближення променевого методу [4]. Цей метод при своїй простоті дозволяє отримувати досить точний розв'язок в прифронтних зонах нестационарних хвиль, які розповсюджуються в різних середовищах.

**Постановка задачі.** При відсутності об'ємних сил вектор переміщень елемента пружного однорідного ізотропного середовища визначається через скалярний та векторний потенціали  $\vec{U} = \nabla\Phi + \nabla \times \vec{\Psi}$ , які задовольняють хвильові рівняння

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{\Psi} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  – швидкості поширення поздовжньої ( $P$ ) та поперечної ( $S$ ) хвиль,  $\lambda = \lambda(E, \nu)$ ,  $\mu = \mu(E, \nu)$  – параметри Ламе,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $\rho$  – густина.

Розглядатиметься плоска вісесиметрична задача, тому векторному

потенціалу можна надати вигляд  $\bar{\Psi} = \Psi \bar{q}$ , де  $\bar{q}$  – одинична нормаль до площини розв’язку, і хвильові потенціали записати у вигляді променевих рядів [2, 4]:

$$\Phi(\bar{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(t-\tau)^{k+2} H(t-\tau)}{(k+2)!}, \quad \bar{\Psi}(\bar{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k \bar{q}(t-\bar{\tau})^{k+2} H(t-\bar{\tau})}{(k+2)!}, \quad (2)$$

де  $\bar{x}$  – радіус-вектор,  $\varphi_k = \varphi_k(\bar{x})$ ,  $\psi_k = \psi_k(\bar{x})$ ,  $\tau_k = \tau_k(\bar{x})$ ,  $\bar{\tau}_k = \bar{\tau}_k(\bar{x})$ ,  $H(t-\tau)$  – функція Хевісайда. Підстановкою виразів (2) в (1) можна отримати рівняння ейконалу та рівняння переносу в рекурентній формі

$$(\nabla \tau)^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad (\nabla \bar{\tau})^2 = \frac{1}{\beta^2},$$

$$2(\nabla \tau)(\nabla \varphi_k) + \varphi_k \nabla^2 \tau = \nabla^2 \varphi_{k-1}, \quad (0 \leq k < \infty)$$

$$2(\nabla \bar{\tau})(\nabla \bar{\psi}_k) + \bar{\psi}_k \nabla^2 \bar{\tau} = \nabla^2 \bar{\psi}_{k-1}. \quad (3)$$

Рівняння ейконалу зводяться до системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{p}}{ds} = 0, \quad \frac{d\bar{x}}{ds} = \bar{p}, \quad \frac{d\tau}{ds} = |\bar{p}|^2, \quad \bar{p} = \nabla \tau. \quad (4)$$

В променевій системі координат  $\xi\eta\zeta$ , де напрямок  $\xi$  співпадає з променем,  $\eta$  належить площині розповсюдження фронту, а  $\zeta$  доповнює систему до правої трійки, розв’язок (4) для  $P$ -хвилі будується у вигляді

$$\bar{x} = \bar{n}\xi + \bar{f}, \quad \tau = \frac{\xi}{\alpha}, \quad \nabla \tau = \frac{\bar{n}}{\alpha}, \quad (5)$$

де  $\bar{n}$  – одиничний вектор нормалі до поверхні фронту,  $\bar{f}$  – вектор, який визначає початкову геометрію фронту. Аналогічно будується розв’язок системи (4) і для  $S$ -хвилі. Таким чином, формується сімейство прямолінійних променів та поверхні фронтів хвиль сильних розривів ( $\tau = \text{const}$ ), перпендикулярних до цих променів. Шукані переміщення, напруження та їх інтенсивності визначаються через знайдені із розв’язків рівняння переносу величини  $\varphi_k$  та  $\psi_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ).

Для аналізу хвиль сильних розривів найважливіша інформація про динамічний вплив хвилі на пружне середовище міститься у нульових членах рядів (2), які визначають величину стрибка польової функції на фронті хвилі та основну частину хвильового імпульсу. Тому можна обмежитись врахуванням лише їх, що значно спрощує задачу. В цьому випадку розглядаються імпульсні хвилі малої довжини, для вивчення яких зручно використовувати методи, що застосовуються в стереомеханічній теорії удару [1].

Враховуючи зроблені припущення для вісесиметричного випадку при розповсюдженні вздовж променя хвилі зміщень частинок середовища

напруження на фронті визначається із залежностей [3]:

$$\sigma = \frac{C(\eta)}{\sqrt{RS}}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{C}(\eta)}{\sqrt{RS}}, \quad (6)$$

де  $R$  та  $S$  – радіуси кривини поверхні фронту,  $C(\eta)$  – початкові напруження.

**Методика розв’язування.** Отримані співвідношення дають можливість за початковими імпульсними впливами визначати форму фронтів та величину розривів, що переноситься ними. В однорідних пружних середовищах поперечні та поздовжні хвилі сильних розривів розповсюджуються незалежно. Вони взаємодіють лише на межах розділу середовищ з різними механічними властивостями, на яких падаюча хвиля розчіплюється на систему відображених та заломлених хвиль, причому, в рідинах можливі лише  $P$ -хвилі.

Алгоритм комп’ютерного моделювання явищ дифракції хвиль сильних розривів на пружному екрані будується на використанні “локально-площинного наближення” [2], яке дозволяє вважати, що в місці падіння на поверхню фронт є локально плоским. Позначатимемо індексами “1” і “2” хвилі та їх параметри, що розповсюджуються відповідно у воді та в тілі екрана. Другі індекси “-” і “+” відповідатимуть хвилям до та після взаємодії з ближньою до джерела хвилі поверхнею  $G_1$  пружного екрана. Індеси “ $P$ ” та “ $S$ ” матимуть параметри хвиль, породжених на зовнішній поверхні екрана падінням на неї відповідно поздовжньої та поперечної хвилі. Розв’язок задачі розпочинається з побудови системи падаючих променів  $P_-$  хвиль. В точках взаємодії променів із межею  $G_1$  породжується пучок променів  $P_{2+}, S_{2+}$  хвиль, заломлених в середовище екрана, та відображеної в рідину  $P_{1+}$  хвилі. Напрямки променів, які опираються на одну малу ділянку межі розділу середовищ задовольняють рівнянням Снеліуса

$$\frac{\sin \Theta_{1-}}{\alpha_1} = \frac{\sin \Theta_{1+}}{\alpha_1} = \frac{\sin \Theta_{2+}}{\alpha_2} = \frac{\sin \Psi_{2+}}{\beta_2}, \quad (7)$$

де  $\Theta$  і  $\Psi$  – кути між нормальними до поверхні екрана та напрямками променів відповідно  $P$ - та  $S$ -хвиль.

Кожна із заломлених через межу вода-екран хвиль на другій поверхні розділу середовищ в свою чергу породжує  $P$ -хвилю у воді та хвилі обох поляризацій, що відбиваються в середовище екрана. Напрямки променів, породжених падінням поздовжньої хвилі, визначаються із залежності

$$\frac{\sin \Theta_{2+}}{\alpha_2} = \frac{\sin \Psi_{2P}}{\beta_2} = \frac{\sin \Theta_{2P}}{\alpha_2} = \frac{\sin \Theta_{1P}}{\alpha_1}, \quad (8)$$

а для поперечної хвилі

$$\frac{\sin \Psi_{2+}}{\beta_2} = \frac{\sin \Psi_{2S}}{\beta_2} = \frac{\sin \Theta_{2S}}{\alpha_2} = \frac{\sin \Theta_{1S}}{\alpha_1}. \quad (9)$$

Інтенсивності імпульсних хвиль визначаються із співвідношень теорії пружності в променевої системі координат  $\xi\eta\zeta$  [3]

$$\sigma_{\xi\xi} = -\rho\alpha\dot{u}, \quad \sigma_{\xi\eta} = -\rho\beta\dot{v}, \quad (10)$$

де позначено  $\dot{u}$  та  $\dot{v}$  – швидкості елементів пружного середовища на фронті поздовжньої та поперечної хвиль.

Зв'язок між стрибками напружень на фронті хвиль сильних розривів та швидкостями руху пружних елементів дозволяє для дослідження процесів взаємодії хвиль на межах розділу середовищ використати локальні умови збереження кількості руху та умови безперервності швидкостей елементів середовищ.

Ці умови на межах вода-екран реалізуються трьома лінійними алгебраїчними рівняннями відносно швидкостей  $\dot{u}_{1+}, \dot{u}_{2+}, \dot{v}_{2+}$  ( $\dot{v}_{1+}$  – відсутня, т. я. рідина не сприймає дотичних напружень і в ній немає зчеплення на зсув), які дозволяють для кожного променя визначати початкові швидкості руху елементів середовища, які належать фронту хвилі, після їх взаємодії на межах розподілу середовищ, а далі за допомогою співвідношень (6), (10) – напруження в будь-якій точці площини розв'язку, де проходить фронт хвилі сильних розривів.

**Квазіповне відображення хвилі сильних розривів.** В геометричній оптиці відомий ефект повного внутрішнього відображення, пов'язаний із особливістю заломлення світлових променів при їх проходженні через межу розділу  $G$  двох ізотропних прозорих середовищ із показниками заломлення  $n_1$  і  $n_2$ , які відрізняються. Як впливає із закону Снеліуса, для світлового променя, який падає під кутом  $\varphi$  на поверхню розділу і заломлюється під кутом  $\chi$ , має місце співвідношення  $n_1 \sin\varphi = n_2 \sin\chi$ . Із цієї рівності видно, що  $\chi = \arcsin [(n_1/n_2) \sin\varphi]$  і у разі  $n_1 > n_2$  при деякому значенні  $\varphi$  вираз в дужках дорівнює одиниці, а при подальшому збільшенні  $\varphi$  – перевищує її. Оскільки функція  $\arcsin$  аргументу, більшого за одиницю, не існує, при таких значеннях  $\varphi$  не може існувати і явище заломлення світлового променя. В цьому випадку вся енергія, принесена на межу  $G$  падаючою світловою хвилею, несеться відображеною хвилею і в друге середовище світловий промінь не проникає. Вказана особливість є підставою для назви цього явища ефектом повного внутрішнього відображення.

Деяка аналогія цього ефекту має місце і для хвильових процесів, які протікають на межах розділу пружних середовищ, хоча в цьому випадку

всі явища є набагато складнішими [6, 7].

Явище квазіповного внутрішнього відображення в пружних середовищах підтверджується експериментом, проведеним в Інституті механіки НАН України під керівництвом професора П.З. Лугового [5]. Експеримент проводився для ізотропних середовищ. Оскільки спроби експериментальної перевірки цього ефекту зустрічаються зі значними технічними труднощами, пов'язаними зі складністю вимірювання напружень всередині шаруватого масиву, дослідження проводилися для випадку, коли в якості середовища, в якому ініціювалася початкова хвиля сильного розриву, була вибрана вода, а пружним середовищем, яке відчувало дію падаючої хвилі і яке сприяло виникненню ефекту повного внутрішнього відображення, було органічне скло.

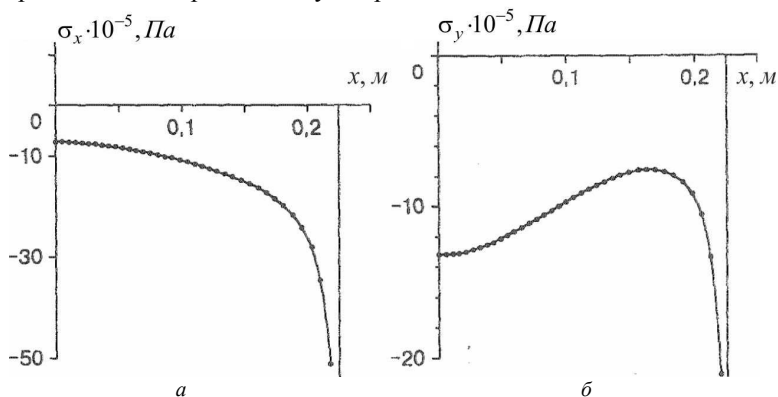


Рис. 1. Залежності величин складових тензора напружень в пластині від координати  $x$  точки  $H$  падіння променя

Експериментальні результати отримані при наступних значеннях фізико-механічних параметрів середовищ: для води  $\rho_1=10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\alpha_1=1500 \text{ м/с}$ ; для оргскла  $\rho_2=1,12 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $E=5,25 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $\nu=0,35$ ,  $\alpha_2=2500 \text{ м/с}$ . Було прийнято, що сферична хвиля стиснення ініційована точковим джерелом у воді на відстані  $0,3 \text{ м}$  від поверхні розділу  $G$ . Значення напружень на її фронті у момент підходу фронту до точки перетину із межею розділу на поверхні пружної пластини складо  $\sigma_{1-} = 10^6 \text{ Па}$ . Обчислені складові тензора напружень  $\sigma_x = \sigma_{x2+}(x)$  (рис. 1,а) і  $\sigma_y = \sigma_{y2+}(x)$  (рис. 1,б) у пластині в точці  $H$  по міру її переміщення по площині  $G$  уздовж осі  $x$ . Можна бачити, що стискуючі напруження  $\sigma_x = \sigma_{x2+}(x)$  монотонно зростають і прагнуть до нескінченності в точці квазіповного внутрішнього відображення при  $x=0,225 \text{ м}$ , яка відповідає

куту квазіповного внутрішнього відображення  $\theta_{l_1} = \arcsin(\alpha_1/\alpha_2) = 36,87^\circ$ . Функція  $\sigma_y = \sigma_{n_{2+}}(x)$  (рис. 1,б) спочатку спадає, проте в околі точки квазіповного внутрішнього відображення також швидко прагне до нескінченності. При  $x > 0,225$  м функції напружень  $\sigma_x = \sigma_{x_{2+}}(x)$  і  $\sigma_y = \sigma_{n_{2+}}(x)$  не обчислювалися, оскільки хвилі напружень в другому середовищі перестають мати сильні розриви.

**Результати теоретичних досліджень.** За допомогою запропонованої методики проведене чисельне дослідження зміни інтенсивності хвиль сильних розривів у воді після проходження ними пружних екранів, що мають різні фізико-механічні та геометричні параметри. Численні розрахунки показали, що при падінні хвилі сильних розривів із середовища з меншою акустичною жорсткістю в середовище, яке має більшу акустичну жорсткість, в точках на поверхні останнього, де виконується умова  $\sin \Theta_{1+} \alpha_2 = \alpha_1$ , виникає критичний стан. Він характеризується тим, що в цих точках для фронту заломленої хвилі добуток радіусів кривини поверхні фронту  $RS \rightarrow 0$ , тому  $\dot{u}_{2+} \rightarrow \infty$ . Такий стан в геометричній оптиці називається повним внутрішнім відображенням. Закритичний стан не досліджувався, тому що хвилі напружень в екрані перестають бути хвилями сильних розривів і створений алгоритм в цьому випадку втрачає силу. Отримані ефекти проілюстровано для екрана з органічного скла товщиною 0,02 м. Приймались при розрахунках для води:  $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\alpha_1 = 1500 \text{ м/с}$ ; для оргскла:  $E = 5,25 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $\nu = 0,35$ ,  $\alpha_2 = 2500 \text{ м/с}$ . Хвиля стиснення ініціювалася в точці розміщеній на відстані 0,2 м від поверхні екрана і

викликала у воді на фронті в точці  $x=0$ ,  $y=0,2$  м в системі координат, пов'язаній з епіцентром вибуху, додаткове напруження  $\sigma_{1-} = 10^6 \text{ Па}$ . На рис. 2 суміщені епюри додаткових напружень  $\sigma_{1-}$  у воді на фронті первинної хвилі сильних розривів при відсутності пружного екрана (ліворуч осі  $y$ ) та напружень

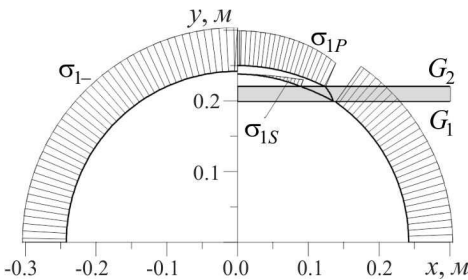


Рис. 2. Перерозподілення інтенсивності хвилі сильних розривів в воді пружним екраном

$\sigma_{1P}, \sigma_{1S}$  на фронтах хвиль сильних розривів, які проникли через екран. Відображені хвилі від обох поверхонь екрана та епюри напружень на



фронтах хвиль сильних розривів у середовищі екрана умовно не показані. Видно, що пружний екран перебудовує фронт хвилі сильних розривів у воді, розчіплюючи його на два фронти меншої інтенсивності зі зміщенням у часі.

Також досліджувався вплив хвилі сильних розривів на напружено-деформований стан екрана. На рис. 3 зображена залежність напружень  $\sigma_{2+}$  в точках падіння променів хвилі сильних розривів на поверхню  $G_1$  від координати  $x$ . Виявлено, що при наближенні падаючої хвилі на межі вода-екран до точок, де відбувається повне внутрішнє відображення, додаткові напруження  $\sigma_{2+}$  в ідеально пружних екранах стрімко зростають. Слід підкреслити, що знайдений ефект необмеженого зростання деформацій і напружень в точці квазіповного внутрішнього відображення на межах розділу пружних середовищ справедливий лише в рамках теорії ідеально пружних тіл. У реальних суцільних середовищах, що не є ідеально пружними, цей ефект виявляється в швидкому збільшенні цих параметрів в околі особливої точки.

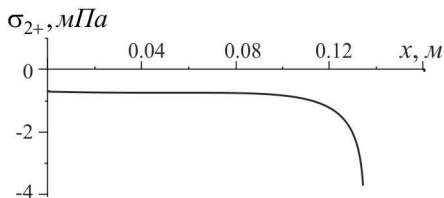


Рис. 3. Зміна напружень при віддаленні від точки падіння нормального до екрану променя

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Издательство литературы по строительству, 1965. – 456 с.
2. Гузь А.Н., Головач В.Т. Дифракция ударных волн в многосвязных телах. – К.: Наукова думка, 1972. – 254 с.
3. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Дифракция сферической ударной волны на плоскости раздела упругих сред. // Прикладная механика. – 1997. – 33, №10. – С.51-58.
4. Подольчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеивания волн. К.: Наукова думка, 1988. – 220 с.
5. Аникьев И. И., Гуляев В. И., Иванченко Г. М., Луговой П.З., Сущенко Е. А., Яковенко Е. В. Об эффекте квазиполного внутреннего отражения ударных волн на границах раздела упругих сред // Прикл. механика и техн. физика. – 2000. – Т. 41, №1. – С. 21 – 27.
6. Иванченко Г. М. Повне внутрішнє відображення розривних хвиль на межах анізотропних середовищ // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2008. – №82. – С. 137 – 145.
7. Гуляев В. И., Иванченко Г. М. Критические состояния взаимодействия разрывных волн с поверхностями раздела упругих сред // Прикл. механика. – 2009. – Т. 45 (55), №2. – С. 79 – 90.

## REFERENCES

1. *Goldsmiit V.* Udar. Teoriya i fizicheskie svojstva soudaryayemykh tel. – M.: Izdatelstvo literatury po stroitelstvu, 1965. – 456 s.
2. *Guz A.N., Golovchan V.T.* Difrakciya udarnykh voln v mnogosvyaznykh telach. – K.: Naukova dumka, 1972. – 254 s.
3. *Gulyaev V.I., Lugovoj P.Z., Ivanchenko G.M.* Difrakciya sfericheskoy udarnoy volny na ploskosti razdela uprugich sred.// Prikladnaya mechanika (International Applied Mechanics). – 1997. – 33, №10. – S. 51-58.
4. *Podilchuk Yu.N., Rubcova Yu.K.* Lucheveye metody v teorii rasprostraneniya i rasseivaniya voln. K.: Naukova dumka, 1988. – 220 s.
5. *Anikev I. I., Gulyaev V. I., Ivanchenko G. M., Lugovoj P.Z., Sushhenko E. A., Yakovenko E. V.* Ob effekte kvazipolnogo vnutrennego otrazheniya udarnykh volch na granicach razdela uprugich sred // Prikl. mechanika i techn. fizika (Journal of Applied Mechanics and Technical Physics). – 2000. – T. 41, №1. – S. 21-27.
6. *Ivanchenko G. M.* Povne vnutrishnje vidobrazhennya rozrivnich chvil na mezhach anizotropnich seredovishh // Opir materialiv i teoriya sporud (Strength of Materials and Theory of Structures): Nauk.-texn.zbirny`k – K.:KNUBA.– 2008. – № 82. – S. 137-145.
7. *Gulyaev V. I., Ivanchenko G. M.* Kriticheskie sostoyaniya vzaimodejstviya razryvnykh voln s poverchnostyami razdela uprugich sred // Prikladnaya mechanika (International Applied Mechanics). – 2009. – T. 45 (55), №2. – S. 79-90.

*Стаття надійшла до редакції 18.12.2013 р.*

*Іванченко Г.М.*

### **ВЗАЄМОДІЯ ХВИЛЬ СИЛЬНИХ РОЗРИВІВ У ВОДІ З ПРУЖНИМ ЕКРАНОМ**

Используя нулевое приближение лучевого метода, численно исследованы перестройка геометрии сферических фронтов подводной волны сильных разрывов и изменение импульса, переносимого ими, при преодолении волной упругого экрана. Обнаружено, что в идеально упругих экранах вблизи мест полного внутреннего отражения лучей на границе раздела сред вода-экран дополнительные внутренние напряжения стремительно возрастают.

**Ключевые слова:** упругая среда, волны сильных разрывов, взаимодействие, критические состояния.

*Ivanchenko G.M.*

### **THE WAVE INTERACTION OF HEAVY BREAKS IN THE WATER WITH ELASTIC BARRIER**

Transformation of underwater shock wave spherical front geometry and change of impulse carried by it at interaction with elastic shield is numerically investigated with the use of zero approximation of ray technique. It is established, that in the vicinity of spots of total internal reflection in the plane interface between water and elastic body the additional internal stresses tend to infinity.

**Key words:** elastic subsurface, waves of significant faults, impact, critical states.

УДК 539.3

**В.А. Баженов**<sup>1</sup>, д-р техн. наук  
**О.С. Погорелова**<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук  
**Т.Г. Постнікова**<sup>1</sup>, д-р техн. наук

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

## **ПОРІВНЯННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ХАРАКТЕРУ КОНТАКТУ МІЖ ЇЇ ЕЛЕМЕНТАМИ**

Для порівняння динамічної поведінки віброударної системи при різних типах контакту між її елементами – твердому та м'якому, побудовані та порівнюються криві навантаження та амплітудно-частотні характеристики системи для обох типів удару. Побудови виконуються методом продовження розв'язку за параметром в сукупності з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем, якими і є віброударні системи, та моделюванням удару нелінійною силою контактної взаємодії, що базується на квазістатичній теорії Герца.

**Ключові слова:** віброударна система, твердий та м'який контакт, крива навантаження, амплітудно-частотна характеристика, продовження розв'язку за параметром, теорія Герца, динамічна поведінка.

### **Вступ**

В статті виконується порівняння динамічної поведінки віброударної системи (ВУС) при такій зміні її параметрів, що викликає зміну типу удару між її елементами. Для того, щоб виконати таке порівняння, ми розглядаємо криві навантаження та амплітудно-частотні характеристики ВУС в двох випадках – для твердого та для м'якого ударів. Побудова цих характеристик виконується методом продовження розв'язку за параметром.

Стаття є продовженням роботи авторів, яка була розпочата раніше. Результати були викладені в роботах [1–5], де докладно описані теоретичні основи та реалізація методу продовження розв'язку за параметром для аналізу динаміки (ВУС) з твердим ударом, побудовані криві навантаження та амплітудно-частотні характеристики (АЧХ). Відомо [6], що характер контакту між елементами ВУС є однією з її важливіших рис, одним із аспектів класифікації ВУС. В нашій роботі в цьому випуску збірника [7] показано, що, змінюючи параметри ВУС, можна змінити характер контакту між її елементами – твердий контакт перетворити на м'який. Як при цьому зміниться динамічна поведінка ВУС, характер її коливального руху? До сього часу ми застосовували метод продовження розв'язку за параметром для аналізу динаміки (ВУС)

тільки з твердим ударом. Використаємо цей метод в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем [8] для побудови динамічних характеристик коливального руху ВУС з м'яким ударом, який буде мати місце в системі при певних значеннях її параметрів. В статті порівнюються динамічні характеристики ВУС та характер її коливального руху для двох типів контакту, отримані при різних значеннях параметрів однієї моделі ВУС.

### **1. Постановка задачі**

Ми розглядаємо модель ВУС, яка представлена в статті [7] в цьому випуску збірника та зображена на рис. 1,а в цій статті. Опис моделі, вигляд зовнішнього навантаження, рівняння руху та спосіб моделювання удару також описані там в постановці задачі. Не будемо їх повторювати. Числові параметри системи відповідають таблиці 4 в статті [7], тобто це є параметри, які забезпечують м'який удар в системі – удар, що має велику тривалість та найменш можливий коефіцієнт відносно тривалості удару.

### **2. Побудова кривих навантаження для ВУС з м'яким ударом та її порівняння з аналогічними кривими для ВУС з твердим ударом**

В роботах [1-5] докладно описані теорія та методика застосування методу продовження розв'язку за параметром в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем. Коротко ця методика полягає в наступному. Оскільки ми будемо періодичні розв'язки з періодом  $T$ , де  $T$  – період зовнішнього навантаження, то головним рівнянням є умова  $T$ -періодичності розв'язку. Розкладаючи ліві частини рівняння в ряд Тейлора та відкидаючи члени другого та всіх більш високих порядків, лінеарізуємо нелінійну систему та отримуємо лінійну алгебраїчну систему. Її невідомими є прирости вихідних значень переміщень та швидкостей тіл ВУС. Ці прирости виникають, якщо параметр, обраний ведучим, отримує приріст. Коефіцієнти та праві частини алгебраїчної системи обчислюються шляхом розв'язання відповідних задач Коші. Розв'язуючи алгебраїчну систему, знаходимо прирости вихідних значень переміщень та швидкостей, що і визначить самі вихідні значення переміщень та швидкостей. Вони в свою чергу обумовлять розв'язок диференціальних рівнянь руху для нового значення ведучого параметра, якій отримав приріст. Таким чином крок за кроком, збільшуючи (чи зменшуючи) на кожному кроці ведучий параметр на обрану величину, будемо будь-яку характеристику ВУС в залежності від параметра, що обраний ведучим.

Віброударна система, яка є сильно нелінійною, при зміні параметрів як самої системи, так і зовнішнього навантаження, в дійсності може змінювати режими свого коливального руху. Тому інколи  $T$ -періодичний режим, що отриманий чисельним методом продовження розв'язку за

параметром, справді може не реалізуватися, тоді він втрачає стійкість. Отже, побудови будь-якої характеристики мають бути доповнені аналізом стійкості отриманих режимів коливальних. Проблема стійкості віброударного режиму коливальних зводиться до аналізу власних чисел матриці монохромії, яка збігається з матрицею отриманої алгебраїчної системи. Її власні числа є мультиплікатори цієї системи. Про стійкість коливального руху роблять висновок за значеннями мультиплікаторів системи, які для стійкого режиму коливальних знаходяться в середині одиничного кола [8]. Тобто, коливальний режим стійкий, якщо усі мультиплікатори системи лежать в одиничному колі. Якщо режим втрачає стійкість, хоча б один з мультиплікаторів виходить за межу цього кола.

За цією методикою побудуємо криві навантаження для ВУС з параметрами, які приведені в таблиці 4 в статті [7] в цьому випуску збірника. При побудові кривих навантаження ведучим параметром є безрозмірний параметр інтенсивності зовнішнього навантаження  $\lambda$ . Графіки кривих навантаження приведені на рис. 1.

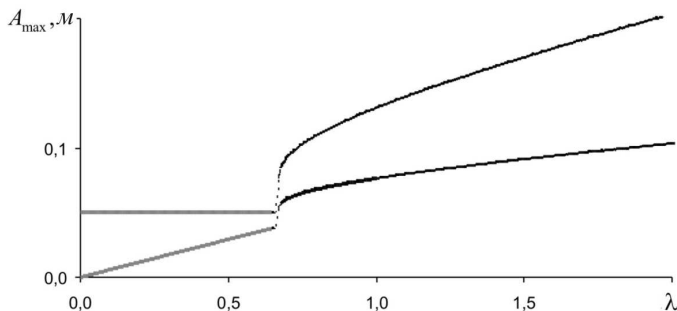


Рис. 1. Криві навантаження при м'якому ударі

На графіках по осі ординат відкладені напіврозмахи коливальних обох тіл ( $A_{\max} = (|x_{\min}| + |x_{\max}|) / 2$ ), по осі абсцис – параметр інтенсивності зовнішнього навантаження  $\lambda$ . Верхня крива на графіках відповідає приєднаному тілу, нижня – основному. Ділянки кривих навантаження сірого кольору відповідають безударному руху віброударної системи, ділянки пунктирних ліній – нестійкому  $T$ -періодичному руху і тільки ділянки чорного кольору відповідають стійкому  $T$ -періодичному руху. Нагадаємо, що  $T$  – період зовнішнього навантаження. В діапазонах зміни аргументу, де  $T$ -періодичний рух нестійкий, можуть реалізовуватися  $nT$ -періодичні режими. Наприклад, на рис. 2 приведені графіки переміщень основного та приєданого тіл ВУС та сили контактної взаємодії в

залежності від часу при значенні параметра інтенсивності навантаження  $\lambda=0,65$ . Цей  $2T$ -періодичний одноударний режим руху отриманий прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху системи методом Рунге-Кутта 4-го порядку. Товстою лінією тут і далі зображені криві, що відносяться до основного тіла, тонкою – до приєднаного. Побудовані фазові траєкторії тіл системи. На графіку контактної сили тонкою сірою лінією показане зовнішнє навантаження для того, щоб краще бачити  $2T$ -періодичність режиму.

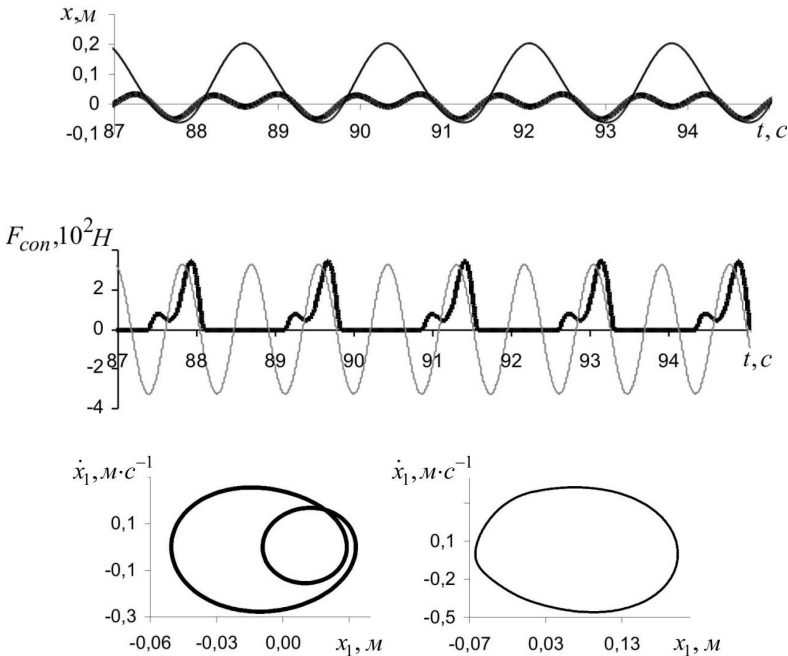


Рис. 2. Характеристики  $2T$ -періодичного одноударного режиму ( $\lambda=0,65$ )

Для порівняння динамічної поведінки ВУС з різним типом контакту приведемо на рис.3 графіки кривих навантаження для ВУС з твердим ударом, які докладно описані в [3]. Числові параметри той же самій моделі ВУС відповідають Таблиці 1 в статті [7] в цьому випуску збірника.

Порівнюючи графіки кривих навантаження на рис.1 та рис.3, бачимо, що по-перше, характер кривих не змінився, по-друге, значення напіврозмахів обох тіл при м'якому ударі менше ніж при твердому при однакових значеннях параметра інтенсивності зовнішнього навантаження  $\lambda$ . Це логічно: при пом'якшенні удару його тривалість збільшується, при

цьому контактна сила (див. рис. 9 статті [7]) та напіврозмахи коливань зменшуються.

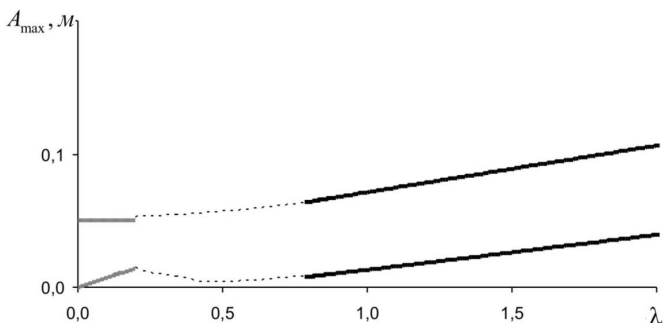


Рис. 3. Криві навантаження при твердому ударі

### 3. Побудова амплітудно-частотних характеристик для ВУС з м'яким ударом та їхнє порівняння з аналогічними характеристиками для ВУС з твердим ударом

За методикою, що приведена в роботах [1,4,5] та стисло описана в п. 2, побудуємо амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) для ВУС з параметрами, які приведені в таблиці 4 в статті [7] в цьому випуску збірника. При побудові АЧХ ведучим параметром є частота зовнішнього навантаження  $\omega$ . Параметр інтенсивності зовнішнього навантаження при цьому дорівнював  $\lambda=1,0$ . АЧХ приведені на рис. 4

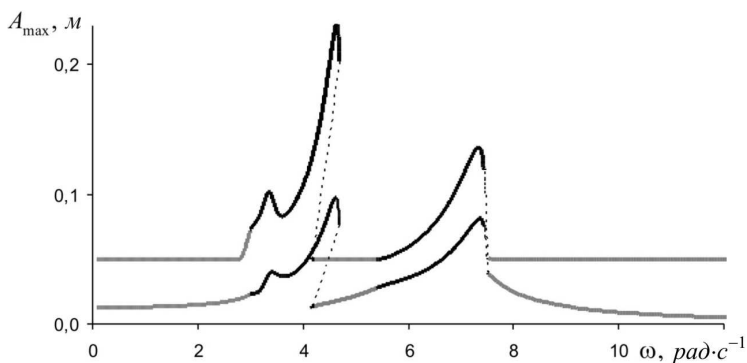


Рис. 4 АЧХ при м'якому ударі

По осі ординат відкладені напіврозмахи коливань обох тіл, по осі абсцис – частота зовнішнього навантаження  $\omega$ . Верхня крива відповідає

приєднаному тілу, нижня – основному. Ділянки АЧХ сірого кольору відповідають безударному рухові ВУС, ділянки пунктирних ліній – нестійкому  $T$ -періодичному руху і тільки ділянки чорного кольору відповідають стійкому  $T$ -періодичному рухові. Як бачимо, АЧХ має доволі складний характер. Підкреслимо складний та цікавий характер АЧХ в діапазонах частот  $4,1 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1} \leq \omega < 4,7 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$  та  $7,4 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1} \leq \omega < 7,5 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ . Тут існують одночасно три гілки кривих для кожного тіла. Дві з них відповідають стійким  $T$ -періодичним режимам, одна – нестійкому. В дійсності можуть реалізовуватись тільки стійкі режими, в цьому діапазоні існують одночасно одноударний та безударний стійкі режими. Який з них реалізується справді, залежить від вихідних умов, тобто, від того, в якому стані знаходилась ВУС в момент перед тім, як частота зовнішнього навантаження отримала невеликий приріст. Існування цих трьох гілок, отриманих при русі вздовж кривої та при інтегруванні рівнянь руху з різними вихідними умовами, наочно демонструє надзвичайно велику залежність стану сильно нелінійної системи, якою і є віброударна система, від вихідних умов. Для прикладу на рис. 5 наведений  $T$ -періодичний безударний рух ВУС при значенні частоти зовнішнього навантаження  $\omega = 4,5 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ , який реалізується при інтегруванні рівнянь руху методом Рунге – Кутта з нульовими вихідними умовами. Цей режим відповідає ділянці АЧХ, яка показана сірим кольором.

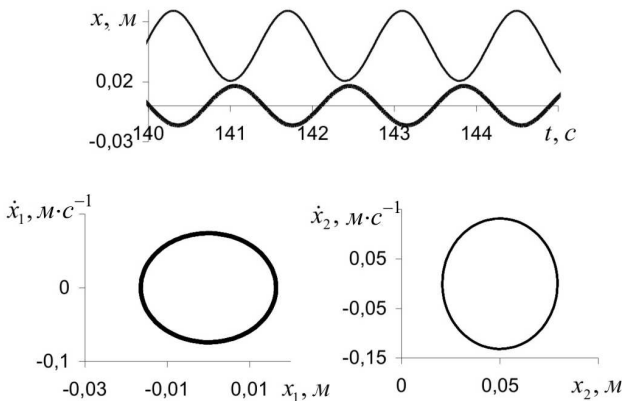


Рис. 5. Характеристики  $T$ -періодичного безударного режиму ( $\omega = 4,5 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$ )



Для порівняння приведемо на рис. 6 графіки АЧХ для ВУС з твердим ударом, які докладно описані в [5]. Числові параметри тій же самій моделі ВУС відповідають таблиці 1 [7] в цьому випуску збірника.

Порівняння АЧХ обох систем показує, що вони зазнали значних змін: по-перше, відбувається помітний зсув частотної характеристики вздовж осі частот, по-друге, на більших частотах спостерігається другий резонансний сплеск. Наявність 3-х гілок кривих в деякому діапазоні частот зберігається. Дві гілки відповідають стійким  $T$ -періодичним режимам – одноударному та безударному, третя гілка – нестійкому режиму коливаль.

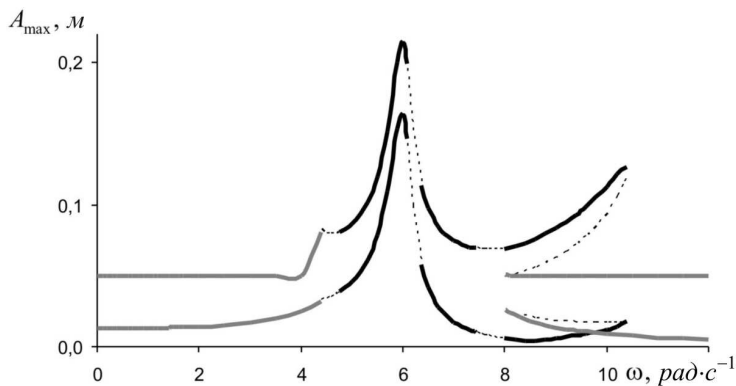


Рис. 6. АЧХ при твердому ударі

Отже, зміни параметрів віброударної системи, що зробили удар між тілами м'яким, викликають також і значну зміну амплітудно-частотної характеристики.

### Висновки

Виконані в роботі дослідження дозволяють зробити наступні висновки.

1. Застосування метода продовження розв'язку за параметром в сукупності з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем, якими є віброударні системи, та моделюванням удару нелінійною контактною силою на базі квазістатичної теорії Герца дозволяє виконати повний аналіз динамічної поведінки віброударної системи.

2. Характер кривих навантаження не змінюється при такій зміні параметрів ВУС, яка приводить до зміни типу удару з твердого на м'який. Змінюються величини напіврозмахів коливаль обох тіл ВУС, величини контактної сили та тривалості удару.

3. Зміна параметрів ВУС, що приводить до пом'якшення удару, ускладнює характер та викликає значні зміни амплітудно-частотних характеристик системи.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Анализ динамического поведения виброударных систем разных типов. LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH & Co. KG Dudweiler, Germany, 2013. – 132 с.
2. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2011.-Вип. 87. – С. 63–73.
3. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Реалізація методу продовження за параметром для віброударних систем при побудові кривих навантаження. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2011. – Вип. 88. – С. 56–64.
4. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Теоретичні основи аналізу динамічної поведінки віброударних систем. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2012. – Вип. 89. – К.: КНУБА, 2012. – С.39–49.
5. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Застосування методу продовження розв'язку за параметром до аналізу динамічної поведінки віброударної системи. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2012. –Вип. 90. – С.16–30.
6. *Blazejczyk-Okolewska B., Czolczynski K., Kapitaniak T.* Classification principles of types of mechanical systems with impacts–fundamental assumptions and rules //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2004. – Т. 23. – №. 3. – С. 517-537.
7. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Influence of System Stiffness Parameters at Contact Softness in Vibroimpact System // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2013. – Вип. 92. – С. 62-74.
8. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П.* Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах //Вища школа. - Львов, 1983. – 286 с.

#### REFERENCES

1. *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Analiz dinamicheskogo povedeniya vibroudarnyih sistem raznyih tipov (Dynamic Behaviour Analysis of Different Types Vibroimpact Systems). LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH & Co. KG Dudweiler, Germany, 2013. – 132 с.
2. *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Rozvy`tok metodu prodovzhennya za parametrom dlya vibroudarny`x sy`stem pry` modelyuvanni udaru sy`loyu kontaktnoyi vzaemodiyi (The development of continuation after parameter method for vibroimpact systems provided the impact is simulated by contact interaction force).// Opir materialiv i teoriya sporud (Strength of Materials and Theory of Structures): Nauk.-texn.zbirny`k □ К.:КНУБА. 2011.-Vy`p. 87. □ S. 63–73.
3. *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Realizaciya metodu prodovzhennya za parametrom dlya vibroudarny`x sy`stem pry` pobudovi kry`vy`x navantazhennya (The realization of parameter continuation method for vibroimpact systems at loading curves construction ). // Opir materialiv i teoriya sporud (Strength of Materials and Theory of Structures): Nauk.-texn.zbirny`k – К.:КНУБА. 2011. – Vy`p. 88. – S. 56–64.

4. *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Teoreticheskiye osnovyye analizy dyanamicheskoy povedinky vibroudarnykh sistem (Theoretical principles of dynamic behavior analysis for vibroimpact systems). // *Opir materialiv i teoriya sporud (Strength of Materials and Theory of Structures): Nauk.-texn.zbirnyk – K.:KNUBA. 2012. – Vyep. 89. – S.39–49.*
5. *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Zastosuvannya metodu prodovzhennya rozv'yazku za parametrom do analizy dyanamicheskoy povedinky vibroudarnoyi systemy (Parameter continuation method using for analysis of vibroimpact system dynamic behaviour) // *Opir materialiv i teoriya sporud (Strength of Materials and Theory of Structures): Nauk.-texn.zbirnyk – K.:KNUBA. 2012. – Vyep. 90. – S.16–30.*
6. *Blaziejczyk-Okolewska B., Czolczynski K., Kapitaniak T.* Classification principles of types of mechanical systems with impacts—fundamental assumptions and rules // *European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2004. – T. 23. – №. 3. – C. 517-537.*
7. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Influence of System Stiffness Parameters at Contact Softness in Vibroimpact System // *Opir materialiv i teoriya sporud (Strength of Materials and Theory of Structures): Nauk.-texn.zbirnyk – K.:KNUBA. 2013. – Vyep. 92. – S. 62-74.*
8. *Gouliayev V.I., Bazhenov V.A., Dekhtyaryuk E.S., Gotsuliak E.A., Lizunov P.P.* Ustoichivost periodicheskikh rezhimov kolebaniy v nelineynykh mekhanicheskikh sistemakh (Stability of Periodical Process in Non-Linear Mechanical Systems) // *Vyshcha Shkola (Higher School). – Lvov, 1983. – 286 s.*

*Стаття надійшла до редакції 20.12.2013 р.*

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.*

#### **СРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ХАРАКТЕРА КОНТАКТА МЕЖДУ ЕЕ ЭЛЕМЕНТАМИ**

Для сравнения динамического поведения виброударной системы при разных типах контакта между ее элементами – твердом и мягком, построены и сравниваются кривые нагружения и амплитудно-частотные характеристики системы для обоих типов удара. Построения выполняются методом продолжения решения по параметру в совокупности с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем, какими и есть виброударные системы, и моделированием удара нелинейной силой контактного взаимодействия на базе квазистатической теории Герца.

**Ключевые слова:** виброударная система, твердый и мягкий контакт, кривая нагружения, амплитудно-частотная характеристика, продолжение решения по параметру, теория Герца, динамическое поведение.

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

#### **COMPARISON OF VIBROIMPACT SYSTEM DYNAMIC BEHAVIOUR IN DEPENDENCE FROM CONTACT KIND BETWEEN ITS ELEMENTS**

The loading curves and the amplitude-frequency characteristics for vibroimpact system under different contact kinds between its elements are created and compared. We consider two contact kinds: rigid and soft. The loading curves and amplitude-frequency characteristics are created by parameter continuation method in totality with method of periodic solutions creating for essentially nonlinear systems. We simulate the impact by nonlinear interaction contact force based on quasistatic Hertz's theory.

**Key words:** vibroimpact system, rigid and soft contact, loading curve, frequency response, parameter continuation, Hertz theory, dynamic behaviour.

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук<sup>1</sup>, д-р техн. наукЛ.В. Шевчук<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680

<sup>2</sup>Національний транспортний університет  
вул. Суворова 1, м. Київ, Україна. 01010

## НЕГОЛОНОМНА ДИНАМІКА КОЛИВАНЬ КРУЖЛЯННЯ КОЛОН ГЛИБОКОГО БУРІННЯ

На основі методів неголономної механіки поставлена задача про коливання кружляння долота бурильної колони, яка попередньо напружена поздовжньою силою і обертається під дією прикладеного до долота моменту сил різання. Виконано аналіз механізму самозбудження коливань. Показано, що вони можуть бути як стійкі, так і нестійкі.

**Ключові слова:** бурильна колона, буріння, долото, коливання кружляння.

1. В теперішній час у світовій енергетиці проблема добування і перерозподілу нафти та газу все більше загострюється. У зв'язку з вичерпанням легкодоступних вуглеводневих палив, останнім часом все більші об'єми нафти і газу добуваються із дуже глибоких підземних резервуарів. За даними геологорозвідки ресурси газу в українському секторі акваторії Чорного і Азовського морів оцінюються в 1228 млрд.куб.м. Проте глибина цих покладів складає 7000 м і більше, а рекордна глибина буріння в Україні поки що рівна 6200 м. Однак в цих випадках проблема видобування нафти і газу пов'язана зі значними технологічними труднощами буріння глибоких свердловин. Одна з основних труднощів – можливість появи нештатних ситуацій, які викликані критичними станами квазістатичної рівноваги і коливань бурильної колони (БК) [1 – 8].

Проте найбільш складним механізмом володіють згині коливання низу БК, які викликані дією на долото змінних з часом нормальних і дотичних сил контактної і фрикційної взаємодії долота зі стінкою свердловини [9,10]. В цьому випадку геометричний центр долота починає рухатися навколо осьової лінії свердловини, обганяючи або відстаючи від обертального руху самої колони. Схожі рухи здійснюють під дією гіроскопічних сил інерції гіроскоп або ротор центрифуги пральної машини старої конструкції. У механіці вони отримали назву процесійних коливань. У роботах відмічається, що описаний вище рух центра долота має іншу природу і для його визначення використовують термін “whirling” – кружляння. Воно вивчалось на вельми спрощених фізичних і

математичних моделях з одною або двома степенями вільності при різних законах фрикційної взаємодії долота зі стінкою та дном свердловини. Ці моделі вельми далекі від реальної системи і слабо відображають реальні динамічні процеси.

Як показують експерименти та спостереження, при деяких режимах коливань кружляння долота починає перекочуватися по криволінійній поверхні дна свердловини, а його центр рухається по досить складних траєкторіях, які нагадують багатопелюсткову квітку.

Вивчення автоколивань такої системи може бути виконане лише методами неголономної механіки [11]. Справжня робота присвячена проблемі комп'ютерного передбачення і моделювання явища коливань кружляння долота і бурильної колони як неголономної системи.

**2. Постановка задачі про неголономне кочення з вертінням твердого тіла по шорсткій поверхні.** Розробка багатьох питань механіки неголономних систем тісно пов'язане з застосуванням методів теорії диференціальних рівнянь і диференціальної геометрії. Загальне геометричне трактування проблем руху таких систем привело до створення нового розділу диференціальної геометрії – неголономної геометрії, основу якої складає задача про кочення без ковзання однієї поверхні по іншій. Вона формулюється таким чином. Є нерухома поверхня  $S_1$  і рухома поверхня  $S_2$ , яка контактує з  $S_1$  в точці дотику  $G$ . Задана вектор-функція  $\vec{\omega}(t)$  залежності миттєвої кутової швидкості  $\vec{\omega}$  поверхні  $S_2$  від часу  $t$ . Потрібно побудувати траєкторії  $l_1$  і  $l_2$  руху точки  $G$  на кожній з поверхонь.

При розв'язанні цієї задачі необхідно враховувати, що в кожен момент часу поле швидкостей точок рухомої поверхні таке ж, як би вона оберталася з деякою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо деякої осі, що проходить через точку дотику. Залежно від напрямку миттєвій осі обертання розрізняють чисте або власне кочення і так зване вертіння. Чисте кочення має місце у разі, коли миттєва вісь обертання рухомої поверхні лежить в дотичній площині, дотичній до обох поверхонь, і вертиться – коли миттєва вісь обертання нормальна до цієї площини.

В загальному випадку кочення поверхні  $S_2$  по поверхні  $S_1$  можна розкласти на чисте кочення і чисте вертіння відповідно розкладанню вектора  $\vec{\omega}$  на складову  $\vec{\omega}_\tau$ , яка лежить в дотичній площині, і складову  $\vec{\omega}_n$ , нормальну до поверхонь.

Задача про кочення і вертіння суттєво ускладнюється, якщо вектори  $\vec{\omega}_\tau(t)$  та  $\vec{\omega}_n(t)$  не є заданими, а мають бути визначені з яких-небудь додаткових умов. Так, в неголономній механіці вважається, що поверхні

$S_1$  та  $S_2$  обмежують тверді шорсткі тіла, що володіють масами, і їх взаємний рух без ковзання здійснюється в результаті прикладання до них сил, які залежать (або не залежать) від часу  $t$ . Тоді складаються динамічні рівняння руху тіл, для яких кінематичні умови їх контактної взаємодії відіграють роль неголономних в'язей. У такій постановці вирішені задачі про кочення без ковзання тіл простих форм по простих поверхнях. Зокрема, показано, що залежно від початкових умов кочення шорсткої кульки по шорсткій сферичній поверхні може супроводжуватися рухом точки їх контакту уздовж деяких гладких синусоїдальних траєкторій, кривих з точками повернення і петлеподібних кривих [11].

Мабуть, найбільш яскравим з відомих прикладів неголономних систем є двоколісні і навіть одноколісні (моноцикли) велосипеди, які зберігають стійкість свого вертикального положення, завдяки наявності неголономної керованої в'язі.

Умови кочення з вертінням можуть бути реалізовані і в системі долото-дно свердловини. Вони забезпечуються за рахунок наявності на поверхні долота діамантових вкраплень, які при коченні відіграють роль твердих інденторів, які вдавлюються в скельну породу на поверхні дна свердловини і перешкоджають ковзанню долота по ній.

Оскільки поверхня долота (рис. 1) і дна свердловини можуть мати різні геометричні форми, в процесі буріння

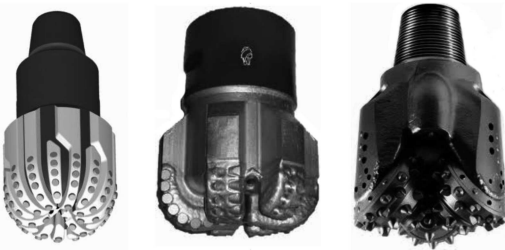


Рис. 1. Геометричні форми доліт

можливі переходи руху долота від чистого вертіння (штатний процес буріння) до його додатковим коченням, відходу з вертикалі точки дотику долота з дном свердловини і

викривлення осі бурильної колони. Для дослідження цих явищ необхідно поставити задачу про пружні поперечні коливання бурильної колони, в якій неголономні в'язі є граничними умовами для рівнянь руху долота.

**3. Основні співвідношення динаміки нижньої секції БК.** Коливання кружляння долота, яке обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , зазвичай супроводжується залученням до вібраційного процесу також і нижніх ділянок колони, які розташовані між центруючими пристроями і відіграють роль додаткових опор. Тому при аналізі механізму збудження

коливань кружляння долота будемо нехтувати впливом верхньої частини БК і виділимо її фрагмент завдовжки  $l$  (рис. 2).

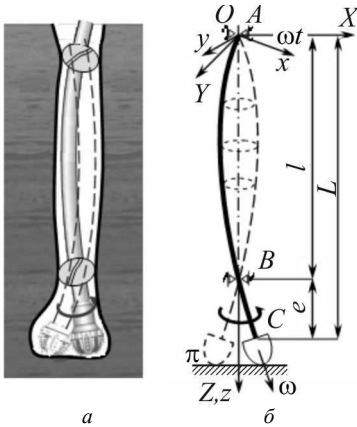


Рис. 2. Структурна (а) і розрахункова (б) схемиколивань кружлянь бурильних доліт

Виділена трубчаста ділянка БК попередньо напружена прикладеним до долота крутним моментом  $M_z$  і подовжною стискуючою силою  $T$ , рівній реакції опирається долота на дно свердловини. Динаміку цієї ділянки моделюватимемо на основі теорії стисло-закручених стрижнів, що обертаються. Для цього введемо нерухому систему координат  $OXYZ$  і систему координат  $Oxuz$ , що обертається разом з БК, із загальним початком  $O$  на опорі  $A$  (рис. 3.).

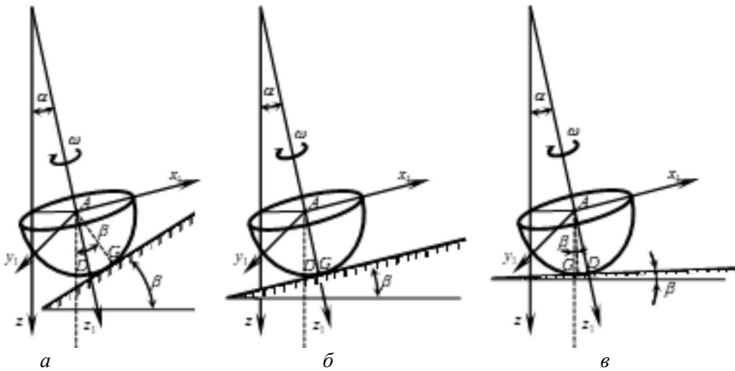


Рис. 3. Схема кочення і вертіння долота

Для кількісного аналізу кінематично збуджуваних коливань кружляння необхідно скласти рівняння динаміки всієї виділеної для розгляду двогонної балки  $ABC$ , що обертається, попередньо напруженої крутним моментом  $M_z = -M^{fr}$  і подовжною стискуючою силою  $T = -R$ .

Врахуємо, що на трубу БК крім внутрішніх сил пружності діють також сили інерції, від обертання.

$$f_u = (\rho F + \rho_e F_e) \omega^2 u + 2(\rho F + \rho_e F_e) \omega \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$f_v = (\rho F + \rho_e F_e) \omega^2 v - 2(\rho F + \rho_e F_e) \omega \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1)$$

Тоді рівняння динамічного пружного згинання БК при наявності відмічених факторів можна представити у виді:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - (\rho F + \rho_l F_l) \omega^2 u - 2(\rho F + \rho_l F_l) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho F + \rho_l F_l) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - (\rho F + \rho_l F_l) \omega^2 v -$$

$$+ 2(\rho F + \rho_l F_l) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho F + \rho_l F_l) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

де  $u(z, t)$ ,  $v(z, t)$  – пружні переміщення елемента труби БК в напрямках осей  $Ox$ ,  $Oy$  відповідно;  $EI$  – жорсткість труби БК при згині;  $\rho$ ,  $\rho_l$  – густина матеріалу труби і промивної рідини, відповідно;  $F$ ,  $F_l$  – площі поперечних перерізів стінки труби і її внутрішнього каналу, відповідно;  $t$  – час.

Для опису пружного повороту долота введемо також жорстко пов'язану з ним систему координат  $Cx_1y_1z_1$ , осі  $Cx_1$ ,  $Cy_1$  якої у початковому положенні паралельні осям  $Ox$ ,  $Oy$ , відповідно, а при пружній деформації долота повертаються на кути  $-v|_C$  і  $u|_C$  (рис. 3.).

Кочення поверхні  $S_2$  по поверхні  $S_1$  задаватимемо в рухомій системі координат  $Gx_2y_2z_2$ , початок  $G$  якої збігаються з точкою зіткнення поверхонь  $S_1$  і  $S_2$ ; вісь  $Gz_2$  є продовженням відрізка  $CG$ ; вісь  $Gy_2$  перпендикулярна площині, яка містить вісь  $OZ$  і відрізок  $CG$ , і орієнтована у напрямі обертання; вісь  $Gx_2$  доповнює систему осей до правої трійки.

Умова кочення долота без ковзання дозволяє сформулювати в точці  $C$  дві групи крайових рівнянь. Вони включають два кінематичні рівняння, які задають швидкість точки  $C$ , і два динамічні рівняння, які визначають динамічну рівновагу всіх моментів відносно точки  $G$ .

Для виведення кінематичних крайових умов обчислимо абсолютну швидкість центра  $C$ , тіла  $S_2$ , що котиться, в проєкціях на осі системи  $Oxuz$ .



В той же час цю швидкість можна обчислити, виходячи із аналізу пружних коливань кінця  $C$  стержня:

Прирівнюючи праві частини цих рівностей, одержимо кінематичні крайові умови

$$\begin{aligned} \dot{u} - \omega v - a \sqrt{1 - \frac{u^2 - v^2}{(R-a)^2}} \left( -\dot{u}' - \omega v' + \frac{\omega}{R-a} v \right) &= 0, \\ \dot{v} + \omega u - a \sqrt{1 - \frac{u^2 - v^2}{(R-a)^2}} \left( -\dot{v}' + \omega u' - \frac{\omega}{R-a} u \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Вони є неголономними, оскільки містять похідні  $\dot{u}$  і  $\dot{v}$ .

Для побудови рівнянь руху скористаємося теоремою про зміну моменту кількостей руху долота відносно точки  $G$

$$\frac{\tilde{d} \overset{\rightarrow}{K}_G}{dt} + \overset{\rightarrow}{\Omega}_{(2)} \times \overset{\rightarrow}{K}_G = \overset{\rightarrow}{M}_G, \quad (4)$$

де  $\overset{\rightarrow}{K}_G$  – момент кількостей руху долота відносно точки, представлений

в системі  $Gx_2y_2z_2$ ,  $\overset{\rightarrow}{M}_G$  – момент сил пружності, які діють на долото, також записаний в цій же системі.

Вектор  $\overset{\rightarrow}{K}_G$  підраховується за формулою:

$$\begin{aligned} \overset{\rightarrow}{K}_G &= \frac{J+ma^2}{\sqrt{u^2+v^2}} \left\{ [(-\dot{v}' + \omega u')u + (\dot{u}' + \omega v')v] \sqrt{1 - \frac{u^2+v^2}{(R-a)^2}} - \omega \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{R-a} \right\} \overset{\rightarrow}{i}_2 + \\ &+ \frac{J+ma^2}{\sqrt{u^2+v^2}} [(\dot{v}' - \omega u')v + (\dot{u}' + \omega v')u] \overset{\rightarrow}{j}_2 + \\ &+ J \left\{ [(-\dot{v}' + \omega u')u + (\dot{u}' + \omega v')v] \cdot \frac{1}{R-a} + \omega \sqrt{1 - \frac{u^2+v^2}{(R-a)^2}} \right\} \overset{\rightarrow}{k}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Момент  $\overset{\rightarrow}{M}_G$  виражається через внутрішні згинні моменти  $Elu''$ ,  $Elv''$  і перерізувальні сили  $Elu'''$ ,  $Elv'''$  на краю  $C$  бурильної колони

$$\begin{aligned} \overset{\rightarrow}{M}_G &= -EI \{ [u'' + au'''(\cos \alpha + u' \sin \alpha)] \sin \beta + \\ &+ [v'' + av'''(\cos \alpha + v' \sin \alpha)] \cos \beta \} \overset{\rightarrow}{i}_2 + \\ &+ EI \{ [-u'' - au'''(\cos \alpha + u' \sin \alpha)] \cos \beta + [v'' + av'''(\cos \alpha + v' \sin \alpha)] \sin \beta \} \overset{\rightarrow}{j}_2 - \\ &- EI \{ [u'' + au'''(\cos \alpha + u' \sin \alpha)] \sin \beta + \end{aligned}$$

$$+[v''+av''(\cos \alpha+v' \sin \alpha)] \cos \beta \} \vec{k}_2. \quad (6)$$

Співвідношення (1)–(6) визначають трьохточкову крайову задачу динаміки нижнього прольоту бурильної колони з долотом. Вони доповнюються також початковими умовами, які задають початкове збурення системи. Чисельне розв'язання поставленої задачі здійснюється методом скінченних різниць із використанням неявної схеми по часу  $t$ .

По розробленій методиці були проведені дослідження коливань сферичного долота постійного радіуса  $a$  при різних значеннях радіуса  $R$  дна свердловини і кутових швидкостях  $\omega$  обертання колони.

**4. Форми коливань кружляння долота.** В результаті підрахунків встановлено, що великий вплив на динамічний процес має величина  $R$ . Встановлені найнесприятливіші випадки. Так, при великих  $R$  центр долота починає рухатися по спіралі, яка розширюється. На рис. 4 показана траєкторія руху в нерухомій і рухомій системах координат. Такий рух нестійкий. При деяких  $R$  обертання долота стійке (рис. 5), однак обертання колони і долота відбувається в різних напрямках. Воно є небезпечним, оскільки в цьому випадку відбувається викришування алмазних різців.

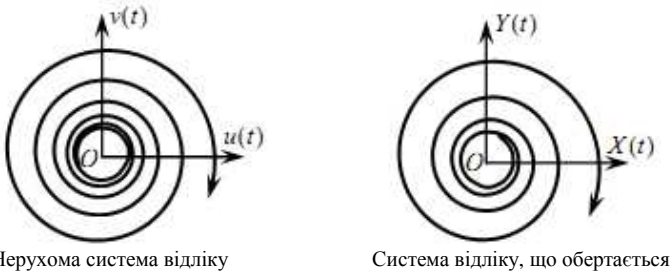


Рис. 4. Форми нестійких коливань долота  
( $R=0,25 \text{ м}$ ,  $a=0,2 \text{ м}$ ,  $\omega=20 \text{ рад/с}$ ,  $t=5 \text{ с}$ )

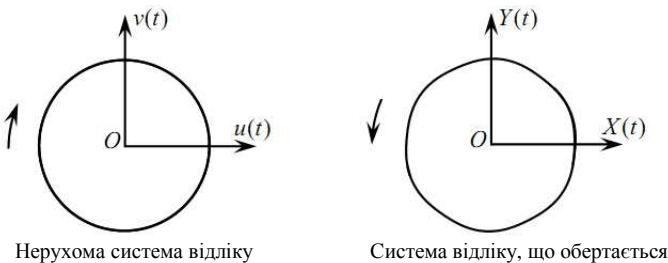
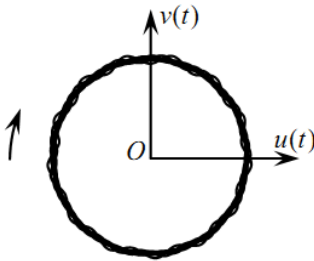
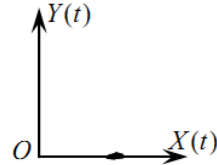


Рис. 5. Форми стійкого обертання долота  
 $R=1 \text{ м}$ ,  $a=0,2 \text{ м}$ ,  $\omega=5 \text{ рад/с}$ ,  $30 \leq t \leq 40 \text{ с}$ )

Цікавий випадок представлений на рис. 6. Тут в нерухомій системі координат долото, яке обертається, намагається зайняти положення, в якому відбувається його чисте вертіння, тобто буріння. Однак воно також недопустиме, так як тут вісь свердловини відхиляється в бік.



Нерухома система відліку



Система відліку, що обертається

Рис. 6. Форми стійкого вертіння долота  
( $R=0,6699$  м,  $a=0,2$  м,  $\omega=5$  рад/с,  $t=20$  с)

На рис. 7 показано у збільшеному масштабі форма руху долота при переході до чистого вертіння. Траєкторія яку описує центр долота в системі відліку, яка обертається разом з ним, нагадує правильну «багатопелюсткову квітку». І саме тут відбувається буріння але дещо з відхиленням.

**Висновки.** На основі методів неголономної механіки, поставлена задача про коливання кружляння долота

бурильної колони, яка попередньо напружена поздовжньою силою і обертається під дією прикладеного до долота моменту сил різання. Виконано аналіз механізму самозбудження коливань. Обговорюються динамічні ефекти, викликані змодельованою контактною взаємодією долота з дном свердловини, аналізуються умови прямого і оберненого кочення долота по поверхні дна свердловини.

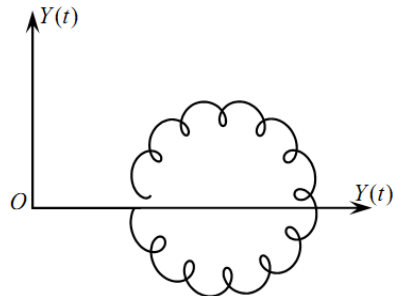


Рис. 7. Форма стійкого вертіння долота у збільшеному масштабі  
( $R=0,6699$  м,  $a=0,2$  м,  $\omega=5$  рад/с,  $19 \leq t \leq 20$  с)

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрусенко Е.Н. Изгиб бурильной колонны в криволинейной скважине с несовершенствами осевой линии / Е.Н. Андрусенко, В.И. Гуляев, С.Н. Худолій // Прикладная математика и механика. – 2012. – №3. – С. 459 – 468.
2. Гайдайчук В.В., Худолій С.М., Гловач Л.В. Теоретична ідентифікація сил опору, що діють на криволінійні бурильні колони / В.В.Гайдайчук, С.М. Худолій, Л.В.Гловач // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – №78. – С. 52 – 60.
3. Гайдайчук В.В. Про рухомість бурильної колони в криволінійній свердловині зі спіральними геометричними недосконаlostями / В.В. Гайдайчук, С.М. Худолій, О.М. Андрусенко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2010.- №85 – С.74 – 85.
4. Gulyayev V.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells / V.I. Gulyayev, O.I. Borshch // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011 — V. 78. — P. 759 – 764.
5. Gulyayev V.I. The buckling of elongated rotating drill strings / V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, I.V. Gorbunovich // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – 67. – P.140–148.
6. Gulyayev V.I. The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections / V.I. Gulyayev, S.M. Hudoly, L.V. Glovach // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.
7. Gulyayev V.I. Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models / V.I. Gulyayev, S.M. Hudoly, O.V. Glushakova // Journal of Multi-body Dynamics. – 2011 — V. 225. — P. 139 – 152.
8. Gulyayev V.I. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes / V.I. Gulyayev, S.N. Khudolij, E.N. Andrusenko // Interaction and Multiscale Mechanics. – 2011. – V.4. – No.1. – P.1–16.
9. Christoforou A.P. Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions / A.P. Christoforou, A.S. Yigit // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – 206(2). – P.243 – 260.
10. Jansen J.D. Wirl and chaotic motion of stabilized drill collars / J.D. Jansen. // SPE Drilling Engineering. – 1992. – 7(2). – P.107 – 114.
11. Neimark Ju.I. Dynamics of Nonholonomic Systems / Ju.I. Neimark, N.A. Fufaev. (Translation of mathematical monographs, 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1972. – 519p.

## REFERENCES

1. Andruszenko E.N. Bending drill string in a curved bore-hole axis line imperfections / E.N. Andruszenko, V.I. Gulyayev, S.N. Hudoly // Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – No.3. – P. 459 – 468.
2. Gaidaichuk V.V. Theoretical nature identifikatsiya forces support scho diyut on krivoliniyni drill string / V.V. Gaidaichuk, S.N. Hudoly, L.V. Glovach // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2006. – No.78. – P. 52 – 60.
3. Gaidaichuk V.V. About ruhomist drill string in krivoliniyniy sverdlolini, spiralnimi geometric nedoskonaloostyami / V.V. Gaidaichuk, S.N. Hudoly, E.N. Andruszenko // Opir materialiv i teoriya sporud. – 2010.- No.85 – P.74 – 85.
4. Gulyayev V.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells / V.I. Gulyayev, O.I. Borshch // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011 — V. 78. — P. 759 – 764.
5. Gulyayev V.I. The buckling of elongated rotating drill strings / V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, I.V. Gorbunovich // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – 67. – P.140–148.
6. Gulyayev V.I. The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections / V.I. Gulyayev, S.M. Hudoly, L.V. Glovach // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.

7. *Gulyayev V.I.* Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models / V.I. Gulyayev, S.M. Hudoliy, O.V. Glushakova // *Journal of Multi-body Dynamics.* – 2011 — V. 225. — P. 139 – 152.
8. *Gulyayev V.I.* Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes / V.I. Gulyayev, S.N. Khudoliy, E.N. Andrusenko // *Interaction and Multiscale Mechanics.* – 2011. – V.4. – No.1. – P.1–16.
9. *Christoforou A.P.* Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions / A.P. Christoforou, A.S. Yigit // *Journal of Sound and Vibration.* – 1997. – 206(2). – P.243 – 260.
10. *Jansen J.D.* Wirl and chaotic motion of stabilized drill collars / J.D. Jansen. // *SPE Drilling Engineering.* – 1992. – 7(2). – P.107 – 114.
11. *Neimark Ju.I.* Dynamics of Nonholonomic Systems / Ju.I. Neimark, N.A. Fufaev. (Translation of mathematical monographs, 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1972. – 519p.

*Стаття надійшла до редакції 23.12.2013 р.*

*Гайдайчук В.В., Шевчук Л.В.*

#### **НЕГОЛОНОМНАЯ ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ КРУЖЕНИЯ КОЛОНН ГЛУБОКОГО БУРЕНИЯ**

На основе методов неголономной механики поставлена проблема о колебании кружения долота бурильной колонны, которая предварительно напряжена продольной силой и вращается под действием прилагаемого к долоту момента сил резания. Выполнен анализ механизма самовозбуждения колебаний. Показано, что они могут быть как устойчивые, так и неустойчивые.

**Ключевые слова:** бурильная колонна, бурение, долото, колебания кружения.

*Gaidaichuk V.V., Shevchuk L.V.*

#### **NON-HOLONOMIC DYNAMICS OF WHIRLING VIBRATIONS OF DEEP DRILL COLUMNS**

On the basis of the non-holonomic mechanics methods, the problem of the whirling vibrations of a bit of a drillstring, which is prestressed by longitudinal force and rotates under the applied forces is stated. The analysis of the mechanism of the vibration self-excitation is performed. It is shown that they can be both stable and unstable.

**Key words:** drill string, drilling, bit, whirling.

УДК 539.3

**Ю.В. Ворона**<sup>1</sup>, канд.техн.наук**О.О. Лук'яненко**<sup>1</sup>, канд.техн.наук**О.В. Костіна**<sup>1</sup>, канд.техн.наук

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680*

## **СТОХАСТИЧНІ ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ЇХ ПОПЕРЕДНІХ СТАНІВ**

Побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пружних систем з урахуванням їх попередніх станів виконана на основі методів скінченних елементів, узагальнених координат, асимптотичного методу і функціонального підходу. Задача стохастичної стійкості сформульована в середньому відносно моментних функцій фазових координат першого порядку. Задача розв'язана за допомогою 7-стадійного безперервного методу Рунге-Кутта 5-го порядку і вкладених формул Дормана-Прінса. В якості прикладу досліджена стохастична стійкість параметричних коливань пружної системи з одним ступенем вільності з урахуванням її попередніх станів.

**Ключові слова:** параметричні коливання, стохастична стійкість, моментні функції, редукована модель.

Сучасний розвиток техніки та технологій все частіше потребує досліджень параметричних коливань складних пружних систем при стохастичному впливі [1, 2, 3]. Якщо враховувати стан пружної системи не тільки в даний момент часу, а і в минулому, дослідження її динамічної поведінки буде більш детальним. Динамічна поведінка систем, які описуються звичайними інтегро-диференціальними рівняннями із запізненням аргументу, представлені в роботі [4]. Ця задача є складною, тому для її вирішення найчастіше застосовуються чисельні методи. В роботі розроблено методіку формування редукованих математичних моделей, які описують стохастичні параметричні коливання пружних систем з урахуванням їх попередніх станів на основі методів скінченних елементів, узагальнених координат та асимптотичного методу, що заснований на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром. Питання про стохастичну стійкість параметричних коливань пружних систем сформульовано у середньому на основі моментних функцій фазових координат першого порядку, які отримані за допомогою функціонального підходу та формули Фурутцу-Новікова для розщеплення функціоналів. Створена методіка дослідження динамічної поведінки та стохастичної стійкості складних пружних систем на основі 7-стадійного неперервного методу чисельного інтегрування Рунге-Кутта п'ятого порядку із врахування вкладених формул Дормана-Прінса, які реалізовані у вигляді

обчислювальних процедур. Виконано тестування розробленої чисельної методики на прикладі параметричних коливань пружної системи з одним ступенем вільності при стохастичному експоненціально-корельованому впливі з урахуванням попередніх станів системи.

**1. Побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пружних систем.** Дискретна скінченноелементна модель стохастичних параметричних коливань пружних систем подається у вигляді системи лінеаризованих звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + C\dot{\bar{u}}(t) + K\bar{u}(t) + z(t)K_G\bar{u}(t) = 0, \quad (1)$$

де  $M$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $K_G$  – матриці розмірності  $n \times n$ ,  $\bar{u}(t)$  –  $n$ -вимірний вектор вузлових переміщень.

Для редукування моделі (1) вектор  $\bar{u}(t)$  шукається у вигляді  $\bar{u}(t) = U\bar{y}(t)$ , де  $U = (\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_m)$  – деяка підмножина базисних векторів;  $y_i(t)$ ,  $\dot{y}_i(t)$  – узагальнені координати та узагальнені швидкості вузлів скінченно-елементної моделі конструкції. Система (1) зводиться до виду

$$M^*\ddot{\bar{y}}(t) + C^*\dot{\bar{y}}(t) + K^*\bar{y}(t) + z(t)K_G^*\bar{y}(t) = 0. \quad (2)$$

Тут  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $K^*$  та  $K_G^*$  – редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно;  $z(t)$  – стохастичне параметричне навантаження.

В якості базисних векторів прийняті вектори форм власних коливань пружної системи  $U = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m)$ , де  $m$  – кількість утриманих форм, які нормовані по матриці мас. Редуковані матриці мас  $M^*$ , демпфірування  $C^*$  і жорсткості  $K^*$  мають вигляд

$$\begin{aligned} M^* &= U^T M U = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1), \\ C^* &= U^T C U = \text{diag}(2\varepsilon_1\omega_1, 2\varepsilon_2\omega_2, \dots, 2\varepsilon_m\omega_m), \\ K^* &= U^T K U = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\omega_i$  – частоти власних коливань,  $\varepsilon_i$  – коефіцієнт конструкційного демпфірування системи. Кількість векторів  $m$  може бути значно меншою за розмірність  $n$  вектора переміщень в рівнянні (1).

Задача побудови редукованої моделі динамічної стійкості параметричних коливань складних пружних систем з реальними геометричними параметрами є складною і розрахована на застосування обчислювальних засобів з великими ресурсами та швидкодійними процесорами. Для побудови редукованих матриць мас, демпфірування та жорсткості системи в роботі застосовується чисельна методика [5, 6], яка базується на процедурах

обчислювального комплексу скінченно-елементного аналізу NASTRAN [7]. Редукована матриця жорсткості подається у вигляді  $K^* = U^T K U$ . Для цього вузлам скінченно-елементної моделі системи надається початкове переміщення у вигляді форм її власних коливань  $U$  і розв'язується обернена задача статки. Отримана реакція системи  $R = K U$  на початкове переміщення множиться зліва на транспоновану матрицю форм власних коливань  $U^T$ . Редукована матриця геометричної жорсткості системи  $K_G^*$  подається у вигляді  $K_G^* = U^T K \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T K U$ . Тут вектори  $K U$  та  $K \Phi$  отримані за допомогою процедури визначення реакції системи на задане поле переміщень, яке подається відповідно у вигляді форм власних коливань  $U$  та форм втрати стійкості  $\Phi$ . Форми втрати стійкості  $\Phi = (\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_m)$  та матриця критичних значень статичної складової навантаження  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  визначаються при розв'язанні задачі стійкості системи методом Ланцоша.

Якщо ввести  $2m$ -вимірний вектор фазових змінних

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2m}(t))^T = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_m(t))^T, \quad (4)$$

систему (3) можна переписати в нормальній формі

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = A \bar{x}(t) + z(t) B \bar{x}(t). \quad (5)$$

Матриці  $A$  і  $B$  обчислюються за формулами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -(M^*)^{-1} K^* & -(M^*)^{-1} C^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(M^*)^{-1} K_G^* & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

де  $E$  – одинична матриця розмірності  $m \times m$ .

Для системи (5) розглядається задача Коші з початковими умовами  $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ , де вектор  $\bar{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{02m})^T$  вважається детермінованим.

У тому випадку, коли параметричний вплив має стохастичну природу,  $z(t)$  є випадковою функцією часу. Питання про виникнення параметричних коливань еквівалентне питанню про стійкість тривіальних розв'язків рівнянь (5). Внаслідок того, що коефіцієнти рівнянь є випадковими величинами, стійкість розглядається у стохастичному розумінні. У роботі питання стійкості досліджується у середньому на основі моментних функцій фазових координат першого порядку, для отримання яких використовується функціональний підхід [4, 8].

Застосовуємо метод усереднення за ансамблем реалізації системи (5)

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t) \rangle = A \langle \bar{x}(t) \rangle + B \langle z(t) \bar{x}(t) \rangle, \quad \langle \bar{x}(0) \rangle = \bar{x}_0. \quad (7)$$



Система (7) незамкнена відносно змінних  $\langle \bar{x}(t) \rangle = (\langle x_1(t) \rangle, \langle x_2(t) \rangle, \dots, \langle x_{2m}(t) \rangle)^T$ , бо містить нові невідомі функції  $\langle z(t)\bar{x}(t) \rangle = (\langle z(t)x_1(t) \rangle, \langle z(t)x_2(t) \rangle, \dots, \langle z(t)x_{2m}(t) \rangle)^T$ , які є кореляціями в момент часу  $t$  випадкового процесу  $z(t)$  з розв'язком  $\bar{x}(t)$  системи (7), компоненти якого є функціоналами від випадкового процесу  $z(t)$  в інтервалі  $[0, t]$ . Розщеплення середнього добутку двох функціоналів виконується за формулою Фурутцу-Новікова [5]

$$\langle z(t)\bar{x}(t) \rangle = \int_0^t K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle d\tau, \quad k=1, 2, \dots, 2m. \quad (8)$$

Тут  $K(t)$  – кореляційна функція процесу  $z(t)$ ,  $\left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle$  – середнє варіаційної похідної від  $\bar{x}(t)$  по  $z$  в точці  $\tau$ .

Система (7) перепишеться наступним чином

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t) \rangle = A \langle \bar{x}(t) \rangle + B \int_0^t K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle d\tau, \quad \langle \bar{x}(0) \rangle = \bar{x}_0. \quad (9)$$

За допомогою розщеплення функціоналів  $\langle z(t)\bar{x}(t) \rangle$ , ( $k=1, 2, \dots, 2m$ ), зроблено перехід від незамкненої системи диференціальних рівнянь (7) відносно вектор-функцій  $\langle \bar{x} \rangle$  та  $\langle z\bar{x} \rangle$  до незамкненої системи інтегродиференціальних рівнянь відносно вектор-функцій  $\langle \bar{x} \rangle$  та  $\left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle$ . Для вектор-функцій  $\left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle$  записується нова система інтегродиференціальних рівнянь.

Після варіювання (7) по  $z(\tau)$  ( $\tau < t$ ) маємо систему

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} = A \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} + z(t) B \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)}, \quad (10)$$

з початковими умовами  $\frac{\delta \bar{x}(\tau)}{\delta z(\tau)} = B\bar{x}(\tau)$ ,  $\frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} = 0$ .

Після усереднення виразу (10) і розщеплення добутку функціоналів за формулою Фурутцу-Новікова отримуємо систему інтегродиференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle = A \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2 \bar{x}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \right\rangle, \quad \tau < \tau_1 < t \quad (11)$$

з початковими умовами

$$\left\langle \frac{\delta \bar{x}(\tau)}{\delta z(\tau)} \right\rangle = B \langle \bar{x}(\tau) \rangle, \quad \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle = 0, \quad t < \tau. \quad (12)$$

Після варіювання (10) по  $z(\tau_1)$  при  $(\tau < \tau_1 < \tau_2 < t)$  маємо систему

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta^2 \bar{x}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \right\rangle = A \left\langle \frac{\delta^2 \bar{x}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \right\rangle + B \int_0^t d\tau_2 K(t-\tau_2) \left\langle \frac{\delta^3 \bar{x}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1) \delta z(\tau_2)} \right\rangle \quad (13)$$

з початковими умовами

$$\left\langle \frac{\delta^2 \bar{x}(\tau_1)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \right\rangle = B \left\langle \frac{\delta \bar{x}(\tau_1)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\delta^2 \bar{x}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \right\rangle = 0, \quad \tau < \tau_1. \quad (14)$$

Розв'язок задачі Коші (13) запишемо у вигляді

$$\left\langle \frac{\delta^2 \bar{x}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \right\rangle = \bar{\Psi}_1(t-\tau_1) B \left\langle \frac{\delta \bar{x}(\tau_1)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad (15)$$

де  $\bar{\Psi}_1(t)$  – фундаментальна матриця, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d}{dt} \bar{\Psi}_1(t) = A \bar{\Psi}_1(t) \quad (16)$$

з початковими умовами  $\bar{\Psi}_1(0) = E$ .

Після підстановки (15) в рівняння (11) отримаємо вираз

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle = A \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \bar{\Psi}_1(t-\tau_1) B \left\langle \frac{\delta \bar{x}(\tau_1)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad \tau < \tau_1 < t. \quad (17)$$

Розв'язок задачі Коші (17) запишемо у вигляді

$$\left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle = \bar{\Psi}_2(t-\tau) B \langle \bar{x}(\tau) \rangle, \quad (18)$$

де  $\bar{\Psi}_2(t)$  – фундаментальна матриця, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{d}{dt} \bar{\Psi}_2(t) = A \bar{\Psi}_2(t) + B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \bar{\Psi}_1(t-\tau) B \bar{\Psi}_2(\tau), \quad \tau < t. \quad (19)$$

з початковими умовами  $\bar{\Psi}_2(0) = E$ .

Фундаментальна матриця  $\bar{\Psi}_1(t)$  має вигляд

$$\bar{\Psi}_1(t) = \left\langle \frac{\delta \bar{x}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\delta x_1(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\delta x_2(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

В свою чергу, фундаментальна матриця  $\bar{\Psi}_2(t)$  задається виразом

$$\bar{\Psi}_2(t) = \langle \bar{x}(t) \rangle = \begin{bmatrix} \langle x_1(t) \rangle \\ \langle x_2(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{21} \\ \Psi_{22} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

З урахуванням формул (20) та (21) надамо системі (19) наступного вигляду

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t) \rangle = A \langle \bar{x}(t) \rangle + B \int_0^t K(t-\tau) \bar{\Psi}_1(t-\tau) B \langle \bar{x}(\tau) \rangle d\tau, \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (22)$$

Зробимо перехід до часу  $u = t - \tau$  у виразі (22) при обчисленні інтегралу, враховуючи, що при  $\tau = 0$   $u = t$ , а при  $\tau = t$   $u = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^t K(t-\tau) \bar{\Psi}_1(t-\tau) B \langle \bar{x}(\tau) \rangle d\tau &= \int_t^0 K(u) \bar{\Psi}_1(u) B \langle \bar{x}(t-u) \rangle (-du) = \\ &= \int_0^t K(u) \bar{\Psi}_1(u) B \langle \bar{x}(t-u) \rangle du. \end{aligned} \quad (23)$$

Тоді рівняння (22) переписеться у вигляді наступних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t) \rangle = A \langle \bar{x}(t) \rangle + B \int_0^t K(u) \bar{\Psi}_1(u) B \langle \bar{x}(t-u) \rangle du, \quad 0 \leq u \leq t. \quad (24)$$

Інтегро-диференціальні рівняння (24) описують стохастичні параметричні коливання пружної системи з урахуванням попередніх станів системи. Задача стохастичної стійкості сформульована у середньому відносно моментних функцій фазових координат першого порядку.

**2. Тестова задача.** Досліджуються параметричні коливання лінійної пружної системи з одним ступенем вільності при стаціонарному експоненціально-корельованому впливі з урахуванням попередніх станів системи. Стохастичні параметричні коливання пружної системи описуються за допомогою рівняння (24). Матриці  $A$  і  $B$  обчислюються за формулами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Компоненти фундаментальної матриці  $\bar{\Psi}_1(t)$  є розв'язком системи диференціальних рівнянь затухаючих коливань

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Psi_{11}(t) = \Psi_{12}(t), \\ \frac{d}{dt} \Psi_{12}(t) = -\omega_0^2 \Psi_{11}(t) - 2\xi\omega_0 \Psi_{12}(t) \end{cases} \quad (26)$$

з початковими умовами  $\Psi_{11}(0) = 1$ ,  $\Psi_{12}(0) = 0$ .

Ці компоненти мають наступний вигляд

$$\begin{cases} \Psi_{11}(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left( \cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t \right), \\ \Psi_{12}(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \frac{\sin \omega_D t}{\omega_D} \end{cases}, \quad (27)$$

де  $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2 \omega_0^2}$ .

Розв'язок рівняння (24) шукаємо у вигляді

$$\langle \bar{x}(t) \rangle = \begin{cases} \langle x_1(t) \rangle = e^{\lambda t} \sin \omega t, \\ \langle x_2(t) \rangle = \left\langle \frac{dx_1(t)}{dt} \right\rangle = \lambda e^{\lambda t} \sin \omega t + e^{\lambda t} \omega \cos \omega t, \end{cases} \quad (28)$$

а за випадкове навантаження приймаємо експоненціально-корельований вплив з кореляційною функцією

$$K(t) = \sigma_0^2 e^{-\alpha t}, \quad (29)$$

де  $\alpha$  – параметр, який характеризує кореляційну залежність процесу в різні моменти часу  $t$ ,  $\sigma_0^2$  – інтенсивність випадкового впливу.

Систему інтегро-диференціальних рівнянь, що описує стохастичні параметричні коливання пружної системи (24) з урахуванням формул (25)-(29) представимо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle x_1(t) \rangle = \lambda e^{\lambda t} \sin \omega t + e^{\lambda t} \omega \cos \omega t \\ \frac{d}{dt} \langle x_2(t) \rangle = -\omega_0^2 e^{\lambda t} \sin \omega t - 2\xi\omega_0 \left( \lambda e^{\lambda t} \sin \omega t + e^{\lambda t} \omega \cos \omega t \right) + \\ + \omega_0^2 \sigma_0^2 \int_{t-\tau_k}^{\tau_k} e^{-\alpha u} e^{-\xi\omega_0 u} \left( \cos \omega_D u + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D u \right) e^{\lambda(t-u)} \sin \omega(t-u) du + \\ + \lambda^2 e^{\lambda t} \sin \omega t + \lambda e^{\lambda t} \omega \cos \omega t + \lambda e^{\lambda t} \omega \cos \omega t - e^{\lambda t} \omega^2 \sin \omega t + \\ - \omega_0^2 \sigma_0^2 \int_0^{\tau_k} e^{-\alpha u} e^{-\xi\omega_0 u} \left( \cos \omega_D u + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D u \right) e^{\lambda(t-u)} \sin \omega(t-u) du \end{cases} \quad (30)$$

Введемо позначення

$$F(t-\tau_k, t) = \int_{t-\tau_k}^t e^{-\alpha u} e^{-\xi\omega_0 u} \left( \cos \omega_D u + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D u \right) e^{\lambda(t-u)} \sin \omega(t-u) du, \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
R(0, \tau_k) = & \lambda^2 e^{\lambda t} \sin \omega t + \lambda e^{\lambda t} \omega \cos \omega t + \lambda e^{\lambda t} \omega \cos \omega t - e^{\lambda t} \omega^2 \sin \omega t + \\
& + 2\xi \omega_0 (\lambda e^{\lambda t} \sin \omega t + e^{\lambda t} \omega \cos \omega t) - \\
& - \omega_0^2 \sigma_0^2 \left[ \frac{1}{2} e^{\lambda t} \left\{ \sin \omega t \left( \frac{e^{\beta \tau_k} (\beta \cos \omega_1^* \tau_k + \omega_1^* \sin \omega_1^* \tau_k)}{\beta^2 + \omega_1^{*2}} + \frac{e^{\beta \tau} (\beta \cos \omega_2^* \tau_k + \omega_2^* \sin \omega_2^* \tau_k)}{\beta^2 + \omega_2^{*2}} \right) \right\} \right. \\
& - \cos \omega t \left( \frac{e^{\beta \tau_k} (\beta \cos \omega_1^* \tau_k - \omega_1^* \sin \omega_1^* \tau_k)}{\beta^2 + \omega_1^{*2}} - \frac{e^{\beta \tau_k} (\beta \sin \omega_2^* \tau_k - \omega_2^* \cos \omega_2^* \tau_k)}{\beta^2 + \omega_2^{*2}} \right) + \\
& + \frac{\xi \sin \omega t}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left( \frac{e^{\beta \tau_k} (\beta \sin \omega_1^* \tau_k - \omega_1^* \cos \omega_1^* \tau_k)}{\beta^2 + \omega_1^{*2}} + \frac{e^{\beta \tau_k} (\beta \sin \omega_2^* \tau_k - \omega_2^* \cos \omega_2^* \tau_k)}{\beta^2 + \omega_2^{*2}} \right) - \\
& \left. - \frac{\xi \cos \omega t}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left( \frac{e^{\beta \tau_k} (\beta \cos \omega_2^* \tau_k + \omega_2^* \sin \omega_2^* \tau_k)}{\beta^2 + \omega_2^{*2}} - \frac{e^{\beta \tau_k} (\beta \cos \omega_1^* \tau_k + \omega_1^* \sin \omega_1^* \tau_k)}{\beta^2 + \omega_1^{*2}} \right) \right], \quad (32)
\end{aligned}$$

де  $\beta = -\alpha - \xi \omega_0 - \lambda$ ,  $\omega_1^* = \omega_D + \omega$  та  $\omega_2^* = \omega_D - \omega$ .

З урахуванням (31) та (32) система інтегро-диференціальних рівнянь (30) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle x_1(t) \rangle = \lambda e^{\lambda t} \sin \omega t + e^{\lambda t} \omega \cos \omega t, \\ \frac{d}{dt} \langle x_2(t) \rangle = -\omega_0^2 e^{\lambda t} \sin \omega t - 2\xi \omega_0 (\lambda e^{\lambda t} \sin \omega t + e^{\lambda t} \omega \cos \omega t) + \\ \quad + \omega_0^2 \sigma_0^2 F(t, t - \tau_k) + R(0, \tau_k). \end{cases} \quad (33)$$

В роботі для отримання розв'язку системи (33) застосовується 7-стадійний неперервний метод Рунге-Кутта п'ятого порядку із вкладеними формулами Дормана-Принса [4]. На кожному кроці інтегрування рівняння (33) інтеграл  $F(t, t - \tau_k)$  визначається за допомогою формули Сімсона-Корноухова.

На рис. 1 представлені результати дослідження впливу інтенсивності стохастичного навантаження  $\sigma_0^2$  на стохастичну стійкість параметричних коливань системи при  $\omega_0 = \omega = 1,0 \text{ c}^{-1}$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\tau_k = 5 \text{ c}$ ;  $\alpha = \lambda = 1,0$ . При  $\sigma_0^2 = 0$  параметричні коливання відсутні, спостерігаються затухаючі коливання системи. При збільшенні інтенсивності параметричного навантаження збільшується амплітуда параметричних коливань.

Стійкий режим параметричних коливань системи спостерігається при  $\sigma_0^2 = 0,01$  (рис. 2,а), а нестійкий – при  $\sigma_0^2 = 0,25$  (рис. 2,б) та  $\sigma_0^2 = 1,0$ .

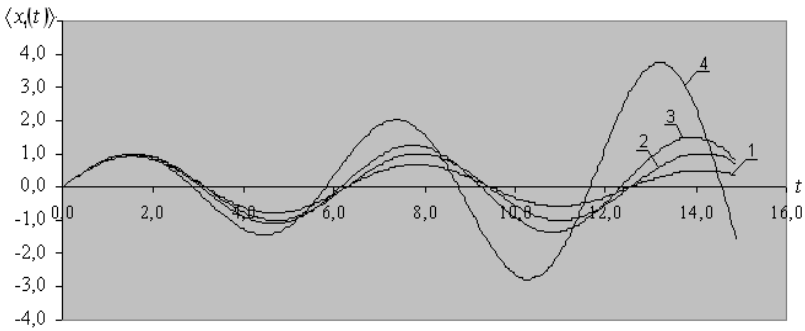


Рис. 1. Вплив інтенсивності стохастичного навантаження на динамічну поведінку системи (1 -  $\sigma_0^2=0$ ; 2 -  $\sigma_0^2=0.01$ ; 3 -  $\sigma_0^2=0.25$ ; 4 -  $\sigma_0^2=1.0$ )

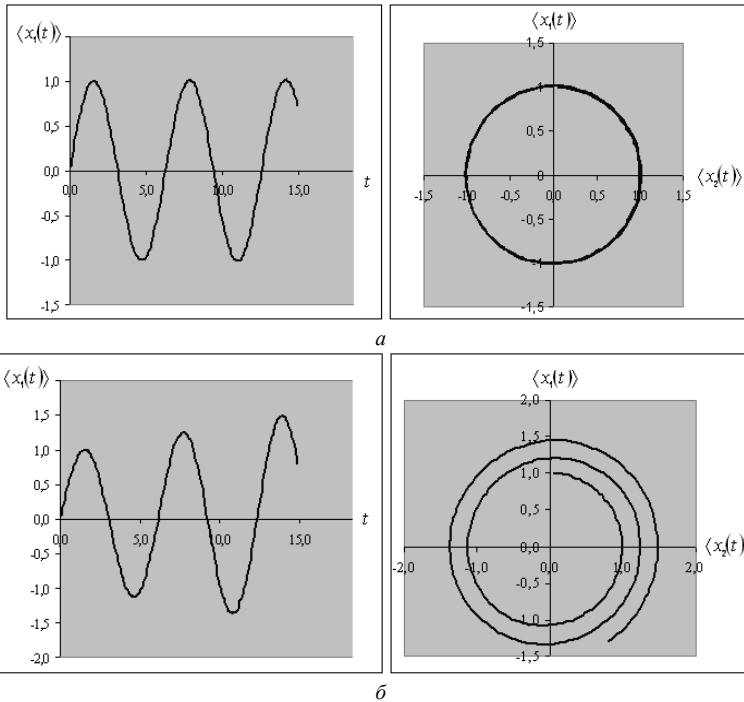


Рис. 2. Вплив інтенсивності стохастичного навантаження на стійкість системи

Оцінка впливу коефіцієнта демпфірування  $\xi$  на динамічну стійкість системи представлена на рис. 3 і виконана при  $\omega_0 = \omega = 1,0 \text{ c}^{-1}$ ;  $\sigma_0^2 = 0,25$ ;  $\tau_k = 5 \text{ c}$ ;  $\alpha = \lambda = 1,0$ . При збільшенні коефіцієнта демпфірування амплітуда параметричних коливань системи зменшується, при цьому спостерігається перехід з нестійкого режиму коливань у стійкий.

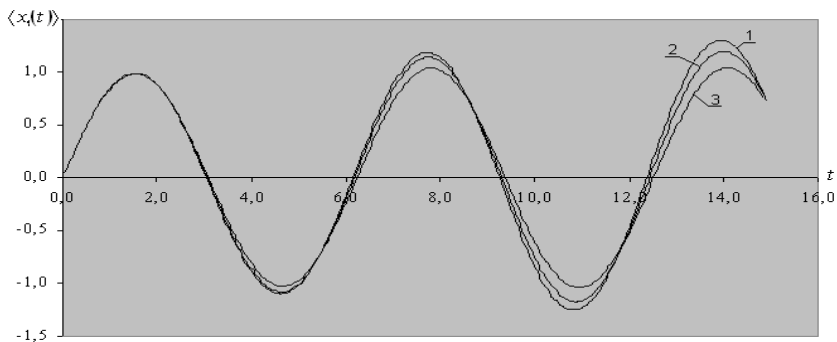


Рис. 3. Вплив коефіцієнта демпфірування на динамічну поведінку системи (1 –  $\xi = 0,05$ ; 2 –  $\xi = 0,2$ ; 3 –  $\xi = 0,5$ )

Досліджено вплив проміжку часу  $\tau_k$ , який характеризує попередній стан системи, на стійкість розв'язку задачі (33) при  $\omega_0 = \omega = 1,0 \text{ c}^{-1}$ ;  $\sigma_0^2 = 1,0$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\alpha = \lambda = 1,0$  (рис. 4).

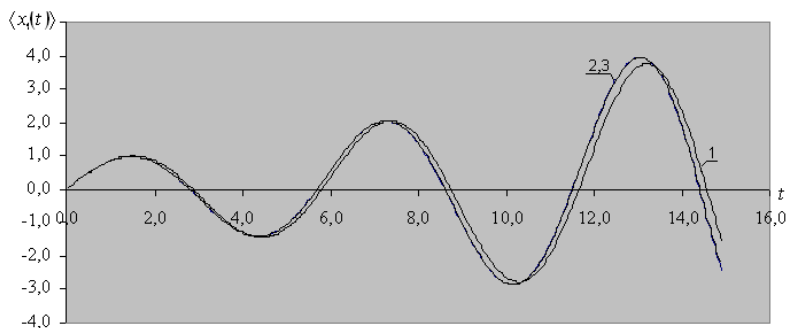


Рис. 4 Вплив проміжку часу  $\tau_k$  на динамічну поведінку системи (1 –  $\tau_k = 2,5 \text{ c}$ ; 2 –  $\tau_k = 5 \text{ c}$ ; 3 –  $\tau_k = 7,5 \text{ c}$ )

Криві, що описують стохастичні параметричні коливання системи при  $\tau_k = 5$  с та  $\tau_k = 7,5$  с, співпадають. При  $\tau_k = 2,5$  с коливання мають меншу амплітуду і більший період коливань. Це свідчить про те, що проміжок часу, який характеризує попередній стан системи, необхідно підбирати таким чином, щоб розв'язок задачі (33) був стійким.

**Висновок.** Розроблена чисельна методика дозволяє на основі редукованих моделей параметричних коливань пружних систем при стохастичному впливі з урахуванням їх попередніх станів дослідити динамічну поведінку пружної системи та оцінити її стохастичну стійкість.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. - 600 с.
2. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. - М.: Издательство „Мир”, 1978. - 336 с.
3. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Э.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. - Львов.: „Вища школа”, 1982. - 255 с.
4. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: Издательство „Мир”, 1990. - 512 с.
5. *Баженов В.А., Дехтярюк С.С., Ворона Ю.В.* Динаміка споруд. - К.: ПАТ Віпол, 2012. - 342 с.
6. *Гоцуляк С.А., Дехтярюк С.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій //Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА. - 2004. - №74.
7. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001. - 448 с.

#### REFERENCES

1. *Bolotyn V.V.* Dynamicheskaya ustoychivost' uprugykh system (Dynamic Stability of Elastic Systems). - М.: Gostekhyzdat, 1956. - 600 s.
2. *Shmydt H.* Parametrycheskiye kolebaniya (Parametric Vibrations). - М.: Yzdatel'stvo „Myr”, 1978. - 336 s.
3. *Gulyaev V.Y., Bazhenov V.A., Gotsulyak Ye.A.* Ustoychivost' nelyneynykh mekhanycheskykh system (Stability of Nonlinear Mechanical Systems). - L'vov.: „Vyshcha shkola”, 1982. - 255 s.
4. *Khayrer Э., Nersett S., Vanner H.* Reshenye obyknovennykh dyfferentsyal'nykh uravnenyy. Nezhestkiye zadachy. - М.: Yzdatel'stvo „Myr”, 1990. - 512 s.
5. *Bazhenov V.A., Dekhtyaryuk Ye.S., Vorona Yu.V.* Dynamika sporud (Dynamic of Structures). - К.: PAT Vipol, 2012. - 342 s.
6. *Gotsulyak Ye.A., Dekhtyaryuk Ye.S., Luk'yanchenko O.O., Borysenko V.H.* Metodyka redukovannya rivnyan' v zadachakh parametrychnykh kolyvan' konstruktсий (The Technique for Reduction of Equations of Structures Parametric Vibrations) //Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA. - 2004. - #74.
7. *Shymkovych D.H.* Raschet konstruktсий v MSC/NASTRAN for Windows (Structure Analysis with the MSC/NASTRAN for Windows). - М.: DMK Press, 2001. - 448 s.

*Стаття надійшла до редакції 20.01.2014 р.*



*Ворона Ю.В., Лукьянченко О.А., Костина Е.В.*

### **СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ИХ ПРЕДЫДУЩИХ СОСТОЯНИЙ**

Построение редуцированных моделей стохастических параметрических колебаний упругих систем с учетом их предыдущих состояний выполнено на основе методов конечных элементов, обобщенных координат, асимптотического метода и функционального подхода. Задача стохастической устойчивости сформулирована в среднем относительно моментных функций фазовых координат первого порядка. Решение задачи выполнено с помощью 7-стадийного непрерывного метода Рунге-Кутты 5-го порядка и вложенных формул Дормана-Принса. В качестве примера исследована стохастическая устойчивость параметрических колебаний упругой системы с одной степенью свободы с учетом ее предыдущих состояний.

**Ключевые слова:** параметрические колебания, стохастическая устойчивость, моментные функции, редуцированная модель.

*Vorona Y.V., Lukianchenko O.O., Kostina O.V.*

### **STOCHASTIC PARAMETRIC VIBRATIONS OF ELASTIC SYSTEMS WITH REGARD TO THEIR PREVIOUS STATES**

Reduced models of stochastic parametric vibrations of elastic systems with regard to their previous states were constructed on the base of the finite element method, generalized coordinates method, asymptotic method and functional approach. Stochastic stability problem was formulated in the average for the moment functions of the first order phase coordinates. The stability of stochastic parametric vibrations of the single degree of freedom system with regard to its previous states was investigated by the 7-stages 5-order continuous Runge-Kutta method and nested formulas Dormand-Prince.

**Key words:** parametric vibration, stochastic stability, moment functions, reduced model.

УДК 539.3

О.І. Безверхий<sup>1</sup>, д-р фіз.-мат. наук  
 В.В. Левченко<sup>1</sup>, канд. фіз.-мат. наук  
 О.І. Маківський<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України  
 вул. Нестерова, 3, м. Київ, Україна. 03057

## ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З АЗИМУТАЛЬНИМИ РОЗРІЗАМИ ЕЛЕКТРОДІВ

Виконано дослідження впливу азимутальних розрізів електродного покриття на частоти і форми коливань п'єзоелектричних кільцевих пластин, які поляризовані по товщині.

**Ключові слова:** кільцева пьезокерамічна пластина, азимутальний розріз електродів, порівняльний аналіз частот і форм пружноелектричних коливань.

**Вступ.** В п'єзоелектричних вібраторах круглої конфігурації (диски та кільця) власні форми осесиметричних коливань, починаючи з другої власної частоти (на обертонах) мають вузлові концентричні кола [5,7]. Внаслідок виникнення зон розтягування і стиснення знижується ефективність електромеханічного зв'язку. З метою уникнення такого недоліку запропоновано [5] розрізати електродне покриття по концентричних колах. Оpubліковані теоретичні дослідження в цьому напрямі не дають достатньої інформації аналізу цього явища, що і спричинило викладені в даній статті дослідження.

**1. Постановка і загальний розв'язок задачі.** Планарні гармонічні коливання п'єзоелектричної круглої пластини з електродованими лицевими площинами  $z = \pm h/2$  при плоскому напруженому стані ( $u_z = u_\theta = 0$ ,  $\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta}$ ,  $E_x = E_y = 0$ ) у випадку осесиметричної деформації описуються рівнянням [1,2,3]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1)$$

і формулами для механічних напружень та електричної індукції

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left( \nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \quad (2)$$

$$D_z = d_{31} (\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \epsilon_{33}^T E_z.$$

В співвідношеннях (1), (2)  $s_{11}^E, s_{12}^E$  - пружні сталі при нульовому електричному полі,  $d_{31}$  - п'єзоелектрична стала,  $k_E^2 = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \omega^2$ ,  $\nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$  - аналог коефіцієнта Пуассона,  $\rho$  - густина матеріалу.

Розглянемо кільцеву пластину  $r_0 < r < r_2$  з двобічними розрізом електродного покриття по кільцевій лінії  $r = r_1$ . Розв'язок рівняння (1) при гармонічних коливаннях  $f(r, t) = \text{Re } f^a(r) \exp i\omega t$  буде таким [4]

$$\begin{aligned} u_r^a(r) &= RA_1 J_1(k_E r) + RB_2 Y_1(k_E r), \quad r_0 < r < r_1 \\ u_r^a(r) &= RA_2 J_1(k_E r) + RB_2 Y_1(k_E r), \quad r_{11} < r < r_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'язку (3) відповідають механічні напруження  $\sigma_{rr}^a, \sigma_{\theta\theta}^a$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^a &= \frac{R}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} (A_n a_1(k_E r) + B_n b_1(k_E r) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,n}) e^{i\omega t}, \\ \sigma_{\theta\theta}^a &= \frac{R}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} (A_n a_2(k_E r) + B_n b_2(k_E r) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,n}) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$r_{n-1} < r < r_n, \quad n=1, 2.$$

В формулах (4) введено такі позначення

$$\begin{aligned} a_1(k_E r) &= k_E R J_0(k_E r) - (1 - \nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r); \\ b_1(k_E r) &= k_E R Y_0(k_E r) - (1 - \nu_E) \frac{R}{r} Y_1(k_E r); \\ a_2(k_E r) &= \nu_E k_E R J_0(k_E r) + (1 - \nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r); \\ a_2(k_E r) &= \nu_E k_E R Y_0(k_E r) + (1 - \nu_E) \frac{R}{r} Y_1(k_E r). \end{aligned}$$

Тут використовуються позначення  $s_E = s_{11}^E (1 - \nu_E^2)$ ,  $E_{za,n}$  - амплітуди напруженості електричного поля  $E_{z,n} = \text{Re } E_{za,n} \exp i\omega t$  на кільці  $r_{n-1} < r < r_n$ . Приймається, що для всіх кілець  $r_{n-1} < r < r_n$  залишаються справедливими припущення про плоский напружений стан і у всіх них електричний потенціал поля незалежний від планарних координат і змінюється по товщині по лінійному закону.

З умов спряження по лінії розрізу електродів  $r_1$  при досконалому механічному і електричному контактах

$$u_r(r_1 - 0, t) = u_r(r_1 + 0, t), \quad \sigma_r(r_1 - 0, t) = \sigma_r(r_1 + 0, t) \quad (5)$$

одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
 A_1 J_1(k_E r_1) + B_1 Y_1(k_E r_1) &= A_2 J_1(k_E r_1) + B_2 Y_1(k_E r_1), \\
 A_1 a_1(k_E r_1) + B_1 b_1(k_E r_1) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1} &= \\
 &= A_2 a_1(k_E r_1) + B_2 b_1(k_E r_1) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,2}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

Маємо чотири можливі комбінації граничних умов при  $r=r_0$  і  $r=r_2$  та відповідні системи для визначення невідомих сталих  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ :

1. жорстко закріплений край  $r=r_0$  – жорстко закріплений край  $r=r_2$

$$\begin{aligned}
 A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) &= 0, \\
 A_2 J_1(k_E r_2) + B_2 Y_1(k_E r_2) &= 0; \quad (7)
 \end{aligned}$$

2. жорстко закріплений край  $r=r_0$  – вільний від напружень край  $r=r_2$

$$\begin{aligned}
 A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) &= 0, \\
 A_2 a_1(k_E r_2) + B_2 b_1(k_E r_2) &= (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,2}; \quad (8)
 \end{aligned}$$

3. вільний від напружень край  $r=r_0$  – жорстко закріплений край  $r=r_2$

$$\begin{aligned}
 A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) &= (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1}, \\
 A_2 J_1(k_E r_2) + B_2 Y_1(k_E r_2) &= 0; \quad (9)
 \end{aligned}$$

4. вільний від напружень край  $r=r_0$  – вільний від напружень край  $r=r_2$

$$\begin{aligned}
 A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) &= (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1}, \\
 A_2 a_1(k_E r_N) + B_2 b_1(k_E r_N) &= (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,2}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Задача про визначення особливостей форм коливання зводиться до розв'язку систем алгебраїчних рівнянь. У випадку граничних умов коли край  $r=r_0$  вільний від напружень  $\sigma(r_0, t)=0$ , а край  $r=r_2$  – жорстко закріплений тобто  $u(r_2, t)=0$  і протифазним з'єднанням електродів система має вигляд

$$\begin{bmatrix} a_1(k_E r_0) & b_1(k_E r_0) & 0 & 0 \\ J_1(k_E r_1) & Y_1(k_E r_1) & -J_1(k_E r_1) & -Y_1(k_E r_1) \\ a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) & -a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) \\ 0 & 0 & J_1(k_E r_2) & Y_1(k_E r_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1} \\ 0 \\ 2(1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

У випадках інших граничних умов і з'єднань електродів системи будуть мати подібний вигляд.

**2. Чисельні результати та їх аналіз.** Розглянемо п'єзокерамічну кільцеву пластину з наступними матеріальними параметрами  $\rho=7740 \text{ кг/м}^3$ ,  $s_{11}^E=15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$ ,  $s_{12}^E=-5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$ ,  $d_{31}=-125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Н}$   $E_{za,1}=E_{za,2}=2000 \text{ в/м}$ , що відповідає п'єзокераміці

ЦТС-19 [2, 6]. Аналіз проводився при відношенні радіусів  $r_0/r_2=0,4$  і для одного діаметрального розрізу електродного покриття на радіусі  $r_{01}$ . Розрахунки проводились для безрозмірних власних частот  $k_E R = \bar{\omega}$ . Розглядався варіант з'єднань електродів при яких напруженість електричного поля  $E$  в частинах кільця рівна за величиною, але протилежно направлена.

Розрахунки дозволяють зробити наступні висновки: наявність розрізів електродного покриття не впливає на значення власних частот коливань пластини; форми коливань для мод починаючи з другої мають вузлові точки ( $u(r)=0$ ) радіус розташування яких не залежить від наявності розрізу електродного покриття і його радіусу; форми коливань в малому околі вузлових точок для пластини без розрізу і з розрізом співпадають.

В таблиці для перших чотирьох мод наведено частоти і відносні радіуси  $r_0/r_2$  вузлових точок для двох типів граничних умов (1 тип - вільний внутрішній край  $r_0(\sigma(r_0,t)=0)$  і закріплений зовнішній  $r_2(u(r_2,t)=0)$ , 2 тип - закріплення по внутрішньому радіусу  $r_0(u(r_0,t)=0)$  і вільна зовнішня границя  $r_2(\sigma(r_2,t)=0)$ ) для пластин з розрізами електродного покриття і без (однорідна пластина).

Граничні умови	мода	частота	Вузлові точки однорідної пластини	Вузлові точки обумовлені розрізами електродів
1	1	3.20884	--	0.887
	2	8.04387	0.65805	0.55
	3	13.20123	0.5221 0.76136	0.485 0.795 0.975
	4	18.40479	0.4876 0.65805 0.8291	0.46 0.68 0.81
2	1	2.76583	--	0.68
	2	7.93913	0.8027	0.865
	3	13.14434	0.881 0.641	0.46 0.59 0.92
	4	18.36553	0.5718 0.7434 0.9147	0.605 0.705 0.95

При зміні радіусу розрізу від  $r_0$  до  $r_2$  значення  $u(r,t)$  змінюється переходячи через нульові значення. Кількість нульових значень залежить від номера моди і завжди є непарним числом. Ці точки будемо називати вузлами обумовленими розрізами електродного покриття.

На рис. 1 - 3 наведено форми коливань у випадку 1, на рис. 4 - 6 – у випадку 2 для третьої моди. На рис. 1 і 4 точками наведено форми коливань при відсутності розрізів. На рис. 1, 2, 4, 5 приведено форми коливань в околі точок де  $u(r,t)=0$  тільки при наявності розрізів електродів, а на рис. 3 і 6 поблизу вузлових точок в пластині без розрізів електродів.

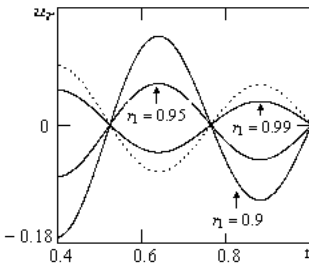


Рис. 1

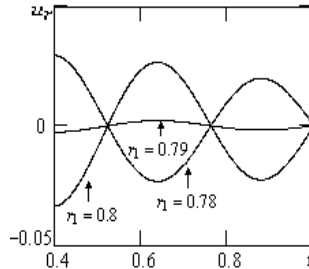


Рис. 2

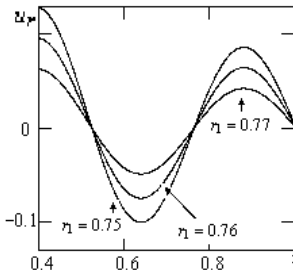


Рис. 3

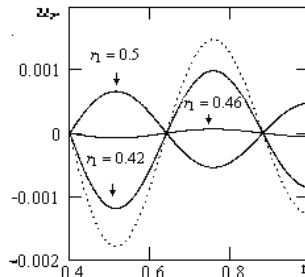


Рис. 4

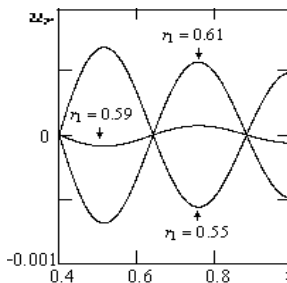


Рис. 5

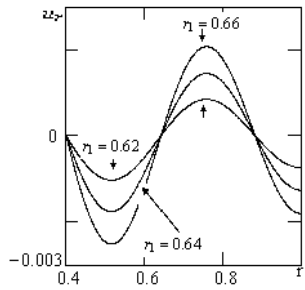


Рис. 6

Як витікає з результатів розрахунків, частково приведених на рис. 1 - 6, наявність розрізів суттєво змінює вигляд коливань, з'являються значення радіусів розрізу електродів при яких коливання в пластині відсутні, в околі цих радіусів амплітуда коливань міняє знак. При наближенні значення  $r_1$  до вузлової точки вигляд коливання співпадає з коливаннями в пластині з однорідним покриттям і амплітуда коливань не змінює знак, змінюється тільки амплітуда.

Розглянемо залежність  $u(r, t)$  від  $r_1$  для вільної границі. На рис. 7 наведено суцільною лінією переміщення на границі  $r_0$  при закріпленій зовнішній границі, а лінія із штрихів відповідає переміщенню при  $r=r_2$  при закріпленій внутрішній границі. Мас сенс розглянути при яких значення радіусу розрізу спостерігається нульове переміщення.

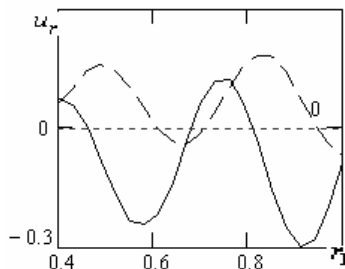


Рис. 7

**Висновки.** Наявність азимутальних розрізів в покритті пезокерамічних не призводить до зміни власних частот коливань. Вузлові точки (точки в яких переміщення дорівнює нулеві) не змінюють свого розташування при наявності розрізів. Форми коливань пластини при наявності розрізів і без розрізів співпадають у вузлових точках співпадають. В решті випадків спостерігається суттєва відмінність коливань. Зміною радіусу розрізу можна керувати амплітудою коливань і змінювати її на протилежну. При певних значеннях радіусу коливання амплітуда коливань рівна нулеві. Число таких значень є непарне і росте з ростом моди коливань.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – М.: Наука. 1982. – 424с.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А./ Отв. Ред. А.Н. Гузь – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел: - М.: Наука, 1988. – 472с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
5. Шульга М.О. Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.

6. *Mason W.P.* Piezoelectricity, its history and applications // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1981. – 70, N 6. – P. 1561 – 1566.
7. *Shul'ga N.A., Bezverkhii O.I., Mekievskii O.I.* Resonant Frequencies of Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – 46, N9. – P. 1031 – 1037.

## REFERENCES

1. *E.Dielesaint., D. Royer.* Elastic waves in solid bodys. Application to signal processing, Wiley-Interscience, New York(1981).
2. *V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko, and N.A. Shul'ga,* Electroelasticity, Vol. 5 of the six-volume series Mechanics of Coupled Fields in Structural Members [in Russian], Naukova Dumka, Kyiv (1989).
3. *V.Z. Parton and B.A. Kudryavtsev.* Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electroconductiv *bodies* [in Russian], Nauka, Moscow(1988).
4. *A.N. Tikhonov and A. A. Samarskii,* Equations of Mathematical Physics, Dover, New York (1990)
5. *N. A. Shul'ga and V. L. Karlash,* Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates [in Ukrainian], Naukova Dumka, Kyiv (2008).
6. *W. P. Mason,* "Piezoelectricity, its history and applications," *J. Acoust. Soc. Am.*, 70, No. 6, 1561-1566 (1981).
7. *N.A. Shul'ga., O.I. Bezverkhii and O.I. Mekievskii.* "Resonant Frequencies of Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates" *Int. Appl. Mech.*, 46, No, 9. – P. 1031 – 1037(2010).

*Стаття надійшла до редакції 21.01.2014 р.*

*Безверхий А.И., Левченко В.В., Макиевский А.И.*

#### **ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С АЗИМУТАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ЭЛЕКТРОДОВ**

Проведено исследование влияния азимутальных разрезов электродного покрытия на частоты и формы колебаний пьезоэлектрических кольцевых пластин поляризованных по толщине при различных граничных условиях.

**Ключевые слова:** кольцевая пьезокерамическая пластина, азимутальные разрезы электродов сравнительный анализ частот и форм упругоэлектрических колебаний.

*Bezverkhyyi O.I., Levchenko V.V., Makievskyyi O.I.*

#### **HARMONIC VIBRATIONS OF PIEZOCERAMIC RING PLATE WITH AN AZIMUTHALLY CUT OF ELECTRODES**

Research of influence of azimuthal cuts of electrode coverage is conducted on frequencies and forms of vibrations of piezoelectric circular plates polarized on a thickness is executed is under various boundary conditions

**Key words:** ring piezoceramic a plate, azimuthally cut of electrodes, comparative analysis of frequencies and forms electroelastic vibrations.



UDC 539.3

**V.A. Bazhenov**<sup>1</sup>, Doctor of Sciences**N.A. Solovei**<sup>1</sup>, Doctor of Sciences**O.P. Krivenko**<sup>1</sup>, Ph.D

<sup>1</sup>*Kyiv National University of Construction and Architecture  
31 Povitroflotsky Avenue, Kyiv, Ukraine, 03680*

## MODELING OF NONLINEAR DEFORMATION AND BUCKLING OF ELASTIC INHOMOGENEOUS SHELLS

The paper outlines the fundamentals of the method of solving static problems of geometrically nonlinear deformation, buckling, and postbuckling behavior of thin thermoelastic inhomogeneous shells with complex-shaped mid-surface, geometrical features throughout the thickness, and multilayer structure under complex thermomechanical loading. The method is based on the geometrically nonlinear equations of three-dimensional thermoelasticity and the moment finite-element scheme. The method is justified numerically. Comparing solutions with those obtained by other authors and by software LIRA and SCAD is conducted.

**Key words:** geometrically nonlinear deformation, buckling, thin elastic inhomogeneous shell, thermomechanical load.

### Introduction

The trends in the development of structural engineering and the design of thin-walled shell structures call for refined numerical methods for the analysis of the nonlinear deformation and buckling of various shells. Real shell structures are made inhomogeneous (smoothly-variable and stepwise-varying thickness, knees, ribs, cover plates, holes, cavities, channels, facets, layers) to enhance reliability and reduce materials consumption. Thermal fields may cause substantial strains and affect the mode of and time to buckling.

The present paper outlines a method for and results of solving static problems of nonlinear deformation and buckling of various shells subject to mechanical and thermal loads, because of uniform methodological positions of the 3-d geometrically nonlinear theory of thermoelasticity and the finite-element method (FEM) [4-12, 32, 50-55, 60-64].

The stability of shells is addressed in many studies [1, 14, 17, 19, 22, 24, 25, 31], where various assumptions are made to simplify problem solving. A few studies are concerned with the thermal stability of shells of simple geometry [2, 15, 16, 19, 22, 42, 46]. The three-dimensional approach to the study of shells is addressed in the monographs [20, 28, 37, 47], papers [29, 34, 36], and reports [33, 38, 39], which have recently increased in number. The three-dimensional nonlinear deformation and buckling of inhomogeneous shells were studied in a few publications [9, 36, 37]. In the

FEM, this approach involves creation of design models based on universal spatial finite elements (FEs) [13, 29, 36, 37, 39, 52, 60-64].

## 1. Problem Formulation

**1.1. Basic Principles and Hypothesis.** We will solve static problems of the stress–strain state (SSS), buckling, and postbuckling behavior of a wide class of thin inhomogeneous shells subject to external mechanical loads and nonuniform bulk heating. The SSS of a shell and its structural elements at all stages of loading in both prebuckling and postbuckling domains is determined using the geometrically nonlinear equations of the three-dimensional theory of thermoelasticity and taking into account all nonlinear terms and all the components of the strain and stress tensors. By the inhomogeneity of a shell is meant that (i) its thickness is continuously or stepwise variable and (ii) it consists of combinations of multilayer stacks along the thickness and in plan. The casing of the shell and the ribs reinforcing it can consist of an arbitrary number of layers of varying thickness bonded into a single piece. Each layer can be anisotropic and different from the others. Thus, thin multilayer shells of variable thickness and complex geometry are considered as three-dimensional bodies that can be reinforced with ribs and cover plates, weakened by cavities, channels, and holes, and have sharp bends in the mid-surface (Fig. 1).

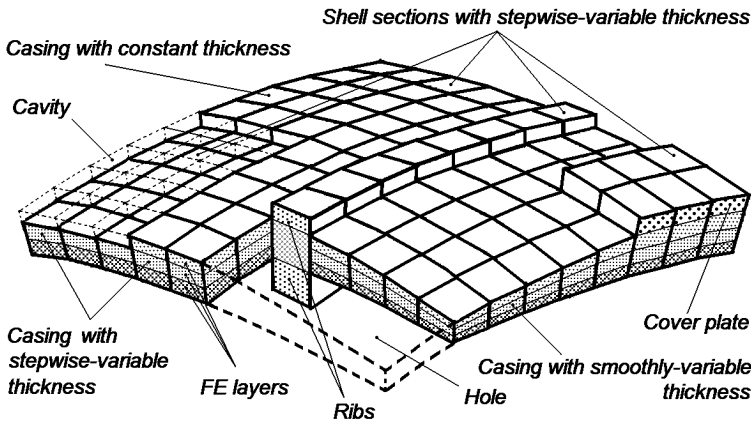


Fig. 1

The SSS of the shell is represented in a local curvilinear coordinate system  $x^i$  with basis  $\bar{e}_i = \partial \bar{r} / \partial x^i$  and a global Cartesian coordinate system  $x^{i'}$  with basis  $\bar{e}_{k'} = \partial \bar{r} / \partial x^{k'}$  (Fig. 2) [61, 64].

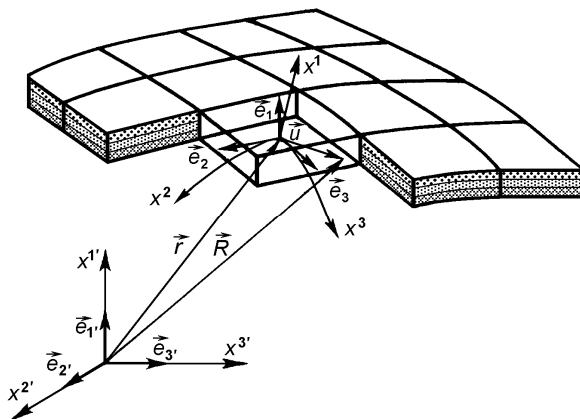


Fig. 2

The nonlinear deformation of shells is analyzed using the incremental method based on the general Lagrangian formulation where the trajectories of the strain and stress vectors are constructed using the increments of finite strains and stresses in the basis of the Lagrangian (reference) coordinate system [61, 64].

Two hypotheses are used to describe the SSS of a thin inhomogeneous shell.

The nonclassical kinematic hypothesis of deformed straight line: though stretched or shortened during deformation, a straight segment along the thickness remains straight. This segment is not necessarily normal to the mid-surface of the shell. The displacements are assumed distributed linearly along the thickness, which is conventional in the theory of thin shells [41]. The layers are bonded into a single piece so that there is no slippage and separation between them and the components of the displacement vector are equal at the interfaces. With certain restrictions on the material properties of the layers, this assumption leads to quite accurate solutions of the problems of buckling and vibration of thin multilayer shells [13, 45]. The hypothesis allows us to join spatial FEs keeping compatibility of the coordinates and displacements and to naturally model sharp bends, inclined walls of ribs, cavities, and holes.

The static hypothesis compressive assumes that the stresses  $\sigma_n^{11}$  in the fibers of the  $n$ th layer are constant throughout the thickness (along the  $x^1$ -axis):

$$\frac{\partial \sigma_n^{11}}{\partial x^1} = 0. \quad (1.1)$$

Consider a steady-state thermal process, in which the temperature field in the shell is a known function of coordinates,  $T=T(x^i)$ , independent of the SSS [61,64]. Since the shell is thin, the temperature may be considered linearly distributed throughout the thickness of the layer. The effect of the mechanical and thermal fields on the shell is represented as a single process of loading described by a relationship between the general load parameter and the parameters of mechanical and temperature fields. The shell is modeled by a nonlinear elastic continuum subject to large displacements and small strains whose components are linear functions of stresses. The layers of the shell are considered linear elastic and described by the generalized Duhamel–Neumann law [40]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T) = C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T) = \bar{\sigma}^{ij} - \bar{\sigma}^T{}^{ij}; \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (C_j^{k'} \partial u^{k'} / \partial x^i + C_i^{k'} \partial u^{k'} / \partial x^j) + \frac{1}{2} (\partial u^{k'} / \partial x^i) \cdot (\partial u^{k'} / \partial x^j), \quad (1.3)$$

where  $\varepsilon_{kl}^e$  is the tensor of elastic strains related to internal stresses  $\sigma^{ij}$ ;  $\varepsilon_{kl}$  is the tensor of finite (total) Cauchy–Green strains;  $\varepsilon_{kl}^T$  is the tensor of thermal strains induced by a change in the initial temperature  $T_0$  by  $T$ ;  $\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}$  are stresses dependent on total strains;  $\bar{\sigma}^T{}^{ij} = C^{ijkl} \alpha_{kl} T$  are stresses dependent on thermal strains;  $C^{ijkl}$  are the components of the stiffness tensor;  $\alpha_{kl}$  are the components of tensor of thermal-expansion coefficients;  $C_i^{k'} = \partial x^{k'} / \partial x^i$  are the components of the coordinate transformation tensor; and  $u^{k'}$  are the displacements in the Cartesian coordinate system.

The anisotropic inhomogeneous material of the shell is modeled by isotropic, transversely isotropic, and orthotropic materials of its layers [51,64].

**1.2. The Universal Spatial FE and its Parameters.** To develop a finite-element shell model (FESM), we approximate a thin shell by one spatial FE throughout the thickness, which is an efficient approach [13,20,28,36,37,39,48, 52,61,64]. The structural elements of an inhomogeneous shell require that the FE be universal: it should be eccentrically arranged relative to the mid-surfaces of the casing, it should be possible to vary the thickness of the lateral edges of the FE; the lateral edges of the neighboring FEs should be in continuous contact; and it should be possible to model sharp bends in and the multilayer structure of the shell.

The universal FE (Fig. 3) is based on an isoparametric spatial FE with polylinear shape functions for coordinates and displacements [52, 61, 64]. Additional variable parameters are introduced to enhance the capabilities of the modified FE. According to its constant and variable topological, geometrical,

and mechanical parameters, the FE is three-dimensional and has 8 nodes, 6 faces, and 12 edges with set material constants of homogeneous layers, mesh ( $s_k$ ), local ( $x^k$ ), and Cartesian ( $x^{i'}$ ) coordinates of nodes (Fig. 3,*a,b*).

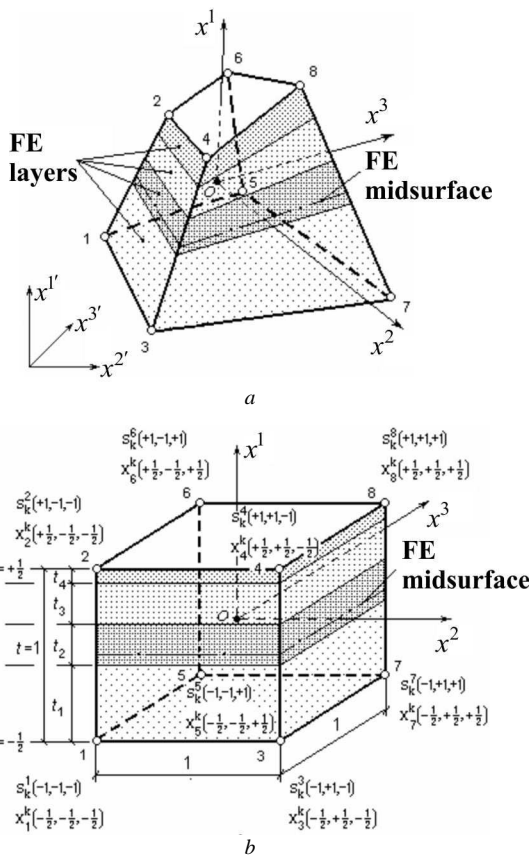


Fig. 3

The geometry of the FESM is set in two stages: (i) the Cartesian coordinates of the nodes on the bounding surfaces of the FE of the casing (SFE is a hexahedron  $ABCDEFGH$ , Fig. 4) are set; (ii) on sections with stepwise-variable thickness, the nodal coordinates of the SFE along the  $x^1$ -axis are replaced by the nodal coordinates of the modified FE (MFE is a hexahedron

$\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{G}\tilde{H}$ ). The SFE is transformed into MFE by replacing the edges of the SFE ( $AB, CD, EF, GH$ ) by the edges of the MFE ( $\tilde{A}\tilde{B}, \tilde{C}\tilde{D}, \tilde{E}\tilde{F}, \tilde{G}\tilde{H}$ ).

By varying the additional parameters, the modified spatial FE is endowed with the properties of a universal FE, which allows unified modeling of a wide class of inhomogeneous shell structures. The idea of transforming a SFE into a MFE may be used as an example for the creation of other universal FEs.

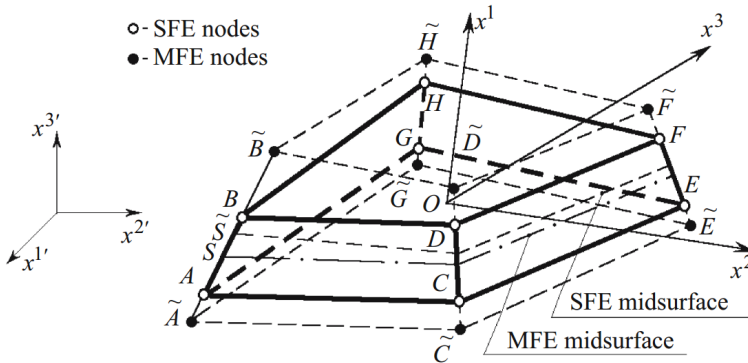


Fig. 4

### 1.3. The Moment Finite-Element Scheme at the Problems of Thermoelastic Deformation of Inhomogeneous Shells.

To derive the governing finite-element equations for displacements, use is made of the moment finite-element scheme (MFES) developed and theoretically proved by Sakharov [37, 49]. The MFES is applied to thin multilayer shells of stepwise-variable thickness undergoing geometrically nonlinear deformation under thermomechanical loads [8, 9, 11, 32, 55, 61, 64]. The MFES approximations of displacements and strains guarantee a correct description of the rigid-body displacements of FEs, which enhances the convergence and accuracy of solutions on coarse meshes.

The MFES represents the total strains (1.3) as truncated Maclaurin series about the FE center. So strains are defined within a FE as linear functions of  $x^i$ . Those terms that can be exactly calculated in the case of polylinear displacements are retained in the series.

The thermal strains  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^T$ , which depend on both temperature and material properties of the layer, are assumed to be linear functions of the coordinates  $x^2$  and  $x^3$  within a FE and in stepwise-linear functions of the coordinate  $x^1$  [9, 11, 61, 64]. They are expanded into a Taylor series about the center of the  $n$ th layer.

Stresses are represented as linear parts of a Taylor series in powers of local coordinates  $x^i$  about the center of the  $n$ th layer.

## 2. FEM Equations for Elastic Inhomogeneous Shells Undergoing Geometrically Nonlinear Deformation

**2.1. FEM Equations for Thin Inhomogeneous Shells.** The nonlinear deformation of a shell is considered as a sequence of equilibrium states during steps of loading. The history of the SSS and the geometry of the shell are assumed known at the current step of loading. The equilibrium state of the FESM is determined based on the virtual-displacement principle and the Lagrange equation

$$\delta\Pi = \sum_{FE} (\delta W_{FE} - \delta A_{FE}) = 0, \quad (2.1)$$

here  $\Pi$  is the strain energy of the FESM;  $W_{FE}$  and  $A_{FE}$  are the works done by internal and external forces of a FE;  $\sum_{FE}$  is the sum over finite elements of the FESM.

With (1.2), the virtual work of internal forces is given by

$$\begin{aligned} \delta W_{FE} &= \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}^T) dv = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv = \\ &= \int_{V_{FE}} \bar{\sigma}^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv - \int_{V_{FE}} \bar{\sigma}^{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv = \delta\bar{W}_{FE} - \delta\bar{W}_{FE}^T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

With (2.2), Eq. (2.1) is represented as

$$\delta\Pi = \sum_{FE} (\delta\bar{W}_{FE} - \delta P_{FE}) = 0; \quad \delta P_{FE} = \delta A_{FE} + \delta\bar{W}_{FE}^T. \quad (2.3)$$

Equation (2.3) is integrated in a manner standard for the FEM. The reaction matrix of a FE is derived from the expression for the virtual work done by the internal forces due to the total strains dependent on the nodal displacements. The virtual work of internal forces due to thermal strains is used to determine the matrix of equivalent thermal loads, which supplements the matrix of mechanical nodal loads.

It is common practice to use the Cartesian displacements  $u_{s_1 s_2 s_3}^{t'}$  of FE nodes as unknowns for a spatial FE. For thin shells, it is expedient to use, as unknown functions, the set of displacements of nodal points on the mid-surface  $v_{s_2 s_3}^{t'}$  and the differences of nodal displacements  $v_{s_2 s_3}^{t'}$  on the bounding surfaces of a FE:

$$v_{s_2 s_3}^{t'} = \frac{u_{s_1=+1s_2s_3}^{t'} + u_{s_1=-1s_2s_3}^{t'}}{2}; \quad v_{s_2 s_3}^{t'} = u_{s_1=+1s_2s_3}^{t'} - u_{s_1=-1s_2s_3}^{t'}. \quad (2.4)$$

Replacement (2.4) is considered as a changeover from an eight-node spatial FE with three nodal displacements to a four-node shell FE with six generalized displacements of nodes referred to the mid-surface of the FE. The triple linear approximation of displacements, strains, and stresses allows us to integrate (2.2) analytically and to obtain the explicit matrices of reactions, stiffness, geometrical stiffness, and equivalent thermal loads, which made it easier to calculate them. The equations derived for the spatial FE are universal because they are independent of the nodal coordinates and displacements, the number of layers, and engineering constants of layers. The characteristics of the FE and associated additional parameters somehow appear in these equations. This makes it possible to apply the FEM equations to all structural elements of an inhomogeneous shell in deriving the governing system of geometrically nonlinear equations.

Iterative algorithms for solving systems of nonlinear FEM equations are based on multiple solution of linearized systems of equations [23, 37, 54]. By linearizing the nonlinear FEM equations, we obtain, in analytic form, the stiffness matrix and the matrix of geometrical stiffness for the spatial FE. Adding the matrix of geometrical stiffness allows more accurate initial approximations in the iterative procedure and almost halves the number of iterations at a step of loading. It is also possible to increase the step.

**2.2. Correcting the FEM Equations for the Modified FE.** Deriving the system of governing nonlinear equations for the FESM involves uniting various combinations of SFE and MFE into a single ensemble of elements and matching of the nodal generalized displacements referred to the mid-surfaces of the SFE and MFE using the relationship between the generalized displacements of the SFE and MFE and the respective coefficients of the matrices of the SFE and MFE.

The generalized nodal displacements  $v_{s_2s_3}^{i'}$  and  $v_{s_2s_3}^{i'}$  of the mid-surface (datum surface) of the FESM casing are used as the variables of the system of governing nonlinear equations. The generalized displacements of the MFE are denoted by  $\tilde{v}_{s_2s_3}^{i'}$  and  $\tilde{v}_{s_2s_3}^{i'}$ . The generalized nodal displacements of the SFE and MFE are related by

$$\tilde{v}_{s_2s_3}^{i'} = v_{s_2s_3}^{i'} + a_{s_2s_3} v_{s_2s_3}^{i'} ; \quad \tilde{v}_{s_2s_3}^{i'} = b_{s_2s_3} v_{s_2s_3}^{i'} , \quad (2.5)$$

where  $b_{s_2s_3}$  is a coefficient of change in the length of the FE edge, and  $a_{s_2s_3}$  is the ratio of the displacement of the FE edge to its length. These quantities are the additional parameters of the universal FE.

Relation (2.5) are the compatibility and continuity conditions for the displacements between all finite elements of the FESM on different sections of a shell with smoothly varying and stepwise-varying thickness.



### **3. Algorithm for Solving Problems of Nonlinear Deformation, Buckling, and Postbuckling Behavior of Shells under Thermomechanical Loading**

**3.1. Combined Algorithm for Solving a Nonlinear Buckling Problem.** A few studies [37, 44, 54, 58, 61, 64] are concerned with efficient algorithms for solving problems of nonlinear deformation and buckling of inhomogeneous shells. Solving nonlinear buckling problems for shells often involves obtaining difficult-to-predict results. They depend on a considerable number of parameters related to the geometry, boundary conditions, load, materials, and structural elements.

The following requirements are imposed on the developed algorithm: universality and capability to efficiently solve a wide class of problems; automatic control of the nonlinear process; automatic following of the load–deflection curve, complex as it may be; self-correction of algorithm parameters, which simplifies the solution process; collection of statistical data in following the load–deflection curve for the analysis and improvement of the algorithm for certain classes of shells; feasibility of complex processes of thermomechanical loading; availability of procedures for processing, visualization, and documentation of the input data and results of solving a nonlinear problem.

The problem of nonlinear deformation, buckling, and postbuckling behavior of inhomogeneous shells is solved by a combined algorithm that employs the parameter continuation method, a modified Newton–Kantorovich method, and a procedure for automatic correction of algorithm parameters [54, 61, 64]. Each step increments (or decrements) the external load parameter  $P$ , which is related to the parameters of the mechanical ( $Q$ ) and temperature ( $T$ ) fields. The solution of the nonlinear problem is the relationship between the external load parameter  $P$  and the displacement field  $P$  of the FESM, which is determined at each step of loading  $\Delta P$ . This relationship is usually represented by a "load – deflection" (" $P-U$ ") curve at characteristic points of the shell.

**3.2. Self-Correction of Algorithm Parameters.** The efficient automation of the solution algorithm requires implementing the following procedures: selection of the continuation parameter; determination of its rational value; change of the sign of the continuation parameter; determination of the load increment from the displacement increment of a characteristic node; change of the accuracy of the solution of the system of nonlinear equations; change of the patterns and modes of thermomechanical loading at the current step; filing of the input and output data for further documentation, analysis, processing, and visualization. The experience of solving problems for shells under mechanical and thermal loads suggests that the accuracy of the

solution for the latter should be increased by four to five orders of magnitude.

The algorithm is based on the generalized " $P-U$ " curve in the form of a loop with a branching point  $g$  and singular points  $a$ ,  $b$ ,  $e$ , and  $f$  (Fig. 5). The linearized matrix of the governing equations degenerates in the neighborhood of these points. The equations are regularized and the singular points are passed by replacing  $P$  by  $U$  and vice versa at the points  $s_1 \div s_5$  defined by the algorithm. To reduce the time it takes the computer to solve the problem, the rational steps for the descent parameter are determined.

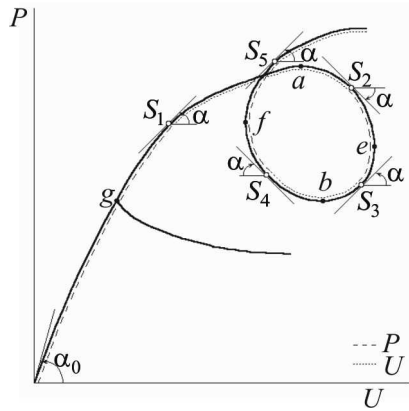


Fig. 5

The algorithm for solving the buckling problem finds the branching points and allows drawing adjacent deformation modes in their neighborhood. To identify a branching point, use is made of a qualitative theory that states that at least one negative eigenvalue of the linearized stiffness matrix represents a new equilibrium configuration of the shell. The adjacent deformation mode is identified by introducing an imperfection defined by the parameter  $\lambda$  into the perfect initial configuration of the shell. If  $\lambda$  is small, its influence is seen near the branching point on the " $P-U$ " curve, which may become critical.

The efficiency of the method is substantially dependent on how it is numerically implemented. The available software packages include poorly developed algorithms for analyzing the geometrically nonlinear deformation, buckling, and postbuckling behavior of shells [65, 66]. Obviously, the reason is that because of their complexity and ambiguity, these problems are difficult to solve with a user-friendly standard computational procedure.

The software package developed is research-oriented and meets the modern requirements to such software regarding input data representation, design models, efficient nonlinear problem-solving algorithm, data processing, analysis, and visualization.

The nodal coordinates of the three-dimensional FESM of arbitrary shape and regular topological structure are determined using a specially developed mesh generator [3, 59, 61, 64].

#### **4. Numerical Analysis of the Convergence and Accuracy of Solutions to Problems of Nonlinear Deformation and Buckling of Inhomogeneous Shells**

Of great importance for the development of the FEM is its theoretical justification [26, 27, 37, 43, 56]. This, however, is not sufficient to evaluate the efficiency and applicability of finite-element schemes because asymptotic estimates of accuracy give no indication of their behavior on real, coarse meshes. Not less important is the numerical analysis of the properties of a FE, which is performed by comparing FEM solutions and analytic, numerical, or experimental solutions.

The efficiency, accuracy, and applicability of the method developed were analyzed by solving special linear and nonlinear test problems [6, 32, 50, 61, 64]. Let us consider a number of typical examples.

**4.1. Linear Solutions.** An analysis of the accuracy of the solutions for homogeneous and inhomogeneous rods, beams, frames, and rings as three-dimensional bodies subject to uniform and nonuniform temperature fields shows rapid convergence on coarse meshes [6, 64]. The results obtained for framed structures and revealed thermoelastic effects can be generalized to thin-walled structures. It is supported by studies on plates and shells.

After that, homogeneous and layered square plates under uniform pressure  $q$  are used as examples to determine the errors and possible limits of the elastic constants.

**4.1.1. Bending Clamped One-Layer Square Plate.** For a clamped one-layer isotropic plate, the central deflection converges rapidly if compared with the analytic solution [57]. Comparing the solution with those obtained with well-known software (LIRA, SCAD, FRONT, ANSYS, NASTRAN, COSMOS) and by other authors, we conclude that the solutions for rectangular plane FEs converge from "above" and the solutions for spatial FEs converge from "below". The same effect is revealed for an orthotropic plate.

It is analyzed the accuracy of the central deflection for two-layer and three-layer simply supported plates [64]. The results are compared with calculations in software SCAD, where it was used multilayer rectangular finite element № 73 [66]. The multilayer FE is absent in software LIRA [65].

**4.1.2. Bending Two-Layer Simply Supported Square Plate.** We consider the two-layer plate, loaded pressure intensity  $q = 0.06 \text{ MPa}$ . The central deflection of the plate has been compared to solutions obtained in the software SCAD, by the refined iteratively-analytical theory [21], by the experimental-theoretical method [35] and with the experimental data [35] (Table 1). The input data: a size of the panel in the plan  $a = 0.3 \text{ m}$ ; the first layer (steel) – thickness  $0.0003 \text{ m}$ , elastic modulus  $E = 2.03 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ , Poisson's ratio

$\nu = 0.3$ ; the second layer (concrete) – thickness  $0.0258\text{ m}$ ,  $E = 0.0657 \cdot 10^5\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.2$ . The design model is a quarter of the panel.

The calculation results of the central deflection of the plate  $w$  obtained by different methods have been compared with the experimental data. The solution by MSFE and by SCAD converges rapidly. We conclude that the solutions for MSFE and the iteratively-analytical theory converge to the experimental data from "above" and the solutions for the experimental-theoretical method and software SCAD converge from "below". The significant error is less 10%.

Table 1

Method of analysis	MSFE, 8×8 FEs	SCAD, 8×8 FEs	Iteratively-analytical [21]	Experimental-theoretical [35]	Experimental [35]
$w \cdot 10^2, m$	0.0120	0.0109	0.0115	0.0102	0.0110
$\Delta, \%$	9.10	-0.91	4.5	-7.3	0

Acceptable results are obtained when the ratio of the elastic modules of two layers is equal to 31. This fact should be taken into account when deciding on the areas of possible application techniques.

**4.1.3. Bending Three-Layer Simply Supported Square Plate.** We consider the three-layer plate [18], loaded pressure intensity  $q = 0.1\text{ MPa}$ . The input data: a size of the panel in the plan  $a = 0.2768\text{ m}$ ; the 1st and 3rd layers are isotropic with thickness  $0.001\text{ m}$ ,  $E = 6.8 \cdot 10^4\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $G = 2.615 \cdot 10^4\text{ MPa}$ ; the 2nd layer is transversely isotropic with thickness  $0.015\text{ m}$ ,  $E = 0.48 \cdot 10^4\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $G = 0.038 \cdot 10^4\text{ MPa}$ . The design model is a quarter of the panel.

Table 2

Method of analysis	MSFE		SCAD		Reissner	Varvak	Engineering theory
	12×12 FEs	16×16 FEs	12×12 FEs	16×16 FEs			
$w \cdot 10^3, m$	0.2354	0.2369	0.3469	0.3475	0.3160	0.3050	0.2160
$\Delta, \%$	-25.5	-25.0	9.78	9.97	0	-3.5	-31.6

The central deflection of the plate  $w$  obtained by MSFE has been compared to analytical [18] Reissner's (straight line hypothesis) and Varvak's (tangential stresses and cross-sectional curvature are taken into account) solutions, to the solution produced by the engineering theory (straight normal hypothesis) and to software SCAD (Table 2). Benchmark is the solution obtained by Reissner's theory.

For MSFE and software SCAD refining the mesh from  $12 \times 12$  FEs weakly corrects the solution (the significant error is respectively about 25 and 10%). The ratio of the elastic modules of material layers (carrier to a placeholder) is 14.2, and the ratio of the shear modules is 68.8. These data should be taken into account when deciding on the areas of possible application of these techniques.

The examples indicate a rough limit of applicability of the method, which corresponds to the well-known statement that the elastic constants of layers should not differ by more than one to two orders of magnitude.

**4.2. Solutions in Geometrically Nonlinear Problems of Buckling, and Postbuckling Behavior.** Results of research of nonlinear deformation are considered by the example of a number of inhomogeneous isotropic shells. The accuracy of solutions of buckling problems is evaluated by comparing them with nonlinear solutions obtained by other authors and by software LIRA and SCAD [15, 17, 19, 30, 31], which used flat finite elements: triangular № 342 and quadrangular № 344.

"Absolutely rigid insert plates" [65, 68] and "absolutely rigid solids" [44, 66] are used when approximating the shell sections with ribs, channels and cavities, where FEs are joined eccentrically.

**4.2.1. A Spherical Panel with Square Planform and Constant Thickness.** Panel is hinged along the contour and loaded with uniform normal pressure intensity  $q$  [64]. Results are presented in terms of dimensionless parameters:  $\bar{q} = a^4 q / (Eh^4)$ ,  $\bar{u}^1 = u^1 / h$ . Curvature of the panel is defined by parameter  $K = 2a^2 / (Rh) = 32$ , where:  $h = 1$  cm is the thickness,  $a = 60h$  is a size of the panel in the plan,  $R = 225h$  is the radius of mid-surface, elastic modulus  $E = 2.1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>, Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ . The FESM is a quarter of the panel with mesh  $30 \times 30$  FEs. Comparison is made with the solution of [30] by the a "load – deflection" (" $\bar{q} - \bar{u}$ ") curves at the center of the panel (Fig. 6,a).

The problem has been solved by software LIRA and software SCAD with using its three non-linear algorithms. The upper critical load  $\bar{q}_{cr}^{up}$  obtained by software LIRA is in good agreement with the solution [49]: for two variants of the method of successive loadings (SL) discrepancy is less than 3%, the method Newton–Raphson (N–R) gives error -1.8%. This problem with the

software SCAD has been solved by the method Newton–Kantorovich (N–K) and by the method Newton–Raphson (errors -4.9%). Disagreement with the solution by MFES is -3.15%. Equilibrium configurations for the deformed panel in the prebuckling and postbuckling domains for all solutions have a simple form and are in good agreement with each other (Fig. 6,*b*).

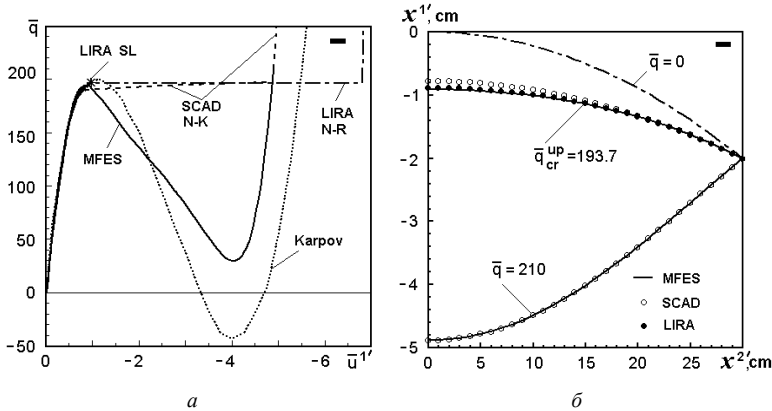


Fig. 6

**4.2.2. Shells with Linearly Varying Thickness.** The effect on the buckling of the shallow spherical panels of linear variation in the thickness along the meridian is examined, in order to find rational laws of distribution of the material in the volume of construction [61,64]. Shell of revolution clamped at the edge and subjected to uniform normal pressure (Fig. 7,*a*). The input data: rise  $H = 0.05\text{ m}$ , radius of mid-surface  $R = 10.025\text{ m}$ , radius of support boundary  $a = 1\text{ m}$ , “base” thickness  $h^* = 0.01\text{ m}$ ,  $E = 19.6 \cdot 10^4\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ .

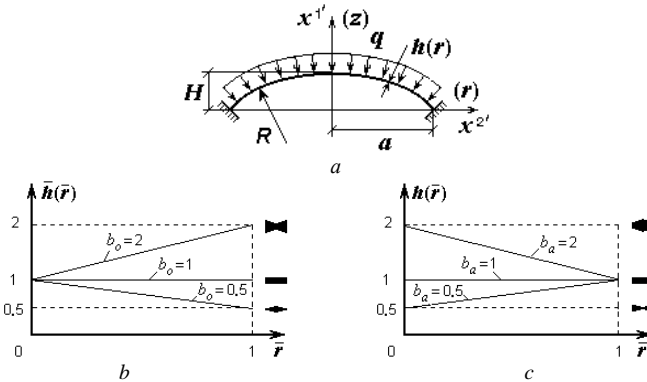


Fig. 7

In general form, we represent the law of linear distribution of thickness along the meridian panel by its thickness in the center  $h_{\bar{r}=0}$  and at the edge  $h_{\bar{r}=1}$ :  $h(\bar{r})=h_{\bar{r}=0}+(h_{\bar{r}=1}-h_{\bar{r}=0})\bar{r}$ , where  $\bar{r}=r/a$ . We examine three laws of linear variation in the thickness  $h(\bar{r})$  (Fig. 7,b,c; type of variable thickness is indicated by the appropriate icon):

1)  $h(\bar{r})=h^*[1+(b_o-1)\bar{r}]$ ; 2)  $h(\bar{r})=h^*[1+(b_a-1)(1-\bar{r})]$ ; 3)  $h(\bar{r})=h^*b_v$ , where  $b_o=h_{\bar{r}=1}/h_{\bar{r}=0}$ ,  $b_a=h_{\bar{r}=0}/h_{\bar{r}=1}$ ,  $b_v=h_v/h^*$  are parameters characterizing the degree of linear variation in the thickness. The value  $b_o=b_a=b_v=1$  corresponds to a panel of constant “base” thickness  $h^*$ . The thickness  $h_v$  is determined from the volume of a panel  $V$ :  $h_v=V/(2\pi HR)$ .

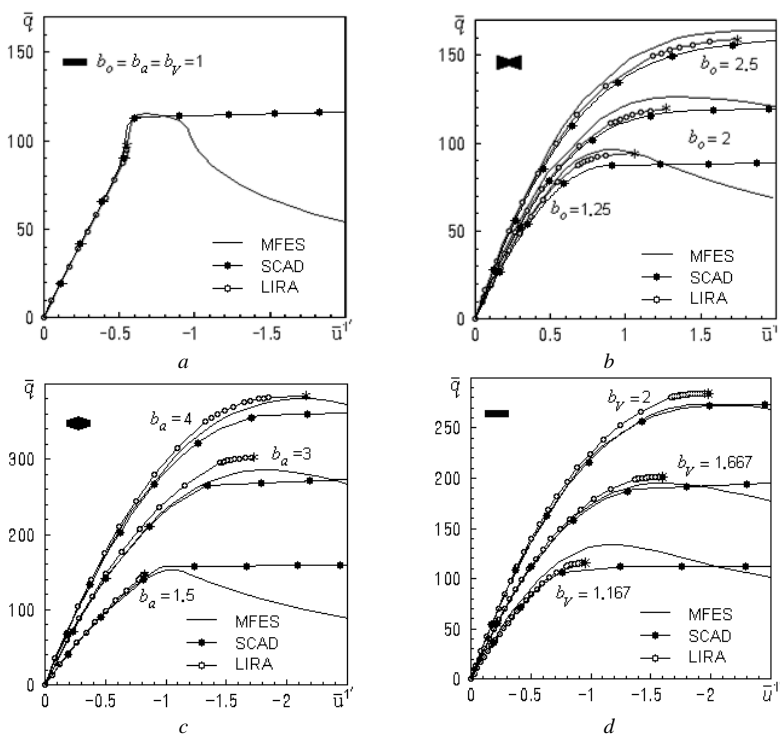


Fig. 8

Consider shells characterizing by equal volumes  $V$  with appropriate parameters  $b_o$ ,  $b_a$ ,  $b_v$ . Solutions obtained by MFES [60,61,64] are compared with those obtained by software LIRA and SCAD. The results are presented in dimensionless form:  $\bar{q} = a^4 q / (Eh^{*4})$ ,  $\bar{u}' = u' / h^*$ ,  $\bar{h}(\bar{r}) = h(\bar{r}) / h^*$ . Comparing the results reveals complete agreement between the “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” curves in the prebuckling domain and in the area of the upper critical point for all solutions (Fig. 8).

**4.2.3. Faceted Panels of Stepwise-Varying Thickness.** Consider faceted shells formed from the above smooth spherical panels with thickness linearly varying [61,64]. The mid-surface of the spherical shell of revolution is represented by a faceted surface inscribed in it and having 16 flat faces ( $4 \times 4$  for a quarter of the shell, Fig. 9,a). The linearly varying thickness  $\bar{h}(\bar{r})$  is replaced by close stepwise-varying thickness  $\bar{h}_i$  (Fig. 9,b) according to the range of steel sheets [67] with a permissible in engineering calculations difference of the volumes of these shells (-4.3...+0.2%).

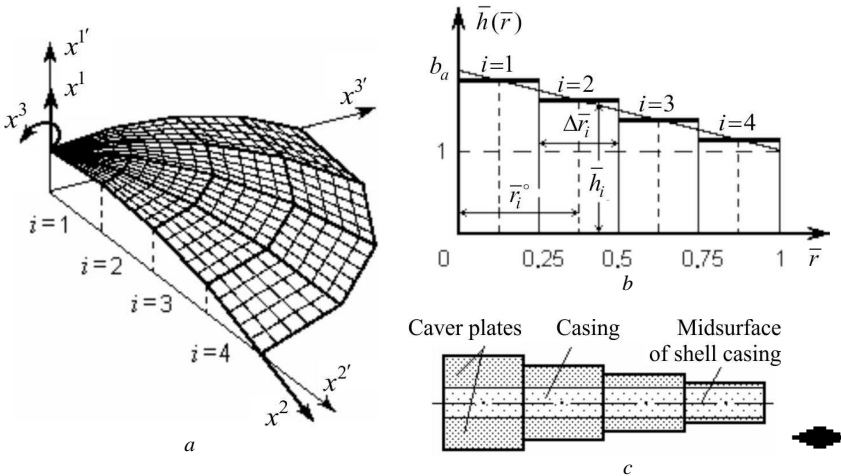


Fig. 9

Nonlinear solutions obtained by MFES are compared with those obtained by software LIRA and SCAD for shells in rational manners [64], which are thicker in the middle. We compare faceted shells with a compound by the mid-surface faces for parameters thickness  $b_o = 0.55, 1$  and  $b_a = 1, 2, 4$  (Fig. 9,c). We observe well agreement between the “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” curves in the prebuckling



domain (Fig. 10). At the branching point for panels with parameters  $b_o=0.55$  and  $b_o=b_a=1$  difference the load is respectively  $-0.18$  and  $+1.98\%$ , and for deflections it is  $+1.01$  and  $+3.5\%$ . The upper critical load  $\bar{q}_{cr}^{up}$  is in good agreement for panels with parameters  $b_a=2$  and  $4$  (divergence is within  $-1.91$  and  $4.17\%$ ). At the Fig. 10 to assess the effect faceted, dotted line is shown the solutions obtained by MFES for smooth panel linearly variable thickness.

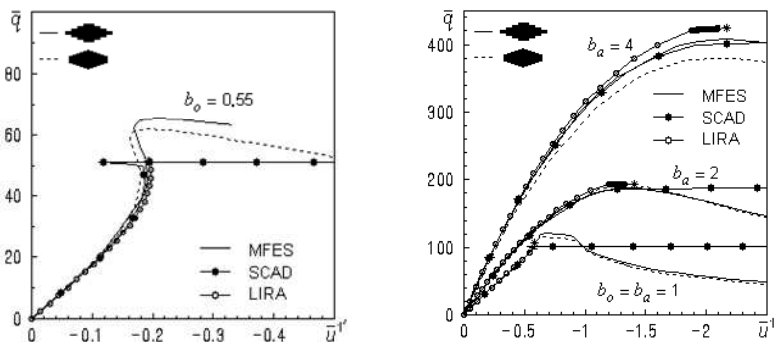


Fig. 10

**4.2.4. Ribbed Panels with Square Planform.** Investigation of the stability of rib-reinforced shells [61,64] is presented by the example of deep spherical panel square in plan ( $K=64$ ,  $a=120h$ ,  $R=450h$ ), hinged at the edges, and subject to uniform normal pressure (Fig. 11 and 12). Two variants of the shells reinforced ribs from inside (height  $h_p=3h$  and width  $b_p=2h$ ) is considered: (i) with two central cross-ribs (with mesh  $21 \times 21$  FEs) and (ii) with four pairs of equally spaced cross-ribs (with mesh  $22 \times 22$  FEs).

Solutions obtained by MFES and software LIRA are compared with those obtained by Il'in & Karpov [30]. The “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” curves are analyzed: for the first variant (i) at the point “o” (Fig. 11,a) and at the point “b” (Fig. 11,b), and for the second variant (ii) at the center of the shell (Fig. 12,a). For comparison, the dashed-dotted line shows the solution for the smooth panel ( $h_p=0$ ).

The solutions to the first problem (i) obtained by MFES and software LIRA are in good agreement for the “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” curves in the prebuckling domain and at the moment of loss of stability (Fig. 11). The difference between the values of  $\bar{q}_{cr}^{up}$  for the solution [30] and by MFES is less than  $0.5\%$ , the difference for these by MFES and by software LIRA is  $1.1\%$ .

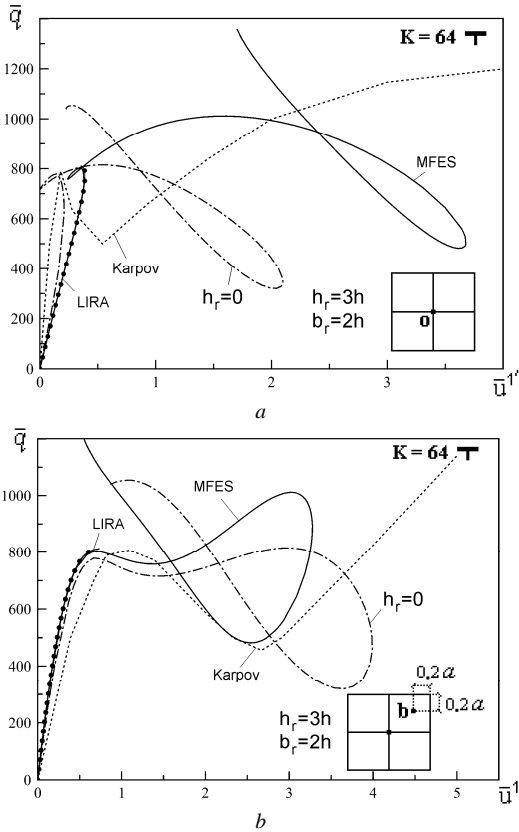


Fig. 11

The solutions to the second problem (ii), for the panel reinforced with either ribs, are in good agreement on all sections of the “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” curve. The difference between the values of  $\bar{q}_{cr}^{up}$  for the solution [30] and by MFES is -3.8%, the difference for these by MFES and by software LIRA is 7.7%.

Configurations for the deformed panel in the prebuckling (1) and postbuckling (2) domains for all solutions have a simple form and are in good agreement with each other (Fig. 12,b).

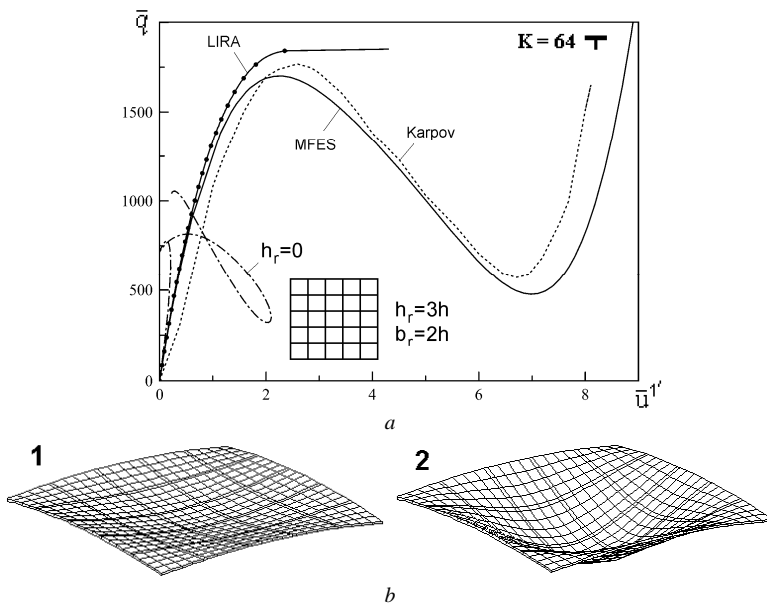


Fig. 12

#### 4.2.5. Panels of Square Planform with Channels and Cavities.

Investigation of the buckling of shells by channels and cavities is presented by the example of a shallow spherical panel square in plan with  $K = 32$  [61,64]. It is considered a shell with two variants of non-through weakens: (i) four identical cross channels (width  $b_{ch} = 2h$  and depth  $h_{ch} = 0.3h$ ); (ii) four square cavities (width  $b_{cv} = 6h$  and depth  $h_{cv} = 0.7h$ ). Three cases of eccentric arrangement of channels and cavities respect to the casing mid-surface are compared (Fig. 13). Each case of the eccentricity is indicated by the appropriate icon. The FESM is a quarter of the panel with mesh  $30 \times 30$  FEs.

In all cases, solutions obtained by MFES and software LIRA coincide completely in the prebuckling domain and in the domain of the upper critical load (Fig. 13). There is good agreement for the results obtained by MFES, software LIRA and Karpov [30] for panels weakened from inside (Fig. 13, a, d). For these panels, the results obtained by software SCAD differ substantially compared with the results of [30] (the error -13.39 and -11.98%), and with the results by MFES (the error -12.03 and -8.61%).

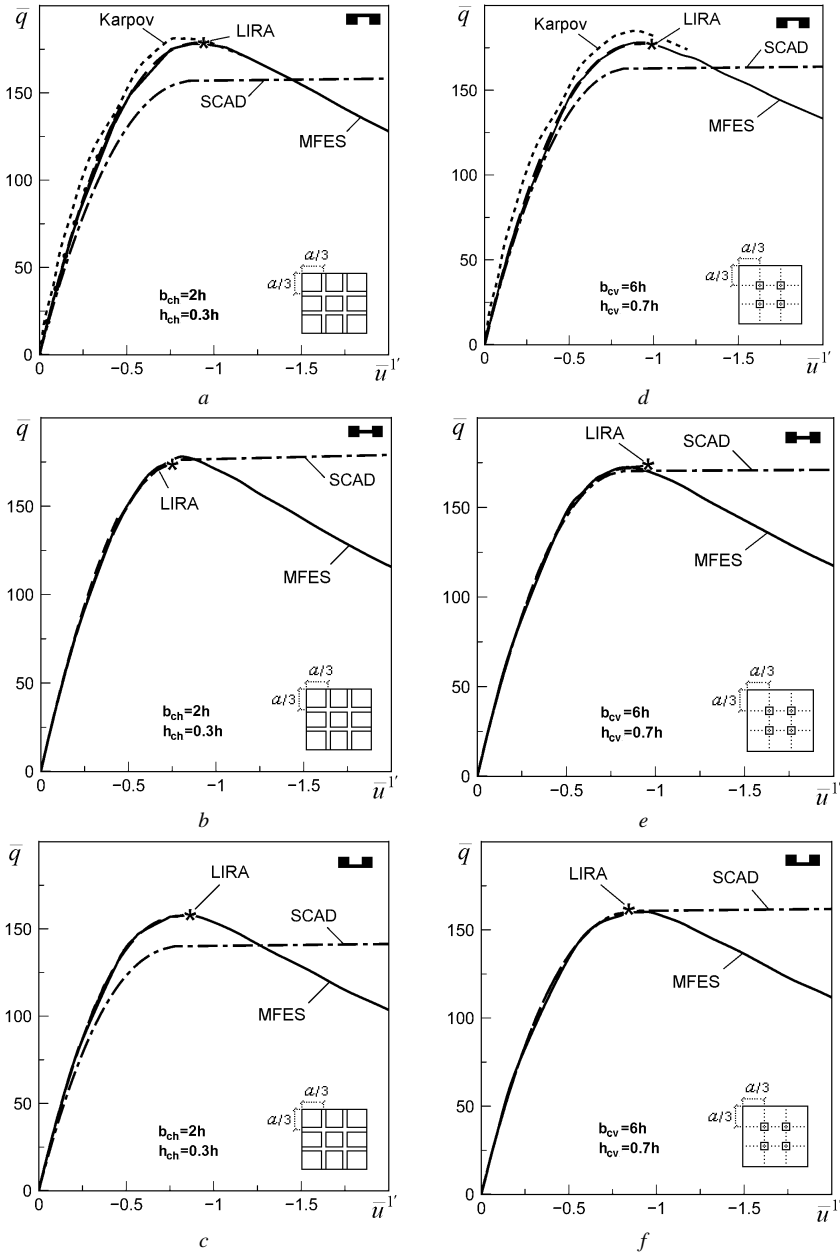


Fig. 13

There is good agreement between the solutions obtained by MFES, software LIRA and SCAD for shells without eccentric arrangement of channels and cavities (Fig. 13, *b, e*). The difference of the results is less than 1%.

#### 4.2.6. Shells under Combined Action of Force and Temperature Fields.

When there are both temperature and force fields, the nonlinear solutions have been analyzed by examples axisymmetric conical panel and square in terms of spherical panel with a hole for a clamped shallow conical round panel in terms [64]. We take into account by MFES and software LIRA that effect of the thermomechanical load occurs in two stages. We have been taken into account by MFES and software LIRA that effect of the thermomechanical load occurs in two stages. At the first stage the shell is gradually heated by the temperature field whose parameter  $t$  increases from  $0^\circ\text{C}$  to a set value  $T^\circ\text{C}$ . At the second stage the panel is subjected to uniform normal pressure in addition.

**4.2.6.1. Axisymmetric Conical Panel.** A clamped shallow conical panel with the radius of support boundary  $a = 100h$  and rise  $H = 3h$  is considered (Figs. 14). At the first stage of the loading the shell is heated to a set value  $20^\circ\text{C}$  [31]. The input data:  $h = 0.01\text{ m}$ ,  $E = 19.6 \cdot 10^4\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ , linear expansion coefficient  $\alpha = 0.125 \cdot 10^{-4}\text{ deg}^{-1}$ . Results are presented in terms of dimensionless parameters:  $k = H/h$ ,  $\bar{t} = t\alpha(a/h)^2$ .

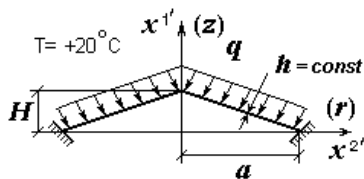


Fig. 14

The design model is a quarter of the panel with mesh  $20 \times 40$  FEs. Solutions by [31], MFES, and software LIRA are compared.

The considered methods have good agreement the “ $\bar{q} - \bar{u}$ ” curves (Fig. 15, *a*) and forms of deformation (Fig. 15, *b*) at all stages of loading. In the area of the upper critical load there is a discrepancy regarding the solution by MFES: the difference between the values of  $\bar{q}_{cr}^{up}$  for software LIRA is 10.8%, and for [31] it is -3.6%.

**4.2.6.2. Panel of Square Planform with Hole.** A shallow spherical panel ( $K=32$ ,  $a=60h$ ) hinged at the edges and having a central square hole (width  $b_h=12h$ ) is considered. The input data:  $h=0.01\text{ m}$ ,  $E=20.59 \cdot 10^4\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\alpha=0.12 \cdot 10^{-4}\text{ deg}^{-1}$ . The design model is a quarter of the panel with mesh  $30 \times 30$  FEs. The effect of three cases preheating by  $T=-20^\circ, 0^\circ, 20^\circ\text{C}$  on the stability of the shell is considered.

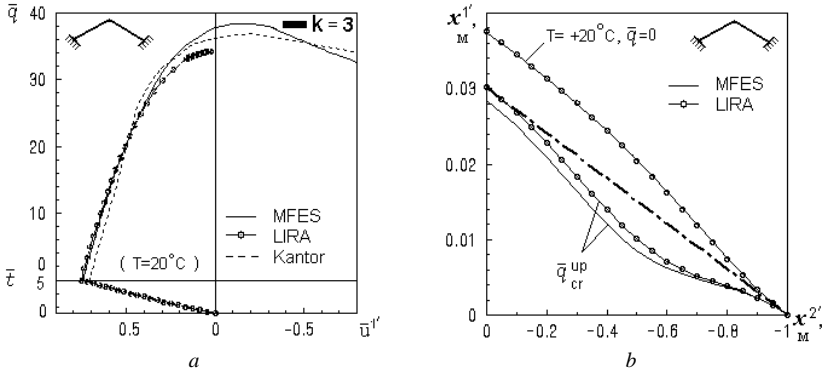


Fig. 15

Fig. 16,a shows a comparison of the “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” curves obtained by MSFE, software LIRA and in [31] for shells without hole (■) and with hole (■:■) when their loading only pressure ( $T=0^\circ\text{C}$ ). For the panel without hole the deflection have been considered at its center. For the panels without hole the deflection have been considered at its center. Comparing the results by MFES and software LIRA reveals agreement between the “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” curves in the prebuckling domain and when loss of stability: the difference between the values of  $\bar{q}_{cr}^{up}$  is respectively -1.9% and 2.9%. In the area of the upper critical load there is a divergence of the “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” curves obtained by MSFE, software LIRA and in [30]: the difference between the values of  $\bar{q}_{cr}^{up}$  by MFES and [30] is respectively 3.3 % and -9.9%.

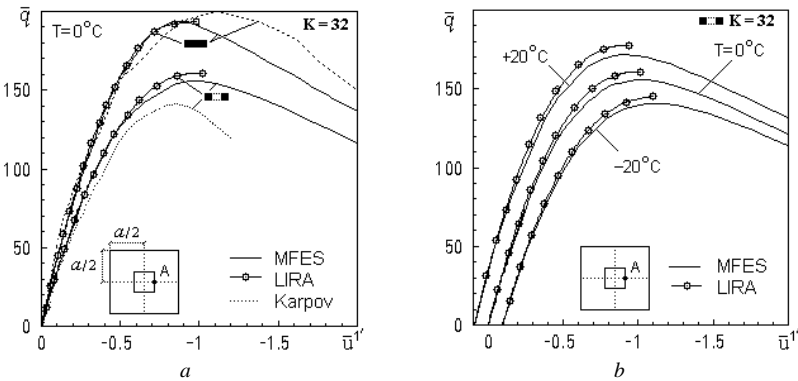


Fig. 16

For all cases of preheating there is agreement between the “ $\bar{q} - \bar{u}$ ” curves in all domains of solutions by MFES and software LIRA (Fig. 16,b). The difference between the values of  $\bar{q}_{cr}^{up}$  is within 3.0 – 3.5%, and this for the deflection  $\bar{u}_{cr}^{1up}$  at the point A is within 0.3 – 4.1 %.

Configurations for the deformed panel after pre-cooling to  $T = -20^\circ\text{C}$  (Fig. 17,a) and preheating to  $T = +20^\circ\text{C}$  (Fig. 17,b) are in good agreement with each other and have little difference from the original form ( $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $\bar{q} = 0$ ). Buckling forms are in good agreement too. Buckling of the shell occurs with click of its central part (Fig. 17,c).

### Conclusions

We have developed a finite-element method to analyze thin-walled shell structures. The method employs, for all structural elements of an inhomogeneous shell, the geometrically nonlinear equations of the three-dimensional theory of thermoelasticity taking into account all nonlinear terms and components of the strain and stress tensors. Use was also made of the moment finite-element scheme extended to nonlinear thermoelasticity of thin inhomogeneous shells.

We have developed a unified model based on the universal spatial FE that describes the multilayer structure of a material and geometrical features of structural elements of an inhomogeneous shell: casing of varying thickness, ribs, cover plates, cavities, channels, holes, sharp bends of the mid-surface.

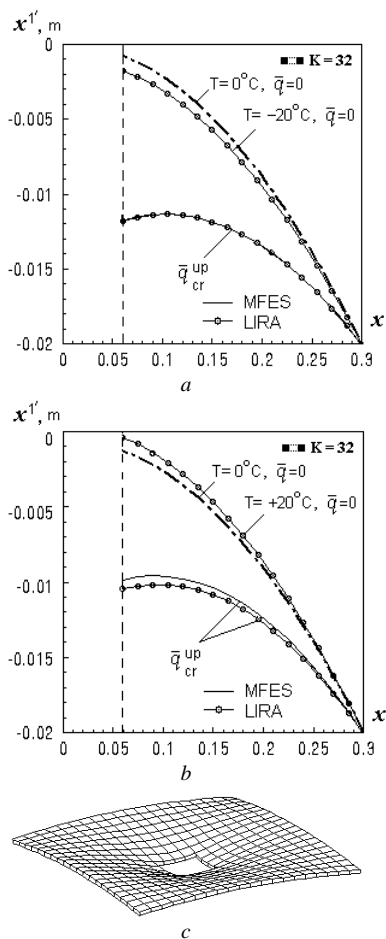


Fig. 17

We have developed an efficient iterative algorithm for solving problems of nonlinear deformation, buckling, and postbuckling behavior of thin inhomogeneous shells under thermomechanical loading.

The reliability of linear and nonlinear solutions for a wide class of inhomogeneous shells has been numerically justified by analyzing their convergence and comparing with those obtained by other authors and by software LIRA and SCAD.

#### REFERENCES

1. *Alfutov N.A.* Fundamentals of Stability Analysis of Elastic Systems [in Russian], Mashinostroenie, Moscow (1978). 312 p.
2. *Babich D.V.* "Stability of thermosensitive shells nonuniformly heated throughout the thickness," *Dokl. AN Ukrainy*, No. 4, 41–45 (1993).
3. *Bazhenov V.A., Dekhtyaryuk E.S., Solovei N.A., Krivenko O.P.* "Generating finite-element models of complex shells," in: *Proc. Int. Sci. Conf. on Architecture of Shells and Strength Design of Thin-Walled and Engineering Structures of Complex Shape*[in Russian], Izd. RUDN, Moscow (2001), pp. 30–34.
4. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei M.O.* "Effect of thermomechanical loading conditions on the stability and postbuckling behavior of shells with constant and stepwise-varying thickness" // *Opir Mater. Teor. Sporud*, 77, pp. 30–42 (2005).
5. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei M.O.* "Stability of conical shells with linearly varying thickness" // *Opir Mater. Teor. Sporud*, 78, pp. 46–51 (2006).
6. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei M.O.* "Convergence and accuracy of solutions for a spatial finite element in problems of nonuniform heating of rods and beams" // *Opir Mater. Teor. Sporud*, 80, pp. 54–65 (2006).
7. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A.* "Assessment of the curvature effect on the stability and postbuckling behavior of ribbed panels" // *Strength of Materials*, 39, No. 6, pp. 658–662 (2007).
8. *Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Solovei N.A., Krivenko O.P., Ayat N.* "Moment scheme of the finite-element method in problems of the strength and stability of flexible shells subjected to the action of forces and thermal factors" // *Strength of Materials*, 31, No. 5, pp. 499–504 (1999).
9. *Bazhenov V. A., Solovei M. O., and Krivenko O. P.,* "Nonlinear equations of deformation of ribbed thin multilayer shells under thermomechanical loading" // *Opir Mater. Teor. Sporud*, 64, pp. 116–127 (1998).
10. *Bazhenov V.A., Solovei M.O., Krivenko O.P., Ayat N.* "Stability of flexible shells under combined thermomechanical loading," *Opir Mater. Teor. Sporud*, 65, pp. 75–90 (1999).
11. *Bazhenov V.A., Solovei M.O., Krivenko O.P.* "Equations of the moment finite-element scheme in buckling problems for inhomogeneous shells under thermomechanical loading" // *Opir Mater. Teor. Sporud*, 66, pp. 22–25 (1999).
12. *Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P.* "Stability of shallow shells of revolution with linearly varying thickness" // *Aviats.-Kosmich. Tekh. Tekhnol.*, No. 2, pp. 18–25 (2004).
13. *Belostotskii A.M.* "Finite-element models of spatial plates, shells, and solids: Creation, program implementation, and research" // *Sb. Nauch. Trudov Hidroproekta*, 100, pp. 24–35 (1985).
14. *Bolotin V.V.* "Nonlinear theory of elasticity and stability in large" // *Rasch. Prochn.*, 3, pp. 310–354 (1958).



15. *Bushnell D., Smith S.* "Stress and buckling of nonuniformly heated cylindrical and conical shells" // *AIAA J.*, 9, No. 12, pp. 2314–2321 (1971).
16. *Vainberg D.V., Gotsulyak E.A., Gulyaev V.I.* "Thermomechanical instability of a deformable medium" // *Sopr. Mater. Teor. Sooruzh.*, 16, pp. 153–156 (1972).
17. *Valishvili N.V.* *Methods for Computer Design of Shells of Revolution* [in Russian], Mashinostroenie, Moscow (1976). – 278 p.
18. *Varvak P.M., Buzun I.M., Gorodetskii A.S., [et al.].* *Finite-Element Method* [in Russian], Vysshaya Shkola, Kyiv (1981). – 176 p.
19. *Vol'mir A.S.* *Stability of Deformable Systems* [in Russian], Nauka, Moscow (1967). – 984 p.
20. *Golovanov A.I., Kornishin M.S.* "Introduction to the finite-element method in statics of thin shells," *Kazan. Fiz.-Tekh. Inst. KF AN SSSR, Kazan* (1990). – 269 p.
21. *Gondlyakh A.V.* "Iterative analytical theory of deformation of multilayer shells" // *Sopr. Mater. Teor. Sooruzh.*, 53, pp. 33–37 (1988).
22. *Grigolyuk É.I. and Kabanov V.V.* *Stability of Shells* [in Russian], Nauka, Moscow (1978). – 360 p.
23. *Grigolyuk É.I., Shalashilin V.I.* *Problems of Nonlinear Deformation: Parameter Continuation Method in Nonlinear Problems of Solid Mechanics*, Nauka, Moscow (1988). – 232p.
24. *Grigorenko Ya.M. and Gulyaev V.I.*, "Nonlinear problems of shell theory and their solution methods (review)" // *Int. Appl. Mech.*, 27, No. 10, pp. 929–947 (1991).
25. *Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Gotsulyak E.A.* *Stability of Nonlinear Mechanical Systems* [in Russian], Vyscha Shkola, Lviv (1982). – 255 p.
26. *Descloix J.* *Méthode des Éléments Finis*, Suisse, Lausanne (1973). – 95 p.
27. *Johnson M.W. Jr., McLay R.W.* "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity" // *ASME, J. Appl. Mech.*, 35, No. 2, pp. 274–278 (1968).
28. *Zienkiewicz O.C.* *The Finite-Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, New York (1971).
29. *Zienkiewicz O.C., Irons B.M., Scott F.C., Campbell J.S.* "Three-dimensional stress analysis," in: B.F. de Veubeke (ed.), *High Speed Computing of Elastic Structures*, Universite de Liege (1971).
30. *Il'in V.P., Karpov V.V.* *Stability of Ribbed Shells against Large Displacements* [in Russian], Stroiizdat, Leningrad (1986). – 168 p.
31. *Kantor B.Ya.* *Nonlinear Problems in the Theory of Inhomogeneous Shallow Shells* [in Russian], Naukova Dumka (Kyiv) (1974). – 136 p.
32. *Kislookii V.N., Sakharov A.S., Solovei N.A.* "Moment scheme of the finite-element method in geometrically nonlinear problems regarding the strength and stability of shells" // *Strength of Materials*, 9, No. 7, pp. 808–817 (1977).
33. *Koldunov V. A., Kudinov A. N., and Cherepanov O. I.*, "Three-dimensional stability analysis of shells," in: *Proc. 6th Int. Sci. Symp. on Modern Problems of Plasticity and Stability in Solid Mechanics* (Tver, March 1–3, 2006) [in Russian], TGTU, Tver (2006), pp. 31–39.
34. *Koldunov V.A., Cherepanov O.I.* "Numerical model for design of shells and shell structures using three-dimensional nonlinear theory of elasticity," in: *Complex Systems: Data Processing, Modeling, and Optimization* [in Russian], TvGU, Tver (2002), pp. 48–59.
35. *Kucheryuk V.I., Dorogin A.D., Bochagov V.P.* "Design of multilayer plates by an experimental-theoretical method" // *Sroit. Mekh. Rasch. Sooruzh.*, No. 2, pp. 72–74 (1983).
36. *Liao C.-L., Reddy J.N.* "Analysis of anisotropic stiffened, composite laminates using a continuum-based shell element" // *Comput. Struct.*, 34, No. 6, pp. 805–815 (1989).
37. *Sakharov A.S., Kislookii V.N., Kirichevskii V.V. [et al.].* *Finite-Element Method in Solid Mechanics* [in Russian], Vyscha Shkola, Kyiv (1982). – 480 p.
38. *Nikolaev A.P., Kiselev A.P.* "Using the three-dimensional theory to design shells," in: *Proc. Int. Sci. Conf. on Architecture of Shells and Strength Analysis of Thin-Walled Building and Engineering Structures of Complex Shape* [in Russian], Izd. RUDN, Moscow (2001), pp. 29–30.

39. *Nikolaev A.P., Kiselev A.P.* "Design of shells based on three-dimensional finite elements in the form of a triangular prism and octagon," in: Proc. Int. Sci. Conf. on Architecture of Shells and Strength Analysis of Thin-Walled Building and Engineering Structures of Complex Shape [in Russian], Izd. RUDN, Moscow (2001), pp. 319–323.
40. *Nowacki W.* Theory of Elasticity [in Polish], PWN, Warsaw (1970). – 872 p.
41. *Novozhilov V.V.* Theory of Thin Shells [in Russian], Sudpromgiz, Leningrad (1962). – 431 p.
42. *Ogibalov P.M., Gribanov V.F.* Thermal Stability of Plates and Shells [in Russian], Izd. MGU, Moscow (1968). – 520 p.
43. *Oden J.T.* Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York (1971).
44. *Perel'muter A.V., Slivker V.I.* Design Models of Structures and Possibility to Analyze Them [in Russian], Izd. DMK Press, Moscow (2007). – 600 p.
45. *Piskunov V.G., Verizhenko V.E.* Linear and Nonlinear Problems for Layered Structures [in Russian], Budivel'nyk, Kyiv (1986). – 176 p.
46. *Podstrigach Ya.S., Shvets R.N.* Thermoelasticity of Thin Shells [in Russian], Naukova Dumka, Kyiv (1983). – 343 p.
47. *Rasskazov A.O., Sokolovskaya I.I., Shul'ga N.A.* Theory and Design of Layered Orthotropic Plates and Shells [in Russian], Naukova Dumka, Kyiv (1986). – 191 p.
48. *Rikards R.B.* Finite-Element Method in the Theory of Shells and Plates [in Russian], Zinatne, Riga (1988). – 284 p.
49. *Sakharov A.S.* "A moment finite-element scheme (MFES) that allows for rigid-body displacements" // *Sopr. Mater. Teor. Sooruzh.*, 24, pp. 147–156 (1974).
50. *Sakharov A.S., Solovei N.A.* "Convergence analysis of the finite-element method in problems of plates and shells," // in: *Spatial Structures of Buildings and Installations* [in Russian], Issue 3, Stroizdat, Moscow (1977), pp. 10–15.
51. *Solovei M.O.* "Modeling the thermoelastic properties of multilayer materials in buckling problems for inhomogeneous shells" // *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 73, pp. 17–30 (2003).
52. *Solovei M.O.* "A modified three-dimensional finite element for modeling thin inhomogeneous shells" // *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 80, pp. 96–113 (2006).
53. *Solovei N.A., Krivenko O.P.* "Comparative analysis of solutions to buckling problems for flexible shells subject to different laws of nonuniform heating" // *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 70, pp. 104–109 (2002).
54. *Solovei N.A., Krivenko O.P.* "Influence of heating on the stability of smooth shallow spherical shells with linearly varying thickness" // *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 74, pp. 60–73 (2004).
55. *Solovei N.A., Krivenko O.P.* "Influence of heating on the stability of faceted shallow spherical shells" // *Opir. Mater. Teor. Sporud*, 75, pp. 80–86 (2004).
56. *Strang G., Fix G.J.* An Analysis of the Finite-Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973).
57. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New York (1959).
58. ANSYS User's Manual for revision 5.6. Vol. I. Procedure; Vol. II. Command; Vol. III. Elements; Vol. IV. Theory.
59. *Solovei N.A.* "Geometrical modelling of shells with complex form by finite element system for strength analysis" // *Prikl. Geometr. Inzhen. Grafika*, 69, pp. 245–251 (2001).
60. *Bazhenov V.A., Solovei N.A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // *International Applied Mechanics*, 2009 [in Russian]. – Vol. 45. – № 9. – Pp. 3-40.
61. *Bazhenov V.A., Solovei N.A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // *International Applied Mechanics*, 2009. – Vol. 45. – № 9. – Pp. 923-953.
62. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure [in Ukraine] – ZAT «Vipol», (Kyiv), 2010. – 316 p.

63. *Bazhenov V.A., Solovei N.A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // *Mechanics successes in 6 volumes*. Vol. 6 (book 2). – Litera LTD (Kyiv), 2012. – Pp. 609-645.
64. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure: Models, Methods, Algorithms, Poorly Studied and New Problems [in Russian]. – Book House "LIBRIKOM" (Moscow), 2013. – 636 p.
65. LIRA 9.4 User Guide. Basics. Textbook. / *Strelets- Streletsky E.B., Bogovis V.E., Genzersky Y.V., Geraymovich Y.D., [et al.]*. – Izd. "Fact" (Kyiv), 2008. – 164 p.
66. SCAD Office. Software SCAD. / *Karpilovsky V.S., Kriksunov E.Z., Perel'muter A.V., Perel'muter M.A.* – Izd. "SCAD SOFT" (Moscow), 2009 [in Russian]. – 656 p.
67. GOST 82-70 (ST SEV 2884-81). Steel mill universal broadband. Assortment. – Instead of GOST 82-57; introduced. 1.1.72. – Publishing House of Standards, " (Moscow), 1983. – 6 p.
68. *Gorodetski A.S., Evzerov I.D.* Computer models of structures. – Izd. "Fact" (Kyiv), 2007. – 394 p.

*Стаття надійшла до редакції 23.12.2013 р.*

*Баженов В.А., Соловей М.О., Кривенко О.П.*

#### **МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТА ВТРАТИ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК**

Викладено основи метода розв'язування статичних задач геометрично нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки тонких пружних неоднорідних оболонок, що мають складну форму серединної поверхні, геометричні особливості за товщиною, багатопшарову структуру матеріалу та знаходяться в умовах складного термосилового навантаження. Підхід базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та використанні моментної схеми скінчених елементів. Дано чисельне обґрунтування метода. Виконано порівняння розв'язків з розв'язками інших авторів і в програмних комплексах ЛІРА, SCAD

**Ключові слова:** геометрично нелінійне деформування, стійкість, тонка пружна неоднорідна оболонка, термосилове навантаження.

*Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П.*

#### **МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК**

Изложены основы метода решения статических задач геометрически нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения тонких упругих неоднородных оболочек, имеющих сложную форму срединной поверхности, геометрические особенности по толщине, многослойную структуру материала и находятся в условиях сложного термосилового нагружения. Подход основан на геометрически нелинейных соотношениях трехмерной теории термоупругости и использовании моментной схемы конечных элементов. Дано численное обоснование метода. Выполнено сравнение решений с решениями других авторов и в программных комплексах ЛИРА, SCAD.

**Ключевые слова:** геометрически нелинейное деформирование, устойчивость, тонкая упругая неоднородная оболочка, термосиловая нагрузка.

УДК 539.3

Ю.В. Максим'юк<sup>1</sup>, канд. техн. наук

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680

## АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТА СТІЙКОСТІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ОБОЛОНОК СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ

Розроблена методика, яка базується на розрахункових співвідношеннях моментної схеми скінчених елементів (МССЕ), і запропонований алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь пружнопластичного деформування і втрати стійкості вісесиметричних оболонок середньої товщини неканонічної форми, який дозволяє отримувати достовірні результати для широкого класу тонкостінних об'єктів.

**Ключові слова:** метод скінчених елементів, термопружнопластичність, геометрично нелінійне деформування, покроковий алгоритм.

**Вступ.** Проблемі розробки методів розв'язку вісесиметричних задач фізично і геометрично нелінійного деформування і стійкості оболонок присвячена досить значна кількість публікацій. Їх огляд наведено в багатьох статтях та монографіях зокрема в [1, 3]. Аналіз публікацій з цього питання свідчить, що значна кількість проблем потребує проведення додаткових досліджень. Це в першу чергу стосується побудови розрахункових співвідношень, методів розробки ефективних підходів до розв'язання систем нелінійних рівнянь і визначення на цій основі параметрів напружено-деформованого стану, втрати стійкості і критичної поведінки відповідальних об'єктів сучасної техніки.

В даній роботі за основу побудови розв'язувальних нелінійних співвідношень вісесиметричних оболонок середньої товщини прийнята методика моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) викладена в роботі [2, 7]. В основу алгоритму розв'язання систем нелінійних рівнянь покладено метод диференціювання за параметром  $\lambda$ , запропонований В.С.Кірія [5] і Д.Ф.Давиденко [4]. Він полягає в заміні системи нелінійних рівнянь задачею Коші для системи диференціальних рівнянь у звичайних похідних по параметру, в якості якого може бути використано інтенсивність зовнішнього силового навантаження або вимушене переміщення в характерній точці. Деяким недоліком такого підходу є можливість накопичення похибки в процесі чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, виконуваного кроковим методом.

**1. Алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь МССЕ.** У даній роботі використовується комбінований алгоритм, що поєднує

інтегрування по параметру з методом Ньютона-Кантаровича на одному кроці  $m$  значення параметра спуску  $\lambda$  [2].

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K^*]_m^{-1} (\{Q\}^m - \{R\}_n^m), \quad (1)$$

де  $\{u\}_n^m$  - приращення переміщень на ітерації  $n$  кроку  $m$ ;  $[K^*]_m$  - лінеаризована матриця жорсткості в системі рівнянь МСЕ, обчислена в проміжній відрахунковій конфігурації  $x_m^\alpha$  з використанням тензора миттєвих жорсткостей пружнопластичного матеріалу і координат вузлів дискретної моделі  $x_m^\alpha$ ;  $\{Q\}^m, \{R\}_n^m$  - вектори вузлових зусиль і реакцій, визначені в актуальній конфігурації  $X_m^\alpha$ . Компоненти вектора вузлових реакцій обчислюються з урахуванням, як фізичної так і геометричної нелінійності на основі повних напружень, що дозволяє уникнути вказаної вище проблеми накопичення похибки.

Обчислення здійснюються до виконання умови:

$$\left\| \{Q\}^m \right\| - \left\| \{R\}_n^m \right\| \leq \zeta \left\| \{Q\}^m \right\|, \quad (2)$$

де  $\zeta$  - параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь;

$\left\| \{Q\}^m \right\|$  - сума квадратів вузлових зусиль скінчено елементної моделі (СЕМ);  $\left\| \{R\}_n^m \right\|$  - сума квадратів реакцій СЕМ.

Початкове значення вектора переміщень на першій ітерації кроку  $m$  екстраполюється за значенням вектора  $\{u_{m-1}\}$  і приращень параметра  $\Delta\lambda_{m-1}$  і  $\Delta\lambda_m$ :

$$\{u_m\} = \frac{\{u_{m-1}\} \Delta\lambda_m}{\Delta\lambda_{m-1}}. \quad (3)$$

Після цього вмикається ітераційний процес розв'язання системи нелінійних рівнянь відповідно до (1).

При виконанні умови (2) ітераційний процес закінчується. За обчисленням в результаті розв'язку системи нелінійних рівнянь значенням приращення вектора  $\{u_m\}$  визначаються прирости фізичних напружень

$(\Delta\tilde{\sigma}^{ij})_m$ :

$$(\tilde{\sigma}^{ij})_m = (\tilde{\sigma}^{ij})_{m-1} + (\Delta\tilde{\sigma}^{ij})_m, \quad (4)$$

та виконується перерахунок базисних координат всіх вузлів сіткової області за формулою:

$$z_m^\alpha = z_{m-1}^\alpha + u_m^\alpha. \quad (5)$$

Здійснюється перевірка на закінчення виконання умови (2). Якщо умова не виконана, то визначається нове приращення параметра і виконується наступний крок чисельного інтегрування.

В якості параметра може застосовуватися як інтенсивність навантаження, так і величина переміщення деякого вузла сіткової області. Використання двох параметрів спуску дозволяє отримувати всю криву навантаження-прогин при неоднозначності функцій  $q(u)$  або  $u(q)$ .

**2. Ефективність розглянутого алгоритму.** Досліджувалася шляхом порівняння з інтегруванням на одному кроці методом Ньютона-Рафсона і методом одно-крокової корекції по Ньютону-Рафсону.

Як об'єкт розглянута затиснена по контуру сферична панель під дією поперечного навантаження (рис. 1). Поведінка алгоритмів вивчалася на відрізку кривої  $\frac{w}{h}(q)$  в межах від 0 до  $\frac{w}{h}=0.7$ , де  $w$  - переміщення в центрі панелі,  $h$  - товщина оболонки.

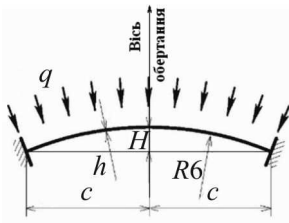


Рис. 1

Результати порівняння представлені на рис. 2 у вигляді графіків, що відображають залежність часу розв'язку задачі від величини приросту параметра

навантаження  $\lambda_q$  або іншими словами від величини кроку інтегрування. Крок інтегрування приймається рівномірним і визначається за формулою:

$$\lambda_q = \frac{q_{(0.7)}}{m} \quad (6)$$

де  $q_{(0.7)}$  - інтенсивність рівномірного навантаження, відповідна  $\frac{w}{h}=0.7$ ,  $m$  - число кроків інтегрування.

На графіку цифрою 1 позначена залежність часу розв'язання задачі від кроку інтегрування відповідно до формули (1), цифрою 2 - інтегрування на одному кроці методом Ньютона-Рафсона, 3 - методом одно-крокової корекції по Ньютону-Рафсону. Крім того, на рис.2 штрих - пунктирною лінією позначена крива, що відображає точність визначення переміщення в центрі панелі від величини приросту параметра при одно-кроковій корекції.

Точність розв'язку, отриманого ітераційними алгоритмами, (1) і (2) не залежить від величини кроку інтегрування і визначається числом  $\zeta$ . Наведені результати отримані при  $\zeta=10^{-2}$  і відрізняються від еталонного рішення, отриманого при  $\zeta=10^{-6}$  менш ніж на 0,1%. У цій задачі

залежність часу розв'язання різними алгоритмами від кількості кроків інтегрування виявилася практично лінійною.

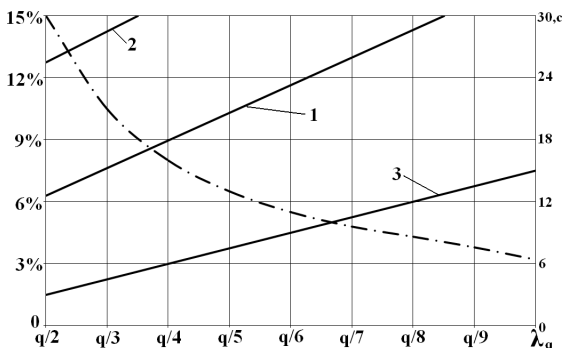


Рис. 2

Найменша витрата часу на одне прирощення параметра інтегрування відповідає методу одно-крокової корекції, однак, точність розв'язання цим алгоритмом істотно залежить від величини приросту параметра. Дещо більша точність (на 2-3%) в розглянутому прикладі може бути отримана за рахунок застосування спуску по параметру переміщення, проте відсутність контролю за точністю розв'язання обмежує можливість використання цього методу. При підвищенні точності за рахунок зменшення кроку інтегрування збільшується загальний час розв'язання задачі і в цьому випадку ітераційні алгоритми виявляються ефективнішими. Особливо помітно це проявляється на ділянках кривої навантаження - прогин поблизу точок перегину, де різко зростає накопичення похибки.

Аналізуючи наведені результати можна зазначити, що застосування ітераційних алгоритмів в (1) і (2) найбільш сприятливо при максимальній величині кроку інтегрування. По витраті машинного часу переважним виявився алгоритм, заснований на використанні методу Ньютона-Кантаровича. Так, на вирішення завдання цим алгоритмом потрібно майже в 2 рази менше часу, ніж методом Ньютона-Рафсона, при одних і тих же параметрах спуску. Отримані дані дозволяють обґрунтувати застосування алгоритму (1), який забезпечує оптимальну відповідність між обчислювальними витратами і точністю розв'язання для розглянутого кола задач.

**3. Дослідження достовірності моделювання фізично нелінійного деформування.** Для з'ясування можливості визначення розвитку зон пластичності в тонкостінних конструкціях, які апроксимуються по товщині одним скінченим елементом, виконано пружно-пластичний

розрахунок шарнірно опертої балки звантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 5) при наступних механічних характеристиках:  $E=1.0$ ;  $\nu=0.3$ . За товщиною скінченного елемента приймалося п'ять Гаусових точок інтегрування.

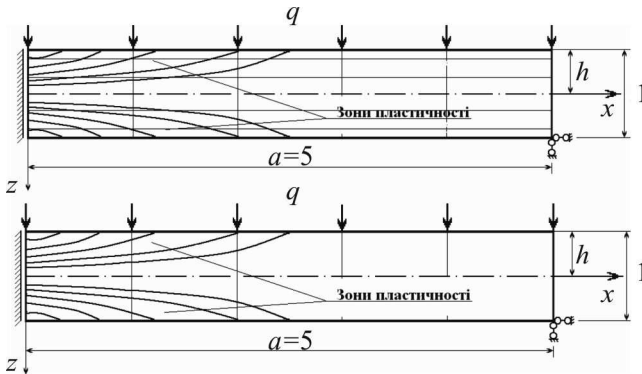


Рис. 3

Аналітичний розв'язок задачі наведений в роботі [8], де зв'язок координат між зонами пластичності з інтенсивністю заданого розподіленого навантаження  $q$  представлений у вигляді:

$$Z^2 - 3h^2 = 2h^2 \frac{q}{q_0} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \quad (7)$$

тут  $h$  - половина висоти балки;  $a$  - половина довжини балки;  $q_0$  - величина розподіленого навантаження, при якій з'являються пластичні деформації,

$$q_0 = \frac{4M}{3a^2}, \quad (8)$$

де  $M$  - значення згинального моменту.

**4. Використання алгоритму (1) при розв'язанні фізично і геометрично нелінійних задач.** Для дослідження достовірність результатів розв'язку фізично і геометрично нелінійних задач, при використанні одного СЕ по товщині оболонки було проведено їх порівняння з просторовим розв'язком.

Торосферичний посуд, складається з елементів сфери, тора і циліндра, під дією внутрішнього тиску (рис. 4). Товщина стінки сосуда  $h=1/4$  дюйма (0.00635 м), коефіцієнт Пуассона  $\nu=0.31$ , інтенсивність внутрішнього тиску складає 100 фунтов на один квадратний дюйм (689.476 кН/м<sup>2</sup>). Відношення межі текучості  $t_s$  до модуля пружності  $E$  складає 1:750. Результати розрахунку отримані МССЕ порівнювалися з результатами,



що отримані в роботі [6]. На рис. 5 представлені криві, які показують зростання максимальної деформації на тороїдальній частині сосуду в залежності від величини інтенсивності внутрішнього тиску.

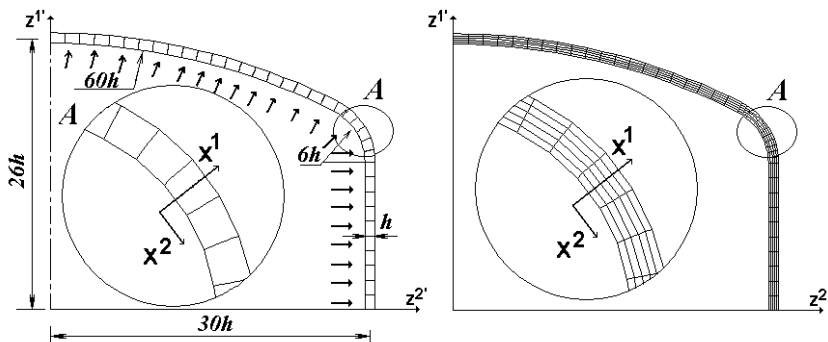


Рис. 4

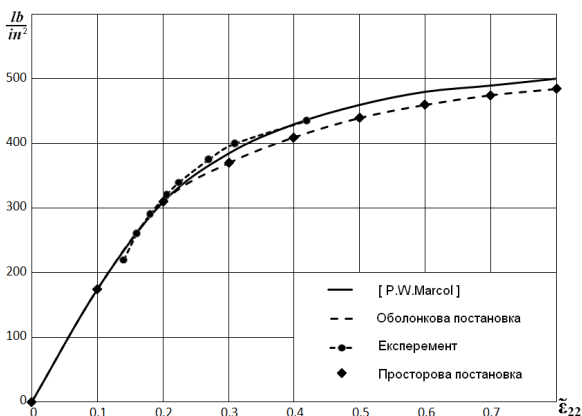


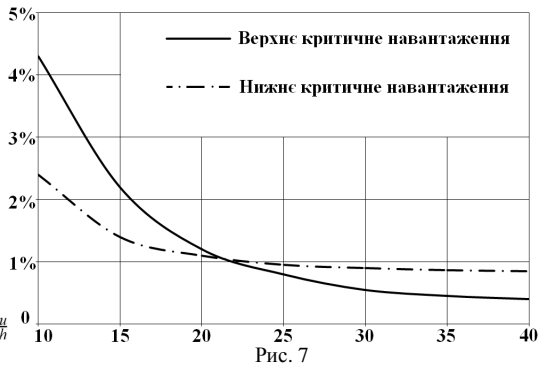
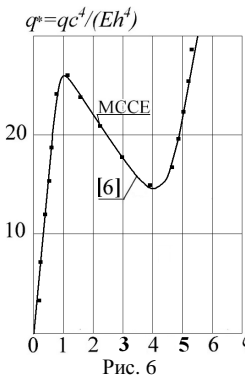
Рис. 5

Суцільною лінією зображені результати роботи [6], пунктирною з кружечками – дані експерименту, пунктирною лінією – розв'язки отримані на основі МССЕ. Спостерігається непогана для такої складної задачі збіжність результатів.

**5. Обґрунтування достовірності визначення верхнього і нижнього критичного навантажень** проведено на прикладі задачі втрати стійкості сферичної панелі (рис. 4). На рис. 6 наведено графік залежності між параметром навантаження  $q^* = qc^4/(Eh^4)$  і безрозмірною стрілою

прогину  $\zeta = u/h$  в центрі ( $h$  – товщина,  $H=3h$ ) отриманий в роботі В.І. Феодосєєва [9].

Квадратами позначені результати, отримані алгоритмом (1). При цьому спостерігається хороша збіжність результатів. Результати дослідження швидкості збіжності результатів МССЕ при збільшенні кількості СЕ представлені на рис. 7. На ньому зображені криві, які характеризують збіжність верхнього  $P_g$  і нижнього  $P_n$  критичного навантаження в залежності від числа скінчених елементів (СЕ) в меридіональному напрямку. По товщині оболонки прийнятий один елемент. Відсоток похибки визначається відносно розв'язку опублікованому в роботі [9].



Слід відзначити хорошу погодженість результатів, отриманих різними методами. Аналіз приведених графіків дозволяє встановити, що поступове згущення сіток в 2 рази від 10 до 20 СЕ змінює значення верхнього критичного навантаження на 3,1%, нижнього – в межах 0,2%.

**Висновок.** Таким чином, розроблена методика, яка базується на розрахункових співвідношеннях МССЕ і запропонованому алгоритмі розв'язання систем нелінійних рівнянь пружнопластичного деформування і втрати стійкості вісесиметричних оболонок середньої товщини неканонічної форми дозволяє отримувати достовірні результати для широкого класу тонкостінних об'єктів.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В.А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В.А. Баженов, О.П. Кривенко, М.О. Соловей. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.

2. *Баженов В.А.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В.А. Баженов, О.І. Гуляр, О.С. Сахаров, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2014. – Вип. 92. – С. 3-16.
3. *Гуляев В.И.* Устойчивость нелинейных механических систем / В. И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк – Л.:Вища школа, 1982. – 255с.
4. *Давиденко Д. Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений / Д.Ф. Давиденко// ДАН СССР, т.88, №4, 1953.
5. *Кірія В.С.* Движение тел в сопротивляющихся средах. – в кн. Труды Тбилисского гос. ун-та, 1951, 44.
6. *Маркол П.В.* Определение больших прогибов упруго-пластических оболочек вращения. Ракетная техника и космонавтика / P.W. Marcol // 1970. №9.
7. *Пискунов С.О.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С. О. Пискунов, І. І. Солодей, Ю. В. Максим'юк, А. Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2013. – Вип. 91. – С. 59-75.
8. *Соколовский В.В.* Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
9. *Феодосьев В.И.* Об одном новом способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем / В.И. Феодосьев// ПММ, №2, 1963.

## REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Nelineinye deformuvannya ta stiykist' pruzhnykh obolonok neodnorodnoy struktury „Nonlinear deformation and stability of elastic shells heterogeneous structure” / V. A. Bazhenov, O.P. Kryvenko, M.O. Solovey.– K.: ZAT «Vipol», 2010. – 315 s.
2. *Bazhenov V.A.* Osoblyvosti vykorystannya momentnoy skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry nelineynykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn „Features of torque finite element scheme (MSSE) in the nonlinear calculations of shells and plates” / V.A. Bazhenov, O.I. Hulyar, O.S. Sakharov, S.O. Pyskunov, Yu.V. Maksym'yuk // Opir materialiv i teoriya sporud. 2014. – Vyp. 92. – S. 3-16.
3. *Hulyayev V.Y.* Ustoychivost' nelyneynykh mekhanycheskykh system „Persistence nelineynih mechanical systems” / V.Y. Hulyayev, V.A. Bazhenov, E.A. Hotsulyak – L.: Vyshcha shkola, 1982. – 255s.
4. *Davydenko D.F.* Ob odnom novom metode chyslenoho reshenyya system nelyneynykh uravnenyy „On a new method of numerical solution of systems of nonlinear equations” / D. F. Davydenko// DAN SSSR, t.88, #4, 1953.
5. *Kiriya V.S.* Dvyyzhenye tel v soprotivlyayushchykh sredakh. „Motion in a resistant medium” – v kn. Tруды Tbylysskoho hos. un-та, 1951, 44.
6. *Markol P.V.* Opredylenye bol'shykh prohybov upruho-plastycheskykh obolochek vrashchenyya. Raketnaya tekhnika y kosmonavtyka „Opredilenie large deflection elastic-plastic shells of revolution. Rocketry and astronautics” / P. W. Marcol // 1970. #9.
7. *Pyskunov S.O.* Osoblyvosti vykorystannya momentnoy skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry liniynykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn „Features of torque finite element scheme (MSSE) with linear calculations of shells and plates” / S.O. Pyskunov, I.I. Solodey, Yu.V. Maksym'yuk, A.D. Solodenko // Opir materialiv i teoriya sporud. 2013. – Vyp. 91. – S. 59-75.
8. *Sokolovskyy V.V.* Teoryya plastychnosty „Theory of Plasticity” / V. V. Sokolovskyy. – M.: Vyshcha shkola, 1969. – 608 s.
9. *Feodos'yev V.I.* Ob odnom novom sposobe reshenyya nelyneynykh zadach ustoychyvosty deformiruemyykh system „A new technique for solving nonlinear problems of stability of deformable systems” / V.Y. Feodos'ev// PММ, #2, 1963.

*Максимюк Ю.В.*

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ**

Разработана методика, которая базируется на расчетных соотношениях МСКЭ и предложен алгоритм решения систем нелинейных уравнений упругого деформирования и потери устойчивости осесимметричных оболочек средней толщины неканонической формы, который позволяет получать достоверные результаты для широкого класса тонкостенных объектов.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, термоупругопластичность, геометрически нелинейное деформирование, по-шаговый алгоритм.

*Maksymyuk Yu.V.*

**ALGORITHMS FOR SOLVING PROBLEMS OF NONLINEAR DEFORMATION AND STABILITY OF ELASTOPLASTIC AXISYMMETRICAL AVERAGE THICKNESS SHELLS**

The technique, which is based on the calculated ratios of moment scheme of finite element (MSFE), and the algorithm for solving nonlinear equations systems of elastoplastic deformation and loss of stability for rectangular axisymmetrical medium thickness shells has been developed. The reliability of results for a wide class of thin-walled objects confirmed.

**Keywords:** finite element method, thermoelastoplasticity, geometrically nonlinear deformation, step-by-step algorithm.

УДК 539.4

С.М. Банько<sup>1</sup>  
С.В. Кобельський<sup>1</sup>  
В.В. Харченко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України  
Тимірязєвська вул., 2, м. Київ, Україна. 01014

## ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОЛОГО ЦИЛІНДРА З ДЕФЕКТОМ У ВИГЛЯДІ КАВЕРНИ З ТРИЩИНОЮ

Представлено результати розрахунків напруженого стану полого циліндра з дефектом у вигляді тріщини, яка знаходиться в вершині каверни. Проаналізовано вплив геометричних параметрів каверни і тріщини на результати обчислень коефіцієнтів інтенсивності напружень та розкриття у вершині тріщини. Результати розрахунків порівнювали з відомими чисельними розв'язками про розтяг полого циліндра з тріщиною.

**Ключові слова:** напружений стан, тріщина, каверна, коефіцієнт інтенсивності напружень.

**Вступ.** При експлуатації парогенераторів ПГВ-1000 у складі атомних енергетичних установок у вузлах з'єднання «гарячого» колектора з патрубком парогенератора виявлено дефекти у вигляді тріщин, що беруть початок з вершини каверни.

У публікаціях [1-5] фахівців України та Росії, присвячених розрахунковому обґрунтуванню міцності вузла з'єднання, розрахунки напружено-деформованого стану (НДС) представлені без врахування дефекту. Результати досліджень щодо впливу геометричних параметрів дефекту у вигляді каверни в зоні галтельного переходу вузла з'єднання на його напружено-деформований стан представлені в роботах [6-8].

Задача дослідження напруженого стану в вузлі з'єднання при наявності в ньому дефекту зазначеного типу вирішується шляхом розв'язання ряду модельних задач про напружений стан полого циліндра з дефектом у вигляді тріщини, яка знаходиться в вершині каверни

Мета роботи. Дослідити вплив геометричних параметрів каверни і тріщини на розрахункові значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) та розкриття у вершині тріщини.

**Постановка задачі.** Розглядали задачу про розтяг полого циліндра (рис. 1) із зовнішнім діаметром  $D_1=2.2$  м, внутрішнім діаметром  $D_2=2$  м, висотою  $2H=2$  м з внутрішньою і зовнішньою крайовою кільцевою каверною з тріщиною, що знаходиться в її вершині.

На торцях циліндра задавали рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q=100 \text{ МПа}$ . Зважаючи на симетрію задачі, розглядали сектор з кутом  $\pi/40$ . Коефіцієнт Пуассона задавали  $\nu=0.3$ , модуль пружності матеріалу -  $E=2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ . Задачу розв'язували в пружній постановці.

Розрахунки проведено для чотирьох варіантів взаємного розташування каверни і тріщини. В перших двох розглядали неглибоку зовнішню (внутрішню) кільцеву тріщину, вершина якої знаходилась на відстані  $c$  від вершини каверни (рис. 2). В наступних двох розглядали глибоку зовнішню (внутрішню) кільцеву тріщину, а відстань між вершиною тріщини і вершиною каверни варіювали величиною параметра  $k_1$  (рис. 3).

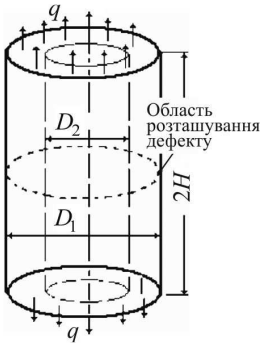


Рис. 1. Задача про розтяг полого циліндра з внутрішньою і зовнішньою крайовою кільцевою тріщиною, що бере початок з каверни

приймали:  $1.1\delta$ ,  $1.5\delta$ ,  $2.4\delta$ ,  $6.0\delta$ ,  $8.0\delta$ ,  $10.0\delta$ .

Величину параметру  $c$  сітки скінченних елементів, що розповсюджувалась вздовж фронту тріщини, для всіх варіантів приймали  $1/20$  товщини  $t$  стінки циліндра, величина параметра  $\delta$  сітки складала  $2/3 c$ .

Розв'язано ряд модельних задач з наступними відношеннями глибини дефекту  $a=k_1\delta+c$  до товщини стінки  $t$ :  $a/t=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ . Висоти  $h$  каверни

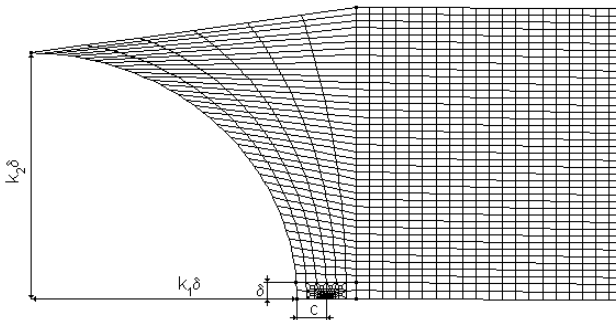


Рис. 2. Скінченно-елементна модель для задач першого та другого варіанту

В задачах третього та четвертого варіантів (рис. 3) моделювали, відповідно, зовнішню та внутрішню кільцеву тріщину. Параметр сітки  $\delta$ , приймали  $2/3$  глибини тріщини. Відношення глибини дефекту до

товщини стінки  $(k_3\delta+k_1\delta+c)/t$  сталі і дорівнює для зовнішньої тріщини 0.8, для внутрішньої – 0.7. Розв'язано ряд задач з наступними значеннями глибини каверни:  $b=1\delta, 5\delta, 7\delta, 9\delta$  та значеннями висоти каверни:  $h=1.1\delta, 1.5\delta, 2\delta, 4\delta, 6\delta, 10\delta$ .

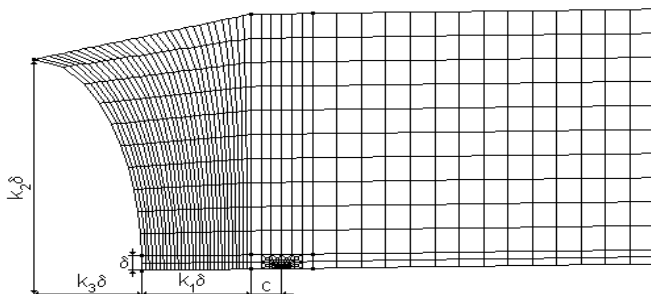


Рис. 3. Скінченно-елементна модель для задач третього та четвертого варіанту

Результати розрахунку КІН порівнювали з відомими чисельними розв'язками задач про розтяг полого циліндра з зовнішньою і внутрішньою тріщиною [9, 10].

**Результати.** На рис. 6 для задач першого варіанту представлені порівняльні результати розрахунку КІН для різних відношень глибини дефекту до товщини стінки циліндра ( $a/t$ ) в залежності від висоти каверни.

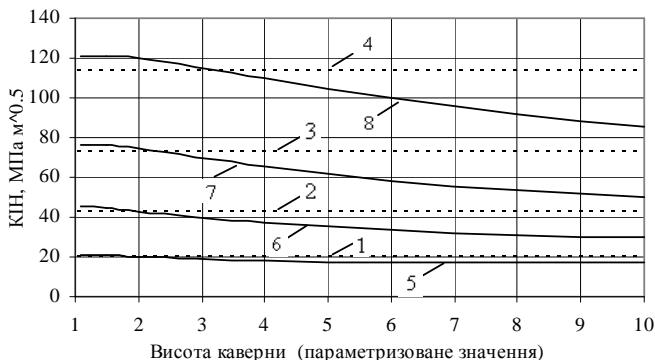


Рис. 6. Графіки розподілу КІН; зовнішня тріщина; задача першого варіанту:  
 1 - розв'язок [9] для  $a/t=0.1$ , 2 - розв'язок [9] для  $a/t=0.3$ , 3 - розв'язок [9] для  $a/t=0.5$ ,  
 4 - розв'язок [9] для  $a/t=0.7$ , 5 - чисельний розв'язок для  $a/t=0.1$ , 6 - чисельний розв'язок для  
 $a/t=0.3$ , 7 - чисельний розв'язок для  $a/t=0.5$ , 8 - чисельний розв'язок для  $a/t=0.7$

Як видно з рис. 6, значення КІН при зменшенні висоти  $h$  каверни зростають для всіх відношень  $a/t$  і при певній висоті каверни розв'язання задачі з тріщиною стає неконсервативним. На рис. 7 показано, як в залежності від відношення  $a/t$  змінюється значення висоти каверни, нижче якого чисельний розв'язок задачі з тріщиною є неконсервативним.

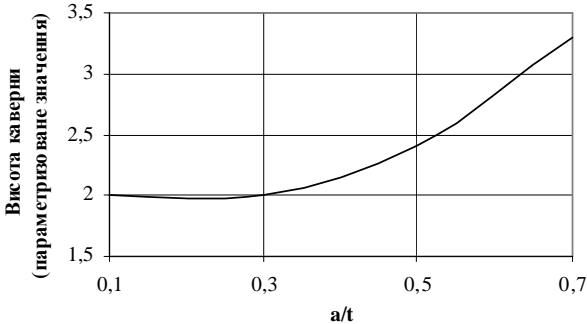


Рис. 7. Значення висоти каверни, нижче якого розв'язок без врахування каверни є неконсервативним в залежності від відношення  $a/t$

На рис. 8 для задач першого варіанту показані графіки розподілу КІН в залежності від відношення  $a/t$  для різних значень висоти каверни.

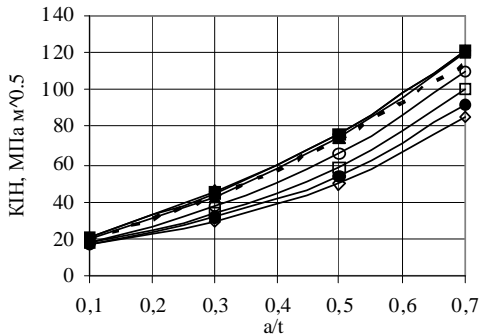


Рис. 8. Графіки розподілу КІН; зовнішня тріщина; задача першого варіанту:

--- — розв'язок [9];  $\blacklozenge$  -  $h=1,1\delta$ ,  $\blacksquare$  -  $h=1,5\delta$ ,  $\blacktriangle$  -  $h=2\delta$ ,  $\circ$  -  $h=4\delta$ ,  $\square$  -  $h=6\delta$ ,  $\bullet$  -  $h=8\delta$ ,  $\diamond$  -  $h=10\delta$

Як видно з приведених графіків, для каверн висотою  $h=1,1\delta$ ,  $1,5\delta$ ,  $2\delta$  значення КІН вищі, ніж для чисельного розв'язку задачі з тріщиною. Відповідно при збільшенні значення висоти каверни значення КІН зменшуються.



На рис. 9 для задач другого варіанту представлені порівняльні результати розрахунку КІН для різних відношень глибини дефекту до товщини стінки циліндра ( $a/t$ ) в залежності від висоти каверни.



Рис. 9. Графіки розподілу КІН; внутрішня тріщина; задача другого варіанту: 1 - розв'язок [10] для  $a/t=0.1$ , 2 - розв'язок [10] для  $a/t=0.3$ , 3 - розв'язок [10] для  $a/t=0.5$ , 4 - розв'язок [10] для  $a/t=0.7$ , 5 - чисельний розв'язок для  $a/t=0.1$ , 6 - чисельний розв'язок для  $a/t=0.3$ , 7 - чисельний розв'язок для  $a/t=0.5$ , 8 - чисельний розв'язок для  $a/t=0.7$

Як видно з рис. 9, значення КІН при зменшенні висоти каверни зростають для всіх відношень  $a/t$  і певній висоті каверни розв'язання задачі з тріщиною також є неконсервативним. На рис. 10 показано, як в залежності від відношення  $a/t$  змінюється значення висоти каверни, нижче якого чисельний розв'язок задачі з тріщиною є неконсервативним.

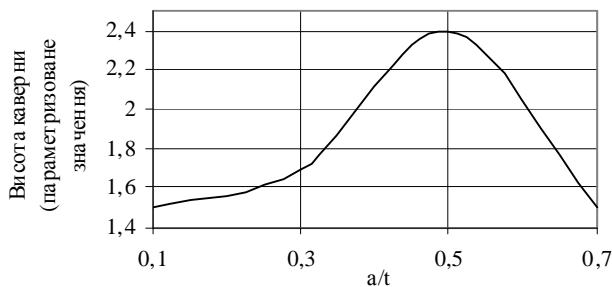


Рис. 10. Значення висоти каверни, нижче якого розв'язок без врахування каверни є неконсервативним в залежності від відношення  $a/t$

На рис. 11 для задач другого варіанту представлені графіки розподілу КІН в залежності від відношення  $a/t$  для різних значень висоти каверни.

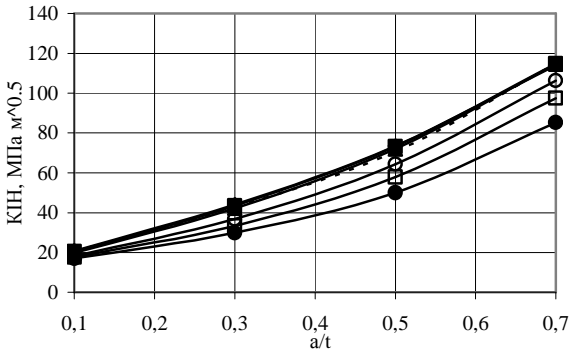


Рис. 11. Графіки розподілу КІН; внутрішня тріщина; задача другого варіанту:  
 - - - розв'язок [10]; ♦ -  $h=1,1\delta$ , ■ -  $h=1,5\delta$ , ▲ -  $h=2\delta$ , ○ -  $h=4\delta$ ,  
 □ -  $h=6\delta$ , ● -  $h=10\delta$

З графіків представлених на рис. 11 слідує, що для каверн висотою  $h=1,1\delta$ ,  $1,5\delta$ ,  $2\delta$  значення КІН вищі, ніж для чи розв'язку задачі з тріщиною. При збільшенні значення висоти каверни значення КІН зменшуються.

На рис. 12 для задач третього варіанту представлені графіки розподілу КІН для різних глибин каверни в залежності від висоти. На рис. 13 представлені графіки розподілу КІН в залежності від глибини каверни для різних значень висоти. Відношення глибини дефекту до товщини стінки циліндра  $a/t$  сталі і становить 0.8.

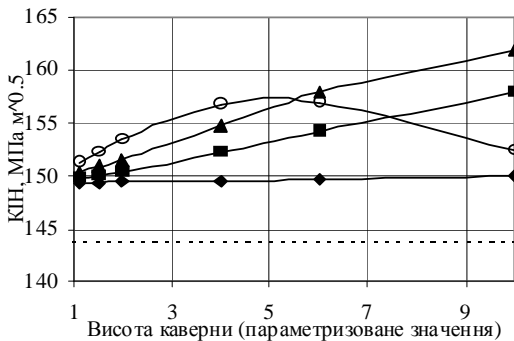


Рис. 12. Графіки розподілу КІН; зовнішня тріщина; задача третього варіанту:  
 - - - розв'язок [9]; ♦ -  $b=1\delta$ ; ■ -  $b=5\delta$ ; ▲ -  $b=7\delta$ ; ○ -  $b=9\delta$

Як видно з представлених графіків, значення КІН для всіх варіантів глибини та висоти каверни вищі, ніж для чисельного розв'язку задачі з

тріщиною. Тобто чисельний розв'язок є неконсервативним. Крім того, слід відмітити, що для глибоких каверн ( $b=9\delta$ ) при висоті  $h=6\delta$  значення КІН знижуються.

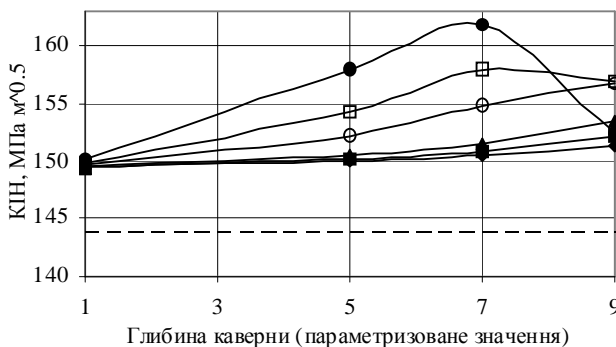


Рис. 13. Графіки розподілу КІН; зовнішня тріщина; задача третього варіанту:

--- розв'язок [9]; ◆ -  $h=1.1\delta$ , ■ -  $h=1.5\delta$ , ▲ -  $h=2\delta$ , ○ -  $h=4\delta$ ,  
□ -  $h=6\delta$ , ● -  $h=10\delta$

На рис. 14 для задачі четвертого варіанту представлено графіки розподілу КІН для різних глибин каверни в залежності від висоти. На рис. 15 представлено графіки розподілу КІН в залежності від глибини каверни для різних значень висоти. Відношення глибини дефекту до товщини стінки циліндра  $a/t$  сталі і становить 0,7.

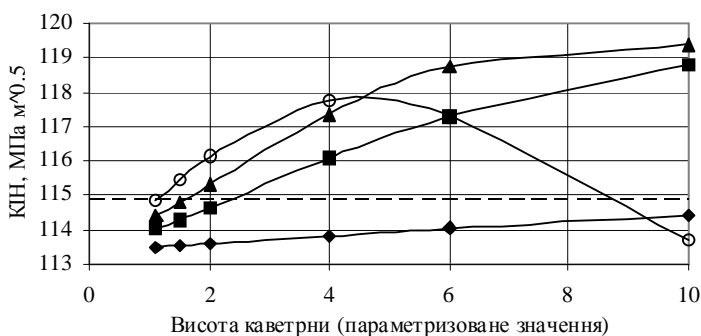


Рис. 14. Графіки розподілу КІН; внутрішня тріщина; задача четвертого варіанту:

--- розв'язок [10]; ◆ -  $b=1\delta$ , ■ -  $b=5\delta$ , ▲ -  $b=7\delta$ , ○ -  $b=9\delta$

З отриманих результатів випливає, що чисельний розв'язок стає неконсервативним зі збільшенням глибини і висоти каверни.

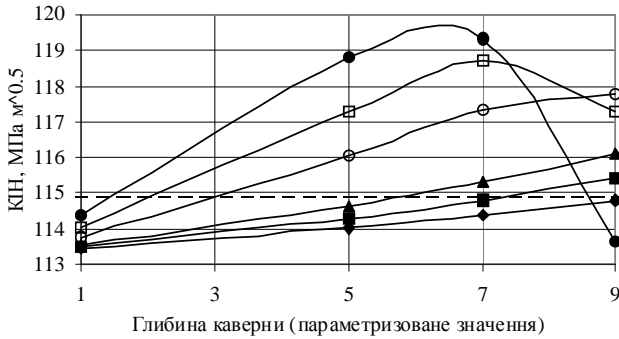


Рис. 15. Графіки розподілу КІН; внутрішня тріщина; задача четвертого варіанту:  
 - - - розрив'язок [10]; ◆ -  $h=1.1\delta$ , ■ -  $h=1.5\delta$ , ▲ -  $h=2\delta$ , ○ -  $h=4\delta$ , □ -  $h=6\delta$ , ● -  $h=10\delta$

На рис. 16 представлено графіки розподілу КІН в залежності від висоти каверни для внутрішньої тріщини при використанні моделей різного варіанту каверни з тріщиною. Відношення глибини дефекту до товщини стінки становить 0,7. Для глибокої тріщини глибину каверни  $b$  приймали рівною  $1\delta$ ,  $5\delta$ ,  $7\delta$ ,  $9\delta$ .

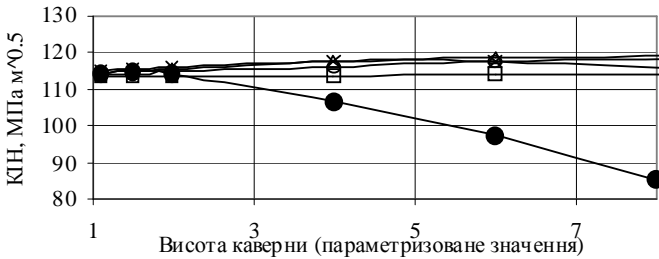


Рис. 16. Графіки розподілу КІН; внутрішня тріщина: ● - мілкі тріщина, □ -  $b=1\delta$  (глибока тріщина), ○ -  $b=5\delta$  (глибока тріщина), Δ -  $b=7\delta$  (глибока тріщина), × -  $b=9\delta$  (глибока тріщина)

З приведених графіків слідує, що для мілкої тріщини зі збільшенням висоти каверни КІН значно знижується в порівнянні з глибокою тріщиною. Тобто модель з мілкою тріщиною дає занижені результати.

В табл. 1- 4 приведені значення КІН для різних варіантів конфігурації дефекту.

Таблиця 1

Значення КІН для задач першого варіанту

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, $МПа \cdot м^{0.5}$			
	a/t			
	0.1	0.3	0.5	0.7
1.1δ	21.02	45.21	76.70	120.78
1.5δ	20.57	44.52	76.26	121.27
2δ	19.96	43.15	74.77	120.38
4δ	18.35	37.26	65.82	110.42
6δ	17.63	33.59	58.56	99.99
8δ	17.25	31.31	53.48	91.85
10δ	17.01	29.70	49.66	85.42
Розв'язок [9]	20.34	42.98	73.12	114.07

Таблиця 2

Значення КІН для задач другого варіанту

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, $МПа \cdot м^{0.5}$			
	a/t			
	0.1	0.3	0.5	0.7
1,1δ	20.80	44.01	73.48	114.08
1,5δ	20.38	43.44	73.28	114.89
2δ	19.80	42.21	72.10	114.45
4δ	18.24	36.79	64.29	106.40
6δ	17.56	33.42	57.87	97.53
10δ	16.98	29.95	50.07	85.24
Розв'язок [10]	20.52	42.723	70.5	114.86

Таблиця 3

Значення КІН для задач третього варіанту

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, $МПа \cdot м^{0.5}$			
	Глибина каверни			
	1δ	5δ	7δ	9δ
1.1δ	149.35	149.86	150.38	151.36
1.5δ	149.38	150.11	150.88	152.27
2δ	149.42	150.46	151.58	153.42
4δ	149.54	152.21	154.85	156.72
6δ	149.68	154.28	157.97	156.98
10δ	150.05	157.91	161.84	152.41
Розв'язок [9] a/t=0.8 143. 68				

Таблиця 4

Значення КІН для задач четвертого варіанту

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, $MПа \cdot м^{0.5}$			
	Глибина каверни			
	1 $\delta$	5 $\delta$	7 $\delta$	9 $\delta$
1.1 $\delta$	113.47	114.04	114.38	114.83
1.5 $\delta$	113.52	114.30	114.80	115.42
2 $\delta$	113.58	114.64	115.33	116.12
4 $\delta$	113.80	116.04	117.35	117.75
6 $\delta$	114.02	117.29	118.70	117.29
10 $\delta$	114.40	118.80	119.35	113.69
Розв'язок [10] $a/t=0.7$				114.86

На рис. 17 приведено графіки розподілу розкриття у вершині тріщини в залежності від висоти каверни для мілкої і глибокої внутрішньої тріщини. Відношення глибини дефекту до товщини стінки становить 0.7.

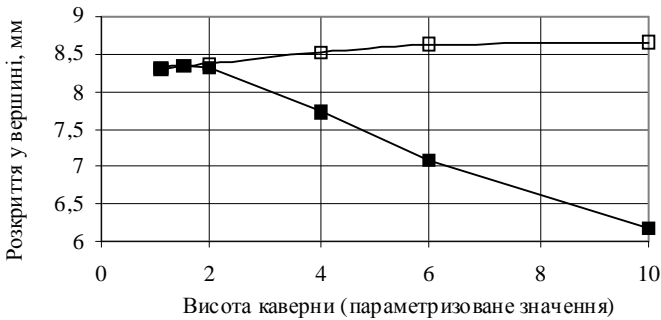


Рис. 17. Розкриття у вершині тріщини: ■ – мілка тріщина; □ - глибока тріщина

З представлених результатів слідує, що для мілкої тріщини зі збільшенням висоти каверни значення розкриття у вершині значно зменшується. З отриманих результатів впливає також, що модель з глибокою тріщиною дає вищі значення КІН і розкриття у вершині тріщини, при чому ці значення зростають зі збільшенням висоти і глибини каверни.

**Висновки.** В рамках даної роботи розв'язано ряд модельних задач про розтяг полого циліндра з дефектом у вигляді тріщини, що бере початок з вершини каверни. Отримані результати порівняли з відомими чисельними розв'язками про розтяг циліндра з тріщиною.

Аналіз отриманих результатів розв'язання модельних задач дозволяє зробити наступний висновок: чисельний розв'язок дає занижені результати розрахунку КІН для всіх глибоких зовнішніх тріщин з каверною, для глибоких внутрішніх при глибині понад  $5\delta$  і висоті понад  $4\delta$ . Для неглибоких внутрішніх і зовнішніх тріщин чисельний розв'язок дає занижені результати розрахунку КІН при висоті каверни до  $2\delta$ .

Використання моделей з неглибокою тріщиною в вершині каверни призводить до занижених значень КІН і розкриття у вершині тріщини в порівнянні з глибокою тріщиною. Отже, глибока тріщина є більш небезпечною.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Степанов Г.В., Харченко В.В., Бабуцкий А.И. и др. Оценка напряженно-деформированного состояния узла сварного соединения "горячего" коллектора с патрубком парогенератора ПГВ-1000 АЭС// Пробл. прочности.- 2003, №5. с.142-153.
2. Драгунов Ю.Г., Петрова О.Ю., Лякишев С.Л. и др. Повышение надежности эксплуатации коллекторов парогенераторов ПГВ-1000, -1000М – [Атомная энергия](#). – 2008. – Том 104. – №1. – С. 9–13.
3. Степанов Г.В., Харченко В.В., Бабуцкий А.И. и др. Влияние компоновки реакторов ВВЭР «малой» и «большой» серий атомных электростанций на напряженно-деформированное состояние узла приварки коллектора к патрубку парогенератора – Пробл. прочности. – 2007. – №5. – С. 114–120.
4. Лякишев С.Л., Харченко С.А., Кучерявченко А.В., Коротаев Н.Ф. Оптимизация конструкции узла приварки коллектора к корпусу парогенератора – Сб.трудов 7-го Международного семинара по горизонтальным парогенераторам. – 2006. – ФГУП ОКБ «Гидропресс», Подольск, Россия.
5. Лякишев С.Л., Трунов Н.Б., Харченко С.А., и др. Разработка и обоснование мероприятий по обеспечению надежной и безопасной эксплуатации сварных соединений № 111 парогенератора ПГВ-1000М – Труды 6-й Международной научно-технической конференция «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР». – 2009. – ФГУП ОКБ «Гидропресс», Подольск, Россия.
6. Банько С.Н., Кобельский С.В., Кравченко В.И. Численный анализ напряженно-деформированного состояния в вершине каверны, расположенной в галтели узла приварки коллектора к корпусу парогенератора ПГВ-1000М – Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2012. – Вып. 35. – С. 214 – 220.
7. Банько С.М. Напружений стан вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М з каверною – Вісник Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя. – 2012. – №3 (67). – С. 56 – 63.
8. Банько С.М. Аналіз впливу геометричних параметрів каверни в галтелі вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М на його напружений стан //Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2013.– Вип.91. – С.181–187.
9. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. – М.: Мир. 1990. – 1013 с.
10. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наукова думка. 1988. – 620 с.

## REFERENCES

1. *Stepanov H.V., Kharchenko V.V., Babutskyy A.Y. y dr.* Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyannya uzla svarnoho soedynenyya "goryacheho" kollektora s patrubkom paroheneratora PGV-1000 AES „Evaluation of the stress-strain state of the welded joint assembly "hot" collector pipe steam generator PGV-1000 NPP” - Stress-strain state evaluation of a welded joint of hot collector to nozzle of NPP steam generator PGV-1000 // Probl. prochnosty.- 2003, No. 5. s.142-153.
2. *Drahunov Yu.H., Petrova O.Yu., Lyakyshev S.L. y dr.* Povishenye nadezhnosti ekspluatatsyy kollektorov paroheneratorov PGV-1000, -1000M – Increasing the operational reliability of the collectors of PGV-1000,-1000M steam generators – Atomnaya enerhiya. – 2008. – Tom 104. – No. 1. – S. 9–13.
3. *Stepanov H.V., Kharchenko V.V., Babutskyy A.Y. y dr.* Vliyanye komponovky reaktorov VVER «maloy» y «bol'shoj» seryi atomnikh elektrostantsyy na napryazhenno-deformirovannoe sostoyanye uzla pryvarky kollektora k patrubku paroheneratora – Effect of the layout of small-and large-series WWER-1000 reactors of nuclear power plants on the stress-strain state of the header-steam generator connector weldment – Probl. prochnosty. – 2007. – No. 5. – S. 114–120.
4. *Lyakyshev S.L., Kharchenko S.A., Kucheryavchenkov A.V., Korotaev N.F.* Optymyzatsyya konstruksyy uzla pryvarky kollektora k korpusu paroheneratora – Optimizing the design of the welded joint between the header and steam generator shell – Sb.trudov 7-ho Mezhdunarodnoho semynara po horizontal'nim paroheneratoram. – 2006. – FGUP OKB «Hydropress», Podol'sk, Rossyya.
5. *Lyakyshev S.L., Trunov N.B., Kharchenko S.A., y dr.* Razrabotka y obosnovanye meropryyatyy po obespechenyyu nadezhnoy y bezopasnoy ekspluatatsyy svarnikh soedynenyy № 111 paroheneratora PGV-1000M – Development and justification of measures for ensuring reliable and safe operation of welded joints No. 111 in PGV-1000M steam generators – Trudi 6-y Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnycheskoy konferentsyya «Obespechenye bezopasnosti AES s VVER». – 2009. – FGUP OKB «Hydropress», Podol'sk, Rossyya.
6. *Ban'ko S.N., Kobel'skiy S.V., Kravchenko V.Y.* Chyslenniyy analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyannya v vershyne kaverni, raspolozhennoy v haltely uzla pryvarky kollektora k korpusu paroheneratora PGV-1000M – Numerical analysis of the stress-strain state at the tip of a cavity near the fillet of the welded joint between the header and the shell of PGV-1000M steam generator – Nadezhnost' y dolhovechnost' mashyn y sooruzhenyy. – 2012. – Vip. 35. – S. 214 – 220.
7. *Ban'ko S.M.* Napruzhenyy stan vuzla z"yednannya kolektora z korpusom paroheneratora PGV-1000M z kavernoyu – Stress state of the welded joint with a cavity between the header and the shell of PGV-1000M steam generator – Visnyk Ternopil's'koho natsional'noho tekhnichnoho universytetu im. I. Pulyuya. – 2012. – No. 3 (67). – S. 56 – 63.
8. *Ban'ko S.M.* Analiz vplyvu heometrychnykh parametrov kaverny v halteli vuzla z"yednannya kolektora z korpusom paroheneratora PGV-1000M na yoho napruzhenyy stan – Analysis of the influence of geometrical parameters of the cavity near the fillet of the welded joint between the header and the shell of PGV-1000M steam generator on its stress state //Opir materialiv i teoriya sporud: Nauk.-tekh. zbirnyk. – K.: KNUBA, 2013.– Vyp.91. – S.181–187.
9. *Murakami Yu.* Spravochnik po koeffytsyentam yntensyvnoyy napryazhenyy. – Handbook of stress intensity factors – M.,: Myr. 1990. – 1013 s.
10. *Savruk M.P.* Koeffytsyenti yntensyvnoyy napryazhenyy v telakh s treshchynamy. – The stress intensity factors in the bodies with cracks – K.,: Naukova dumka. 1988. – 620 s.

*Стаття надійшла до редакції 24.02.2014 р.*



*Банько С.Н., Кобельский С.В., Харченко В.В.*

#### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ДЕФЕКТОМ В ВИДЕ КАВЕРНЫ С ТРЕЩИНОЙ**

Представлены результаты расчетов напряженного состояния полого цилиндра с дефектом в виде трещины, которая находится на вершине каверны. Проанализировано влияние геометрических параметров каверны и трещины на результаты вычислений коэффициентов интенсивности напряжений и раскрытие в вершине трещины. Результаты расчетов сравнивались с известными численными решениями о растяжении полого цилиндра с трещиной.

**Ключевые слова:** напряженное состояние, трещина, каверна, коэффициент интенсивности напряжений.

*Ban'ko S.N., Kobelsky S.V., Kharchenko V.V.*

#### **NUMERICAL SIMULATION OF THE STRESS STATE OF A HOLLOW CYLINDER WITH A DEFECT IN THE FORM OF A CAVITY WITH A CRACK**

The results of calculating the stress state of a hollow cylinder with a defect in the form of cracks, which is at the top of the cavity is presented. The influence of the geometric parameters of the cavity and crack on the calculations of stress intensity factors and crack opening in the top is analyzed. The calculation results are compared with the available numerical solutions of stretching hollow cylinder with a crack.

**Key words:** stress state, crack, cavity, stress intensity factor.

## ПАМ'ЯТІ НАШОГО ТОВАРИША

31 березня 2014 р. пішов з життя наш колега, відомий учений в області будівельної механіки, доктор технічних наук професор Микола Олександрович Соловей.

Микола Олександрович народився в Києві 21 вересня 1946 р. у родині інженерів-будівельників і архітекторів. Продовжуючи традицію родини, по закінченню школи він вступив до Київського інженерно-будівельного інституту, нині Київський національний університет будівництва і архітектури, зв'язавши все своє життя з університетом. Ще у студентські роки Микола Олександрович виявив наукові здібності в області будівельної механіки. Після успішного закінчення вузу йому було запропоновано вступити в аспірантуру. Призив до лав Радянської армії відстрочив його навчання в аспірантурі. В 1980 р. він успішно захистив кандидатську дисертацію, у 2008 р. під науковим керівництвом професора В.А. Баженова – док-



торську. У 2012 р. йому присвоєне вчене звання професора кафедри будівельної механіки.

Основними напрямками його наукових досліджень були: нелінійна теорія гнучких пружних неоднорідних оболонок при статичній дії силових і температурних навантажень, чисельне дослідження процесів термопружного деформування й втрати стійкості широкого класу тонких оболонок неоднорідної структури, алгоритмізація обчислювальних процесів, розробка обчислювальних комплексів. Він автор більш ніж 100 наукових праць, у тому числі двох монографій.

Професор М.О. Соловей зробив вагомий внесок у розвиток і вирішення проблем, що стоять перед сучасною будівельною механікою – розробці теоретичних положень, універсального методу й обчислювальних процедур чисельного дослідження стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких пружних неоднорідних оболонок складної структури при дії силових і температурних навантажень. Розробка нового універсального ізопараметричного просторового скінченного елемента з додатковими змінними параметрами дозволила побудувати єдину розрахункову модель, що враховує неоднорідності матеріалу й геометричні особливості різних конструктивних елементів гнучких оболонок складної форми (змінність товщини, злами й гранованість обшивки, складну форму ребер, отворів, багатошарову структуру матеріалу з можливістю врахування криволінійної анізотропії). Для розв'язування задач стійкості неоднорідних оболонок при комбінованій дії темпе-

ратурних і силових навантажень розроблений алгоритм автоматизованого проходження всієї діаграми “навантаження-прогин” з визначенням особливих точок, який дозволяє враховувати залежність властивостей матеріалу шарів оболонки від температури.

Розглянуто нові задачі, у яких досліджені особливості термопружного деформування, втрати стійкості й закритичної поведінки неоднорідних оболонок: досліджений вплив різних комбінацій термосилового навантаження на стійкість і закритичну поведінку пологих панелей сталі й ступінчасто-змінної товщини; визначений раціональний закон лінійної змінюваності товщини для пологих сферичних оболонок обертання; досліджений вплив ексцентричності з'єднання плоских граней різної товщини гранованої оболонки; оцінений вплив різних параметрів конструктивних елементів на жорсткість оболонок з ребрами, виймками й отворами, гладких і гранованих, сталі та лінійно-змінної товщини при дії температурного й силового навантажень; а також багато інших задач.

Завдяки своїй невгамовній енергії, активному характеру, ерудиції, Микола Олександрович завжди ставив перед собою великі плани та завдання, як наукові, так і життєві.

Останнім часом Микола Олександрович займався поширенням розробленої методики на задачі дослідження тонких неоднорідних оболонок, шари яких виконані з композитного матеріалу волокнистої структури, а також створенням методики дослідження пружного деформування таких оболонок при динамічному навантаженні.

Природно, що поруч з науковою працею Микола Олександрович займався педагогічною діяльністю. Плідно працюючи зі студентами, він прагнув не тільки навчити основам будівельної механіки, але й повернути їх до дослідницької роботи, прищепити творчий підхід в подальшій діяльності.

Усе життя Микола Олександрович активно займався фізичною культурою й спортом. Він був засновником ряду спортивних секцій університету, які діють і до цього часу.

Цілеспрямованість, упевненість у своїх наукових позиціях, принциповість, шалена працювистість, розумна педантичність і акуратність при розв'язуванні задач, ерудиція, високий науковий інтелект, поінформованість в області культури й мистецтва, високі людські якості, такі як доброзичливість, чуйність, оптимізм, гумор, ставлять його в ряд талановитих учених України.

Світла пам'ять про Миколу Олександровича, справжнього вченого, педагога й прекрасну людину, назавжди залишиться в серцях його друзів, колег і учнів.

*Ректорат,  
колективи кафедри будівельної механіки  
і науково-дослідного інституту будівельної механіки  
Київського національного університету будівництва і архітектури*

## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Сахаров О.С., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.</i> Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин . . . . .	3
<i>Лізунов П.П., Гуляр О.І., Солодей І.І.</i> Універсальний алгоритм чисельного моделювання нелінійних процесів деформування залізобетонних конструкцій . . . . .	17
<i>Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О.</i> Визначення ефективних фізико-механічних характеристик односпрямованого волокнистого композитного матеріалу . . . . .	30
<i>Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Pyskunov S.O.</i> An estimation of residual lifetime of spatial structural elements under continual fracture condition . . . . .	50
<i>Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.</i> Influence of system stiffness parameters at contact softness in vibroimpact system . . . . .	62
<i>Іванченко Г.М.</i> Взаємодія хвиль сильних розривів у воді з пружним екраном . . . . .	75
<i>Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.</i> Порівняння динамічної поведінки віброударної системи в залежності від характеру контакту між її елементами . . . . .	83
<i>Гайдайчук В.В., Шевчук Л.В.</i> Неголономна динаміка коливань кружляння колон глибокого буріння . . . . .	92
<i>Ворона Ю.В., Лук'янченко О.О., Костіна О.В.</i> Стохастичні параметричні коливання пружних систем з урахуванням їх попередніх станів . . . . .	102
<i>Безверхий О.І., Левченко В.В., Макієвський О.І.</i> Гармонічні коливання п'єзокерамічної круглої пластини з азимутальними розрізами електродів . . . . .	114

---

<i>Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P.</i> Modeling of nonlinear deformation and buckling of elastic inhomogeneous shells . . . . .	121
<i>Максим'юк Ю.В.</i> Алгоритм розв'язання задач нелінійного деформування та стійкості пружнопластичних вісесиметричних оболонок середньої товщини .	148
<i>Банько С.М., Кобельский С.В., Харченко В.В.</i> Чисельне моделювання напруженого стану полого циліндра з дефектом у вигляді каверни з тріщиною . . . . .	157

Наукове видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

Науково-технічний збірник

Випуск 92

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 30.06.14. Формат 60x90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір друк №1.

Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.

Тираж 100. Зам. № 14-698К

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

---

Віддруковано на ПАТ “ВІПОЛ”

03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру

Серія ДК № 4404 від 31.08.2012 р.