

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 94

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2015

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

П.В. Алявдін, д-р техн. наук
Ю. Аткичунас, д-р техн. наук
О.М. Белостоцький, д-р техн. наук
І. Елішаков, д-р техн. наук
С.Н. Кривошапко, д-р техн. наук
С.Ю. Фіалко, д-р техн. наук
Чан Дик Тінг, д-р техн. наук
Л.М. Лобанов, д-р техн. наук;
академік НАН України

А.В. Перельмутер, д-р техн. наук
Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
О.Ф. Даценко, д-р техн. наук
П.В. Ясній, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Г.М. Іванченко, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
І.І. Солодей, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 94 / Відп. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2015. – 256 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталях і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробничників, докторантів, аспірантів та студентів.

Індексація і партнери



Адреса редакційної колегії:
КНУБА, Повітрофлотський пр., 31.
м. Київ, 03037
Тел.: (044) 248-3040

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61
© КНУБА, 2015

До 50-річчя науково-технічного збірника «Опір матеріалів і теорія споруд»

Даний 94-й випуск збірника виходить у ювілейний 50 рік його заснування.

Міжвідомчий збірник наукових праць «Опір матеріалів і теорія споруд» був створений у 1965 році за ініціативою професора Д.В. Вайнберга (1905-1973), який в період 1965-1973 років був його відповідальним редактором.

Періодичність видання збірника - два рази на рік, за період 1965-2014 рр. видано 93 випуски. Збірник розповсюджується в провідні бібліотеки України, зокрема надсилається до Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (повний текст випусків збірника представлений також і на сайті цієї бібліотеки) Національної парламентської бібліотеки України, Львівської Національної бібліотеки України ім. Стефаника та інших.



№№ 1-8 №№ 9-15 №№ 16-41 №№ 42-63 №№ 64-83 з № 84 (2010)
(1965-1968) (1969-1971) (1971-1982) (1983-1997) (1998-2009)

У 1965-1998 роки збірник видавався російською мовою і мав назву «Сопротивление материалов и теория сооружений», а з 1998 р. збірник статей видається під назвою «Опір матеріалів і теорія споруд».

В збірнику публікуються наукові статті, які підготовлені українською, англійською та іншими мовами, і містять результати фундаментальних досліджень з актуальних проблем опору матеріалів, будівельної механіки, механіки деформівного твердого тіла, теорії споруд, суміжних прикладних проблем міцності і надійності в машинобудуванні, будівництві та інших галузях сучасної техніки. Також висвітлюються питання викладання будівельної механіки та подається інформація про нові навчальні і наукові видання за тематикою збірника.

Починаючи з грудня 1958 р. і до останніх днів свого життя, тобто до грудня 1973 р., проф. Д.В. Вайнберг був керівником кафедри будівельної механіки Київського інженерно-будівельного інституту (КІБІ).

У цей період із максимальною повнотою науково-організаційний талант Д.В. Вайнберга проявився в створенні в 1961 р. в КІБІ Науково-дослідної лабораторії тонкостінних просторових конструкцій.

Організація лабораторії - це власна ідея проф. Д.В. Вайнберга, основні наукові напрямки діяльності якої були сформульовані ним особисто.



Проф. Д.В. Вайнберг

У наказах Міністра вищої і середньої освіти Української РСР Ю.М. Даденкова № 601 від 19 грудня 1960 р. та директора інституту доцента О.Л. Каліщука по Київському інженерно-будівельному інституту від 17 січня 1961 р., зазначалося, що виконання обов'язків наукового керівника Лабораторії тонкостінних просторових конструкцій покладається на завідувача кафедри будівельної механіки професора Д.В. Вайнберга.

Під керівництвом Д.В. Вайнберга Науково-дослідна лабораторія тонкостінних просторових конструкцій за короткий час увійшла до числа найбільш відомих наукових колективів у галузі будівельної механіки і механіки деформівного твердого тіла.

З ініціативи Д. В. Вайнберга Академія наук УРСР в особі Президента АН УРСР академіка Б. С. Патона та Головного вченого секретаря Президії АН УРСР академіка АН УРСР Г. С. Писаренка підтримала клопотання щодо перетворення лабораторії в Проблемну науково-дослідну лабораторію тонкостінних просторових конструкцій при Київському інженерно-будівельному інституті з віднесенням її до першої категорії наукових установ.

У 1966 році за рішенням колегії Державного Комітету Ради Міністрів СРСР із науки і техніки від 29 жовтня 1966 року науково-дослідна лабораторія тонкостінних просторових конструкцій Київського інженерно-будівельного інституту, очолювана Д. В. Вайнбергом, була перетворена в Проблемну науково-дослідну лабораторію тонкостінних просторових

конструкцій. Науковим керівником лабораторії був призначений проф. Д.В. Вайнберг.

Перед лабораторією були визначені такі наукові напрямки і задачі: розвиток теорії і методів статичного та динамічного розрахунку просторових систем; розробка методів та алгоритмів чисельного аналізу для розв'язання задач механіки деформівних тіл; розробка автоматизованої системи розрахунку із застосуванням обчислювальної техніки щодо досліджень ефективних форм конструкцій у різних галузях техніки.

Слід зазначити, що ці напрямки фактично були сформульовані самим Д.В. Вайнбергом.

Уже з перших кроків діяльності Проблемної лабораторії за ініціативою Д.В. Вайнберга було прийнято рішення, яке згодом повністю себе виправдало, що найбільш доцільно створювати універсальні системи, які дозволяли б розв'язувати широке коло задач. Тому виключною особливістю теоретичних і прикладних досліджень лабораторії був їхній універсальний та всеоб'ємний характер.

Виходячи з цього завдання, у Проблемній науково-дослідній лабораторії тонкостінних просторових конструкцій (ПНДЛ ТПК) у цей період широко розмаху набули дослідження по розробці і застосуванню чисельних методів розрахунку конструкцій.

На базі Проблемної науково-дослідної лабораторії тонкостінних просторових конструкцій в 1991 р. було створено Науково-дослідний інститут будівельної механіки (НДІ БМ).

Сьогодні можна з упевненістю сказати, що ідеї та результати наполегливої праці професора Д.В. Вайнберга значно випередили час і зазначили тенденції розвитку обчислювальної механіки.

На жаль проф. Д.В. Вайнберг не зміг у повній мірі побачити і оцінити результати своєї праці. За його життя працівниками кафедри і лабораторії було захищено 25 кандидатських дисертацій.

На сьогоднішній день співробітниками створеної ним наукової школи захищено:

Докторські дисертації:

- 1975 рік: О.Л. Синявський
- 1978 рік: О.С. Сахаров
- 1979 рік: В.І. Гуляєв
- 1981 рік: Ю.В. Верюжський
- 1984 рік: В.А. Баженов
- 1987 рік: В.Є. Вериженко
- 1989 рік: В.К. Чибіряков, О.І. Гуляр, П.П. Лізунов,
В.В. Киричевський
- 1990 рік: Є.О. Гоцуляк, Є.С. Дехтярюк

- 1992 рік: В.В. Гайдайчук, Г.Б. Ковнеристов
1993 рік: О.А. Киричук
1994 рік: О.В. Гондляр
1995 рік: О.Л. Козак, О.І. Оглобля
1999 рік: В.К. Цихановський
2004 рік: С.Ю. Фіалко, Чан Дик Тінь
2006 рік: Я.О. Слободян
2008 рік: М.О. Соловей
2009 рік: В.М. Трач
2011 рік: С.О. Пискунов
2012 рік: Г.М. Іванченко
2013 рік: І.І. Солодей.

Кандидатські дисертації:

- 1965 рік: В.З. Ждан, І.А. Коломієць
1966 рік: Ф.О. Романенко, О.Л. Сиянівський, В.І. Гуляев
1967 рік: Ю.К. Чекушкін, А.В. Одинец
1968 рік: О.С. Сахаров, В.П. Стукалов
1969 рік: В.А.Баженов, В.М. Кислоокій, І.А. Базилевич
1970 рік: Й.З. Ройтфарб, П.П. Ворошко, С.М. Любченко
1971 рік: Ю.В. Верюжський
1972 рік: В.М. Геращенко, Р.К. Дем'янюк
1973 рік: В.К. Чибіряков
1974 рік: О.В. Шишов, Д.Р. Колев, В.В.Киричевський,
Є.О.Гоцуляк
1976 рік: В.Г. Кобієв, Г.Й. Мельниченко, С.Я. Гранат,
П.П. Лізунов
1977 рік: В.В. Гайдайчук, Г.Г. Завьялов
1978 рік: О.І. Гуляр, Р.К. Бобров, С.М. Чорний
1979 рік: А.І. Вусатюк, Спартак Мухамед Салем, О.С. Свистов
1980 рік: М.О. Соловей, І.С. Гончаренко, О.А. Киричук,
Аднан Алі, Пемсинг Кришна, Самсур Абдула,
Хоанг Суан Ліонг
1981 рік: О.Н. Бесков, В.С. Вериженко, А.І. Винник,
Л.А. Врюкало, О.Л. Козак, А.Д. Легостаєв,
Б.М. Марзицин, О.І. Оглобля, О.О. Холоденко
1982 рік: Н.Т. Жадрасинов, А.Я. Петренко, В.В. Савицький,
В.В. Хименко, В.К. Цихановський, О.В. Шимановський
1983 рік: Г.С. Кондаков, С.Л. Попов, О.В. Савчук, В.М. Чабан
1984 рік: В.М. Кархалев, П.Г. Мельник-Мельников
1985 рік: О.В. Гондляр, Дан Хиу Кун, О.А. Зверев, О.І. Корж,
Т.І. Матченко, Т.Л. Савченко, М. Сесенгалієв,

- Фан Дінь Ба
- 1986 рік: О.В. Глімбовський, В.М. Єрмішев, С.В. Заблоцький, Сауді Хасен, В.В. Чемлаєв
- 1987 рік: К.Я. Бойко, Л.С. Іванова, В.Б. Ковтунов, В.Л. Кошкін, С.Г. Кравченко, Т.А.Кушніренко, Кионг Ле Чунг, Є.Д. Лумельський, Нгуен Ши Чан, О.І. Пелипенко, І.В. Половець, С.В. Потапов, А.Г. Топор, Хетталь Тахар, В.М. Чирва
- 1988 рік: Ю.М. Аппанович, Г.Г. Бурцев, А.А. Гром, О.О. Одинец
- 1989 рік: В.Г. Борисенко, О.В. Братко, А.Б. Васильєв, Г.Є. Захаров, Ігнас Алой Вубаратука, В.Є. Кравцов, В.В. Лажечников, О.Є. Майборода, О.Ю. Можаровський, Ю.З. Тотоев, О.Б. Ушак
- 1990 рік: С. Бояндін, Г.Л. Васильєва, Ю.Л. Динкевич, О.В. Мирчевський, Садик Обанішола Муфутуо, О.А. Фесенко, Н.Л. Філіппова, Тю В'єт Кионг
- 1991 рік: О.А. Богущкий, О.В. Геращенко, А.М. Кацапчук, Є.Е. Котенко, О.П. Кошевой, О.Б. Крицький, Ю.С. Петрина, Санд Ахмед Шах, Енерамаду Келечі Обінна
- 1992 рік: О.В. Белоліпецька, Ю.В. Ворона, К.Я. Головатюк, Ю.М. Дяденчук, Т.Г. Захарченко, І.О. Климко, Обанішаль Садні, І.О. Серпак, Фазір Пад Шах, В.О. Ясинський
- 1993 рік: Гбену Атїгло Рафаель, В.О. Поколенко, Ся І Пуйгень, П.П. Чеверда, Шу Мінь
- 1994 рік: В.К. Бондарь, Н.А. Валєєва, Жабер Хорд, Г.М. Іванченко, М.Г. Кушніренко, О.О. Лукьянченко, Темор Шах, Ю.О. Шинкарь
- 1995 рік: О.Г. Ковалєвська, В.О. Рутковський, Хуан Карлос Унчаусті
- 1996 рік: Хаблос Абд Раззак, Г.Л. Дмитрієв, Аят Нуарі
- 1997 рік: Н.А. Сніжко
- 1999 рік: Д.Е. Прусов, Лабу Мезьян, Саїді Амін
- 2001 рік: Ю.Д. Гераймович, С.О. Пискунов, І.І. Солодей
- 2002 рік: Гендузен Абденур, Бусетта Мубарек
- 2003 рік: О.В. Костіна
- 2005 рік: О.П. Кривенко
- 2006 рік: М.В. Гончаренко
- 2007 рік: О.О. Шкриль
- 2008 рік: М.С. Барабаш

2009 рік: В.П. Андрієвський
2011 рік: С.В. Мицок
2012 рік: Ю.В. Максим'юк
2013 рік: М.О. Вабішевич, Д.В. Богдан

Загалом захищені 27 докторських і 171 кандидатська дисертації. Такі цифри, за якими доля колективу, кожної творчої людини, вражають. Ці люди зараз працюють в Україні, США, Росії, Польщі, Німеччині, Франції, Австралії, Новій Зеландії, Канаді і багатьох інших країнах світу.

Досягненню такого рівня підготовки науково-технічних кадрів в значній мірі сприяли відповідні публікації здобувачів у збірнику «Опір матеріалів і теорія споруд».

У зв'язку з ювілейною 85-річницею створення Київського національного університету будівництва і архітектури слід зазначити, що наукова діяльність проф. Д.В. Вайнберга мала великий вплив на роботу кафедр, факультетів, університету в цілому. Серед спадкоємців його наукової школи - завідувачі кафедр, професори В.А. Баженов, П.П. Лізунов, В.В. Гайдайчук, В.К. Чибіряков. У Науково-дослідному інституті будівельної механіки проводились дослідження, які сприяли підготовці докторських дисертацій, що захищені завідувачами кафедр, професорами І.П. Бойком та В.О. Пермяковим, професором В.О. Сахаровим. Під впливом проф. Д.В. Вайнберга захищена низка дисертацій з нарисної геометрії і інженерної графіки, будівельних машин та інших суміжних наукових напрямків.

В даний час редакційна колегія науково-технічного збірника «Опір матеріалів і теорія споруд» працює у складі:

Головний редактор: В.А.Баженов, доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України.

Заступник головного редактора: С.О. Пискунов, доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки КНУБА.

Відповідальний секретар: О.В. Геращенко, к.т.н., старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки.

Члени редколегії: професори зарубіжних університетів П.В. Алявдін (Зеленогурський університет, Польща), Ю. Аткочиунас (Технічний університет Гедімінаса, м. Вільнюс, Литва), О.М. Белостоцький (Московський державний будівельний університет, Росія), І. Елішаков (Атлантичний університет, Флоріда, США), С.Н. Кривошакко (Російський університет дружби народів ім. Патріса Лумумби, м. Москва, Росія), С.Ю. Фіалко (Технічний університет «Краківська Політехніка», м. Краків, Польща), Чан Дик Тінг (Університет транспорту, м. Хо Ши Мін, В'єтнам); д.т.н., професор, академік НАН України, заступник директора з наукової роботи Інституту електрозварювання

ім. Є.О. Патона НАНУ Л.М. Лобанов; д.т.н., головний науковий співробітник НПО «СКАД Софт» А.В. Перельмутер; д.т.н., професор, професор Національного авіаційного університету Ю.В. Верюжський; д.т.н., професор, завідувач кафедри динаміки, міцності машин і опору матеріалів Одеського політехнічного університету О.Ф. Дашенко; д.т.н., професор, ректор, завідувач кафедри будівельної механіки Тернопільського національного технічного університету ім.Івана Пулюя П.В. Ясній; д.т.н., професор, завідувач кафедри теоретичної механіки КНУБА В.В. Гайдайчук; д.т.н., професор, професор кафедри будівельної механіки КНУБА Г.М. Іванченко; д.т.н., професор, завідувач кафедри основ інформатики КНУБА П.П. Лізунов; д.т.н., професор кафедри будівельної механіки КНУБА І.І. Солодей.

Електронні версії статей, опублікованих в збірнику з 2009 р., доступні на сайті збірника orig.knuba.edu.ua, де також представлена інформація про умови публікації статей та інші матеріали, що регламентують діяльність редколегії та поширення матеріалів збірника. Збірник представлений в українському реферативному журналі «Джерело», в реферативній базі даних «Україніка наукова», в науково-метричних базах даних Google Scholar, Ulrichsweb (Ulrich's Periodicals Directory), Copernicus, DOAJ.

Широта проблематики статей та сучасні засоби електронного розповсюдження матеріалів збірника «Опір матеріалів і теорія споруд» роблять його корисним для дослідників, викладачів, аспірантів і студентів, інженерів-будівельників, інших фахівців в галузі механіки, а також для всіх, хто цікавиться сучасними проблемами механіки.

Від редколегії.
Грудень 2015 р.

УДК 621.791.75.011

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РЕГУЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЛОКАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ТОКА ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТИ

Л.М. Лобанов¹

акад. НАН Украины, д-р техн. наук

В.А. Пивторак¹

канд. физ.-мат. наук

В.В. Савицкий¹

канд. техн. наук

Н.А. Пашин¹

канд. техн. наук

¹Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины

Разработана электродная система для введения импульсов тока высокой плотности в исследуемый материал для локальной релаксации остаточных напряжений. Разработан новый неразрушающий метод определения остаточных напряжений на основе использования созданной электродной системы совместно с методом электронной спекл-интерферометрии. Применение импульсного электрического тока при повышенных энергетических параметрах применялось для регулирования напряженного состояния сварных конструкций. В статье представлены результаты практического применения разработанных технологий и оборудования.

Ключевые слова: Импульс тока высокой плотности, электроимпульсная обработка, электродинамическая обработка, неразрушающий метод определения остаточных напряжений, спекл-интерферометрия, регулирование остаточных напряжений.

Остаточные напряжения являются важным фактором, влияющим на прочность, качество и эксплуатационные свойства сварных конструкций. Проблема остаточных напряжений приобрела особую актуальность в связи с широким применением в ведущих отраслях современной промышленности высокопрочных сталей и легких сплавов для изготовления сварных конструкций, к которым предъявляются высокие требования к точности изготовления, надежности и долговечности в эксплуатации.

В настоящее время достигнуты значительные успехи в развитии методов и средств для определения и регулирования остаточных напряжений [1–3]. Широкое распространение при исследовании остаточных напряжений получил метод отверстий. Сотрудниками Института электросварки им. Е.О. Патона было предложено применение голографической интерферометрии совместно с высверливанием отверстий для определения остаточных напряжений [4]. В последующих работах другими авторами в исследованиях также использовалась голографическая интерферометрия [5, 6]. Развитие компьютерной техники позволило разработать высокоэффек-

тивные методики определения остаточных напряжений на основе применения электронной спекл-интерферометрии (ESPI) и высверливания малых отверстий [7–9], которые предоставляют достаточно широкие возможности для выявления локальных особенностей распределения остаточных напряжений.

Метод ESPI в сочетании с методом отверстий используется для оперативного и точного определения остаточных напряжений [8]. Он основан на применении оптической схемы спекл-интерферометра, в которой исследуемый объект симметрично освещается под одним и тем же углом с двух направлений, что дает возможность измерять компоненту вектора перемещений в плоскости объекта. Перемещения, вызванные релаксацией остаточных напряжений в материале вследствие высверливания несквозного отверстия, измеряются бесконтактным оптическим методом ESPI. Данные о перемещениях, измеренных вдоль окружности определенном расстоянии ($2.5r_0$) от центра высверленного отверстия радиусом r_0 , используются для определения остаточных напряжений по формулам, полученным в работе [8].

Однако высверливание даже малых отверстий накладывает определенные ограничения при исследовании напряженного состояния конструкций, в которых недопустимы какие-либо повреждения. Поэтому актуальным является создание неразрушающих методов измерения остаточных напряжений.

В Институте электросварки им. Е.О. Патона разработан принципиально новый неразрушающий способ упругой разгрузки остаточных напряжений, заключающийся в пропускании по толщине материала локального импульса электрического тока высокой плотности ($10^7 - 10^{10} \text{ А/м}^2$, длительность – $10^{-4} - 10^{-2} \text{ с}$), изменяющегося по определенному закону. Прохождение тока через исследуемый участок вызывает в нем электродинамические процессы, что приводит к локальной релаксации остаточных напряжений [10]. Схема предложенного способа приведена на рис. 1. Для его реализации разработано компактное устройство, позволяющее создать импульсы тока высокой плотности.

После введения импульса тока в локальный участок исследуемого объекта с остаточными напряжениями, происходит их разгрузка, которая вызывает перемещения точек поверхности в окрестности места введения импульса тока, измеряемые методом электронной спекл-интерферометрии. Объем материала, в котором происходит релаксация напряжений, представляет собой полусферу диаметром до 1 мм, и ее размер зависит от плотности импульса тока. Перемещения в точках вдоль окружности с центром в точке введения импульса измеряются с помощью разработанной в ИЭС спекл-интерферометрической системы, внешний вид

которой представлен на рис. 2. Измерения выполняются в следующей последовательности. Спекл-интерферометр устанавливается на поверхности объекта. Отраженная световая волна, характеризующая исходное состояние контролируемого участка, с помощью CCD-камеры вводится в память компьютера. После разгрузки напряжений путем воздействия локальным импульсом тока отраженная световая волна также вводится в память компьютера. После компьютерной обработки этих двух световых волн на мониторе наблюдается интерференционная картина полос, которая содержит информацию об остаточных напряжениях в контролируемом участке объекта.

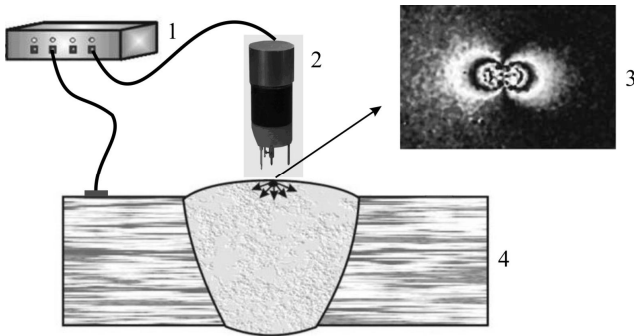


Рис. 1. Схема неразрушающего способа релаксации остаточных напряжений с помощью введения локального импульса тока: 1 – генератор импульсов тока высокой плотности; 2 – устройство для введения импульса тока в контролируемый участок; 3 – интерференционные полосы в окрестности точки введения импульса тока; 4 – сварное соединение

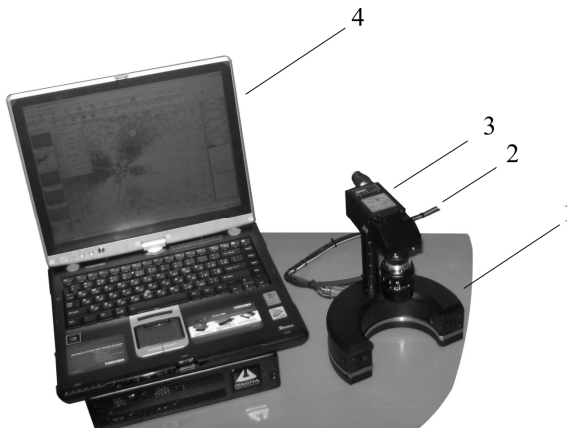


Рис. 2. Спекл-интерферометрическая измерительная аппаратура: 1 – спекл-интерферометр; 2 – световод, передающий излучение от лазера; 3 – CCD-камера; 4 – компьютер

Для оценки эффекта релаксации напряжений при воздействии локального импульса тока проведены эксперименты на балке равного сопротивления, изготовленной из алюминиевого сплава АМг6 (рис. 3). Нагружение такой балки сосредоточенной силой на свободном конце позволяет создать как сжимающие, так и растягивающие напряжения различного уровня не изменяющееся по её длине. Вдоль поперечного сечения А-А в контролируемые точки исследуемого образца вводился импульс тока с заданными параметрами.

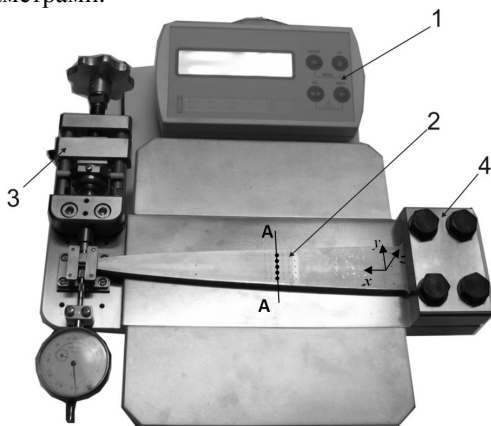


Рис. 3. Нагрузочное устройство с балкой равного сопротивления где:
1 – цифровой индикатор; 2 – балка равного сопротивления;
3 – узел механического нагружения; 4 – узел фиксации балки

В результате перераспределения напряжений в зоне введения импульса тока возникали перемещения, которые регистрировались с помощью представленной спекл-интерферометрической аппаратуры. Нарис.4 показаны картины интерференционных полос, характеризующие перемещения, которые были получены после введения локального импульса тока высокой плотности в точки поперечного сечения тестового образца с различными величинами напряжений. Интерферограммы свидетельствуют, что перемещения в окрестности введения импульса тока зависят от уровней напряжений. Значения перемещений линейно изменяются вдоль поперечного сечения балки также, как и величины напряжений. Но при этом в точке на нейтральной оси балки, где напряжения равны нулю, наблюдается начальный эффект от электродинамического воздействия импульса тока. Поэтому для одноосного напряженного состояния можно ввести следующую функцию:

$$\sigma_x = \psi(U_x - U_{x0}).$$

где U_x – измеряемое перемещение в заданной точке от центра зоны введения локального импульса тока, U_{x0} – начальные перемещения в этой точке от электродинамического воздействия импульса тока, ψ – экспериментально определяемый параметр, который зависит от материала объекта и энергетических характеристик электродной системы, σ_x – величина напряжений.

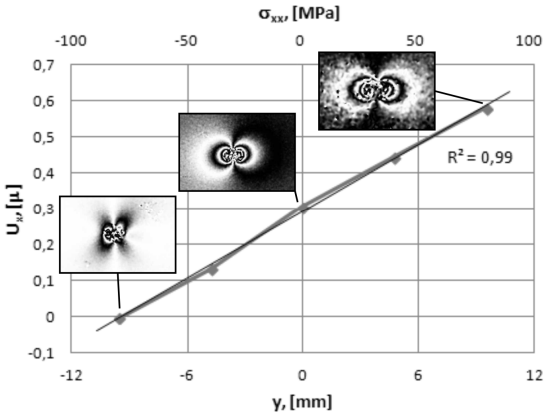


Рис.4. График зависимости перемещений от уровня заданных напряжений σ_x , измеренных методом электронной спекл-интерферометрии на расстоянии 1,25 мм от точки введения импульса тока

Проведенные эксперименты показали перспективность использования локального импульса тока для разгрузки остаточных напряжений в контролируемой зоне. Дальнейшие исследования позволят обеспечить практическое применение нового неразрушающего метода оперативного определения остаточных напряжений, основанного на использовании локального импульса тока высокой плотности в сочетании с электронной спекл-интерферометрией.

Применение электродной системы и источника с более высокими энергетическими параметрами локального импульса тока позволяет уменьшать остаточные напряжения и деформации сварных соединений. Для оценки влияния электродинамических воздействий на изменение напряженного состояния элементов сварных конструкций из алюминиевых сплавов проведен эксперимент на сварном стыковом соединении из сплава АМг6. Пластины размером 450x220x4 мм сваривались вдоль продольной кромки в автоматическом режиме за один проход неплавящимся электродом в среде аргона с присадочной проволокой СвАМг6 диаметром 2 мм. Технология сварки обеспечивала гарантированный провар по толщине и качественное формирование шва.

Обработку импульсами тока проводили вдоль сварного шва с шагом 5 мм. Распределение продольных остаточных напряжений в поперечном сечении шва обработанного и необработанного сварного стыкового соединения представлено на рис. 5. Видно, что электродинамическая обработка (ЭДО) сварного соединения на указанном режиме привела к значительному снижению остаточных напряжений.

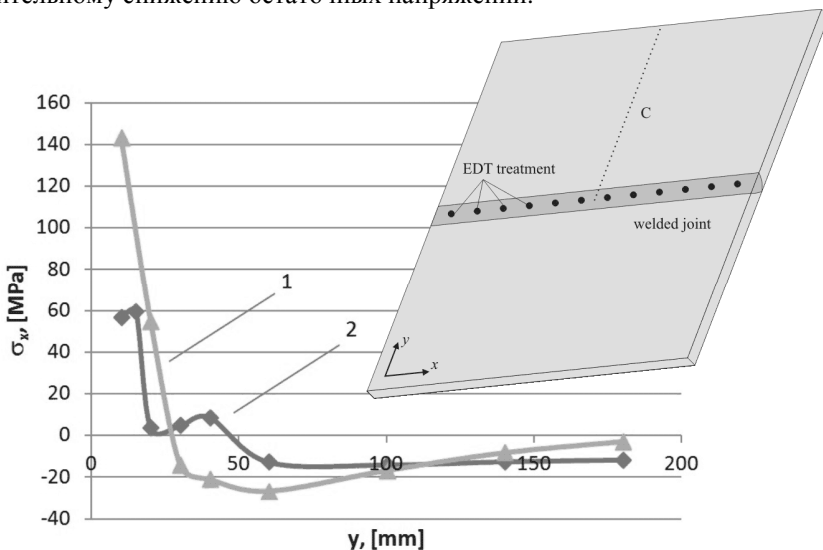


Рис. 5. Распределение продольных остаточных напряжений в поперечном ко шву сечении до обработки (1) и после электродинамической обработки (2) сварного шва

Необходимость регулирования остаточного коробления тонколистовых металлических конструкций, вызванного сваркой, является одной из актуальных проблем современного сварочного производства.

Перспективным подходом к правке сварных конструкций, является ЭДО. Как показано выше, воздействие токовых импульсов на сварное соединение приводит к релаксации напряженно-деформированного состояния, определяющего параметры остаточного формоизменения. Исследования влияния электродинамических воздействий на остаточное формоизменение элементов сварных конструкций проводили на тонколистовых фрагментах обшивки и силового набора судовых корпусов длиной до 10 метров с толщиной обшивки 3-5 мм из сплава АМг6. ЭДО применяли после восстановления эксплуатационных повреждений корпусов, для устранения которых использовали технологию ремонта, включающую в себя механическую разделку трещин с последующей их заваркой.

Проводили ЭДО ремонтных швов силового набора и обшивки корпуса с целью снижения уровня их остаточного коробления от сварки. После ремонтной сварки в поперечной жесткости днища формировался продольный прогиб со стрелой - до 15 мм, что делало невозможным обеспечение плоскостности при сборке обшивки днища. Использование ЭДО (рис. 6,а) уменьшило стрелу прогиба поперечной жесткости до 1,0 мм, что позволило обеспечить плоскостность её сопряжения с настилом днища до требуемых допусков. Необходимость выполнения ЭДО обшивки продиктована тем, что в зоне ремонтного шва возникало локальное выпучивание днища со стрелой прогиба до 8 мм, что затрудняло обеспечение гидродинамических характеристик судна. Применение ЭДО (рис. 6,б) позволило снизить остаточную величину прогиба практически до нулевых значений.

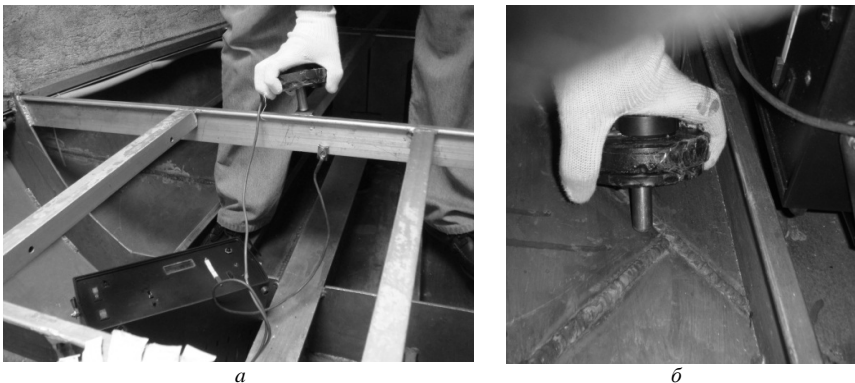


Рис. 6. Электродинамическая обработка сварных ремонтных швов корпуса судового корпуса

Представленные результаты исследований свидетельствуют об эффективности применения электродинамической обработки импульсами тока высокой плотности для регулирования напряженно-деформированных состояний сварных соединений и конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобанов Л.М., Махненко В.И., Труфяков В.И. и др. Сварные строительные конструкции. Т.1. Основы проектирования конструкций// - Киев.:Науковадумка, 1993.- 416 с.
2. K. Masubuchi. Analysis of welded structures residual stresses, distortion and their consequences. London.-Pergamon Press, 1980 – 642 p.
3. D. Rodaj. Welding residual stresses and distortion.-Dusseldorf : DVS-Verlag, 2003.-397 p.

4. Лобанов Л.М., Касаткин Б.С., Пивторак В.А., Андрущенко С.Г. Определение остаточных напряжений методом голографической интерферометрии с использованием одной голограммы//Доклады АН СССР, 1983, т.271. №3, с.557-561.
5. A. Makino, D. Nelson. Residual-stress determination by single-axis holographic interferometry and hole drilling - Part I: Theory / Exp.Mech.-1994.-34.- pp. 66-78.
6. S.T. Lin, C.T. Hsieh, C.P. Hu. Two holographic blind-hole methods for measuring residual stresses. Exp.Mech.-1994.-34(2): pp.141-147.
7. E. Ponslet, M. Steinzig. Residual stress measurement using the hole drilling method and laser speckle interferometry. Part II: Analysis technique /Exp Techniques.-2003.-27(4): pp. 17-21.
8. Лобанов Л.М., Пивторак В.А., Савицкий В.В., Ткачук Г.И. Методика определения остаточных напряжений в сварных соединениях и элементах конструкций с использованием электронной спекл- интерферометрии.//Автоматическая сварка.2006.-№1.с.10-13.
9. L. Lobanov, V. Pivtorak, V. Savitsky, G. Tkachuk. Technology and Equipment for Determination of Residual Stresses in Welded Structures Based on the Application of Electron Speckle-Interferometry. Materials Science Forum 768, 166-173.
10. Лобанов Л.М., Пивторак В.А., Пауцин М.О. та інші. Нові методи оцінки технічного стану зварних з'єднань, визначення і регулювання залишкових напружень// Зб. „Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин”, ІЕЗ ім.Є.О.Патона НАНУ, 2006, с.368-373.

REFERENCES

1. L.M. Lobanov, V.I. Makhnenko, V.I. Trufiakov. Welded engineering structures. - K: Naukova Dumka, 1993.-Vol.1 - 416 p.
2. K. Masubuchi. Analysis of welded structures residual stresses, distortion and their consequences. London.-Pergamon Press, 1980 – 642 p.
3. D. Rodaj. Welding residual stresses and distortion.-Dusseldorf : DVS-Verlag, 2003.-397 p.
4. L.M. Lobanov, B.S. Kasatkin, V.A. Pivtorak, S.G. Andrushchenko Determination of residual stresses by holographic interferography method using one hologram // Doklady AS USSR.-1983.-Vol.271.-No.3.- pp. 557-561.
5. A. Makino, D. Nelson Residual-stress determination by single-axis holographic interferometry and hole drilling - Part I: Theory / Exp.Mech.-1994.-34.- pp. 66-78.
6. S.T. Lin,C.T. Hsieh,C.P. Hu. Two holographic blind-hole methods for measuring residual stresses. Exp.Mech.-1994.-34(2): pp.141-147.
7. E. Ponslet, M.Steinzig Residual stress measurement using the hole drilling method and laser speckle interferometry. Part II: Analysis technique /Exp Techniques.-2003.-27(4): pp. 17-21.
8. L. M. Lobanov, V. A. Pivtorak, V.V. Savitsky, G. I. Tkachuk: Procedure for Determination of Residual Stresses in Welded Joints and Structural Elements using Electron Speckle-Interferometry. The Paton Welding Journal. 1/2006, pp.24-29.
9. L.Lobanov, V.Pivtorak, V.Savitsky, G.Tkachuk. Technology and Equipment for Determination of Residual Stresses in Welded Structures Based on the Application of Electron Speckle-Interferometry. Materials Science Forum 768, 166-173.
10. L.M. Lobanov, V.A.Pivtorak, N.A.Pashchin et al. New methods of evaluation of technical state of welded joints, determination and control of residual stresses. Collection of scientific papers.- E.O. Paton Electric Welding Institute of NASU, 2006.-pp. 368-373.

УДК 621.791.75.011

Лобанов Л.М., Пивторак В.А., Савицький В.В., Пащин М.О.

Визначення та регулювання залишкових напружень з використанням імпульсів струму високої щільності // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015

Досліджується вплив локальних імпульсів струму на релаксацію напружень. Розроблено новий неруйнівний метод визначення залишкових напружень на основі використання електронної спекл-інтерферометрії в поєднанні з введенням імпульсів струму високої щільності. Створено нові технології регулювання залишкових напружень та деформацій з використанням електродинамічної обробки.

Лобанов Л.М., Пивторак В.А., Савицький В.В., Пащин Н.А.

Определение и регулирование остаточных напряжений с применением локального импульса тока высокой плотности // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2015

Исследуется влияние локальных импульсов тока на релаксацию напряжений. Разработан новый неразрушающий метод определения остаточных напряжений на основе использования электронной спекл-интерферометрии в комбинации с введением импульса тока высокой плотности. Созданы новые технологии управления и регулирования остаточных напряжений и деформаций с применением электродинамической обработки.

L.Lobanov, V.Pivtorak, V.Savitsky, N.Paschin

Determination and control of residual stresses using high-density local current pulses

An electrode system for inducing a high density pulsed electric current into the material for local relaxation of residual stresses has been proposed. A new non-destructive technology for determination of residual stresses using electron speckle interferometry in combination with a local pulsed electric current treatment has been developed. Application of pulsed electric current at increased power parameters was investigated for control of stressed state of welded structures. Results of practical application of the developed technologies and equipment are presented.

ЛОБАНОВ Леонід Михайлович академік НАН України, д.т.н., проф., заст. директора ІЕЗ ім.Є.О.Патона НАНУ

ПІВТОРАК В'ячеслав Автономович ф.-м.н., ст.наук.співр. відділу Оптимізації зварних конструкцій ІЕЗ ім.Є.О.Патона НАНУ

САВИЦЬКИЙ Віктор Володимирович т.н., ст.наук.співр. відділу Оптимізації зварних конструкцій ІЕЗ ім.Є.О.Патона НАНУ

ПАЩИН Микола Олександрович т.н., ст.наук.співр. відділу Оптимізації зварних конструкцій ІЕЗ ім.Є.О.Патона НАНУ

Адреса робоча: 03680 Україна, м.Київ, вул. Малевича (Боженка), 11. Інститут електрозварювання ім.Є.О.Патона НАН України.

Роб. тел: +38044 2002455, +38044 2052312

E-mail holo@paton.kiev.ua

УДК 624.046.3

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НАРАЩИВАЕМОЙ КОНСТРУКЦИИ

А.В. Перельмутер¹

д-р техн. наук, главный научный сотрудник

¹*НПО SCAD Soft, Киев*

Анализируется постановка задачи о проверке устойчивости генетически нелинейных конструкций, при расчете которых выполнено моделирование многостадийного процесса их монтажа. Указываются основные особенности такой задачи, и предлагается один из возможных приемов их решения.

Ключевые слова: устойчивость равновесия, коэффициент запаса, генетическая нелинейность, этап монтажа.

Введение

Задача о статическом расчете конструкции, наращиваемой в поле действия сил тяготения, была впервые поставлена и решена Э.И. Рашбой в пионерной работе [0], где было отмечено, что традиционный подход к расчету массивных объектов соответствует нефизическому режиму, когда упругое тело строится в отсутствие силы тяжести и становится объектом силы тяжести только после своей установки. В этой работе впервые было явно указано на невозможность использования условий совместности деформаций при расчете напряженного состояния наращиваемого тела и на принципиальное отличие этого состояния от состояния тела той же конфигурации, но загруженного после формирования. Эти же выводы были высказаны в работах зарубежных ученых [2, 3] лишь спустя десять лет после опубликования статьи [0]. Позже появились многочисленные работы (см., например [4-9]) в которых развивались идеи статического расчета конструкций с учетом многостадийного процесса их возведения. Для задач такого рода был предложен термин «генетически нелинейные задачи» и указаны их основные особенности, в частности, закон наследования напряженного состояния [10]. Оказалось, что для некоторых задач расхождение в результатах расчета традиционной модели и для модели, учитывающей реальную технологию создания конструкции, может быть очень большим.

Сложилось целое направление в теории деформируемого твердого тела – механика наращиваемых конструкций, которое сосредоточило особое внимание на случае вязкоупругого материала [10-12], где изучаются взаимодействие эффектов генетической нелинейности и реологических процессов. В рамках этого направления решены некоторые задачи об устойчивости процесса ползучести как медленного движения стареющего

тела [13]. Но в этих задачах основную роль играли эффекты неоднородного старения, обусловленные различным возрастом частей конструкции и, соответственно, разные значения деформации ползучести, а не эффекты от приложения нагрузки к различным конфигурациям тела и соответствующие особенности напряженного состояния, которые характеризуют генетическую нелинейность.

Описание проблемы

Автору не известны исследования, связанные с оценкой устойчивости упругого равновесия генетически нелинейных систем. Очевидно, что поскольку имеются различия в распределении внутренних усилий в схеме, созданной с учетом стадийности возведения конструкции, и в традиционной схеме, то они (различия) должны сказываться и на результатах проверки устойчивости смонтированной конструкции. Этот факт, вообще говоря, не должен бы вызывать удивления, поскольку во всех случаях проверяется не устойчивость конструкции, как мы говорим по привычке, а устойчивость ее состояния равновесия. Естественно, если меняется состояние равновесия, то может измениться и оценка его устойчивости.

Проиллюстрируем сказанное простым примером. Пусть рассматривается задача, схема которой представлена на рис. 1.а.

На рис. 1.б показано распределение продольных сил, которое вычислено по «одномоментной» схеме. Коэффициент запаса устойчивости, соответствующий такому распределению, определяется как $k_{кр,1} = 33,718$.

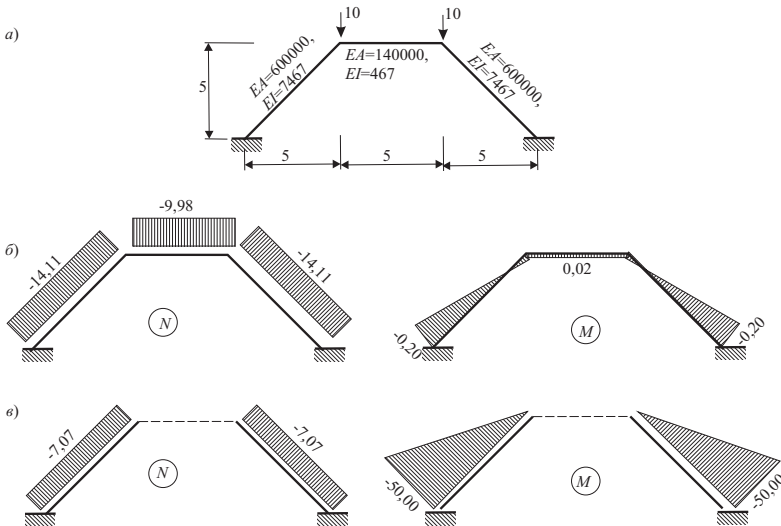


Рис. 1. К проверке устойчивости

Если же учесть, что монтаж системы шел в два этапа, на первом из которых были установлены и нагружены наклонные стойки, а на втором присоединен ненапряженный горизонтальный ригель (эпюра продольных сил на рис. 1.б), то окажется что проверка устойчивости следует выполнять для схемы первого этапа монтажа и при этом $k_{кр,2} = 52,109$.

Но коэффициент запаса $k_{кр,2}$ определялся для распределения продольных сил, показанного на рис. 1.в, т.е. полагалось, что эти силы (внутренние) возрастут в 52,109 раза, после чего произойдет потеря устойчивости.

В действительности следует проследить за возрастанием внешней нагрузки, а она будет расти после достижения уровня $P=10$ уже в новой схеме, где работает присоединенный горизонтальный ригель. Иными словами увеличение нагрузки в k раз приведет к распределению сжимающих сил, показанному на рис. 2. Именно для этой схемы следует искать реальное критическое значение k_3 .

Выполнить такой расчет можно воспользовавшись режимом «Проверка устойчивости при совместном действии нагрузений», который имеется, например, в ПК СКАД. В этом режиме можно задать некоторое стабильное нагружение,

интенсивность которого не возрастает, и действующее на его фоне переменное нагружение, для которого и определяется коэффициент запаса устойчивости. Поскольку оба нагружения относятся к одной и той же расчетной схеме, а нам требуется стабильное нагружение связать со схемой первого этапа расчета, зададим в стабильном нагружении кроме сил $P=10$ еще и взятые с обратным знаком усилия горизонтальном элементе системы (рис. 3). Эффект от их действия эквивалентен изъятию из расчета продольной силы в ригеле, что и характерно для расчетной схемы первого этапа монтажа.

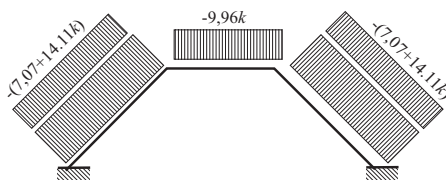


Рис. 2. Распределение усилий сжатия при росте нагрузки в k раз

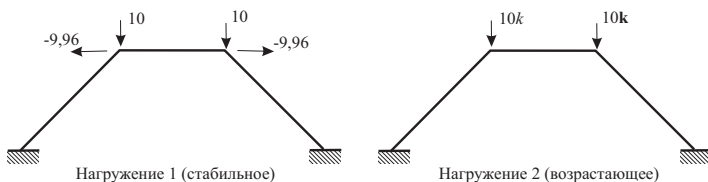


Рис. 3. Два нагружения

Для рассматриваемого примера расчет по СКАД показал, что найденный таким образом коэффициент запаса $k_{кр,3}=33,311$, что в данном случае не намного отличается от $k_{кр,1}$. Однако качественное изменение подхода при проверке устойчивости наращиваемых систем должно учитываться, и во всех случаях следует внимательно отнестись к идее синхронного роста всех сжимающих сил системы, проверяя ее соответствие физическому смыслу задачи. Ведь классический «одномоментный» подход к решению задачи не учитывает тот факт, что усилий в горизонтальном элементе схемы создается нагрузкой, которая приложена в тот момент, когда этот элемент еще не создан, т.е. является противоречащим физике явления.

Возможные подходы к решению

Здесь, в первую очередь, следует определить, какую задачу мы пытаемся решить. В классических одномоментных схемах при линейной постановке задачи распределение внутренних усилий не меняется с ростом интенсивности нагружения и поэтому там безразлично за чем следить: то ли за возрастанием нагрузки, то ли за ростом внутренних усилий. В рассматриваемых здесь генетически нелинейных задачах, как показано выше на простом примере, такого соответствия уже нет. И коэффициент запаса по устойчивости нужно разыскивать, предполагая увеличение интенсивности нагрузки. Но нагрузки различных этапов могут возрастать с различной скоростью, в том числе и вообще не изменяться.

Отсюда следует множественность вариантов постановки задачи, простейшей из которых является предположение о синхронном росте всех нагрузок. Если решать генетически нелинейную задачу многократно при различных значениях интенсивности нагружения, и использовать при этом не только обычную матрицу жесткости, но и матрицу геометрической жесткости (выполнять расчет по деформированной схеме), то можно найти такую интенсивность общего нагружения при которой происходит вырождение задачи. Указанный подход соответствует поиску предельной точки, в которой происходит потеря устойчивости нелинейной системы. Если при этом завершать моделирование монтажа на различных этапах то, таким способом находят не один, а несколько (по числу этапов монтажа) коэффициентов запаса устойчивости, относящихся к различным стадиям существования конструкции.

Второй вариант исходит из предположения, что возрастают только нагрузки текущего этапа монтажа, а нагрузки, введенные на предыдущих этапах, сохраняют свое значение неизменным. Такая постановка задачи проиллюстрирована схемой на рис. 4.б ... 4.г. Очевидно, что найденный таким способом коэффициенты запаса устойчивости $k_{1,кр}$, $k_{2,кр}$, и $k_{3,кр}$, относятся к каждой из поэтажных нагрузок соответственно.

Численные значения коэффициентов запаса для задач по схемам 4.б ... 4.з были получены при таких параметрах задачи: пролет $l = 6$ м, высота этажа $h = 4$ м, изгибная жесткость стоек $EI_c = 3200$ $тм^2$, изгибная жесткость ригелей $EI_p = 7000$ $тм^2$. При нагрузке $q = 20$ т/м оказалось, что $k_{1,кр} = 17,069$, $k_{2,кр} = 5,906$ и $k_{3,кр} = 2,554$.

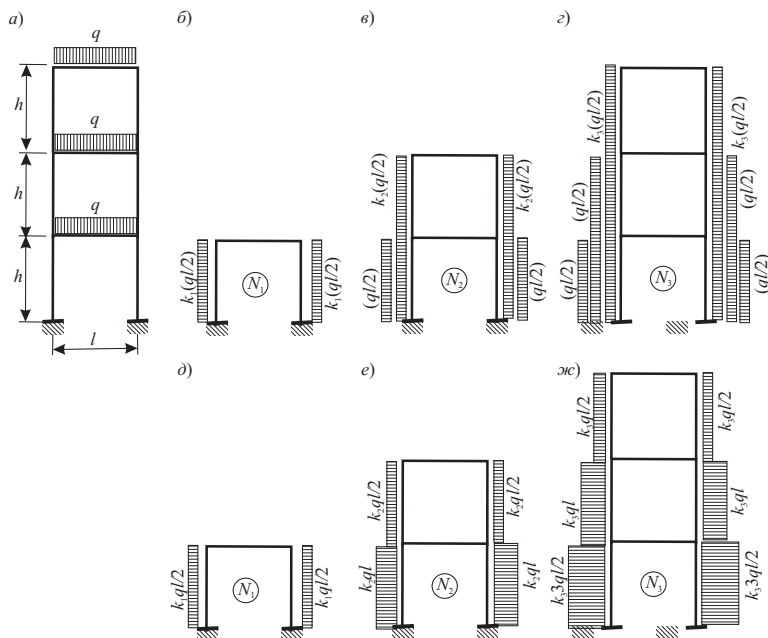


Рис. 4. К отысканию критических значений поэтажных нагрузок

Однако можно представить себе и другую постановку задачи (см. рис. 4.е ... 4.ж), когда предполагается возможность роста всех нагрузок, имеющих отношение к рассматриваемому этапу (точнее, рост внутренних усилий этого этапа монтажа), несмотря на то, что нагрузки предыдущих этапов вводились в другие расчетные схемы. По сути, эта цепочка задача близка к привычному рассмотрению проблемы устойчивости, с тем лишь единственным исключением, что рассматривается не только завершенная конструкция, но и ее состояния в процессе монтажа. Расчет по этому варианту дал такие результаты: $k_{1,кр} = 17,069$, $k_{2,кр} = 9,899$ и $k_{3,кр} = 1,608$. Эти результаты совпадают со стандартным подходом потому что распределение усилий, учитывающее технологию монтажа, совпадает с распределением усилий при нагружении уже готовой конструкции. Для таких задач

(типичным примером является случай нагруженной собственным весом постепенно наращиваемой по высоте консольной стойки, рассмотренный в [13]). результаты проверки устойчивости равновесия не приводят ни к каким неожиданностям.

Но имеются и задачи другого типа, в которых распределение внутренних усилий существенно отличается при учете стадийности монтажа и при игнорировании этого факта. В качестве примера можно указать на случай монтажа такой же стойки, с той лишь разницей, что на последней стадии вершина консоли закрепляется (рис. 5).

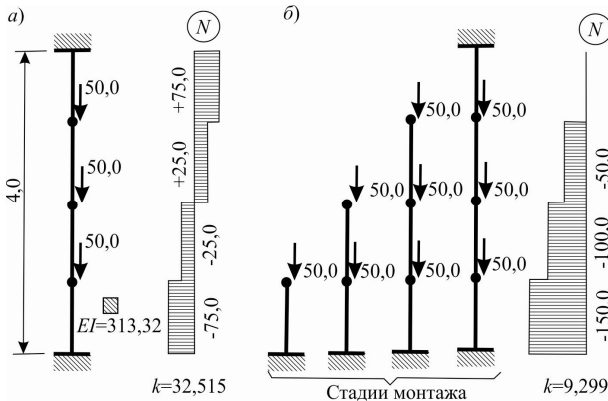


Рис. 5. Монтаж стойки

Для этой конструкции при одномоментном создании конструкции коэффициент запаса устойчивости по отношению к росту всех внутренних усилий оказался равным 32,515, а с учетом стадийности монтажа — 9,299.

Трудно сказать какая из указанных выше постановок задачи является «более правильной», обе они в той или иной степени условны. На первый взгляд представляется, что не следовало бы вводить возрастание усилий, замороженных в схеме в процессе монтажа. Но заметим, что анализ устойчивости конструкции, нагруженной постоянной нагрузкой ее собственного веса, имеет точно такой же смысл. По сути нас интересует насколько далека указанная нагрузка от критической, поскольку мы не уверены в точности подсчетов и в случае малого запаса устойчивости будем предпринимать некоторые дополнительные меры безопасности. В этом состоит смысл упомянутой условной задачи.

Кстати, условна и классическая постановка задачи, когда при действии составного нагружения с одинаковым темпом наращивают свое зна-

чение и мало изменяющиеся компоненты нагрузки от собственного веса, и более изменчивые компоненты нагрузки (например, ветровые или снеговые).

Можно представить себе кроме сформулированных и другие варианты постановки задач устойчивости. И поскольку сама по себе техника решения задачи в настоящее время не вызывает принципиальных трудностей, именно разумный подход к формулировке проблемы должен явиться предметом исследования специалистов.

Выводы

Проблема устойчивости равновесия конструкции, напряженное состояние которой формируется в многоэтапном процессе монтажа, должна решаться с учетом генетической нелинейности задачи.

Требуют дальнейшего исследования формулировки задач устойчивости рассматриваемых конструкций и анализ их реалистичности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Раиба Э. И. Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения — Сборник трудов института строительной механики АН УССР — 1953 — № 18. — С. 23-27.
2. Brown C.B., Goodman L.E. Gravitational stresses in accreted bodies — Proceedings of the Royal Society of London, Proceedings A, 1963. Vol. 276, No. 1367. — P. 571-576.
3. Goodman L.E., Brown C.B. Dead load stresses and the instability of slopes — Proceedings of the ASCE. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division — 1963 — Vol. 8. — No. 3. — P. 103-134.
4. Дятловицкий Л.И., Сеймов В.М. Температурные напряжения в наращиваемом цилиндре — Прикладная механика — 1961 — Том 7 — Вып.3.— С. 287-394.
5. Дятловицкий Л.И. Рабинович Л.Б. Упругая задача для тел с изменяющейся в процессе загрузки конфигурацией — Инженерный журнал — 1962 — Том 2 — Вып. 2. — С. 287-297.
6. Шульман Г. Расчеты гидротехнических сооружений с учетом последовательности возведения. — М.: Энергия, 1975. — 168 с.
7. Perelmuter A.V., Mikitareno M.A., Burygin S.G. Structural Analysis with Lay-outs Changed during the Action of Load — Engineering Mechanics (Praga) — 1996 — Vol. 3 — No 4.— P. 245–251.
8. Grabow M. J. Construction Stage Analysis of Cable-Stayed Bridges. — Hamburg: Technical University of Hamburg, 2004— 267 p.
9. Kabantsev O., Perelmuter A. Modeling Transition in Design Model when Analyzing Specific Behaviors of Structures — Procedia Engineering — 2013 — Vol. 57.— P. 479 – 488.
10. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа— М.: Изд-ва СКАД СОФТ, АСВ и ДМК Пресс, 2011.— 709 с.
11. Сергеев М.В. К решению граничных задач линейной теории упругости с изменяющейся границей — Механика стержневых систем и сплошных сред, Межвузовский сборник трудов. — Л.: ЛИСИ, 1980 — С. 158-162.
12. Арутюнян Н.Х., Михайлов А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механика растущих тел. — М.: Наука, 1991. — 176 с.

13. *Арутюнян Н.Х., Потатов В.Д.* Об устойчивости растущего вязкоупругого стержня, подверженного старению. — Доклады АН СССР — 1983 — Т. 270 — №4. — С. 799-803.

REFERENCES

1. *Rashba E.I.* Determination of stresses in structures from the action of the self weight, taking into account the order of their construction (in Russian) // Proceedings of the Institute of Structural Mechanics, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR (Sbornik trudov instituta stroitelnoy mehaniki AN USSR). 1953. № 18. — P. 23-27.
2. *Brown C.B., Goodman L.E.* Gravitational stresses in accreted bodies — Proceedings of the Royal Society of London, Proceedings A, 1963. Vol. 276, No. 1367. — P. 571-576.
3. *Goodman L.E., Brown C.B.* Dead load stresses and the instability of slopes — Proceedings of the ASCE. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division — 1963 — Vol. 8. — No. 3. — P. 103-134.
4. *Dyatlovitskiy L.I., Seymov V.M.* Thermal stresses in a built up cylinder (in Russian) // The applied mechanics (Prikladnaya Mekhanika), 1961, Vol. 7, Issue 3.— P. 287-394.
5. *Dyatlovitskiy L.I., Rabinovich L.B.* Elastic problem for bodies with a configuration changing in the course of loading (in Russian) // Engineering journal (Inzhenernyy zhurnal), 1962. Vol.2, Issue 2. — P. 287-297.
6. *Shulman G.* Analyses of hydraulic structures, taking into account the construction sequence (in Russian). — Moscow: Publishing house "Energy", 1975. — 168 p.
7. *Perelmuter A.V., Mikitarenko M.A., Burygin S.G.* Structural Analysis with Lay-outs Changed during the Action of Load — Engineering Mechanics (Praga) — 1996 — Vol. 3 — No 4.— P. 245–251.
8. *Grabow M. J.* Construction Stage Analysis of Cable-Stayed Bridges. — Hamburg: Technical University of Hamburg, 2004— 267 p.
9. *Kabantsev O., Perelmuter A.* Modeling Transition in Design Model when Analyzing Specific Behaviors of Structures — Procedia Engineering — 2013 — Vol. 57.— P. 479 – 488.
10. *Perelmuter A.V., Slivker V.I.* Numerical Structural Analysis: Models: Methods and Pitfalls.— Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo: Springer Verlag, 2003.— 600 p
11. *Sergeev M.V.* On the solution of boundary-value problems of linear elasticity with a changing boundary (in Russian) // Mechanics of rod systems and continuous bodies (Mehanika stержnevyyh sistem i sploshnyih sred). — Leningrad: LISI (Leningradsky construction institute), 1980 — P. 158-162.
12. *Arutyunyan N.Kh., Manzhurov A.V., Naumov V. E.* Contact Problems of Mechanics of Accreting Bodies (in Russian), — Moscow: Nauka, 1991. — 176 p.
13. *Arutyunyan N.Kh., Potapov V.D.* Stability of a growing viscoelastic rod subjected to aging (in Russian) // Doklady AN SSSR, 1983, Vol. 270, No. 4,— P. 799-803.

THE FORMULATION OF STABILITY PROBLEM AN ACCRETED STRUCTURES

Anatoliï V. Perelmuter

Abstract: Apparently, the problem formulation for the stability checks of the genetically non-linear structures, the analysis of which involves modeling of a multistage process of their erection, is analyzed for the first time. This paper outlines the main features of this problem and suggests one of the possible methods for solving them.

Keywords: stability of equilibrium, factor of safety, genetic nonlinearity, erection stage.

УДК 624.046.3

Перельмутер А.В.

Формулювання задачі стійкості для конструкцій, що нарощується // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 94. – С. 19 – 27.

Аналізується постановка задачі перевірки стійкості генетично нелінійних конструкцій, при розрахунку котрих моделювався багатостадійний процес їх монтажу. Вказуються основні особливості такої задачі, і пропонується один з можливих прийомів їх розв'язання.

Іл. 5. Бібліогр. 13 назв.

УДК 624.046.3

Перельмутер А.В.

Формулировка задачи устойчивости для наращиваемой конструкции // Сопроотивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вип. 94. – С. 19 – 27.

Анализируется постановка задачи о проверке устойчивости генетически нелинейных конструкций, при расчете которых выполнено моделирование многостадийного процесса их монтажа. Указываются основные особенности такой задачи, и предлагается один из возможных приемов их решения.

Илл. 5. Библиогр. 13 назв.

Perelmuter A.V.

The formulation of stability problem an accreted structures // Strength of materials and the constructions theory – 2015. – Issue 00 (00). – С. 19 – 27.

Apparently, the problem formulation for the stability checks of the genetically nonlinear structures, the analysis of which involves modeling of a multistage process of their erection, is analyzed for the first time. This paper outlines the main features of this problem and suggests one of the possible methods for solving them.

Keywords: stability of equilibrium, factor of safety, genetic nonlinearity, erection stage.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, головний науковий співробітник HBO SCAD Soft ПЕРЕЛЬМУТЕР Анатолій Вікторович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, вул. Просвіти 3-а, Офіс 2, SCAD Soft, ПЕРЕЛЬМУТЕРУ Анатолію Вікторовичу.

Адреса домашня: 03186 Україна, м. Київ, Чоколовський бульвар 19, кв. 52, ПЕРЕЛЬМУТЕРУ Анатолію Вікторовичу

Роб. тел. +38(044) 249-71-93;

мобільний тел.: +38(050) 382-16-25;

дом. тел.: +38(044) 245-72-82;

E-mail – AnatolyPerelmuter@gmail.com

УДК 539.3

**О РАЗВИТИИ КОРРЕКТНЫХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ
МЕТОДОВ МНОГОУРОВНЕВОГО РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ****П.А. Акимов^{1,2,3}****М.Л. Мозгалева¹****М. Аслами¹****О.А. Негрозов^{1,2}**¹ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия² Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия³ ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, Россия

1. Понятие о дискретно-континуальных методах многоуровневого расчета строительных конструкций. Как известно, современный этап развития строительной механики, в частности задач определения многоуровневого (в том числе локального) напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций, связан с широким использованием численных методов [4,16,17]. Значительный прогресс в развитии ЭВМ и вычислительной математике, продолжающийся последние десятилетия, обусловил существенное изменение соотношения аналитических, экспериментальных (модельных и натуральных) и численных подходов к анализу сложных конструкций, зданий и сооружений. Практика выдвигает задачи мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов промышленного и гражданского строительства, адекватное решение которых может быть зачастую получено только численным путем. Как правило, найти замкнутое аналитическое решение для большинства проблем не представляется возможным, а экспериментальные исследования часто оказываются весьма дорогостоящими, а порой и не-полными. Этим, в частности, и объясняется доминирование численных методов, имеющее место, как в отечественной, так и в зарубежной расчетной практике. Вместе с тем, очевидно, что на всех этапах изучения НДС строительного объекта математическая теория, исследования аналитическими и экспериментальными методами и численный расчет должны применяться совместно и согласованно, причем в конце прошлого столетия появился определенный потенциал для расширения доли аналитических подходов. Достигнутый уровень мощности ЭВМ и имеющийся в арсенале инструментарий аналитических математических средств в сочетании с

разнообразием математических моделей позволил начать разработку корректных численно-аналитических (полуаналитических) методов, сочетающих качественные свойства замкнутых решений с общностью численных подходов. Преимущества такого сочетания, разумеется, отмечались и раньше [18], но многие из разработок прежнего времени либо были не реализуемыми практически из-за отсутствия, по крайней мере, одного из перечисленных факторов, либо в той или иной мере не учитывалась вычислительная специфика и необходимость последующей компьютерной реализации. Полуаналитические методы позволяют получать решения (в том числе локальные) в аналитической форме, способствующей улучшению качества исследования рассматриваемых объектов. Найденная с их помощью картина многоуровневого НДС развивает интуицию расчетчика и понимание работы конструкций, характера влияния на них различных локальных и глобальных факторов. Полуаналитические подходы особенно эффективны в зонах краевого эффекта (эффекта малого пара-метра), там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами. Аналитические подходы, в принципе, резко снижают размерность и объем вычислений, особенно в многомерных задачах, и в ряде случаев анализа состояния ответственных и конструктивно сложных сооружений переводят трехмерную задачу супербольшей вычислительной размерности из разряда «нерешаемой» в «решаемую». Следует также отметить, что предварительное аналитическое изучение отдельных локальных свойств проблемы может оказать значительную помощь при численном решении сложных задач строительной механики. Так, например, сравнение с аналитическими решениями сложной задачи в более простых и частных случаях позволяет дать оценку принятой расчетной схемы конструкции, используемого метода, алгоритма и полученного решения, в частности, оценить достигнутую точность (что особенно важно при верификационных исследованиях).

В работах А.Б. Золотова и П.А. Акимова [1,6-13,26-28] было предложено семейство корректных дискретно-континуальных методов расчета строительных конструкций, включающее дискретно-континуальный метод конечных элементов (ДКМКЭ), дискретно-континуальный метод граничных элементов (ДКМГЭ) и дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ)). Область применения дискретно-континуальных методов составляют преимущественно объекты, имеющие регулярные (постоянные или кусочно-постоянные) физико-геометрические параметры

(характеристики) по одному из координатных направлений, которое далее условно называется основным. Характерной особенностью таких объектов является то, что их очень много – в качестве примеров можно привести высотные здания и сооружения, здания и сооружения большой протяженности, гидротехнические сооружения, тоннельные конструкции, большинство типовых конструкций (плиты перекрытий, стеновые панели, ригели, колонны, балочные конструкции, оболочечные конструкции, складчатые конструкции, фундаментные конструкции и т.д.). При их расчетном обосновании исключительно важно построить точное аналитическое решение вдоль основного направления, справедливое при любых воздействиях и промежуточных закреплениях, стыковках и т.д. Под точным аналитическим решением здесь понимается наличие явной формулы вычисления НДС конструкции в произвольной точке сечения (а вовсе не разложение в ряд). Соответствующая формула в явном виде демонстрирует характер поведения вычисляемых факторов (перемещений, их производных и т.д.). Методы являются дискретно-континуальными в том смысле, что по основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и соответственно аналитический (абсолютно точный) вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация того или иного вида (конечноэлементная для ДКМКЭ, граничноэлементная для ДКМГЭ и вариационно-разностная для ДКВРМ) с обоснованно контролируемой степенью точности. Разработанные методы позволяют с применением теории обобщенных функций строить точные аналитические решения в зонах сосредоточенных воздействий, избегая «размазок» или осреднений. Будем рассматривать далее ДКМКЭ, являющийся наиболее эффективным и универсальным представителем семейства дискретно-континуальных методов.

2. Суть дискретно-континуального метода конечных элементов для расчета строительных конструкций. ДКМКЭ включает три основных этапа, описанных ниже.

Первый этап. Выполняется сведение исходной задачи расчета конструкции к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению и использования метода стандартной (расширенной) области А.Б. Золотова [5]. Так, например, для трехмерной задачи теории упругости будем иметь:

$$-L_{k,uv} \partial_3^2 \bar{u}_k + \tilde{L}_{k,uv} \partial_3 \bar{u}_k + \tilde{L}_{k,uu,v} \bar{u}_k = \tilde{F}_k, \quad x_3 \in (x_{3k}^b, x_{3k+1}^b), \quad (1)$$

где

$$\tilde{L}_{k,uv} = L_{k,uv} - L_{k,uv}^* ; \quad L_{k,uv} = L_{k,uv}^* = -L_{k,uv}; \quad \tilde{F}_k = \theta_k \bar{F}_k + \partial_{\Gamma,k} \bar{f}_k; \quad (2)$$

$$L_{k,vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix}; \quad L_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \\ 0 & 0 & \partial_2^* \bar{\lambda}_k \\ \partial_1^* \bar{\mu}_k & \partial_2^* \bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix} \partial_3; \quad (3)$$

$$L_{k,w} = \sum_{j=1}^3 \partial_j^* \bar{\mu}_k \partial_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^* \bar{\mu}_k \partial_1 & \partial_2^* \bar{\mu}_k \partial_1 & 0 \\ \partial_2^* \bar{\mu}_k \partial_2 & \partial_2^* \bar{\mu}_k \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^* \bar{\lambda}_k \partial_1 & \partial_1^* \bar{\lambda}_k \partial_2 & 0 \\ \partial_2^* \bar{\lambda}_k \partial_1 & \partial_2^* \bar{\lambda}_k \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ – декартовы координаты; x_3 – координата соответствующая основному направлению; $x_{3,k}^b, k = 1, \dots, n_k$ – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение физико-геометрических параметров конструкции; $\bar{u}_k = [u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}]^T$ – вектор составляющих перемещений на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$; λ_k, μ_k – параметры Ламе на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$; Ω_k – область, описываемая фрагментом конструкции с постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению и с границей $\Gamma_k = \partial\Omega_k$; $\theta_k = \theta_k(x)$ – характеристическая функция области Ω_k ; $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$; $F_k = [F_1^{(k)} \ F_2^{(k)} \ F_3^{(k)}]^T$ и $f_k = [f_1^{(k)} \ f_2^{(k)} \ f_3^{(k)}]^T$ – векторы составляющих нагрузок, действующих соответственно внутри и на границе области Ω_k ; $\bar{v}_k = [v_1^{(k)} \ v_2^{(k)} \ v_3^{(k)}]^T$ – вектор составляющих нормали к границе $\Gamma_k = \partial\Omega_k$;

$$\theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_k \\ 0, & x \notin \Omega_k; \end{cases} \quad \delta_{\Gamma,k} = \frac{\partial \theta_k}{\partial v_k}; \quad \bar{\lambda}_k = \theta_k \lambda_k; \quad \bar{\mu}_k = \theta_k \mu_k; \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad \partial_i^* = -\partial_i, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Второй этап. Выполняется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих им функционалов. В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, представляющую собой ансамбль дискретно-континуальных конечных элементов, причем на каждом дискретно-континуальном конечном элементе искомые функции по «неосновным» координатным направлениям аппроксимируются, как правило, полиномами, а в основном направлении их вид остается искомым. Иными словами, неизвестные функции фактически определяются своим поведением на ребрах дискретно-континуального конечного элемента.

При расчете трехмерной конструкции (в рамках модели трехмерной задачи теории упругости) имеем систему из $6N_1N_2$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями

$$(\bar{U}_n^{(k)})'(x_3) = A_k \bar{U}_n^{(k)}(x_3) + \tilde{R}_k(x_3), \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k-1}^b), \quad k=1, \dots, n_k-1; \quad (6)$$

$$B_k^- \bar{U}_n^{(k-1)}(x_{3,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{U}_n^{(k)}(x_{3,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k=2, \dots, n_k-1;$$

$$B_1^+ \bar{U}_n^{(1)}(x_{3,k}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{U}_n^{(n_k-1)}(x_{3,k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (7)$$

где

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1} K_{k,uu} & K_{k,uv}^{-1} \tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix}; \quad \tilde{R}_k(x_3) = - \begin{bmatrix} 0 \\ K_{k,vv}^{-1} \bar{R}_{k,u} \end{bmatrix}; \quad (8)$$

$$L_{k,uu} \Rightarrow K_{k,uu}; \quad \tilde{L}_{k,uv} \Rightarrow \tilde{K}_{k,uv}; \quad L_{k,vv} \Rightarrow K_{k,vv}; \quad (9)$$

$$\bar{U}_n^{(k)} = \bar{U}_n^{(k)}(x_3) = \left[\bar{u}_n^{(k)} \right]^T \left[\bar{v}_n^{(k)} \right]^T; \quad (\bar{U}_n^{(k)})' = \partial_3 \bar{U}_n^{(k)}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_k = \bar{u}_x(x_3) = & \left[(\bar{u}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,1)})^T \quad \dots \right. \\ & \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots \\ & \left. \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,1,N_2)})^T \quad (\bar{u}_n^{(k,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{u}_n^{(k,N_1,N_2)})^T \right]^T; \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_k = \bar{v}_k(x_3) = & \left[(\bar{v}_n^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_1,1)})^T \quad \dots \right. \\ & \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots \\ & \left. \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,1,N_2)})^T \quad (\bar{v}_n^{(k,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{v}_n^{(k,N_1,N_2)})^T \right]^T; \quad (12) \end{aligned}$$

$$u_n^{(k,p,q)} = \bar{u}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{(k,p,q)} \\ u_2^{(k,p,q)} \\ u_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix}; \quad \bar{v}_n^{(k,p,q)} = \bar{v}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} v_1^{(k,p,q)} \\ v_2^{(k,p,q)} \\ v_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{k,n} = \bar{R}_{k,n}(x_3) = & \left[(\bar{R}_{n,n}^{(k,1,1)})^T \quad (\bar{R}_{n,n}^{(k,2,1)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,N_1,1)})^T \quad \dots \right. \\ & \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,1,2)})^T \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,2,2)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,N_1,2)})^T \quad \dots \\ & \left. \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,1,N_2)})^T \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,2,N_2)})^T \quad \dots \quad (\bar{R}_{u,n}^{(k,N_1,N_2)})^T \right]^T; \quad (14) \end{aligned}$$

$$\bar{R}_{u,n}^{(p,q,k)} = \bar{R}_{u,n}^{(p,q,k)}(x_3) = \left[(\bar{R}_{u,1}^{(p,q,k)}) \quad (\bar{R}_{n,1}^{(p,q,k)}) \quad \bar{R}_{n,2}^{(p,q,k)} \quad \bar{R}_{u,3}^{(p,q,k)} \right]^T; \quad (15)$$

N_1-1 и N_2-1 – количество дискретно-континуальных конечных элементов по направлению осей, соответствующих переменным $x_1, x_2; u_{1,n}^{(k,p,q)}, u_{2,n}^{(k,p,q)}, u_{3,n}^{(k,p,q)}$ и $v_{1,n}^{(k,p,q)}, v_{2,n}^{(k,p,q)}, v_{3,n}^{(k,p,q)}$ – узловые неизвестные (составляющие перемещений $u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}$ на (p,q) -м узле и их про-

изводные $v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, v_{31}^{(k)}$ по x_3 на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$; $R_{u,1}^{(k,p,q)}, R_{u,2}^{(k,p,q)}, R_{u,2}^{(k,p,q)}$ – значения узловых нагрузок, приложенных в (p,q) -м узле по направлению осей, соответствующих переменным x_1, x_2, x_3 на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$; $B_k^-, B_k^+, k=2, \dots, n_k-1$ и $B_1^+, B_{n_k}^-$ – заданные матрицы коэффициентов граничных условий, квадратные $6N_1, N_2$ -го порядка; $\bar{g}_k^-, \bar{g}_k^-, k=2, \dots, n_k-1$ и $\bar{g}_1^+, \bar{g}_{n_k}^-$ – заданные $6N_1, N_2$ -мерные векторы правых частей граничных условий.

Таким образом, в общем случае выполняется переход к многоточечной краевой задаче для системы, состоящей из нескольких тысяч (для многомерных задач) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, сопровождаемый, как правило, введением дополнительных неизвестных. Разрешающая многоточечная краевая задача в общем случае имеет следующий вид:

$$\bar{y}'_k(x) = A_k \bar{y}_k(x) + \bar{f}_k(x), \quad (16)$$

$$B_k^- \bar{y}(x_k^b - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_k^b + 0) = \bar{g}_k^+ + \bar{g}_k^-, \quad k=2, \dots, n_k-1;$$

$$B_1^+ \bar{y}(x_1^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{y}(x_{n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (17)$$

где x – переменная соответствующая продольному направлению; $x_k^b, k=1, \dots, n_k$ – координаты точек задания граничных условий (общее количество граничных условий $n_k - 1$); $\bar{y}_k(x)$ – искомая n -мерная вектор-функция на интервале $x \in (x_k^b, x_{k+1}^b)$; A_k и $\bar{f}_k(x)$ – соответственно матрица постоянных коэффициентов n -го порядка и n -мерная вектор-функция правых частей на интервале $x \in (x_k^b, x_{k+1}^b)$.

Третий этап. Выполняется корректное построение точного аналитического решения разрешающих систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Заметим, что все сложности реализации дискретно-континуальных методов определяются характерными специфическими особенностями этих систем. Прежде всего, важен фактор количества рассматриваемых дифференциальных уравнений. В рамках известных традиционных методов Л.В. Канторовича, В.З. Власова и метода прямых [18] можно решить систему, насчитывающую очень небольшое число обыкновенных дифференциальных уравнений, и даже это зачастую требует зачастую привлечения ряда специальных мер (ограничение длины конструкции и проч.). Указанные методы вообще изначально были ориентированы их

разработчиками исключительно на ручной счет. Так, например, выбор базисных функций в них чаще всего не предполагает никакой дискретизации. Кроме того, эти базисные функции далеко не всегда, а особенно в практических задачах, удается подобрать таким образом, чтобы они удовлетворяли соответствующей части заданных граничных условий. При решении же трехмерных задач с использованием ДКМКЭ число уравнений достигает нескольких тысяч, и все традиционно применяемые подходы для аналитического решения таких систем оказывались несостоятельными. В связи с выше отмеченным, практически все исследователи ищут не точное аналитическое решение в виде формулы со слагаемыми экспоненциального типа, а строят решение с помощью разложений в ряды (методы Л.В. Канторовича и В.З. Власова, метод конечных полос), использований сплайн-функций (метод конечных полос) и т.д. [18,30,31]. Стандартные полуаналитические подходы очень плохо справляются с учетом сосредоточенных нагрузок и нагрузок, распределенных на небольших участках. Между тем расчет на такие нагрузки является наиболее важным для большинства строительных конструкций. Не менее критичны в этом же смысле и граничные условия: либо они несостоятельны, либо для их адекватного учета требуется некоторый специальный вид таких условий, не имеющий места в общем случае. Точность и сходимости решений, получаемых по таким методам, часто сильно зависит от вида выбираемых базисных функций для аппроксимации неизвестных, а также от количества учитываемых членов ряда. Сходимость же в зонах краевых эффектов, сосредоточенных факторов, концентраций напряжений и деформаций (т.е. в наиболее ответственных зонах) весьма медленная и слабо зависит от числа учитываемых членов ряда Фурье. И даже, например, если сходимость для перемещений относительно высока, для деформаций, напряжений и внутренних усилий она много меньше. Данный факт отчасти объясняется известным в теории рядов эффектом Гиббса [15], способам борьбы с которым посвящено достаточно много работ как отечественных, так и зарубежных специалистов. Отмеченные недостатки стандартных методов следуют из математической сути задачи, эти слабые места достаточно подробно указываются в обзорных статьях и монографиях (например, [31]).

Вычислительная специфика при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений (6) определяется матрицами A_k , $k=1, \dots, n_k$, с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависят от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр матрицы A_k имеет следующие особенности:

- наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
- «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы к минимальному (по модулю) является большим числом

$$|\lambda_{k,\max}|/|\lambda_{k,\min}| \geq M_k, \text{ где } M_k - \text{большое число}; \quad (18)$$

- в спектральном разложении матрицы A_k присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;
- жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных конечных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Итак, спектральное разложение матрицы kA имеет вид:

$$A_k = T_k J_k T_k^{-1}; \quad (19)$$

где

$$J_{k,p} = \begin{bmatrix} J_{k,1} & & & & \\ & J_{k,2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & J_{k,p_k} \end{bmatrix}; \quad J_{k,p} = \begin{bmatrix} \lambda_{k,p} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{k,p} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{k,p} \end{bmatrix}; \quad \dim J_{k,p} = m_{k,p}; \quad (20)$$

T_k – невырожденная матрица n -го порядка, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A_k ; J_k – матрица Жордана n -го порядка для матрицы A_k ; $J_{k,p}$ – жорданова клетка, соответствующая собственному значению $\lambda_{k,p}$; u_k – количество различных собственных значений матрицы A_k .

Традиционный подход, рекомендуемый в неспециальной математической литературе и публикациях, посвященных строительной механике, фактически сразу предлагает искать решение системы типа (ниже $\bar{y}(x)$ – искомая n -мерная вектор-функция; A и $\bar{f}(x)$ – соответственно матрица постоянных коэффициентов n -го порядка и n -мерная вектор-функция правых частей)

$$\bar{y}'(x) = A\bar{y}(x) + \bar{f}(x), \quad (21)$$

в следующем виде

$$\bar{y}(x) = \exp(Ax)\bar{y}(0) + \int_0^x \exp(A(x-\zeta))\bar{f}(\zeta)d\zeta, \quad (22)$$

Функция от матрицы в (12) вычисляется по известным правилам, причем

$$\exp(Ax) = T \exp(Jx) T^{-1}, \quad (23)$$

где T – невырожденная матрица n -го порядка, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A ; J – матрица Жордана n -го порядка для матрицы [2].

Решение типа (22) в первую очередь ориентируются на задачи Коши. Для случаев, когда исходные уравнения имеют эллиптический тип, (22) является, по сути, решением по методу начальных параметров или начальных функций. Несмотря на наличие в некотором ограниченном числе задач решений по формуле (22), в общем случае данная формула практически нереализуема. Это связано с тем обстоятельством, что в решении (22) всегда имеются функции вида $\exp(\lambda x)$, где $\lambda > 0$, причем величина достигает значительных величин (например, $12 < \lambda x < 300$). Реализация таких функций на ЭВМ является «вычислительной катастрофой». Следует отметить, что чем точнее аппроксимация по неосновным направлениям, тем большие значения принимает величина λx .

Системы (16), как указывалось, являются жесткими. В частности, отсюда вытекает характер решения вблизи границ (краевой эффект) и в зонах приложения сосредоточенных нагрузок. Таким образом, часть составляющих решения системы является быстроизменяющимися, а часть меняется медленно. Как следствие, никакой дискретный подход, например использующий сплайны, не в состоянии уловить все компоненты решения одновременно и его асимптотику. Важным параметром является также и протяженность рассматриваемой конструкции. Как было показано выше, если, например, она значительна, то становятся неработоспособными те методы, где на каком-либо этапе используются гиперболические функции. Часто решение систем (16) ведется либо некорректными методами, не учитывающими специфику строительных задач (например, метод начальных параметров), либо используются методы, не позволяющие получить аналитическое решение (методы типа прогонки, ортогональной прогонки и другие [18], причем метод ортогональной прогонки сопряжен с большим объемом вычислений и неоправданным усилением (ортогонализацией и нормировкой) исчезающих по длине факторов).

В литературе жесткие системы, безусловно, исследуются [19], но в основном при решении задач Коши и, как правило, для систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от аргумента. В нашем случае цель состояла именно в получении аналитического решения при постоянных коэффициентах, что является характерным для большинства задач расчета типовых строительных конструкций.

Важной особенностью при построении решения в форме (22) является необходимость вычисления жордановых клеток и присоединенных векторов. Эта задача также является некорректной, необходимое для ее решения математическое и программное обеспечение в общем случае отсутствует. В литературе по линейной алгебре [20] доказываются, что не может существовать ни одного численно устойчивого универсального способа вычисления жордановых канонических форм. Данное обстоятельство можно преодолеть путем возмущения матрицы, но при этом возникает проблема адекватного выбора параметров возмущения и, кроме того, теряется аналитический характер получаемого решения.

Суть предложенного в [1,6-13,26,27] подхода описана ниже.

Строится фундаментальная матрица-функция, свертка с которой является оператором, обратным к исходному дифференциальному. Для этой цели исходная матрица коэффициентов системы представляется в виде следующей суммы:

$$A_k = A_{k,+} + A_{k,-} + A_{k,0}, \quad (24)$$

где $A_{k,+} = P_{k,+} A_k$; $A_{k,-} = P_{k,-} A_k$; $A_{k,0} = P_{k,0} A_k = A_k - A_{k,+} - A_{k,-}$,

где $P_{k,+}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с неотрицательными действительными частями; $P_{k,-}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с отрицательными действительными частями; $P_{k,0}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям;

$$P_{k,+} = T_{k,+} (\tilde{T}_{k,+} T_{k,+})^{-1} \tilde{T}_{k,+}; \quad P_{k,-} = T_{k,-} (\tilde{T}_{k,-} T_{k,-})^{-1} \tilde{T}_{k,-}; \quad P_{k,0} = E - P_{k,+} - P_{k,-}; \quad (25)$$

$T_{k,+}$ и $\tilde{T}_{k,+}$ – соответственно матрицы размерности $n_k \times n_{k,+}$ и $n_{k,+} \times n_k$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы с неотрицательными действительными частями; $T_{k,-}$, $\tilde{T}_{k,-}$ – соответственно матрицы раз-

мерности $n_k \times n_{k,-}$ и $n_{k,-} \times n_k$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A_k с неотрицательными действительными частями; E – единичная матрица соответствующего порядка; $n_{k,+}$ и $n_{k,-}$ – соответственно количество ненулевых собственных значений с неотрицательными и отрицательными действительными частями. k

Заметим, что матрицы $\tilde{T}_{k,+}$ и $\tilde{T}_{k,-}$ предлагается определять из решения левой проблемы собственных значений для матрицы A_k (учитывается тот факт, что, как следует из сказанного выше, практически невозможно на практике построить матрицы T_k и T_k^{-1} в разложении (19) при наличии в матрице J_k жордановых клеток неединичного порядка). Левая проблема собственных значений матрицы A_k , как известно, сводится к (правой) проблеме собственных значений матрицы A_k^T . Отметим, что после решения проблем собственных значений для матриц A_k и A_k^T следует провести такую сортировку их собственных значений (и соответственно собственных векторов), чтобы сначала нумеровались все ненулевые собственные значения. Сопутствующие преобразования определяются формулами (знак \Rightarrow условно обозначает операцию присваивания)

$$\tilde{T}_{k,+} \Rightarrow (\tilde{T}_{k,+} T_{k,+})^{-1} \tilde{T}_{k,+}; \quad \tilde{T}_{k,-} \Rightarrow (\tilde{T}_{k,-} T_{k,-})^{-1} \tilde{T}_{k,-}. \quad (26)$$

Подчеркнем, что проектор $P_{k,0}$ не нуждается в специальном построении. Он элементарно находится как разность единичной матрицы соответствующего порядка с парой проекторов $P_{k,+}$ и $P_{k,-}$, которым он ортогонален. 0

Предлагаемые процедуры также облегчают применение метода стандартной области [5], связанное с наличием дискретно-континуальных элементов нулевой жесткости.

Соответствующие фундаментальные матрицы-функции для систем (16) могут быть представлены в следующем виде:

$$\varepsilon_k(x) = T_{k,1} \tilde{\varepsilon}_{k,0}(x) \tilde{T}_{k,1} + \chi(x,0) \left[P_{k,0} + \sum_{k=1}^{m_{k,\max}-1} \frac{x^k}{k!} A_{k,0}^k \right], \quad (27)$$

где

$$\chi(x, \lambda_{k,p}) = \begin{cases} \chi(x), & \operatorname{Re}(\lambda_{k,p}) \leq 0 \\ -\chi(-x), & \operatorname{Re}(\lambda_{k,p}) > 0; \end{cases} \quad (28)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{k,0}(x) = \operatorname{diag} \{ \chi(x, \lambda_{k,p}) \exp(\lambda_{k,1} x), \dots, \chi(x, \lambda_{k,l}) \exp(\lambda_{k,l} x) \} \quad (29)$$

$$T_{k,l} = [T_{k,+} \quad T_{k,-}]; \quad \tilde{T}_k = [\tilde{T}_{k,+}^T \quad \tilde{T}_{k,-}^T]^T; \quad (30)$$

$m_{k,\max} = \max_{l \leq i \leq u} m_{k,i}$, причём величина $m_{k,\max}$ конечна и небольшая;

$l_k = n_{k,+} + n_{k,-}$ – число ненулевых собственных значений матрицы A_k ;

$$x_+ = \chi(x) \cdot x.$$

Следует отметить, что в приведенном выражении для фундаментальных матриц-функций нет компонент типа $\exp(\lambda x)$, где $\lambda > 0$. Следует особо отметить, что такие представления основаны на том, что из свойств задач строительной механики вытекает, что все жордановы клетки неединичного порядка соответствуют нулевым собственным значениям, являются нильпотентными, т.е. их некоторая степень приводит к нулевым клеткам.

Вектор-функция решение задачи (16), (17) на произвольном интервале

$x \in (x_k^b, x_{k+1}^b)$, обозначается $\bar{y}_k(x)$ и определяется формулой

$$\bar{y}_k(x) = (\varepsilon(x - x_k^b) - \varepsilon(x - x_{k+1}^b)) \bar{C}_k + \varepsilon(x) * \bar{f}_k(x), \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \quad (31)$$

где \bar{C}_k – вектор постоянных коэффициентов n -го порядка, определяемых из условий (17); * – символ, обозначающий операцию свертки;

$$\bar{f}_k(x) \equiv f(x) \theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b); \quad \theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b) = \begin{cases} 1, & x \in (x_k^b, x_{k+1}^b) \\ 0, & x \in (x_k^b, x_{k+1}^b). \end{cases} \quad (32)$$

Общий вид решения (31) является корректным при любых условиях и свободным от всех недостатков, присущих, например, методам типа начальных параметров. Методы типа начальных параметров применимы с практической точки зрения, главным образом, только лишь при расчете балок и пространственных стержней при отсутствии упругого основания.

Прямое или точное решение многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в литературе (выполнен анализ более 600 публикаций, в том числе обзорных статей, см., например, [31]) не приводится. По-видимому, главную роль в этом сыграли перечисленные особенности подобных задач. Отметим, что эти особенности характерны именно для строительных задач (расчеты конструкций, зданий, сооружений) и, может быть, по этой причине они не являлись предметом широкого

исследования в математике, хотя решением близких проблем в значительной степени занимались в МГУ им. М.В. Ломоносова, в том числе в научных школах М.В. Келдыша, А.Г. Костюченко [14], Б.М. Левитана, А.А. Шкаликова [21-25] и др. Однако в работах перечисленных ученых исследовались в основном качественные вопросы (существование, единственность и т.д.), тогда как проблемы численной реализации практически не затрагивались. А.Б. Золотовым и П.А. Акимовым реализован устойчивый алгоритм аналитического решения при любом числе неизвестных в корректной для вычислений форме, который является основой для построения программных комплексов промышленного типа.

В целом, представляется, что ДКМКЭ послужат надежной основой и для их дальнейшей «коммерциализации», проводимой по двум направлениям:

- создание, апробация и внедрение в практику самодостаточных исследовательских программных комплексов;

- «встраивание» в качестве эффективных альтернативных блоков в передовые отечественные конечно/суперэлементные программные комплексы, интенсивно эксплуатируемые при расчетном обосновании типовых и уникальных строительных конструкций, зданий и сооружений мегаполисов на стадиях их проектирования и эксплуатации-мониторинга (данное направление реализуется в рамках исследований О.А. Негрозова [27]).

3. Суть вейвлет-реализации дискретно-континуального метода конечных элементов для локального расчета строительных конструкций. Характерными особенностями развития строительного комплекса в последние годы являются значительный рост числа домов, возводимых по индивидуальным проектам с применением нестандартных строительных материалов и оригинальных конструктивных решений, обусловленных реальными условиями и пожеланиями заказчика, а также увеличивающийся объем работ, связанный с переделкой и реконструкцией существующих зданий и сооружений, в том числе и по результатам мониторинга строительных объектов. Для недопущения аварийных ситуаций необходимо подтверждать принимаемые конструктивные решения надлежащими расчетами. Современные численные (прежде всего, метод конечных элементов (МКЭ)) и численно-аналитические методы позволяют моделировать поведение сложных строительных объектов в целом, что может привести на практике к вычислительным схемам исключительно большой размерности. Вместе с тем, квалифицированному расчетчику известно, что наиболее опасным с точки зрения прочности является напряженно-

деформированное состояние (НДС) в относительно небольшом числе локальных зон конструкций, причем расположение этих зон, как правило, известно заранее. К последним следует отнести зоны краевого эффекта, т.е. разного рода углы, трещины, щели, места контактов и связей различных конструктивных элементов, места локальных изменений, обусловленных реконструкцией объекта (например, пробивка новых проходов, снос опор, усиления и т.д.) и др. Таким образом, возникает задача разработки, исследования и развития методов локального высокоточного расчета строительных конструкций, тем более актуальная, с позиции того, что корректная локализация расчетного обоснования позволяет существенно сократить количество неизвестных. Вейвлет-анализ [3,29], позволяющий всесторонне оценить влияние различных с точки зрения локализации факторов, является здесь весьма эффективным инструментарием. Предметом исследований авторов статьи в настоящее время, в частности, является применение аппарата вейвлет-анализа для корректного численно-аналитического расчета и анализа работы конструкций на основе использования и развития ДКМКЭ [28]. В качестве простейшего вейвлетного базиса здесь применяются дискретные базисы Хаара.

Одномерный дискретный базис Хаара на отрезке $[a, b]$ имеет вид:

$$\psi_j^p(i) = \alpha_p^{-1} \begin{cases} 1, & 2^{p+1}(j-1) \leq i < 2^p(2j-1) \\ -1, & 2^p(2j-1) \leq i < 2^{p+1}j \\ 0, & i < 2^{p+1}(j-1) \cup i \geq 2^{p+1}j, \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n, \quad 0 \leq p < M; \quad (33)$$

$$\psi_1^M(i) = \alpha_M^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (34)$$

где $\psi_j^p(i)$ – j -я функция Хаара уровня p , определенная в точках разбиения отрезка $x_i = a + (i-1)h, i = 1, 2, \dots, n$ ($h = (b-a)/(n-1)$); $n = 2^M$ – количество частей, на которые разбивается отрезок (M – некоторое целое число).

Двумерный дискретный базис Хаара на прямоугольной области $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ определяется следующими формулами:

$$\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(i_1, i_2) = \alpha_p^{-1} \begin{cases} (-1)^{k_1 s_1 + k_2 s_2}, & \bigcap_{q=1}^2 \bigcup_{k_q} \left(2^{p+1}(j_q - 1 + k_q/2) \wedge \wedge i_q \leq 2^{p+1}(j_q - 1/2 + k_q/2) \right) \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (35)$$

$$i_1 = 1, 2, \dots, n; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n; \quad 0 \leq p \leq M;$$

$$\psi_{0,0,1,1}^M(i_1, i_2) = \alpha_M^{-1}, \quad i_1 = 1, 2, \dots, n; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n, \quad (36)$$

где $\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^P(i_1, i_2)$ – функция Хаара, определенная в узлах равномерной сетки, аппроксимирующей область Ω с координатами $x_{1,i} = (i-1)h_1$, $i_1 = 1, 2, \dots, n$, $x_{2,i} = (i-1)h_2$, $i_2 = 1, 2, \dots, n$ (причем недопустим случай $s_1 = s_2 = 0$); $n = 2^M$ (M – некоторое целое число);

$$N_p = \begin{cases} n/2^{p+1} = 2^{M-(p+1)}, & 0 \leq p < M \\ 1, & p = M; \end{cases} \quad \alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2^{p+1}}, & 0 \leq p < M \\ \sqrt{2^M} = \sqrt{n}, & p = M. \end{cases} \quad (37)$$

В [1,8] рассмотрены корректные быстрые алгоритмы вейвлет-преобразований по одномерному и двумерному базисам Хаара, корректные алгоритмы осреднения функций, разложенных по одномерному и двумерному дискретному базису Хаара, а также корректные алгоритмы многоуровневых аппроксимаций функций, разложенных по одномерному и двумерному дискретному базису Хаара.

В одномерном случае произвольная функция f , определенная в точках разбиения рассматриваемого отрезка, может быть разложена в ряд Хаара:

$$f(i) = \sum_{p=0}^M \sum_{j=1}^{N_p} v_j^p \psi_j^p(i), \quad (38)$$

где v_j^p , $j = 1, 2, \dots, N_p$, $p = 1, 2, \dots, M$ – коэффициенты разложения функции $f(i)$ по базису Хаара, определяемые как скалярное произведение

$$v_j^p = (f, \bar{\psi}_j^p) = \sum_{p=0}^M f(i) \psi_j^p(i), \quad j = 1, 2, \dots, N_p, \quad p = 1, 2, \dots, M; \quad (39)$$

$$f = [f(1) \ f(2) \ \dots \ f(n)]; \quad \bar{\psi}_j^p = [\psi_j^p(1) \ \psi_j^p(2) \ \dots \ \psi_j^p(n)] \quad (40)$$

Формулу (39) можно переписать в матрично-векторном виде

$$\bar{v} = DQ^0 \bar{f}, \quad (41)$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара (т.е. функций вида (33), (34), но у которых отсутствует деление соответственно на величину α_p для формулы (1) и α_M для формулы (26)), записанных по строкам; D – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются величины α_p , $p = 1, 2, \dots, M$; \bar{v} – вектор, составленный из искоемых коэффициентов разложения функции $f(i)$ по базису Хаара (33), (34).

При осреднении на некотором уровне для всех имеем:

$$(Du^p)_{2j-1} \approx (Du^p)_{2j} \approx (D\tilde{u}^p)_{2j-1}, v_{2j-1}^p = v_{2j}^p, \quad j=1,2,\dots,N_{p+1}, \quad (42)$$

где

$$(D\tilde{u}^p)_{2j-1} = (\tilde{u}_{2j}^p - \tilde{u}_{2j-1}^p) / (2^{p+1}h). \quad (43)$$

Следовательно, формулы осреднения могут быть записаны в виде:

$$v_{2j-1}^p = v_{2j}^p = \beta v_{2j}^{p+1}, \quad j=1,2,\dots,N_{p+1}, \quad (44)$$

где $\beta = 1 / (2\sqrt{2})$.

Матрично-векторная форма записи алгоритма осреднения:

$$\bar{v}^k = R_k \bar{v}^{k+1}, \quad (45)$$

где $R_k = \bar{\beta} \otimes I_{N_{k+1}}$, $\bar{\beta} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; R_k – матрица рекуррентного перехода на k -й уровень; I_n – единичная матрица n -го порядка; \otimes – обозначение операции прямого произведения.

При необходимости осреднения на некотором уровне имеем:

$$\bar{v}^p = W_p \bar{v}^{q+1}, \quad p=0,1,2,\dots,q, \quad (46)$$

где

$$W_p = \prod_{s=p}^q R_s \quad \text{или} \quad W_p = \bar{\beta}_{p,q} \otimes I_{N_{p+1}}, \quad \bar{\beta}_{p,q} = \beta^{q-p+1} \bar{e}_{q+1}; \quad (47)$$

W_p – матрица рекуррентного перехода на k -й уровень; \bar{e}_{q+1} – вектор размерности N_{q+1} , составленный из единиц. В двумерном случае для произвольной функции $f(i_1, i_2)$, определенной в узлах рассмотренной выше прямоугольной сетки, будем иметь:

$$f(i_1, i_2) = \sum_{p=0}^M \sum_{j_1=1}^{N_p} \sum_{j_2=1}^{N_p} (v_{1,0,j_1,j_2}^p \Psi_{1,0,j_1,j_2}^p(i_1, i_2) + v_{0,1,j_1,j_2}^p \Psi_{0,1,j_1,j_2}^p(i_1, i_2) + v_{1,1,j_1,j_2}^p \Psi_{1,1,j_1,j_2}^p(i_1, i_2)), \quad (48)$$

$v_{1,0,j_1,j_2}^p$, $v_{0,1,j_1,j_2}^p$, $v_{1,1,j_1,j_2}^p$, $j_1=1,2,\dots,N_p$, $j_2=1,2,\dots,N_p$, $p=1,2,\dots,M$ – коэффициенты разложения функции $f(i_1, i_2)$ по дискретному базису Хаара,

$$v_{s_1,s_2,j_1,j_2}^p = (\bar{f}, \bar{\Psi}_{s_1,s_2,j_1,j_2}^p) = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N f(i_1, i_2) \bar{\Psi}_{s_1,s_2,j_1,j_2}^p(i_1, i_2), \quad (49)$$

$$s_1=0,1, \quad s_2=0,1, \quad j_1=1,2,\dots,N_p, \quad j_2=1,2,\dots,N_p, \quad p=1,2,\dots,M;$$

$$f=[f(1,1) \dots f(1,n) f(2,1) \dots f(2,n) \dots f(n,1) \dots f(n,n)]^T; \quad (50)$$

$$\bar{\psi}_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p = \left[\psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(1,1) \dots \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(1,n) \dots \bar{\psi}_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(2,1) \dots \bar{\psi}_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(2,n) \dots \right. \\ \left. \dots \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(n,1) \dots \psi_{s_1, s_2, j_1, j_2}^p(n,n) \right]^T. \quad (51)$$

Матрично-векторный вид формулы (49) следующий:

$$\bar{v} = D Q^0 \bar{f}, \quad (52)$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара, записанных по строкам; D – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются величины α_p , $p = 1, 2, \dots, M$; v – вектор, составленных из искомым коэффициентов коэффициенты разложения функции $f(i_1, i_2)$ по базису Хаара.

При осреднении на некотором уровне q для всех $p = 1, 2, \dots, q$ имеем (ниже $s_1 = 0, 1$; $s_2 = 0, 1$ (кроме $s_1 = s_2 = 0$); $j_1 = 1, 2, \dots, N_p$, $j_2 = 1, 2, \dots, N_p$)

$$(D_1 u^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = (D_1 u^p)_{2j_1-1, 2j_2} = (D_1 u^p)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_1 u^p)_{2j_1, 2j_2} \approx (D_1 \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1, 2j_2-1}; \quad (53)$$

$$(D_2 u^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = (D_2 u^p)_{2j_1-1, 2j_2} = (D_2 u^p)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_2 u^p)_{2j_1, 2j_2} \approx (D_2 \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1, 2j_2-1}; \quad (54)$$

$$(D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1-1, 2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1-1, 2j_2} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1, 2j_2-1} = (D_2^+ D_1^+ u^p)_{2j_1, 2j_2} \approx \\ \approx (D_2^+ D_1^+ \tilde{u}^p)_{2j_1-1, 2j_2-1, 2j_2-1}; \quad (55)$$

$$v_{s_1, s_2, 2j_1-1, 2j_2-1}^p = v_{s_1, s_2, 2j_1, 2j_2-1}^p = v_{s_1, s_2, 2j_1-1, 2j_2}^p = v_{s_1, s_2, 2j_1, 2j_2}^p. \quad (56)$$

Следовательно, формулы осреднения могут быть записаны в виде:

$$v_{s_1, s_2, 2j_1-1, 2j_2-1}^p = v_{s_1, s_2, 2j_1, 2j_2-1}^p = v_{s_1, s_2, 2j_1-1, 2j_2}^p = v_{s_1, s_2, 2j_1, 2j_2}^p = s_{s_1, s_2} v_{s_1, s_2, j_1, j_2}^{p+1}. \quad (57)$$

где

$$\beta_{1,0} = 0.25; \beta_{0,1} = 0.25; \beta_{1,1} = 0.125. \quad (58)$$

Матрично-векторная форма записи алгоритма осреднения:

$$\bar{v}^k = R_k \bar{v}^{k+1}, \quad \text{где } R_k = \beta^G \otimes I_{N_{j+1}^2}; \quad (59)$$

$$R_k = \beta^G = \beta \otimes [1 \ 1 \ 1]^T; \quad \beta = \text{diag}\{\beta_{1,0}, \beta_{0,1}, \beta_{1,1}\} \quad (60)$$

При необходимости осреднения на некотором уровне q имеем:

$$\bar{v}^p = W_p \bar{v}^{q+1}, \quad p = 0, 1, 2, \dots, q, \quad (61)$$

где

$$W_p = \prod_{s=p}^q R_s \quad \text{или} \quad W_p = \beta_{p,q}^G \otimes I_{N_{j+1}^2}; \quad \beta_{p,q}^G = \beta^{q-p+1} \bar{e}_{q+1}; \quad (62)$$

\bar{e}_{q+1} – вектор, составленный из единиц, размерности N_{q+1}^2 .

После перехода в (6), (7) к дискретному двумерному базису Хаара по переменным x_1 и x_2 , реализации процедур редукции и осреднения получим соответствующую редуцированную постановку многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\bar{V}'_k = A_k \bar{V}_k + \bar{F}_k, \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b), \quad k=1, \dots, n_k-1; \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k^- \bar{V}_{k-1}(x_{3,k}^b-0) + \tilde{B}_k^+ \bar{V}_k(x_{3,k}^b+0) &= \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k=1, \dots, n_k-1; \\ \tilde{B}_1^+ \bar{V}_1(x_{3,1}^b+0) + \tilde{B}_{n_k}^- \bar{V}_{n_k-1}(x_{3,n_k}^b-0) &= \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \end{aligned} \quad (64)$$

где

$$\bar{U}_n^{(k)}(x_3) = S_{b,k} \bar{V}_k(x_3); \quad S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix}; \quad S_k = P_{12}^T Q_b R_{b,k}; \quad (65)$$

где

$$R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{k,3} \end{bmatrix}; \quad Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}; \quad \bar{w}_i^{(k)}(x_3) = R_{k,i} \bar{w}_i^{(k),red}(x_3), \quad i=1,2,3; \quad (66)$$

$$P_{12} u_n^{(k)}(x_3) = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1,n}^{(k)}(x_3) \\ \bar{u}_{2,n}^{(k)}(x_3) \\ \bar{u}_{3,n}^{(k)}(x_3) \end{bmatrix}; \quad k=1,2, \dots, n_k-1; \quad (67)$$

$$\bar{u}_i^{(k)}(x_2) = \left\{ \bar{u}_i^{(k)}(x_1^{(p,q)}, x_2^{(p,q)}, x_3) \right\}_{p=1,2, \dots, N_1, q=1,2, \dots, N_2}, \quad i=1,2,3, \quad x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b); \quad (68)$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,1,s} & A_{k,2,s}^{-1} \tilde{A}_{k,0,s} \end{bmatrix}; \quad \bar{F}_k = - \begin{bmatrix} 0 \\ A_{k,2,s}^{-1} \bar{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \quad \bar{V}_k = - \begin{bmatrix} \bar{w}_k^{red} \\ \bar{t}_k^{red} \end{bmatrix}; \quad \bar{V}'_k = \partial_3 \bar{V}_k; \quad (69)$$

$$A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,uv} S_k; \quad \tilde{A}_{k,1,s} = S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k; \quad A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,uu} S_k; \quad b_{k,s} = S_k^T b_k; \quad (70)$$

$$\bar{t}_k^{red} = \partial_3 \bar{w}_k^{red}, \quad k=1,2, \dots, n_k; \quad \bar{b}_k = K_{k,uv}^{-1} \bar{R}_{k,uv}; \quad (71)$$

$$\tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k}, \quad k=2, \dots, n_k; \quad \tilde{B}_k^+ = B_k^- S_{b,k}, \quad k=1, \dots, n_k-1; \quad (72)$$

A_k – матрица размером $2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)} + N_{red,3}^{(k)}) \times 2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)} + N_{red,3}^{(k)})$; \bar{V}_k и \bar{F}_k – векторы размером

$2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)} + N_{red,3}^{(k)})$; \tilde{B}_k^- и \tilde{B}_k^+ – прямоугольные матрицы размером $6N_1N_2 \times 2(N_{red,1}^{(k-1)} + N_{red,2}^{(k-1)} + N_{red,3}^{(k-1)})$ и $6N_1N_2 \times 2(N_{red,1}^{(k)} + N_{red,2}^{(k)} + N_{red,3}^{(k)})$ соответственно.

Далее для точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики типа (63), (64) может быть использована методика, описанная во втором пункте настоящей статьи.

Замечание. Исследования проводились в рамках следующих работ:

1. Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и критического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.

2. Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. Монография. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
2. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
3. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 511 с.
5. *Золотов А.Б.* Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области: Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. - М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. - 284 с.
6. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография. – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
7. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
8. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные реализации вариационно-разностного метода. Монография. – М.: АСВ, 2013. – 416 с.
9. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. Монография. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2010. – 336 с.

10. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. Монография. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 336 с.
11. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретные и дискретно-континуальные реализации метода граничных интегральных уравнений. Монография. – М.: ФГБОУ ВПО «МГСУ», 2011. – 368 с.
12. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). Монография. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
13. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. Монография. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.
14. Костюченко А.Г., Оразов М.Б. Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки. // Труды семинара им. И.Г. Петровского, т. 6. – М.: Издательство МГУ, 1981, с. 97-146.
15. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литры. 1961. – 524 с.
16. Перельмутер А.В. Беседы о строительной механике. - М.: Издательство SCAD Soft; Издательство АСВ, 2014. – 250 с.
17. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – Киев: Сталь, 2002. – 445 с.
18. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
19. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Издательство Московского физико-технического института, 1994. – 528 с.
20. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
21. Шкаликов А.А. Задача об установившихся колебаниях трансверсально изотропного полуцилиндра со свободной границей. // Функциональный анализ и его приложения, 1991, т. 17, №2, с. 86-89.
22. Шкаликов А.А. К спектральной теории пучков операторов и разрешимости операторно-дифференциальных уравнений: Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1985.
23. Шкаликов А.А. Некоторые вопросы теории полиномиальных операторных пучков. // УМН, 1983, т. 38, №3.
24. Шкаликов А.А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Т. 14. М.: Издательство МГУ, 1989. с. 140-224.
25. Шкаликов А.А., Шкред А.В. Задача об установившихся колебаниях трансверсально-изотропного полуцилиндра. // Математический сборник, 1991, т.182, №3, с. 1222-1246.
26. Akimov P.A. Correct Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis Based on Precise Analytical Solutions of Resulting Multipoint Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations. // Applied Mechanics and Materials Vols. 204-208 (2012), pp. 4502-4505.
27. Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A. Correct Multilevel Discrete-Continual Finite Element Method of Structural Analysis. // Advanced Materials Research Vol. 1040 (2014), pp. 664-669.
28. Akimov P.A., Mozgaleva M.L. Correct Wavelet-based Multilevel Discrete-Continual Methods for Local Solution of Boundary Problems of Structural Analysis. // Applied Mechanics and Materials Vols. 353-356 (2013), pp. 3224-3227.
29. Burrus C.S., Gopinath R.A., Guo H. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. A Primer, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1998.

30. *Cheung Y.K., Tham L.G.* A review of the finite strip method. // *Progress in Structural Engineering and Materials*, Volume 2 Issue 3, 2000, pp. 369-375.
31. *Christov C.T., Petrova L.* Comparison of Some Variants of the Finite Strip Method for Analysis of Complex Shell Structures. // *Proceedings of the IKM, Weimar, 2000*, 6 pages.

Сведения об авторах

Акимов Павел Алексеевич, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук; главный ученый секретарь Российской академии архитектуры и строительных наук; заместитель генерального директора по научной работе ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО»; заведующий кафедрой информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета, главный научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: akimov@raasn.ru, pavel.akimov@gmail.com, akimov@mgsu.ru.

Мозгалева Марина Леонидовна, кандидат технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com.

Моджтаба Аслами, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com.

Негрозов Олег Александрович, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета; инженер Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов Московского государственного строительного университета; советник информационно-аналитического отдела Российской академии архитектуры и строительных наук; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: negromgsu@gmail.com.

UDC 539.3

ANALYSIS OF ULTIMATE LIMIT LOAD OF SPHERICAL SHELLS APPLYING VON MISES YIELD CRITERION

Tomas Ulitinas¹

Stanislovas Kalanta¹

Gediminas Blaževičius¹

Juozas Atkočiūnas¹

¹*Department of Structural Mechanics, Vilnius Gediminas technical University,
Saulėtekio av. 11, 10223 Vilnius, Lithuania*

In this paper, the problems of ultimate limit load of spherical shell are formulated and solved. An equilibrium finite element developed by the method of Bubnov-Galerkin is suggested. Equilibrium and geometrical equations are created for this element and, based on these equations, the mathematical models of ultimate limit external load optimization problems for the shell structures are constructed. These are nonlinear mathematical programming problems. The methodology is illustrated by the numerical examples. The solution results are obtained for the finite elements of various sizes and show very high accuracy of the suggested element and convergence of the results.

1. Introduction

In this paper, the analysis of the stress-strain elastic-plastic states of a spherical shell subjected to symmetrical loading and the limit external load optimization are investigated. In the analysis problems, it is sought to define the internal forces, displacements and maximum external loading, when the geometry and physical parameters of the spherical shell material are known.

The spherical shell with a middle surface obtained as a circular curve revolution product in respect of a vertical axis is a separate case of the general shell [1–2]. The problem of the limit load optimization is presented in the static formulation, where unknowns are the static values – the generalized internal forces and the load parameter. However, the kinematical values can also be found by applying the duality theory. The physical model of the ideal elastic-plastic isotropic body and the Von Mises yield criteria are used [3–5]. Therefore, this problem is a nonlinear convex mathematical programming problem, where the equilibrium finite element method is used for discretization.

2. Discretization of spherical shell equations

The schematic view of the spherical shell is given in Fig 1. According to Kirchhoff-Love's theory, the shearing stress and strains are ignored. It means that the shear internal forces can be ignored also. For this reason, the stress state of the shell is defined by 6-dimensional vector of the internal forces

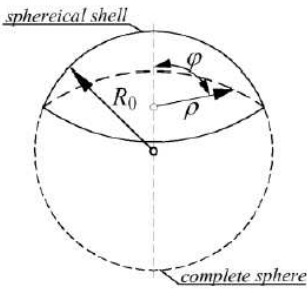


Fig. 1. The basic notation for spherical shell

$$S = (M_{11}, M_{22}, M_{12}, N_{11}, N_{22}, N_{12})^T. \quad (1)$$

The spherical shell convenient to use in the polar coordinate system (ρ, φ, z) . So the vector of the internal forces can be rewrite:

$$S = (M_\rho, M_\varphi, M_{\rho\varphi}, N_\rho, N_\varphi, N_{\rho\varphi})^T. \quad (2)$$

The six internal forces (1) or (2) are due to the so-called complete normal stress state of a shell. The positive direction of internal forces of the spherical shell are shown in Fig 2.

In the general case, when the load is non-symmetrically, the differential operator \mathcal{L} of equilibrium equations of spherical shell is presented in Table 1.

Table 1

The operator of equilibrium equations on unsymmetrical load case

M_ρ	M_φ	$M_{\rho\varphi}$	N_ρ	N_φ	$N_{\rho\varphi}$
			$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$	$\frac{1}{\rho}$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$
				$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$	$-\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$
$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}$	$-\frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$	$-\frac{1}{R_0}$	$-\frac{1}{R_0}$	

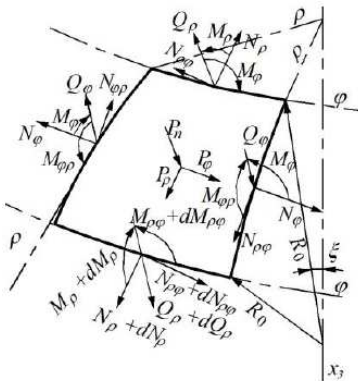


Fig. 2. The positive direction of internal forces of the shell

In the case of a certain shell type design the number of internal forces can be reduced on the basis of introduced simplifying assumptions. If the load can be applied only symmetrically, then the duality condition requires the displacement to be symmetric too. Consequently, one can formulate the following simplification: during a deformation all middle surface point are displaced in a symmetric way in respect of the meridian plane. In this paper will be analyzed sym-

metrically loaded spherical shell. For this case the differential operator \mathcal{L} of equilibrium equations of spherical shell will be smaller and it presented in Table 2.

Table 2

The operator of equilibrium equations on symmetrical load case

M_ρ	M_φ	N_ρ	N_φ
		$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$	$\frac{1}{\rho}$
$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$	$-\frac{1}{R_0}$	$-\frac{1}{R_0}$

where R_0 is the radius of curvature of the spherical shell.

The spherical shell is modelled by the circular finite elements $k = 1, 2, \dots, r$, connected in the main discrete model nodes. The functions of the elastic or elastic-plastic spherical shells can have breaks. In order to increase the accuracy of the results, these breaks must be considered. However, the breaks can be modelled only in the nodes, where the elements are connected. Therefore, while choosing the elements mesh, not only the geometry of the structure and distribution of the external loads, but also the possible places of the breaks should be considered.

The spherical shell is investigated in the polar coordinate system (ρ, φ, z) with the origin in the center of the structure. It is sufficient to investigate only one radius (ρ) of such a shell, since the internal forces and displacements are independent with respect to the coordinate φ , when symmetric loading is applied i.e. Table 2. The circular element created by S. Kalanta [6] is used for discretization (Fig. 3).

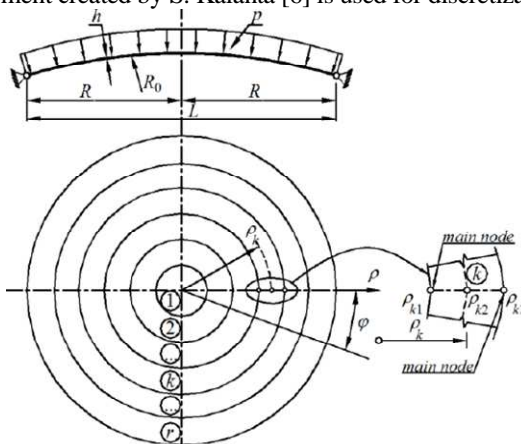


Fig. 3. The discretization of the spherical shell by circular elements with three nodal points

The circular element is investigated in the system of the local coordinates φ and ξ . The nodal internal forces are shown in Fig. 4. The relation between the global coordinate ρ_k and the local coordinate ξ_k is described by the dependences as follows:

$$\rho_k = \rho_{k2} + 0.5\xi_k b_k, \quad (3)$$

where ρ_{k2} is the coordinate of the second node in the global coordinate system; b_k is the width of the finite element. The shape functions associated with node i , which for the bending moments are described by the quadratic elements with three noded has form $B(\xi)$ [8]:

$$B_{k1} = \xi_k (\xi_k - 1) / 2, \quad (4a)$$

$$B_{k2} = 1 - \xi_k^2, \quad (4b)$$

$$B_{k3} = \xi_k (\xi_k + 1) / 2, \quad (4c)$$

while the axial forces – by the linear elements with two nodes [8]:

$$B_{k1} = (1 - \xi_k) / 2, \quad (5a)$$

$$B_{k2} = (1 + \xi_k) / 2. \quad (5b)$$

An external distributed load vector is expressed as follows:

$$\mathbf{P}_k = (P_\rho, p_\varphi, p_n)^T \quad (6a)$$

and for symmetrical loaded

$$\mathbf{P}_k = (p_\rho, p_n)^T. \quad (6b)$$

The internal forces vector \mathbf{S} and the external load vector \mathbf{P} are related by the differential equations of statics for k^{th} element

$$\frac{d}{d\xi} \mathbf{S}_k = \mathbf{P}_k, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (7)$$

The discrete shell model is regular for circular elements of the same width. The load can be distributed over the surface of the finite elements or concentrated in the main node. The assumption is made that physical properties of the material (the elastic modulus E and Poisson's ratio ν), shell thickness h and the intensity of the distributed load p in the element are constant.

The stress state of the element is described by the vector of the internal forces \mathbf{S}_k , which is composed of the internal forces of all three nodes (Fig. 4).

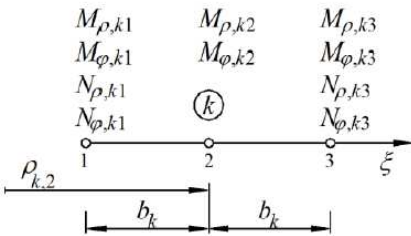


Fig. 4. The internal forces of k^{th} element

2.1. An equilibrium equations of spherical shell

The shape functions (4)–(5) do not satisfy the differential equilibrium Eqs. (7) of the spherical shell, therefore, it is necessary to write the internal equilibrium equations for every element. Thus, the spherical shell discrete model equilibrium equations are composed not only of the equilibrium equations in the main nodes, where the elements are connected, but also of the internal equilibrium equations of the elements. Algebraic internal equilibrium equations of the finite element are obtained by inserting the functions (4)–(5) into the Eqs. (7) and differentiating using algebraic operator from Table 2:

$$A_k(\xi_k)S_k = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (8)$$

The operator of the algebraic equations $A_k(\xi_k)$ is presented in the paper [6–7]. Since the operator $A_k(\xi_k)$ depends on the coordinate ξ_k , the static equations of the element can be expressed by the equilibrium equations of the element boundary nodes:

$$A_{n,k}S_k = F_{n,k}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (9)$$

Which are created, using Bubnov-Galerkin collocation method. Here

$$A_{n,k} = 2\pi b_k \int_{-1}^1 G_k(\xi) A_k(\xi_k) S_k (\rho_{k2} + \xi_k b_k) d\xi_k \quad (10)$$

and

$$F_{n,k} = 2\pi b_k \int_{-1}^1 G_k(\xi_k) A_k(\xi_k) p_k (\rho_{k2} + \xi_k b_k) d\xi_k \quad (11)$$

$$F_{n,k} = \frac{2\pi b_k}{3} \begin{bmatrix} 3p_{k2} - b_k & & & \\ & 3p_{k2} - b_k & & \\ & & 3p_2 + b_k & \\ & & & 3p_{k2} + b_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{pk} \\ p_{nk} \end{bmatrix} = \eta_k p_k \quad (12)$$

the matrix of the influence functions $G_k(\xi_k)$ obtained by the differential (4a) and (4c). The element equilibrium equations coefficient matrix $A_{n,k}$ is presented in the paper [6–7]. The static equations of the node j , where the elements k and l are connected (Fig. 5), are composed of the equilibrium equations of bending moments, axial and shear forces:

$$2\pi\rho_{k3}(-M_{\rho,k3} + M_{\rho,l1}) = 0 \quad (13a)$$

$$2\pi\rho_{k3}(-N_{\rho,k3} - N_{\rho,l1}) = 0 \quad (13b)$$

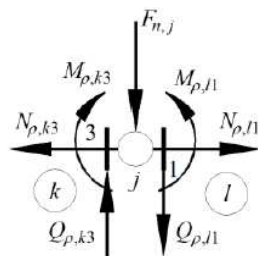


Fig. 5. The internal forces in the main node j

$$2\pi\rho_{k3}(Q_{\rho,k3} - Q_{\rho,l1}) = 2\pi\rho_{k3}F_{n,j}, \quad (13c)$$

where $F_{n,j}$ is the intensity of the normal external load in the main node (in the circular elements connecting joint j of spherical shell).

The static equations of the shear forces are created, using the dependency:

$$Q_{\rho,k}(\xi_k) = \frac{1}{\rho_k} [M_{\rho,k}(\xi_k) - M_{\varphi,k}(\xi_k)] + \frac{dM_{\rho,k}(\xi_k)}{d\xi_k} \frac{d\xi_k(\rho_k)}{d\rho_k}. \quad (1.4)$$

The Eqs. (9) of all the elements and the Eqs. (13) of all main nodes make the algebraic system of the equilibrium equations of an elastic shell discrete model:

$$AS_e = F, \quad (1.5)$$

where A $n \times m$ size equilibrium equations coefficient matrix of all elements; S_e $m \times 1$ the discrete model of an elastic internal forces vector of all elements; F $n \times 1$ size the external load vector of all elements.

2.2. A geometrical equations of spherical shell

The geometrical equations of the discrete model are created, applying the principle of virtual forces. With reference to the physical equations $\Theta_e = DS_e$, the compatibility of the displacements u_e and strain Θ_e in the elastic structure is described by the equation:

$$DS_e - A^T u_e = 0, \quad (16)$$

where $D = \text{diag} \mathcal{D}_k$ is the quasi-diagonal flexibility matrix composed of the diagonal blocks, representing the flexibility matrices of the separate finite elements. The flexibility matrix \mathcal{D}_k is presented in the paper [6–7].

The geometrical equations of the elastic-plastic shell are as follows:

$$DS_r + \Theta_p - A^T u_r = 0, \quad (17)$$

2.3. A strength conditions of spherical shell

A von Mises yield criterion for a spherical shell of internal forces is describe in an inequality [7, 9]

$$f_i \equiv N_{0i}^2 - S_i^T \Phi_i S_i \geq 0, \quad (18)$$

where N_{0i} denotes the limit internal forces (the membranous limit axial forces) of the i th design section. The matrix

$$\Phi_i = h^2 \times \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^{-2} & -h^{-2}/2 \\ 0 & 0 & -h^{-2}/2 & h^{-2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

is positive-definite, therefore, the conditions (18) are convex downwards. The condition (18) is homogenous, therefore, it is suitable to apply this condition not only to the analysis and limit equilibrium problems, but also to the optimization problems of the structure's parameters. The admissibility condition of the internal forces for every design section (the element node) i of the discrete model of the structure is based on the non-linear strength condition [10–12] can be rewrite in an inequality

$$\frac{16}{h^2}(M_{\rho i}^2 - M_{\rho i}M_{\varphi i} + M_{\varphi i}^2) + N_{\rho i}^2 - N_{\rho i}N_{\varphi} - N_{\varphi i}^2 \leq (N_{0i})^2. \quad (20)$$

Assuming that the law of holonomy is valid for the ideal elastic-plastic system, the plastic strains $\Theta_{\rho i}$ are described by the dependency:

$$\Theta_{\rho i} = 2\lambda_i \Phi_i S_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad (21)$$

where λ_i is the proportionality strength condition Lagrangian multiplier.

3. A mathematical model of the limit load optimization problem

In the limit load optimization problem, it is necessary to determine optimal distribution of the load, corresponding to the given distribution of the limit internal force N_0 and the aggregate maximum size load $T^T F_0$, where F_0 is the vector of the optimized load parameters. In general, some components of the load can be fixed. Let us suppose that the fixed value load is described by the vector F_s , in the equilibrium equations, while the optimized load – by the vector $F = \eta F_0$. Then, the mathematical model of the limit load optimization problem is as follows:

find

$$\max T^T F_0, \quad (22)$$

$$-AS + \eta F_0 = -F_0, \quad F_0 \geq 0, \quad (23a)$$

when

$$f_i \equiv N_{0i}^2 - S_i^T \Phi_i S_i \geq 0. \quad (23b)$$

The solution of this non-linear problem is the vectors S and F_0 , corresponding to optimal distribution of the optimal ultimate limit load. The residual internal forces are

$$S_r = S - S_e, \quad (24)$$

here S_e can be expressed using formulas (15)–(16)

$$S_e = D^{-1}A^T(AD^{-1}A^T)^{-1}(\eta F_0 + F_c),$$

or

$$S_e = D^{-1}A^T K^{-1}(\eta F_0 + F_c), \quad (25b)$$

where K is the global stiffness matrix of the construction [12–14].

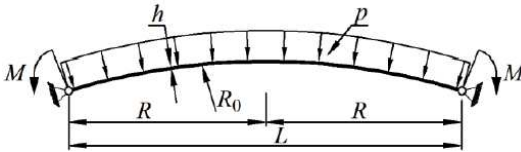
When the number of load optimization parameters $n = 1$, load optimization problem becomes the problem of determining the limit load parameter.

4. A numerical research

The purpose of computational research is to test the equilibrium finite element of a spherical shell and to illustrate some research results. A research object was simply supported shallow spherical shell is shown in Fig. 6. The supports are applied in the outside boundary of shell.

The radius of curvature $R_0=40.0\text{ m}$, the base diameter $R=12.0\text{ m}$, the thickness $h=0.015\text{ m}$. The material – steel: $E=210\text{ GPa}$, $\nu=0.3$, $f_y = 235\text{ MPa}$. The limit axial force of the shallow spherical shell $N_0 = f_y h = 3525\text{ kN/m}$. The outside boundary of the shell

is loaded by the uniformly distributed moment $M = 5.0\text{ kNm/m}$, and the surface of the shell is subjected to a uniformly distributed load p , which



is an unknown of the optimization problem. The optimal load distribution is found by using a mathematical model (22)–(23). To analyze the accuracy of the element the 5, 10, 15 and 20 finite element discrete models of the shell are used. A discrete model with 5 elements is presented in Fig. 7. Strength conditions are analyzed in all nodes of the elements.

By using a discrete model with 5 finite elements, the optimal load value $p_5=173.27\text{ kN/m}^2$ have been obtained. Strength conditions become the equations in all the nodes of the 1st and 4th elements and only in the 1st and 3rd nodes of other elements. Plastic deformations are developed in the environment

of these nodes. The following values of limit axial force were obtained by using 10, 15 and 20 elements discrete models are: $p_{10} = 176.15\text{ kN/m}^2$, $p_{15} = 176.28\text{ kN/m}^2$ and $p_{20} = 176.28\text{ kN/m}^2$. It can be argued that when 5 or 20 element models are taken, the accurate limit load values have already been obtained, while for 5 elements, the load intensity value p differs

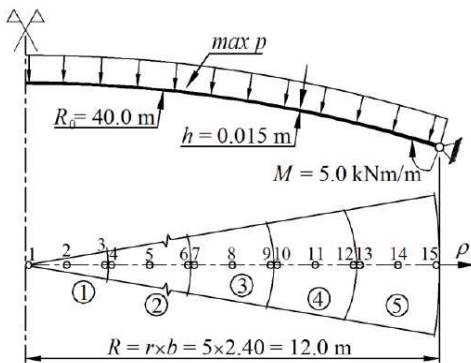


Fig. 7. A discrete model of the five elements of a spherical shell

inconsiderably (the error makes 1.02%). The values of the axial forces according 5 elements are given in Table 3.

Table 3

The values of axial forces (kN/m)

Node nr.	5 elements		10 elements		15 elements		20 elements	
	N_p	N_o	N_p	N_o	N_p	N_o	N_p	N_o
1	-3390.35	-3390.35	-3522.51	-3522.51	-3524.80	-3524.80	-3524.76	-3524.76
2	-3425.63	-3460.91	-3522.85	-3523.10	-3524.80	-3524.83	-3524.77	-3524.80
3	-3460.91	-3531.47	-3523.01	-3523.34	-3524.83	-3524.91	-3524.81	-3524.90
4	-3460.91	-3458.32	-3523.01	-3523.44	-3524.83	-3524.91	-3524.81	-3524.91
5	-3459.61	-3455.73	-3523.22	-3523.92	-3524.87	-3524.99	-3524.86	-3524.99
6	-3458.32	-3453.13	-3523.48	-3524.48	-3524.90	-3525.01	-3524.89	-3525.00
7	-3458.32	-3470.67	-3523.48	-3524.64	-3524.90	-3524.93	-3524.89	-3524.92
8	-3461.41	-3476.85	-3523.77	-3525.24	-3524.90	-3524.79	-3524.89	-3524.70
9	-3464.49	-3483.02	-3524.06	-3525.86	-3524.85	-3524.44	-3524.81	-3524.17
10	-3464.49	-3507.45	-3524.06	-3524.94	-3524.85	-3524.01	-3524.81	-3523.73
11	-3471.65	-3521.76	-3524.21	-3523.21	-3524.67	-3522.83	-3524.57	-3521.94
12	-3478.81	-3536.08	-3524.07	-3522.90	-3524.25	-3520.26	-3523.95	-3517.78
13	-3478.81	-3303.09	-3524.07	-3520.30	-3524.25	-3515.90	-3523.95	-3512.95
14	-3456.85	-3259.16	-3523.59	-3366.60	-3522.64	-3498.17	-3521.89	-3478.46
15	-3434.88	-3215.23	-3489.18	-3145.01	-3497.47	-3133.44	-3499.94	-3129.83

These values demonstrate high accuracy of the developed finite element in the problems of elastic-plastic state analysis. The values of the bending moments are smaller than axial forces about 1000 times (except the bending moment in the outside boundary of the shell).

5. Conclusion

1. An equilibrium finite element is suggested for the analysis of the shallow symmetrically loaded spherical shell. The bending moments and axial forces are described by the quadratic and the linear shape functions.

2. Mathematical models for spherical shell optimization problem of elastic-plastic state analysis for ultimate limit load is formulated (single load). Also, the created element can be effectively used for the elastic-plastic spherical shell optimization problems (for single load or repeated-variable load).

3. The computational analysis performed by using the elements' mesh of various density, has shown high accuracy and convergence of the calculation results. This is particularly important for the analysis of the elastic-plastic shells and for solving the optimization – nonlinear programming problems, whose solution success largely depends on their size (the number of elements).

REFERENCES

- [1] Fraeijs de Venbeke, 2001. Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 52: pp. 287-342.
- [2] Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B. 2000. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. New York: John Wiley & Sons Ltd.
- [3] Čyras, A. 1990. *Statybinė mechanika*. Vilnius: Mokslas, p.448.
- [4] Kalanta, S., 1995. The equilibrium finite element in computation of elastic structures, *Statyba* 1(1), pp. 25-47 (in Russian).
- [5] Kalanta, S., 1996. The problems of limit load analysis and optimization using equilibrium finite elements, *Statyba* 3(7), pp. 6-22 (in Russian).
- [6] Kalanta, S., Atkočiūnas, J., Ulitinas, T., 2012. The discrete model and the analysis of a spherical shell by finite equilibrium elements, *Mechanika* 18(3), pp. 266-272.
- [7] Karkauskas, R.; Krutinis, A.; Atkočiūnas, J.; Kalanta, S.; Nagevičius, J. "Computer-aided solution of structural mechanics problem". Vilnius: Science and Encyclopaedia Publisher, p. 264.
- [8] Hinton, E., Sienz, J., Ozakca, M. 2003. *Analysis and Optimization of Prismatic and Axisymmetric Shell Structures*. Publisher: Springer. 496 p.
- [9] Venskus, A., Kalanta S., Atkočiūnas J., Ulitinas T. 2010. Integrated load optimization of elastic-plastic axisymmetric plates at shakedown, *Journal of Civil Engineering and Management* 16, pp. 203-208.
- [10] Atkočiūnas, J., 2011. *Optimal Shakedown Design of Elastic-Plastic Structures*. Vilnius: Technika, p. 300. ISBN 978-609-457-062-9.
- [11] Chakrabarty, J., 2006. *Theory of plasticity*. Amsterdam: Elsevier, p. 877.
- [12] Čyras, A. 1983. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures*. Chichester: Ellis Horwood Lim. 121 p.
- [13] Perelmutter, A.V., Slivker, V.I. 2011. *Computational models of structures and the possibility of their analysis*. p. 736. ISBN: 978-5-940747-10-9 (in Russian).
- [14] Pham, D.C., 2003. Plastic collapse of a circular plate under cycling load, *International Journal of Plasticity*. 19, pp. 547-559.

УДК 539.4

РОЗВИТОК МЕТОДОЛОГІЇ РОЗРАХУНКУ НА ОПІР РУЙНУВАННЮ ЕЛЕМЕНТОВ ОБЛАДНАННЯ АЕС

В.В. Харченко¹

член-кор. НАН України,

О.Ю. Чирков¹

д-р. техн. наук,

С.В. Кобельський¹

канд. техн. наук,

В.І. Кравченко¹

канд. техн. наук

¹*Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Київ, Україна*

Розвинуто загальну методологію розрахункового аналізу на опір руйнуванню елементів обладнання петлі першого контуру реакторної установки ВВЕР, зокрема корпусів атомних реакторів та парогенераторів, при моделюванні експлуатаційних і аварійних режимів термосилового навантаження. Із використанням розроблених методів розрахунку і програмного забезпечення встановлено суттєвий вплив на розрахункову оцінку опору руйнуванню корпусу реактора ВВЕР-1000 таких чинників, як деформаційна історія термосилового навантаження, варіанти урахування залишкової технологічної спадковості, регулярність і щільність скінченно-елементної сітки в околі фронту постульованої тріщини. Показано, що при моделюванні термошоку поглиблені пружно-пластичні розрахунки на стадії розвантаження металу в околі фронту тріщини можуть дозволити обґрунтувати додаткові резерви міцності та ресурсу корпусу реактора, а неврахування історії пружно-пластичного деформування і залишкових напружень після термообробки призводить до неконсервативної оцінки опору руйнуванню вузла приварки колектора теплоносія до корпусу парогенератора ПГВ-1000 при моделюванні циклу експлуатаційного навантаження.

Ключові слова: опір руйнуванню, корпус реактора, парогенератор, метод скінченних елементів, пружно-пластичне деформування.

В теперішній час широкого поширення набула атомна енергетика. Її ефективність, надійність і безпека функціонування обумовлені застосуванням високих наукомістких технологій, що вимагають значного обсягу фундаментальних і прикладних досліджень. Для забезпечення безпечної експлуатації енергоблоків АЕС, обґрунтування продовження строків їх служби необхідна висококваліфікована науково-технічна підтримка. Велику увагу зокрема приділяють вирішенню завдань конструкційної міцності та оцінки ресурсу обладнання АЕС.

До основних напрямів досліджень з проблем забезпечення міцності і ресурсу елементів обладнання АЕС належать: критерії граничного стану і визначення деградації властивостей металу в процесі експлуатації, розрахунок кінетики напружено-деформованого стану (НДС), вплив залишкової технологічної напруженості і дефектності, сучасні підходи до оцінки

опору металу руйнуванню і впровадження їх у практику розрахунків, продовження термінів експлуатації.

Забезпечення цілісності корпусу реактора при всіх можливих режимах навантаження, враховуючи аварійні ситуації, є однією з основних умов безпечної експлуатації енергоблоків АЕС та продовження їх ресурсу. Корпус атомного реактора є найбільш відповідальним елементом реакторної установки і термін його безпечної експлуатації практично визначає термін експлуатації енергоблоку АЕС. Для режимів роботи реакторів, спричинених аварійними ситуаціями, за основний критерій міцності і цілісності корпусу приймають його здатність опиратися крихкому руйнуванню. Вирішення питань обґрунтування безпечної експлуатації, оцінки цілісності корпусу реактора та продовження його ресурсу суттєво залежить від достовірності результатів розрахункового моделювання кінетики НДС та визначення розрахункових параметрів механіки руйнування металу корпусу реактора. Зокрема, до найбільш важливих особливостей розрахункового аналізу на опір руйнуванню потрібно віднести коректне моделювання нелінійних ефектів поведінки металу – врахування залишкових технологічних напружень і деформацій, історії термосилового навантаження і пружно-пластичного деформування металу в околі фронту постульованої тріщини.

Застосування аналітичних методів до розв'язання нелінійних задач термомеханіки для тіл складної конструкційної форми, що перебувають у нестационарному і неоднорідному температурному полі, виявляється в більшості випадків неприйнятним, тому що з їх допомогою важко отримати достовірні результати. Тільки з використанням чисельних методів моделювання НДС вдається суттєво наблизити розрахункові схеми і умови навантаження, до реальних, що значно підвищує ступінь достовірності отриманих результатів.

В теперішній час найбільш поширеним чисельним методом розв'язання прикладних задач термомеханіки є метод скінченних елементів (МСЕ). При застосуванні МСЕ потрібно враховувати, що для достовірного, адекватного фізичним процесам моделювання, необхідно забезпечити точність і збіжність скінченно-елементного розв'язку задачі, що залежить також від регулярності та щільності використовуваної сітки скінченних елементів. При розв'язанні задачі у пружно-пластичній постановці для визначення стійких розрахункових значень локальних параметрів руйнування, особливо на стадії розвантаження металу, потрібно забезпечити досить дрібне скінченно-елементне розбиття в околі фронту тріщини. Досвід розв'язання практичних задач свідчить про те, що для моделювання аварійних режимів навантаження корпусу реактора у скінченно-

елементних розрахунках потрібно застосовувати величини кроку сітки в околі фронту тріщини на рівні десятків мікрон і менше.

Однією з важливих особливостей пружно-пластичного розв'язку, що виявляються при цьому, є наявність різкого зниження, так званої «спадної гілки», розрахункових значень коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) в кінці процесу його зміни від температури під час термошоку корпусу реактора. Дана обставина обумовлена виникненням локальної зони стискаючих напружень під час розвантаження металу перед фронтом тріщини. Перші такі результати пружно-пластичного аналізу було отримано в Інституті проблем міцності (ІПМіц) ім. Г.С.Писаренка НАН України. Розрахункові значення КІН визначали за методикою, що базується на концепції G -інтегралу «закриття тріщини», а також J -інтегралу Черепанова-Райса. Було встановлено, що використання в розрахункових моделях корпусу реактора з постульованою тріщиною недостатньо дрібного скінченно-елементного розбиття біля вершини тріщини не дозволяє виявити локальні зони розвантаження, що спотворює залежність КІН від температури, отриману на досить густих сітках, коли має місце збіжність чисельних результатів розрахунку. Необхідно зазначити, що наявність наприкінці режиму охолодження корпусу реактора такої спадаючої гілки – досить важливий фактор під час оцінки його ресурсу, оскільки дозволяє виявити додаткові резерви міцності для обґрунтування термінів продовження експлуатації.

Важливим фактором для розрахунку кінетики НДС та оцінки опору руйнуванню корпусу реактора є врахування історії навантаження, зокрема, технологічної спадковості. Поля залишкових напружень і деформацій у зоні стикових зварювальних з'єднань, антикорозійного наплавлення і основного металу корпусу реактора формуються і перерозподіляються в результаті виконання технологічних операцій зварювання, термічної обробки, нанесення захисного шару металу наплавленням на внутрішню поверхню корпусу, високого відпуску і гідравлічних випробувань на заводі-виробнику. В сучасній практиці розрахунків на опір руйнуванню корпусів реакторів застосовують різні підходи до оцінки та врахування залишкових напружень і деформацій у зонах наплавлення і зварювальних з'єднань корпусу. Результати розрахункового аналізу залежать від адекватного врахування полів залишкових напружень і деформацій, які можуть помітно впливати на розрахункову оцінку опору руйнуванню.

Розрахунковий аналіз процесів формування та перерозподілу напружень в конструкції з залученням уточнених розрахункових моделей набуває також особливої актуальності у зв'язку з періодичним виявленням тріщин у вузлах приварки колектора до корпусу парогенератора ПГВ-1000М у зоні зварного шва № 111.

У більшості публікацій, присвячених розрахунковому обґрунтуванню міцності конструкцій АЕС, розрахунки НДС вузла приварки «гарячого» колектора до корпусу парогенератора ПГВ-1000М виконано в лінійно-пружній постановці. Вперше в розрахунковій практиці результати аналізу тривимірного НДС вузла приварки були отримані в ІПМіц НАН України. Моделювання експлуатаційних режимів навантаження із застосуванням тривимірних моделей таких вузлів, що враховують вплив елементів приєднаного обладнання петлі першого контуру реакторної установки, а надалі з урахуванням історії пружно-пластичного деформування і нетривіального впливу технологічних операцій при виготовленні та ремонті, зокрема термообробці, дозволило виявити високий рівень розтягуючих напружень у вузлі в місці появи пошкоджень. Однак, кінетику формування і перерозподілу полів напружень у вузлі приварки гарячого колектора до корпусу парогенератора ПГВ-1000М не вивчено в повній мірі, що визнає актуальність досліджень у цьому напрямку.

Отже, розрахунок елементів конструкцій АЕС на опір руйнуванню повинен передбачати розв'язання крайових задач неізотермічної термопластичності і задач механіки руйнування при моделюванні нестационарних режимів термосилового навантаження. Під час виконання розрахункового аналізу потрібно враховувати спільний вплив таких чинників, як історія термосилового навантаження, неоднорідність нагрівання та охолодження, пластичне деформування, процеси повзучості і релаксації, залишкові напруження і деформації, неоднорідність фізико-механічних властивостей металу і їх залежність від температури, зміна опору металу руйнуванню внаслідок експлуатаційних впливів і деградації початкових властивостей металу. Тому пружно-пластичне моделювання кінетики НДС та аналіз деформованих конструкцій АЕС на опір металу руйнуванню належать до числа найбільш складних задач математичної фізики, проблем механіки матеріалів і конструкцій.

Оскільки розв'язання нестационарних і нелінійних крайових задач термомеханіки і задач механіки руйнування досить складна чисельна процедура, практична реалізація якої може призводити до неприйнятних обчислювальних витрат, розрахунок на опір руйнуванню з урахуванням всіх перерахованих факторів для повного спектру розрахункових варіантів навантаження досліджуваних конструкцій АЕС не є можливим.

Більш того, відомі комерційні програмні засоби, в основу розрахункового аналізу яких покладено МСЕ, у ряді випадків виявляються недостатньо точними і ефективними у разі розв'язання таких складних специфічних прикладних задач механіки пружно-пластичного руйнування, тому що велика розмірність дискретної задачі і суттєва нелінійність властивостей

металу в околі фронту розрахункової тріщини можуть призвести до втрати стійкості або порушення збіжності обчислювальних процесів.

Через це необхідно розробити більш досконалий апарат проведення розрахункових досліджень, що передбачає нові підходи та алгоритми розв'язання крайових задач неізотермічної термопластичності і задач механіки руйнування, а також побудову адекватних розрахункових схем і моделей, застосування сучасних концепцій механіки руйнування для оцінки цілісності корпусних конструкцій АЕС, зокрема корпусів реакторів та парогенераторів.

За останні роки в ІПМіц НАН України удосконалено загальну методологію розрахунку на опір руйнуванню корпусів реакторів ВВЕР і парогенераторів при моделюванні експлуатаційних та аварійних режимів навантаження. Сформульовано основні положення пружно-пластичного розрахунку кінетики НДС з урахуванням деформаційної історії термосилового навантаження, полів залишкових технологічних напружень і деформацій, а також реалізовано методику визначення параметрів руйнування в розрахункових точках фронту постульованих тріщин на основі енергетичних підходів обчислення параметрів руйнування в дискретних моделях МСЕ. Із застосуванням розроблених методів розрахунку і програмного забезпечення показано суттєвий вплив на розрахункову оцінку опору руйнуванню корпусів реакторів ВВЕР-1000 таких факторів, як історія термосилового навантаження і пружно-пластичне деформування металу в околі фронту постульованої тріщини, регулярність і щільність скінченно-елементної сітки в околі фронту розрахункової тріщини, залишкова технологічна напруженість.

Показано, що уточнений пружно-пластичний розрахунок на стадії розвантаження металу перед фронтом тріщини при термошочі може дозволити обґрунтувати додаткові резерви міцності та ресурсу корпусу реактора, а неврахування історії навантаження і залишкової напруженості після термообробки призводить до неконсервативної оцінки опору руйнуванню вузла приварки колектора до корпусу парогенератора ПГВ-1000М під час моделювання експлуатаційного циклу навантаження.

Далі розглянуто деякі характерні особливості пружно-пластичного аналізу кінетики НДС на прикладі розрахунків з визначення температурної залежності КІН для металу зварного шва №4 корпусу реактора ВВЕР-1000 та оцінки КІН для поверхневої тріщини, розташованої в найбільш проблемному місці конструкції вузла приварки «гарячого» колектора до корпусу парогенератора ПГВ-1000М.

Аналіз впливу щільності скінченно-елементних сіток в околі вершини постульованої тріщини проведено для характерного режиму охолодження корпусу реактора ВВЕР-1000. На рис. 1 наведено результати пруж-

но-пластичних розрахунків у тривимірній постановці з вбудованою у скінченно-елементну модель розрахунковою тріщиною з урахуванням полів післязварювальних напружень і деформацій. Постулювали піднаплавну окружну напівеліптичну тріщину з відношенням півосей 0,3 і глибиною 15 мм, розташовану в металі зварного шва №4. За результатами розрахунків отримано температурну залежність КІН для найбільш глибокої точки фронту тріщини при варіюванні кроків сітки в околі її вершини. У площині, перпендикулярній фронту тріщини, використовували рівномірну сітку з рівною кількістю розбиття у двох напрямках, кількість розбиття вздовж фронту тріщини задавали так, щоб для найбільш глибокої точки фронту тріщини співвідношення кроків сітки у площині і вздовж фронту не перевищувало трьох. Для проведення розрахункового аналізу використовували чотири варіанти кроків сітки: 275 × 290, 55 × 70, 11 × 24 і 2 × 5 мкм.

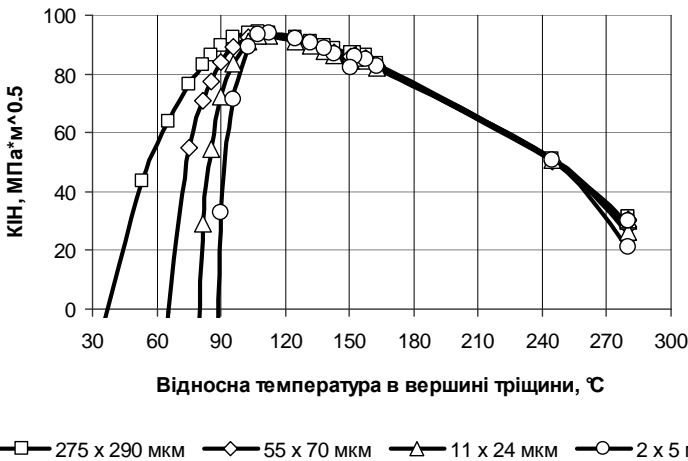


Рис. 1. Вплив щільності скінченно-елементного розбиття на розрахунок температурної залежності КІН для найбільш глибокої точки піднаплавної окружної напівеліптичної тріщини глибиною 15 мм

З наведених графіків випливає, що найбільша розбіжність у результатах пружно-пластичного розрахунку спостерігається на спадній гілці температурної залежності КІН, що пов'язано з величиною кроку сітки при моделюванні розвантаження металу перед вершиною фронту тріщини наприкінці режиму охолодження. Використання рідких сіток не дозволяє виявити локальну зону розвантаження, що спотворює температурну залежність КІН, отриману на досить густих сітках. Зазначена обставина є досить суттєвим фактором, оскільки більш точне врахування розванта-

ження металу перед фронтом тріщини дозволяє виявити додаткові резерви міцності корпусу реактора і, отже, його ресурсу. Однак, для цього потрібно обґрунтувати адекватність застосовуваних розрахункових моделей фізичним процесам деформування і руйнування матеріалу у вершині тріщини.

Ще одним важливим фактором, що впливає на описання температурної залежності КІН на ділянках зі спадною гілкою, є врахування історії пружно-пластичного деформування металу корпусу реактора при термошоці. Дійсно, згідно з наведеними вище результатами, при виконанні розрахунку з досить густою скінченно-елементною сіткою врахування деформаційної історії навантаження дозволяє виявити локальну зону розвантаження металу перед фронтом тріщини і отримати спадну гілку для температурної залежності КІН наприкінці режиму охолодження корпусу реактора. Якщо ж розрахунок проводити без урахування історії пружно-пластичного деформування, наприклад, у лінійно-пружній постановці або з використанням деформаційної теорії пластичності, то отримана залежність КІН від температури вже не містить ділянку різкого зниження значень КІН наприкінці режиму охолодження, причому відсутність спадної гілки має місце не тільки при використанні рідких, але і досить густих сіток скінченних елементів в околі фронту тріщини.

На рис. 2 представлено дані розрахунків щодо впливу урахування історії пружно-пластичного деформування металу на визначення температурної залежності КІН при аварійному охолодженні корпусу реактора. Розглядали три варіанти розв'язання задачі: 1) пружно-пластичний розрахунок з урахуванням деформаційної історії навантаження на основі рівнянь теорії текучості; 2) пружно-пластичний розрахунок з використанням рівнянь деформаційної теорії пластичності; 3) лінійно-пружний розрахунок без урахування деформаційного зміцнення металу.

При пружно-пластичному моделюванні процесу охолодження корпусу реактора розрахунок напружень і деформацій для поточного етапу навантаження проводили з урахуванням полів залишкових напружень і деформацій, отриманих для попереднього етапу навантаження. Розрахунок на основі деформаційної теорії пластичності і розрахунок у лінійно-пружній постановці проводили без урахування деформаційної історії навантаження, тобто, кожний етап процесу навантаження розраховували за умови, що корпус реактора вільний від початкових напружень і деформацій.

Розрахунки проводили в тривимірному представленні для піднаплавної окружної напівеліптичної тріщини з відношенням півосей 0,3 і глибиною 15 мм, розташованої в металі зварного шва № 4 корпусу реактора ВВЕР-1000, при моделюванні характерного режиму охолодження. Для врахування залишкових напружень і деформацій після наплавлення і зварю-

вання використовували процедуру stress-free-temperature і метод додаткового осьового навантаження 100 МПа. У площині, перпендикулярній фронту тріщини, використовували рівномірну сітку з величиною кроку 5,5 мкм в околі найбільш глибокої точки фронту тріщини, вздовж фронту тріщини величину кроку сітки поблизу цієї точки приймали рівним 21 мкм.

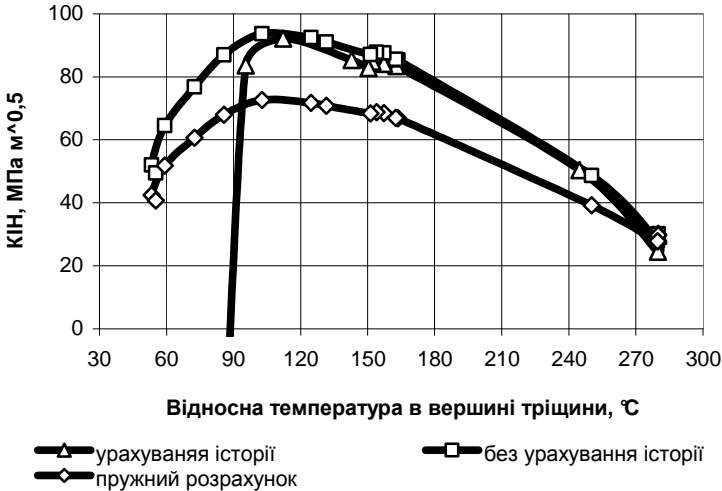


Рис. 2. Вплив історії навантаження на визначення температурної залежності КІН для найбільш глибокої точки піднаплавної окружної напівеліптичної тріщини глибиною 15 мм

Показані на рис. 3 графіки зміни КІН від температури, отримані на підставі проведених розрахунків, дозволяють зробити наступні основні висновки. Насамперед, за результатами пружного розрахунку отримано занижені значення КІН порівняно з пружно-пластичним моделюванням історії навантаження, тобто, використання підходів лінійної механіки руйнування призводить до неконсервативної оцінки опору руйнуванню металу корпусу реактора та завищеної оцінки допустимих навантажень. У разі пружно-пластичного розрахунку максимальні значення КІН приблизно на 26 ... 28% більші, ніж за пружного розрахунку. Крім того, застосування деформаційної теорії пластичності до аналізу опору руйнуванню корпусу реактора при термошоді, а також розрахунок у лінійно-пружній постановці не дозволяють виявити локальну зону розвантажування металу перед фронтом тріщини і, отже, отримати спадну гілку наприкінці режиму аварійного охолодження корпусу реактора навіть при використанні досить густих скінченно-елементних сіток в околі фронту тріщини.

Отже, наявність спадної гілки на кінцевій ділянці зміни залежності КІН від температури обумовлено впливом на результати розрахунку двох основних чинників: щільністю скінченно-елементного розбиття в околі фронту постульованої тріщини і врахуванням історії пружно-пластичного деформування металу за моделювання умов аварійного охолодження корпусу реактора.

Важливим фактором для розрахунку кінетики НДС та оцінки опору руйнуванню корпусу реактора є врахування технологічної спадковості. Розрахунковий аналіз проводили для п'яти варіантів врахування полів залишкових технологічних напружень, що застосовуються у світовій практиці: 1) процедура «stress-free-temperature»; 2) нагрівання до температури високого відпуску і охолодження до нормальної температури; 3) процедура «stress-free-temperature» з додатковим навантаженням, коли у зварювальних з'єднаннях виникають розтягувальні напруження 100 МПа; 4) нагрівання до температури високого відпуску, охолодження до нормальної температури з додатковими розтягуючими напруженнями 100 МПа; 5) пружно-пластичний розрахунок з урахуванням повного циклу формування та перерозподілу полів залишкових напружень і деформацій.

Результати пружно-пластичних розрахунків отримано для піднаплавної кільцевої тріщини глибиною 15 мм, розташованої в металі зварного шва № 4 корпусу реактора ВВЕР-1000 при моделюванні характерного режиму аварійного охолодження. Величина кроку рівномірної сітки в околі вершини тріщини дорівнювала 0,1 мкм.

Згідно з отриманими результатами розрахунку врахування залишкових напружень за варіантами 1) і 2) призводить до розбіжності результатів обчислення КІН менше 1%. Однак, отримані таким чином значення КІН суттєво неконсервативні порівняно з одержаними за іншими варіантами врахування залишкових напружень, оскільки, по суті, враховано тільки залишкові напруження, що виникають після нанесення антикорозійного наплавлення на внутрішню поверхню корпусу реактора, і не враховано залишкові напруження у зварних швах.

Одним з можливих способів врахування залишкових напружень після зварювання є метод додаткового навантаження, при використанні якого в циліндричних обичайках корпусу реактора виникають додаткові осьові розтягуючі напруження 100 МПа. Ця величина пов'язана з рівнем залишкових напружень після зварювання за певного поєднання технологічних параметрів.

Розрахунки з використанням методу додаткового навантаження призводять до більш високих значень КІН при термошоці. При цьому результати розрахунків КІН для 3) і 4) варіантів помітно відрізняються тільки на

початковому етапі охолодження і практично збігаються на ділянках з максимальними значеннями КІН.

Пружно-пластичний розрахунок з урахуванням повного циклу формування та перерозподілу полів залишкових напружень при моделюванні технологічних операцій зварювання та нанесення антикорозійного наплавлення призводить до менш консервативних оцінок допустимої критичної температури крихкості порівняно з варіантами 3) і 4), в яких враховано додаткове навантаження. У той же час, ці оцінки є більш консервативними порівняно з оцінками за варіантами розрахунку 1) і 2), в яких не враховують залишкові напруження в зоні зварного шва.

Для оцінки впливу врахування історії термосилового навантаження на опір руйнуванню вузла приварки «гарячого» колектора до корпусу парогенератора ПГВ-1000М моделювали наступний експлуатаційний цикл навантаження: гідравлічні випробування (ГВ), повне розвантаження після ГВ, нормальні умови експлуатації (НУЕ). За початковий стан приймали поля залишкових напружень і деформацій, отриманих внаслідок розрахункового моделювання операцій зварювання і термообробки. Розрахунок НДС проводили у пружно-пластичній постановці з урахуванням і без урахування історії термосилового навантаження. Розрахунок без урахування історії навантаження здійснювали для режиму НУЕ шляхом одноразового навантаження парогенератора при вільному від напружень початковому стані.

Для виконання розрахунків створено тривимірну скінченно-елементну модель петлі першого контуру, що містить парогенератор, головний циркуляційний трубопровід і корпус реактора. Постулювали поверхневу окружну напівеліптичну тріщину глибиною 18 мм і відношенням напівосей 1/3, що розташована в зоні максимальної напруженості галтелі вузла приварки. Розв'язок задачі отримано із застосуванням процедури фрагментації. Розподіли розрахункових значень КІН вздовж фронту поверхневої колової тріщини показано рис. 3.

Відповідно до отриманих результатів, історія навантаження та залишкова технологічна спадковість суттєво впливають на визначення розрахункових розподілів КІН вздовж фронту постульованої тріщини. Аналіз результатів розрахунків свідчить, що неврахування історії навантаження і залишкової напруженості після термообробки призводить до зниження розрахункових значень КІН (до 34%) для режиму НУЕ і, отже, до неконсервативної оцінки опору руйнуванню вузла приварки при моделюванні експлуатаційного циклу навантаження.



Рис. 3. Вплив історії навантаження на визначення КІН вздовж фронту для поверхневої колової тріщини у вузлі приварки для режиму нормальних умов експлуатації

Результати прикладних досліджень із застосуванням розроблених методів розрахунку відображені в публікаціях [1-16]. Для оцінки міцності і ресурсу корпусів реакторів ВВЕР у процесі експлуатації розроблено галузевий нормативний документ [17]. Створений спеціалізований програмний комплекс SPACE-RELAX пройшов всебічне тестування і дозволений до застосування в атомній галузі України відповідним розпорядженням експлуатувальної організації – НАЕК «Енергоатом».

Проведені дослідження показали ефективність запропонованих підходів і можливість застосування розроблених методів розрахунку і програмного забезпечення для розв'язання широкого спектру наукових і прикладних задач щодо обґрунтування міцності елементів обладнання АЕС. Розроблені методи розрахункового аналізу були використані під час виконання великих регіональних міжнародних проектів ТАРЕГ з оцінки радіаційного окрихнення та цілісності корпусів реакторів АЕС з ВВЕР, отримувачем результатів (беніфіціаром) яких був НАЕК «Енергоатом» України; міжнародних договорів між ІПМіц НАН України та головним конструктором реакторних установок АЕС з ВВЕР - ДКБ «Гидропресс» з аналізу НДС вузлів приварки колекторів до корпусу парогенератора ПГВ-1000 у процесі експлуатації з урахуванням залишкової технологічної спадковості після термообробки; державної експертизи результатів робіт з розрахункового обґрунтування міцності і опору руйнуванню корпусів реакторів ВВЕР-1000 згідно договорів з ДНТЦ ЯРБ Державної інспекції ядерного регулювання України, за результатами яких приймалось рішення

ня про продовження термінів експлуатації енергоблоку №1 Хмельницької, енергоблоку №1 Південно-Української, енергоблоків №1 і №2 Запорізької та енергоблоку №3 Рівненської АЕС.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Харченко В.В., Пиминов В.А., Чирков А.Ю. и др. Упругопластический расчёт на сопротивление разрушению элементов оборудования 1-го контура АЭС // Пробл. прочности. – 2013. – № 4 – С. 14 – 26.
2. Харченко В.В., Чирков А.Ю. Современные подходы к оценке сопротивления разрушению элементов ответственного оборудования АЭС с ВВЭР // Физико-технические проблемы современного материаловедения.– в 2-х т. – К.: Академперіодика. – 2013. – т. 1. – С. 425 – 439.
3. Чирков А.Ю., Харченко В.В., Кобельский С.В. и др. Напряжённое состояние узла приварки коллектора теплоносителя к корпусу парогенератора ПГВ-1000М при воздействии эксплуатационных нагрузок с учётом остаточных технологических напряжений // Пробл. прочности. – 2013. – № 4 – С. 98 – 106.
4. Харченко В.В., Чирков А.Ю., Кобельский С.В. и др. Развитие методики упругопластического расчёта на сопротивление разрушению элементов конструкций АЭС // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – Київ: Ін-т електрозварювання ім. Є.О.Патона НАН України. – 2012. – С. 205 – 210.
5. Харченко В.В., Чирков А.Ю., Кобельский С.В. и др. Особенности расчётной оценки сопротивления хрупкому разрушению корпусов атомных реакторов при термошоке // Прочность материалов и элементов конструкций. – Киев: Ин-т проблем прочности им. Г.С.Писаренко НАН Украины, 2011. – С. 436 – 447.
6. Харченко В.В., Чирков А.Ю., Кобельский С.В. и др. Влияние истории термомеханического нагружения на напряжённость корпусов реакторов ВВЭР АЭС при термошоке // Пробл. прочности. – 2010. – № 1 – С. 27 – 36.
7. Харченко В.В., Степанов Г.В., Чирков А.Ю. и др. Исследование напряжённости корпусов реакторов и парогенераторов АЭС с учётом дефектности и истории термомеханического нагружения // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – Київ: Ін-т електрозварювання ім. Є.О.Патона НАН України. – 2009. – С. 177 – 180.
8. Харченко В.В., Степанов Г.В., Кравченко В.И. и др. Перераспределение напряжений в узле соединения коллектора с патрубком парогенератора ПГВ-1000 при его нагружении после термообработки // Пробл. прочности. – 2009. – № 3. – С. 25 – 31.
9. Харченко В.В., Кобельский С.В., Кравченко В.И. и др. Определение коэффициента интенсивности напряжений для поверхностных полуэллиптических трещин в корпусе реактора ВВЭР-1000 по результатам решения краевых задач термоупругости на основе смешанной схемы МКЭ // Пробл. прочности. – 2007. – № 2. – С. 45 – 51.
10. Степанов Г.В., Харченко В.В., Бабуцкий А.И. и др. Напряженно-деформированное состояние узла приварки коллектора к патрубку корпуса парогенератора при локальной термообработке // Пробл. прочности. – 2006. – № 6. – С. 43 – 50.
11. Харченко В.В., Кобельский С.В., Кравченко В.И. и др. Определение коэффициентов интенсивности напряжений в корпусе реактора ВВЭР-1000 с полуэллиптической трещиной при термошоке с использованием численных и инженерных методов расчёта // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – Київ: Ін-т електрозварювання ім. Є.О.Патона НАН України. – 2006. – С. 177 – 180.

12. Харченко В.В., Степанов Г.В., Романов С.В. и др. Некоторые актуальные вопросы оценки прочности и ресурса элементов ответственного оборудования АЭС при термосиловом нагружении // Пробл. прочности. – 2004. – № 1. – С. 140 – 146.
13. Степанов Г.В., Харченко В.В., Бабуцкий А.И. и др. Оценка напряженно-деформированного состояния узла сварного соединения «горячего» коллектора с патрубком парогенератора ПГВ-1000 АЭС // Пробл. прочности. – 2003. – № 5. – С. 142 – 153.
14. Харченко В.В. Моделирование процессов высокоскоростного деформирования материалов с учётом вязкопластических эффектов. – Киев: ЛОГОС, 1999. – 280 с.
15. Степанов Г.В., Харченко В.В. Остаточное напряженно-деформированное состояние узла коллектора парогенератора при запрессовке теплообменных трубок // Пробл. прочности. – 1998. – №2. – С. 66 – 86.
16. Степанов Г.В., Харченко В.В., Шатько А.А. и др. Влияние на остаточную напряженность условий запрессовки теплообменных трубок в коллектор парогенератора // Проблемы материаловедения при изготовлении и эксплуатации оборудования АЭС. – Тр. Третьей межд. конф., Санкт-Петербург, 1994. – С. 593 – 604.
17. МТ-Д.0.03.391-06. Методика оценки прочности и ресурса корпусов реакторов ВВЭР в процессе эксплуатации / Харченко В.В., Степанов Г.В. и др. – Киев, 2009. – 50 с.

REFERENCES

1. Kharchenko V.V., Piminov V.A., Chirkov A.Y. i dr. Uprugoplasticheskiy raschyot na soprotivleniye razrusheniyu elementov oborudovaniya 1-go kontura AES (Elastoplastic fracture resistance analysis of NPP primary circuit equipment elements) // Probl. prochnosti. – 2013. – № 4 – С. 14 – 26.
2. Kharchenko V.V., Chirkov A.Y. Sovremennyye podhody k otsenke soprotivleniya razrusheniyu elementov otvetstvennogo oborudovaniya AES s VVER (Modern approaches to the assessment of fracture strength of heavy-duty equipment elements of NPP with WWER) // Fiziko-tehnicheskie problemyi sovremennogo materialovedeniya.– v 2-h t. – K.: Akadempriodika. – 2013. – t. 1. – С. 425 – 439.
3. Chirkov A.Y., Kharchenko V.V., Kobel'skii S.V. i dr. Napryazhyonnoe sostoyaniye uzla privarki kolektora teplonositel'ya k korpusu parogeneratora PGV-1000M pri vozddeystvii ekspluatatsionnykh nagruzok s uchyotom ostatochnykh tehnologicheskikh napryazheniy (Stress-strain state of the coolant collector-to-nozzle welded joint in the PGV-1000M steam generator under the operating loads with consideration of residual manufacturing stresses) // Probl. prochnosti. – 2013. – № 4 – С. 98 – 106.
4. Kharchenko V.V., Chirkov A.Y., Kobel'skii S.V. i dr. Razvitiye metodiki uprugoplasticheskogo rascheta na soprotivleniye razrusheniyu elementov konstruktсий AES (Development of the procedure of elastoplastic calculation on the fracture strength of NPP structural elements) // Problemi resursu i bezpeki ekspluatatsiyi konstruktсий, sporud ta mashin. – Kiyiv: In-t elektrozvayuvannya im. E.O.Patona NAN Ukraini. – 2012. – S. 205 – 210.
5. Kharchenko V.V., Chirkov A.Y., Kobel'skii S.V. i dr. Osobennosti raschetnoy otsenki soprotivleniya hrupkomu razrusheniyu korpusov atomnykh reaktorov pri termoshoke (Features of calculated assessment of brittle fracture resistance of nuclear reactor pressure vessels under thermal shock) // Prochnost materialov i elementov konstruktсий . – Kiev: In-t problem prochnosti im. G.S.Pisarenko NAN Ukrainyi, 2011. – S. 436 – 447.
6. Kharchenko V.V., Chirkov A.Y., Kobel'skii S.V. i dr. Vliyaniye istorii termomechanicheskogo nagruzheniya na napryazhyonnost korpusov reaktorov VVER AES pri termoshoke (Influence of history of thermomechanical loading on the stress level in NPP WWER RPVs under thermal shock) // Probl. prochnosti. – 2010. – № 1 – С. 27 – 36.
7. Kharchenko V.V., Stepanov G.V., Chirkov A.Y. i dr. Issledovaniye napryazhyonnosti korpusov reaktorov i parogeneratorov AES s uchyotom defektnosti i istorii termomechanicheskogo

- nagruzheniya (Investigation of stress level of NPP RPV and steam generators with consideration of presence of defects and history of thermomechanical loading) // Problemi resursu I bezpeki ekspluatatsiyi konstruksiy, sporud ta mashin. – Kiyiv: In-t elektrozvaryuvannya im. E.O.Patona NAN Ukraini. – 2009. – S. 177 – 180.
8. *Kharchenko V.V., Stepanov G.V., Kravchenko V.I. i dr.* Pereraspredelenie napryazheniy v uzle soedineniya kollektora s patrubkom parogeneratora PGV-1000 pri ego nagruzhenii posle termooobrabotki (Redistribution of stresses in the header-PGV-1000 steam generator connector weldment under loading after thermal treatment) // Probl. prochnosti. – 2009. – № 3. – S. 25 – 31.
 9. *Kharchenko V.V., Kobel'skii S.V., Kravchenko V.I. i dr.* Opredelenie koeffitsienta intensivnosti napryazheniy dlya poverhnostnykh poluellipticheskikh treschin v korpuse reaktora VVER-1000 po rezul'tatam resheniya kraevykh zadach termouprugosti na osnove smeshannoy shemyi MKE (Determination of stress intensity factors for semielliptical surface cracks in the WWER-1000 reactor pressure vessel from the results of solving thermoelasticity boundary value problems based on the mixed mesh-projection scheme of the finite element method) // Probl. prochnosti. – 2007. – № 2. – S. 45 – 51.
 10. *Stepanov G.V., Kharchenko V.V., Babutsky A.I. i dr.* Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie uzla privarki kollektora k patrubku korpusa parogeneratora pri lokalnoy termooobrabotke (Stress-strain state of the header-steam generator connector weldment induced by local thermal treatment) // Probl. prochnosti. – 2006. – № 6. – S. 43 – 50.
 11. *Kharchenko V.V., Kobel'skii S.V., Kravchenko V.I. i dr.* Opredelenie koeffitsientov intensivnosti napryazheniy v korpuse reaktora VVER-1000 s poluellipticheskoy treschinoy pri termoshoke s ispolzovaniem chislennykh i inzhenernykh metodov raschyota (Determination of stress-intensity factors in WWER-1000 RPV with a semielliptic crack under thermal shock using numerical and engineering calculation procedures) // Problemi resursu i bezpeki ekspluatatsiyi konstruksiy, sporud ta mashin. – Kiyiv: In-t elektrozvaryuvannya im. E.O.Patona NAN Ukraini. – 2006. – S. 177 – 180.
 12. *Kharchenko V.V., Stepanov G.V., Romanovs S.V. i dr.* Nekotorye aktualnyie voprosyi otsenki prochnosti i resursa elementov otvetstvennogo oborudovaniya AES pri termosilovom nagruzhenii (Some topical issues of strength and life assessment for elements of heavy-duty NPP equipment under thermomechanical loading) // Probl. prochnosti. – 2004. – № 1. – S. 140 – 146.
 13. *Stepanov G.V., Kharchenko V.V., Babutsky A.I. i dr.* Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uzla svarnogo soedineniya «goryachego» kollektora s patrubkom parogeneratora PGV-1000 AES (Stress-strain state evaluation of a welded joint of hot collector to nozzle of NPP steam generator PGV-1000) // Probl. prochnosti. – 2003. – № 5. – S. 142 – 153.
 14. *Kharchenko V.V.* Modelirovanie protsessov vyisokoskorostnogo deformirovaniya materialov s uchyotom vyazkoplasticheskikh effektov (Simulation of high-speed deformation of materials with consideration of viscoplastic effects). – Kiev: LOGOS, 1999. – 280 s.
 15. *Stepanov G.V., Kharchenko V.V.* Ostatochnoe napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie uzla kollektora parogeneratora pri zapressovke teploobmennyykh trubok (Residual stress-strain state of the collector assembly of a steam generator in the process of press-fitting of heat-exchange pipes) // Probl. prochnosti. – 1998. – №2. – C. 66 – 86.
 16. *Stepanov G.V., Harchenko V.V., Shatko A.A. i dr.* Vliyanie na ostatochnuyu napryazhennost usloviy zapressovki teploobmennyykh trubok v kollektor parogeneratora (Influence of residual stress-strain state of conditions of press-fitting of heat-exchange pipes in steam generator collector) // Problemyi materialovedeniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii oborudovaniya AES. – Tr. Trety mezhd. konf., Sankt-Peterburg, 1994. – C. 593 – 604.
 17. MT-D.0.03.391-06. Metodika otsenki prochnosti i resursa korpusov reaktorov VVER v protsesse ekspluatatsii (*Procedure for Strength and Lifetime Assessment for WWER Reactor Pressure Vessels in Operation*) / Harchenko V.V., Stepanov G.V. i dr. – Kiev, 2009. – 50 s.

УДК 539.4

Харченко В.В., Чирков О.Ю., Кобельський С.В., Кравченко В.І. **Розвиток методології розрахунку на опір руйнуванню елементів обладнання АЕС** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 94. – С. 59–74.

Розвинуто загальну методологію розрахункового аналізу на опір руйнуванню елементів обладнання петлі першого контуру реакторної установки ВВЕР, зокрема корпусів атомних реакторів та парогенераторів, у разі моделювання експлуатаційних і аварійних режимів термосилового навантаження.

Ключові слова: опір руйнуванню, корпус реактора, парогенератор, метод скінчених елементів, пружно-пластичне деформування.

Лл. 3. Бібліогр. 17 назв.

Харченко В.В., Чирков А.Ю., Кобельський С.В., Кравченко В.І. **Развитие методологии расчёта на сопротивление разрушению элементов оборудования АЭС** // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вып. 94. – С. 59–74.

Развита общая методология расчетного анализа на сопротивление разрушению элементов оборудования петли первого контура реакторной установки ВВЭР, в частности корпусов атомных реакторов и парогенераторов, при моделировании эксплуатационных и аварийных режимов термосилового нагружения.

Ключевые слова: сопротивление разрушению, корпус реактора, парогенератор, метод конечных элементов, упруго-пластическое деформирование.

Kharchenko V.V., Chirkov A.Y., Kobel'skii S.V., Kravchenko V.I. **Development of methodology for calculation of fracture resistance elements of NPP equipment** // Strength of materials and the theory of structures. – 2015. – Issue. 94. – P. 59–74.

Developed a common methodology for the analysis of the design elements of the fracture resistance of the equipment of the first circuit loop VVER reactor installation, in particular buildings of nuclear reactors and steam generators, in the simulation of operating and emergency modes thermal and power loading.

Keywords: fracture resistance, reactor, steam generator, finite element method, elastic-plastic deformation.

Харченко В.В.: член-кор. НАН України, директор Інституту проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Київ, Україна

ХАРЧЕНКО Валерій Володимирович

Адреса робоча: 01014 Україна, м. Київ, вул. Тимірязєвська 2, Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Харченку Валерію Володимировичу

Адреса домашня:

Роб. тел.: +38 (044) 285- 16- 87, +38 (044) 285- 92- 25

мобільний тел.: +38 (050) 469-55-13

дом. тел.:

E-mail: khar@ipp.kiev.ua

Чирков О.Ю.: д-р. техн. наук, ст. наук. співр., провідн. наук. співр.

ЧИРКОВ Олександр Юрійович

Адреса робоча: 01014 Україна, м. Київ, вул. Тимірязєвська 2, Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Чиркову Олександру Юрійовичу

Адреса домашня:

Роб. тел.: +38 (044) 286- 48- 57

мобільний тел.: +38 (093) 718-17-39

дом. тел.:

E-mail:

Кобельський С.В., канд. техн. наук, ст. наук. співр., ст. наук. співр.

КОБЕЛЬСКИЙ Сергій Володимирович

Адреса робоча: 01014 Україна, м. Київ, вул. Тимірязєвська 2, Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Кобельському Сергію Володимировичу

Адреса домашня:

Роб. тел.: +38 (044) 286- 48- 57

мобільний тел.: +38 (066) 746-36-04

дом. тел.:

E-mail: harry-ksv@ukr.net

Кравченко В.І., канд. техн. наук, ст. наук. співр., ст. наук. співр.

КРАВЧЕНКО Віктор Іванович

Адреса робоча: 01014 Україна, м. Київ, вул. Тимірязєвська 2, Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Кравченку Віктору Івановичу

Адреса домашня:

Роб. тел.: +38 (044) 286- 48- 57

мобільний тел.: +38 (066) 967-29-60

дом. тел.:

E-mail: kvi@ipp.kiev.ua

УДК 539.3

ВПЛИВ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ НА ЕФЕКТИВНІСТЬ РОБОТИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ СЕНСОРІВ ТА АКТУАТОРІВ ПРИ АКТИВНОМУ ДЕМПФУВАННІ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ НЕПРУЖНИХ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

В.Г. Карнаухов¹
д-р. фіз.-мат. наук

В.І. Козлов¹
д-р. фіз.-мат. наук

Т.В. Карнаухова²
канд. фіз.-мат. наук

¹*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Несторова, 3, м. Київ 03457*

²*Національний технічний університет України "КПІ",
проспект Перемоги 37, м. Київ 03056*

Досліджується вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань трансверсально-ізотропних шарнірно опертих циліндричної панелі і прямокутної пластини. Для моделювання коливань тонкостінних елементів з сенсорами та актуаторами використовуються дві уточнені теорії типу С.П. Тимошенка. Методом Фур'є одержано аналітичний розв'язок задачі про резонансні коливання згаданих елементів. Наведено формули для різниць потенціалів, які необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Аналогічні формули одержано і для показників сенсора. Представлено також вирази для коефіцієнта демпфування резонансних коливань при сумісному використанні сенсорів та актуаторів. Ці прості формули дозволяють дати оцінку впливу деформацій зсуву на ефективність роботи сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань згаданих елементів конструкцій.

Ключові слова: пластини й оболонки, анізотропія, резонансні коливання, активне демпфування, сенсори та актуатори.

Вступ

Як конструктивні елементи, тонкі стрижні, пластини й оболонки з пасивних (без п'єзо ефекту) і п'єзоактивних непружних матеріалів широко використовуються в різних галузях сучасної техніки: авіа-, машино-, суднобудуванні, космічній і ракетній техніці, цивільному будівництві, гідроакустиці, медицині, електроніці й ін. [1, 4, 8, 24, 32, 38]. Одним з основних режимів роботи таких елементів є вимушені гармонічні коливання, зокрема, резонансні. З метою зменшення динамічних напружень тонкостінних елементів конструкцій розробляються різні методи демпфування вимушених резонансних коливань. Для цієї мети широко використовуються пасивні методи, коли в структуру елемента включаються компоне-

нти з високими гістерезисними втратами. З питань пасивного демпфування коливань тонкостінних елементів опубліковано велику кількість статей, монографій і видань енциклопедичного характеру [3, 5, 23, 24 – 26, 28, 32]. В останні роки для демпфування коливань тонкостінних елементів з пасивних металевих, полімерних чи композитних матеріалів почали застосовувати більш ефективні активні методи, коли в їх структуру включаються п'єзоелектричні компоненти. Огляд закордонних публікацій по активному керуванню стаціонарними й нестаціонарними коливаннями пластин та оболонок представлено в [30, 31, 36-39]. Результати вітчизняних авторів з цих питань висвітлено в [4, 6-9, 20-21, 29]. Основними елементами, за допомогою яких реалізується активний контроль коливань, є п'єзоелектричні сенсори та актуатори. Сенсори дають інформацію про механічний стан тіла, а з використанням актуаторів до конструкції прикладається електричне навантаження. Конструкції з пасивних матеріалів з п'єзоактивними сенсорами й актуаторами називають смарт – конструкціями, а активні матеріали – смарт – матеріалами (від англійського слова smart – розумний) [30, 36-39]. Ефективність активного демпфування коливань суттєво залежить від ефективності роботи сенсорів та актуаторів, на яку, в свою чергу, впливає багато факторів: їх геометричні й електромеханічні характеристики, механічні й електричні граничні умови, температура й ін.. Для оцінки ефективності роботи сенсорів й актуаторів використовуються такі критерії: при заданому навантаженні той актуатор більш ефективний, до якого потрібно підвести меншу різницю потенціалів для компенсації механічного навантаження; той сенсор більш ефективний, з якого знімається більша різниця потенціалів. Для моделювання механічної поведінки тонкостінних елементів використовуються різні гіпотези. Якщо вони виготовлені з анізотропного матеріалу і їх товщина недостатньо мала, використання класичних гіпотез Кірхгофа-Лява може привести до значних похибок при розрахунку параметрів п'єзоелектричних включень. В таких випадках виникає необхідність при дослідженні ефективності роботи сенсорів та актуаторів використовувати уточнені моделі. Для оцінки ефективності роботи сенсорів та актуаторів, як правило, застосовуються чисельні методи (наприклад, метод скінчених елементів). При цьому для вибору найбільш ефективного п'єзовключення потрібно перебрати багато варіантів параметрів таких включень [22]. При резонансних коливаннях можна одержати досить точні наближені вирази для оцінки ефективності роботи сенсорів та актуаторів. Такі формули для прямокутних пластин з шарнірним і жорстким зашпемленням торців з використанням гіпотез Кірхгофа – Лява одержано в [11-19].

В даній статті для шарнірно обпертих трасверсально-ізотропних непружних прямокутних пластин і циліндричних панелей з використанням уточнених гіпотез типу С.П.Тимошенка одержано формули для різниць потенціалів, які необхідно підвести до актуатора для компенсації заданого механічного навантаження. Аналогічні формули одержано для показників сенсора та для коефіцієнтів демпфування при сумісному використанні сенсорів та актуаторів. Ці прості формули дозволяють дати оцінку впливу деформацій зсуву на ефективність роботи сенсорів та актуаторів і на ефективність активного демпфування резонансних коливань за їх допомогою.

1. Постановка задачі. Розглянемо тришарову оболонку обертання з товщиною $H = h_1 + h_2 + h_3$, складену з трасверсально – ізотропних в'язкопружних п'єзоелектричних шарів з товщиною поляризацією. Оболонка віднесена до криволінійної ортогональної системи координат (s, θ, z) . Як базисну, вибираємо серединну поверхню внутрішнього шару оболонки. Приймається $\sigma_{zz} = 0$ і квадратичний закон зміни зсувних деформацій ε_{sz} і $\varepsilon_{\theta z}$ в межах кожного шару. При цьому зсувні напруження $\sigma_{zs}, \sigma_{\theta z}$ повинні задовольняти умовам контакту між шарами. Меридіан базисної поверхні описується рівнянням $r = r(x)$, де x відраховується вздовж вісі обертання. На п'єзоелектричних поверхнях $z = a_0, a_1, a_2, a_3$ (a_0, a_1 обмежують перший зовнішній шар; a_1, a_2 – середній шар, а a_2, a_3 – другий зовнішній шар оболонки) нанесено суцільні або дискретні електродні покриття, на яких задаються відповідні значення потенціалів $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$. Для моделювання електромеханічної поведінки матеріалів використовується концепція комплексних характеристик [9]. Спрощені визначальні рівняння одержуємо на основі вказаних вище уточнених механічних гіпотез, доповнених адекватними їм гіпотезами про розподіл по товщині електричних польових величин, коли вважається, що відмінними від нуля є компоненти вектора напруженності електричного поля E_z, E_s, E_θ і нормальна складова електричної індукції ($D_z \neq 0, D_s = 0, D_\theta = 0$). При цьому спрощені комплексні рівняння стану для k -го шару приймають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^k &= B_{11}^k \varepsilon_{ss}^k + B_{12}^k \varepsilon_{\theta\theta}^k - \gamma_{11}^k E_z^k, \\ \sigma_{\theta\theta}^k &= B_{12}^k \varepsilon_{ss}^k + B_{11}^k \varepsilon_{\theta\theta}^k - \gamma_{11}^k E_z^k, \\ \sigma_{s\theta}^k &= 2G_{12}^k \varepsilon_{s\theta}^k, \sigma_{sz}^k = 2G_{13}^k \varepsilon_{sz}^k, \sigma_{\theta z}^k = 2G_{23}^k \varepsilon_{\theta z}^k, \\ D_z^k &= \gamma_{33}^k E_z^k + \gamma_{11}^k (e_{ss}^k + e_{\theta\theta}^k), \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$B_{11}^k = \frac{1}{S_{11}^{Ek} 1 - (v^k)^2}; B_{12}^k = v^k B_{11}^k; v^k = -\frac{S_{12}^{Ek}}{S_{11}^{Ek}}; \gamma_{11}^k = d_{31}^1 (1 + v^k) B_{11}^k;$$

$$\gamma_{33}^k = e_{33}^k [1 - (k_p^2)^k]; (k_p^2)^k = 2(d_{31}^k)^2 / [S_{11}^{Ek} e_{33}^k (1 - v^k)]; G_{13}^k = G_{23}^k = \frac{e_{11}^k}{S_{55}^{Ek} e_{33}^k - (d_{15}^k)^2},$$
(2)

$s_{ij}^{Ek}, d_{ij}^k, e_{ij}^k$ - податливості, п'єзомодулі, діелектричні проникливості матеріалу k -го п'єзоелектричного шару [4, 6-8, 29]. Якщо середній шар ($k = 2$) пасивний, то $d_{31}^2 = 0$, $\gamma_{33}^2 = e_{33}^2$ (для пасивного діелектрика), $\gamma_{33}^2 = \infty$ (для металевого шару). В рівняннях стану (1) зсувні напруження апроксимуються квадратичними функціями по координаті z . Відповідно до теорії, представленій в [27], в кожному шарі вони можуть бути записані у вигляді:

$$\sigma_{sz}^k = \sigma_{s3}^k = G_{13}^k u_1(s, \theta) q^k(z), \sigma_{\theta z}^k = \sigma_{\theta 3}^k = G_{13}^k v_1(s, \theta) q^k(z).$$

$$(k = 1, 2, 3)$$
(3)

Функції $u_1(s, \theta), v_1(s, \theta)$ знаходяться з розв'язку задачі для всього пакету шарів, а $\sigma_{sz}^k = \sigma_{s3}^k, \sigma_{\theta z}^k = \sigma_{\theta 3}^k$ знаходяться шляхом інтегрування рівнянь рівноваги

$$\sigma_{i3}^k = -\int \sigma_{ij,j} dz + \Phi_3^k.$$
(4)

Функції інтегрування Φ_3^k визначаються з умов контакту шарів оболонки й умов на зовнішніх поверхнях. Поперечні зсувні деформації для кожного шару знаходяться з рівнянь стану (1)

$$e_{sz}^k = e_{s3}^k = \frac{1}{2} u_1(s, \theta) q^k(z), e_{\theta z}^k = e_{\theta 3}^k = \frac{1}{2} v_1(s, \theta) q^k(z).$$
(5)

В подальшому будемо розглядати такі оболонки, для яких можна знехтувати $\frac{z}{R_1}, \frac{z}{R_2}$ в порівнянні з 1 (R_1, R_2 – радіуси головних кривизн базової поверхні). В цьому випадку, наприклад, для тришарової оболонки симетричної будови, коли

$$B_{11}^1 = B_{11}^3, G_{13}^1 = G_{13}^3, G_{23}^1 = G_{23}^3; a_3 = -a_0, a_2 = -a_1,$$

апроксимуючі функції $q^k(z)$ ($k = 1, 2, 3$) можна записати у вигляді:

$$q^1(z) = \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{z^2}{a_0^2} \right), q^3(z) = q^1(z), \quad (6)$$

$$q^2(z) = \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{z^2}{a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) \right].$$

Використовуючи співвідношення Коші, після інтегрування виразів (5) по товщині компоненти вектора зміщень запишемо у вигляді:

$$u^k = u_0 - \frac{\partial w}{\partial s} z + u_1 f^k(z), \quad v^k = v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} z + v_1 f^k(z), \quad (7)$$

де u_0, v_0 – тангенціальні зміщення базової поверхні $z=0$, w – нормальний прогин оболонки, а

$$f^k(z) = f_1^k(z) + f_0^k(z),$$

$$f_1^1(z) = \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(z - \frac{z^3}{3a_0^2} \right), f_1^2(z) = \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{a_1^2}{a_0^2} z - \frac{z^3}{3a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) z \right],$$

$$f_1^3(z) = f_1^1(z), f_0^1 = \frac{B_{11}^2}{2G_{13}^2} \left[\frac{2a_1^3}{3a_0^2} + \frac{B_{11}^1}{B_{11}^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) a_1 \right] - \frac{B_{11}^1}{2G_{13}^1} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) a_1, \quad (8)$$

$$f_0^2 = 0, f_0^3 = -f_0^1.$$

З використанням залежностей (7) і співвідношень Коші [3] для компонент тензора деформацій k -го шару матимемо:

$$\varepsilon_{ss}^k = \varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^k = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z),$$

$$\varepsilon_{s\theta}^0 = \varepsilon_{s\theta}^0 + \kappa_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z), \quad e_{sz}^k = \frac{1}{2} u_1 q^k(z), \quad e_{\theta z}^k = \frac{1}{2} v_1 q^k(z), \quad (9)$$

де

$$\varepsilon_{ss}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \quad \kappa_{ss} = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \delta_{ss} = \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} u_0 + \frac{w}{R_2}, \quad \kappa_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\cos \alpha \partial w}{r \partial s} \right),$$

$$\delta_{\theta\theta} = \frac{\partial v_1}{r \partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} u_1, \quad \varepsilon_{s\theta}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{r} v_0 \right), \quad \kappa_{s\theta} = \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} - \frac{\cos \alpha \partial w}{r^2 \partial \theta} \right),$$

$$\delta_{s\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{r} v_1 \right). \quad (10)$$

Відповідно до вказаної вище гіпотези відносно індукції D_z для кожного п'єзошару $D_z^k = D_z^k(s, \theta)$. Після інтегрування залежності [4]

$$E_z^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k} D_z^k - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} [(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) + (\chi_{ss}^0 + \chi_{\theta\theta}^0) z + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) f^k(z)] \quad (11)$$

по товщині оболонки одержимо

$$D_z^k(s, \theta) = -\frac{\Phi_k - \Phi_{k-1}}{H_1^k} + (\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss}^0 + \kappa_{\theta\theta}^0) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k}. \quad (12)$$

Тут введено такі позначення:

$$H_1^k = \frac{a_k - a_{k-1}}{\gamma_{33}^k}, H_2^k = \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} (a_k - a_{k-1}), H_3^k = \frac{\gamma_{11}^k}{2\gamma_{33}^k} (a_k^2 - a_{k-1}^2),$$

$$H_4^k = \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} [(F(a_k) - F(a_{k-1}))], F^k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f^k(z) dz. \quad (13)$$

Враховуючи (11), рівняння стану (1) можна записати у вигляді:

$$\sigma_{ss}^k = A_{11}^k \varepsilon_{ss}^k + A_{12}^k \varepsilon_{\theta\theta}^k - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} D_z^k, \sigma_{\theta\theta}^k = A_{12}^k \varepsilon_{ss}^k + A_{11}^k \varepsilon_{\theta\theta}^k - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} D_z^k,$$

$$\sigma_{s\theta}^k = 2G_{12}^k \varepsilon_{s\theta}^k, \sigma_{sz}^k = G_{13}^k u_1 q^k(z), \sigma_{\theta s}^k = G_{23}^k v_1 q^k(z), \quad (14)$$

де

$$A_{11}^k = B_{11}^k + \frac{\gamma_{11}^k \gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k}, A_{12}^k = B_{12}^k + \frac{\gamma_{11}^k \gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k}. \quad (15)$$

Розв'язок задачі про коливання оболонки при дії на неї нормального тиску P_0 знаходиться з використанням тривимірного варіаційного рівняння [4, 9]

$$\delta \mathcal{E} = 0, \quad (16)$$

де

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_v (C_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - 2e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \mu_{ij}^s E_i E_j - \rho \omega^2 u_k u_k) dV - \int_S P_k u_k dS. \quad (17)$$

З врахуванням указаних вище гіпотез і співвідношень варіаційне рівняння (17) для оболонки обертання зводиться до двохвимірного

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{E}_1 + \delta \mathcal{E}_2 + \delta \mathcal{E}_3 = 0. \quad (18)$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_1 &= \frac{1}{2} \iint_V \left[C_{11}(\varepsilon_{ss}^0)^2 + 2C_{12}\varepsilon_{ss}^0\varepsilon_{\theta\theta}^0 + C_{11}(\varepsilon_{\theta\theta}^0)^2 + 4C_{44}(\varepsilon_{\theta s}^0)^2 + \right. \\
&\quad \left. + D_{11}\kappa_{ss}^2 + 2D_{11}\kappa_{ss}\kappa_{\theta\theta} + D_{11}\kappa_{\theta\theta}^2 + 4D_{44}\kappa_{s\theta}^2 + 2(D_{11}^{\kappa}\kappa_{ss}\delta_{ss} + D_{12}^{\kappa}\kappa_{ss}\delta_{\theta\theta} + \right. \\
&\quad \left. + D_{21}^{\kappa}\kappa_{\theta\theta}\delta_{ss} + D_{11}^{\kappa}\kappa_{\theta\theta}\delta_{\theta\theta} + 4D_{44}^{\kappa}\kappa_{s\theta}\delta_{s\theta}) + \right. \\
&\quad \left. + D_{11}^{\delta}\delta_{ss}^2 + 2D_{12}^{\delta}\delta_{\theta\theta}\delta_{ss} + D_{22}^{\delta}\delta_{\theta\theta}^2 + 4D_{44}^{\delta}\delta_{s\theta}^2 + C_{55}u_1^2 + C_{55}v_1^2 \right] rdsd\theta, \\
\mathfrak{A}_2 &= -\frac{1}{2} \iint_F \omega^2 \left\{ \rho_1(u^2_0 + v^2_0 + w^2) + \rho_2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \rho_3(u^2_1 + v^2_1) - 2\rho_4 \left(\frac{\partial w}{\partial s} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} v_1 \right) \right\} rdsd\theta, \\
\mathfrak{A}_3 &= -\frac{1}{2} \iint_F \left\{ (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} \right] - P_0 w \right\} rdsd\theta, \\
C_{ij} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} A^k_{ij} dz - \frac{H_2^k H_2^k}{H_1^k}, D_{ij} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} A^k_{ij} z^2 dz - \frac{H_3^k H_3^k}{H_1^k}, D_{ij}^{\kappa} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} A^k_{ij} z f^k(z) dz - \frac{H_3^k H_4^k}{H_1^k}, \\
D_{ij}^{\delta} &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} A^k_{ij} (f^k(z))^2 dz - \frac{H_4^k H_4^k}{H_1^k}, C_{44} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k dz, D_{44} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z^2 dz, D_{44}^{\kappa} = \\
&= \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k z f^k(z) dz, D_{44}^{\delta} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12}^k (f^k(z))^2 dz, C_{55} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{13}^k (q^k(z))^2 dz, \\
\rho_1 &= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k dz, \rho_2 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z^2 dz, \rho_3 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k f^k(z) f^k(z) dz, \rho_4 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z f^k(z) dz.
\end{aligned} \tag{19}$$

При механічному навантаженні для випадку розімкнутих електродів з умови $\iint_S D_z ds = 0$ можна визначити різницю потенціалів між електродами

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = \frac{1}{\iint_S \frac{ds}{H_1^k}} \iint_S \left[(e_{ss}^0 + e_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss}^0 + \kappa_{\theta\theta}^0) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} \right] ds. \tag{20}$$

Тут S - площа електродів, з яких знімається різниця потенціалів, k - номер шару оболонки.

Для демпфування коливань тонкостінних елементів при сумісному використанні сенсорів та актуаторів до актуатору підводиться різниця потенціалів φ_a , яка пов'язана з показниками сенсора φ_s рівнянням оберненого зв'язку:

$$\varphi_a = G_1 \varphi_s + G_2 \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial t^2}. \quad (21)$$

У випадку гармонічного деформування воно приймає вигляд:

$$\varphi_a = G_1 \varphi_s + i \omega G_2 \varphi_s - \omega^2 G_3 \varphi_s, \quad (22)$$

де G_i – параметри керування, ω – частота.

При дослідженні коливань неоднорідних пластин і оболонок широко використовується теорія С.П. Тимошенка, в якій поле зміщень характеризується п'ятьма незалежними функціями - прогином w , двома тангенціальними зміщеннями u_0, v_0 серединної поверхні і двома функціями, які характеризують незалежний поворот нормалі u_1, v_1 :

$$w = w(s, \theta), u(s, \theta, z) = u_0(s, \theta) + z u_1(s, \theta), v = v_0(s, \theta) + z v_1(s, \theta). \quad (23)$$

Зв'язок між компонентами деформацій і компонентами вектора зміщень визначається такими залежностями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \kappa_{ss} = \frac{\partial u_1}{\partial s}, \varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} u_0^0 + \frac{w}{R_2}, \\ \kappa_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} u_1, \varepsilon_{s\theta}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{r} v_0 \right), \\ \kappa_{s\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{r} v_1 \right), \varepsilon_{sz} = \frac{1}{2} \left(u_1 + \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u_0}{R_1} \right), \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R_1} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

Повні деформації знаходяться за формулами:

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss} z, \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta} z, \varepsilon_{s\theta} = \varepsilon_{s\theta}^0 + \kappa_{s\theta} z, \varepsilon_{sz} = \varepsilon_{13}, \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{23}. \quad (25)$$

Спрощений вираз для напруженості електричного поля має вигляд:

$$E_z^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k} D_z^k - \frac{\gamma_{11}^k}{\gamma_{33}^k} (\varepsilon_{ss}^k + \varepsilon_{\theta\theta}^k). \quad (26)$$

Підставляючи (25), (26) в (17), одержимо наступний вираз для двови-мірного функціоналу:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3, \quad (27)$$

де для вказаної структури оболонки по товщині

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2} \iint_v \left[C_{11} (\varepsilon_{ss}^0)^2 + 2C_{12} \varepsilon_{ss}^0 \varepsilon_{\theta\theta}^0 + C_{11} (\varepsilon_{\theta\theta}^0)^2 + 4C_{44} (\varepsilon_{\theta s}^0)^2 + \right. \\ &\quad \left. + D_{11} \kappa_{ss}^2 + 2D_{12} \kappa_{ss} \kappa_{\theta\theta} + D_{11} \kappa_{\theta\theta}^2 + 4D_{44} \kappa_{s\theta}^2 + 4C_{55} (\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \right] r ds d\theta, \\ \mathcal{E}_2 &= -\frac{1}{2} \iint_F \omega^2 \left\{ \rho_1 (u_0^2 + v_0^2 + w^2) + 2\rho_2 (u_0 u_1 + v_0 v_1) + \rho_3 (u_1^2 + v_1^2) \right\} r ds d\theta, \\ \mathcal{E}_3 &= -\frac{1}{2} \iint_F \left\{ (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} \right] - P_0 w \right\} r ds d\theta. \end{aligned}$$

Тут C_{ij}, D_{ij} визначаються по вписаним вище формулам (19), а

$$C_{44} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12} dz, D_{44} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{12} z^2 dz, C_{55} = \int_{a_{k-1}}^{a_k} G_{13} dz.$$

2. Аналітичний розв'язок задачі. Лінійні задачі про коливання шарнірно обертої циліндричної панелі з сенсорами та актуаторами мають аналітичний розв'язок, який може бути використано, як еталонний, при розробці чисельних методів. Сформульована вище задача зводиться до розв'язку варіаційної задачі (19) при таких граничних умовах:

$$\begin{aligned} w = 0, M_x = 0, v_0 = 0, v_1 = 0 \quad (x = 0; a), \\ w = 0, M_y = 0, u_0 = 0, u_1 = 0 \quad (y = 0, b) \quad (y = R\theta) \end{aligned} \quad (28)$$

Розв'язок шукається у вигляді подвійних рядів Фур'є

$$\begin{aligned} w = 0, \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos k_m x \sin p_n y, \\ v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin k_m x \cos p_n y, u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \cos k_m x \sin p_n y, \\ v_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^1 \sin k_m x \cos p_n y, k_m = \frac{m\pi}{a}, p_n = \frac{n\pi}{b}. \end{aligned} \quad (29)$$

Представимо компоненти механічного й електричного навантаження також у вигляді рядів Фур'є

$$\begin{aligned} P_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin k_m x \sin p_n y, \\ \varphi_k - \varphi_{k-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^k \sin k_m x \sin p_n y, P_{mn} = \frac{16P_0}{abk_m p_n}, \varphi_{mn}^k = \frac{16(\varphi_k - \varphi_{k-1})}{abk_m p_n}. \end{aligned} \quad (30)$$

Враховуючи (29) і (30), з умови стаціонарності функціоналу (27) для визначення коефіцієнтів рядів Фур'є для w_{mn}, \dots, v_{mn}^1 одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 & (C_{11}k_m^2 + C_{44}p_n^2 - \omega^2\rho_1)u_{mn}^0 + (C_{12} + C_{44})k_m p_n v_{mn}^0 = C_{12}k_m \frac{w_{mn}}{R} + \varphi_{mn}^k \frac{H^k}{H^k_1} k_m, \\
 & (C_{12} + C_{44})k_m p_n u_{mn}^0 + (C_{11}p_n^2 + C_{44}k_m^2 - \omega^2\rho_1)v_{mn}^0 = C_{11}p_n \frac{w_{mn}}{R} + \varphi_{mn}^k \frac{H^k}{H^k_1} p_n, \\
 & (D_{11}^\delta k_m^2 + D_{44}^\delta p_n^2 + C_{55} - \omega^2\rho_3)u_{mn}^1 + (D_{12}^\delta + D_{44}^\delta)k_m p_n v_{mn}^1 = \\
 & = \left[D_{11}^\delta k_m (k_m^2 + p_n^2) - \omega^2\rho_4 k_m \right] w_{mn} + \varphi_{mn}^k \frac{H^k}{H^k_1} k_m, \\
 & (D_{12}^\delta + D_{44}^\delta)k_m p_n u_{mn}^1 + (D_{11}^\delta p_n^2 + D_{44}^\delta k_m^2 + C_{55} - \omega^2\rho_3)v_{mn}^1 = \\
 & = \left[D_{11}^\delta p_n (k_m^2 + p_n^2) - \omega^2\rho_4 p_n \right] w_{mn} + \varphi_{mn}^k \frac{H^k}{H^k_1} p_n, \\
 & \left(C_{11} \frac{1}{R^2} + D_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 - \omega^2\rho_1 \right) w_{mn} - C_{12} \frac{k_m}{R} u_{mn}^0 - C_{11} \frac{p_n}{R} v_{mn}^0 - \\
 & - \left[D_{11}^\delta k_m (k_m^2 + p_n^2) - \omega^2\rho_4 k_m \right] u_{mn}^1 - \left[D_{11}^\delta p_n (k_m^2 + p_n^2) - \omega^2\rho_4 p_n \right] v_{mn}^1 = \\
 & = P_{mn} - \varphi_{mn}^k \frac{H^k}{H^k_1} (k_m^2 + p_n^2) - \varphi_{mn}^k \frac{H^k}{H^k_1 R}. \tag{31}
 \end{aligned}$$

Нехтуючи інерційними силами для тангенціальних і зсувних складових, розв'язок системи запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
 w_{mn} &= \frac{P_{mn} - \varphi_{mn}^k Q_{mn}^k}{\rho_1 (\omega_{mn}^2 - \omega^2)}, \\
 u_{mn}^0 &= \frac{k_m (C_{12} k_m^2 - C_{11} p_n^2) w_{mn}}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 R} + \varphi_{mn}^k \frac{H^k}{H^k_1} \frac{k_m}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)}, \\
 v_{mn}^0 &= \frac{p_n [C_{11} (k_m^2 + p_n^2) + (C_{11} + C_{12}) k_m^2]}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 R} w_{mn} + \varphi_{mn}^k \frac{H^k}{H^k_1} \frac{p_n}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)},
 \end{aligned}$$

$$u_{mn}^1 = \frac{D_{11}^k k_m (k_m^2 + p_n^2)}{D_{11}^\delta (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} w_{mn} + \phi_{mn}^k \frac{H_4^k}{H_1^k} \frac{k_m}{D_{11}^\delta (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}},$$

$$v_{mn}^1 = \frac{D_{11}^k p_n (k_m^2 + p_n^2)}{D_{11}^\delta (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} w_{mn} + \phi_{mn}^k \frac{H_4^k}{H_1^k} \frac{p_n}{D_{11}^\delta (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}}, \quad (32)$$

де

$$Q_{mn} = \frac{H_3^k}{H_1^k} (k_m^2 + p_n^2) + \frac{H_2^k (C_{11} - C_{12}) k_m^2}{R H_1^k C_{11} (k_m^2 + p_n^2)} - \frac{H_4^k}{H_1^k} \frac{D_{11}^k (k_m^2 + p_n^2)^2}{D_{11}^\delta (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}},$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho_1} \left[D_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 + \frac{(C_{11}^2 - C_{12}^2) k_m^4}{R^2 C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2} - \frac{D_{11}^k D_{11}^k (k_m^2 + p_n^2)^3}{D_{11}^\delta (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} \right], \quad (33)$$

ω_{mn} - власна частота згинних коливань оболонки.

При $R \rightarrow \infty$ одержимо розв'язок для прямокутної пластини. Якщо деформації зсуву не враховуються ($u_1 = v_1 = 0$), маємо розв'язок, який відповідає класичній теорії Кіргофа-Лява.

Аналогічний аналітичний розв'язок одержано і для випадку, коли використовується класична модель С.П. Тимошенка. В цьому випадку розв'язок варіаційної задачі (27) знаходиться у вигляді:

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^0 \cos k_m x \sin p_n y, \quad v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^0 \sin k_m x \cos p_n y,$$

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}^1 \cos k_m x \sin p_n y, \quad v_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^1 \sin k_m x \cos p_n y,$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y. \quad (34)$$

З розв'язку варіаційної задачі маємо:

$$u_{mn}^0 = \frac{k_m (C_{12} k_m^2 - C_{11} p_n^2) w_{mn}}{c_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 R} + \phi_{mn}^k \frac{H_2^k}{H_1^k} \frac{k_m}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)},$$

$$\begin{aligned}
 v_{mn}^0 &= \frac{p_n \left[C_{11} (k_m^2 + p_n^2) + (C_{11} + C_{12}) k_m^2 \right]}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2 R} w_{mn} + \varphi_{mn}^k \frac{H_2^k}{H_1^k} \frac{p_n}{C_{11} (k_m^2 + p_n^2)}, \\
 u_{mn}^1 &= -\frac{C_{55} k_m}{D_{11} (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} w_{mn} + \varphi_{mn}^k \frac{H_3^k}{H_1^k} \frac{k_m}{D_{11} (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}}, \\
 v_{mn}^1 &= -\frac{C_{55} p_n}{D_{11} (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}} w_{mn} + \varphi_{mn}^k \frac{H_3^k}{H_1^k} \frac{p_n}{D_{11} (k_m^2 + p_n^2) + C_{55}}, \\
 &\left[\frac{1}{R^2} C_{11} + C_{55} (k_m^2 + p_n^2) - \rho_1 \omega^2 \right] w_{mn} = C_{12} \frac{k_m}{R} u_{mn}^0 + C_{11} \frac{p_n}{R} v_{mn}^0 - \\
 &- C_{55} (k_m u_{mn}^1 + p_n v_{mn}^1) - \varphi_{mn}^k \frac{H_2^k}{R H_1^k} + P_{mn}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Підставляючи перші чотири виразу (35) в останнє співвідношення, після громіздких викладок і заміни ω^2 на другу похідну за часом приходимо до диференціального рівняння другого порядку відносно w_{mn} :

$$\rho_1 \ddot{w} + \omega^2 w - P + \varphi \psi = 0. \tag{36}$$

Тут опущено нижні індекси mn в w, φ, ψ, P і введено позначення:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D_{11} (k_m^2 + p_n^2)^2}{1 + \tilde{a}} + \frac{C_{11} (1 + \nu^2) k_m^4}{(k_m^2 + p_n^2)^2 R^2}, \psi_{mn} = \frac{(k_m^2 + p_n^2)}{1 + \tilde{a} (k_m^2 + p_n^2)}, \tilde{a} = \frac{D_{11}}{C_{55}}.$$

При сумісному використанні сенсорів та актуаторів для активного демпфування коливань до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна струму $I = \dot{Q}$:

$$V_a = -g \dot{Q}, \tag{37}$$

де заряд визначається виразом:

$$Q = (h_0 + h_1) \iint_{(S)} (\kappa_1 + \kappa_2) dS. \tag{38}$$

Тут S - площа сенсора.

Як показано в [12, 15, 18], при шарнірному обпиранні торців панелі робота сенсора буде найбільш ефективною при повному покритті сенсором поверхні панелі. Використовуючи наведений вище розв'язок задачі, з (38) знайдемо такий вираз для струму:

$$I = \dot{Q} = 4\gamma_{31} (h_0 + h_1) \frac{k_m^2 + p_n^2}{k_m p_n [1 + \tilde{a} (k_m^2 + p_n^2)]} \dot{w}. \tag{39}$$

Використовуючи (37), (39), рівняння (36) при гармонічному навантаженні запишемо у вигляді:

$$\tilde{p}\ddot{w} + 2\varepsilon\dot{w} + c(1 + itg\delta) = P_0 \cos \omega t. \quad (40)$$

Тут $tg\delta = E'' / E'$ - тангенс кута втрат середнього пасивного шару, а

$$2\varepsilon = \frac{64g(h_0 + h_1)^2 \gamma_{31}^2 (k_m^2 + p_n^2)^2}{abk_m^2 p_n^2 [1 + \tilde{a}k_m^2 + p_n^2]^2}, c = \left[\frac{D'(k_m^2 + p_n^2)^2}{[1 + \tilde{a}k_m^2 + p_n^2]} + \frac{B'k_m^4}{(k_m^2 + p_n^2)^2 R^2} \right],$$

$$D' = \operatorname{Re} D, B' = \operatorname{Re} B. \quad (41)$$

Ведемо відносну характеристику розсіювання енергії

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W}, \quad (42)$$

де ΔW - розсіювання енергії за період коливань, W - середня за період повна механічна енергія в системі, яка описується рівнянням (40). Після нескладних викладок знайдемо

$$\eta = \frac{2\varepsilon\omega}{c} + tg\delta. \quad (43)$$

3. Аналіз розв'язку. Із одержаних вище розв'язків можна знайти вираз для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Так, з формули (32) маємо

$$\varphi_{mn}^k = \frac{P_{mn}}{Q_{mn}^k}. \quad (44)$$

В зв'язку з тим, що товщина п'єзоелектричних шарів значно менша за товщину пасивної оболонки (середнього шару), можна знехтувати відношенням товщини п'єзощару до товщини пасивного елемента в порівнянні з одиницею. В результаті з (38) після громіздких викладок одержимо таку просту формулу для вказаної різниці потенціалів при використанні теорії з пошаровою апроксимацією зміщень:

$$V_a^{ym} = V_a^{ka} \left[1 + \frac{2}{(1-\nu)} h_0^2 (k_m^2 + p_n^2) \frac{G}{G'} \right] \quad (45)$$

При використанні класичних гіпотез С.П. Тимошенка ця різниця потенціалів визначається відношенням $\varphi = \frac{P}{\psi}$, звідки

$$V_a = \frac{P_0}{(h_0 + h_1)} \frac{1 + \tilde{a}(k_m^2 + p_n^2)}{(k_m^2 + p_n^2)}. \quad (46)$$

З використанням одержаних вище формул розраховано власну частоту ω_{11} , модуль поперечного прогину $|w|$ та електричний потенціал V_a , який необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного тиску

$P_0 = 10^3 Pa$, який діє на циліндричну панель з параметрами: $R=0,1m$; $a=b=0,1m$; $b=R \theta=0,1m$; $H=0,001m$; $H=0,002m$; $H=0,01m$; $H=0,02m$. Внутрішній шар панелі виготовлено з алюмінієвого сплаву з наступними механічними характеристиками:

$$E = E' + iE''; \quad E' = 7,3 \cdot 10^{10} H / m^2; \quad E'' = 0,01E'; \quad \nu = 0,34.$$

П'єзоелектричні шари мають такі комплексні електромеханічні властивості [36]:

$$\begin{aligned} S'_{11} &= 0,171 \cdot 10^{-10} m^2 / H; S'_{12} = -0,58 \cdot 10^{-11} m^2 / H; S'_{13} = -0,91 \cdot 10^{-11} m^2 / H; \\ S'_{33} &= 0,184 \cdot 10^{-10} m^2 / H; S'_{55} = 0,460 \cdot 10^{-10} m^2 / H; d'_{31} = -189,7 \cdot 10^{-12} Кл / m^2; \\ d'_{33} &= 357 \cdot 10^{-12} Кл / m^2; d'_{15} = 609 \cdot 10^{-12} Кл / m^2; e'_{11} = 0,20541 \cdot 10^{-7} \Phi / m; \\ e'_{33} &= 0,14803 \cdot 10^{-7} \Phi / m; \\ S''_{11} &= -0,2 \cdot 10^{-12} m^2 / H; S''_{12} = 0,1 \cdot 10^{-12} m^2 / H; S''_{13} = 0,2 \cdot 10^{-12} m^2 / H; \\ S''_{33} &= -0,4 \cdot 10^{-12} m^2 / H; S''_{55} = -5,6 \cdot 10^{-12} m^2 / H; d''_{31} = -4,8 \cdot 10^{-12} Кл / m^2; \\ d''_{33} &= -14,7 \cdot 10^{-12} Кл / m^2; d''_{15} = -253,6 \cdot 10^{-12} Кл / m^2; e''_{11} = -11270 \cdot 10^{-12} \Phi / m; \\ e''_{33} &= -342 \cdot 10^{-12} \Phi / m; \end{aligned}$$

В Таблиці 1 для різних значень відношення H/R показано результати розрахунку вказаних характеристик при використанні теорій Кірхгофа-Лява (другий, третій, четвертий стовбці), С.П. Тимошенка (п'ятий, шостий, сьомий стовбці) та представленої вище теорії з врахуванням зсувних деформацій, які змінюються по товщині за квадратичним законом (восьмий, дев'ятий, десятий стовбці). При розрахунку вважалось, що $h_2 = h_1 + h_3 = 2h_1$ (товщина середнього шару дорівнює сумі товщин зовнішніх шарів). Як видно з цієї таблиці, при малих відношеннях H/R всі теорії дають однакові результати. Зі збільшенням H/R має місце помітне відхилення результатів розрахунків за класичною теорією та теоріями з врахуванням зсувних деформацій. Розбіжність результатів за різними уточненими теоріями незначна.

Таблиця 1

H/R	$10^{-4} \omega, \Gamma \zeta$	$10^4 w, m$	$10^{-2} V_a$	$10^{-4} \omega, \zeta \zeta$	$10^4 w, m$	$10^{-2} V_a$	$10^{-4} \omega, \zeta \zeta$	$10^4 w, m$	$10^{-2} V_a$
1/100	0,1890	0,4203	1,172	0,1890	0,4203	1,172	0,1890	0,4203	1,172
1/50	0,3085	0,1857	0,5859	0,3085	0,1858	0,5869	0,3085	0,1857	0,5868
1/10	0,4952	0,007944	0,1172	0,4874	0,008538	0,1218	0,4900	0,0081	0,1214
1/5	0,8451	0,001149	0,05859	0,7797	0,001564	0,06754	0,8019	0,001179	0,06681

В Таблиці 2 представлено результати розрахунків тих самих характеристик для панелі постійної товщини $H = 0,01\text{ м}$ в залежності від товщини середнього шару при використанні теорії С.П.Тимошенка. З цієї таблиці видно, що при досить малій товщині активного шару результати розрахунків змінюються незначно. Таким чином, за малої товщини п'єзошару можна не враховувати його впливу на жорсткісні характеристики панелі. Цей факт часто використовується в інженерних розрахунках ефективності системи керування коливаннями тонкостінних конструкцій за допомогою п'єзоелектричних включень.

Таблиця 2

$10^2 h_2$	$10^{-4} \omega, \text{зц}$	$10^6 w, \text{м}$	$10^{-2} V_a$
0,1	0,4157	0,7224	0,1656
0,3	0,4483	0,7774	0,14037
0,5	0,4874	0,8538	0,12181
0,7	0,5357	1,065	0,1075
0,9	0,5994	1,837	0,09618
0,94	0,6149	2,152	0,09417
0,98	0,6318	3,035	0,09223
0,998	0,6399	3,622	0,09138
0,9998	0,6407	3,694	0,091299

Висновки. Для моделювання вимушених резонансних коливань непружних оболонок обертання з сенсорами та актуаторами використано дві моделі, які враховують деформації зсуву: перша модель базується на гіпотезі про пошарову апроксимацію деформацій зсуву квадратичними функціями та додаткових гіпотезах про розподіл індукції та напруженості електричного поля по товщині оболонки; друга – на класичних гіпотезах С.П.Тимошенка, доповнених аналогічними вказаним вище припущенням про електричні польові величини. З урахуванням цих припущень представлено варіаційну постановку задачі про вимушені коливання непружної шаруватої оболонки обертання з п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами. Непружна поведінка матеріалів описується концепцією комплексних характеристик. З використанням указаної постановки знайдено розв'язок задачі про резонансні коливання шарнірно обертої непружної циліндричної панелі з сенсорами та актуаторами. З цього розв'язку одержано формули для різниці потенціалів, яку необхідно підвести до актуатора для компенсації гармонічного за часом механічного навантаження для демпфування резонансних коливань. Одержано також формули для потенціалу та заряду, які знімаються з сенсора у випадку резонансних коливань панелі. Виведено вираз для коефіцієнта демпфу-

вання при сумісному використанні сенсорів та актуаторів для зменшення амплітуди резонансних коливань циліндричної панелі. Як окремий випадок, з отриманого розв'язку впливають результати для прямокутної пластини. Наведено приклади розрахунків, які ілюструють вплив деформацій зсуву на параметри керування коливаннями циліндричної панелі за допомогою п'єзоактуаторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. *Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С.* Термомеханическая теория вязкоупругих тел. – Киев: Наук.думка, 2013. – 428 с. – (Прикладная механика упруго–наследственных сред. В 3–х томах. Т.3).
3. *Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С.* Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. – Киев: Наук.думка, 2014. – 520 с. – (Прикладная механика упруго–наследственных сред. В 3–х томах. Т.4.)
4. *Гринченко В. Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.– (Механика связанных полей в элементах конструкций, В 5-ти томах. Т.5).
5. *Дубенец В.Г., Хильчевский В.В.* Колебания демпфируемых композитных конструкций. Т.1. – К.: Вища школа, 1995.- 226с.
6. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук.думка, 1982. – 260с.
7. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. - Киев: Наук.думка, 1986. – 222с.
8. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 328с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т.4).
9. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428с.
10. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В.* Уточнена термомеханічна модель композитних оболонок типу Тимошенка з розподіленими трансверсально–ізотропними актуаторами при моногармонічному навантаженні/ Прикладні проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип.4. –С.84–95.
11. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными актуаторами при моногармоническом нагружении/ Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №2. – С.107–123.
12. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Демпфирование изгибных резонансных колебаний шарнирно опертой пластины с использованием актуаторов/ Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №4. – С.122–132.
13. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Демпфирование изгибных резонансных колебаний жестко защемленной вязкоупругой прямоугольной пластины пьезоэлектрическими актуаторами / Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №5. – С.96–109.
14. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами/Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №6. – С.100–112.
15. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* О резонансных колебаниях шарнирно опертой вязкоупругой прямоугольной пластины/ Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №7. – С. 88–99.
16. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* О резонансных колебаниях жестко закрепленной вязкоупругой прямоугольной пластины/ Прикладная механика. – 2009. – Т.45, №8. – С.123–136.
17. *Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В.* Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами и актуаторами/ Прикладная механика. – 2010. – Т.46, №1. – С.94–104.

18. Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В. Резонансные колебания шарнирно опертой прямоугольной термовязкоупругой пластины с сенсорами и актуаторами/ Прикладная механика. – 2010. – Т.46, №2. – С.106–114.
19. Карнаухова Т.В., Пятецкая Е.В. Резонансные колебания жестко защемленной прямоугольной термовязкоупругой пластины с сенсорами и актуаторами/ Прикладная механика. – 2010. – Т.46, №3. – С. 61–69.
20. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 2. – с.45-77.
21. Карнаухов В.Г. Термомеханіка зв'язаних полів в непружних матеріалах та елементах конструкцій при гармонічному навантаженні // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – №3. – С.142–145.
22. Козлов В.И., Карнаухова Т.В., Пересушко М.В. Чисельне моделювання активного демпфування вимушених термомеханічних резонансних коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних включень/ Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – 52, №3 – С.116–126.
23. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел.- К.: Наук. думка, 1985. – 264с.
24. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Д. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448с.
25. Писаренко Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – К.: Наук. думка, 1970. – 377с.
26. Писаренко Г.С. Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях.- К.: Наук. думка, 1987. – 236с.
27. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа. –
28. Савченко Е.В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: ООО “Аспект–Полиграф”, 2006. – 232с.
29. Шульга Н.А., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
30. Encyclopedia of Smart Materials, 1–2 (ed. Schwartz, Mal). – New York: Wiley & Sons, 2002. – 1176p.
31. Gabbert U. and Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems.- Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/ London. – 2001. – 384p. –
32. Jones D. I. Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: Wiley & Sons, 2001.– 412p.
33. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoelectric inelastic bodies under harmonic deformations// Journal of thermal stresses. – 28, N6-7. - P. 783-815.
34. Karnaukhov V.G. The Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating of Nonelastic Bodies//Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski), pp. 1711-1722. – New York, Dordrecht: Springer, vol. 4, 2014.
35. Karnaukhov V.G. Piezothermo-Inelastic Behaviour of Structural Elements: Vibrations and Dissipative Heating//Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski), pp. 3910-3919. – New York, Dordrecht: Springer, vol. 7, 2014.
36. Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // J. Appl. Phys. – 2007. – 101. –P. 064111–1–7.
37. Tani J., Takagi T., Qui J. Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – 51, N 8. – P. 505 – 521.
38. Tzou H.S. Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Boston/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 382 p.
39. Tzou H.S., Bergman L.A. Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 374p.

REFERENCES

1. *S.A. Ambartsumiyn*. General theory of anisotropic shells [in Russian]. Nauka, Moscow (1974).
2. *A.F. Bulat, V.I. Dyrda, V.G.Karnaukhov, E.L.Zvyagilsky, A.S. Kobets*. Thermomechanical theory of Viscoelastic Solids. Naukova Dumka, Kyiv (2013). Vol. 3 of the three-volume series Applied Mechanics of Viscoelastic Solids [in Russian].
3. *A.F. Bulat, V.I. Dyrda, V.G.Karnaukhov, E.L.Zvyagilsky, A.S. Kobets*. Forced vibrations and dissipative heating of nonelastic bodies. Naukova Dumka, Kyiv (2014). Vol. 4 of the three-volume series Applied Mechanics of Viscoelastic Solids [in Russian].
4. *V.T.Grinenko, A.F.Ulitko, N.A.Shul'ga*. Electroelasticity. Naukova Dumka, Kyiv (1998). Vol. 5 of the five-volume series Mechanics of Coupled Fields [in Russian].
5. *V.G. Dubenets, V.V.Hilchevskij*. Vibrations of damping composite structures [in Russian]. Vyshcha shkola, Kyiv (1995).
6. *V.G.Karnaukhov*. Coupled problems of thermoviscoelasticity [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1982).
7. *V.G.Karnaukhov, I.F.Kirichok*. Coupled problems of theory of viscoelastic plates and shells [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1986).
8. *V.G.Karnaukhov, I.F.Kirichok*. Electrothermoviscoelasticity. Naukova Dumka, Kyiv (1988). Vol. 4 of the five-volume series Mechanics of Coupled Fields [in Russian].
9. *V.G.Karnaukhov, V.V.Myhilenko*. Nonlinear one-frequency vibrations and dissipative heating of nonelastic piezoelectric bodies [in Russian]. ZTSU, Zhytomir (2005).
10. *V.G.Karnaukhov, V.I.Kozlov, T.V. Karnaukhova*. "Refined thermomechanical Timoshenko' model of composite shells with distributed transversal-isotropic actuators under monoharmonic l'jading". Applied Problems of Mathematics and Mechanics, N4. – P. 84-95 (2006).
11. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Main equations of theory of thermoviscoelastic plates with distributed actuators under monoharmonic loading". J.Appl.Mech., 45, No.2. – P. 107–123 (2009).
12. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Damping of bending resonant vibrations of hinged plate with using of actuators". J.Appl.Mech., 45, No.4. – P. 122–1323 (2009).
13. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Damping of bending resonant vibrations of rigidly fixed rectangular viscoelastic plate by piezoelectric actuators". J.Appl.Mech., 45, No.5. – P. 96–109 (2009).
14. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Main equations of theory of thermoviscoelastic plates with distributed sensors". J.Appl.Mech., 45, No.6. – P. 100–112 (2009).
15. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "About resonant vibrations of rectangular hinged viscoelastic plate". J.Appl.Mech., 45, No.7. – P. 88–99 (2009).
16. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "About resonant vibrations of rigidly fixed rectangular viscoelastic plate". J.Appl.Mech., 45, No.8. – P. 123-136 (2009).
17. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Main equations of theory of thermoviscoelastic plates with distributed sensors and actuators". J.Appl.Mech., 46, No.1. – P. 94–104 (2010).
18. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Resonant vibrations of rectangular hinged thermoviscoelastic plate with sensors and actuators". J.Appl.Mech., 46, No.2. – P. 106–114 (2010).
19. *T.V. Karnaukhova, E.V.Pyatetskaya*. "Resonant vibrations of rectangular thermoviscoelastic plate with sensors and actuators". J.Appl.Mech., 46, No.3. – P. 61–69 (2010).
20. *V.G.Karnaukhov, I.F.Kirichok, V.I.Kozlov*. "Electromechanical vibrations and dissipative heating of viscoelastic thinwalled elements with piezoeffect". J.Appl.Mech., 37, No.2. – P. 45–69 (2001).
21. *V.G.Karnaukhov*. "Thermomechanics of coupled fields in nonelastic materials and structures under harmonic loading". Papers of Kiev University. Series of physical and mathematical sciences, №3. – P.142–145 (2013).
22. *V.I.Kozlov, T.V. Karnaukhova, N.V.Peresun'ko*. "Numerical modeling of active damping of forced thermomechanical resonant vibrations of viscoelastic revolution' shells by piezoelectric inclusions". Mathematical methods and physical and mechanical fields, 52, No.3. – P. 116–126 (2009).

23. V.V.Matveev. Damping vibrations of deformed bodies [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1985).
24. A.Nashiff, D. Jones., D.Henderson. *Damping vibrations*[in Russian]. Mir, Moskov (1988).
25. G.S.Pisarenko. Vibrations of mechanical systems with nonideal material elasticity [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1970).
26. G.S.Pisarenko. Generalized nonlinear model of energy' dissipation under vibrations [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (1987).
27. A.O.Rasskazov, I.I.Sokolovskaya, N.A.Shul'ga. Theory and calculation of ortotropic plates and shells [in Russian]. Vyshcha shkola, Kyiv (1987).
28. E.V.Savchenko. Passive damping of vibrations of composite structures [in Russian]. Aspect-Poligraf, Nezbyn (2006).
29. N.A.Shul'ga and V.I.Karlash. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates [in Russian]. Naukova Dumka, Kyiv (2008).
30. Encyclopedia of Smart Materials, 1–2 (ed. Schwartz, Mal). – New York: Wiley & Sons, 2002. – 1176p.
31. Gabbert U. and Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems.- Kluwer Academic Pub.: Dordrecht/Boston/ London. – 2001. – 384p. –
32. Jones D. I. Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: Wiley & Sons, 2001.– 412p.
33. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations// Journal of thermal stresses. – 28, N6-7. - P. 783-815.
34. Karnaukhov V.G. The Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating of Nonelastic Bodies//Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski), pp. 1711-1722. – New York, Dordrecht: Springer, vol. 4, 2014.
35. Karnaukhov V.G. Piezothermo-Inelastic Behaviour of Structural Elements: Vibrations and Dissipative Heating//Encyclopedia of Thermal Stresses (Ed: Richard B. Hetnarski), pp. 3910-3919. – New York, Dordrecht: Springer, vol. 7, 2014.
36. Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // J. Appl. Phys. – 2007. – 101. –P. 06411–1–7.
37. Tani J., Takagi T., Qui J. Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – 51, N 8. – P. 505 – 521.
38. Tzou H.S. Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Boston/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 382 p.
39. Tzou H.S., Bergman L.A. Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1998. – 374p.

УДК 539.3

Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Карнаухова Т.В.

Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин й оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. –Вип. 94. – С. 75-95.

Досліджується вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань трансверсально-ізотропних шарнірно обертих циліндричної панелі і прямокутної пластини. Для моделювання коливань тонкостінних елементів з сенсорами та актуаторами використовуються дві уточнені теорії типу С.П.Тимошенка. Методом Фур'є одержано аналітичний розв'язок задачі про резонансні коливання згаданих елементів. Наведено формули для різниці потенціалів, які необхідно підвести до актуатора для компенсації механічного навантаження. Аналогічні формули одержано і для показників сенсора. Представлено також вирази для коефіцієнтів демпфування резонансних коливань при сумісному використанні сенсорів та актуаторів. Ці прості формули дозволяють дати оцінку впливу деформацій зсуву на ефективність роботи сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань згаданих елементів конструкцій.

Табл. 2. Іл. Назв.39.

УДК 539.3

Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В.

Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов при активном демпфировании резонансных колебаний неупругих пластин и оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вып. 94. – С. 75-95.

Исследуется влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов при активном демпфировании резонансных колебаний трансверсально-изотропных шарнирно опертых цилиндрической панели и прямоугольной пластины. Для моделирования колебаний тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами используются две уточненные теории типа С.П. Тимошенко. Методом Фурье получено аналитическое решение задач о резонансных колебаниях указанных элементов. Представлены формулы для разностей потенциалов, которые необходимо подвести к актуатору для компенсации заданной механической нагрузки. Аналогичные формулы получены и для показаний сенсора. Получено также выражение для коэффициента демпфирования при совместном использовании сенсоров и актуаторов. Эти простые формулы позволяют дать оценку влияния деформаций сдвига на эффективность работы сенсоров и актуаторов при активном демпфировании резонансных колебаний указанных элементов конструкций.

Табл. 2. Ил. Назв.39.

Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V.

Influence of shear strain on efficiency of piezoelectric sensors and actuators under active damping of resonance vibrations of nonelastic plates and shells // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2015. – Issue. 94. – P. 75–95. – Rus.

The active methods of damping vibrations of thin-walled elements are used widely in technics. Efficiency of the damping depend on working of active elements – piezoelectric sensors and actuators. On the efficiency of sensors and actuators the geometric parameters and material anisotropy influence. To investigate this influence the refine models have to be used. In this paper the influence of shear strain on efficiency of piezoelectric sensors and actuators under active damping of resonance vibrations of transversally-isotropic cylindrical panel and rectangular hinged plate is investigated. To simulate the vibrations of thinwalled elements with the sensors and actuators refined Timoshenko' theories are used. By Furrie method the analutical solution of the problems about resonant vibrations of thous elements are obtained. The formulas are given for the potential difference, wich supplied to actuators to balanced mechanical loads. Analogical formulas are given for sensor' indications. The formular for damping coefficient under the using of sensors and actuators for active damping of resonant vibrations of the plate and panel are given. These simple formulas allow to evaluate the influence of shear strains on efficiency of piezoelectric sensors and actuators and efficiency of active damping of resonance vibrations of the elements.

Автори

*Доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу термoprужності
КАРНАУХОВ Василь Гаврилович.*

*Адреса робоча: 03457 Україна, м. Київ, вул. Несторова 3, Інститут механіки ім.
С.П.Тимошенка НАН України, Карнаухову Василю Гавриловичу.*

*Адреса домашня: 03164 Україна, м. Київ, вул. Підлісна,2, кв. 99, Карнаухову Василю Гаври-
ловичу.*

Роб. тел. + 38(044) 4568599

Мобільний тел.: 0983726337

Дом. тел.: + 38(044) 4524020

E-mail- karn@inmech.kiev. ua

*Доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий
співробітник відділу термoprужності КОЗЛОВ Володимир Ілліч.*

Адреса робоча: 03457 Україна, м. Київ, вул. Несторова 3, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Козлову Володимиру Іллічу.

Адреса домашня: 01133 Україна, м. Київ, б.Лесі Українки, 5а, кв.6, Козлову Володимиру Іллічу.

Роб. тел. + 38(044) 4568599

Мобільний тел.: + 38 0973760941

E-mail- karn@inmech.kiev. ua

Кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри диференціальних і інтегральних рівнянь КАРНАУХОВА Тетяна Василівна.

Адреса робоча: 03056 Україна, м. Київ, проспект Перемоги 37, Національний технічний університет України "КПІ", Карнауховій Тетяні Василівні.

Адреса домашня: 03142 Україна, м. Київ, пр. Вернадського, 69-а, кв. 51, Карнауховій Тетяні Василівні.

Роб. тел. + 38(044) 4503526

Мобільний тел.: + 38 0960155432

E-mail- karn@inmech.kiev. ua

UDC 532.595

APPLIED PROBLEMS OF DYNAMICS OF PIPELINES, CONVEYING LIQUID

O.S. Limarchenko¹

Doct.Eng.

V.O. Limarchenko¹

PhD, Phys&Math

M. Majid¹

A.P. Timokhin¹

*¹The Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev
Glushkova avenue, 4-e, Kiev, 03680*

Nonlinear applied problems dynamics of pipelines with flowing liquid were considered on the basis of complex approach, which includes variational statement of the problem with automatic derivation of dynamical boundary conditions, mixed Euler-Lagrange description of fluid-structure interaction, method of modal decomposition, qualitative and numerical research of system behavior. We investigate system behavior of pipeline on moving foundation, for liquid flow with velocities, which are in a vicinity of critical velocities of liquid flow or exceed them, Different variants of foundation motion includes vibrations, rotation. Investigation showed the presence of alternative equilibrium state, near which pipeline oscillations occur for certain ranges of velocities of liquid flow.

Keywords: nonlinear applied problems, dynamics of pipelines with flowing liquid, complex approach, vibration, rotation of moving foundation, alternative equilibrium state.

Introduction. Pipelines, conveying liquid, are significant components of numerous structures and engineering systems. Majority of investigations of these problems are done for dynamics of pipelines on immovable foundation or for liquid flows with velocities, which do not attain their critical values [1-6]. However, a lot of applied problems are connected with necessity of considering movable foundation and great values of velocities of liquid flow. Namely these problems originate in problems of fire suppression in high-rise buildings, with operation of energy installations, for abnormal modes of pipelines behavior in the case of pipeline breaking, for different problems of drilling. There are different approaches for pipeline dynamics modeling, however they are mostly focused on problems of high-pressure pipelines, which transport gas. In this case type of problem differs considerably because relative mass of gas can be neglected, therefore its motion does not affect pipeline dynamics. In the case of similar order of linear densities of liquid and pipeline material near effects of combined motion in fluid-structure interaction systems are manifested.

1. Problem statement. We consider pipeline as elastic beam, made of homogeneous material with linear density μ . It is assumed that pipelines length exceeds its transversal dimension at least ten times. In this case one-

dimensional model of pipeline as beam is acceptable. Further we consider pipeline of cylindrical shape with length l . Pipeline bending stiffness is EJ , where E is the Young modulus and J is meridian moment of inertia. Liquid is supposed to be homogeneous, incompressible, ideal with density ρ . Its longitudinal motion is considered to be given.

Further we consider the most complex case, when one edge of pipeline is fixed with foundation, another one is free. In the general case foundation can perform translational or rotational motion. Let us denote by $u(x,t)$ transversal displacement of certain point of pipeline (defined by longitudinal variable x) at time instant t . Translational motion of foundation is described by longitudinal ε_x and transversal ε_z displacements. Its rotational motion is characterized by angular velocity ω about axis, which corresponds with longitudinal axis of pipeline in non-perturbed stated. The general configuration of the system is shown in Fig. 1.

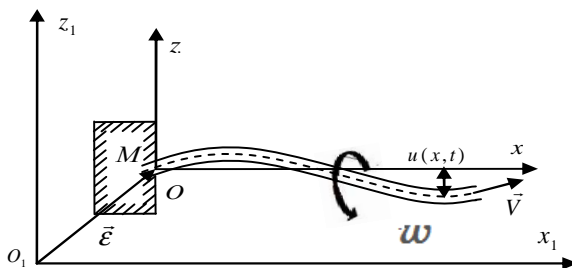


Fig. 1. System pipeline – liquid on movable foundation

For mathematical statement of the problem we make use of the Hamilton-Ostrogradskiy variational principle [1]. Difficulties of description of the considered system are defined by mixed description of system components. Liquid motion is described in the Euler variables, deformation of pipeline is described in the Lagrange variable. For determination of kinetic energy of liquid let us consider element of pipeline on system motion. For certain time instant element of pipeline is turned for angle θ relative to axis Ox . For determination of this angle we obtain

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sin \theta = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}; \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}. \quad (1)$$

Let us define velocity of liquid in absolute reference frame. Due to properties of ideal liquid only normal components of liquid will produce action on pipeline. Then, we can determine components of liquid velocity as

$$v_x = V \cos \theta + V_{n_x}^p; \quad v_z = V \sin \theta + \frac{du}{dt} + V_{n_z}^p.$$

Here the upper index p denotes belonging of the corresponding component to pipeline Normal vector to pipeline is $\vec{n} = \{-\sin \theta; \cos \theta\}$. To obtain normal components of velocity we project velocity onto axes Ox , Oz correspondingly $V_n^p = \dot{\vec{e}} \cdot \vec{n} = -\dot{\epsilon}_x \sin \theta + \dot{\epsilon}_z \cos \theta$, finally we obtain

$$V_{n_x}^p = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \left(\dot{\epsilon}_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \dot{\epsilon}_z \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad V_{n_z}^p = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \left(-\dot{\epsilon}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dot{\epsilon}_z \right).$$

If we take into account that $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} v_x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ we obtain expression for square of velocity of liquid

$$\begin{aligned} v^2 = & V^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 3V^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4V \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - 3V^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 - 2V \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + \\ & + \dot{\epsilon}_x \left[-2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - 2V \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4 \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + 5V \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 \right] + \\ & + \dot{\epsilon}_z \left[2 \frac{\partial u}{\partial t} + 2V \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 5V \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \right] + \dot{\epsilon}_x^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 3 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 \right] + \\ & + \dot{\epsilon}_z^2 \left[1 - 3 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 5 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 \right] + \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_z \left[-2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \right]. \end{aligned}$$

Then the Lagrange function of the system will be

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} M_{\text{cuc}} \left(\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_z^2 \right) - F_x \epsilon_x - F_z \epsilon_z + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left\{ \left[V^2 + \dot{\epsilon}_z^2 \right] + \frac{\partial u}{\partial x} \left[2V \dot{\epsilon}_z - 2\dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_z \right] + \right. \\ & + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \dot{\epsilon}_z + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[\frac{7}{2} V^2 - 2V \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_x^2 - \frac{5}{2} \dot{\epsilon}_z^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \\ & + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \left[4V - 2\dot{\epsilon}_x \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \left[-4V \dot{\epsilon}_z + 5\dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_z \right] + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left[-3\dot{\epsilon}_z \right] + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 \left[-\frac{13}{8} V^2 + 4V \dot{\epsilon}_z - \frac{5}{2} \dot{\epsilon}_x^2 + \frac{27}{8} \dot{\epsilon}_z^2 \right] + \\ & \left. + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \left[3\dot{\epsilon}_x \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\} dx - \frac{1}{2} (\mu + \rho) \omega^2 \int_0^l u^2 dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left\{ \dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \dot{\epsilon}_z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_z^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \dot{\epsilon}_z + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \left[\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_z^2 \right] \right\} dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \\
& - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{8} EF \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx - \frac{1}{2} PF \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.
\end{aligned}$$

This Lagrange function corresponds to nonlinear model of dynamics of pipeline with flowing liquid, which performs translational and rotational motion on movable foundation. This model takes into account centrifugal, elastic, Coriolis forces, forces of longitudinal compression [1, 6].

If we use modal decomposition of motion with respect to normal modes $A_i(x)$ with amplitude parameters $c_i(t)$ $u(x,t) = \sum_i c_i(t) A_i(x)$ we obtain the following discrete model of the system in amplitude parameters (now we restrict ourselves by the case of given motion of foundation)

$$\begin{aligned}
\ddot{c}_r = & - \frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \\
& - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 - \\
& - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\
& - \frac{EF}{2(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk r}^4 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk r}^4 + \\
& + (\rho + \mu) \omega^2 c_r + \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \psi_r^1 [V \dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_z] + \\
& + \frac{1}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N c_i \beta_{ir}^2 \left[-2\rho V \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_x^2 (\rho + \frac{1}{2} \mu) + \dot{\epsilon}_z^2 (\frac{1}{2} \mu - \frac{5}{2} \rho) \right] - \\
& - \frac{\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) \dot{\epsilon}_x + \frac{3\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \phi_{ijr}^3 \left[-2V \dot{\epsilon}_z + \frac{5}{2} \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_z \right] + \\
& + \frac{\mu - 3\rho}{N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i \dot{c}_j (\phi_{irj}^2 - \phi_{jir}^2) \dot{\epsilon}_z + \frac{9\rho}{2N_r (\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j \dot{c}_k (d_{ijk r}^3 - d_{kij r}^3) \dot{\epsilon}_x +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijk}^4 \left[-4\rho V \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_x^2 \left(-\frac{5}{2}\rho - \frac{1}{8}\mu \right) + \dot{\epsilon}_z^2 \left(\frac{27}{8}\rho - \frac{1}{8}\mu \right) \right] - \\
& \quad - \frac{1}{N_r} \psi_r^o \ddot{\epsilon}_z + \frac{\rho}{N_r(\rho + \mu)} \sum_{i=1}^N \dot{c}_i \beta_{ir}^1 \dot{\epsilon}_x - \\
& \quad - \frac{\mu - 3\rho}{2N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j=1}^N c_i c_j \phi_{ijr}^2 \ddot{\epsilon}_z - \frac{3\rho}{2N_r(\rho + \mu)} \sum_{i,j,k=1}^N c_i c_j c_k d_{ijk}^3 \ddot{\epsilon}_x.
\end{aligned}$$

This system of ordinary differential equations with denotations [1] was used for analytical investigations and numerical simulation of problems of pipelines dynamics.

2. System motion for longitudinal and translational vibrations of foundations. In the case of translational motion of foundation pipeline can perform both forced and parametric oscillations. The most interesting effects are caused by vibrations, when liquid flows at velocity 75% of the critical one. In this case vibrations of foundation create condition for manifestation of alternative position of equilibrium. Typical behavior of pipeline for transversal and longitudinal excitation of motion is shown in Fig. 2–4.

Fig. 2 shows variation in time of oscillations of pipeline free end and for transversal vibration of foundation with amplitude 2 mm and frequency 20 1/s (close vicinity of resonance).

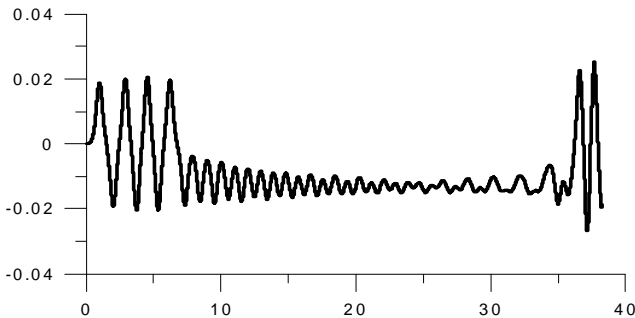


Fig. 2. Oscillations of pipeline free end for transversal vibration of foundation ($\omega = 20$)

It is seen from figure that after certain transient period of motion pipeline begin to oscillate near position of alternative equilibrium state, later due to permanent energy supply to the system oscillations increase and system passes again into oscillations with respect to initial straight shape. If we double frequency of vibration of foundation this change between three (initial, upper and lower) positions of equilibrium can happen systematically.

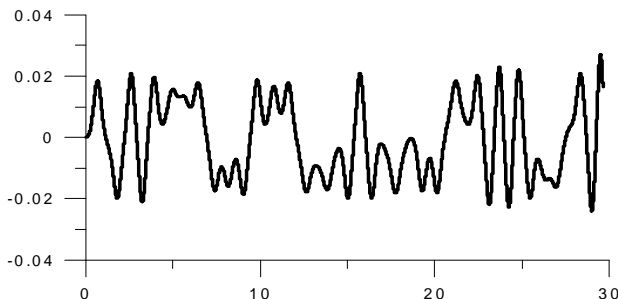


Fig. 3. Oscillations of pipeline free end for transversal vibration of foundation ($\omega = 40$)

In the case of longitudinal vibrations of foundation we observe manifestation of parametric resonance for doubled resonance frequency and for different values of initial perturbations of pipeline. Fig. 4 shows variation in time of the first and second amplitude of pipeline oscillations. In this case longitudinal vibrations of foundation occur with amplitude 2 mm, with frequency 40 1/s and with initial perturbation with respect to the second normal mode 4,7 mm. Velocity of liquid was 75% of the critical one.

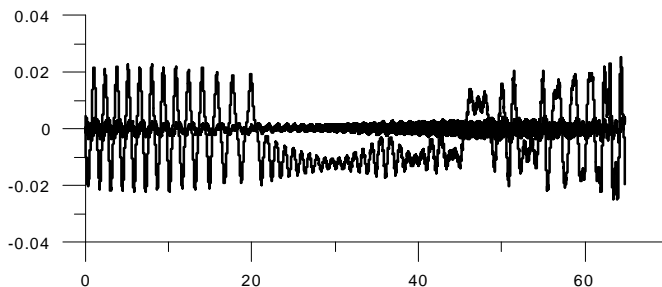


Fig. 4. Variation in time of amplitudes of the first and second normal modes

As it is seen from Fig. 4, second normal mode performs oscillations in a vicinity of initial straight shape of pipeline. However, the first normal mode performs complicated oscillations with manifestation of transition to alternative position of equilibrium and modulation of oscillations.

3. System motion with liquid velocity, which exceeds critical values. The most complicated case of the system motion is connected with system behavior for liquid velocities, which exceed critical velocity. In this case oscillations with respect to straight shape of pipeline become unstable. However, two new stable positions of equilibrium can happen depending on character of initial

excitation. If we analyze the motion equation for existence of alternative equilibrium position, we must suppose $\ddot{c}_i = 0$. This condition gives the following alternative positions (Fig. 5). In Fig. 5 x corresponds to longitudinal coordinate, vertical axis denotes amplitude, every line corresponds to velocity of liquid flow, which is given as factor relative to the value of the critical velocity.

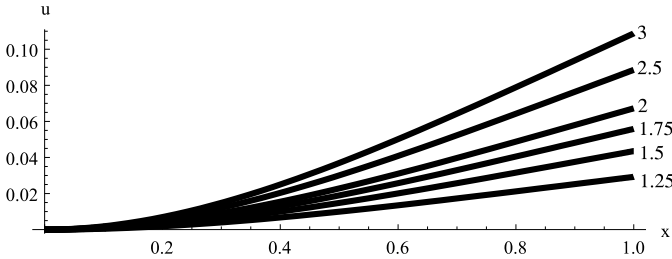


Fig. 5. Shapes of alternative positions for different values of liquid velocities

Fig. 6 shows stability chart for different values of velocities of liquid flow, which was obtained on the basis of linear model for four normal modes. We verify numerically general aspects of system behavior by means of nonlinear model of pipeline, which takes into account 12 normal modes and got good concordance with qualitative results.

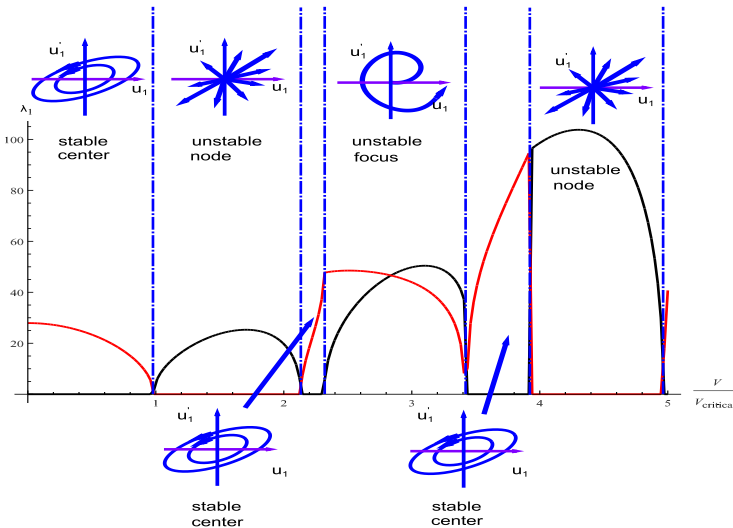


Fig. 6. Stability chart for pipeline in the case of different velocities of liquid flow

4. Dynamics of pipeline on rotating foundation. In the case of behavior of pipeline on rotating foundation rotation is reduced to supplementary term, which acts similar to centrifugal force. General structure of equations does not change. Moreover, normal modes in this case remain to be the same as in the case of pipeline without rotation with the same wave numbers k_i . At the same time frequencies p_i change in the following way

$$p_i^2 = k_i^4 a^2 - \omega^2, \quad \text{where} \quad a^2 = \frac{EJ}{\mu + \rho}.$$

For estimation of rotation effect on critical velocity of liquid flow we write down linear equation of system motion in discrete parameters for the first normal mode

$$\ddot{c}_1 = \Omega^2 c_1,$$

where Ω is frequency of pipeline oscillations. From motion equations we obtain

$$\Omega^2 = -\frac{EJ}{(\rho + \mu)} \chi_1^4 + \frac{7\rho V^2}{2(\rho + \mu)N_1} \beta_{11}^2 - \frac{PF}{(\rho + \mu)N_1} \beta_{11}^2 - \omega^2.$$

Critical velocity V_{cr}^1 can be obtained from the condition to zero of frequency

$$V_{cr}^1 = \pm \sqrt{\frac{2}{7\rho} \left(\frac{EJN_1 \chi_1^4}{\beta_{11}^2} + PF - \omega^2 \frac{(\rho + \mu)N_1}{\beta_{11}^2} \right)}.$$

From the expression of critical velocity it is seen that rotation causes lowering of critical velocity.

We consider numerical example of pipeline oscillations under the presence of rotation of foundations and initial kinematic excitation $c_1(0) = 0,01$. We consider system motion for velocity of liquid flow, which is equal to half of critical velocity in the case of absence of rotation. Rotation was changed until $\omega = 20\pi$. In the considered case critical velocity is equal to 20,94 m/s. We shall consider velocity of liquid flow 10 m/s. Period of oscillations of the first normal mode is $T = 0,1567$ s. Frequency of oscillations will be $\Omega_1 = 2\pi/T \approx 40,1/s$.

The most typical modes of behavior of rotating pipeline manifest for $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 10\pi$, $\omega_3 = 16\pi$, $\omega_4 = 20\pi$. Variation in time of amplitude of the first normal mode is shown in Fig. 7. Here curves are numbered according to indexes of frequencies.

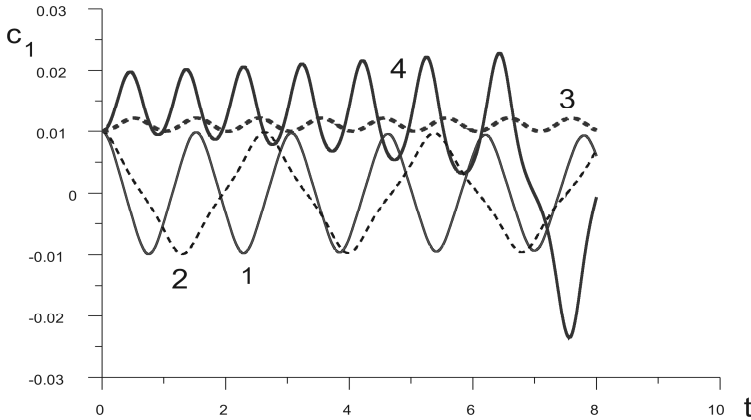


Fig. 7. Variation in time of amplitude of the first normal mode for different angular velocities

As it is seen from figure for $\omega_1 = 0$ stable mode of motion occurs in the system. On increase of angular velocity to $\omega_2 = 10\pi$ stability of processes is not violated, however, frequency of oscillations decreases. Further increase of angular velocity $\omega_3 = 16\pi$ corresponds to attainment to critical velocity. In this case oscillations are performed near alternative position of dynamical equilibrium. Here frequency of oscillations considerably increases and becomes even greater than in the case of pipeline without rotation. So, rotation in this case provides effect of stabilization. Further increase of angular frequency to $\omega_4 = 20\pi$ results in considerable growth of amplitudes of oscillations and transition of oscillations from vicinity of alternative position of equilibrium state and passage to unstable mode.

So, rotation of pipeline foundation results in origination of three modes of dynamical behavior of pipeline. Until angular velocities about $\omega = 15\pi$ steady oscillations in a vicinity of initial straight position of pipeline occur. Here on increase of angular velocity frequency of oscillations decreases, For the range $15\pi < \omega < 18\pi$ oscillations of pipeline relative to straight position can loss stability and transit to oscillations near alternative position of equilibrium, moreover, frequency of oscillations increases and becomes greater than in the case of pipeline without rotation. For oscillations of pipeline in the range $\omega > 18\pi$ oscillations are performed with increasing amplitude; loss of stability relative to alternative position of equilibrium can happen.

Conclusions. On the basis of variational approach we constructed method for investigation of complex of problems of nonlinear dynamics of pipelines on

movable foundation for wide range of velocities of liquid flow, including velocities, which increase critical values. Conducted investigations showed that mobility of foundation promotes situation when system can reach effects of loss of stability of straight line shape of pipeline even for velocities of flow, which are lower than critical velocities for immovable foundation of pipeline. Both forced and parametric mechanisms manifest for translational motion of pipeline foundation. In the case of rotation of pipeline foundation variety of effects is also.

REFERENCES

1. *Limarcheko V.O.* Vibrations of pipeline with liquid on combinational vibration excitation // *Nonlinear Oscillations*, 2013. – Vol. 16. – № 3– P. 367-373
2. *Ibrahim R.A.* Overview of Mechanics of Pipes Conveying Fluids—Part I: Fundamental Studies/ Ibrahim R.A. // *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2010.– Vol. 132,–P. 034001-0340032. URL: <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/S2012/EP/MaterialsforStudents/Marderness/Ibrahim2011-P1.pdf>
3. *Ibrahim R.A.* Mechanics of Pipes Conveying Fluids—Part II: Applications and Fluidelastic Problems // *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2011.– Vol. 133,–P. 024001-0240030. URL: <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/F2011/EP/MaterialsforStudents/Marderness/Ibrahim2011-P2.pdf>
4. *Kuiper G.L.* Experimental investigation of dynamic stability of a free hanging pipe conveying fluid / Kuiper G.L., Metrikine V.A. // *Journal of Fluids and Structures*, 2008. – № 24. – P. 541–558.
5. *Paidoussis M.P.* Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow V1. – Academic Press, Amsterdam, The Netherlands, 1998.– 572 p.
6. *Paidoussis M.P.* Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow V2. – Academic Press, Amsterdam, The Netherlands, 2004.– 806 p.

Лимарченко О.С., Лимарченко В.О., Маджид М., Тимохін О.П.

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТРУБОПРОВОДУ З РІДИНОЮ, ЩО ТЕЧЕ

Нелінійні прикладні задачі динаміки трубопроводів з рідиною, що тече, розглядаються на сонові комплексного підходу, що включає варіаційну постановку задачі з автоматичним виведенням динамічних граничних умов, мішаний ейлерово-лагранжеве опис гідро пружної взаємодії, метод модальної декомпозиції, якісне і чисельне дослідження поведінки системи. Вивчається поведінка системи на рухомій основі для течії рідини із швидкостями, які наближаються до значень критичних швидкостей чи перевершують їх. Різні варіанти руху основи включають вібрації, обертання. Дослідження показали наявність альтернативного положення рівноваги в околі якого відбуваються коливання в деякому діапазоні швидкостей течії рідини.

Ключові слова: нелінійна прикладна задача, динаміка трубопроводу з рідиною, що тече, комплексний підхід, вібрації, обертання рухомої основи, альтернативне положення рівноваги.

Лимарченко О.С., Лимарченко В.О., Маджид М., Тимохін А.П.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТРУБОПРОВОДА С ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Нелинейные прикладные задачи динамики трубопроводов с протекающей жидкостью рассматриваются на основе комплексного подхода, включающего вариационную постановку задачи с автоматическим выводом динамических граничных условий, смешанное эйлерово-лагранжевое описание гидроупругого взаимодействия, метод модальной декомпозиции, качественное и численное исследование поведения системы. Исследуется поведение системы на подвижном основании для течений жидкости со скоростями приближающихся к значениям критических скоростей или превосходящим их. Разные варианты движения основания включают вибрации, вращение. Исследования показали наличие альтернативного положения равновесия, в окрестности которого происходят колебания в некотором диапазоне скоростей течения жидкости.

Ключевые слова: нелинейная прикладная задача, динамика трубопровода с протекающей жидкостью, комплексный подход, вибрации, вращение подвижного основания, альтернативное положение равновесия.

УДК 539.3

МОМЕНТНА СХЕМА МСЕ ДЛЯ КРУГОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА

В.А. Баженов¹

д-р техн. наук

С.О. Пискунов¹

д-р техн. наук

О.О. Шкриль¹

канд. техн. наук

К.С. Романцова¹

аспірант

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Наведені основні співвідношення просторової задачі теорії пружності для кругових тіл в місцевій криволінійній системі координат. На основі основних положень моментної схеми скінчених елементів отримано співвідношення між переміщеннями, деформаціями і напруженнями.

Ключові слова: просторова задача, момента схема МСЕ, напіваналітичний метод скінчених елементів, чисельне інтегрування.

Вступ. При розробці скінченно-елементної бази для розв'язання просторових задач теорії пружності суттєве значення має вибір відповідної схеми отримання розв'язувальних співвідношень. В роботі [5] було проведено отримання розв'язувальних співвідношень МСЕ із використанням моментної схеми МСЕ [4] для призматичного СЕ із чисельним інтегруванням. В даній роботі отримані співвідношення моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) для кругових тіл. В рамках напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) виведені співвідношення між переміщеннями, деформаціями та напруженнями, представленими в базисній циліндричній і місцевій фізичній системі координат.

1. Вихідні співвідношення просторової задачі теорії пружності для кругових тіл. Для дослідження процесів деформування та руйнування кругових тіл із змінними геометричними і фізичними параметрами доцільно використовувати наступні системи координат: базисну циліндричну z^j , яка є незмінною і призначена для задання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (вісі z^1 та z^2 базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь z^3 орієнтована вздовж напрямної) і місцеву систему коорди-

нат x^i , природньо пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта, при цьому вісь x^3 збігається за напрямком з z^3 (рис.1).

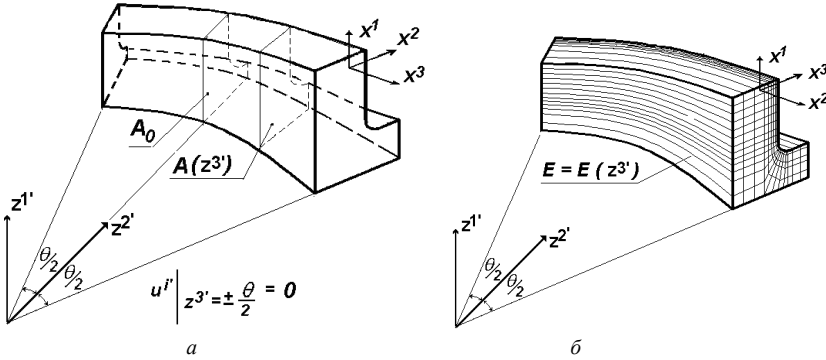


Рис. 1. Неоднорідне кругове тіло із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами (а) і дискретна модель НМСЕ (б)

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення z^i_j місцевої та базисної систем координат [3]:

$$z^i_j = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}, \quad z^{\alpha}_3 = z^3_{,\alpha} = 0. \quad (1.1)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

Компоненти метричного тензора g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z^i_{,m} z^j_{,n} g_{ij}.$$

При дослідженні кругових тіл для базисної циліндричної системи координат відмінними від нуля будуть такі компоненти метричного тензора:

$$g_{\alpha\beta} = z^{\gamma}_{,\alpha} z^{\gamma}_{,\beta}, \quad g_{33} = (z^3_{,3})^2 (z^2)^2.$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій ε_{ij} через переміщення u_i в місцевій системі координат [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma^k_{ij}, \quad (1.2)$$

де Γ_{ij}^k – символи Крістофеля другого роду.

Подамо переміщення та символи Крістофеля в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_s z_{s,k}^{s'}, \quad (1.3)$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{l,i}^k z_{l,i}^{m'} z_{j,i}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} + x_{l,i}^k z_{l,i}^{m'} \frac{\partial z_{j,i}^{l'}}{\partial z_{m'}^{l'}}, \quad (1.4)$$

де $x_{l,i}^k$ – компоненти тензора, оберненого до виразу (1.1).

Після підстановки (1.3) та (1.4) в (1.2), зважаючи, що $z_{s,k}^{s'} \cdot x_{l,i}^k = \delta_{l,i}^{s'}$, одержимо загальний вираз для деформацій у місцевій системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{l,i} z_{l,j}^{l'} + u_{l,j} z_{l,i}^{l'} \right) - u_l z_{l,i}^{m'} z_{j,i}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'}. \quad (1.4)$$

У циліндричній базисній системі координат не дорівнюють нулю тільки такі символи Крістофеля:

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{z^{2'}}.$$

Тоді з формули (1.4) одержимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(u_{\gamma',\alpha} z_{\beta}^{\gamma'} + u_{\delta',\beta} z_{\alpha}^{\delta'} \right); \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(u_{3',\alpha} z_{3'}^{3'} + u_{\gamma',3} z_{\alpha}^{\gamma'} - 2u_{3',\alpha} z_{3'}^{2'} z_{3'}^{3'} / z^{2'} \right); \\ \varepsilon_{33} &= u_{3',3} z_{3'}^{3'} + u_{2',3} z_{3'}^{3'} z^{2'}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Передбачається, що пружні деформації малі та пов'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (1.6)$$

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних сталих C^{ijkl} визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu \left(g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right),$$

де величини λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^{i'}, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^{i'}, T)$:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

де T – температура.

Фізичні компоненти тензорів деформацій $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ та пружних констант \tilde{C}^{ijkl} визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{ij} &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}, \\ \tilde{C}^{ijkl} &= C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}.\end{aligned}\quad (1.7)$$

2. Просторовий круговий скінчений елемент загального типу. Розглянемо скінченні елементи загального вигляду із змінними геометричними і фізичними параметрами. На характер розподілення механічних та геометричних параметрів по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування (рис. 2).

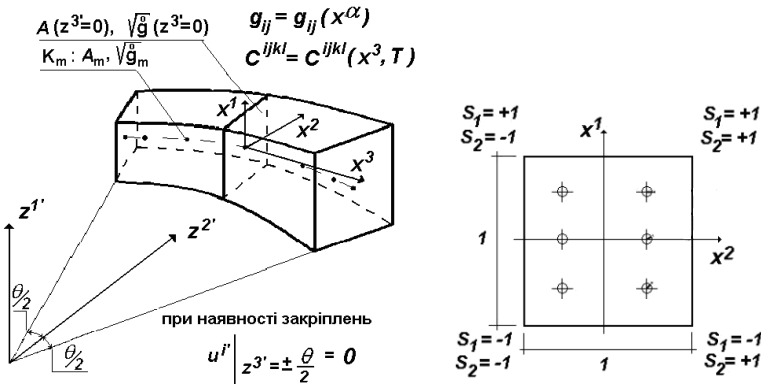


Рис. 2. Просторовий круговий скінчений елемент загального типу

Визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора g_{ij} , є змінним за напрямною і обчислюється на основі вихідних даних про геометрію досліджуваного об'єкта – заданого закону зміни площі поперечного перерізу – із використанням співвідношення:

$$\sqrt{g(z^{3'})} = \frac{A(z^{3'})}{A_0} \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} = f(z^{3'}) \sqrt{g|_{z^{3'}=0}}. \quad (2.1)$$

Як було показано у попередніх статтях використання такого підходу дозволяє моделювати напружено-деформований стан у випадку змінної вздовж твірної площі тіла як для призматичних тіл (при розтязі і згині) [5], так і для кругових тіл [3].

Розподілення перемішень в межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом [1,2]:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (2.2)$$

де $u_{m'(S_1 S_2)}$ – вузлові значення перемішень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

Визначимо похідні від перемішень в центрі поперечного перерізу СЕ виходячи з прийнятого закону їх розподілення (2.2):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_1 S_2; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3} S_\alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В напрямку твірної переміщення та їх похідні по напрямку x^3 апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій $\varphi^{(l)}$ – поліномам Лагранжа ($l=0,1$) і Міхліна ($l=2,\dots,L$):

$$u_{m'} = \sum_{l=0}^L u_{m'}^l \varphi^{(l)}; \quad u_{m',3} = \sum_{l=0}^L u_{m',3}^l \varphi_3^{(l)}; \quad (2.4)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[(1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right]. \end{aligned}$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

Скінченні елементи, що пропонуються, орієнтовані на розрахунок широкого класу кругових тіл. Вони повинні забезпечувати не тільки високу точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної

форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного розв'язку. Як показано в роботах [1,2], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла як жорсткого цілого, а також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Подамо компоненти тензору фізичних деформацій в поперечних перерізах, що відповідають точкам інтегрування, у відповідності до МССЕ [2] відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\epsilon}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12}; \\ \tilde{\epsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\epsilon}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta} x^\beta,\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

У відповідності з (1.6) фізичні компоненти тензора напружень визначаються за формулою:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (2.6)$$

Запишемо вираз для компонент тензора напружень (2.6) через коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена (2.5):

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{ij} &= \tilde{C}^{ij11} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} x^2 \right) + 2\tilde{C}^{ij12} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} + \tilde{C}^{ij22} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} x^1 \right) + 2\tilde{C}^{ij13} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} x^2 \right) + \\ &+ 2\tilde{C}^{ij23} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} x^1 \right) + \tilde{C}^{ij33} \left(\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2} x^2 \right).\end{aligned}$$

Після перегрупування складників, що містять величини деформацій та їх похідних, застосовуючи позначення

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} &= \tilde{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{kl}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} &= \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{11,2} + \tilde{C}^{ij13} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{13,2} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,2}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} &= \tilde{C}^{ij11} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{22,1} + \tilde{C}^{ij23} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{23,1} + \tilde{C}^{ij33} \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,1},\end{aligned}$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена в термінах фізичних величин:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,2} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}^{ij}_{,1} x^1. \quad (2.7)$$

Відкидаючи з (2.7) члени вигляду $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{i\alpha}$ як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елемента, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\sigma}^{12} &= \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; & \tilde{\sigma}^{33} &= \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha},\end{aligned}\quad (2.8)$$

де значення коефіцієнтів $\overset{\circ}{\sigma}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij}$ обчислюються в точках інтегрування K_m , що розташовані в поперечних перерізах вздовж вісі x^3 (рис. 2).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент тензора напружень в місцевій системі координат:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; & \overset{\circ}{\sigma}^{12} &= g_{12} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; & \overset{\circ}{\sigma}^{33} &= g_{33} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; & \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} &= g_{33} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Аналогічно, коефіцієнти розкладання компонент фізичних деформацій в ряд Маклорена матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}; & \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}; & \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} &= \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \left. \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^{\beta}=0} = \left. \frac{\partial (\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \right|_{x^{\beta}=0} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial \left(\varepsilon_{\alpha 3} / \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}} \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}} \left[\varepsilon_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha 3} \left(\frac{g_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}}{g_{\alpha\alpha}} + \frac{g_{33, (3-\alpha)}}{g_{33}} \right) \right] \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha\alpha} \overset{\circ}{g}_{33}}} \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \left(\overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33, (3-\alpha)} \right) \right] \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{33} / g_{33})}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{1}{g_{33}} \left(\varepsilon_{33, \alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33, \alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33, \alpha} \right), \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij, \beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{h}_{ij, \delta} = \frac{\overset{\circ}{g}_{ij, \delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}, \quad \overset{\circ}{g}_{ij, \delta} = \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{ij}}{\partial x^\delta} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

Коефіцієнтом розкладення $\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\beta=0}$ нехтуємо, як величиною

більш високого порядку малості.

Запишемо ненормовані величини деформацій в криволінійній місцевій системі координат, через які подані фізичні коефіцієнти розкладу деформацій (2.10), через переміщення в базисній системі координат із використанням (1.5):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(u_{\gamma', \alpha} z_{, \beta}^{\gamma'} + u_{\delta', \beta} z_{, \alpha}^{\delta'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(u_{3', \alpha} z_{, 3}^{3'} + u_{\gamma', 3} z_{, \alpha}^{\gamma'} - 2u_{3', \alpha} z_{, 3}^{2'} z_{, 3}^{3'} / z^{2'} \right) \Big|_{x^\alpha=0}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= u_{3', 3} z_{, 3}^{3'} + u_{2', 3} z_{, 3}^{3'} z_{, 3}^{2'} \Big|_{x^\alpha=0}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{\partial \varepsilon_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{\partial (u_{\gamma', \alpha} z_{, \alpha}^{\gamma'})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = u_{\gamma', 12} z_{, \alpha}^{\gamma'} + u_{\gamma', \alpha} z_{, 12}^{\gamma'} \Big|_{x^\alpha=0};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\alpha=0} = \frac{1}{2} \left(u_{3',12} z_{,3'}^{3'} + u_{\gamma',3(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma'} + u_{\gamma',3} z_{,12}^{\gamma'} \right) - \\ &- \frac{1}{z^{2'}} \left(u_{3',(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{2'} z_{,3'}^{3'} + u_{3'} \left(z_{,12} z_{,3'}^{2'} - \frac{z_{,\alpha}^{2'} z_{,3'}^{3'} z_{,(3-\alpha)}^{2'}}{z^{2'}} \right) \right) \Big|_{x^\alpha=0} \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0} = u_{3',3\alpha} z_{,3'}^{3'} + u_{2',\alpha} \left(z_{,3'}^{3'} \right)^2 z^{2'} + u_{2'} \left(z_{,3'}^{3'} \right)^2 z_{,\alpha}^{2'} \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Введемо наступні позначення для значень похідних від переміщень і компонент тензора перетворення $z_{,i}^{m'}$ в центрі СЕ: $u_{m',i} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{u}_{m',i}$,

$z_{,i}^{m'} \Big|_{x^\gamma=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'}$. Тоді:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} z_{,\beta} + \overset{\circ}{u}_{\delta',\beta} z_{,\alpha} \right); \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{u}_{3',\alpha} z_{,3} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',3} z_{,\alpha} - 2 \overset{\circ}{u}_{3'} z_{,\alpha} z_{,3} / z \right); \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33} &= \overset{\circ}{u}_{3',3} z_{,3} + \overset{\circ}{u}_{2'} z_{,3} z_{,3} z \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{u}_{\gamma',12} z_{,\alpha}^{\gamma'} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',\alpha} z_{,12}^{\gamma'} \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{u}_{3',12} z_{,3'}^{3'} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',3(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma'} + \overset{\circ}{u}_{\gamma',3} z_{,12}^{\gamma'} \right) - \\ &- \frac{1}{z^{2'}} \left(\overset{\circ}{u}_{3',(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{2'} z_{,3'}^{3'} + \overset{\circ}{u}_{3'} \left(z_{,12} z_{,3'}^{2'} - \frac{z_{,\alpha}^{2'} z_{,3'}^{3'} z_{,(3-\alpha)}^{2'}}{z} \right) \right) \\ \overset{\circ}{\mathcal{E}}_{33,\alpha} &= \overset{\circ}{u}_{3',3\alpha} z_{,3} + \overset{\circ}{u}_{2',\alpha} \left(z_{,3'}^{3'} \right)^2 z^{2'} + \overset{\circ}{u}_{2'} \left(z_{,3'}^{3'} \right)^2 z_{,\alpha}^{2'} \end{aligned}$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент деформацій з врахуванням прийнятого закону розподілення переміщень в поперечному перерізі СЕ (2.2):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma'(S_1, S_2)} \left(S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1, S_2)} S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} - u_{3'(S_1, S_2)} \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{3'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} + u_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}^{2'} \left(\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[u_{\gamma'(S_1, S_2)} \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[2 \cdot u_{3'(S_1, S_2)} S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} + u_{\gamma'(S_1, S_2), 3} \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} + S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} u_{3'(S_1, S_2)} \left(\overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \left(2S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,2'}^{2'} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right) \right) \right] \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left[2u_{3'(S_1, S_2), 3} S_{\alpha} + u_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} + 2S_{\alpha} \overset{\circ}{z}^{2'} \right) \right]. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Із урахуванням розкладу переміщень в напрямку твірної (2.4), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \left(S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \varphi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[\left(u_{3'(S_1, S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left(S_{\alpha} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right) \right) \varphi^{(l)} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \varphi^{(l)} \right] \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[u_{3'(S_1, S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \varphi_{,3}^{(l)} + u_{2'(S_1, S_2)}^l \overset{\circ}{z}^{2'} \left(\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \varphi^{(l)} \right] \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \left(2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} \right) \varphi^{(l)} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathring{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[\sum_{l=0}^L \left[u_{3'(S_1, S_2)}^{l'} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left[2 \cdot S_1 S_2 - \frac{1}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \left(\overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} + \overset{\circ}{z}_{, \alpha}^{2'} \times \right. \right. \right. \right. \\
&\times \left. \left. \left. \left(2S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{, (3-\alpha)}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{, 2'}} \right) \right) \right] \varphi^{(l)} + u_{\gamma'(S_1, S_2)}^{l'} \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{, 12}^{\gamma'} + S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{, \alpha}^{\gamma'} \right) \varphi_{,3}^{(l)} \right] \\
\mathring{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left[\sum_{l=0}^L \left[2u_{3'(S_1, S_2)}^{l'} S_{\alpha} \varphi_{,3}^{(l)} + u_{2'(S_1, S_2)}^{l'} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left(\overset{\circ}{z}_{, \alpha}^{2'} + 2S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{, 2'} \right) \varphi^{(l)} \right] \right]. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Наведені співвідношення, які визначають зв'язок між переміщеннями і деформаціями а також між деформаціями і напруженнями в рамках моментної схеми СЕ, дозволяють отримувати розв'язувальні співвідношення НМСЕ для різних модифікацій кругового СЕ з перемінними геометричними і механічними параметрами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл: Монографія – К.: Каравела, 2014. – 298 с.
4. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
5. *Шкриль О.О.* Призматичний скінченний елемент на основі моментної схеми скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд. – № 93, 2014. – 19-26 с.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Gulyar A.Y., Sakharov A.S., Topor A.H.* Poluanalytycheskyy metod konechnykh elementov v mekhanyke deformyruemykh tel (Semi-analytical finite element method in the mechanics of deformable bodies) – K.: NYYSM, 1993. – 376 s.
2. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Sakharov O.S.* Napivanalitychnyj metod skinchennykh elementiv v zadachakh ruynuvannya prostorovykh til: Monografiya – K.: KNUBA, 2005. – 298 s.
3. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Saharov O.S.* Napivanalltichnyy metod skInchennykh elementiv v zadachah kontinualnogo ruynuvannya prostorovykh til: Monografiya – K.: Karavela, 2014. – 298 s.
4. *Sakharov A.S.* Metod konechnykh elementov v mekhanyke tverdykh tel (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) / A.S. Sakharov, V.N. Kyslookyy, V.V. Kyrychevskyy. – K.: Vyshcha shk., 1982. – 480 s.
5. *Shkril' O.O.* Pryzmatychnyj skinchennyj element na osnovi momentnoyi sxemy skinchennykh elementiv // Opir materialiv i teoriya sporud, № 93, 2014. – 19-26 s.

Баженов В.А., Пискунов С. О., Шкрыль О.О., Романцова К. С.

МОМЕНТНАЯ СХЕМА МКЭ ДЛЯ КРУГОВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Приведены основные соотношения пространственной задачи теории упругости для круговых тел в местной криволинейной системе координат. На основании положений моментной схемы конечных элементов получено соотношения между перемещениями, деформациями и напряжениями.

Ключевые слова: пространственная задача, моментная схема МКЭ, полуаналитический метод конечных элементов, численное интегрирование, упругое деформирование.

Bazhenov V., Pyskunov S., Shkril' A., Romantsova K.

MOMENTARY SCHEME OF FEM FOR CIRCULAR FINITE ELEMENT

Basic correlations of spatial problem of theory of elasticity are resulted for circular bodies in the local curvilinear coordinates system. On the basis of substantive provisions of momentary scheme of finite elements the relations between displacements, deformations and stress values are obtained.

Keywords: spatial problem, momentary scheme of FEM, semianalitic finite element method, numerical integration, elastic deformation.

UDC 539.3

EFFECTIVENESS OF SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD IN THE NUMERIC ANALYSIS OF DEFORMATION OF NON-HOMOGENEOUS 3D CONSTRUCTIONS SUBJECT TO INITIAL DEVIATION OF FORM

I.I. Solodei¹

Doctor of Technical Sciences

M.O. Vabishchevych¹

Candidate of Technical Sciences

B.I. Sizevych¹**O.O. Chepurna¹**

¹*Kyiv National University of Construction and Architecture
31 Povitroflotsky Avenue, Kyiv, Ukraine. 03680*

Static and dynamic numeric models to analyze stress-strain state of 3D uncanonical form bodies are considered in the range of semi-analytical finite element method. Effectiveness and simulation veracity analysis are provided on the base of specific test cases.

Key words: semi-analytical finite element method, body of revolution, geometric imperfection, deviation of form, curvature, stress-strain state.

Introduction

It is known that even a small change in curvature of the body surface has significant influence on distribution of stress-strain state parameters and considerably complicates the analysis of their behavior. Initial geometric imperfections, deflection of shapes, curves, which inevitably appear in the process of manufacturing and installation or designed-in directly, are the determining factors, which require careful reflection in finite element models to get correct solutions.

Successful solving of the problem by finite element method depends on many factors. Principal of them are efficient methods of construction of governing equation, the rational choice of integration algorithms, solution of large equation systems, eigenvalues problems etc. In order to solve these tasks, in many cases, additional hypotheses are introduced to downrange of the class of the objects and processes, but increase efficiency and reduce the computational burden.

Semi-analytical finite element method (SAFEM) is one of such approaches. SAFEM has been widely used to solve problems for the body of revolution and prismatic bodies, which are created by some movement of the generating surface along a closed or non-closed guide without gaps. It combines all the

advantages of finite element method by the describing of complicated cross-section configuration of object and analytical approach by the approximation of known and unknown function (load, displacement, velocity, acceleration, strain, stress) along the generating direction. This approach allows to reduce three-dimensional linear problem to the bunch of two-dimensional and build a highly effective procedure of solving in case of non-linear problem.

Semi-analytical finite element method was proposed in [7, 13] as an effective method to research 3D axially symmetrically loaded bodies of revolution in the range of elasticity theory. The method is also known as discrete-continuous finite element method (DCFEM). Similar approaches are developed within the boundary element method [9] and variationally-difference method [8, 10]. Nowadays, SAFEM is used extensively to solve problems of static and dynamic analysis, continual fracture mechanics in case of creep, nonlinear deformation processes of reinforced concrete structures, thermal conductivity [1-4].

Modern engineering practice requires high precision of strength calculation for such kind of structures, which conduce to the necessity of essential clarification of design models, which simultaneously integrate three-dimensional, plate or shell elements. Usage of 3D finite elements (FE) with stiffness matrix, which have been obtained based on the general elasticity theory postulates without additional hypotheses and assumptions, that reflect the geometrical specific of objects, is not productive. Using of different dimension types of finite element approximations in the range of one model requires special rules of joining FE, numerical integration procedures and analysis of the results in the mentioned junction areas. Recent years are marked by extensive use of moment scheme of finite element (MSFE), which is the basis for building of rigidity matrix. General postulates of MSFE are formulated in [3, 11]. The paper [3] has proved effectiveness of prismatic and circular quadrangular finite elements with bilinear law for known and unknown functions for approximation of heterogeneous 3D bodies of revolution and prismatic bodies. Variability accounting of the metric tensor components in the plane of the element cross-section provides a fast convergence of results [5]. Averaging of finite element physical characteristics in its center allows to provide enough easy procedure of integration and decrease the numerical calculations [3].

This paper presents natural extension of semi-analytical finite element method for the behavioral analysis of inhomogeneous circular or prismatic bodies with imperfections under the external loads of different physical types. The objects of study are static and dynamic deformation processes of inhomogeneous circular and prismatic solids of non-canonical form. Purpose of the research are displacements, stresses, deformations and finite element mathematical models, which describe the strained state of three dimensional structures. All presented below solutions are based on generalized SAFEM

finite-element models [12] for non-canonical prismatic bodies and bodies of revolution with complex structure of the cross section.

Research of the efficiency and reliability of SAFEM solutions in the analysis of stress-strain state of non-canonical heterogeneous bodies

It is considered the mode of deformation of a thin endless geometrically imperfect cylinder under the uniform external pressure $q=1$ (Fig. 1).

Equations, which describe actual geometry variability of the cylinder cross section:

$$y^{1''} = z^{1'}, \quad y^{2''} = Z_0^{2'} + c_1 \cos 2Z^{3'}, \quad y^{3''} = Z^{3'}. \quad (1)$$

Mechanical and geometrical characteristics: $h=1$ (thickness of the cylinder), $Z_0^{2'} = 60$ (the radius of the circle, which defines the middle surface of the cylinder), $c_1 = 0.1$, $E = 0.8 \times 10^6$, $\nu = 0.22$.

Initially, in order to get stable results, the influence of solution accuracy of equations system ε was researched. Dependence of the hoop stress σ_θ on the value ε for sections I-I and II-II, corresponding to angle $Z^{3'}$, which is equal to 0° and 90° , is shown in the table 1. For the purpose of comparison the values from monograph [6] are represented, which were obtained by the formula:

$$\sigma_\theta = qZ_0^{2'} \left(1 \pm \frac{6C_l}{h} \right) \frac{1}{h}. \quad (2)$$

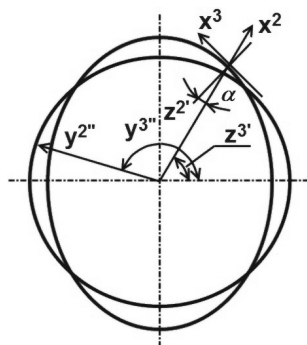


Fig. 1. Endless cylinder with a slight bend

Table 1

The dependence of hoop stress σ_θ on the ε value

σ_θ	[6]	$\varepsilon = 10^{-3}$		$\varepsilon = 10^{-4}$		$\varepsilon = 10^{-5}$	
		I-I	II-II	I-I	II-II	I-I	II-II
within	96	60.91	61.52	96.63	95.16	97.23	95.75
externally	24	60.11	59.53	24.61	25.75	23.97	25.05

We can see that value $\varepsilon = 10^{-3}$ is not sufficient and provides axisymmetrical stress-strain state, which does not correspond to the real actual state. However, in the process of reduction of ε result is quickly stabilizing. In the case of $\varepsilon = 10^{-5}$ the difference between examined values of stresses is no

more than 1.3%.

Table 2 shows the results of calculations based on the number of Fourier series members.

Table 2

Dependence of stress σ_θ on membership Fourier series number

σ_θ	[6]	$L = 2$		$L = 3$		$L = 4$	
		I-I	II-II	I-I	II-II	I-I	II-II
Within	96	95.49	94.21	96.63	95.16	96.5	95.03
externally	24	23.36	24.27	24.61	25.75	24.77	25.88

Saving even a minimum number of members, that equal to two, provides difference 1.86% between maximum values of stresses ($\varepsilon = 10^{-5}$).

The stress-strain state of thin built-in end cylinder under external pressure is analyzed. Form is described by equation (1). The length of the cylinder is $L = 8Z_0'$. Other parameters are the same as in the previous example.

Stable result has been got with 20 FE along the meridional direction and two members of Fourier series. Fig. 2 and 3 shows the results of solving by the proposed method and by the method described in [14], where curve 1 is stress distribution on the inner surface side, and curve 2 - on its outer surface. The solid and dotted lines are the result of semi-analytical solution, dashed - as described in [14]. The presence of a minor form deviation from the axially symmetric essentially affects the picture of stress-strain state. Especially substantially axial stresses σ_z are redistributed along circular coordinate, not only in value but also in sign. Moreover, in the nearest built-in end area on zero meridian, component of moment is missed for axial and the hoop stresses. At the same time, on meridian, which corresponds to $Z^{3'} = 90^\circ$, moments are quite considerable.

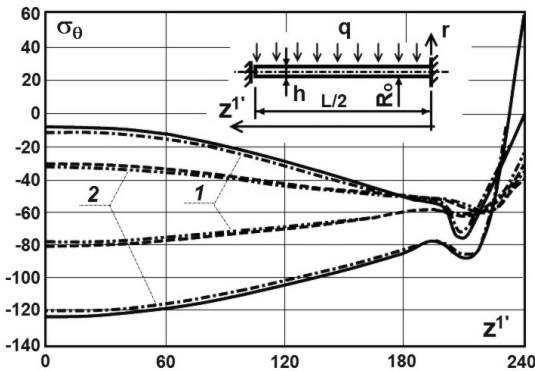


Fig. 2. Hoop stresses σ_θ on the inside and outer surface

The effect of bending size on the stress distribution in the massive endless cylinder, which is loaded by uniformly distributed external pressure $q = 1$ is researched. The body shape is defined as (1) in the previous examples. The following mechanical and geometrical characteristics are accepted: $Z_o^{2'} = 10$, $h = 1$, $\nu = 0.22$, $E = 0.8 \times 10^6$ (Fig. 4).

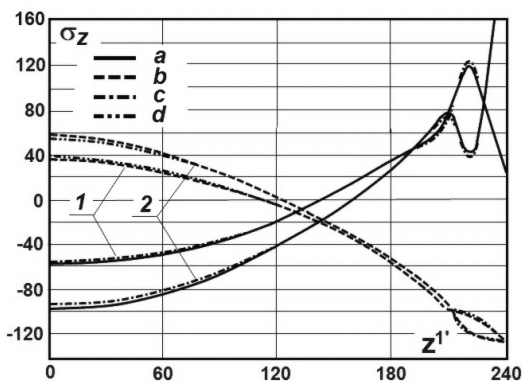


Fig. 3. Axial stresses σ_z . a - solution for meridian 90° , b - meridian 0° , c - method [14] for meridian 90° , d - method [14] for meridian 0°

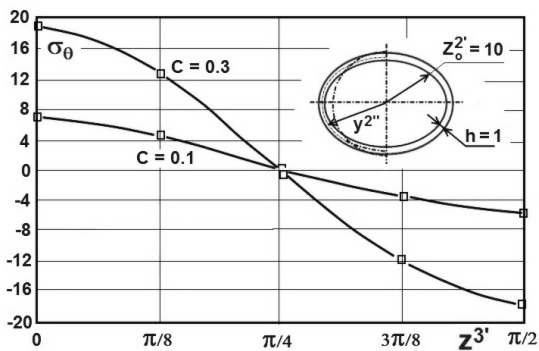


Fig. 4. Distribution of moment component of σ_θ stresses along circular coordinates

The graph shows the distribution of bending hoop component of stresses σ_θ depending on the angular coordinate Z^3' ($0 \leq Z^3' \leq \pi/2$). The solid line describes results of a reference solution, which has been got with the help of traditional 3D finite element method. Squares - values, which calculated on the

base of semi-analytical method.

The results are coincide with great precision. Three-dimensional finite element approximation needs 9 FE along circular direction, that, by the same other conditions, gives increasing in numerical operations for problem solution than semi-analytical based approach.

Conclusion

The efficient approach to numerical modeling of deformation of 3D bodies with complex configuration and structure subject to initial deviation of form is created on the base of new modifications of algorithms for solving equilibrium equations of semi-analytical finite element method.

Basic circle and prismatic finite elements with variable geometry and physical-mechanical parameters are developed. The usage of average values of known and unknown functions in the plane of finite element cross section combined with moment scheme and based on the tensor components of physical deformation allows to decrease the volume of mathematical operations associated with the numerical integration.

Effectiveness and simulation veracity analysis are provided on the base of specific test cases.

The developed methods and algorithms are implemented as a package of applications and can be used in the different directions of engineering analysis to determine the safety factors of constructions or their parts, which are three-dimensional bodies of revolution or prismatic bodies with complex structure.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Semi-analytical finite element method in problems of fracture of 3D bodies / [Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Pyskunov S.O., Sakharov O.S.] – K., KNUSA, 2005. – 298p.
2. *Bazhenov V.A.* Semi-analytical finite element method in 3D dynamic problems / [Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Sakharov O.S., Solodei I.I.] – K., KNUSA, 2012. – 248p.
3. *Bazhenov V.A.* Semi-analytical finite element method in mechanics of deformable bodies / [Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Sakharov O.S., Topor O.G.] - Kiev: Vipol, 1993, 376p.
4. *Bazhenov V.A.* Numerical modeling of concrete structures destruction by the finite element method / [Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Kozak O.L., Rutkovskyy V.A., Sakharov O.S.] – Kiev: Naukova dumka, 1996. – 360p.
5. *Gulyar O.I.* Convergence of the moment scheme of finite elements in the problems of elastic and plastic axially symmetric deformation / Gulyar O.I., Sakharov O.S., Chornyy S.M. // Strength of materials and structural theory. – N.32, 1978. - pp.3-10.
6. *Valiswili N.V.* Methods of analysis of shell of revolution on mainframe / [Valiswili N.V.] - M.: Mechanical engineering, 1976, 278p.
7. *Zenkevich O.* The finite element method in the technique / [Zenkevich O.] – M.: Mir, 1975, - 539p.
8. *Zolotov A.B.* Discrete-continuous finite element method. Application in construction / [Zolotov A.B., Akymov P.A., Sydorov V.N., Mozhaleva M.L.] – M.: Press ASV, 2010. – 336p.

9. *Zolotov A.B.* Practical methods of building designs calculation. Numerically-analytical methods / [Zolotov A.B., Akymov P.A.] – М.: Press ASV, 2006. – 208p.
10. *Zolotov A.B.* Numerical and analytical methods for design of structures / [Zolotov A.B., Akymov P.A., Sydorov V.N., Mozhaleva M.L.] – М.: Press ASV, 2009. – 336p.
11. *Sakharov O.S.* The finite element method in mechanics of solids / [Sakharov O.S., Kyslookyy V.N., Kyrychevskyy V.V. and others] - Kiev: Vyscha schkola, 1982.- 479p.
12. *Solodei I.I.* Basic SAFEM finite-element models for three dimension bodies in the dynamic problems / Solodei I.I. // Strength of materials and structural theory. – К.:KNUSA, N.90, 2012. - pp.122-140.
13. *Wilson E.L.* Structural Analysis of Axisymmetric Solids / Wilson E.L. // AIAA J.- 1965.- 3, N.12.- P.2269-2274.
14. *Kyslookyy V.N.* Moment scheme of finite element for geometrically nonlinear problems of shell strength and stability / Kyslookyy V.N., Sakharov O.S., Solovey M.O. // Strength of materials, N.7, 1977. – pp.25-33.

Солодей І.І., Вабищевич М.О., Сезевич Б.І., Чепурна О.О.

ЕФЕКТИВНІСТЬ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ПОЧАТКОВИХ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ ФОРМИ

В рамках напіваналітичного методу скінченних елементів розглянуті чисельні моделі для аналізу напружено-деформованого стану кругових та призматичних неоднорідних тіл неканонічної форми, що знаходяться під дією довільного стаціонарного або нестаціонарного навантаження. Проведено апробацію підходу та дослідження ефективності і достовірності рішень на основі контрольних прикладів.

Ключові слова: напіваналітичний метод скінченних елементів, тіло обертання, геометричні недосконалості, відхилення форми, вигини, напружено-деформований стан.

Солодей І.И., Вабищевич М.О., Сезевич Б.И., Чепурная Е.А.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ ФОРМЫ

В рамках полуаналитического метода конечных элементов рассмотрены численные модели для анализа напряженно-деформированного состояния круговых и призматических неоднородных тел неканонической формы, находящиеся под действием произвольного стационарного или нестационарного воздействия. Проведена апробация подхода, исследование эффективности и достоверности решений на основе контрольных примеров.

Ключевые слова: полуаналитический метод конечных элементов, тело вращения, геометрические несовершенства, отклонения формы, изгибы, напряженно-деформированное состояние.

УДК 624.074.04

STABILITY OF CYLINDRICAL ANISOTROPIC SHELLS UNDER AXIAL PRESSURE IN THREE-DIMENSIONAL STATEMENT

M.P. Semenuk¹

Doctor of Science,

V.M. Trach²

Doctor of Science,

A.V. Podvornyi²

Ph.D

¹*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine*

²National University of Water Management and Nature Resources Use

Approach to the solution of a problem of stability of cylindrical anisotropic shells under the influence of the axial compression, based on use of procedure of Bubnova-Galerkin taking into account boundary conditions on surfaces and end faces of a cylindrical shells and a numerical method of discrete orthogonalization is offered. The problem of stability of a cylindrical shells made of the material which characteristics are described by one plane of elastic symmetry is solved. Dependence of sizes of critical loadings on an angle of rotation of the main directions of elasticity of an initial material relatively curvature designs is investigated. Results are presented in the form of schedules and provided in the table, besides, the analysis is carried out them.

Introduction

Approach to the solution of a problem of stability of cylindrical anisotropic shells based on two dimensional theory is presented in detail in works [1,2]. Research on the stability of shell rotation from isotropic and orthotropic materials under axial compression in three-dimensional setting is described in works [3-9]. Solutions for three-dimensional stability of cylindrical orthotropic materials are presented in [5].

Absence of the research on the stability of anisotropic shells based on three-dimensional setting, made from the material that has elastic properties which are described by one plane of elastic symmetry, explains the complexity of the solution for such problems. As previously discovered, this is caused by the connectivity of the strains of tension and shift, bend and tension. Accounting for these in the calculation models results in more complex, comparing to orthotropic materials, equations of stability. Moreover, taking them into account in the models allows to develop and design shell systems from such materials that are capable of operation loading while remaining optimal, for example, based on weight, rigidity. In addition, the resulting three-dimensional solutions can serve as standards of measurement in calculating stability using numerical method of shell constructions that have more complicated geometry.

Problem Description

Under consideration are elastic cylindrical shells on a cylindrical coordinate system r, z, θ . Axis z and θ of which are matching with the lines of the main curves of the construction, r – normal coordinate or the radius of the cylinder that is not dependent on coordinates z and θ . Anisotropy of the material is described by the angle of rotation of the main directions of elasticity of the material relatively to z axis, of the adopted coordinate system, Fig. 1.

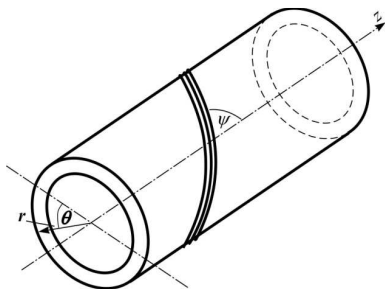


Fig. 1. Cylindrical thick-walled anisotropic shell

Equilibrium Equation written based on work [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\sigma_{rr} + r \frac{\partial (\tau_{zr})}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{\theta r})}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta} + r F_r \right]; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{rz} + r \frac{\partial (\sigma_{zz})}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_{\theta z})}{\partial \theta} + r F_z \right]; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r} + r \frac{\partial (\tau_{z\theta})}{\partial z} + \frac{\partial (\sigma_{\theta\theta})}{\partial \theta} + r F_\theta \right], \end{aligned} \quad (1)$$

Where F_r, F_z, F_θ - force projection of the vector volume in directions tangent to the coordinate lines r, z, θ ; σ, τ – projection of stress on axis of the adopted system of coordinates of shell elasticity:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr} + \sigma_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \tau_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \tau_{r\theta} \frac{1}{r} u_\theta; \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{z\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \tau_{rz} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \sigma_{\theta\theta} \frac{1}{r} u_r + \tau_{z\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \tau_{r\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \\ \tau_{rz} &= \tau_{rz} + \tau_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \sigma_{rr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \tau_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; \\ \tau_{zr} &= \tau_{zr} + \tau_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_{zz} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \tau_{z\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \tau_{z\theta} \frac{1}{r} u_\theta; \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta} + \tau_{r\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \tau_{r\theta} \frac{1}{r} u_r + \sigma_{rr} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \tau_{rz} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta r} &= \tau_{r\theta} + \tau_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \tau_{z\theta} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \sigma_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \sigma_{\theta\theta} \frac{1}{r} u_{\theta}; \\
\tau_{z\theta} &= \tau_{z\theta} + \tau_{z\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \tau_{z\theta} \frac{1}{r} u_r + \sigma_{zz} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \tau_{rz} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r}; \\
\tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} + \tau_{z\theta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{r\theta} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \sigma_{\theta\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Connection between the components of the elasticity and movements [8]:

$$\begin{aligned}
e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r; & e_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\
e_{z\theta} &= \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}; & e_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; & e_{r\theta} &= \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Here u_z , u_{θ} , u_r – shift of the cylinder points in direction of axis z , θ , r respectively.

Relationship of the generalized Hooke Law, that connects components of elasticity and tension in changing the angle of the axis of orthotropy relatively to axis z written below [7]:

$$\begin{aligned}
e_{zz} &= a_{11}\sigma_{zz} + a_{12}\sigma_{\theta\theta} + a_{13}\sigma_{rr} + a_{16}\tau_{z\theta}; \\
e_{\theta\theta} &= a_{12}\sigma_{zz} + a_{22}\sigma_{\theta\theta} + a_{23}\sigma_{rr} + a_{26}\tau_{z\theta}; \\
e_{rr} &= a_{13}\sigma_{zz} + a_{23}\sigma_{\theta\theta} + a_{33}\sigma_{rr} + a_{36}\tau_{z\theta}; \\
e_{r\theta} &= a_{44}\tau_{r\theta} + a_{45}\tau_{rz}; \\
e_{rz} &= a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz}; \\
e_{z\theta} &= a_{16}\sigma_{zz} + a_{26}\sigma_{\theta\theta} + a_{36}\sigma_{rr} + a_{66}\tau_{z\theta}. \quad (4)
\end{aligned}$$

In (4) a_{ij} ($i, j = 1, 6$) – mechanical constants of the material that has one plane of elastic symmetry, connection of which with constants of the material axis of orthotropy matches with the coordinates a'_{ij} , written in accordance with [7]:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a'_{11} \cos^4 \psi + (2a'_{12} + a'_{66}) \cos^2 \psi \sin^2 \psi + a'_{22} \sin^4 \psi; \\
a_{22} &= a'_{22} \cos^4 \psi + (2a'_{12} + a'_{66}) \cos^2 \psi \sin^2 \psi + a'_{11} \sin^4 \psi; \\
a_{12} &= a'_{12} + (a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} - a'_{66}) \sin^2 \psi \cos^2 \psi; \\
a_{66} &= a'_{66} + 4(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12} - a'_{66}) \cos^2 \psi \sin^2 \psi; \\
a_{16} &= [2a'_{22} \sin^2 \psi - 2a'_{11} \cos^2 \psi + (2a'_{12} + a'_{66})(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)] \cos \psi \sin \psi; \\
a_{26} &= [2a'_{22} \cos^2 \psi - 2a'_{11} \sin^2 \psi - (2a'_{12} + a'_{66})(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)] \cos \psi \sin \psi; \\
a_{13} &= a'_{13} \cos^2 \psi + a'_{23} \sin^2 \psi; \\
a_{23} &= a'_{23} \cos^2 \psi + a'_{13} \sin^2 \psi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{36} &= 2(a'_{23} - a'_{13})\cos\psi \sin\psi ; \\
a_{33} &= a'_{33} ; \\
a_{44} &= a'_{44} \cos^2\psi + a'_{55} \sin^2\psi ; \\
a_{55} &= a'_{55} \cos^2\psi + a'_{44} \sin^2\psi ; \\
a_{45} &= (a'_{44} - a'_{55})\cos\psi \sin\psi ,
\end{aligned} \tag{5}$$

here ψ – angle of rotation of the main direction of elasticity of fibrous orthotropic material relative to z axis of the adopted system of coordinates.

Methodology for solving the problem

Relationship of the generalized Hooke Law for materials with one plane of elastic symmetry (4), transformed to the following view and used in the system of equations (1)

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= b_{11}e_{zz} + b_{12}e_{\theta\theta} + b_{16}e_{z\theta} + c_1\sigma_{rr} ; \\
\sigma_{\theta\theta} &= b_{12}e_{zz} + b_{22}e_{\theta\theta} + b_{26}e_{z\theta} + c_2\sigma_{rr} ; \\
\tau_{z\theta} &= b_{16}e_{zz} + b_{26}e_{\theta\theta} + b_{66}e_{z\theta} + c_3\sigma_{rr} ; \\
e_{rr} &= -c_1e_{zz} - c_2e_{\theta\theta} - c_3e_{z\theta} + c_4\sigma_{rr} ; \\
e_{rz} &= a_{45}\tau_{r\theta} + a_{55}\tau_{rz} ; \\
e_{r\theta} &= a_{44}\tau_{r\theta} + a_{45}\tau_{rz} ,
\end{aligned} \tag{6}$$

where b_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$), c_i ($i = \bar{1}, \bar{4}$) – characteristics, that are calculated using mechanical constants a_{ij} ($i, j = 1, 3, 5, 6$) of the shell material [4].

Equations of stability based on static criteria of Euler, derived by using system (1), while taking into account the dependencies (2), (3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\sigma_{rr} + r \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{zr} + \sigma_{zz}^0 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \tau_{z\theta}^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tau_{\theta r} + \tau_{z\theta}^0 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\sigma_{\theta\theta} + \tau_{z\theta}^0 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right) \right] ; \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{rz} + r \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^0 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{z\theta}^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\tau_{z\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] ; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{r\theta} + \left(\tau_{r\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + r \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{z\theta} + \tau_{z\theta}^0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) + \sigma_{zz}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma_{\theta\theta} + \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{7}$$

where σ_{zz}^0 and $\tau_{z\theta}^0$ are known subcritical tension values. Since the problem of axial compression is considered here, prevailing tensions are σ_{zz}^0 та $\tau_{z\theta}^0$, which are proved by the results of the research on the stress state of the cylindrical shells made from the orthotropic materials and materials with one plane of elastic symmetry [4, 7], that are represented in the system (7). This points to the heterogeneity of the critical loadings state of the cylindrical shell.

Deriving for such construction the connection between these loadings. Since until the moment when stability is lost the shell preserves non-deformed state, then in subcritical state of deformation $e_{z\theta}$ equals to zero and is described (4):

$$e_{z\theta} = a_{16}\sigma_{zz}^0 + a_{66}\tau_{z\theta}^0 = 0,$$

Where only prevailing subcritical tension in axial compression are accounted for.

Based on this a connection between the axial and tangential subcritical tensions can be identified:

$$\tau_{z\theta}^0 = -\frac{a_{16}}{a_{66}}\sigma_{zz}^0. \quad (8)$$

By substituting in (6) elasticities e_{zz} , $e_{\theta\theta}$, $e_{z\theta}$, e_{rz} , $e_{r\theta}$, e_{rr} with their expressions from (3) and substituting resulting dependencies σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ in (7), system of equations of stability is obtained:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r + \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{b_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \\ &- \frac{c_3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2b_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta}; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{c_2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \\ &- \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{2b_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \sigma_{zz}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta}; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= c_4 \sigma_{rr} - \frac{c_2}{r} u_r - c_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - c_3 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{c_2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z}{\partial r} &= a_{55}\tau_{rz} + a_{45}\tau_{r\theta} - \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= a_{45}\tau_{rz} + a_{44}\tau_{r\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r}u_\theta.\end{aligned}\quad (9)$$

To solve (9) free setting the value of σ_{zz}^0 and in accordance with (8) determining the value $\tau_{z\theta}^0$.

Solution of the system (9) derived by applying boundary conditions:

On inner $r = r_0$ and outer $r = r_N$ surfaces of the shell

$$\sigma_{rr} = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0; \quad (10)$$

On end faces

$$\sigma_{zz} = -\sigma_{zz}^0, \quad u_r = u_\theta = 0, \quad (11)$$

That can point to the existence on them of the diaphragms of absolute rigidity in their planes and flexible among them.

In the subsequent transformation of the three-dimensional problem into one-dimensional, that will be solved using method of discrete orthogonalization, using the Bubnova-Galerkin procedure. In accordance with it, separate all functions into trigonometric rows based on coordinates along forming z so that all satisfy boundary conditions (11), and also take into account their frequency based on circular coordinate θ :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\ \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\ \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z; \\ u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z; \\ u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z; \\ u_\theta(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z.\end{aligned}\quad (12)$$

After performing mathematical transformations and separation of the variables in the equations (9) with the help of the relations (12), derived an infinite

system of ordinary differential equations of stability in the normal form Cauchy:

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r)\bar{y}, \quad T(r) = t_{i,j}(r), \quad (13)$$

$\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}$
 – solving vector function. Non-zero elements of the matrix $T(r)$ shown below:

$$t_{1,1} = \frac{c_2 - 1}{r}, \quad t_{1,2} = l_p, \quad t_{1,3} = -\frac{k}{r}, \quad t_{1,4} = \frac{b_{22}}{r^2} + \sigma_{zz}^0 l_p^2, \quad t_{1,5} = -l_p \frac{b_{12}}{r},$$

$$t_{1,6} = k \frac{b_{22}}{r^2}, \quad t_{1,10} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_m, \quad t_{1,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{b_{26}}{r^2},$$

$$t_{1,12} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(\frac{b_{26}}{r} l_m + \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 l_m \right), \quad t_{2,1} = -c_1 l_p, \quad t_{2,2} = -\frac{1}{r}, \quad t_{2,4} = -\frac{b_{12}}{r} l_p,$$

$$t_{2,5} = b_{11} l_p^2 + k^2 \frac{b_{66}}{r^2} + \sigma_{zz}^0 l_p^2, \quad t_{2,6} = -k \frac{b_{12} + b_{66}}{r} l_p, \quad t_{2,7} = -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_3}{r},$$

$$t_{2,10} = -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{b_{26}}{r^2},$$

$$t_{2,11} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \left(2 \frac{k b_{16}}{r} l_m + 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_m \right), \quad t_{2,12} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \left(b_{16} l_m^2 + k^2 \frac{b_{26}}{r^2} \right),$$

$$t_{3,1} = k \frac{c_2}{r}, \quad t_{3,3} = -\frac{2}{r}, \quad t_{3,4} = k \frac{b_{22}}{r^2}, \quad t_{3,5} = -k \frac{b_{12} + b_{66}}{r} l_p,$$

$$t_{3,6} = b_{66} l_p^2 + k^2 \frac{b_{22}}{r^2} + \sigma_{zz}^0 l_p^2, \quad t_{3,7} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_m,$$

$$t_{3,10} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(\frac{b_{26}}{r} l_m + \frac{2}{r} \tau_{z\theta}^0 l_m \right), \quad t_{3,11} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(b_{16} l_m^2 + k^2 \frac{b_{26}}{r^2} \right),$$

$$t_{3,12} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(2 \frac{k b_{26}}{r} l_m + 2 \frac{k}{r} \tau_{z\theta}^0 l_m \right), \quad t_{4,1} = c_4, \quad t_{4,4} = -\frac{c_2}{r}, \quad t_{4,5} = c_1 l_p,$$

$$t_{4,6} = -k \frac{c_2}{r}, \quad t_{4,11} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_3}{r}, \quad t_{4,12} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) c_3 l_m, \quad t_{5,2} = a_{55},$$

$$t_{5,4} = -l_p, \quad t_{5,9} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}, \quad t_{6,3} = a_{44}, \quad t_{6,4} = \frac{k}{r}, \quad t_{6,6} = \frac{1}{r},$$

$$\begin{aligned}
t_{6,8} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}, \quad t_{7,4} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) 2 \frac{k}{r} \tau_z^0 l_m, \quad t_{7,5} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{b_{26}}{r^2}, \\
t_{7,6} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(\frac{b_{26}}{r} l_m + \frac{2}{r} \tau_z^0 l_m \right), \quad t_{7,7} = \frac{c_2 - 1}{r}, \quad t_{7,8} = l_p, \quad t_{7,9} = -k \frac{1}{r}, \\
t_{7,10} &= \frac{b_{22}}{r^2} + \sigma_{zz}^0 l_p^2, \quad t_{7,11} = -l_p \frac{b_{12}}{r}, \quad t_{7,12} = k \frac{b_{22}}{r^2}, \quad t_{8,1} = -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{c_3}{r}, \\
t_{8,4} &= -\sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) k \frac{b_{26}}{r^2}, \quad t_{8,5} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \left(2 \frac{k b_{16}}{r} l_m + 2 \frac{k}{r} \tau_z^0 l_m \right), \\
t_{8,6} &= \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) \left(b_{16} l_m^2 + k^2 \frac{b_{26}}{r^2} \right), \quad t_{8,7} = -c_1 l_p, \quad t_{8,8} = -\frac{1}{r}, \quad t_{8,10} = -\frac{b_{12}}{r} l_p, \\
t_{8,11} &= b_{11} l_p^2 + k^2 \frac{b_{66}}{r^2} + \sigma_{zz}^0 l_p^2, \quad t_{8,12} = -k \frac{b_{12} + b_{66}}{r} l_p, \quad t_{9,1} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k_3 l_m, \\
t_{9,4} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(\frac{b_{26}}{r} l_m + \frac{2}{r} \tau_z^0 l_m \right), \quad t_{9,5} = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(b_{16} l_m^2 + k^2 \frac{b_{26}}{r^2} \right), \\
t_{9,6} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) \left(2 \frac{k b_{26}}{r} l_m + 2 \frac{k}{r} \tau_z^0 l_m \right), \quad t_{9,7} = -k \frac{c_2}{r}, \quad t_{9,9} = -\frac{2}{r}, \\
t_{9,10} &= k \frac{b_{22}}{r^2}, \quad t_{9,11} = -k \frac{b_{12} + b_{66}}{r} l_p, \quad t_{9,12} = b_{66} l_p^2 + k^2 \frac{b_{22}}{r^2}, \\
t_{10,5} &= -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k \frac{c_3}{r}, \quad t_{10,6} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) k_3 l_m, \quad t_{10,7} = c_4, \quad t_{10,10} = -\frac{c_2}{r}, \\
t_{10,11} &= c_1 l_p, \quad t_{10,12} = -k \frac{c_2}{r}, \quad t_{11,3} = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(m, p) a_{45}, \quad t_{11,8} = a_{55}, \quad t_{11,10} = -l_p, \\
t_{12,2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(p, m) a_{45}, \quad t_{12,9} = a_{44}, \quad t_{12,10} = \frac{k}{r}, \quad t_{12,12} = \frac{1}{r}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Here $l_m = \frac{m\pi}{L}$, $l_p = \frac{p\pi}{L}$, L – length of the cylinder forming, p , m – wave numbers in Fourier series (12).

Functions $\varphi(p, m)$ and $\varphi(m, p)$ dependent on the whole numerical parameters p and m are determined by the formulas:

$$\varphi(p, m) = \begin{cases} 0, & \text{if } p + m - \text{even number,} \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{p-m} + \frac{1}{p+m} \right) & \text{if } p + m - \text{odd.} \end{cases} \quad (15)$$

$$\varphi(m, p) = \begin{cases} 0, & \text{if } p + m - \text{even number,} \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{m-p} + \frac{1}{m+p} \right) & \text{if } p + m - \text{odd.} \end{cases}$$

Implementation of the resulting system of equations (13) given boundary conditions (11) is conducted by using numerical method of discrete orthogonalization [11]. Problem solution algorithm of stability of shell of rotation that is under axial compression was developed as software package.

Results of the numerical calculations and their analysis

Testing of the solution results based on the recommended approach of stability of cylindrical orthotropic shells under the influence of axial compression were conducted with the values of the boundary voltages derived in [5]. Evaluated shells: radius $R=0.6m$, length $L=2.15m$, physical and mechanical properties of the material $E_{11}=10,0E_0$, $E_{22}=2.8E_0$, $E_{33}=E_0$, $G_{12}=1.075E_0$, $G_{13}=G_{23}=2E_0$, $\nu_{21}=0.3$, $\nu_{12}=0.084$, $\nu_{32}=0.22$, $\nu_{31}=0.35$, $E_0=1,0 \cdot 10^6 \text{ MH/m}^2$. Comparison results of the boundary voltage values are presented in Table 1.

Table 1

Wall Thickness h, m	Calculation Results Based on Methodology [5]		Calculation Results Based on Recommended Methodology	
	Number of Waves	Critical Tension $\sigma_{cr}, \text{MH/m}^2$	Number of Waves	Critical Tension $\sigma_{cr}, \text{MH/m}^2$
0.012	6	$4.0 \cdot 10^4$	6	$4.0 \cdot 10^4$
0.02	5	$6.5 \cdot 10^4$	5	$6.5 \cdot 10^4$
0.025	4	$8.0 \cdot 10^4$	4	$8.0 \cdot 10^4$

Analysis of the results from test calculations on stability shown in Table 1 points to full conformity of the solutions derived based on the recommended approach, in comparison with the results in work [5]. Unfortunately, the authors of the article were not able to find in the literature reliable data calculations on the stability of anisotropic cylindrical shells in a three-dimensional setting.

In evaluating the recommended methodology, consider cylindrical shells of stable thickness that are created by the cross-laying layers of previously

orthotropic material under angles $\pm\psi_i$ to the axis z . Parameters of the shell match with the one used in the previous problem, thickness h equal to 0.03m. Investigated three types of shells that are under axial pressure. First – single layer, second – double layer. Calculations of the third construction is conducted without accounting for anisotropic material constants a_{i6} , $i=1\div 3$, a_{45} , meaning – shell was orthotropic.

Since the accepted geometric characteristics of the shell match those of thin shell, the recommended approach to solving three-dimensional problem of stability can be compared to the solutions obtained using two-dimensional theory. Values of the critical loadings calculated using recommended in this work approach are compared with the results using the classical theory, obtained in the work [1].

Calculations of stability is shown in graphs in the Fig. 1 and detailed in Table 1, where number of waves in circular direction denote the moment of loss of stability.

On the graph all critical values F_{cr} are reduced to values, derived using Kirchhoff-Lyav hypothesis F_{cl}^0

$$F^* = \frac{F_{cr}}{F_{cl}^0}.$$

At the angle of laying of the composite $\psi = 0$, based on the working formula [10]

$$F_{cl}^0 = \frac{\sqrt{E_{11}E_{22}}}{\sqrt{(3(1-\nu_{12}\nu_{21}))}} \left[\frac{h^2}{r} \right] \sqrt{\frac{\sqrt{E_{11}E_{22} + \nu_{12}E_{11} + 2G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}}{\sqrt{E_{11}E_{22} - \nu_{12}E_{11} + \frac{E_{11}E_{22}}{2G_{12}}}}}. \quad (17)$$

Markings of the curves on the Fig. 2 are as following. Numbers 1, 2 and 3 denote the types of the shells. Letters (a) and (b) on the Fig. 1 mark the type of the used calculation approach – recommended and the methodology of work [1] respectively. Location of the curves on the Fig. 1 suggest that the value of the critical loadings of axial compression significantly depends on the angle ψ of the home laying of orthotropic material.

Values of the critical axial compression loadings that are shown in Table 2, need to be multiplied by 10^2 MH/m.

As shown, the minimal values of the axial critical loadings are applicable to single layer anisotropic shell (curvature 1). As the number of layers increases to two critical axial loadings significantly increases (curvature 2) and gains the largest values in calculations without accounting for anisotropic constants of the material (curvature 3).

Table 2

Angle of Wind - ding ψ , deg	Single Layer Shell				Double Layer Shell (cross- wound shell) $\pm\psi$				Calculation without accounting for anisotropic material constants			
	Recommended methodology		Methodology [1]		Recommended methodology		Methodology [1]		Recommended methodology		Methodology [1]	
	Number of Waves	F_{cr}	Number of Waves	F_{cr}	Number of Waves	F_{cr}	Number of Waves	F_{cr}	Number of Waves	F_{cr}	Number of Waves	F_{cr}
0	4	28.2	4	31.2	4	28.2	4	31.2	4	28.2	4	31.2
10	3	20.0	4	24.4	4	27.4	4	29.7	4	31.0	4	34.5
20	3	16.3	3	20.9	3	28.2	3	30.3	3	32.8	0	42.0
30	3	15.9	3	20.2	2	28.5	2	30.6	3	33.5	0	38.3
40	3	18.6	3	22.9	1	28.8	1	30.8	0	32.7	0	35.0
50	2	24.8	3	30.4	0	30.7	0	32.3	0	32.6	0	35.2
60	2	27.6	1	31.6	3	30.0	1	36.1	2	31.6	0	37.9
70	4	27.4	4	31.6	4	27.5	4	31.4	2	29.9	4	41.1
80	4	26.6	4	29.9	4	26.3	4	29.4	2	28.2	4	34.0
90	4	28.0	4	30.9	4	28.0	4	30.9	4	28.0	4	30.9

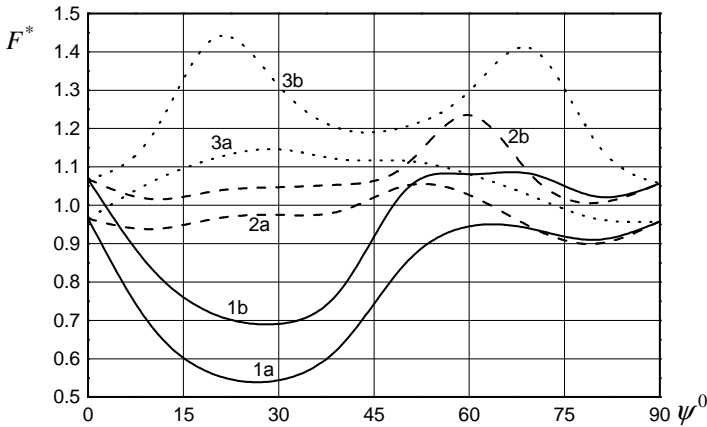


Fig. 2. Dependencies of critical loadings on the angle of rotation of orthotropic axis

Moreover, in cases of single and double layer shells the results of the critical loadings received based on the recommended approach practically match values of the classical theory [1] (differences do not exceed 9%). Stability calculations without accounting for anisotropic constants of the material show significant differences between the results of critical loadings based on the rec-

ommended methodology and the classical theory [1], which, however, does not exceed 27%. It's important to point out that for all three types of cylinders critical values of the axial compression, calculated by using the recommended methodology, are smaller than the calculated values based on the classical approach.

Conclusion

As shown, the application of the recommended approach that is based on the usage of Bubnova-Galerkin procedure, that takes into account boundary conditions on surfaces and end faces of a cylindrical shells and a numerical method of discrete orthogonalization, allows to solve in three-dimensional settings the problems of stability of cylindrical shells that are under axial load, made from one plane of elastic symmetry materials in a wide range of geometric and mechanical characteristics.

REFERENCES

1. *Bazhenov V. A., Semenuk M.P., Trach V.M.* Nelineynye deformuvannya, stiykist' i zakritichna povedinka anizotropnih obolonok (Nonlinear deformation, stability and overcritical behavior of anisotropic shells): Monographya. – K.: Karavella.- 2010. – 352 c.
2. *Grigoluk E.I., Kulikov G.M.* Mnogosloynne armirovannye obolochki: Raschet pnevmaticheskikh shin (The multilayered reinforced shells: Calculation of pneumatic tires). Mashinostroenie, 1988. – 288 c.
3. *Grigoluk E.I., Nosatenko P.Y.* Ob effektah anizotropii v obolochkah vrascheniya pri neosesimmetrichnom nagruzenii. (About effect of anisotropy in shells of revolution at not axisymmetric loading) – Dokladi akademii nauk SSSR (Reports of academy of Sciences of the USSR), 1991. – tom 316, №6. – C. 1354-1357.
4. *Grigorenko Y.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D.* Zadachi teorii uprugosti neodnorodnyh tel (Tasks of the theory of elasticity of non-uniform bodies) – K.: Naukova dumka, 1991. – 216 c.
5. *Guz A.N., Babich I.U.* Prostranstvennie zadachi teorii uprugosti I plastichnosti. T.4 Trehmernaya teoriya ustoychivosti deformiruemykh tel (Space tasks of the theory of elasticity and plasticity. T.4. Three-dimensional theory of stability of deformable bodies).– Kiev (Kiyv): Naukova dumka, 1985. – 280 c.
6. *Kostromin V.P., M'achenkov V.I.* Ustoychivost' mnogosloynnih obolochek c tsilindricheski-anizotropnym neodnorodnymi sloyamii (Stability of multilayered shells with cylindrical-anisotropic non-uniform layers). – Soprotivlenie materialov I teoriya sooruzheniy (Strength of Materials and Theory of Structures), 1973, Vy'p. 21. – C. 11-16.
7. *Lehnitskii S.G.* Teoriya uprugosti anizotropnogo tela (Theory of elasticity of an anisotropic body) . – 2 edition., – M.: Nauka, 1977. – 415 c.
8. *Novozilov V.V.* Osnovy nelineynoi teorii uprugosti (Bases of the nonlinear theory of elasticity). – L. - M.: OGIz, 1948. - 211 c.
9. *Nosatenko P.Y., Omelchenko M.N.* Vliyanie anizotropii na ustoychivost' perekrestno armirovannoy tsilindricheskoi obolochki (Influence of anisotropy on stability cross the reinforced cylindrical shells). – Mekhanika kompozitnykh materialov (Mechanics of composite materials), 1991. – №1, C. 167-169.
10. *Gol'denblat I.I.* Soprotivlenie stekloplastikov (Resistance of fibreglasses). – M.: Mashinostroenie, 1968. – 304 c.

11. *Grigorenko Y.M., Krukov N.N.* Chislennye resheniya zadach statiki gibkih sloistih obolochek s peremennimi parametrami (Numerical solutions of problems of a statics of flexible layered shells with variable parameters). – К.: Naukova dumka, 1988. – 264с.
12. *Баженев В.А., Семенюк М.П., Трач В.М.* Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела.- 2010. – 352 с.
13. *Григолоук Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. Машиностроение, 1988. – 288 с.
14. *Григолоук Э.И., Носатенко П.Я.* Об эффекте анизотропии в оболочках вращения при неосесимметричном нагружении. – Доклады акад. наук. СССР, 1991. – том 316, №6. – С. 1354-1357.
15. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
16. *Гузь А.Н., Бабич И.Ю.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
17. *Костромин В.П., Мясенков В.И.* Устойчивость многослойных оболочек с цилиндрически-анизотропными неоднородными слоями. – Сопrotивление материалов и теория сооружений, 1973, вып. 21. – С. 11-16.
18. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
19. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. – Л. - М.: ОГИЗ, 1948. - 211 с.
20. *Носатенко П.Я., Омельченко М.Н.* Влияние анизотропии на устойчивость перекрестно армированной цилиндрической оболочки. – Механика композитных материалов, 1991. – №1, С. 167-169.
21. *Гольденблат И.И.* Сопrotивление стеклопластиков. – М.: Машиностроение, 1968. – 304 с.
22. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – К.: Наукова думка, 1988, – 264с.

Семенюк М.П., Трач В.М., Подворный А.В.

СТІЙКІСТЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПІД ОСЬОВИМ ТИСКОМ У ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Запропоновано підхід стосовно реалізації задачі стійкості циліндричних анізотропних оболонок під дією осьового тиску, що базується на застосуванні процедури Бубнова-Гальоркіна при урахуванні граничних умов на поверхнях і торцях циліндричної оболонки та чисельного методу дискретної ортогоналізації. Розв'язано задачу стійкості циліндричної оболонки, що виготовлена з матеріалу, характеристики якого описуються однією площиною пружної симетрії. Досліджено залежність величин критичних навантажень від кута повороту головних напрямів пружності вихідного матеріалу відносно кривин конструкції. Результати представлені у вигляді графіків і наведені у таблиці, окрім того, проведено їх аналіз.

Семенюк Н.П., Трач В.М., Подворный А.В.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ОСЕВЫМ ДАВЛЕНИЕМ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Предложен подход к решению задачи устойчивости цилиндрических анизотропных оболочек под действием осевого сжатия, основанный на использовании процедуры Бубнова-Галеркина с учетом краевых условий на поверхностях и торцах цилиндрической оболочки и численного метода дискретной ортогонализации. Решена задача устойчивости цилиндрической оболочки изготовленной из материала, характеристики которого описываются одной плоскостью упругой симметрии. Исследована зависимость величин критических нагрузок от угла поворота главных направлений упругости исходного материала относительно кривизны конструкции. Результаты представлены в виде графиков и приведены в таблице, кроме того, проведен их анализ.

УДК 539.3

КОМПЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКОСТІ КОЛИВАНЬ КРУЖЛЯННЯ КОЛОН ГЛИБОКОГО БУРІННЯ

В.І. Гуляєв¹

д-р техн. наук

В.В. Гайдайчук²

д-р техн. наук

Л.В. Шевчук¹

асистент

¹*Національний транспортний університет, вул Суворова 1, м. Київ. 01010*²*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

У статті на основі неголономних і фрикційних моделей контактної взаємодії розглядається задача про стійкість коливань кружляння долота бурильної колони, яка попередньо напружена поздовжньою силою і обертається під дією прикладеного до долота моменту сил різання.

Виконано комп'ютерне моделювання самозбудження коливань кружляння на простих фрикційних і кінематичних схемах з простими геометричними тілами. Отримані результати дозволили встановити найбільш важливі фактори, що впливають на характер протікання розглянутих коливальних процесів.

Ключові слова: бурильна колона, долото, коливання кружляння, кінематична модель, стійкість.

1. Вступ. За запасами паливно-енергетичних покладів Україна належить до відносно забезпечених ресурсами країн світу. За весь період буріння було розвідано понад 314 родовищ нафти та газу, серед яких 57 класифікують як середні, великі та унікальні за своїми запасами.

Для збільшення об'ємів видобування нафти і газу в Україні необхідне відкриття нових великих і значних за запасами (більше 30 млн.т.) родовищ. Це, в основному, великі і глибокі (глибше 6 км) та нові слабо освоєні території: глибоководний шельф Чорного моря, окраїнні зони ДДЗ (Дніпровсько-Донецької западини), перехідні зони від суші до моря. Крім того необхідно відмітити, що в теперішній час більшість нафтових та газових родовищ, які перебувають в експлуатації, вже вичерпали свої запаси, що призводить до спаду обсягів видобутку. Умови видобутку вуглеводневих палив з родовищ, що на даний час вже введено в розробку, постійно ускладнюються через низку чинників. Однак, оскільки потенціал цих родовищ ще не повністю використаний, тому для стабілізації видобутку нафти та газу потрібна модернізація наявних нафтовидобувних установок.

В зв'язку з тим, що проходка глибоких і криволінійних свердловин пов'язана з ускладненням умов їх буріння, досить часто їх буріння супроводжується нештатними ситуаціями і аваріями. Тому практичне впровадження нових методів буріння глибоких свердловин вимагає відповідного математичного моделювання для проектування їх траєкторій і використання сучасних техніки та технології для їх проходки. При цьому найбільший інтерес представляють питання визначення зовнішніх і внутрішніх сил, а також крутних моментів, що діють на бурильну колону в свердловині у процесах її спуску, підйому й функціонування.

Серед задач розвитку технологій глибокого буріння питання створення комп'ютерного забезпечення для їх моделювання набули найбільш гостру актуальність також у зв'язку з початком у третьому тисячолітті видобутку сланцевого газу.

Сланцевий газ – це природний газ, що видобувається з горючих сланців, який складається переважно з метану. Масштабне промислове виробництво сланцевого газу було розпочато в США на початку 2000-х років компанією Devon Energy на родовищі Barnett Shale, яка на цьому родовищі в 2002 р. вперше пробурила горизонтальну свердловину. Завдяки різкому зростанню його видобутку, названому в засобах масової інформації «газовою революцією», в 2009 році США стали світовим лідером видобутку цього виду палива (745,3 млрд куб. м).

Великі поклади сланцевого газу виявлені також в ряді держав Європи, зокрема, в Австрії, Англії, Угорщині, Німеччині, Польщі, Швеції, Україні. У 2010 році Україна видала ліцензії на розвідку сланцевого газу для компаній Exxon Mobil і Shell.

Оскільки бурильна колона представляє собою дуже гнучку конструкцію, в процесі буріння вона знаходиться в режимі складного динамічного руху. Він включає поздовжні, крутильні і поперечні коливання, які, як правило, виявляються суттєво нелінійними із-за контактної взаємодії бурильної колони зі стінкою свердловини.

Так, на рис. 1,а показано осьове биття низу бурильної колони. Рисунок 1,б відображає випадок, коли бурильна колона здійснює плоске згинальне коливання і б'ється об стінку свердловини. В результаті фрикційної контактної взаємодії долота, що обертається, з породою БК може переходити в режим торсійних автоколивань (рис. 1,в). Один із самих складних видів коливань виникає при згинальних коливаннях бурильної колони, що супроводжується безвідривним контактом долота і породи. В результаті цієї взаємодії долото перекочується по поверхні дна і стінки, приходячи в режим так званого *whirl vibration* (коливань «кружляння»), рухаючись в напрямі обертання колони (пряме кружляння, «forward whirl») або протилежному напрямі (обернене кружляння, «backward whirl»).

Ці коливання є однією із основних причин передчасного руйнування елементів бурильної колони. Вони знижують ефективність буріння, пошкоджують стінку свердловини, визивають труднощі в управлінні траєкторією свердловини.

В зв'язку з цим добування вуглеводневих палив виявляється пов'язаним із значними технологічними труднощами проходки глибоких свердловин та високим показником аварійності бурильного виробництва. Причини виникнення аварій при буріння пов'язані з можливістю появи нештатних ситуацій, викликаних критичними станами квазістатичної рівноваги і коливань бурильних колон (БК).

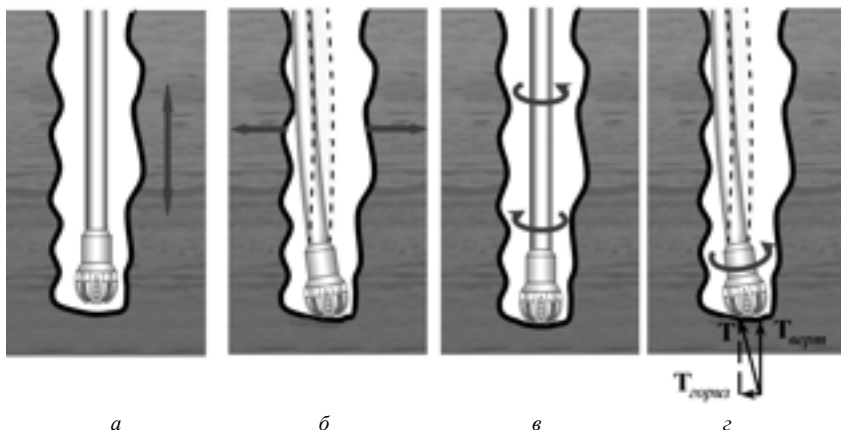


Рис. 1. Форми коливань нижньої частини конструкції бурильної колони: *а* – осьове биття долота; *б* – поперечне биття колони; *в* – крутильні автоколивання долота і колони; *г* – кружляння низу колони (whirling motion)

Явища, які лежать в основі процесу пружних згинальних коливань нижньої частини бурильної колони, що обертається, мають суттєві відмінності від ефектів, які виявлені в теорії обертання пружних валів з роторами. Ці відмінності викликані наявністю постійної відривної і безвідривної контактної взаємодії долота з дном свердловини і її стінкою. Тому задачі теоретичного прогнозування динамічної поведінки БК в процесі буріння є досить актуальними.

Теоретичне моделювання сил опору й динамічних явищ, що супроводжують буріння свердловини, дозволяє вирішувати такі фундаментальні завдання як отримання стовбура необхідної форми й зниження поздовжніх і поперечних коливань колони, а також зменшення сил контактної й фрикційної взаємодії між колоною й стінкою свердловини.

Різні наукові і технічні аспекти проектування конструкцій бурильних установок, технологічних режимів буріння в наземних умовах і в морських акваторіях, а також результати аналізу механічних ефектів, які супроводжують процеси буріння, відображені в різних публікаціях. В роботах [1, 3, 7, 9, 11] виконані дослідження процесів переміщення (спуску, підйому, функціонування) БК в криволінійних свердловинах, дана методика обчислення сил опору руху БК, запропонований спосіб їх зменшення. В статті [8] описана постановка задачі про стійкість БК, праці [2, 4, 6, 10] присвячені проблемі крутильних і згинальних коливань БК, роботи [5, 12, 13, 15] пов'язані з моделюванням коливань системи в результаті кружляння долота по дну свердловини.

Дана стаття присвячена аналізу явищ, які пов'язані з останнім видом згинальних рухів низу бурильної колони, запропоновані нові моделі, які побудовані на обліку фрикційних і неголономних ефектів, проведено комп'ютерне моделювання коливань кружляння при різних значеннях характерних параметрів.

2. Методика комп'ютерного моделювання коливань кружляння.

Як показують експерименти та спостереження, за деяких режимів коливань кружляння долота починає перекочуватися по криволінійній поверхні дна свердловини, а його центр рухається за досить складними траєкторіями, які нагадують багатопелюсткову квітку, з утворенням на поверхні стінки свердловини системи жолобів, недопустимих за технічними умовами буріння. При цьому можлива реалізація двох типів руху долота. У одному з них кочення долота відбувається з проковзуванням, і між його поверхнею та дном свердловини виникає сила тертя, направлена вздовж дотичної до траєкторії руху точки контакту. Під час другого типу руху долото, що обертається, перекочується без проковзування по поверхні дна свердловини, задовольняючи умови кінематичних в'язей. Вивчити автоколивання такої системи можна лише за методами теоретичної механіки неголономних систем та механіки пружних стрижнів.

Оскільки поверхня долота і дно свердловини можуть мати різні геометричні форми, то в процесі буріння під дією різних збурень можливі переходи руху долота від чистого вертіння (штатний процес буріння) до його додатковим коченням, відходу від вертикалі точки дотику долота з дном свердловини і викривлення осі бурильної колони. Для дослідження цих явищ необхідно поставити задачу про пружні поперечні коливання бурильної колони, в якій кінематичні в'язі є граничними умовами для рівнянь її руху.

Для моделювання коливань кружляння системи бурильна колона-долото представимо колону як довгий трубчастий пружний стрижень, який напружений поздовжньою силою T і крутним моментом M_z , що

обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо своєї поздовжньої осі. В каналі труби БК з швидкістю V рухається рідина з густиною ρ_p . Дослідимо коливання стрижня в системі координат $Oxuz$, що обертається, відносно осі Oz , направленою вздовж поздовжньої осі недеформованого стрижня.

Для виведення рівнянь динаміки виділимо елемент труби довжиною dz . Рівняння рівноваги внутрішніх моментів відносно осей Oy , Ox системи $Oxuz$, що обертається, мають вигляд [2, 6, 8, 12]:

$$\begin{aligned} dM_y - Q_x dz - Tdu - M_z d\left(\frac{dv}{dz}\right) &= 0, \\ dM_x - Q_y dz - Tdv + M_z d\left(\frac{du}{dz}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

де dM_y , dM_x – прирости пружних моментів; $Q_x dz$, $Q_y dz$ – моменти перерізаючих сил пружності Q_x , Q_y відповідно з плечами dz ; Tdu , Tdv – моменти внутрішньої осьової сили попереднього напруження T , які створюються приростами du , dv на відріжку dz поперечних переміщень u , v вздовж осей Ox , Oy ; $M_z d\left(\frac{dv}{dz}\right)$, $M_z d\left(\frac{du}{dz}\right)$ – згинальні моменти, які викликані зміною орієнтації крутного моменту M_z , завдяки приростам $d\left(\frac{dv}{dz}\right)$, $d\left(\frac{du}{dz}\right)$ кутів повороту $\frac{dv}{dz}$, $\frac{du}{dz}$ на відріжку dz .

Розкриваючи вирази для функцій, які входять в рівняння (1), отримаємо рівняння коливань трубчастого стрижня, що обертається, попередньо напружений силою T , крутним моментом M_z і з вмістом потоку рідини [2, 6, 12]

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega^2 u - \\ - 2(\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial v}{\partial t} + V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega^2 v + \\ + 2(\rho_c F_c + \rho_p F_p) \omega \frac{\partial u}{\partial t} + V^2 \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2V \rho_p F_p \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + (\rho_c F_c + \rho_p F_p) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

Завдяки тому, що ці рівняння пов'язані, можна зробити висновок, що бурильна колона не може здійснювати плоскі коливання і форма її руху може бути лише просторовою.

Побудовані рівняння (2) повинні бути доповнені відповідними умовами на краях виділеної для розрахунку ділянки БК і умовами на проміжних опорах. Як відмічено вище, граничні умови на нижньому кінці БК формуються, виходячи із співвідношень контактної взаємодії долота зі скельною породою. Вона може бути фрикційною або кінематичною (неголономною). Для їх виведення необхідно розглянути кочення долота по верхній дна свердловини.

Для співставлення результатів аналізу коливань кружляння за фрикційною і неголономною моделями розглянемо долото сферичної форми (поверхня S_1), яке рухається по дну сферичної свердловини (поверхня S_2). Щоб описати його пружний поворот, введемо жорстко зв'язану з ним систему координат $Cx_1y_1z_1$, осі Cx_1 , Cy_1 якою у вихідному положенні паралельні осям Ox , Oy , відповідно, а при пружній деформації БК повертаються на кути $-v|_C$ і $u|_C$.

Кочення поверхні S_2 по поверхні S_1 задаватимемо в правій рухомій системі координат $Gx_2y_2z_2$, початок G якої збігається з точкою дотику поверхонь S_1 і S_2 , вісь Gz_2 є продовженням відрізка CG , а вісь Gy_2 перпендикулярна площині, яка містить вісь OZ і відрізок CG , і орієнтована у напрямі обертання.

Умова кочення долота із проковзуванням дозволяє сформулювати в точці C дві групи крайових рівнянь. Вони включають дві групи динамічних рівнянь, які визначають динамічну рівновагу всіх сил і моментів відносно точки G .

Вважатимемо, що переміщення u , v і кути $u' = \partial u / \partial z$, $v' = \partial v / \partial z$ малі. Для визначення швидкості центра C долота виразимо абсолютні кутові швидкості введених систем координат через кутову швидкість ω обертання системи $Oxyz$, кути u' , v' пружних поворотів долота і кутові швидкості \dot{u}' , \dot{v}' цих поворотів.

Абсолютна кутова швидкість $\Omega_{(0)}^{(0)}$ системи $Oxyz$ за означенням рівна

$$\Omega_{(0)}^{(0)} = \omega \mathbf{k} . \quad (3)$$

Абсолютна кутова швидкість системи $Cx_1y_1z_1$ в проекціях на осі цієї ж системи складає

$$\Omega_{(1)}^{(1)} = \Omega_{(0)}^{(1)} + \dot{u}'\mathbf{j}_1 - \dot{v}'\mathbf{i}_1 = -\dot{v}'\mathbf{i}_1 + \dot{u}'\mathbf{j}_1 + \omega\mathbf{k}_1. \quad (4)$$

Абсолютна кутова швидкість системи $Cx_1y_1z_1$ в проєкціях на осі системи $Oxyz$ рівна

$$\Omega_{(1)}^{(0)} = (-\dot{v}' + \omega u')\mathbf{i} + (\dot{u}' + \omega v')\mathbf{j} + \omega\mathbf{k}. \quad (5)$$

Орієнтація системи $Gx_2y_2z_2$ по відношенню до системи $Oxyz$ задається кутом α між осями Oz і Gz_2 (рис. 2) і кутом β повороту площини x_2Gz_2 по відношенню до площини xOz :

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(R-a)}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{(u^2 + v^2)}{(R-a)^2}}, \quad (6)$$

$$\sin \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \cos \beta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (7)$$

Тоді абсолютна кутова швидкість системи $Gx_2y_2z_2$ в проєкціях на осі цієї ж системи обчислюється так

$$\Omega_{(2)}^{(2)} = -(\omega + \dot{\beta})\sin \alpha \cdot \mathbf{i}_2 + \dot{\alpha} \cdot \mathbf{j}_2 + (\omega + \dot{\beta})\mathbf{k}_2. \quad (8)$$

Щоб сформулювати кінематичні краєві умови, підрахуємо абсолютну швидкість центру C тіла S_2 , яке котиться, в проєкціях на осі системи $Oxyz$ [14].

$$\mathbf{v}_C^{(0)} = \mathbf{v}_G^{abc} + \Omega_{(1)}^{(0)} \times \vec{GC}. \quad (9)$$

Тут \mathbf{v}_G^{abc} – абсолютна швидкість

точки G долота, \vec{GC} – вектор, який визначається формулою

$$\vec{GC} = -a \sin \alpha \cos \beta \mathbf{i} - a \sin \alpha \sin \beta \mathbf{j} - a \cos \alpha \mathbf{k}. \quad (10)$$

Побудовані вище кінематичні співвідношення дозволяють приступити до обчислення всіх сил і моментів (включаючи і фрикційні), які діють на долото, і розглянути їх рівновагу. Для цього умовно відокремимо долото від бурильної колони і спочатку розглянемо рівновагу сил, які діють на нього (рис. 3). В загальному випадку до них відносяться

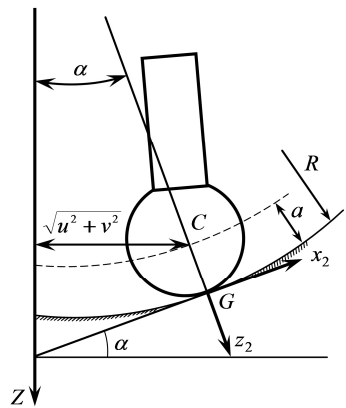


Рис. 2. Схема орієнтації осі Gz_2

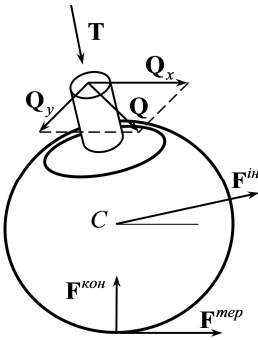


Рис. 3. Схема сил, які діють на долото

сила тертя $\mathbf{F}^{мер}$, сила інерції $\mathbf{F}^{ін}$, осьова сила \mathbf{T} , нормальна до контактуючих поверхонь сила контактної взаємодії $\mathbf{F}^{кон}$ і перерізувальна сила \mathbf{Q} , яка діє на долото із сторони відділеної бурильної колони. На основі принципу Д'Аламбера векторна сума всіх цих сил дорівнює нулю. Для спрощення постановки задачі припустимо, що момент інерції долота малий в порівнянні з інерційними характеристиками всієї системи і тому силами інерції відносно інших сил можна знехтувати.

Тоді рівняння рівноваги долота, відділеного від бурильної колони, можна записати у вигляді

$$\mathbf{Q} + \mathbf{T} + \mathbf{F}^{кон} + \mathbf{F}^{мер} = 0. \quad (11)$$

Приймемо, що $\mathbf{F}^{кон} = -\mathbf{T}$, тоді рівняння (11) спроститься

$$\mathbf{Q} + \mathbf{F}^{мер} = 0. \quad (12)$$

Зручно розглядати це рівняння в системі координат $Oxzy$, яка обертається разом з бурильною колоною. В ній

$$\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j}, \quad (13)$$

де

$$Q_x = EI \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}, \quad Q_y = EI \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}. \quad (14)$$

Вектор сили тертя $\mathbf{F}^{мер}$ при реалізації тертя Кулона між долотом і поверхнею свердловини обчислюється так

$$\mathbf{F}^{мер} = -\mu \mathbf{v}_G^{abc} = -\mu |\mathbf{T}| \cdot \mathbf{v}_G^{abc} / |\mathbf{v}_G^{abc}|. \quad (15)$$

Для обчислення \mathbf{v}_G^{abc} скористаємося формулою (9). Із неї слідує

$$\mathbf{v}_G^{abc} = \mathbf{v}_C^{(0)} - \mathbf{\Omega}_{(1)}^{(0)} \times \vec{GC}. \quad (16)$$

Вектор $\mathbf{v}_C^{(0)}$, який тут використовується, обчислюється з врахуванням того, що точка C приймає участь в пружних коливаннях стержня в системі координат, що обертається, і обертальному русі всієї системи зі швидкістю ω . Тоді

$$\mathbf{v}_C^{(0)} = \mathbf{v}_C^{np} + \omega \times (u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) = u\dot{\mathbf{i}} + v\dot{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ u & v & 0 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = (u - \omega v)\mathbf{i} + (v + \omega u)\mathbf{j}, \quad (17)$$

де $\mathbf{v}_C^{np} = \dot{u}\mathbf{i} + \dot{v}\mathbf{j}$ – швидкість руху цієї точки в системі координат $Oxuz$, що обертається.

Після обчислення добутку $\Omega_{(1)}^{(0)} \times \vec{GC}$, отримуємо, що

$$\begin{aligned} v_{G,x}^{abc} &= \dot{u} - \omega v - a \sqrt{1 - \frac{(u^2 + v^2)}{(R-a)^2}} (-\dot{u}' - \omega v') - \frac{a\omega v}{R-a}, \\ v_{G,y}^{abc} &= \dot{v} + \omega u - a \sqrt{1 - \frac{(u^2 + v^2)}{(R-a)^2}} (-\dot{v}' + \omega u') + \frac{a\omega u}{R-a}. \end{aligned} \quad (18)$$

Підставляючи рівності (13) – (15), (18) в рівняння (12), отримаємо першу групу граничних умов для рівнянь (2) пружних коливань труби бурильної колони.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\mu |\mathbf{T}|}{\sqrt{(v_{G,x}^{abc})^2 + (v_{G,y}^{abc})^2}} \left(\dot{u} - \omega v - a \sqrt{1 - \frac{(u^2 + v^2)}{(R-a)^2}} (-\dot{u}' - \omega v') - \frac{a\omega v}{R-a} \right) &= 0, \\ EI \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - \frac{\mu |\mathbf{T}|}{\sqrt{(v_{G,x}^{abc})^2 + (v_{G,y}^{abc})^2}} \left(\dot{v} + \omega u - a \sqrt{1 - \frac{(u^2 + v^2)}{(R-a)^2}} (-\dot{v}' + \omega u') + \frac{a\omega u}{R-a} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Динамічні краєві рівняння в точці C впливають з умови динамічної рівноваги моментів сил пружності, моментів сил інерції і реакцій в'язей, прикладених до долота. При їх виведенні суттєвий вплив на структуру цих рівнянь впливає вибір полюса і системи осей, відносно яких обчислюються моменти, що діють на долото. Зазвичай найзручніше за полюс вибирати точку зіткнення контактуючих тіл, а за систему відліку – систему координат, в якій осьові моменти інерції рухомого тіла залишаються незмінними [14]. Перша умова приводить до виключення з розгляду реакції неголономної в'язі, друга – до уникнення необхідності диференціювати моменти інерції тіла по часу. У зв'язку з цим виберемо точку G за полюс і систему координат $Gx_2y_2z_2$ за систему відліку. Для побудови рівнянь руху скористаємося теоремою про зміну моменту кількостей руху долота відносно точки G [14]

$$\frac{d\tilde{\mathbf{K}}_G^{(2)}}{dt} + \Omega_{(2)}^{(2)} \times \mathbf{K}_G^{(2)} = \mathbf{M}_G^{(2)}, \quad (20)$$

де $\mathbf{K}_G^{(2)}$ – момент кількостей руху долота відносно точки G , представлений в системі $Gx_2y_2z_2$, $\mathbf{M}_G^{(2)}$ – момент сил пружності, які діють на долото, також записаній в цій же системі.

Якщо розглядати неголономну модель кочення долота, то замість рівнянь (19) слід виписати рівняння кочення

$$\begin{aligned} \dot{u} - \omega v - a \sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2}{(R-a)^2}} \left(-\dot{u}' - \omega v' + \frac{\omega v}{R-a} \right) &= 0, \\ \dot{v} + \omega u - a \sqrt{1 - \frac{u^2 + v^2}{(R-a)^2}} \left(-\dot{v}' + \omega u' - \frac{\omega u}{R-a} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким чином система граничних умов (19), (20) дозволяє інтегрувати рівняння (2) коливань нижньої частини бурильної колони в припущенні, що долото перекочується по дну свердловини з можливістю проковзування. В граничному випадку, коли сили тертя, які викликані цим проковзуванням, стають досить великими, долото починає перекочуватися без проковзування, переходячи в режим неголономної динаміки. При такому режимі слід використовувати рівняння (20), (21).

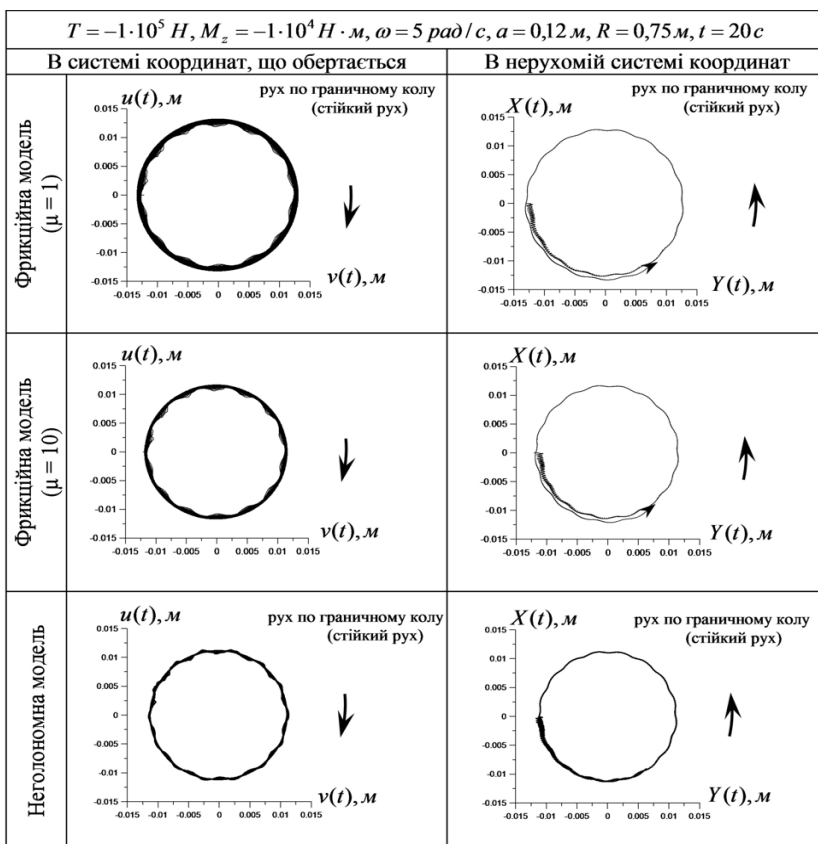
3. Стійкі і нестійкі режими фрикційної і неголономної динаміки долота. Наведені вище співвідношення визначають трьохточкову крайову задачу динаміки нижнього прольоту бурильної колони з долотом на нижньому кінці. Чисельне розв'язання поставленої задачі здійснюється методом скінченних різниць по змінній z з використанням неявної схеми інтегрування за часом t .

В результаті проведеного дослідження встановлено, що режим самозбудження даних автоколивань і їх форми в значній мірі залежать від згинальної жорсткості бурильної колони, значень T , M_z , а також геометрії контактуючих поверхонь долота і свердловини. В зв'язку з цим можна зробити висновок, що вибираючи різні значення цих параметрів можна як стабілізувати, так і дестабілізувати коливання кружляння. При цьому значну роль може відігравати також тип моделі, використаної для розрахунків. Дослідження проведені при наступних значеннях характерних параметрах системи $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_l = 1.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $l = 9 \text{ м}$, $e = 1 \text{ м}$, $F = \pi(r_1^2 - r_2^2) = 5.34 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$, $F_l = \pi r_2^2 = 2.01 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, $I = \pi(r_1^4 - r_2^4) = 1.94 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$, $r_1 = 0.09 \text{ м}$, $r_2 = 0.08 \text{ м}$.

В табл. 1 наведені форми руху центра C долота в системі координат $Oxuz$, що обертається (зліва), і нерухомій системі координат $OXYZ$ (справа). Розглянемо випадок $T = -10^{-5} \text{ Н}$, $M_z = -10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$,

$\omega = 5 \text{ рад/с}$, $a = 0,12 \text{ м}$, $R = 0,75 \text{ м}$. Моделювання виконано на відрізку часу $0 \leq t \leq 20 \text{ с}$. Вважалося, що рух системи починається після деякого її малого відхилення від вихідного вертикального стану. Дві верхні позиції в цій таблиці відносяться до випадку фрикційної взаємодії, нижня позиція відповідає неголономній моделі. Аналізуючи ці результати, можна відмітити, що при різних коефіцієнтах тертя μ , ковзання долота по дну свердловини є малим, тому траєкторії руху центра C в усіх трьох випадках практично однакові.

Таблиця 1



Важливо підкреслити, що в нерухомій системі координат долото перекочується в напрямі, протилежному напрямі ω . Такі режими називаються оберненим кружлянням долота. Хоча рух здійснюється по замкнутій кру-

говій траєкторії і тому є стійким, на думку спеціалістів він представляє суттєву небезпеку для системи.

Якщо кутову швидкість збільшити із значення $\omega = 5 \text{ рад/с}$ до $\omega = 20 \text{ рад/с}$ (табл. 2), фрикційна і неголономна моделі призводять до різних форм коливань кружляння. Для фрикційної моделі траєкторії мають вигляд спіралей, що розкручуються і тому є нестійкими.

Таблиця 2

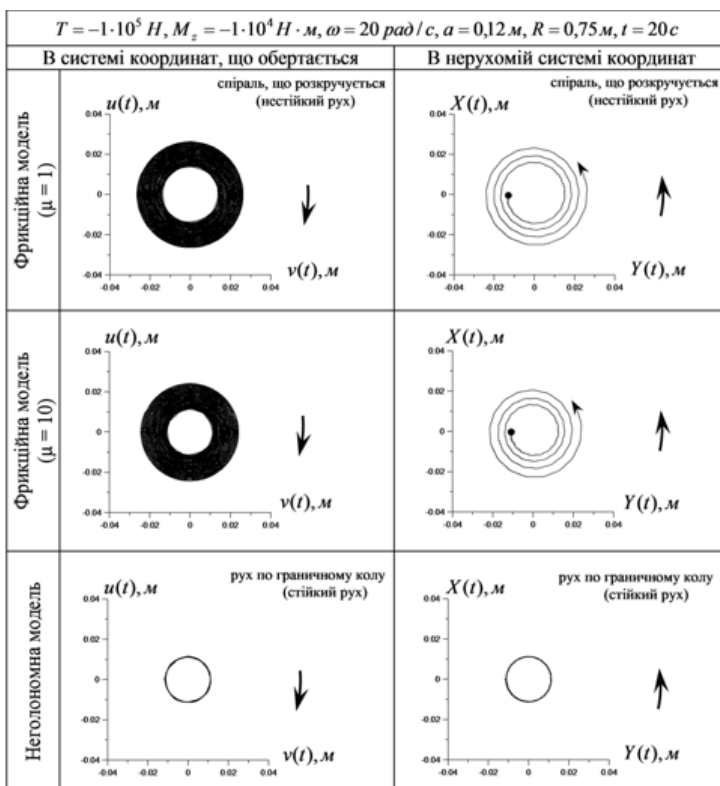
$T = -1 \cdot 10^5 \text{ Н}, M_z = -1 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}, \omega = 20 \text{ рад/с}, a = 0,12 \text{ м}, R = 0,75 \text{ м}, t = 20 \text{ с}$	
В системі координат, що обертається	
спіраль, що розкручується (нестійкий рух)	
Фрикційна модель ($\mu = 1$)	
В нерухомій системі координат	
спіраль, що розкручується (нестійкий рух)	
Фрикційна модель ($\mu = 10$)	
Неголономна модель	

Однак, якщо забезпечити контакт долота із свердловиною без проковзування, то долото починає рухатися по круговій траєкторії. Такий рух є стійким. Варто відзначити, що оскільки здійснюється режим оберненого руху в системі координат, що обертається, долото встигає здійснити бі-

льше число обертів, ніж в нерухомій (лівій позиції). Тому в цій системі спіралі є більш щільними.

Підбором параметрів системи можна також забезпечити стабільний рух долота. Наприклад, якщо сферичне долото радіусом a рухається по еліпсоїдальному дну свердловини з параметрами $b = 0,2\text{ м}$ і $c = 0,3\text{ м}$, то після початкового збурення долото рухається по спіральній траєкторії, яка прямує до центральної точки. Такий режим є більш сприятливим. Оскільки навіть після якого-небудь збурення долото повертається в вихідне положення, такий режим руху є стійким.

Таблиця 3



Він також є сприятливим з тієї точки зору, що напрям руху в системі координат, що обертається і нерухомій системі співпадають. Таке кружляння називається прямим.

Висновки. Розглянута задача комп'ютерного моделювання явища самозбудження коливань кружляння долота бурильної колони. Показано, що режим цих коливань є багатопараметричним, оскільки траєкторії рух залежать від форми долота, геометрії поверхні дна свердловини і кутових швидкостей обертання колони. Як показали результати розрахунків, проведених за допомогою фрикційної і неголономної моделей, стійкість режиму значною мірою визначається згинальною жорсткістю та нестійкістю нижнього прольоту колони між двома її центраторами і геометрією системи. Оскільки ця жорсткість падає зі зменшенням площі поперечного перерізу колони та збільшенням крутного моменту й осьової стискувальної сили падає, потрібно так підібрати значення цих величин, щоб унеможливити автоколивання системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрусенко Е.Н. Изгиб бурильной колонны в криволинейной скважине с несовершенствами осевой линии / Е.Н. Андрусенко, В.И. Гуляев, С.Н. Худолий // Прикладная математика и механика. – 2012. – №3. – С. 459 – 468.
2. Борщ Е.И. Спиральные бегущие волны в упругих стержнях / Е.И. Борщ, Е.В. Вашилина, В.И. Гуляев // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – №2. – С. 143 – 149.
3. Гайдайчук В.В, Худолий С.М., Гловач Л.В. Теоретична ідентифікація сил опору, що діють на криволінійні бурильні колони / В.В.Гайдайчук, С.М. Худолий, Л.В.Гловач // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – №78. – С. 52 – 60.
4. Гуляев В.И. Квантованные аттракторы в волновых моделях торсионных колебаний колонн глубокого бурения / В.И. Гуляев, О.В. Глушакова, С.М. Худолий // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2010. – №2. – С. 134 – 147.
5. Christoforou A.P. Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions / A.P. Christoforou, A.S. Yigit // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – 206(2). – P.243 – 260.
6. Gulyayev V.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells / V.I. Gulyayev, O.I. Borshch // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011 — V. 78. — P. 759 – 764.
7. Gulyayev V.I. Modeling the energy-saving regimes of curvilinear bore-hole drilage/ V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, E.N. Andrusenko, N.V. Shlyun// Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. . – 2015. — V. 137, №1. — P. 011402-1 – 011402-8.
8. Gulyayev V.I. The buckling of elongated rotating drill strings / V.I.Gulyayev, V.V.Gaidaichuk, I.L. Solovjov, I.V. Gorbunovich //Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – 67. – P.140–148.
9. Gulyayev V.I. The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections / V.I. Gulyayev, S.M. Hudoly, L.V. Glovach // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.
10. Gulyayev V.I. Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models / V.I. Gulyayev, S.M. Hudoly, O.V. Glushakova // Journal of Multi-body Dynamics. – 2011 — V. 225. — P. 139 – 152.
11. Gulyayev V.I. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes / V.I. Gulyayev, S.N. Khudoliy, E.N. Andrusenko // Interaction and Multiscale Mechanics. – 2011. – V.4. – No.1. – P.1–16.
12. Gulyayev V I. Nonholonomic dynamics of drill string bit whirling in a deep bore-hole / V.I. Gulyayev, L.V. Shevchuk. // Journal of Multi-body Dynamics. – 2013 – V. 227, No.3. – P.234-244.

13. *Jansen J.D.* Wirl and chaotic motion of stabilized drill collars / J.D. Jansen. // SPE Drilling Engineering. – 1992. – 7(2). – P.107 – 114.
14. *Neimark Ju.I.* Dynamics of Nonholonomic Systems / Ju.I. Neimark, N.A. Fufaev. (Translation of mathematical monographs, 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1972. – 519p.
15. *Stroud D.* Real-time whirl detector improves RSS reliability, drilling efficiency / D. Stroud, J. Pagett, D. Minett-Smith // Hart Exploration & Production Magazine. – 2011. – V.84, №8. – P.42 – 43.

REFERENCES

1. Andrusenko E.N. The buckling of a drill string in a curvilinear borehole with axial line imperfections / E.N. Andrusenko, V.I. Gulyayev, S.N. Khudolii // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. – V.76, №3. – P. 330 – 336.
2. Borshch E.I. Helical traveling waves in elastic rods / E. I. Borshch, E. V. Vashchilina, V.I. Gulyayev // Mechanics of Solids. – 2009. – V.44, №2. – P. 288 – 293.
3. Gaidaichuk V.V. Theoretical identification of resistance forces acting on curvilinear drill strings / V.V. Gaidaichuk, S.M. Hudoly, L.V. Glovach // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2006. – № 78. – P. 52 – 60.
4. Gulyayev V.I. Quantized attractors in wave models of torsion vibrations of deep-hole drill strings / V. I. Gulyayev, O. V. Glushakova, S. N. Khudolii // Mechanics of Solids. – 2010. – V.45, №2. – P. 264 – 274.
5. *Christoforou A.P.* Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions / A.P. Christoforou, A.S. Yigit // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – 206(2). – P.243 – 260.
6. *Gulyayev V.I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells /V.I. Gulyayev, O.I. Borshch // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011 — V. 78. — P. 759 – 764.
7. *Gulyayev V.I.* Modeling the energy-saving regimes of curvilinear bore-hole drivage/ V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, E.N. Andrusenko, N.V. Shlyun// Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. . – 2015. — V. 137, №1. — P. 011402-1 – 011402-8.
8. *Gulyayev V.I.* The buckling of elongated rotating drill strings / V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, I.V. Gorbunovich //Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – 67. – P.140–148.
9. *Gulyayev V.I.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections / V.I. Gulyayev, S.M. Hudoly, L.V. Glovach // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.
10. *Gulyayev V.I.* Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models / V.I. Gulyayev, S.M. Hudoly, O.V. Glushakova // Journal of Multi-body Dynamics. – 2011 — V. 225. — P. 139 – 152.
11. *Gulyayev V.I.* Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes / V.I. Gulyayev, S.N. Khudolii, E.N. Andrusenko // Interaction and Multiscale Mechanics. – 2011. – V.4. – No.1. – P.1–16.
12. *Gulyayev V I.* Nonholonomic dynamics of drill string bit whirling in a deep bore-hole / V.I. Gulyayev, L.V. Shevchuk. // Journal of Multi-body Dynamics. – 2013 – V. 227, No.3. – P.234-244.
13. *Jansen J.D.* Wirl and chaotic motion of stabilized drill collars / J.D. Jansen. // SPE Drilling Engineering. – 1992. – 7(2). – P.107 – 114.
14. *Neimark Ju.I.* Dynamics of Nonholonomic Systems / Ju.I. Neimark, N.A. Fufaev. (Translation of mathematical monographs, 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1972. – 519p.
15. *Stroud D.* Real-time whirl detector improves RSS reliability, drilling efficiency / D. Stroud, J. Pagett, D. Minett-Smith // Hart Exploration & Production Magazine. – 2011. – V.84, №8. – P.42 – 43.

Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Шевчук Л.В.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ КРУЖЕНИЯ КОЛОНН ГЛУБОКОГО БУРЕНИЯ

В статье на основе неголономной и фрикционной моделей контактного взаимодействия рассматривается задача об устойчивости колебаний кружения долота бурильной колонны, которая предварительно напряжена продольной силой и вращается под действием приложенного к долоту момента сил резания.

Выполнено компьютерное моделирование самовозбуждения колебаний кружения на простых фрикционных и кинематических схемах с простыми геометрическими телами. Полученные результаты позволили установить наиболее важные факторы, влияющие на характер протекания рассмотренных колебательных процессов.

Ключевые слова: бурильная колонна, долото, колебания кружения, кинематическая модель, устойчивость.

Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Shevchuk L.V.

COMPUTER SIMULATION OF STABILITY OF DEEP DRILL STRING WHIRLING VIBRATION

In the paper, with the use of nonholonomic and friction models, the problem on stability of deep drill string bit whirl vibration is considered. The drill string is preloaded by longitudinal force and is rotating under action of cutting moment applied to the bit.

The computer simulation of the selfexcited whirl vibration is performed with the use of simple kinematic schemes with simple geometric bodies. The analysis results permitted to establish a series of the most important factors, affecting the character of the passing processes.

Key words: drill string, bit, vibration whirling, kinematic model, stability.

УДК 539.3

О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РЕШАТЕЛЯХ В КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСАХ, ОРИЕНТИРОВАННЫХ НА МНОГОЯДЕРНЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ С ОБЩЕЙ ОПЕРАТИВНОЙ ПАМЯТЬЮ

С.Ю. Фиалко¹

д-р. техн. наук

¹*Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology*

Рассматриваются прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричными разреженными матрицами, возникающими при применении метода конечных элементов к задачам строительной механики и механики деформированного твердого тела. Основное внимание уделяется методам достижения высокой производительности на многоядерных компьютерах с общей оперативной памятью (sharedmemorycomputers).

Ключевые слова: многофронтальный метод, суперузловой метод, метод конечных элементов, граф смежности, высокая производительность, параллельные вычисления.

Введение. Интенсивное развитие многоядерных компьютеров порождает необходимость совершенствования решателей – модулей конечноэлементных программных комплексов, ответственных за решение систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением прямых методов для симметричных разреженных матриц, возникающих при применении метода конечных элементов к задачам строительной механики и механики деформируемого твердого тела. Основное внимание будет уделено методам достижения высокой производительности на многоядерных компьютерах, массово используемых при решении таких задач.

«Узким местом» такой архитектуры является ограниченная пропускная способность системы оперативной памяти, разделяемой несколькими процессорами. Ключом к достижению высокой производительности и стабильной ускоряемости при увеличении количества процессоров является рациональное использование оперативной памяти кэш процессоров. Объем этой памяти ограничен, поэтому алгоритм, преобразовывающий большой объем данных, должен «уметь» данные, один раз помещенные в кэш, многократно использовать – реализовывать концепцию «cachereuse». Далеко не каждый алгоритм может с этим справиться. Поэтому возникает вопрос: а к каким вычислительным алгоритмам должна быть сведена данная задача (если это возможно), чтобы ускоряемость была стабильной? Одним из таких алгоритмов является матричное умножение плотных матриц *dgemm* –

general matrix multiplication. Таким образом, возникает проблема сведения разложения разреженной матрицы высокого порядка к последовательности умножений и сложений плотных матриц относительно небольшой размерности.

Для повышения производительности вычислительных алгоритмов используется также векторизация вычислений, основанная на том, что современные процессоры многоядерных компьютеров имеют специальные регистры, позволяющие за один цикл процессора выполнить несколько сложений или умножений. Однако для использования этих регистров необходимо разработать специальный алгоритм, поскольку обычный алгоритм для векторизации вычислений чаще всего оказывается непригодным.

Постановка задачи. Математическая формулировка задачи представляется так:

$$\mathbf{KX} = \mathbf{B}, \quad (1)$$

где \mathbf{K} – разреженная симметричная матрица жесткости, \mathbf{X} и \mathbf{B} – пакет неизвестных и пакет векторов правой части (нагрузок). Решение данной задачи прямым методом состоит в разложении (факторизации) матрицы

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{L}^T, \quad (2)$$

где \mathbf{L} – разреженная нижняя треугольная матрица, \mathbf{S}' – диагональ знаков.

Затем выполняется прямая подстановка

$$\mathbf{LY} = \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Y}, \quad (3)$$

диагональное масштабирование

$$\mathbf{S}'\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}, \quad (4)$$

и обратная подстановка

$$\mathbf{L}^T\mathbf{X} = \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X}. \quad (5)$$

Часто вместо \mathbf{LSL}^T разложения используется \mathbf{LDL}^T , где \mathbf{D} – диагональная матрица [1].

Прямые методы для разреженных матриц. Одной из первых фундаментальных публикаций, посвященных методам решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметричными разреженными матрицами, является монография [2]. Описанные в ней методы упорядочения эффективно уменьшают количество ненулевых элементов в нижней треугольной матрице \mathbf{L} , а представленные решатели идеально обходят операции с нулевыми элементами разреженных матриц. Однако недостатками этих решателей является отсутствие виртуализации (эти методы работают только в оперативной памяти) и распараллеливания, а также низкая производительность, обусловленная тем, что во внутренних циклах выполняются скалярно-векторные операции – вычисление скалярного произведения векторов или умножение вектора на скаляр. Эти алгоритмы содержат количество данных $O(n)$ и выполняют количество

операций также $O(n)$ [3]. Поэтому реализовать концепцию *cacheuse* для таких алгоритмов принципиально невозможно, и данные алгоритмы работают со скоростью медленной системы памяти, а процессор выполняет большое количество пустых циклов. Кроме того, хранение элементов разреженной матрицы столбец-по-столбцу в сжатом формате [2] не позволяет эффективно применить векторизацию вычислений.

Многофронтальные методы. В конце 90-х – начале 2000-х широкое применение получили многофронтальные решатели [5], [6], которые устранили перечисленные выше недостатки. Они используют любое упорядочение, строят дерево исключения и находят на этом дереве суперузлы. Дерево исключения – это структура данных, представляющая последовательность факторизации столбцов разреженной матрицы и зависимость между столбцами – какой из столбцов матрицы, расположенных справа от текущего, будет им поправляться в первую очередь. Каждая вершина такого дерева соответствует столбцу разреженной матрицы, а каждое ребро – зависимости между двумя столбцами. Если множество вершин дерева исключения принадлежит одной и той же ветви и имеют последовательную нумерацию, то такие вершины объединяются в суперузел. Каждому суперузлу в разреженной матрице соответствует плотный блок при главной диагонали, что позволяет объединить соответствующие столбцы матрицы в блок при появлении минимального количества нулевых элементов в блоке, расположенном ниже диагонального блока.

Объединение столбцов в блоки является ключевым моментом в увеличении производительности. В разреженной матрице мы не можем объединять столбцы произвольным способом, поскольку при этом происходит добавление большого количества нулевых элементов. Метод суперузлов позволяет сделать это более рационально.

Для объединенных столбцов при факторизации матрицы применяется алгоритм матричного умножения *dgemm*. В отличие от упомянутых выше алгоритмов умножения вектора на скаляр и вычисления скалярного произведения векторов, алгоритм матричного умножения хранит количество данных порядка $O(n^2)$ и выполняет количество арифметических операций порядка $O(n^3)$, что позволяет эффективно использовать память кэш процессора и регистры. Современные реализации *dgemm*, например [7], включают векторизацию вычислений, “*cacheuse*”, “*registeruse*” (данные, один раз загруженные в регистры процессора, должны использоваться как можно большее число раз), переупаковку данных, уменьшающую количество кэш-промахов, а также максимальное использование конвейеров процессора [4], [8].

Поэтому данная реализация матричного умножения работает со скоростью быстрого процессора, а не медленной системы памяти.

Затем в соответствии с полученным суперузловым деревом исключений производится факторизация. В плотную матрицу, называемую фронтальной, считываются столбцы исходной матрицы, номера которых соответствуют номерам вершин, объединенных в данном суперузле. Нулевые строки во фронтальную матрицу не включаются. Каждой строке и каждому столбцу фронтальной матрицы ставится в соответствие номер глобального уравнения матрицы жесткости \mathbf{K} . Затем к образованной таким образом фронтальной матрице добавляются матрицы поправок с суперузлов – предшественников данного суперузла. При этом алгебраически суммируются элементы матриц, имеющих одинаковые глобальные индексы. Если суперузел не имеет предшественников, то фронтальная матрица образуется только из элементов соответствующих столбцов исходной матрицы жесткости. Подробности изложены в [5], [6].

В результате на каждом шаге фронтальной факторизации выполняется частичное разложение фронтальной матрицы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{W}^T \\ \mathbf{W} & \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}' & 0 \\ \tilde{\mathbf{W}} & \mathbf{U} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{S} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\mathbf{L}')^T & \tilde{\mathbf{W}}^T \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где глобальные номера столбцов блоков \mathbf{A} , \mathbf{W} соответствуют номерам вершин данного суперузла, причем глобальные номера строк и столбцов блока \mathbf{A} соответствуют номерам строк и столбцов плотного блока при главной диагонали нижней треугольной матрицы \mathbf{L} ; элементы матрицы \mathbf{M} образуются при суммировании матриц поправок суперузлов – предшественников (при их отсутствии это нулевая матрица); \mathbf{U} – матрица поправок для данного суперузла; \mathbf{L}' – плотная нижняя треугольная матрица, \mathbf{S} – диагональ знаков, \mathbf{I} – единичная матрица. Из (6) следует:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \mathbf{A} = \mathbf{L}'\mathbf{S}(\mathbf{L}')^T \rightarrow \mathbf{L}', \mathbf{S} \\ 2. \quad & \mathbf{L}'\mathbf{R} = \mathbf{W}^T \rightarrow \mathbf{R} \\ 3. \quad & \mathbf{S}\tilde{\mathbf{W}}^T = \mathbf{R} \rightarrow \tilde{\mathbf{W}} \\ 4. \quad & \mathbf{U} = \mathbf{M} - \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{W}}^T. \end{aligned} \quad (7)$$

На первом этапе факторизуется диагональный блок и определяются блок \mathbf{L}' и диагональ знаков \mathbf{S} . На втором этапе определяется блок \mathbf{R} из решения СЛАУ с нижней треугольной матрицей \mathbf{L}' . На третьем этапе выполняется диагональное масштабирование и определяется блок $\tilde{\mathbf{W}}$. И на четвертом – вычисляется выражение, подобное дополнению Шура.

На всех этапах выполняются операции с плотными матрицами, причем соответствующие процедуры представлены библиотеками процедур высокой производительности, например [7]. Количество арифметических операций, выполняемых на последнем этапе, на несколько порядков больше, чем на всех предыдущих этапах. Именно здесь особенно важно достичь высокой производительности, что осуществляется применением алгоритма матричного умножения *dgemm*.

Следует отметить работу [9], в которой используется двухуровневая схема распараллеливания. Первый уровень основан на том, что для разреженных матриц высокого порядка суперузловое дерево исключений существенно разветвлено. Каждая ветвь этого дерева может обрабатываться на отдельном процессоре. Поскольку объем вычислений для каждой ветви существенно различный, на этом уровне не удастся достичь сбалансированности нагрузки на процессоры. Кроме того, верхняя часть суперузлового дерева исключений разветвлена слабо и содержит фронтальные матрицы относительно большой размерности. Поэтому на втором уровне распараллеливается факторизация фронтальных матриц.

Представленные методы относятся к классу алгебраических решателей. Это означает, что входной информацией является собранная матрица жесткости **K**, хранимая столбец по столбцу в сжатом формате. Никакой другой информации не требуется.

В 1999–2000 годах автором данной статьи был разработан мультифронтальный метод подконструкций BSMFM (block substructure multifrontal method), представляющий собой суперэлементный подход с автоматическим разделением исходной конечноэлементной модели на подконструкции [4], [10], [11]. Исходной информацией для данного метода является список узлов для каждого конечного элемента. Затем строится граф смежности для узлов, однозначно представляющий топологию расчетной модели. Далее выполняется упорядочение этого графа. Обычно в каждом узле мы имеем несколько уравнений, поэтому каждая вершина графа смежности для узлов соответствует плотному блоку в разреженной матрице. Кроме того, граф смежности для узлов содержит в несколько раз меньше информации, чем граф смежности для разреженной матрицы, используемый в алгебраических методах. Поэтому алгоритмы упорядочения в представляемом методе работают значительно быстрее и приводят к несколько меньшему количеству ненулевых элементов в факторизованной матрице [20].

Алгоритм упорядочения определяет последовательность исключения узлов расчетной модели, где под исключением узла мы понимаем исключение группы уравнений, связанных с этим узлом. Для того, чтобы

исключить узел, необходимо, чтобы все конечные элементы, сходящиеся в данном узле, были поданы на сборку. Такие узлы мы называем собранными. Каждый конечный элемент может участвовать в сборке только один раз. Кроме того, исключаемый узел может входить в состав частично собранных подконструкций на предыдущих шагах. Поэтому все подконструкции, образовавшиеся на предыдущих шагах и содержащие исключаемый на данном шаге узел, также участвуют в сборке.

Выполняется символическая факторизация, которая, опираясь на последовательность исключаемых узлов, списки узлов для каждого конечного элемента и каждой ранее собранной подконструкции, формирует дерево фронтов, каждый узел которого соответствует отдельной подконструкции с предыдущих шагов, причем исключенные ранее узлы в соответствующие списки узлов не входят. Вершины фронтального дерева перенумеровываются так, чтобы минимизировать объем памяти, предназначенной для хранения матриц поправок и, следовательно, количество медленных операций считывания элементов этих матриц из памяти или с диска. Далее происходит объединение вершин на последовательных участках фронтального дерева, что дает возможность на каждом шаге увеличить количество полностью собранных уравнений с целью повышения производительности вычислений.

Фронтальная матрица на каждом шаге формируется из уравнений, соответствующих не исключённым узлам текущей подконструкции. Полностью собранные уравнения образуют блоки \mathbf{A} и \mathbf{W} в (6). Далее применяется процедура (7), причем блоки полностью собранных уравнений копируются в специальный буфер, и их факторизация осуществляется в соответствующих ему адресах памяти. При переполнении этот буфер выгружается на диск. В случае дефицита оперативной памяти матрица \mathbf{U} также записывается на диск, откуда в последствии считывается при сборке фронтов, соответствующих узловым вершинам фронтального дерева. Для больших задач, размерность которых значительно превышает возможности оперативной памяти, факторизованная матрица образуется на диске в самом конце разложения в виде плотных матричных блоков \mathbf{L}' , $\tilde{\mathbf{W}}$. При выполнении прямой подстановки, диагонального масштабирования и обратной подстановки эти блоки с помощью глобальных индексов используются без распаковки в глобальную матрицу \mathbf{L} .

Оказалось, что алгоритмы для плотных матриц размерностью n , реализованные в библиотеках высокой производительности, даже в случае симметричных матриц требуют хранения n^2 элементов. Поэтому вместо использования процедуры `dgemm` на этапе 4 выражения (7) было разработано свое микроядро – программный код низкого уровня, напрямую использующий векторизацию вычислений и

распараллеливание, что позволило для каждой фронтальной матрицы хранить $n(n+1)/2 \approx n^2/2$ элементов. Детали изложены в [4]. Данный решатель внедрен в программный комплекс SCAD (www.scadsoft.com) и успешно используется там с 2002 г.

Суперузловые методы. Также как и многофронтальные суперузловые (supernodal) методы [12], [13], [14] относятся к классу прямых методов для разреженных матриц. Прежде всего строится граф смежности для разреженной матрицы жесткости. Затем производится упорядочение тем или иным методом, после чего выполняется символическая факторизация, определяющая положения ненулевых элементов факторизованной матрицы. Символическая факторизация производится на графе смежности [2], поэтому даже для матриц размерностью несколько миллионов уравнений длится всего несколько секунд. В результате создается ненулевая структура факторизованной матрицы, определяющая позиции всех ее ненулевых элементов.

Затем строится дерево исключений, на котором определяются суперузлы. Каждому суперузлу соответствует плотный блок при главной диагонали факторизованной матрицы. Выделение плотных блоков при главной диагонали определяет деление всей матрицы на блоки. К полученной таким образом блочной структуре матрицы применяется тот или иной алгоритм факторизации, причем вместо операций с отдельными элементами выполняются матричные операции над блоками. Ведущей процедурой при факторизации блочной матрицы является матричное умножение *dgemm*. Таким образом осуществляется замена типичных для наивных алгоритмов факторизации низкопроизводительных скалярно-векторных операций во внутреннем цикле на высокопроизводительное матричное умножение.

Одним из наиболее высокопроизводительных и хорошо ускоряемых с увеличением количества процессоров в архитектуре SMP (symmetrical multiprocessing), к которой относятся многоядерные компьютеры, является суперузловой метод PARDISO [15], включенный в библиотеку IntelMKL [7]. По сравнению с существующими многофронтальными методами для компьютеров с общей памятью PARDISO демонстрирует существенно более высокую производительность и ускоряемость. Объясняется это тем, что многофронтальные методы содержат избыточные пересылки данных «память – память», которые существенно ограничивают их производительность и ускоряемость при увеличении количества процессоров на компьютерах с общей памятью.

В PARDISO реализовано двухуровневое распараллеливание. Первый уровень связан с разветвлением суперузлового дерева исключений. При этом потоки, закончившие свою работу на первом уровне, не дожидаясь окончания работы соседей, начинают поправлять блок-столбцы,

размещенные правее (второй уровень распараллеливания). Оригинальный алгоритм двухуровневого распараллеливания обеспечивает хорошее сбалансирование вычислительной нагрузки на процессоры даже при большом количестве потоков, что обеспечивает устойчивый рост производительности при увеличении количества процессоров.

Однако существенным недостатком PARDISO является то, что решатель работает только в оперативной памяти. Формально имеется режим ООС (out of core), в котором подключается дисковая память. Однако исследования автора данной статьи, а также и другие публикации, например [16], показывают, что для небольших задач PARDISO в режиме ООС работает значительно медленнее многофронтального метода, а для больших – приводит к аварийному завершению. Указанный недостаток делает PARDISO, как и другие суперузловые методы, представленные библиотеками высокой производительности, практически неприменимыми для решения больших конечноэлементных задач на офисных компьютерах ограниченным объемом оперативной памяти.

Решатель PARFES (parallel finite element solver) [17], [18], [19] является также суперузловым методом с одноуровневым распараллеливанием, которое позволяет реализовать эффективный обмен с диском, если размерность задачи превышает объем оперативной памяти.

В качестве входной информации PARFES использует граф смежности для узлов конечноэлементной модели. Выполняется упорядочение этого графа и строится дерево исключений. Затем определяются суперузлы, в результате чего столбцы разреженной матрицы объединяются в блоки. Типичная структура блок-столбца представлена на рис. 2. Все блок-столбцы имеют плотные блоки при главной диагонали. Внедиагональные блоки могут быть пустыми, полностью заполненными и частично заполненными. Для пустых блоков память не распределяется, а для частично заполненных блоков хранятся только ненулевые строки.

В зависимости от размерности решаемой задачи и объема оперативной памяти автоматически выбирается один из трех режимов факторизации: СМ, ООС и ООС1. Если задача может быть полностью решена в оперативной памяти, назначается режим СМ (core memory). Режим ООС назначается для задач «средней размерности». При этом производительность и ускоряемость решателя снижаются незначительно по сравнению с режимом СМ, поскольку количество обменов с диском относительно невелико. Если же размерность задачи не позволяет использовать режим ООС, то назначается режим ООС1. Количество обменов с диском существенно возрастает, производительность и ускоряемость значительно снижаются, однако данный режим позволяет решать большие задачи на компьютерах с малым объемом оперативной памяти [18].

При сборке глобальной матрицы жесткости в режиме СМ ненулевые элементы располагаются в блоках. В режимах ООС и ООС1 собранная матрица в сжатом формате записывается на диск.

При численной факторизации применяется блочный looking-left алгоритм Холецкого [17] (рис. 1).

1. **do** $jb = 1, N_b$, где N_b – количество блок-столбцов.
2. В режимах ООС / ООС1 распределить память для блоков блок-строки jb заполнить элементами исходной матрицы. В режиме СМ пропустить этот шаг.
3. Выполнить поправку блок-столбца jb блок-столбцами, расположенными слева:

$$\mathbf{A}_{ib,jb} = \mathbf{A}_{ib,jb} - \sum_{kb \in \text{List}[jb]} \mathbf{L}_{ib,kb} \mathbf{S}_{kb} \mathbf{L}_{jb,kb}^T; \quad ib \geq jb, \quad ib \in \mathbf{L}_{kb} \quad (\text{рис. 2}).$$
 Здесь ib, jb, kb – индексы блоков блок-строк, \mathbf{L}_{kb} – ненулевая структура блок-столбца kb . В поправке принимают участие только те блок-столбцы, которые поправляют блок-столбец jb : $kb \in \text{List}[jb]$. В режиме ООС1 каждый блок-столбец kb , поправляющий блок-столбец jb , считывается с диска.
4. Факторизовать диагональный блок блок-столбца jb :

$$\mathbf{A}_{jb,jb} = \mathbf{L}_{jb,jb} \mathbf{S}_{jb} \mathbf{L}_{jb,jb}^T \rightarrow \mathbf{L}_{jb,jb}, \mathbf{S}_{jb}.$$
5. Преобразовать блоки блок-столбца jb , размещенные под диагональным блоком: $\mathbf{L}_{jb} \mathbf{S}_{jb} \mathbf{L}_{ib,jb} = \mathbf{A}_{ib,jb} \rightarrow \mathbf{L}_{ib,jb}$.
6. В режиме ООС / ООС1 записать факторизованный блок-столбец на диск: $\mathbf{L}_{ib,jb} \rightarrow \text{disk}, \quad ib \geq jb, \quad ib \in \mathbf{L}_{jb}$. Освободить занимаемую им память. В режиме СМ пропустить этот шаг.
7. **end do**

Рис. 1. Блочный алгоритм looking-left факторизации

Более 99% вычислений осуществляется на этапе 3. Поэтому именно он распараллеливается в первую очередь. Для обеспечения сбалансированности вычислительной нагрузки на процессоры используется специальный алгоритм отображения заданий на потоки [17]. При этом целая блок-строка для блок-столбцов $kb \in \text{List}[jb]$ отображается на один и тот же поток, что позволяет избежать применения синхронизации при записи результатов поправок в блоки блок-столбца jb . Затем определяются веса – количество ненулевых элементов в каждой блок-строке. Номера блок-строк сортируются в порядке убывания весов, после чего поочередно приписываются тому потоку, который имеет на

данный момент минимальную сумму весов, а вес приписанной блок-строки добавляется к сумме весов потока. В результате для каждого потока создаются очереди задач Q_{ip} , где ip – номер потока. Каждый элемент очереди состоит из указателей блоков $\mathbf{L}_{ib,kb}$, $\mathbf{L}_{jb,kb}$ и номера kb диагонали знаков \mathbf{S}_{kb} .

Затем осуществляется процедура, изображенная на рис. 3. В параллельном регионе выполняются ip потоков. Каждый поток исполняет цикл *while* до тех пор, пока очередь $Q[ip]$ не окажется пустой. В каждой итерации данного цикла из очереди $Q[ip]$ выбирается ближайший элемент и сразу вычеркивается (знак /, пункт 3). Получив указатели на блоки $\mathbf{L}_{ib,kb}$, $\mathbf{L}_{jb,kb}$ и номер kb , выполняем матричное умножение (пункт 4 и рис. 2 – низ).

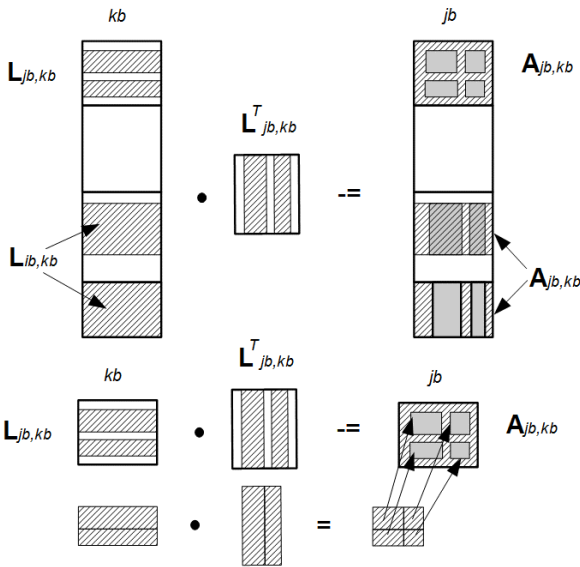


Рис. 2. Поправка блок-столбца jb блок-столбцом kb , расположенным слева. Ненулевые строки в блоках заштрихованы. Серым цветом показаны поправляемые подблоки в блок-строке jb . Внизу показан пример упаковки при умножении блоков

1. начало параллельного региона: $ip \in [0, ProcNumb - 1]$
2. *while*(очередь $Q[ip]$ не пуста)
3. $\{\mathbf{L}_{ib,kb}, \mathbf{L}_{jb,kb}, kb\} \leftarrow Q[ip]; Q[ip] \leftarrow (Q[ip] \setminus \{\mathbf{L}_{ib,kb}, \mathbf{L}_{jb,kb}, kb\})$
4. $\mathbf{A}_{ib,jb} = \mathbf{A}_{ib,jb} - \mathbf{L}_{ib,kb} \mathbf{S}_{kb} \mathbf{L}_{jb,kb}^T$;
5. *endwhile*
6. конец параллельного региона

Рис. 3. Алгоритм параллельной поправки (см. рис. 1, пункт 3)

Насколько быстро будет выполняться матричное умножение, настолько быстро будет факторизована матрица. Поскольку для матриц небольшой размерности процедура матричного умножения существенно снижает производительность, для частично заполненных блоков выполняется упаковка (рис. 2, низ).

При использовании процедуры *dgemm* из библиотеки IntelMKL производительность PARFES на процессорах AMD Opteron архитектуры Bulldozer оказалась сниженной. Процедура *dgemm* из библиотеки ACML (AMD core math library), адаптированная под процессоры AMD, в отдельных тестах матричного умножения показывает хорошие результаты, однако при ее использовании в однопоточном режиме в алгоритме PARFES, представленном на рис. 3, приводит к деградации производительности. Вероятно, замысел разработчиков ACML рассчитан на то, что при многопоточных вычислениях на процессорах AMD необходимо использовать многопоточную версию процедуры *dgemm*. Однако алгоритм PARFES (рис. 3) требует использования процедуры матричного умножения в однопоточном режиме во избежание конфликта между распараллеливанием внешними распараллеливанием внутри многопоточной процедуры *dgemm*, в результате чего происходит деградация производительности вычислений.

Поэтому была разработана своя низкоуровневая процедура *microkern_8x4_AVX* с целью обеспечить векторизацию вычислений, «registerreuse» и оптимизировать конвейеры процессора [19]. Оказалось, что данная процедура не уступает в производительности процедуре *dgemm* из библиотеки IntelMKL.

С 2014 г. PARFES включен в набор решателей SCAD 21.

Численные результаты. В примере 1 приводится сравнение PARFES, BSMFM, PARDISO из библиотеки IntelMKL 10.2.2.025. и многофронтального решателя Boeingsparsesolver именитого программного комплекса ANSYS 15.0 (табл. 1, 2). Исследования проводились на компьютере с 4-ядерным процессором IntelCore™ i7-2760QM, 2.4/3.4 ГГц, RAM DDR3 8GB, OS Windows 7 (64 bit) Professional, SP1. Для того, чтобы обеспечить идентичность расчетных моделей, приготавливаемых различными программными комплексами ANSYS 15.0 и SCAD 21.1, была создана модельная задача – простая модель, топологически подобная многоэтажному зданию с несущими стенами. Размерность задачи составляет 1 236 246 уравнений.

Все решатели работали в оперативной памяти при использовании четырех потоков (*ProcNumb=4*). Решатель ANSYS записывает разложенную матрицу на диск, поэтому в колонке «режим работы с ОП» поставлен прочерк.

Для решателя ANSYS 15.0 приводится чистое время численной факторизации. Для мультифронтального решателя BSMFM приведенное время содержит еще и продолжительность процесса агрегации, который неотделим от численной факторизации и составляет для данной задачи 5 с. Таким образом, производительность этих двух решателей отличается незначительно.

Таблица 1

Продолжительность численной факторизации для различных решателей, задача 1, размерность расчетной модели – 1 236 246 уравнений

Метод	Продолжительность численной факторизации, с	Размер факторизованной матрицы, GB	Метод упорядочения	Режим работы с ОП
ANSYS 15.0	50	4.145	?	–
BSMFM	63	3.175	METIS	CM
PARDISO	26.5	3.679	METIS	CM
PARFES	28.8	3.771	METIS	CM

Метод упорядочения, используемый решателем ANSYS, неизвестен, поэтому в соответствующей позиции в таблице 1 стоит знак вопроса. Однако размер факторизованной матрицы в MB оказался больше, чем для решателя BSMFM. Остальные решатели использовали упорядочение METIS [20].

PARFES и PARDISO показали практически одинаковое время.

В примере 2 рассматривается подобный объект, но с большим количеством этажей. Размерность задачи составляет 2 360 106 уравнений. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2

Продолжительность численной факторизации для различных решателей, задача 2, размерность расчетной модели – 2 360 106 уравнений

Метод	Продолжительность численной факторизации, с	Размер факторизованной матрицы, GB	Метод упорядочения	Режим работы с ОП
ANSYS 15.0	240	8.777	?	–
BSMFM	285	6.561	MMD	ООС
PARDISO	Не хватает объема ОП (error -2)	7.513	METIS	ОС
	Ошибка записи/чтения при обращении к файлу данных ООС (error -11)	7.530	METIS	ООС
PARFES	125	7.349	MMD	ООС

Многофронтальный решатель BSBMF работал несколько дольше, чем решатель ANSYS 15.0. Сборка матрицы жесткости составила 20 с.

PARDISO в режиме ОС не хватило объема оперативной памяти, а в режиме ООС произошла ошибка ввода-вывода. PARFES решил эту задачу примерно в два раза быстрее, чем решатель ANSYS 15.0.

Оба приведенных примера показывают, что рассмотренные суперузловые методы для компьютеров с общей памятью работают существенно быстрее, чем данные многофронтальные.

В примере 3 рассматривается задача из коллекции задач SCAD Soft. Расчетная модель представлена на рис. 4 и содержит 2 989 476 уравнений. Данная задача оказалась очень трудной для прямых методов, поскольку грунт моделируется объемными конечными элементами, которые порождают относительно высокую плотность разреженной матрицы, размер которой после факторизации составляет 37 GB (метод упорядочения – METIS).

Данная задача решалась PARFES на 16-ядерном компьютере с процессором AMD Opteron 6276 CPU 2.3/3.2 ГГц, 64 GB DDR3 RAM, OS Windows Server 2008 R2 Enterprise SP1, 64 bit. PARFES работал в режиме CM. На рис. 5 представлен график ускоряемости при увеличении количества загруженных ядер процессора.

Идеальная ускоряемость представлена на графике прямой линией и проходит через точки $\{0, 0\}$, $\{1, 1\}$, $\{2, 2\}$ и т.д. Ее смысл очевиден – если задача решается на двух процессорах, то в идеале производительность решателя должна быть в два раза выше, чем в случае использования одного процессора, если на 4 – то в 4 раза выше, и т.д.

Однако данный процессор поддерживает режим Turbo Core – он уменьшает тактовую частоту с 3.2 ГГц до 2.3 ГГц при увеличении количества загруженных ядер. Поэтому идеальная ускоряемость на данном процессоре физически не достижима, и этот факт представлен кривой id_{tb} – квадратной параболой, проходящей через точки $\{0, 0\}$,

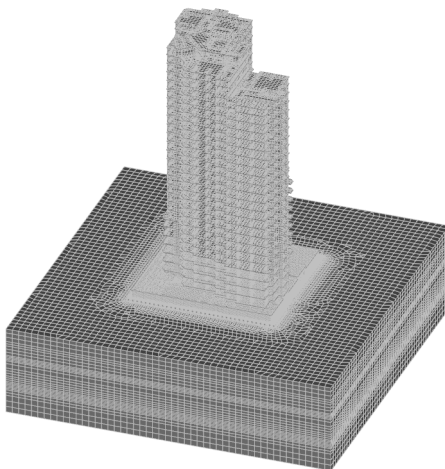


Рис. 4. Расчетная модель задачи о взаимодействии здания и основания (2 989 476 уравнений)

$\{1, 1\}$ (на одном загруженном ядре процессор работает с максимальной тактовой частотой) и $\{16, 11.5\}$. Последнее число получено из соображений, что при загрузке 16-ти ядер процессор снизит тактовую частоту до минимальной – 2.3 ГГц. На основании этого составлена пропорция: $16 \cdot 2.3 / 3.2 = 11.5$.

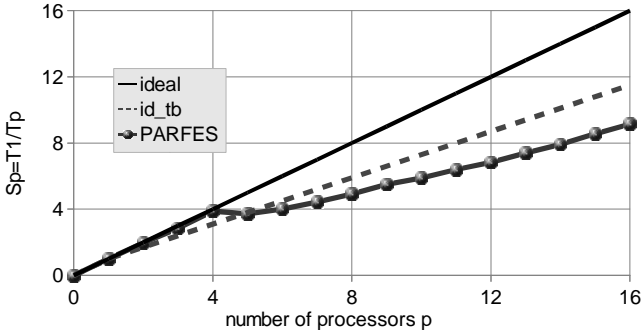


Рис. 5. Ускоряемость PARFES с увеличением количества процессоров

Кривая PARFES соответствует реальным вычислениям. Каждая точка определялась как $S_p = T_1/T_p$, где p – количество загруженных ядер, S_p – ускоряемость (speedup), T_1 – время факторизации матрицы на одном ядре, а T_p – на p ядрах.

До 4-х загруженных ядер PARFES демонстрирует идеальную ускоряемость. Далее происходит снижение тактовой частоты процессора, что уменьшает ускоряемость, которая, несмотря на это, остается стабильной вплоть до 16 ядер. Таким образом, одноуровневое распараллеливание может обеспечить стабильную ускоряемость даже при большом количестве потоков, что является заслугой представленного выше алгоритма планирования заданий на потоки.

На 16 загруженных ядрах факторизация матрицы длилась 1194 с. Полное время решения задачи – 1803 с.

Решение этой задачи представлено также в [19]. В данной статье приведены данные для модифицированного микроядра *microkern_8x4_AVX*, отличающегося от используемого в упомянутой работе применением инструкций процессора FMA4, позволяющих в одной команде выполнить одновременно умножение и сложение, что сокращает количество циклов процессора с 8 до 5 на процессорах данной архитектуры. Соответственно для данной задачи возросла и производительность решателя с 34 843MFLOPS до 45 515MFLOPS.

Заключение. Полученные результаты свидетельствуют о том, что на многоядерных компьютерах с общей оперативной памятью суперузловые

методы решения систем линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов являются более эффективными, чем многофронтальные.

Решатель PARFES сочетает высокую производительность при работе в оперативной памяти, устойчивую ускоряемость при увеличении количества загруженных ядер и возможность подключения диска для решения больших задач на компьютерах с ограниченным объемом оперативной памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Matrixcomputations/ *G.H. Golub, C.F. VanLoan*, Thirded. –John Hopkins University Press, 1996, 694 p.
2. Численное решение больших разреженных систем уравнений / *А. Джордж, Дж. Лю.* – М.: Мир, 1984. – 333 с.
3. Applied numerical linear algebra / *J.W. Demmel.* – Philadelphia, SIAM, 1997. – 421 p.
4. Прямые методы решения систем линейных уравнений в современных МКЭ-комплексах / *С.Ю. Фиалко.* – М.: СКАД СОФТ, 2009. – 160 с.
5. *Duffl. S., ReidJ. K.*The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear systems. – ACM Transactions on Mathematical Software. – 1983. – Vol. 9. – P. 302–325.
6. *Dobrian F., Kumfert G., Pothan A.* The Design of Sparse Direct Solvers using Object-Oriented Techniques –In: Bruaset A.M., Langtangen H.P., Quak E. (eds.) –Modern Software Tools in Scientific Computing. Springer-Verlag, 2000, P 89–131.
7. Intel® Math Kernel Library Reference Manual – BLAS Routines. <https://software.intel.com/sites/products/documentation/doclib/iss/2013/mkl/mklman/index.htm>.
8. *Goto K., Van DeGeijn R.A.* Anatomy of High-Performance Matrix Multiplication. – ACM Transactions on Mathematical Software. – 2008. –Vol34, No. 3/ – P. 1–25.
9. *Amestoy P.R., Duff I.S., L'Excellent J.Y.* Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. – Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2000. –Vol. 184. – P. 501–520.
10. *Фиалко С.Ю.* К исследованию напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек с массивными ребрами. – Прикл. Механика. – т. 40. –, № 4. – С. 84–92.
11. *Fialko S.* A Sparse Shared-Memory Multifrontal Solver in SCAD Software. IEEE Xplore Digital Library. Computer Science and Information Technology, 2008. IMCSIT 2008. International Multiconference on. 20 – 22 Oct. – 2008. – P. 277 – 283. Doi:10.1109/IMCSIT.2008.4747252 .
12. *Chen Y., Davis T.A., Hager W.W., Rajamanickam S.* Algorithm 8xx: CHOLMOD, supernodal sparse Cholesky factorization and update/downdate. – Technical report TR-2006-005. – CISE Dept, Univ. of Florida, Gainesville, FL. – 2006. URL:<http://www.cise.ufl.edu/tr/DOC/REP-2006-290.pdf> (Accessed 20.12.2014).
13. *Demmel J.W., Eisenstat S.C., Gilbert J.R., Li X.S., Liu J.W.H.* A supernodal approach for sparse partial pivoting. – SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1999. – Vol 20. – No. 3. – P. 720 – 755.
14. *Protkin V., Toledo S.* The design and implementation of a new out-of-core sparse Cholesky factorization method. – ACM Transactions on Mathematical Software. – 2004. – Vol. 30. – No.1. – P. 19 – 46.
15. *Schenk O., Gartner K.* Two-level dynamic scheduling in PARDISO: Improved scalability on shared memory multiprocessing systems. – Parallel Computing. – 2002. –Vol. 28. – P. 187–197.
16. *Pardo D., MyungJin Nam, Carlos Torres-Verdin, Michael G. Hoversten, Iñaki Garay.* Simulation of marine controlled source electromagnetic measurements using a parallel Fourier hp-finite element method. – Comput. Geosci. – 2011. – Vol. 15. P. 53–67.

17. *Fialko S.* PARFES: A method for solving finite element linear equations on multi-core computers. – Advances in engineering software. – 2010. – Vol.40. – No.12. – P. 1256 – 1265.
18. *Fialko S.* Parallel Finite Element Solver for Multi-Core Computers. IEEE Xplore Digital Library. Computer Science and Information Technology (FedCSIS), 2012 Federated Conference on. – P. 525 – 532.
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6354298>.
19. *Fialko S.* Application of AVX (Advanced Vector Extensions) for Improved Performance of the PARFES – Finite Element Parallel Direct Solver. IEEE Xplore Digital Library. Computer Science and Information Systems (FedCSIS), 2013 Federated Conference on. – P. 447 – 454.
http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6644039&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D6644039
20. *Karypis G., Kumar V.* METIS: Unstructured Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering System. – Technical report. – Department of Computer Science. – University of Minnesota. Minneapolis. – 1995.

REFERENCES

1. *Matrixcomputations/ G.H. Golub, C.F. VanLoan*, Thirded. –John Hopkins University Press, 1996, 694 p.
2. *Computer solution of sparse positive definite systems / A.George, J.W.H. Liu.* – Moscow, Mir, 1984, 333 p. (In Russian)
3. *Applied numerical linear algebra / J. W. Demmel.* – Philadelphia, SIAM, 1997. – 421 p.
4. *The direct methods for solution of the linear equation sets in modern FEM software / S. Fialko.* – Moscow, SCAD SOFT, 2009, 160 p. (in Russian).
5. *Duffl. S., ReidJ. K.*Themultifrontalsolutionofindefinitesparse symmetriclinear systems. – ACMTransactionsonMathematicalSoftware. – 1983. – Vol. 9. – P. 302–325.
6. *Dobrian F., Kumfert G., Pothen A.* The Design of Sparse Direct Solvers using Object-Oriented Techniques –In: Bruaset A.M., Langtangen H.P., Quak E. (eds.) – ModernSoftwareToolsinScientificComputing. Springer-Verlag, 2000,P 89–131.
7. *Intel@ Math Kernel Library Reference Manual – BLAS Routines.* <https://software.intel.com/sites/products/documentation/doclib/iss/2013/mkl/mklman/index.htm>.
8. *Goto K., Van DeGeijn R. A.* Anatomy of High-Performance MatrixMultiplication. – ACM Transactions on Mathematical Software. – 2008. –Vol34. No. 3/ – P. 1–25.
9. *Amestoy P.R., Duff I.S., L'Excellent J.Y.* Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. – Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2000. –Vol. 184. – P. 501–520.
10. *Fialko S.* Stress-Strain Analysis of Thin-Walled Shells with Massive Ribs. – Int. App. Mech. – 2004. Stress-Strain Analysis of Thin-Walled Shells with Massive Ribs. Int. App. Mech. – 2004. –Vol. 4. – No 4. – P. 432–439.
11. *Fialko S.* A Sparse Shared-Memory Multifrontal Solver in SCAD Software. IEEE Xplore Digital Library. Computer Science and Information Technology, 2008. IMCSIT 2008. InternationalMulticonferenceon. 20 – 22 Oct. – 2008. – P. 277 – 283. Doi:10.1109/IMCSIT.2008.4747252 .
12. *Chen Y., Davis T.A., Hager W.W., Rajamanickam S.* Algorithm 8xx: CHOLMOD, supernodal sparse Cholesky factorization and update/downdate. – Technical report TR-2006-005. – CISE Dept, Univ. of Florida, Gainesville, FL. – 2006. URL:<http://www.cise.ufl.edu/tr/DOC/REP-2006-290.pdf> (Accessed 20.12.2014).
13. *Demmel J.W., Eisenstat S.C., Gilbert J.R., Li X., Liu J.W.H.* A supernodal approach for sparse partial pivoting. – SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1999. – Vol 20. – No. 3. – P. 720 – 755.
14. *Protkin V., Toledo S.* The design and implementation of a new out-of-core sparse Cholesky factorization method. – ACM Transactions on Mathematical Software. – 2004. – Vol. 30. – No.1. – P. 19 – 46.

15. *Schenk O., Gartner K.* Two-level dynamic scheduling in PARDISO: Improved scalability on shared memory multiprocessor systems. – Parallel Computing. – 2002. – Vol. 28. – P. 187–197.
16. *Pardo D., MyungJin Nam, Carlos Torres-Verdin, Michael G. Hoversten, Itzaki Garay.* Simulation of marine controlled source electromagnetic measurements using a parallel Fourier hp-finite element method. – Comput. Geosci. – 2011. – Vol. 15. P. 53–67.
17. *Fialko S.* PARFES: A method for solving finite element linear equations on multi-core computers. – Advances in engineering software. – 2010. – Vol.40. – No.12. – P. 1256 – 1265.
18. *Fialko S.* Parallel Finite Element Solver for Multi-Core Computers. IEEE Xplore Digital Library. Computer Science and Information Technology (FedCSIS), 2012 Federated Conference on. – P. 525 – 532.
<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=6354298>.
19. *Fialko S.* Application of AVX (Advanced Vector Extensions) for Improved Performance of the PARFES – Finite Element Parallel Direct Solver. IEEE Xplore Digital Library. Computer Science and Information Systems (FedCSIS), 2013 Federated Conference on. – P. 447 – 454.
http://ieeexplore.ieee.org/xpl/login.jsp?tp=&arnumber=6644039&url=http%3A%2F%2Fieeexplore.ieee.org%2Fxppls%2Fabs_all.jsp%3Farnumber%3D6644039
20. *Karypis G., Kumar V.* METIS: Unstructured Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering System. – Technical report. – Department of Computer Science. – University of Minnesota. Minneapolis. – 1995.

Фіалко С.Ю.

ПРО ПАРАЛЛЕЛЬНІ ВИРІШУВАЧІ В СКІНЕЧНО-ЕЛЕМЕНТНИХ ПРОГРАМНИХ КОМПЛЕКСАХ, ОРІЄНТОВАНИХ НА БАГАТОЯДЕРНІ КОМП'ЮТЕРИ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ ПАМ'ЯТТЮ

Обговорюються прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричними розрідженими матрицями, що виникають при застосуванні методу скінчених елементів до завдань механіки конструкцій та механіки деформованого твердого тіла. Головна увага приділяється методом досягнення високої продуктивності на багатоядерних комп'ютерах з загальною пам'яттю (sharedmemorycomputers).

Ключові слова: багатифронтальний метод, супервузловий метод, метод скінчених елементів, граф суміжності, висока продуктивність, паралельні обчислювання.

Fialko S.Yu.

ABOUT PARALLEL SOLVERS IN FINITE ELEMENT SOFTWARE, ORIENTED TO SHARED MEMORY MULTIPROCESSOR COMPUTERS

Short abstract. The direct methods for solution of linearequation sets arising when the finite element method is applied to problems of structural and solid mechanics are considered. Main attention is paid to achievement of high performance on multicore shared memory computers.

Extended abstract. The direct methods for solution of linearequation sets arising when the finite element method is applied to problems of structural and solid mechanics are considered. Main attention is paid to achievement of high performance on multicore shared memory computers. We confine ourselves to the consideration of the multifrontal and supernodal methods, present a brief description and emphasize their advantages and disadvantages for the considered class of problems on shared memory multicore computers. We compare the performance of Boeing sparse direct solver implemented in famous ANSYS 15.0 finite element software, supernodal solver PARDISO from Intel Math Kernel Library with block substructure multifrontal solver BSMFM and supernodal parallel finite element solver PARFES, implemented in SCAD software (www.scadsoft.com).

Then, we present the stable speed up and performance on computer with 16-core AMD Opteron 6276 processor demonstrated by PARFES.

Keywords: multifrontal method, supernodal methods, finite element method, adjacency graph, high performance, parallel computing.

УДК 539.3

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТІСТІННИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, СХИЛЬНИХ ДО ЛОКАЛЬНОГО ВПЛИВУ

О.В. Марчук¹

д-р техн. наук, професор кафедри опору матеріалів і машинознавства

О.О. Рассказов¹

д-р техн. наук, професор, завідувач кафедрою теоретичної та прикладної механіки

С.В. Гнедаш¹

аспірант кафедри опору матеріалів і машинознавства

С.А. Левківський¹

старший викладач кафедри дорожніх машин

¹*Національний транспортний університет, м. Київ*

Побудовано два підходи до дослідження напружено-деформованого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок. В першому підході для апроксимації шуканих функцій в плані і за товщиною використовуються поліноми. В другому для апроксимації шуканих функцій в плані застосовуються лінійні поліноми, а їх розподіл за товщиною знаходять на основі аналітичного розв'язку відповідної системи диференціальних рівнянь. Проведено аналіз напружено-деформованого стану оболонок в зоні локального навантаження.

Ключові слова: товсті шаруваті анізотропні циліндричні оболонки, локальні навантаження.

Вступ

В даний час спостерігається зростання застосування пластикових волокнистих циліндрів в різних галузях техніки. Шари таких конструкцій володіють анізотропією властивостей. Вони схильні до локальних впливів з величиною плями навантаження сумірною з товщиною конструкції, що призводить до суттєво тривимірного напружено-деформованого стану з високими градієнтами його зміни. Це обумовлює необхідність розвитку відповідних підходів до розрахунку подібного роду конструкцій. Перелік робіт з розрахунку циліндричних оболонок можна знайти в оглядах [2-9, 13-15]. Робіт з розрахунку товстостінних оболонок великої кривизни з розміром площі навантаження сумірною з товщиною оболонки мало. Розрахувати такого типу оболонки дозволяють підходи, розроблені в [3, 4].

У даній статті представлені до розгляду два підходи, які дозволяють розглядати напружено-деформований стан товстостінних анізотропних оболонок великої кривизни в умовах осесиметричного згину.

1. Побудова кінцево-елементного підходу на основі поліноміальної апроксимації

Компоненти тензора деформацій циліндричної оболонки в умовах осесиметричної деформації визначаються на основі наступних співвідношень (вісь спрямована уздовж твірної оболонки):

$$\begin{aligned} e_{xx}^{(k)} &= \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}; \quad e_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{1}{r} U_r^{(k)}; \quad e_{rr}^{(k)} = \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r}; \quad 2e_{x\theta}^{(k)} = \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ 2e_{xr}^{(k)} &= \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x}; \quad 2e_{r\theta}^{(k)} = \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Напруження, з урахуванням виразів для деформації (1.1), записані на основі закону Гука.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= C_{11} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{12} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{13} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{16} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= C_{21} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{22} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{23} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{26} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{rr}^{(k)} &= C_{31} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{32} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{33} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{36} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{x\theta}^{(k)} &= C_{61} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{62} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{63} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{66} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{xr}^{(k)} &= C_{55}^{(k)} \left(\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} \right) + C_{45}^{(k)} \left(\frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)} \right); \\ \sigma_{r\theta}^{(k)} &= C_{54}^{(k)} \left(\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} \right) + C_{44}^{(k)} \left(\frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Використовуємо відому апроксимацію шуканих переміщень по товщині оболонки [10]:

$$\begin{aligned} U_x^{(k)}(x, r) &= U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r); \\ U_\theta^{(k)}(x, r) &= U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r); \\ U_r^{(k)}(x, r) &= W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r) \quad (l = 1, 2); \quad (p = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тут $U_{xl}^{(k)}(x)$, $U_{x2}^{(k)}(x)$ - тангенціальні переміщення на лицьових поверхнях конструкції; $U_{\theta l}^{(k)}(x)$, $U_{\theta 2}^{(k)}(x)$ - колові переміщення на лицьових поверхнях конструкції; $W_1^{(k)}$, $W_2^{(k)}$ - нормальні переміщення на лицьових поверхнях конструкції, $W_3^{(k)}$ - функція зсуву; $f_l^{(k)}(r)$, $f_2^{(k)}(r)$, $\beta_l^{(k)}(r)$,

$\beta_2^{(k)}(r)$ - задані поліноми першого ступеня; $\varphi_i^{(k)}(r)$, $\varphi_2^{(k)}(r)$, $\beta_3^{(k)}(r)$ - другого ступеня; $\varphi_3^{(k)}(r)$ - третього ступеня.

Варіація потенційної енергії деформації з урахуванням введеної апроксимації по товщині і відповідних перетворень набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi = & \int_0^L \{ [D11_{il}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + (D12_{lp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D13_{lp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D14_{lp}^{(k)}) W_p^{(k)}(x) + \\
 & + D15_{il}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x}] \delta \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + [(T11_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T21_{il}^{(k)}) U_l^{(k)}(x) + \\
 & + (T12_{lp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T22_{lp}^{(k)}) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + (T13_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T23_{il}^{(k)}) + \\
 & + \frac{1}{r^{(k)^2}} T14_{il}^{(k)}) U_{\theta l}^{(k)}(x)] \delta U_{ix}^{(k)}(x) + [D21_{pl}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + (D22_{pp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\
 & + D23_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D24_{pp}^{(k)}) W_p^{(k)}(x) + D25_{pl}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x}] \delta \frac{\partial^2 W_p^{(k)}(x)}{\partial x^2} + \\
 & + [(T31_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T41_{pl}^{(k)}) U_{xl}^{(k)}(x) + (T32_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T42_{pp}^{(k)}) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + (T33_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T43_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T44_{pl}^{(k)}) U_{\theta l}^{(k)}(x)] \delta \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + [(D31_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D41_{pl}^{(k)}) \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + ((D32_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D42_{pp}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\
 & + (D33_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D43_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)^2}} + (D34_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D44_{pp}^{(k)})) W_p^{(k)}(x) + \\
 & + (D35_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D45_{pl}^{(k)}) \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x}] \delta W_p^{(k)}(x) + [D51_{il}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + (D52_{lp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D53_{lp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D54_{lp}^{(k)}) W_p^{(k)}(x) + D55_{il}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x}] \delta \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + [(T51_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T61_{il}^{(k)}) U_{xl}^{(k)}(x) + (T52_{lp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T62_{lp}^{(k)}) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + (T53_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T63_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T54_{il}^{(k)}) U_{\theta l}^{(k)}(x)] \delta U_{\theta l}^{(k)}(x). \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

($l=1,2$); ($p=1,2,3$), L - довжина оболонки; a_{k-1} , a_k - координати зовнішніх поверхонь k - тої складової оболонки по вісі r .

Варіація роботи зовнішнього навантаження на лицьових поверхнях шару може бути записана наступним чином:

$$\delta A = \int_0^L (q_{xl}^{(k)}(x) \delta U_{xl}^{(k)}(x) + q_{ip}^{(k)}(x) \delta W_p^{(k)}(x) + q_{\theta l}^{(k)}(x) \delta U_{\theta l}^{(k)}(x)) dx, \quad (1.5)$$

де $q_{r3}^{(k)}(x) = 0$.

Шукані функції в плані конструкції лінійними і кубічними поліномами.

$$\begin{aligned} U_{xl}^{(k)}(x) &= U_{xl1}^{(k)} f_{u1}(x) + U_{xl2}^{(k)} f_{u2}(x); \\ U_{\theta l}^{(k)}(x) &= U_{\theta l1}^{(k)} f_{u1}(x) + U_{\theta l2}^{(k)} f_{u2}(x); \\ W_p^{(k)}(x) &= W_{p1}^{(k)} f_{w1}(x) + \alpha_{p1}^{(k)} f_{w2}(x) + W_{p2}^{(k)} f_{w3}(x) + \alpha_{p2}^{(k)} f_{w4}(x), \end{aligned} \quad (1.6)$$

де $f_{u1}(x) = 1 - x/a$; $f_{u2}(x) = x/a$.

$$f_{w1}(x) = \frac{2x^3 - 2ax^2 + a^3}{a^3}; \quad f_{w2}(x) = \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{a^2}; \quad f_{w3}(x) = \frac{-2x^3 + 3ax^2}{a^3};$$

$$f_{w4}(x) = \frac{x^3 - ax^2}{a^2}, \quad a - \text{довжина кінцевого елемента.}$$

Рівняння рівноваги кінцевого елемента отримуємо на основі варіаційного рівняння Лагранжа.

$$\delta \Pi - \delta A = 0. \quad (1.7)$$

З урахуванням введеної апроксимації вони приймають такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \{ [D11_{ll}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + (T11_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T21_{ll}^{(k)}) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) U_{xls}^{(k)} + \\ & + (((D12_{lp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D13_{lp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D14_{lp}^{(k)}) f_{wc}(x)) \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + (T12_{lp}^{(k)} + \\ & + \frac{1}{r^{(k)}} T22_{lp}^{(k)}) \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} f_{u\bar{s}}(x) W_{pc}^{(k)} + (D15_{ll}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + \\ & + (T13_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T23_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T14_{ll}^{(k)}) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) U_{\theta ls}^{(k)} - \\ & - q_{xl}^{(k)}(x) f_{u\bar{s}}(x) \delta U_{xl\bar{s}}^{(k)} + (D21_{p\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + (T31_{p\bar{l}}^{(k)} + \\ & + \frac{1}{r^{(k)}} T41_{p\bar{l}}^{(k)}) f_{us}(x) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} U_{xls}^{(k)} + (((D22_{pp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D23_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +D24_{pp}^{(k)} f_{wc}(x) \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + ((D32_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D42_{pp}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\
& + (D33_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D43_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)^2}} + (D34_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D44_{pp}^{(k)})) f_{wc}(x) f_{w\bar{c}}(x) + \\
& + (T32_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T42_{pp}^{(k)}) \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} W_{pc}^{(k)} + \\
& + [(D25_{pl}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + (D35_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D45_{pl}^{(k)}) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} f_{w\bar{c}}(x) + \\
& + (T33_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T43_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T44_{pl}^{(k)}) f_{us}(x) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x}] U_{\theta s}^{(k)} - \\
& - q_{rp}^{(k)}(x) f_{w\bar{c}}(x) \delta W_{pc}^{(k)} + [(D51_{il}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + T51_{il}^{(k)} + \\
& + \frac{1}{r^{(k)}} T61_{il}^{(k)})] f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) U_{xls}^{(k)} + (((+D52_{lp}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D53_{lp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + \\
& + D54_{lp}^{(k)}) f_{wc}(x) \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + (T52_{lp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T62_{lp}^{(k)}) \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} f_{u\bar{s}}(x)) W_{pc}^{(k)} + \\
& + D55_{il}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + (T53_{il}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T63_{il}^{(k)} + \\
& + \frac{1}{r^{(k)^2}} T54_{il}^{(k)}) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) U_{\theta s}^{(k)} - q_{\theta l}^{(k)}(x) f_{u\bar{s}}(x) \delta U_{\theta \bar{s}}^{(k)} \} dx = 0. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Тут $W_{p1}^{(k)} = W_{p1}^{(k)}$; $W_{p2}^{(k)} = \alpha_{p1}^{(k)}$; $W_{p3}^{(k)} = W_{p2}^{(k)}$; $W_{p4}^{(k)} = \alpha_{p2}^{(k)}$.

2. Побудова підходу на основі напіваналітичного методу скінченних елементів

Найбільш повний огляд по напіваналітичному методу скінченних елементів представлений в [1]. У переважній більшості розглянутих робіт по одній з координат використовується розкладання в ряди, за іншими координатами використовується традиційна кінцево-елементна апроксимація. У даній роботі представлений дещо інший підхід.

Рівняння рівноваги k -того анізотропного шару оболонки в змішаній формі мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} - B_{55}^{(k)} \sigma_{xr} - B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta} = 0; \\
& B_{13}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{63}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x} - B_{33}^{(k)} \sigma_{rr} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_r^{(k)} - B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)} - B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0; \\
& B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{xr}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x} = 0; \\
& B_{21}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r^2} U_r^{(k)} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} = 0; \\
& B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2} + B_{36}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0, \quad (2.1)
\end{aligned}$$

де зміст жорсткісної характеристики $B_{ij}^{(k)}$ розкривається в наступному взаємозв'язку напружень і деформацій:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{12}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{13}^{(k)} e_{rr}^{(k)} + B_{16}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
\sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{22}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{23}^{(k)} e_{rr}^{(k)} + B_{26}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
\sigma_{x\theta}^{(k)} &= B_{61}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{62}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{63}^{(k)} e_{rr}^{(k)} + B_{66}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
B_{33}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} &= B_{13}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{23}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + e_{rr}^{(k)} + B_{36}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
e_{r\theta}^{(k)} &= B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} + B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}; \\
e_{xr}^{(k)} &= B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} + B_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Поздовжні і колові напруження знаходимо із закону Гука:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\
\sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Введемо наступну апроксимацію шуканих функцій переміщень і напружень в плані кінцевого елемента [10]:

$$\begin{aligned}
U_x^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) v_{x1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) v_{x2}^{(k)}(r); \\
U_\theta^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) v_{\theta 1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) v_{\theta 2}^{(k)}(r); \\
U_r^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) w_1^{(k)}(r) + \varphi_2(x) w_2^{(k)}(r); \\
\sigma_{xr}^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) \tau_{x1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \tau_{x2}^{(k)}(r); \\
\sigma_{\theta r}^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) \tau_{\theta 1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \tau_{\theta 2}^{(k)}(r); \\
\sigma_{rr}^{(k)}(x, r) &= \varphi_1(x) \sigma_1^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \sigma_2^{(k)}(r), \quad (2.3)
\end{aligned}$$

де $\varphi_1(x) = 1 - x/a$; $\varphi_2(x) = x/a$; a - довжина кінцевого елемента;
 $v_{xi}^{(k)}(r)$, $v_{\theta}^{(k)}(r)$, $w_i^{(k)}(r)$, $\tau_{xi}^{(k)}(r)$, $\tau_{\theta}^{(k)}(r)$, $\sigma_i^{(k)}(r)$ - шукані функції розподілу переміщень і напружень в i -тому вузлі (координата x спрямована уздовж оболонки).

Відома процедура Бубнова-Гальоркіна з використанням формули Гріна дозволяє отримати рівняння рівноваги кінцевого елемента.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & -k_{01} & 0 & B_{55}^{(k)} k_{00} & 0 & B_{45}^{(k)} k_{00} \\ -B_{13}^{(k)} k_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} k_{00} & -k_{01} B_{36}^{(k)} & 0 & k_{00} B_{33}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}} k_{00} & B_{45}^{(k)} k_{00} & 0 & B_{44}^{(k)} k_{00} \\ B_{11}^{(k)} k_{11} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} k_{10} & B_{16}^{(k)} k_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}} k_{00} & B_{13}^{(k)} k_{10} & 0 \\ \frac{1}{r^{(k)}} B_{21}^{(k)} k_{01} & \frac{1}{(r^{(k)})^2} B_{21}^{(k)} k_{00} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} k_{01} & k_{10} & \frac{1}{r^{(k)}} (B_{1r}^{(k)} - 1) k_{00} & 0 \\ B_{16}^{(k)} k_{11} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} k_{10} & B_{66}^{(k)} k_{11} & 0 & B_{36}^{(k)} k_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}} k_{00} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} k_{00,r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v_x^{(k)}(r) \\ v_{\theta}^{(k)}(r) \\ w^{(k)}(r) \\ \tau_x^{(k)}(r) \\ \tau_{\theta}^{(k)}(r) \\ \sigma^{(k)}(r) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (2.4)$$

$$\text{Тут } k_{00} = \begin{bmatrix} a/3 & a/6 \\ a/6 & a/3 \end{bmatrix}; \quad k_{10} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; \quad k_{11} = \begin{bmatrix} 1/a & -1/a \\ -1/a & 1/a \end{bmatrix};$$

$$k_{01} = k_{10}^T; \quad v_x^{(k)T} = \{v_{x1}^{(k)}(r), v_{x2}^{(k)}(r)\}; \quad v_{\theta}^{(k)T} = \{v_{\theta1}^{(k)}(r), v_{\theta2}^{(k)}(r)\};$$

$$w^{(k)T} = \{w_1^{(k)}(r), w_2^{(k)}(r)\}; \quad \tau_x^{(k)T} = \{\tau_{x1}^{(k)}(r), \tau_{x2}^{(k)}(r)\};$$

$$\tau_{\theta}^{(k)T} = \{\tau_{\theta1}^{(k)}(r), \tau_{\theta2}^{(k)}(r)\}; \quad \sigma^{(k)T} = \{\sigma_1^{(k)}(r), \sigma_2^{(k)}(r)\}.$$

Далі формуємо роздільну систему диференціальних рівнянь для шару з урахуванням кінематичних граничних умов на контурі оболонки.

$$\begin{pmatrix} 0 & -K_{01} & 0 & B_{35}^{(k)}K_{00} & 0 & B_{45}^{(k)}K_{00} \\ -B_{13}^{(k)}K_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}}B_{23}^{(k)}K_{00} & -B_{36}^{(k)}K_{01} & 0 & B_{33}^{(k)}K_{00} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}}K_{00} & B_{45}^{(k)}K_{00} & 0 & B_{44}^{(k)}K_{00} \\ B_{11}^{(k)}K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{12}^{(k)}K_{10} & B_{16}^{(k)}K_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}}K_{00} & B_{13}^{(k)}K_{10} & 0 \\ \frac{1}{r^{(k)}}B_{21}^{(k)}K_{01} & \frac{1}{(r^{(k)})^2}B_{21}^{(k)}K_{00} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{26}^{(k)}K_{01} & K_{10} & \frac{1}{r^{(k)}}(B_{1r}^{(k)}-1)K_{00} & 0 \\ B_{16}^{(k)}K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{26}^{(k)}K_{10} & B_{66}^{(k)}K_{11} & 0 & B_{36}^{(k)}K_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}}K_{00} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\{ v_x^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ v_\theta^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ w^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ \tau_x^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ \tau_\theta^{(k)}(r) \right\} \\ \left\{ \sigma^{(k)}(r) \right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Тут $\{v_{xil}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, v_{xil}^{(k)}(r), \dots\}$; $\{v_{\theta 2}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, v_{\theta 2}^{(k)}(r), \dots\}$;
 $\{w_{i3}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, w_{i3}^{(k)}(r), \dots\}$; $\{\tau_{xi4}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, \tau_{xi4}^{(k)}(r), \dots\}$;
 $\{\tau_{\theta 5}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, \tau_{\theta 5}^{(k)}(r), \dots\}$; $\{\sigma_{i6}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, \sigma_{i6}^{(k)}(r), \dots\}$.

де i - номер точки, в якій визначаються шукані функції.

Вектор шуканих функцій може бути представлений таким чином:

$$\begin{pmatrix} \left\{ v_{xil}^{(k)} \right\} \\ \left\{ v_{\theta 2}^{(k)} \right\} \\ \left\{ w_{i3}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{xi4}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{\theta 5}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \sigma_{i6}^{(k)} \right\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(J) \\ \mu_{i5}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(J) \\ \mu_{i6}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(J) \end{pmatrix} \left[C^{(k)} \right] \quad (2.6)$$

де $[C^{(k)}]^T = \left[C_1^{(k)} e^{r\beta_1^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}} \right]$; $\beta_j^{(k)}$ - корені характеристичного рівняння роздільної системи диференціальних рівнянь, які можуть бути комплексними; $\mu_{i1}^{(k)}(j)$, $\mu_{i2}^{(k)}(j)$, $\mu_{i3}^{(k)}(j)$, $\mu_{i4}^{(k)}(j)$, $\mu_{i5}^{(k)}(j)$, $\mu_{i6}^{(k)}(j)$ - її власні вектора; $C_j^{(k)}$ - постійні інтегрування, які визначаються з умов контакту шарів і умов на лицьових поверхнях в кожному вузлі сітки розбиття конструкції на кінцеві елементи; J - загальна кількість шуканих функцій в шарі.

3. Результати числових досліджень

Як приклад розрахунку розглянемо чотиришарову анізотропну оболонку з наступними фізико-механічними характеристиками (Рис. 1): $E_x^{(i)} / E_\theta^{(i)} = 25 / 1$; $E_\theta^{(i)} = E_r^{(i)}$; $G_{x\theta}^{(i)} / E_r^{(i)} = 0,5 / 1$; $G_{\theta r}^{(i)} / E_r^{(i)} = 0,2 / 1$; $G_{xr}^{(i)} = G_{x\theta}^{(i)}$; $\nu_{x\theta}^{(i)} = \nu_{xr}^{(i)} = \nu_{\theta r}^{(i)} = 0,25$; $L / h = 10$; $h / R = 1 / 10$. Шари по чергово повернуті на 45° ; -45° ; 45° ; -45° . На торцях оболонки заборонені вертикальні переміщення $U_r = 0$. Розглядалася половина оболонки, яка

ділилася на 100 елементів. Результати розрахунку ($\bar{U}_r = U_r E / q_{31}$;

$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} / q_{31}$; $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / q_{31}$; $\bar{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr} / q_{31}$) на зовнішніх поверхнях шарів для синусоїдального навантаження, що прикладається на внутрішній поверхні оболонки, наведені в табл. 1. Напруження σ_{rr} по моделі М1 отримані з рівнянь (1.8), як контактні (вузлові навантаження на рівні

контакту ділилися на довжину елемента). Розрахункові величини \bar{U}_r ,

$\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$, $\bar{\sigma}_{rr}$ наведені в центрі оболонки.

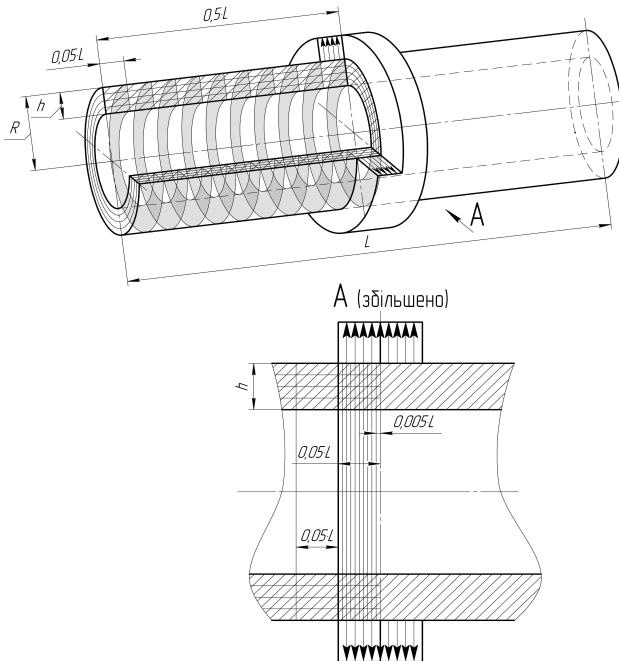


Рис. 1

Таблиця 1

\bar{U}_r		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{rr}$	
M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
43.83	43.95	-9.741	-9.777	0.4574	0.4558	-1.000	-1.000
43.65	43.76	-3.257	-3.235	5.8076	5.8506	-0.866	-0.869
43.65	43.76	-7.766	-7.779	1.2981	1.3060	-0.866	-0.869
43.45	43.56	-1.791	-1.799	6.2626	6.2754	-0.697	-0.696
43.45	43.56	1.784	1.797	9.8381	9.8724	-0.697	-0.696
43.25	43.37	8.125	8.183	15.213	15.284	-0.317	-0.319
43.25	43.37	2.564	2.624	9.6518	9.7242	-0.317	-0.319
43.09	43.21	8.867	8.934	14.805	14.884	0.000	0.000

У табл. 2 представлені результати розрахунку розглянутої вище оболонки, але навантаженої рівномірним локальним навантаженням в центрі оболонки на зовнішній поверхні. Половина оболонки ділилася на 100 елементів. Рівномірно-розподіленим нормальним навантаженням навантажено десять елементів в центрі оболонки, тобто зона навантаження дорівнює товщині оболонки.

Таблиця 2

\bar{U}_r		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{rr}$	
M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
11.43	11.45	-5.367	-5.415	-2.094	-2.132	0.000	0.000
11.47	11.49	-0.402	-0.401	2.096	2.103	0.151	0.151
11.47	11.49	-3.937	-3.968	-1.439	-1.464	0.151	0.151
11.54	11.55	0.095	0.099	2.278	2.286	0.421	0.422
11.54	11.55	-0.389	-0.396	1.794	1.791	0.421	0.422
11.66	11.67	4.186	4.221	6.054	6.088	0.778	0.778
11.66	11.67	-0.204	-0.198	1.664	1.670	0.778	0.778
11.81	11.83	5.861	5.892	6.783	6.811	1.000	1.000

На відміну від попереднього прикладу при розрахунку по моделі M1, коли кожен шар розглядався в рамках одного підшару, необхідну точність при розрахунку напружень $\bar{\sigma}_{xx}$ та $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ забезпечити не вдалося через високі градієнти зміни напружено-деформованого стану в зоні локальних навантажень. Розподіл кожного шару на чотири підшари забезпечує необхідну точність. При розрахунку по моделі M2 в такому розподілі немає необхідності, тому що в цьому випадку розподіл шуканих функцій по товщині оболонки знаходиться на підставі точного рішення системи (2.5).

Висновок

У даній статті розроблено два підходи до дослідження напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних циліндричних оболонок під впливом локальних навантажень. Обидва походи засновані на поділі циліндричної оболонки по товщині концентричними поверхнями на ряд складових циліндричних оболонок, досить тонких, щоб можна було знехтувати зміною їх кривизни по товщині. Задовольняючи умовами контакту на зовнішніх поверхнях між складовими оболонками, описуємо напружено-деформований стан вихідної оболонки, з дискретним урахуванням зміни кривизни по товщині. У першому підході для апроксимації шуканих функцій і по товщині, і в плані залучаються поліноми. У другому для апроксимації шуканих функцій в плані використовуються поліноми, а їх розподіл по товщині конструкції розшукується на основі аналітичного рішення відповідної системи диференціальних рівнянь. Обидва підходи незалежні від похибки апроксимації та арифметичних обчислень. Розгляд дослідницьких завдань двома методами служить додатковим обґрунтуванням достовірності отриманих результатів розрахунку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Напіваналітичний метод кінцевих елементів в механіці деформівних тіл // К.: НДІ см.-1993. - 376 с.
2. *Bakaiyan H., Hosseini H., and Ameri E.* Analisis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined integral pressure and thermo-mechanical loading witch thermal variations // Compos. Struct. - 2009.- 88.- P. 532 - 541.
3. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Задачі теорії пружності неоднорідних тел.- К.: Наукова думка, 1991.- 216 с.
4. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Чисельно-аналітичне рішення задач механіки оболонок на основі різних моделей. -К.: Академперіодика, 2006. - 472 с.
5. *Grigorenko, Ya., M., Yaremchenko, S., N.* : Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech.-2008.- 40, N9.- P. 998-1005.
6. *Grigorenko, Ya., M., Grigorenko, A., Ya., Zakhariychenko, L., I.* : Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated lipticcross-section // Int. Appl. Mech.-2009.- 43, N12.- P.1372 - 1379.
7. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech.-2013.- 49, N2.- P.123 - 193.
8. *Гузь О.М., Чернищенко І.С. Шнеренко К.І.* Концентрація напружень біля отворів у оболонках з композитних матеріалів // Прикладна механіка. - 2001.-37, N2 С. 3-43.
9. *Hosine A., Chapelle D., Baubakar M.L., et al.* Experimental and analytical investigation of the cylindrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // Int. J. Press. Vess. Piping.- 2009.- 86.- P.649 - 655.
10. *Marchuk A.V., and Piskunov V.G.* Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // Mechanics of Composite Materials ..- 1999.-35, N4.-P.285 - 292.
11. *Marchuk A.V., and Piskunov V.G.* Calculation of layered structures by semi analytic method of finite elements // Mechanics of Composite Materials. - 1997.-33, N6.-P.553 - 556.

12. *Marchuk A.V., Il'chenko Ya. L., and Gnedash S.V.* Analyzing of the stress-strain state of thick cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.*-2011.- 47, N4.- P.449 - 455.
13. *Noor A.K., Burton W.S., and Peter J.M.* Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // *Int. J. Solids Struct.*- 1991.- 27.No.10.- P.1269-1286.
14. *Sheng H.Y. and Ye J.Q.* A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*- 2003.- 192.- P.2441-2459.
15. *Shuvalov A.I. and Soldatos K.P.* On the successive approximation method for three-dimension analysis of radically inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vibr.*- 2003.- 259, No.1.- P.233.- 239.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Guliar A.I., Sakharov A.S., Topor A.G.* Poluanaliticheskiy metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruiemykh tel. (Semi-analytical method of finite elements in strain bodies mechanics) // *K.: NII SM.*-1993.-376 s.
2. *Bakaiyan H., Hosseini H., and Ameri E.* Analis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined integral pressure and thermo-mechanical loading witch thermal variations // *Compos. Struct.*- 2009.- 88.- P. 532 - 541.
3. *Grigorenko Ia.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D.* Zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel. (The theory of non homogeneous bodies goals) – *K.: Naukova Dumka*, 1991. – 216 s.
4. *Grigorenko Ia.M., Vlaikov G.G., Grigorenko A.Ia.* Chislenno-analiticheskoe reshenie zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnykh modeley. (Numeric analytical problem solving on the basis of different models) -*K.: Akademperiodika*, 2006. - 472 s.
5. *Grigorenko, Ya., M., Yaremchenko, S., N. :* Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // *Int. Appl. Mech.*-2008.- 40, N9.- P. 998 - 1005.
6. *Grigorenko, Ya., M., Grigorenko, A., Ya., Zakhariyenko, L., I. :* Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated lipiticcross-section // *Int. Appl. Mech.*-2009.- 43, N12.- P.1372 - 1379.
7. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.*-2013.- 49, N2.- P.123 - 193.
8. *Guz A.N., Chemyshenko I.S., Shnerenko K. I.* Kotsentratsiia napriazheniy okolo otverstiy v obolochkakh iz kompozitnykh materialov. (Effect of holes in the composed material sheaths) // *Prikladnaia Mekhanika.* – 2001.- 37,N2 p.3-43.
9. *Hosine A., Chapelle D., Baubakar M.L., et al.* Experimental and analytical investigation of the cylindrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // *Int. J. Press. Vess. Piping.*- 2009.- 86.- P.649 - 655.
10. *Marchuk A.V., and Piskunov V.G.* Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // *Mechanics of Composite Materials* ..- 1999.-35, N4.-P.285 - 292.
11. *Marchuk A.V., and Piskunov V.G.* Calculation of layered structures by semi analytic method of finite elements // *Mechanics of Composite Materials.* - 1997.-33, N6.-P.553 - 556.
12. *Marchuk A.V., Il'chenko Ya. L., and Gnedash S.V.* Analyzing of the stress-strain state of thick cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.*-2011.- 47, N4.- P.449 - 455.
13. *Noor A.K., Burton W.S., and Peter J.M.* Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // *Int. J. Solids Struct.*- 1991.- 27.No.10.- P.1269-1286.
14. *Sheng H.Y. and Ye J.Q.* A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*- 2003.- 192.- P.2441-2459.
15. *Shuvalov A.I. and Soldatos K.P.* On the successive approximation method for three-dimension analysis of radically inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vibr.*- 2003.- 259, No.1.- P.233.- 239.

Marchuck O.V., Raskazov O.O., Gnedash S.V., Levkivskiy S.A.

STRESS STRAIN BEHAVIOR ANALYSIS OF THICK-WALLED ANISOTROPIC CYLINDER SHEATHS SUSCEPTIBLE TO LOCAL IMPACT

Two approaches to stress strain behavior of anisotropic thick-walled cylindrical sheath under local load influence investigation have been developed. Both approaches are based on division of hollow cylindrical sheath across the thickness by the concentric surfaces into a number of constituent cylindrical sheaths, thin enough to neglect their curve changes across the thickness. Corresponding to contact conditions on outer surfaces between the composed sheaths, we describe the stress strain behavior of the initial sheath, accounting for the curve changes across the thickness. In the first approach for sought functions approximation, polynomials are attracted, both across the thickness and in the plan itself. In the second approach for sought functions approximation polynomials are used and their distribution across the construction thickness is found on the basis of the analytical decision of the corresponding difference equation system. Investigative goals consideration by means of two methods serves as an additional veracity substantiation of accounting results.

Key words: thick layered anisotropic cylindrical sheaths, local shearing loads.

Марчук А.В., Рассказов А.О., Гнедаш С.В., Левковський С.А.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДВЕРЖЕННЫХ ЛОКАЛЬНОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Построены два подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния толстых анизотропных цилиндрических оболочек под воздействием локальных нагрузок при различных условиях закрепления контура. В первом подходе для аппроксимации искомым функций в плане и по толщине используют полиномы. Во втором для аппроксимации искомым функций в плане применяют линейные полиномы, а их распределение по толщине разыскивают на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния оболочек в зоне локальной нагрузки.

Ключевые слова: толстые слоистые анизотропные цилиндрические оболочки, локальные нагрузки.

УДК 539.3

Марчук О.В., Рассказов О.О., Гнедаш С.В., Левківський С.А. Аналіз напружено-

деформованого стану товстостінних анізотропних циліндричних оболонок, схильних до локального впливу // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 94. – С. 172 – 185.

Побудовано два підходи до дослідження напружено-деформованого стану товстих анізотропних циліндричних оболонок під дією локальних навантажень при різних умовах закріплення контура.

Табл. 2.

Марчук А.В., Рассказов А.О., Гнедаш С.В., Левковський С.А. Анализ напряженно-

деформированного состояния толстостенных анизотропных цилиндрических оболочек, подверженных локальному воздействию // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вип. 94. – С. 172 – 185.

Построены два подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния толстых анизотропных цилиндрических оболочек под воздействием локальных нагрузок при различных условиях закрепления контура.

Marchuck O.V., Raskazov O.O., Gnedash S.V., Levkivskiy S.A. Stress strain behavior analysis of thick-walled anisotropic cylinder sheaths susceptible to local impact // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2015. – Issue. 94. – С. 172 – 185.

Two approaches to stress strain behavior of anisotropic thick-walled cylindrical sheath under local load influence investigation have been developed.

Автори:

Доктор технічних наук, професор кафедри опору матеріалів та машинознавства Національного транспортного університету **МАРЧУК Олександр Васильович**.

Адреса робоча: 01010 Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, кафедра опору матеріалів і машинознавства, **МАРЧУКУ Олександр Васильовичу**.

Адреса домашня: Україна, м. Київ, вул. Сім'ї Сосніних, 2/1, кв. 85. **МАРЧУКУ Олександр Васильовичу**.

Роб. тел. +380 (44) 280-43-68;

Моб. тел. +380 (99) 425-67-75;

Дом. тел. +380 (44) 407-62-11.

e-mail: ksm_ntu@ukr.net

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедру теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету **РАССКАЗОВ Олександр Олександрович**.

Адреса робоча: 01103 Україна, м. Київ, вул. Кіквідзе, 42, Національний транспортний університет, кафедра теоретичної та прикладної механіки, **РАССКАЗОВУ Олександр Олександровичу**.

Моб. тел. +380 (67) 243-26-48;

e-mail: arasskazov@ukr.net

Спеціаліст, аспірант кафедри опору матеріалів та машинознавства Національного транспортного університету **ГНЄДАШ Сергій Вікторович**.

Адреса робоча: 01010 Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, кафедра опору матеріалів і машинознавства, **ГНЄДАШУ Сергію Вікторовичу**.

Роб. тел. +380 (44) 280-43-68;

Моб. тел. +380 (63) 523-18-60;

e-mail: ksm_ntu@ukr.net

Старший викладач кафедри дорожніх машин Національного транспортного університету **ЛЕВКІВСЬКИЙ Сергій Анатолійович**.

Адреса робоча: 01010 Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, кафедра дорожніх машин, **ЛЕВКІВСЬКОМУ Сергію Анатолійовичу**.

Адреса домашня: Україна, м. Київ, вул. О. Бестужева, 34 кв. 42. **ЛЕВКІВСЬКОМУ Сергію Анатолійовичу**.

Роб. тел. +380 (44) 280-97-73;

Моб. тел. +380 (97) 831-65-47;

Дом. тел. +380 (44) 484-70-73.

e-mail: sergey_levkovsky@ukr.net

УДК 539.3

САМОУПРОЧНЯЮЩИЕСЯ КОНСТРУКТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

П.В. Алявдин¹

д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой строительных конструкций

¹ *Зеленогурский университет, Зелена Гура, Польша*

Рассматривается определение, анализ и способы создания несущих систем, которые обладают повышенной прочностью, жесткостью и безопасностью, и поэтому называются самоупрочняющимися конструктивными системами. Предложены математические модели оптимизации таких конструкций, как дискретных механических систем, под действием постоянной, монотонно возрастающей или повторно-переменной нагрузки или кинематических воздействий. Использована двухуровневая постановка задачи оптимизации. Предельные параметры переменных воздействий находятся на первом уровне оптимизации. На втором уровне максимизируются параметры постоянной равновесной нагрузки, пригруза и/или минимизируется стоимость системы. Предложена матричная форма записи формул для равновесной нагрузки на изменяемые системы. Представлены примеры использования предлагаемых методов и способов создания самоупрочняющихся конструктивных систем.

Ключевые слова: самоупрочняющиеся конструктивные системы, предельный анализ, двухуровневая оптимизация, равновесная нагрузка

1. Введение

Эффект самоупрочнения конструкций, вследствие изменения их геометрии под нагрузкой, был известен давно, однако и в настоящее время его использование и оптимизация вызывает интерес [14, 17, 22, 23, 26].

Самоупрочняющейся конструктивной системой (СУКС) будем называть такую систему, которая в состоянии предельного равновесия (превратившись в механизм или будучи изначально изменяемой) способна за счет изменения своей геометрии воспринимать дополнительную нагрузку или другие внешние воздействия. Отказ или разрушение систем СУКС происходит постепенно, при увеличении перемещений и не сопровождается динамическими эффектами типа прощелкивания.

К числу самоупрочняющихся систем относятся работающие преимущественно на растяжение висячие и вантовые конструкции, а также системы типа tensegrity [9, 11, 18, 21], у которых длинные элементы растянуты, а короткие элементы - сжаты. К этим системам (по определению) относятся также некоторые изначально геометрически изменяемые [6] или вырожденные (мгновенно-изменяемые или мгновенно-жесткие) системы [24]. Различные комбинации названных конструкций со стержневыми или пластинчато-оболочечными элементами усиления могут обладать свойствами исходных систем [8]. Однако, как было показано ранее [1, 15], существуют и другие самоупрочняющиеся конструктивные системы, для множества (класса) которых автором [2] были предложены критерии су-

ществования (устойчивости состояния пластического течения/разрушения), эвристический способ формирования (создания), а также проведены численные исследования таких систем [12, 13]. Заметим, что системы СУКС ранее были названы в работах автора [1, 2] «геометрически» упрочняющимися; здесь это название уточнено. Оптимизация и управление поведением подобных несущих конструкций рассматривались в работах [10, 14].

В данной работе принимается, что состояние предельного равновесия может быть обусловлено только появлением пластических деформаций (или пластических шарниров при изгибе), однако данный подход применим и к хрупкому разрушению элементов. Предлагается новый алгоритмический критерий существования, развивается постановка двухуровневых задач оптимизации и приводятся примеры расчетов систем СУКС. Отмечаются особенности использования различных программных комплексов для использования в расчетах. Рассматриваются эвристические способы создания или синтеза самоупрочняющихся систем. Отмечается, что добавление элементов усиления к изменяемым системам СУКС может обеспечить их повышенную безотказность (живучесть) по сравнению с исходными системами.

2. Определение самоупрочняющихся конструктивных систем

2.1. Соотношения состояния систем

Запишем определяющие соотношения состояния (билинейно упрочняющейся) упругопластической конструкции как дискретной (например, конечноэлементной) системы, воспринимающей повторно-переменные нагрузки F, d при больших перемещениях. При этом нагрузка F состоит из постоянной F_c (собственный вес, пригруз) и переменной F_v составляющих. Если функции текучести, упрочнения и пластического потенциала имеют билинейный характер, получим

$$\begin{aligned} q &= \gamma(u), \quad A_n(u)S = F, \quad F = F_c + F_v, \quad q = e + p + d, \quad e = DS, \\ p &= V\lambda, \quad \phi = N^T S - H\lambda - K \leq 0, \quad \dot{\phi} = N^T \dot{S} - H\dot{\lambda}, \\ \lambda &\geq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \phi^T \dot{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения [2]:

$u, F \in R^n$ – векторы, объединяющие подвекторы u_j, F_j обобщенных перемещений и внешних сил в j -х свободных узлах,

$$u := u(N) = (u_j, j \in J_F), \quad F := F(N) = (F_j, j \in J_F);$$

n – число степеней свободы системы; N – их множество, $|N| = n$; J_F – множество свободных узлов; $q, e, p, d, S \in R^m$ – векторы, объединяющие подвекторы q_h, \dots, S_h соответственно суммарных, упругих и пластических обобщенных деформаций; дисторсий, обобщенных усилий h -х элементов, $h \in H_e$; $H_e, |H_e|$ – множество и число конечных элементов;

$$q := q(M) = (q_h, h \in H_e), \dots, S := S(N) = (S_h, h \in H_e);$$

m – размерность векторов; M – множество компонент векторов, $|M| = m$; $\lambda, \varphi, \psi, \xi, K \in R^y$ – векторы пластических множителей, соответствующих им функций текучести, пластических потенциалов, функций упрочнения и констант текучести для всего множества Y режимов течения, $|Y| = y$ – число режимов течения;

$$\lambda := \lambda(Y) = (\lambda_h, h \in H_e), \dots, K := K(Y) = (K_h, h \in H_e);$$

$N := N(M, Y) = \text{diag} N_h$ – диагональная блочная $m \times y$ -матрица; N_h – матрица h -го конечного элемента; $V := V(M, Y) = \text{diag} V_h$ – аналогичная диагональная блочная $m \times y$ -матрица, состоящая из матриц V_h h -х конечных элементов. Как и для элементов из материала, подчиняющегося ассоциированному закону течения, $\varphi = \psi$, $N = V$. Если функции текучести и пластические потенциалы линейны относительно S , матрицы N и V будут включать внешние нормальные векторы к соответствующим плоскостям φ и ψ ; $H := H(Y, Y) = \text{diag} H_h$ – диагональная блочная $y \times y$ -матрица упрочнения, образованная из матриц $H_h(r^h, r^h)$ упрочнения h -х элементов.

Как и для элементов из материала, подчиняющегося ассоциированному закону течения, $\varphi = \psi$, $N = V$. Столбцы матрицы V и N служат соответственно градиентами (субградиентом) функций текучести φ и пластических потенциалов ψ (объединенных функций φ_0 и ψ_0).

Вектор скоростей пластических деформаций \dot{p} , $\dot{p} \in R^m$, выразится через матрицу V и вектор скоростей пластических скалярных множителей $\dot{\lambda}$ в виде произведения $\dot{p} = \partial \varphi \dot{\lambda} = V \dot{\lambda}$.

Соотношения (1) определяют состояние упрочняющейся упругопластической конструкции при больших перемещениях, воспринимающей квазистатические, произвольным образом изменяющиеся во времени нагрузки и воздействия $F, d \in \Omega_{F,d}$,

$$F \in \Omega_{\dot{F}}(F_j, j \in J), d \in \Omega_{\dot{d}}(d_j, j \in J), \Omega_{F,d} = \Omega_f \cup \Omega_d. \quad (2)$$

Здесь область изменения нагрузок и воздействий $\Omega_{F,d}$ объединяет области Ω_F и Ω_d , которые определяются соответственно векторами отдельных нагружений F_j и воздействий $d_j, j \in J$, J – множество послед-

них. Описание и построение указанных областей приводится в главе 2 работы [2]. Необходимо отметить, что она функция текучести φ существенно зависит от характеристик циклов нагружения, $\varphi := \varphi(\Omega_F, d)$.

Для практических расчетов конструкций в качестве условий текучести обычно принимаются, с необходимыми предположениями, условия прочности элементов в соответствии с действующими нормами проектирования.

2.2. Устойчивость состояния разрушения систем

Из анализа представленных выше соотношений следует критерий общей устойчивости состояния геометрически нелинейных упрочняющихся упругопластических систем с ассоциированным законом течения, работающих при повторно-переменном нагружении, имеет вид [2]

$$u^T G(u, S)u - u^T A(u)CA(u)^T u - 2u^T A(u)CN\lambda + \lambda^T B\lambda > 0. \quad (3)$$

где $G(u, S) := G(N, N)$ - симметричная матрица порядка n , аналогичная геометрической матрице жесткости $G(S_0)$ в линеаризованном уравнении (1)₂, $AS + G(S_0)u = F$;

$$B = H + N^T CN. \quad (4)$$

Вместо больших перемещений в уравнениях (1)_{1,2} можно рассматривать только геометрические эффекты второго порядка:

$$q = A^T u, \quad (5)$$

$$AS = G(S_0)u = F, \quad (6)$$

Тогда условие (3) примет следующий вид [25],

$$\lambda_t^T M \lambda_t > 0, \quad (7)$$

где $M = M(Y, Y)$ - квадратная матрица порядка u ,

$$M = H - N^T ZV, \quad (8)$$

в общем случае несимметричная, $M \neq M^T$, также как и входящая в нее матрица H , $H \neq H^T$; $Z = Z(M, M)$ - $m \times m$ - матрица влияния Грина, преобразующая векторы дисторсий в векторы усилий:

$$Z = CA^T T^{-1} AC - C, \quad (9)$$

$$T = ACA^T + G, \quad (10)$$

$D = D(M, M) = \text{diag} D_h$, $C \equiv C(M, M) = \text{diag} C_h$ - блочные диагональные матрицы упругости (податливости и жесткости) порядка m , $\text{rank} D = m$, $\text{rank} C = m$, симметричные и неособенные, $\det D \neq 0$, $\det C \neq 0$; $D = C^{-1}$.

Для проверки несимметричной матрицы $M = [m_{ij}]$ на положительную определенность рассматривается ее симметричная часть $M_s = 0,5(M + M^T)$.

Если нижняя грань собственных значений M_s положительна, то положительная определенность матрицы M гарантирована.

Известны различные аналитические критерии и алгоритмические процедуры проверки симметричных матриц M на положительную определенность. Так, в соответствии с критерием Сильвестра все ведущие главные определители (миноры) $\det M_k$ матрицы M должны быть положительными,

$$\det M_k = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{k1} & \dots & m_{kk} \end{bmatrix} > 0, \quad k \in K_a, \quad (11)$$

где K_a – множество ведущих главных определителей, $|K_a| = n_a$; n_a – порядок матрицы M . Условия (11) являются необходимыми и достаточными.

Механический смысл данного критерия состоит в том, что все возможные механизмы разрушения такой конструкции будут находиться в состоянии устойчивого пластического деформирования.

Для однократного нагружения возможен также критерий неотрицательной «касательной» жесткости конструкции в предельном состоянии [1].

Приведенные выше критерии определяют множество или класс самоупрочняющихся систем, обладающих повышенной прочностью, жесткостью и безотказностью.

3. Первый уровень оптимизации систем: Предельный анализ

Рассмотрим сначала постановку задачи о предельных нагрузках на геометрически нелинейные системы из упрочняющегося материала. Она отличается от соответствующих постановок [16, 19] для геометрически линейных систем из идеально упругопластического материала наличием критерия устойчивости типа (3). Кроме того, к условиям состояния системы необходимо присоединить еще ограничения на перемещения

$$u^- \leq u_t \leq u^+, \quad (12)$$

и (или) на пластические деформации

$$p^- \leq p_t \leq p^+, \quad (13)$$

где $u^-, u^+ \in R^n$, $p^-, p^+ \in R^m$, – соответственно векторы заданных предельных перемещений свободных узлов и предельных пластических деформаций элементов системы. Аналогичным образом ограничиваются скорости соответствующих значений.

Задача определения оптимальных пределов повторно-переменной нагрузки заключается в максимизации некоторой линейной функции векторов отдельных j -х нагружений F_j , d_j , $j \in J$, которые определяют разме-

ры областей Ω_F и Ω_d изменения повторно-переменной нагрузки и воздействий,

$$\sum_{j \in J} (\mathbf{T}_{F_j}^T \mathbf{F}_j + \mathbf{T}_{d_j}^T \mathbf{d}_j) \rightarrow \max \quad (14)$$

при условиях (1)-(3), (12), (13).

Здесь \mathbf{T}_{F_j} , \mathbf{T}_{d_j} – векторы весовых коэффициентов, соответствующие векторам отдельных j -х нагрузжений \mathbf{F}_j , \mathbf{d}_j , $j \in J$, J – их множество. Заметим, что путем изменения дислокаций \mathbf{d}_j , $j \in J$, можно оптимизировать состояние предварительного напряжения конструкции.

4. Второй уровень оптимизации: Стоимость и/или постоянная нагрузка

Численный анализ показывает, что собственный вес и пригруз оказывают положительное влияние на поведение рассматриваемых систем.

Постоянная нагрузка на конструкции присутствует всегда, иногда к ней добавляют еще дополнительный пригруз, обеспечивающий стабилизацию системы. В любом случае, рекомендуется принимать такую постоянную нагрузку и пригруз, которые оказываются „равновесными“ для основной механизм отказа системы. Способы вычисления „равновесной“ нагрузки приведены ниже.

Отметим, что задача оптимизации несущей способности произвольных жесткопластических систем при однократном нагружении, с учетом постоянной нагрузки, рассматривалась в работе [19].

В то же время постоянная нагрузка увеличивает стоимость C системы. Поэтому на втором уровне оптимизации можно минимизировать стоимость системы C и/или максимизировать величину равновесной постоянной нагрузки и пригруза F_c на системы СУКС,

$$C(\mathbf{K}, \mathbf{l}, \mathbf{F}_c) \rightarrow \min, \quad (15)$$

$$\mathbf{T}_c^T \mathbf{G}_c \rightarrow \max, \quad (16)$$

где \mathbf{l} – вектор длин элементов.

Критерии (15) и (16) здесь учитываются одновременно, с учетом соответствующих масштабирующих множителей. Решение подобной векторной (или многокритериальной) задачи оптимизации было проанализировано в ряде работ, например, [1]. Эти критерии можно учитывать на втором уровне оптимизации также независимо, один за другим.

Проблема двухуровневой оптимизации в настоящее время интенсивно развивается, методы ее решения представлены в работах [5, 7, 20].

5. Равновесные и неравновесные нагрузки на самоупрочняющиеся системы

Определение равновесной нагрузки известно в теории геометрически изменяемых и висячих и вантовых конструкций [24]; это нагрузка, которая не вызывает каких-либо перемещений в конструкциях при отсутствии деформаций элементов конструкции. Аналогичное понятие нагрузки использовалось для определения оптимальной формы арок (кривых давления), работающих на чистое сжатие (без изгиба). Соответственно неравновесная нагрузка равна разности произвольной и равновесной нагрузок.

Здесь, в отличие от известных подходов [24], предлагаются матричные формулы для вычисления равновесной нагрузки.

В уравнениях равновесия

$$AS = F \quad (17)$$

принимая некоторый m -подвектор F_0 n -вектора равновесной нагрузки F заданным, тогда уравнения (17) можно записать в виде двух уравнений следующим образом

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где A_0, A_1 – соответственно $m \times m$ - и $s \times m$ -подматрицы матрицы A , причем подматрица A_0 – неособенная.

Из первого уравнения находим вектор усилий S от равновесной нагрузки

$$S = A_0^{-1} F_0, \quad (19)$$

его подстановка во второе уравнение дает подвектор F_1 вектора равновесной нагрузки F ,

$$F_1 = A_1 S = d_{01} F_0, \quad (20)$$

где d_{01} - $s \times m$ -матрица,

$$d_{01} = A_1 A_0^{-1}. \quad (21)$$

Тогда окончательно вектор равновесной нагрузки F примет вид,

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ d_{01} F_0 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} E \\ d_{01} \end{bmatrix} F_0. \quad (22)$$

6. Способы создания самоупрочняющихся систем [2]

Наиболее простые способы создания таких систем заключаются в отыскании допустимого (не обязательно оптимального) проекта конструкции, удовлетворяющей условию устойчивости состояния пластического течения. Ниже предлагаются некоторые аналитические и эвристические способы решения последней задачи.

Аналитические способы основаны на непосредственном исследовании условия устойчивости (3) или (11) пластического течения конструкции в предельном состоянии. Система может быть как геометрически изменяемой, так и мгновенно-изменяемой или мгновенно-жесткой (вырожденной). В первом случае вектор усилий зависит только от нагрузки, а во втором - еще и от состояния предварительного напряжения. Само условие устойчивости может проверяться алгоритмически, с использованием имеющихся программных комплексов.

Эвристические способы основаны на образовании таких шарнирно-стержневых систем, одно-, двух- или трехмерных конструкций, механизм разрушения которых содержит обобщенные пластические шарниры или соответствующие конечные элементы в состоянии текучести/разрушения. Главная же особенность предлагаемых здесь способов заключается в ограничении множества преобразований структуры конструкции путем введения условия устойчивости анализируемых механизмов разрушения. Кроме того, вводится ограничение на виды механизмов разрушения („группы отказов“) конструкции.

Наиболее простым эвристическим способом создания самоупрочняющихся конструкций служит следующий прием. С этой целью какая-либо связь или шарнир исходной самоупрочняющейся или геометрически неизменяемой конструкции развивается путем образования нового звена с малыми размерами таким образом, чтобы, во-первых, число степеней свободы увеличивалось более чем на единицу; во-вторых, чтобы при действии заданных нагрузок в связях нового звена возникали преимущественно растягивающие напряжения; в-третьих, чтобы новое звено не попало ни в одну из групп отказа системы при образовании любых механизмов разрушения.

Способ формирования „скелета-позвоночника“ несущей конструкции в виде особых (мгновенно-изменяемых или мгновенно-жестких) систем, висячих и вантовых систем, а также tensegrity-систем, с последующим возможным усилением конструкции дополнительными элементами-связями.

7. Примеры использования предложенных способов

7.1. Преобразование перекрестной балочной конструкции, подкрепленной шпренгелем (рис. 1.a), путем повторного развития центрального шарнира в две четырехзвенные цепи (рис. 1.b). Предельное равновесие такой системы после образования в узлах конструкции пластических шарниров будет устойчивым.

7.2. Преобразование перекрестной балочной конструкции, подкрепленной шпренгелем (рис. 1.a), путем повторного развития центрального

шарнира в две четырехзвенные цепи (рис. 1.б). Предельное равновесие такой системы после образования в узлах конструкции пластических шарниров будет устойчивым.

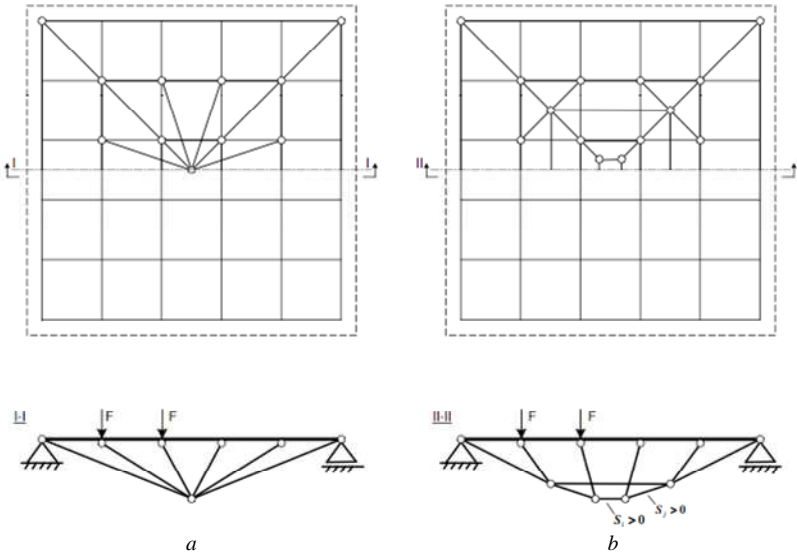


Рис. 1. Преобразование перекрестной балочной конструкции, подкрепленной шпренгелем

7.3. Автором предложен новый тип фундамента под колонну [3], армирование которого в виде двух концентрических колец и радиально расположенных между ними радиальных стержней изменяет схему работы фундаментной плиты, создавая эффект обоймы, что повышает несущую способность конструкции. Эта конструкция реализована в г. Харькове, в депо „Сортировочная”.

7.4. Эффект самоупрочнения реализуется также в предложенной авторами [4] плите ленточного фундамента.

8. Численный анализ самоупрочняющихся систем [13]

Были выполнены расчеты двух видов упругопластических стержневых систем, шпренгельных балок и виадука, в геометрически и физически нелинейной постановке. Решение находилось на основе метода конечных элементов (МКЭ) с использованием модуля нелинейного расчета Nlgeom программы ABAQUS/Standard, а также по программе Wolfram Mathematica.

Анализ шпренгельных балок

Рассмотрены шпренгельные балки, шарнирно опертые на концах (рис. 2). Сосредоточенные силы прикладываются в узлах балки. Поперечное сечение балок $0,3 \times 0,5$ м, их длина $L = 12$ м; высота шпренгеля $h = 2$ м. Параметры материала балки и шпренгеля следующие. Для балки модуль упругости $E_c = 30$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$; предел текучести $\sigma_0 = 10$ МПа; для элементов шпренгеля 1-2, 2-4 и 4-6 принята жесткость $EA_1 = 126$ МН, а для остальных элементов, 2-3 и 4-5, принята жесткость $EA_2 = 12\ 600$ МН.

Модели материала системы: идеально упругопластические балки и идеально упругие элементы шпренгеля.

В расчетах по МКЭ балки моделировались с использованием двумерного балочного элемента с двумя узлами (B21), для шпренгеля использовался двумерный ферменный элемент с двумя узлами (T2D2).

Были рассчитаны четыре варианта шпренгельных балок, для $b = 2$ и 3 м (рис. 2а), а также $b = 4$ и 5 м (рис. 2б,с), для следующих видов нагружения:

(1) без пригруза/постоянной нагрузки: узел 3 нагружен только переменной силой, возрастающей от нуля до $F_3 = 500$ кН, тогда как сила $F_5 = 0$ кН;

(2) с пригрузом/„равновесной” нагрузкой (от собственного веса) в виде постоянных сил $F_3 = F_5 = 100$ кН и с переменной силой F_3 , возрастающей от 100 кН до 500 кН.

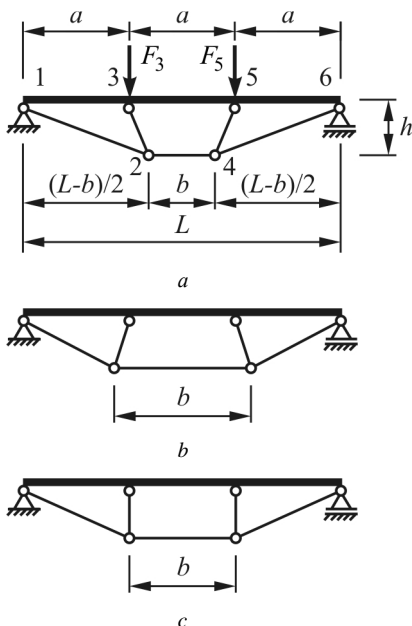


Рис. 2. Схема и нагрузка шпренгельной балки: (а) $b < L/3$; (б) $b = L/3$; (в) $b > L/3$

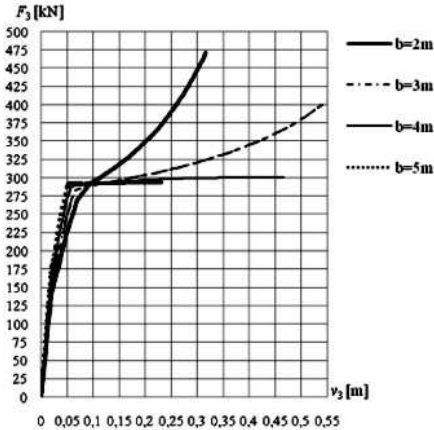


Рис. 3. Зависимость нагрузка-перемещение F_3 - v_3 для системы без пригруза ($F_3 = F_5 = 0$)

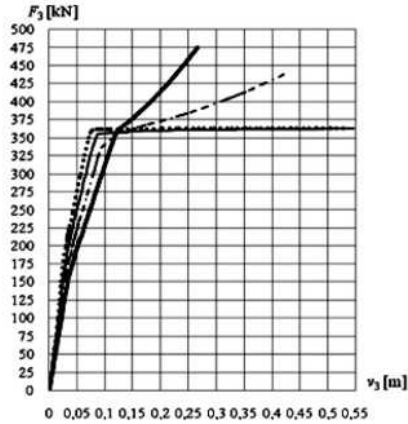


Рис. 4. Зависимость нагрузка-перемещение F_3 - v_3 для системы с пригрузом ($F_3 = F_5 = 100 \text{ кН}$)

Целью численных исследований была оценка несущей способности балок с различными шпренгельными системами (рис. 2а, б, в) без пригруза ($F_3 = F_5 = 0 \text{ кН}$) и с пригрузом ($F_3 = F_5 = 100 \text{ кН}$), а также анализ закритического поведения таких стержневых систем. Результаты этих исследований показаны на рис. 3 и 4.

Несущая способность F^0 конструкции без пригруза узлов 3 и 5 ($F_3 = F_5 = 0 \text{ кН}$) для всех шпренгельных систем равнялась 290 кН (рис. 3).

Эффект самоупрочнения (возрастание на рис. 3 ветви кривой F_3 - v_3) наблюдался только для шпренгелей с наклонными внизу к центру стойками ($b = 2$ и 3 м). В случаях же $b = 4$ и 5 м , когда достигался предел несущей способности F^0 , у конструкции появлялись большие перемещения и затем она разрушалась. Отметим, что в случае $b = 5 \text{ м}$, как показано ниже, на Рис. 3 должна еще образовываться ниспадающая ветвь кривой F_3 - v_3 , которую из прямого расчета по программе ABAQUS получить не удается.

Следовательно, для наклонных внизу к центру стоек шпренгеля состояние предельного равновесия системы будет устойчивым, для наклонных от центра стоек - неустойчивым, а для вертикальных стоек - безразличным.

Для системы с пригрузом ($F_3 = F_5 = 100 \text{ кН}$) на рисунке 4 показана зависимость между нагрузкой F_3 и вертикальным перемещением v_3 . В этом случае предельная несущая способность F^0 конструкции составляла 360 кН . А увеличение несущей способности (эффект пригруза), например, для систем с $b < L/3$. С системами без учета постоянной нагрузки составляет примерно 20% (рис. 4).

Характер разрушения шпренгельных балок следующий. При увеличении нагрузки F_3 в балочном элементе вначале возникает первый пластический шарнир слева от узла 3, а затем второй пластический шарнир возникает справа от узла 5, и система превращается в кинематический механизм (рис. 5).

На рисунке 5 показана также зависимость перемещения v_3 от нагрузки F_3 для двух видов нагружения системы при $b = 2$ м. Точки (1) и (2) показывают, где для этих видов нагружения появились пластические шарниры. Так, для системы без пригруза точкам (1) и (2) соответствуют силы $F_3 = 206$ кН и 290 кН. Для системы с пригрузом первый пластический шарнир (1) появился при $F_3 = 234$ кН, а второй пластический шарнир (2) для $F_3 = 360$ кН. Зависимости F_3-v_3 и за точками (2) монотонно возрастают и приближаются к некоторому пределу.

Таким образом, пригруз (в виде собственного веса или „равновесной“ предварительной нагрузки) данной системы обеспечивает увеличение несущей способности, которое может быть выражено как

$$(F^{**} - F^*) / F^0, \quad (23)$$

где F^0 - предельная несущая способность при $F_3 = F_5 = 0$, F^{**} и F^* - силы в узле 3 в системе с и без предварительной загрузки для заданного перемещения v_3 . В этом примере $F^0 = 290$ кН и $v_3 = 20$ см, $F^{**} - F^* = 65$ кН. Постоянная „равновесная“ нагрузка (собственный вес) системы обеспечила увеличение ее несущей способности системы около 22%. В этом заключается одно из преимуществ таких самоупрочняющихся систем.

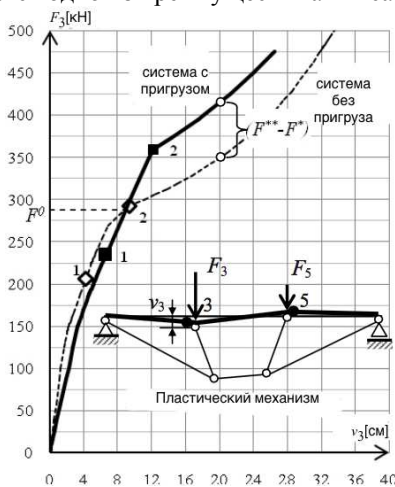


Рис. 5. Зависимость нагрузка-перемещение F_3-v_3 для системы при $b = 2$ м

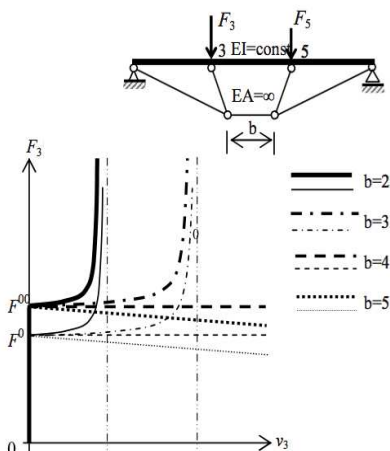


Рис. 6. Зависимость нагрузка-перемещение F_3-v_3 для системы с пригрузом ($F_3 = F_5 > 0$) - утолщенные линии и без пригруза ($F_3 = F_5 = 0$) - тонкие линии

Выявленные особенности были подтверждены также аналитическими расчетами [1] с использованием системы Wolfram Mathematica. При этом для элементов шпренгеля стержневой системы была принята идеальная жесткость, $EA \rightarrow \infty$. Результаты расчетов показаны на рисунке 6, откуда следует, что несущая способность F^0 конструкции без пригруза узлов 3 и 5 для всех систем меньше несущей способности F^{00} конструкции с пригрузом. Кроме того, как показано на Рис. 6, для случая $b = 5$ м в предельном состоянии на кривой $F_{3.v_3}$ появляется ниспадающая ветвь. А для идеально жестких самоупрочняющихся систем существует еще предельное перемещение v_3 , при котором сила F_3 неограниченно возрастает.

Анализ системы виадука

Другой пример объекта подобного типа может быть виадук WD-22 (рис. 7) на развязке движения „Puzguse” на скоростной дороге S3 в Польше [27]. Несущая конструкция этого виадука состоит из железобетонной балки, усиленной стальной аркой с наклонными подвесками [28].

Численные расчеты несущая системы виадука были выполнены на основе метода конечных элементов (МКЭ), используя программу ABAQUS/Standard, в геометрически и физически нелинейной постановке. На рисунке 8 показана упрощенная схема и нагрузка на виадук WD-22. Пролет арки составляет $L = 54$ м, высота $H = 11$ м. Конструкция шарнирно оперта на концах и загружена силами $F_1 = 600$ кН и $F_2 = 100$ кН в узлах 1, 2.

Рисунок 9 представляет зависимость между переменной силой F_1 и вертикальным перемещением v_1 1-го узла при постоянной силе F_2 на конструкции. В системах этого типа влияние собственного веса или „равновесной” предварительной нагрузки обуславливает увеличение несущей способности. Для рассмотренного примера увеличение несущей способности было равно 15%.



Рис. 7. Вид виадука WD-22 [28]

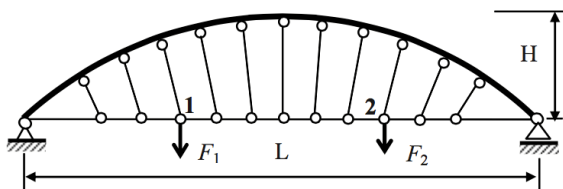


Рис. 8. Упрощенная схема и нагрузка на виадук

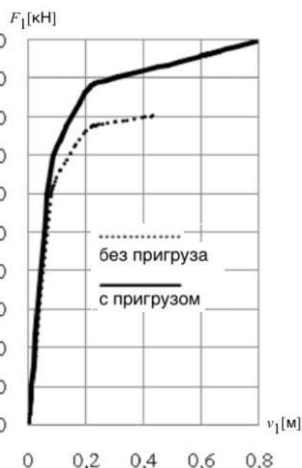
Полученные численные и аналитические результаты показывают, что учет геометрической нелинейности и постоянной нагрузки или пригруза важен для проектирования систем подобного типа.

Выводы

В данной работе предложен новый алгоритмический критерий существования и постановка двухуровневых задач оптимизации самоупрочняющихся конструктивных систем, обладающих повышенной прочностью, жесткостью и безотказностью. Приведена матричная форма записи формул для равновесной нагрузки на изменяемые системы. Представлены эвристические способы создания самоупрочняющихся систем.

Выявлены особенности использования различных программных комплексов для использования в расчетах самоупрочняющихся систем.

Численные и аналитические расчеты показали, что учет постоянной „равновесной” нагрузки (собственного веса или пригруза) обеспечивает увеличение несущей способности самоупрочняющихся систем порядка 20%. Это оказывается еще одним из преимуществ таких конструктивных систем.

Рис. 9. Зависимость нагрузка-перемещение F_1 - v_1 для виадука

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алявдин П.В. Анализ несущей способности и оптимальное проектирование упругопластических конструкций // Белорусск. политехн. ин-т. – Минск: 1990. – Деп. в ВНИИНТПИ 14.10. 1990, № 10856. - 436 с.
2. Алявдин П.В. Предельный анализ конструкций при повторных нагружениях. - Минск: «Технопринт», 2005. - 284 с.

3. *Алявдин П.В.* А.с. 753993 СССР, МКИ Е 02 З 27/02. Плита ленточного фундамента / П.В.Алявдин (СССР). - № 2718013/29-33; Заяв. 26.01.79; Опубл. 07.08.80, Бюл. № 29. - 4 с.
4. *Алявдин П.В.* А.с. 1015050 СССР, МКИ Е 02 З 27/42. Фундамент под колонну / П.В.Алявдин, А.Е.Кончиц (СССР). - № 3298221/29-33; Заявл. 01.06.81; Опубл. 30.04.83, Бюл. № 16. - 3 с.
5. *Демьянов В.Ф., Факкиней Ф.* Задачи двухуровневой оптимизации и штрафные функции. - Известия вузов. Математика. - 2003. - № 12 (499). - С. 49–61.
6. *Илленко К.Н.* О комбинированных и кинематически изменяемых стержневых системах с подвижными опорами. - Строительная механика и расчет сооружений. - 1972. - № 5. - С.26-30.
7. *Мальшев А.В., Стрекаловский А.С.* О взаимосвязи некоторых задач двухуровневой и нелинейной оптимизации. - Известия вузов. Математика. - 2011. - № 4. - С. 99–103.
8. *Москалев Н.С.* Конструкции висячих покрытий. - М.: Стройиздат, 1980. - 331 с.
9. *Осташевский А.Я.* Синтез самонапряженных систем с дискретным сжатием // Расчет и исследование конструкций с помощью ЭЦВМ: Сб. трудов ЛенЗНИИЭП. - Л. - Стройиздат. - 1971. - С. 11-20.
10. *Перельмутер А.В.* Управление поведением несущих конструкций. - К.: УФИМБ (Украинско-финский институт менеджмента и бизнеса), 1998. - 146 с.
11. *Райнус Г.Э.* Построение предварительно напряженных шарнирно-стержневых систем заданной структуры // Расчет и исследование конструкций с помощью ЭЦВМ: Сб. трудов ЛенЗНИИЭП. - Л. - Стройиздат. - 1971. - С. 3-10.
12. *Aliawdin P., Silicka E.* Limit analysis and failure of load-carrying systems. Selected papers of the 9th Int. Conf. on Modern Building Materials, Structures and Techniques, 16–18 May, 2007, Vilnius, Lithuania. III. – Vilnius. - P. 881-886.
13. *Aliawdin P., Urbańska K.* Limit analysis of geometrically hardening rod systems using bilevel programming. - Procedia Engineering. - 2013. - Vol. 57. - P. 89-98.
14. *Alawdin P., Urbańska K.* Limit analysis of geometrically hardening composite steel-concrete systems - Civil and Environmental Engineering Reports. - 2015, No. 16 (1). P. 5-23.
15. *Alyavdin P.* Optimization problem for a new class of effective carrying structures. - Proc. of the Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-2). 26-30 May, 1997, Zakopane, Poland. - Vol. 2. - P. 905-910.
16. *Atkociūnas J.* Optimal shakedown design of elastic-plastic structures. Vilnius: Technika, 2011.- 300p.
17. *Bochenek B., Kruźelecki J.* Optimization of stability of structures. Modern problems. Krakow: Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 2007. - 573 p. (in Polish).
18. *Burkhardt R.W.Jr.* A practical guide to tensegrity design, 2nd ed., Version 2.30. - 2008. - 212 p. http://www.angelfire.com/ma4/bob_wb/tenseg.pdf.
19. *Čyras A., Borkowski A., Karkauskas R.* Theory and methods of optimization of rigid-plastic systems. Vilnius: Technika. - 2004. - 354 p.
20. *Dempe S.* Foundations of bilevel programming, Kluwer Academic Publishers, 2002. - P. 312.
21. *Fuller R.B.* Tensile-integrity structures. Patent USA No 3.063.521.
22. *Król M., Kruźelecki J., Trybuła D.* Optimal stabilization of the post-buckling path for cylindrical shells under external pressure. - Engineering Optimizations. - 2009. - Vol. 41. - No. 1. - P. 59-72.
23. *Kruźelecki J., Trybuła D.* Optimal axial tension and internal pressure stabilizing post-buckling path for cylindrical shells under torsion. - Journal of theoretical and applied mechanics. - Warsaw. 2010. - Vol. 48. - No. 3. P. 645-658.
24. *Kuznetsov E.N.* Underconstrained structural systems: Mechanical Engineering Series. - No. XIII. - Springer Verlag, 1991. - P. 312.
25. *Maier G.* A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects. - Foundations in plasticity, Vol. 1, A. Sawczuk (Ed.). Noordhoff. - P. 417-433.
26. *Olivier V., Bin Z.* Membrane action of composite structures in case of fire. ECCS, 2013. - 247 p.

27. *Sotowczuk A. (Ed.)*. Express road S3 on the itinerary Szczecin-Gorzów Wlkp. Szczecin: Publishing house Comgraph Anna Jadczyk, 2010. - P. 254. (in Polish).
28. *Sotowczuk A., Matecki K.* Selected road structures over the S3 express road, Engineering and Construction. - No. 5. - 2011. P. 284-287. (in Polish).

Alawdin P.W.

SELF-HARDENING LOAD-CARRYING SYSTEMS

The paper considers definition, analysis and creating load-carrying systems that have uprated strength, rigidity and safety, and therefore are called self-hardening load-carrying systems. The optimization mathematic models of structures as discrete mechanical systems withstanding dead load, monotonic or low cyclic static and kinematic actions are proposed. A bilevel optimization problem statement is used. The limit parameters of variable load actions are found on the first level of optimization. On the second level the power of the equilibrium constant load with preloading is maximized and/or system cost is minimized. A matrix form of the formulas for the equilibrium load on geometrically variable system is suggested. The examples of using the proposed methods are presented and creating of self-hardening system are taken into account.

Keywords: self-hardening load-carrying systems, limit analysis, bilevel optimization, equilibrium load

УДК 539.3

Алявдин П.В. Самоупрочняющиеся конструктивные системы // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вып. 94. – С. 186 – 201.

Рассматривается определение, анализ и способы создания самоупрочняющихся несущих конструктивных систем.

Табл. 0. Илл. 9. Библиогр. 28 назв.

УДК 539.3

АДАПТИВНЫЕ КЭ-МОДЕЛИ В ОСНОВЕ СИСТЕМ МОНИТОРИНГА НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ УНИКАЛЬНЫХ ЗДАНИЙ

А.М. Белостоцкий^{1,2,3}Д.К.Каличева²К.И. Островский¹П.И. Новиков²¹ ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», г. Москва, Россия² Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия³ Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия

1. Состояние вопроса

Проблема мониторинга несущих конструкций уникальных зданий и сооружений на стадиях их строительства и эксплуатации приобретает особое значение, важность которого уже признали проектировщики, строители и специалисты надзорных организаций (см. статью в предыдущем номере журнала). Однако единого мнения и алгоритма решения не выработано. Не секрет и то, что сегодня система мониторинга многих уже возведенных уникальных зданий существует лишь на бумаге, утвержденной госэкспертизой.

Выделяются четыре метода инструментального мониторинга: геодезические измерения; инженерно-геологические наблюдения состояния грунтового массива основания; измерения нагрузок и деформаций в конструкциях фундамента и надземной части; *динамические* (вариант – сейсмометрический). Особого внимания заслуживает *сейсмометрический* метод, который, по замыслу, позволяет обследовать здание в целом и выявить значимые изменения в несущих конструкциях без инструментального воздействия и визуального осмотра каждой конструкции. Проведенные эксперименты на реальных объектах подтвердили перспективность этого метода, однако выявили и ряд проблем.

Не продвигают в понимании сути, возможностей и ограничений динамического мониторинга и самые «свежие» нормативные требования ГОСТ Р 53778-2010 [9], предписывающие фиксировать значения (периода и логарифмического декремента) основного тона собственных колебаний «по трем осям жесткости здания».

Отметим усложняющую специфику уникальных зданий и преимущества сейсмометрического метода в контексте проблемы мониторинга: большая размерность и вариабельность (например, по нагрузкам, массам

и жесткостям) объекта при сложности визуально-инструментального их определения (затруднен или невозможен оперативный доступ к большинству несущих конструкций в жилых, офисных и иных помещениях).

Инструментальный мониторинг без опоры на и сопоставления с набором адекватных математических "мониторинговых" моделей здания носит случайно-бессмысленный характер, не представляет практического интереса и, потому, уводит от осознания реальных проблем. Упомянутые "мониторинговые" модели (или одна параметризуемая) имеют ряд специфических отличий от расчетных моделей, используемых для обоснования проектных решений:

1) реализация не проектных, а фактических физико-механических свойств строительных материалов (металла, бетона, арматуры и др.) и геометрии конструкции;

2) учет не нормативных, а фактических измеренных нагрузок и воздействий;

3) включение в статическую и, в особенности, динамическую работу при слабых «фоновых» воздействиях номинально ненесущих конструкций (перегородок, фасадных и др.);

4) работа ряда узлов и соединений по схемам, отличным от принятых в проекте (например, упругая заделка вместо шарнира);

5) адаптируемость (калибруемость, "обучаемость") модели по данным инструментального мониторинга, в том числе, включение обнаруженных дефектов.

Только система инструментального мониторинга, построенная на основе анализа результатов конечноэлементного (КЭ) моделирования в сопоставлении с данными измерений, позволит выполнить планирование мероприятий по подготовке и реагированию на изменения ответственных конструкций, сделать выводы о фактическом состоянии и возможности дальнейшей безопасной эксплуатации здания.

2. Разработанная методика мониторинга. Основные положения

Структурная схема и наполнение разработанной расчетно-экспериментальной методики мониторинга несущих конструкций уникальных зданий представлена на рис.1.

«Стартовой» является КЭ-модель (модели), разработанная для обоснования несущей способности актуального проектного варианта. Для каждой значимой стадии «жизненного цикла» здания (этапы строительства и эксплуатации) строится/модифицируется, верифицируется и адаптируется по текущим данным инструментальных наблюдений параметризуемая пространственная динамическая «мониторинговая» КЭ-модель. При этом основным адаптационным критерием принимается соответствие расчетного и измеренного спектра собственных частот и форм во всем диапазо-

не частот, значимом как для оценки общесистемных изменений, так и идентификации-локализации возможных дефектов.

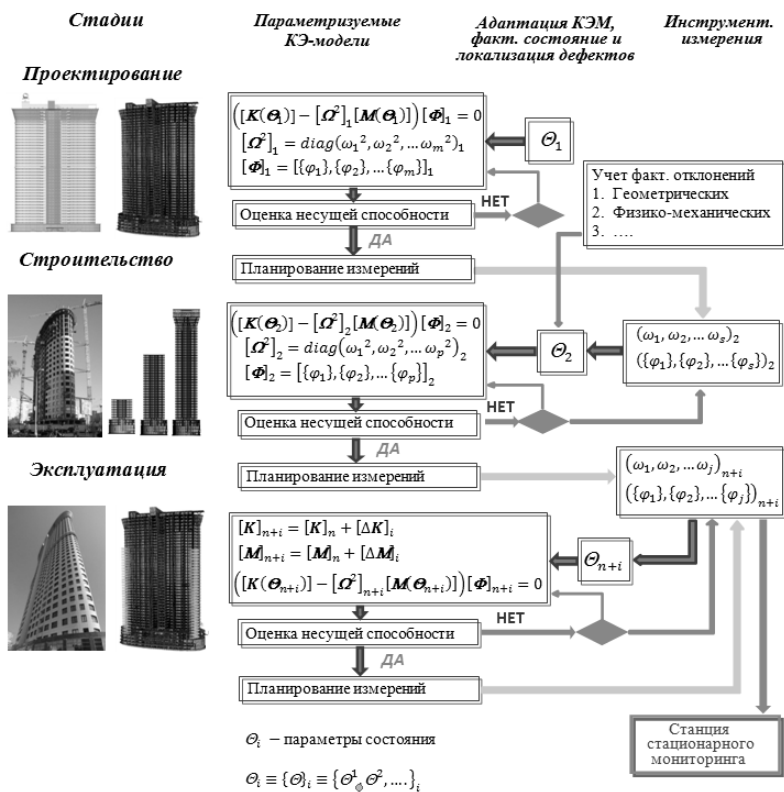


Рис. 1. Структурная схема предлагаемой методики мониторинга

Расчетная оценка несущей способности конструкций выполняется в соответствии с нормативными критериями по КЭ-модели, содержащей параметры как текущей «мониторинговой», так и исходной «проектной» модели. Должны быть включены дополнительные (по сравнению с динамической моделью) свойства – характеристики основания, жесткости и нагрузки и др. Этими данными модель насыщается по результатам всех видов мониторинга.

Особенности реализации каждой из составляющих предложенной методики рассмотрены ниже, в пп. 3-6.

3. Параметризуемые конечноэлементные модели зданий

Пространственная оболочечно-стержневая КЭ-модель (модели) "основание-здание", разработанная для обоснования параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) и несущей способности актуального проектного варианта [3], является «стартовой» для дальнейшей параметризации и адаптации.

Вектор параметров модели

$$\theta_l \equiv \{\theta\}_l = \{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots\}_l$$

для каждой значимой стадии строительства и эксплуатации $l = 1, 2, \dots$ (для которой выполняются инструментальный мониторинг), может включать следующие фактические данные, отличные от проектно-нормативных для зданий:

θ_1 – динамические характеристики основания;

θ_2 – физико-механические свойства строительных материалов (бетона, арматуры и др.);

θ_3 – геометрия несущих конструкций (в частности, эксцентриситеты и наклоны стен и колонн);

θ_4 – измеренные нагрузки и воздействия;

θ_5 – жесткость и масса номинально ненесущих конструкций (перегородок, фасадных и др.), включенных в динамическую работу при слабых «фоновых» воздействиях;

θ_6 – работа ряда узлов и соединений по схемам, отличным от принятых в проекте (например, упругая заделка вместо шарнира).

Реализуются известные приемы построения пространственных оболочечно-стержневых динамических КЭ-модели с учетом перечисленных факторов [3-5]. Так, снижение класса бетона от проектного учитывается соответствующим понижением модуля упругости, а отклонение геометрического положения колонн, стен и других несущих элементов – «жесткими вставками», что позволяет учесть как смещение элементов в плане, так и их наклон.

Наиболее проблемным является учет жесткости перегородок (особенно, внутриквартирных) и фасадных конструкций для стадий эксплуатации, при слабых фоновых воздействиях включенных в динамическую работу системы. Возможен как "интегральный" подход (пропорциональное увеличение жесткости вертикальных несущих конструкций), так и введение в КЭ-модель каждой ненесущей конструкции с приведенной динамической жесткостью (что может в разы увеличить вычислительную размерность модели).

Для параметризованной КЭ-модели ставится и решается частная (частичная) проблема собственных значений – определение значимой "пор-

ции" собственных частот ω_i и форм $\{\varphi_i\}$ колебаний динамической системы

$$[K(\theta_i)][\Phi] = [\Omega^2][M(\theta_i)][\Phi], \quad (1)$$

где $[\Phi] = [\{\varphi\}_1 \dots \{\varphi\}_n]$, $[\Omega^2] = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$, $[K(\theta)]$ – матрица жесткости, $[M(\theta_i)]$ – матрица масс системы.

Задается один из следующих критериев нахождения собственных частот и форм колебаний:

- количество ($\leq n$) подлежащих определению минимальных (низших) собственных частот ω_i и форм $\{\varphi_i\}$.

- диапазон частот от Ω_1 до Ω_2 , внутри которого следует определить все собственные частоты/формы.

- диапазон частот от Ω_1 до Ω_2 и количество подлежащих определению минимальных собственных частот/форм внутри этого диапазона.

Если задан диапазон частот, следует использовать сдвиг σ при триангуляции матрицы жесткости и вычислении собственных частот и форм. Рекомендованное значение сдвига спектра

$$\sigma = -\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2}.$$

В качестве “базовых” выбраны наиболее продвинутые и конкурирующие методы решения обобщенной частной проблемы собственных значений – итераций подпространства и блочный метод Ланцоша. Многочисленные вычислительные эксперименты, в том числе для “контрастных” плохо обусловленных систем и систем с кратными частотами, позволяют судить о надежности и эффективности современных реализаций этих методов [5, 10]. Как показала расчетная практика, для больших задач, характерных для КЭ-анализа уникальных зданий и сооружений (до 10 млн. неизвестных – динамических степеней свободы) *блочный метод Ланцоша* имеет неоспоримые преимущества в скорости определения заданного количества собственных частот и форм.

4. Адаптация (калибровка) КЭ-моделей по данным инструментальных наблюдений

Можно выделить две основные группы подходов, используемых при адаптации КЭ-моделей по данным динамического мониторинга: «интуитивно-инженерные» и математически формализованные.

На практике сегодня доминируют методики первой группы, оставляя широкий простор для интерпретации расчетных и измеренных динамических характеристик.

Среди методов второй группы отметим наиболее строгие и перспективные, основанные на численном решении некорректных обратных задач методом регуляризации Тихонова [12-15]. Отметим, что к настоящему времени разработаны алгоритмы и программные реализации, позволяющие идентифицировать фактическое состояние и локализовать дефекты для простых линейно-упругих систем (балка и плита на винклеровском основании, ферма, рама).

Приведем один из предлагаемых вариантов алгоритма, основанном на решении нелинейной задачи оптимизации – минимизации *целевой функции*.

$$\underset{\theta}{\text{Minimize}} \quad \Pi(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nmd} \alpha_i \|\varphi_i - \widehat{\varphi}_i\|^2 \quad \text{при } R(\theta) \geq 0$$

Функция чувствительности

$$\Pi_{, \theta} = \sum_{i=1}^{nmd} \alpha_i \|\varphi_i - \widehat{\varphi}_i\| \varphi_{i, \theta} \quad \varphi_{i, \theta} = - \sum_{i \neq j} \frac{\varphi_i^T K_{, \theta} \varphi_j}{(\lambda_i - \lambda_j) \varphi_i^T M \varphi_i} \varphi_i \quad (i \neq j). \quad (2)$$

Регуляризация

$$\underset{\theta}{\text{Minimize}} \quad \Pi(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nmd} \alpha_i \|\varphi_i - \widehat{\varphi}_i\|^2 + \frac{\beta}{2} \|K(\theta) - K(\theta_0)\|^2 \quad \text{при } R(\theta) \leq 0,$$

где $\theta \equiv \{\theta\} = \{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \dots\}$ – ранее введенный вектор параметров системы, α_i – весовые коэффициенты, φ_i и $\widehat{\varphi}_i$ – вычисленные и измеренные собственные формы колебаний, $R(\theta)$ – ограничения по параметрам, λ_i – вычисленные собственные числа (квадраты круговых частот), θ_0 – начальное состояние, β – коэффициент регуляризации, K – матрица жесткости, M – матрица масс КЭМ.

В контексте поставленных задач динамического мониторинга обращает на себя внимание требования (2) к точности расчетного и инструментального определения не только собственных частот, но и форм колебаний в предметно значимом частотном диапазоне.

5. Выбор методики измерений собственных частот/форм колебаний

Как следует из здравого инженерного смысла и подтверждается формально-математическими выкладками п. 4, сейсмометрический метод измерений должен обеспечивать приемлемое по точности определение не только низших общесистемных, но и тех собственных частот и форм колебаний, которые идентифицируют локальные изменения состояния конструкций (включая разрушения), при выполнении также требований оперативности и экономической конкурентоспособности.

Анализ доступных источников показал, что этим критериям в наибольшей степени отвечает метод стоячих волн (построенный на основе принципа восстановления когерентных составляющих волновых полей), разработанный коллективом СО РАН под руководством д.т.н. А.Ф. Еманова [16]. Необходимая полная система наблюдений предусматривает одновременную регистрации ускорений в опорной и некотором представительном наборе точек. Принимается модель линейной связи волновых полей в двух точках объекта. На основе винеровской фильтрации и свойства когерентности стоячих волн (колебаний) разработан алгоритм расчета фильтров, пересчитывающих колебания из опорной точки в другие точки системы наблюдений.

В России уже накоплен позитивный опыт использования этого метода для определения динамических характеристик плотин, мостов и зданий. Для высотных зданий-комплексов и большепролетных конструкций такого опыта не было – пробел восполнен исследованиями на реальных объектах [2].

6. Оценка несущей способности для фактического состояния

Расчетная оценка НДС и несущей способности конструкций выполняется в соответствии с нормативными критериями по КЭ-модели, содержащей параметры как текущей «мониторинговой», так и исходной «проектной» модели.

Статическое и динамическое (в том числе, сейсмическое) НДС для стадии l определяется из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) равновесия

$$[K(\Theta_l)] [\{u\}_1 \dots \{u\}_m] = [\{F(\Theta_l)\}_1 \dots \{F(\Theta_l)\}_m]$$

и уравнений движения

$$[M(\Theta_l)] \{\ddot{u}\} + [C(\Theta_l)] \{\dot{u}\} + [K(\Theta_l)] \{u\} = \{F(\Theta_l)\},$$

оценка устойчивости (низших критических нагрузок λ_i и форм потери устойчивости $\{\varphi\}_i$) – из решения частичной проблемы собственных значений

$$[K(\Theta_l)] [\Phi] = [\Lambda] [K_G(\Theta_l)] [\Phi],$$

где $[\Phi] = [\{\varphi\}_1 \dots \{\varphi\}_n]$, $[\Lambda] = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

При этом включаются дополнительные (по сравнению с динамической моделью) свойства – характеристики основания, жесткости и нагрузки и др. (набор параметров Θ_l). Этими данными модель насыщается по результатам всех видов мониторинга.

В рамках предлагаемого подхода на каждой стадии мониторинга можно "ревизовать" и расчеты на прогрессирующее обрушение с учетом фактического состояния объекта.

Планирование измерений на текущей стадии мониторинга следует проводить, основываясь на результатах предыдущей стадии. Так, при обнаружении "подозрительных" собственных частот и форм колебаний необходимо установить достаточное число датчиков (точек) для измерений для качественной идентификации этих частот и форм.

7. Апробация методики на высотном комплексе

Проект и состояние по завершению строительства. Рассматриваемый и реализованный актуальный проектный вариант высотного жилого комплекса «Дирижабль» (г. Москва, пересечение ул. Наметкина и Профсоюзной) является уникальным с объемно-планировочными и конструктивными решениями, не имеющими прямых аналогов.

Участок строительства расположен в пределах флювиогляциальной равнины, осложненной склоном засыпанного оврага на северо-западе участка. С поверхности участок покрыт насыпными грунтами. Насыпь сложена суглинками, перекопанными с песком, с обломками кирпича, бетона, осколками стекла со щепой древесины и т.п. Мощность насыпных грунтов изменяется от 1,8 м до 10,5 м. Под насыпью залегают суглинки, глины мягкопластичной и тугопластичной консистенции, супеси пластичные и пески пылеватые, мелкие, средней плотности и плотные влажные и водонасыщенные.

Часть грунтового основания до отметки 170.0 под центральной зоной здания усилена 141 свай «РИТ» диаметром 300 мм. Для устранения возможного крена здания и его чрезмерной осадки в рассматриваемом конструктивном решении фундирования основания предусмотрено дополнительное устройство 300 буронабивных свай диаметром 300 мм.

Поперечное сечение (план) здания имеет эллипсоидальную форму. Для высотной (4 подземных и 40 надземных этажей) части здания принята перекрестно-стенная диафрагменная схема несущих конструкций. Пространственная жесткость и устойчивость всего жилого комплекса обеспечивается совместной работой вертикальных монолитных диафрагм жесткости, лестничных и лифтовых блоков, объединенных жесткими поэтажными монолитными железобетонными дисками перекрытий.

Фундаментом является коробчатая конструкция эллипсовидной формы в плане высотой 4600 мм, включающая нижнюю (толщиной 1200 мм) и верхнюю (400 мм) монолитные железобетонные плиты, соединенные ребрами жесткости (монолитными железобетонными стенами толщиной 600, 400 и 250 мм). Для повышения жесткости здания и равномерной передачи

нагрузок на фундаментную плиту по периметру наружных стен в уровне -3 этажа устраиваются контрфорсы толщиной 400 мм.

Колонны, расположенные по торцам здания с сечением 575×600 мм, возводятся с -3 этажа по 40. На -2 и -1 этажах по периметру здания расположены колонны сечением 300×500 мм, шахты лифтов выполняются из монолитного железобетона толщиной 250 мм. Лестничные клетки – из монолитного железобетона со сборными маршами.

В процессе строительства «высотки» альтернативными обследованиями (2007-2011 гг.) выявлены значимые отступления от проекта в «локализованных» зонах: по классу бетона ряда стен, колонн и перекрытий (до В15 вместо проектных В25) и по геометрии стен и колонн (отклонения-эксцентриситет до 180 мм, рис. 2). По результатам обследований выполнены усиления стен и колонн на 4-м – 17-м этажах (общее количество усиленных элементов приближается к 50).

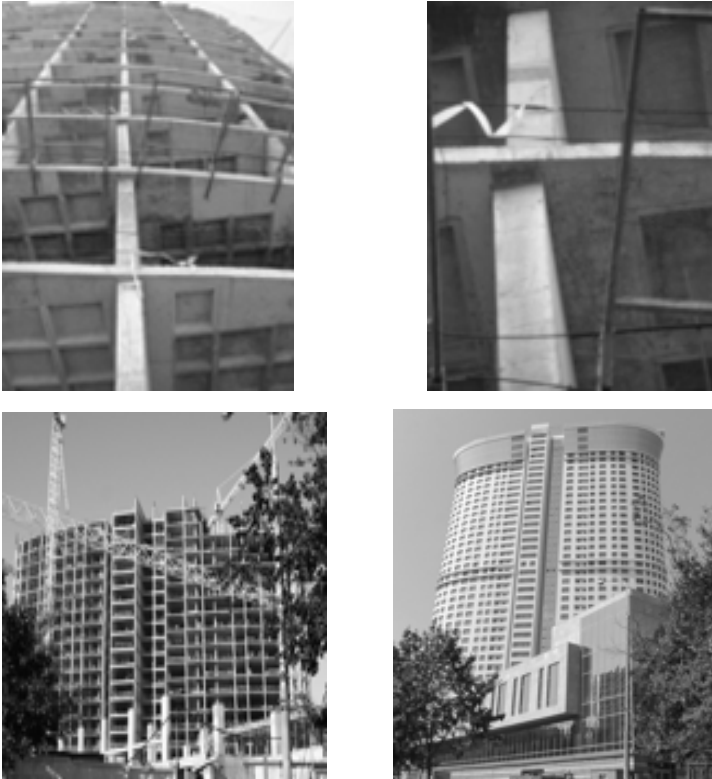


Рис. 2. Высотный комплекс «Дирижабль». Отклонения от проекта, этапы строительства

«Идеальные» проектные КЭ-модели. Результаты анализа. На стадии проектирования построены, верифицированы и проанализированы альтернативные «идеальные» пространственные КЭ-модели «неоднородное винклеровское основание – оболочечно-стержневой каркас» здания в программных комплексах ANSYS, СТАДИО и MicroFe, показавшие близкие распределения напряженно-деформированного состояния (НДС) и динамических характеристик и обеспечение всех нормативно-регламентированных критериев несущей способности.

Разработанные модели адекватно отражают геометрико-жесткостные и инерционные свойства и нагрузочные характеристики строительных конструкций и основания сооружения. Особо отметим, что сетка КЭ на нижней плите фундамента не только обладает необходимой подробностью для воспроизведения перемещений, сил и моментов, но и приурочена к зонам свайных полей. Коэффициенты неоднородного винклеровского основания, полученные на нелинейной модели проф. Ю.К. Заредкого для трехмерной системы «коробчатый фундамент – свайно-грунтовой массив» (ПК Земля), с помощью специальной программы вычислялись и задавались индивидуально для каждого контактного КЭ фундаментной плиты.

Таблица 1

“Идеальная” и “фактическая” расчетные ANSYS–модели

	“Идеал”	“Факт”
Число КЭ	161 348	162 166
Ст. свободы	833 250	972 990
Типы КЭ	SHELL63, BEAM4, LINK8, SURF154	SHELL63, BEAM4, LINK8, SURF154 ,MPC184

Незначимое изменение параметров НДС и спектра собственных частот/форм на последовательно сгущающихся сетках (от 833 000 до 3 600 000 степеней свободы, табл.2) позволило обоснованно выбрать рациональную «стартовую» КЭ-модель для целей дальнейшего мониторинга.

Таблица 2

КЭ-модели проектного варианта здания. Собственные частоты, Гц

№	Число узлов		
	138 000	288 837	608 363
1	0.31731	0.30598	0.30154
2	0.37822	0.37084	0.36724
3	0.66039	0.62999	0.61700
4	1.4027	1.3661	1.3498
5	1.7477	1.7111	1.6945

Сопоставление результатов для схем «одномоментного» (линейная задача) и поэтапного возведения (7 этапов, опция «жизни-смерти» КЭ) здания свидетельствует о слабом проявлении эффектов генетической нелинейности.

Сравнительный анализ результатов расчетных исследований и натурных измерений. Для стадии завершения строительства несущих конструкций разработаны и исследованы параметризованные КЭ-модели в ПК ANSYS с фактическим распределением физико-механических свойств бетона, эксцентриситетом и отклонением колонн (рис. 3), а также с учетом прогнозируемых и/или гипотетических ослаблений сечения колонн и перекрытий. Именно это стадия характеризуется наименьшей степенью неопределенности в части распределения жесткостных (отсутствие перегородок, фасадных конструкций и пр.) и инерционных (от временных нагрузок) характеристик, что существенно для адаптации «стартовой» мониторинговой КЭ-модели.

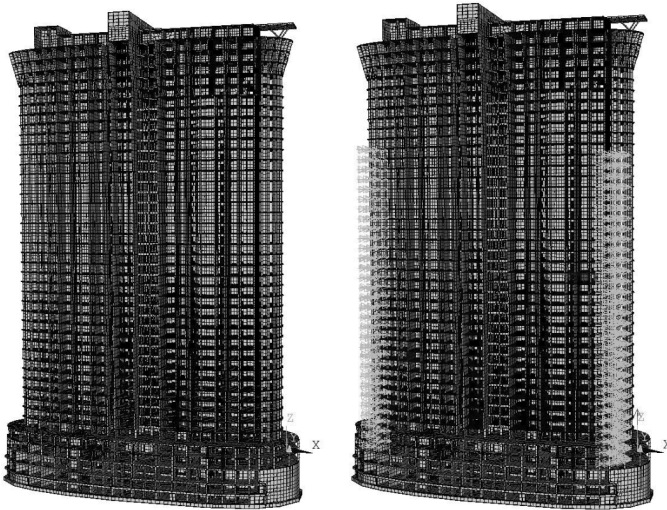


Рис. 3. Идеальная и «фактическая» КЭ-модели высотного здания (цветом выделены отклонения от проекта)

Снижение класса бетона ряда стен и колонн от проектного учитывается соответствующим понижением модуля упругости, а отклонение геометрического положения колонн – «жесткими вставками», что позволяет учесть как смещение элементов в плане, так и их наклон.

Установлена как практическая близость вычисленных (КЭ-модель на жестком основании, блочный Ланцош) и измеренных (метод «стоячих волн» [16]) собственных частот и форм колебаний в достаточно широком

диапазоне частот, так и «пропуск» ряда частот/форм при планировании измерений без опоры на результаты предварительно выполненного конечно-элементного моделирования (рис. 4). Так, пропуск седьмой расчетной частоты/формы очевидно вызван вынужденным отсутствием измерений на верхних этажах здания, колебания которых и преобладают в этой форме.

В диапазоне собственных частот от 0 до 14 Гц (200 низших форм колебаний) указанные зафиксированные «локальные» отступления от проекта никак количественно не проявляются – вычисленные частоты отличаются не более чем на 0,5%, сохраняется последовательность форм колебаний. Также не идентифицированы в диапазоне измеренных частот весьма существенные гипотетические ослабления сечения одиночной колонны (до 1/3 сечения).

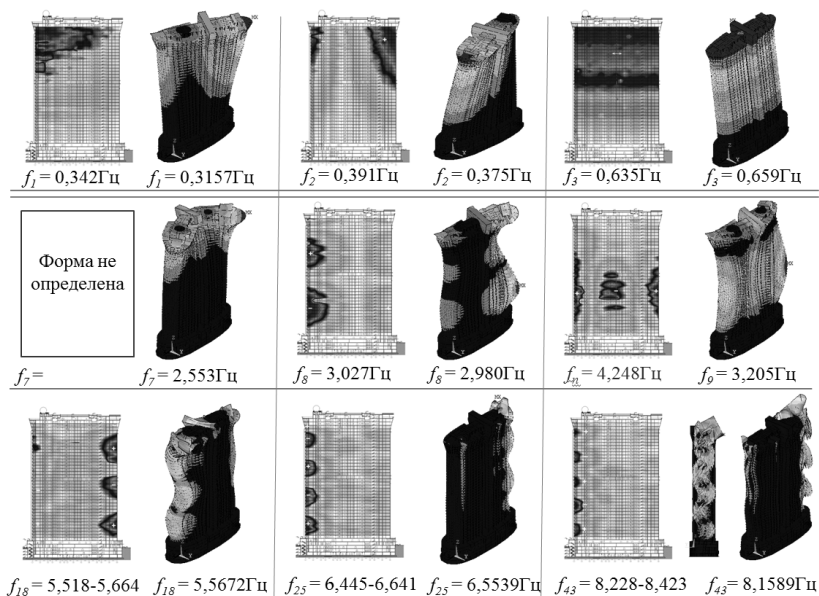


Рис.4. Вычисленные (слева) и измеренные (справа) собственные частоты/формы

В то же время, учет эксцентриситета и наклона показал существенное и, для ряда колонн, опасное возрастание расчетных статических изгибающих моментов в них, что подтверждает неуниверсальность динамического (как и всех иных видов) и необходимость синтеза различных видов мониторинга для уникальных объектов строительства.

Возможность идентификации гипотетических дефектов. Выполненные численные эксперименты показали, что гипотетическое «удаление»

одной из несущих колонн или фрагмента перекрытия значительно сказывается на группе видоизменяемых и/или порождает дополнительные локальные формы колебаний, приуроченные к зоне разрушения, и могут быть уверенно идентифицированы в ходе инструментального мониторинга методом «стоячих волн» (см. рис. 5 для удаленной колонны 10-го этажа, начиная с 17-й формы на частотах выше 5 Гц).

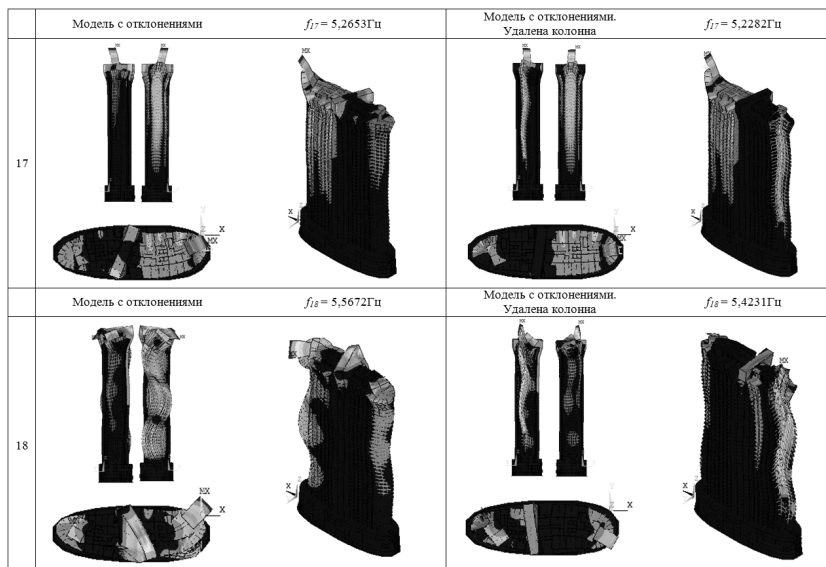


Рис. 5. Собственные частоты и формы КЭ-моделей «фактической» и «гипотетической» (с удаленной колонной на 10-м этаже), значимые для идентификации дефекта.

Отклонения от проектных данных, затрагивающие значительную часть системы и влияющие на ее жесткостные и инерционные свойства (класс бетона, характеристики основания, величина и расположение масс, включение в динамическую работу формально несущих конструкций – перегородок, фасадов и др.) также идентифицируются в рамках предложенной методики.

8. Выводы и рекомендации

Предложена и теоретически обоснована расчетно-экспериментальная методика мониторинга несущих конструкций уникальных (высотных и большепролетных) зданий и сооружений. Методика базируется на детальных большеразмерных пространственных динамических КЭ-моделях, которые параметризуются для всех значимых стадий «жизненного цикла» объекта и адаптируются по данным инструментальных наблюдений.

Показано, в частности, что метод измерений должен обеспечивать уверенное определение не только низших общесистемных, но и тех собственных частот и форм колебаний, которые идентифицируют локальные изменения состояния конструкций (включая разрушения) – этим критериям удовлетворяет выбранный инструментальный метод стоячих волн.

В ходе апробации на реальном объекте выявлен истинный потенциал – возможности и ограничения – разработанной методики динамического мониторинга и ее место в ряду альтернативных-дополняющих подходов. Тем самым, опровергнуты как имевшие место претензии на универсальность и самодостаточность, так и необоснованное отрицание рядом специалистов действительного потенциала методик мониторинга на основе тщательного определения и анализа расчетного и измеренного спектра собственных частот и форм колебаний (а не только низших общесистемных, как указывает, например, действующий ГОСТ Р 53778-2010 [9]).

Рекомендуется внедрить предложенную комплексную расчетно-экспериментальную методику для динамического мониторинга несущих конструкций уникальных зданий на стадиях их строительства и эксплуатации. При этом требуют дальнейшего обоснования и развития как методы измерений, так и численные процедуры параметризации и адаптации-калибровки КЭ-моделей (наиболее перспективным представляется решение некорректных обратных задач идентификации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Нагибович А.И., Петряшев Н.О., Петряшев С.О. Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 2. Верификация методики на стендовых моделях // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* Volume 8, Issue 3. 2012.
- [2] Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Аул А.А., Нагибович А.И. Адаптируемые конечноэлементные модели в основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Часть 3. Апробация методики на высотном комплексе, возведенном с выявленными отступлениями от проекта // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* Volume 8, Issue 3. 2012.
- [3] Белостоцкий А.М. Построение эффективных пространственных моделей для статического и динамического расчета систем “сооружение-основание”. Труды ЦНИИСК им.Кучеренко, 1990г., с.175-180.
- [4] Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Каличава Д.К., Пеньковой С.Б., Потапенко А.Л., Клепец О.Ю. Комплексное расчетное обоснование напряженно-деформированного состояния высотных многофункциональных комплексов. *Строительная механика и расчет сооружений*, №10, 2006, с.111-115.
- [5] Белостоцкий А.М. Прогнозное математическое моделирование состояния и техногенной безопасности ответственности объектов и комплексов мегаполиса. *Вестник МГСУ*, 3/2006г., с. 20–61.
- [6] *Строительные нормы и правила. Бетонные и железобетонные конструкции. СНиП 52-01-2003.*, М., Госстрой России, 2003г.

- [7] Строительные нормы и правила. Основание зданий и сооружений. СНиП 2.02.01-83*, М., Госстрой России, ГУП ЦПП, 2002 г.
- [8] Временные нормы и правила проектирования многофункциональных высотных зданий и зданий-комплексов в г. Москве. МГСН 4.19-2005, М., 2005 г.
- [9] ГОСТ Р 53778-2010 "Здания и сооружения. Правила обследования и мониторинга технического состояния", М., Стандартинформ, 2010
- [10] ANSYS 12.1. User's Guide. Canonsburg. 2010г.
- [11] Верификационный отчет по ПК ANSYS Mechanical (4 тома). М., ЗАО НИЦ СтаДиО, ГОУ ВПО МГСУ, 2009 г. Свидетельство РААЧН о верификации ПС № 02/ANSYS/2009 от 10.07.2009г.
- [12] M.I. Friswell, J.E. Mottershead & H. Ahmadian, Finite Element Model Updating using Experimental Test Data: Parameterization and Regularization. Transactions of the Royal Society of London, Series A, Special Issue on Experimental Modal Analysis, 359(1778), January 2001, pp.169-186
- [13] J.S. Kang, I.H. Yeo, H.S. Lee, S.B. Shin, "Structural damage detection using modal data with regularization technique", Post-SMiRT15, Cheju KOREA, 1999.8
- [14] Weber B., Paultre P., Proulx J., "Damage Detection of an Aluminum Truss Using Tikhonov Regularization", IMAC XXIV, St. Louis, Missouri USA, 2006, January 30–February 2.
- [15] M.I. Friswell. Inverse Problems in Structural Dynamics. Second International Conference on Multidisciplinary Design Optimization and Applications, 2-5 September 2008, Gijon, Spain
- [16] Еманов А.Ф. Восстановление когерентных составляющих волновых полей в сейсмике. Дисс. на соискание ученой степени д.т.н., Новосибирск, 2004

Сведения об авторах

Белостоцкий Александр Михайлович, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук, доктор технических наук; генеральный директор ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО»; профессор кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета, руководитель Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов Московского государственного строительного университета; 123182, Россия, г. Москва, пл.Курчатова, 1, тел. +7(499) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru, niccm@mgsu.ru.

Каличава Дмитрий Котэвич, кандидат технических наук, генеральный директор ООО "ПИКСАР"; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499)183-59-94; e-mail: niccm@mgsu.ru.

Островский Константин Игоревич, кандидат технических наук, ведущий инженер ЗАО «Научно-исследовательский центр СтаДиО», 123182, Россия, г. Москва, пл.Курчатова, 1, тел. +7(499) 706-88-10; e-mail: stadyo@stadyo.ru.

Новиков Павел Игоревич, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Московского государственного строительного университета; 129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, дом 26; тел. +7(499) 929-50-17; e-mail: niccm@mgsu.ru.

УДК 621.7

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШКОДЖУВАНOSTI МАТЕРІАЛУ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Г.І. Львов¹

д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри Динаміки та міцності машин

В.О. Окорочков¹

аспірант кафедри Динаміки та міцності машин

¹*Національний Технічний Університет «Харківський Політехнічний Інститут»*

Стаття присвячена моделюванню ефекту Баушингера і пошкоджуваності матеріалу, які виникають внаслідок пружно-пластичного деформування матеріалу. Представлені результати проведених серій тестів на циклічне розтягування-стискання плоских зразків, виготовлених з алюмінієвого сплаву Д16. За результатами експериментальних даних була розроблена математична модель пластичності, в яку вводиться параметр пошкоджуваності згідно з концепцією ефективних напружень.

Ключові слова: ефект Баушингера, пошкоджуваність матеріалу, експеримент на розтягування-стискання, нелінійне кінематичне зміщення.

Вступ. Проблема моделювання пружно-пластичної поведінки матеріалу під час циклічного деформування є вирішальною для оцінки ресурсу при малоцикловій втомлюваності, а також для прогнозування поля залишкових напружень для таких технологічних операцій як автофретування. Існує велика кількість математичних моделей пружно-пластичної поведінки матеріалу, в основі яких лежить концепція поверхні навантаження, яка розділяється пружною і пластичною зонами. Основна різниця між цими моделями полягає у законах зміщення, які описують зміщення і зміну розмірів поверхні пластичності під час пружно-пластичного деформування.

Класичною моделлю пластичності, яка здатна описувати зміщення і розширення поверхні пластичності є комбінація моделей лінійного ізотропного [1] та лінійного кінематичного [2] зміщень. Однак, такі моделі не дозволяють в повній мірі врахувати ефект Баушингера, а також взагалі не враховують нелінійної поведінки матеріалу при циклічному складному навантаженні. Різними авторами були розроблені модифікації як для законів зміщення при кінематичному або ізотропному зміщеннях, так і в виразах, що описують поведінку поверхні пластичності при складному навантаженні. Багатоповерхнева модель Мроза [3] полягає у дискретизації нелінійної кривої деформування лінійними ділянками, що є узагальненням лінійної моделі Прагера [2]. Двоповерхнева модель Попова і Дафаліаса [4] передбачає точніше описування кривої деформування під час одноосного розтягування-стискання.

Згідно з такою моделлю пластичне деформування проходить між двома граничними поверхнями і модуль пластичності представляється неперервною функцією накопленої пластичної деформації. Іншим способом описування нелінійної кривої деформування є модель Армстронга і Фредріка [5], яка передбачає доповнення лінійної моделі Прагера складником, який відображає історію пластичного деформування, що дозволяє по різному моделювати пластичність при розтягуванні та стисканні. Пізніше ця модель була удосконалена Шабошем [6], який для кращого збігу з експериментальними даними запропонував записувати цю модель у вигляді суми.

Точне визначення форми поверхні пластичності, а також її зміна у процесі деформування грає важливе значення у моделюванні пружно-пластичної поведінки матеріалу при циклічному складному навантаженні. Велика кількість сучасних моделей пластичності визначається критерієм пластичності фон Мізеса. Класична модель передбачає, що поверхня пластичності рівномірно, ізотропно розширюється та змінює положення свого центру, де за характеру розширення та зміщення відповідають закони зміцнення. Однак, експериментальні спостереження [7,8] показують, що окрім рівномірного розширення і зміцнення, поверхня пластичності також може нерівномірно, анізотропно змінювати свої розміри. Були розроблені декілька моделей пластичності [9,10,11], які враховують анізотропне змінення розміру поверхні пластичності та мають велику кількість констант, які треба визначати з декількох експериментів. Бальтов та Савчук [12] запропонували зручну модифікацію критерію фон Мізеса, згідно з якою поверхня пластичності є еліпсом на девіаторній площині, який змінює свої розміри під час пластичного деформування. В залежності від експериментальних даних модель Бальтова і Савчука може бути удосконалена і більш точноше враховувати зміну форми поверхні пластичності при циклічному складному навантаженні.

Ще одним феноменом, який виникає при пружно-пластичному деформуванні є пошкоджувальність матеріалу, яка проявляється у зниженні модуля пружності під час деформування. Є деякі дослідження [13,14] цього феномену, які показують зниження модуля пружності на стадії розвантаження під час проведення експериментів на розтягування для різних металів. Деякі фізичні пояснення цього феномену, які пов'язані зі зміною щільності дислокацій під час збільшення пластичної деформації представлені у статті [15]. У роботах [16,17] за допомогою континуальної механіки пошкоджувальності моделюється руйнування просторових тіл в умовах тривалих статичних і циклічних навантажень. У даній роботі пропонується моделювати зменшення модуля пружності скалярним

параметром пошкоджуваності, який вводиться згідно з концепцією ефективних напружень.

У даній статті представлені результати експерименту на циклічне розтягування-стискання зразків, виготовлених з алюмінієвого сплаву Д16. Результати експерименту показали, що при розтягуванні зразків у першому циклі матеріал показує майже лінійну поведінку при пластичності. Однак, при подальших циклах розтягування-стискання криві деформування значно нелінійні. Виявилося, що модель нелінійного кінематичного зміцнення Шабоша у поєднанні з моделлю нелінійного ізотропного зміцнення не досить точно прогнозує нелінійний відгук при циклічному деформуванні для даного матеріалу. Тому запропоновано нову модель пластичності, яка полягає в удосконаленні моделі нелінійного кінематичного зміцнення Шабоша шляхом введення додаткових функцій попередньо накопиченої пластичної деформації, а також модифікацію критерію пластичності фон Мізеса.

Визначальні співвідношення теорії пластичності с урахуванням пошкоджуваності. Для таких задач, як автофретування зазвичай застосовується критерій Мізеса з поверхнею пластичності, яка розширюється і зміщується в процесі деформування. Однак, експерименти для багатьох матеріалів, які використовуються для виготовлення товстостінних компонентів конструкцій показують зменшення розміру поверхні текучості в напрямку деформування [18,19], демонструючи глибокий ефект Баушингера (розмір поверхні пластичності в напрямку деформування менше ніж $2\sigma_y$, як це передбачено у моделі лінійного кінематичного зміцнення). Цей факт може враховуватися модифікованим критерієм Мізеса відповідно до моделі Бальтова і Савчука [12]:

$$f = \sqrt{N_{ijkl}(S_{ij} - X_{ij})(S_{kl} - X_{kl})} - R - \sigma_y = 0, \quad (1)$$

де S_{ij} - девіатор тензору напружень; R - функція ізотропного зміцнення; X_{kl} - тензор додаткових напружень; σ_y - межа текучості; N_{ijkl} - тензор четвертого рангу, що є сумою тензорів I_{ijkl} і A_{ijkl} , які визначаються наступним чином:

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj} - \frac{3}{2}\delta_{ij}\delta_{kl})m, \quad (2)$$

$$A_{ijkl} = A_0 \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{kl}^p, \quad (3)$$

де A_0 - параметр матеріалу; ε_{ij}^p - тензор пластичних деформацій.

Згідно з такою моделлю поверхня пластичності у процесі деформування може зміщуватись та анізотропно змінювати свої розміри. У просторі головних напружень поверхня представляє собою еліптичні циліндри, тому слідом поверхні на девіаторній площині є еліпси, які в залежності від знаку коефіцієнта A_0 можуть скорочуватись або подовжуватись у напрямку деформування. Для визначення коефіцієнту A_0 необхідно записати критерій пластичності (1) для одноосного напруженого стану. У випадку, коли поверхня пластичності зміщується і змінює свої розміри тільки у напрямку деформування, тобто не враховуючи ізотропне розширення, критерій пластичності (1) для простого розтягування запишеться у наступному вигляді:

$$\sigma = \frac{\sigma_y}{\sqrt{A_0 \varepsilon_p^2 + 1}} + X, \quad (4)$$

де σ і ε_p - напруження і повздовжня пластична деформація при розтягуванні.

У моделі Бальтова і Савчука коефіцієнт A_0 визначається як константа в процесі деформування. Для узгодження з експериментальними результатами пропонується визначити коефіцієнт A_0 у вигляді функції накопиченої пластичної деформації p .

$$A_0 = \frac{2}{3p^2} \left[\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_y - H} \right)^2 - 1 \right], \quad (5)$$

де H - функція накопиченої пластичної деформації, яку зручно представити в вигляді суми функцій:

$$H = \sum_{k=1}^n H^k, \quad (6)$$

$$H^k = G^k [1 - \exp(-b^k p)], \quad (7)$$

де G^k і b^k - параметри матеріалу; p - накопичена пластична деформація, приріст якої визначається наступним чином:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}. \quad (8)$$

Приріст окремої компоненти H^k має вигляд:

$$\dot{H}^k = b^k (G^k - H^k) \dot{p}. \quad (9)$$

Після підстановки виразу для коефіцієнту A_0 у (1) критерій пластичності для простого розтягування запишеться у наступному вигляді:

$$\sigma = \sigma_y - H + X. \quad (10)$$

Таким чином, функція H призначена для моделювання ефекту Баушингера, а саме зменшення межі текучості під час пластичного деформування.

Під час проведення експерименту на розтягування-стискання такі матеріали, як алюмінієві сплави показують майже лінійну поведінку під час розтягування, але в той же час крива розвантаження і подальшого стискання значно нелінійна. Таким чином, закони зміцнення під час розтягування і стискання значно різняться. Тому зручно використовувати модель нелінійного кінематичного зміцнення, запропоновану Армстронгом [5]. Згідно такої моделі приріст тензору додаткових напружень записується у наступному вигляді:

$$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} Q \dot{\gamma}_{ij}^p - \gamma X_{ij} \dot{p}, \quad (11)$$

де перша частина виразу відповідає лінійному кінематичному зміцненню, а друга частина за рахунок накопиченої пластичної деформації p відображає історію пластичного деформування. Для кращого узгодження з експериментальними даними Шабошем було запропоновано визначати тензор додаткових напружень у вигляді суми компонентів [6]:

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ij}^k. \quad (12)$$

Експериментальні результати з проведених тестів на розтягування-стискання алюмінієвих зразків показують, що криві стискання після попереднього розтягування до певного рівня пластичної деформації, а також криві наступних циклів навантаження відрізняються між собою і залежать від попередньої накопиченої пластичної деформації, тому для більш точного описання кривої деформування з декількома циклами розтягування-стискання пропонується вдосконалити модель нелінійного кінематичного зміцнення шляхом заміни констант Q і γ на функції попередньо накопиченої пластичної деформації \hat{p} . Тоді окрема компонента виразу (12) запишеться наступним чином:

$$X_{ij}^k = \frac{2}{3} \hat{Q}^k \hat{\gamma}^k \hat{\epsilon}_{ij}^p - \hat{\gamma}^k X_{ij}^k \hat{p}, \quad (13)$$

де функції попередньо накопиченої пластичної деформації \hat{q}^k і $\hat{\gamma}^k$ пропонується обирати наступним чином:

$$\hat{Q}^k = Q^k + \zeta^k \left(1 - \exp(-\eta^k \hat{p})\right), \quad (14)$$

$$\hat{\gamma}^k = \gamma^k + \xi^k \left(1 - \exp(-\mu^k \hat{p})\right). \quad (15)$$

Для узгодження закону пластичності з урахуванням зменшення межі текучості зручно включити у тензор додаткових напружень X_{ij} функцію H у тензорному вигляді:

$$X_{ij} = X'_{ij} + H'_{ij} \quad (16)$$

або

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^n X'_{ij}{}^k + \sum_{l=1}^m H'_{ij}{}^l. \quad (17)$$

Згідно з (7) і (9) та відповідістю до тензора додаткових напружень, приріст окремого компоненту $H'_{ij}{}^l$ повинен бути представлений у наступному вигляді:

$$\dot{H}'_{ij}{}^l = \frac{2}{3} G^l b^l \dot{\varepsilon}_{ij}^p - b^l H'_{ij}{}^l \dot{p}. \quad (18)$$

В кінцевому вигляді приріст тензору додаткових напружень записується наступним чином:

$$\dot{X}_{ij} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{2}{3} \hat{Q}^k \hat{\gamma}^k \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \hat{\gamma}^k X'_{ij}{}^k \dot{p} \right] + \sum_{l=1}^m \left[\frac{2}{3} G^l b^l \dot{\varepsilon}_{ij}^p - b^l H'_{ij}{}^l \dot{p} \right]. \quad (19)$$

Зменшення модуля пружності під час пружно-пластичного деформування пропонується моделювати за допомогою введення параметру пошкоджуваності наступним чином:

$$D = 1 - \frac{E_L}{E_U}, \quad (20)$$

де E_L - модуль пружності під час першого пружного розтягування; E_U - модуль пружності під час розвантаження;

Експериментальні дослідження показують, що параметр пошкоджуваності залежить від накопиченої пластичної деформації, тому для математичного моделювання зручно вибрати наступну залежність:

$$D = \sum_{k=1}^n Q_D^k (1 - \exp(-\gamma_D^k p)), \quad (21)$$

де Q_D^k і γ_D^k - параметри матеріалу.

Приріст окремого компоненту суми (21) виглядає наступним чином:

$$\dot{D}^k = b_D^k (Q_D^k - D) \dot{p}. \quad (22)$$

Таким чином, згідно з концепцією ефективних напружень тензор напружень Коші з урахуванням пошкоджуваності матеріалу запишеться у наступному вигляді:

$$\sigma_{ij} = (1 - D) E_{ijkl} \epsilon_{kl}^e. \quad (23)$$

Експериментальні результати та ідентифікація параметрів для моделі пластичності. З метою визначення констант для запропонованої моделі пластичності було проведено експеримент на розтягування-стискання плоских зразків, вироблених з алюмінієвого сплаву Д16. У статтях [20,21] ідентифікація параметрів базується на підходах мінімізації цільової функції, в основі якої лежить різниця між експериментальними та прогнозованими даними. Для ідентифікації параметрів матеріалу для запропонованої моделі пластичності з урахуванням пошкоджуваності матеріалу пропонується наступна цільова функція [22]:

$$F = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{f_i^*(x_i^*) - \tilde{f}_i(x_i^*; c)}{f_i^*(x_i^*)} \right]^2}, \quad (24)$$

де f_i^* і x_i^* - експериментально отримана функція і її аргумент; \tilde{f}_i - значення розрахованої функції, згідно обраної математичної моделі; c - набір параметрів матеріалу; n - кількість експериментально отриманих точок.

На рис. 1 показані експериментально виміряні межі текучості в залежності від накопленої пластичної деформації, тобто межа текучості вимірювалася під час кожного циклу розтягування-стискання. Згідно з запропонованою моделлю зменшення розмірів поверхні пластичності моделюється за допомогою функції H , яка залежить від накопиченої пластичної деформації p та має параметри матеріалу G^k і b^k , які можуть бути визначені за допомогою мінімізації цільової функції (24).

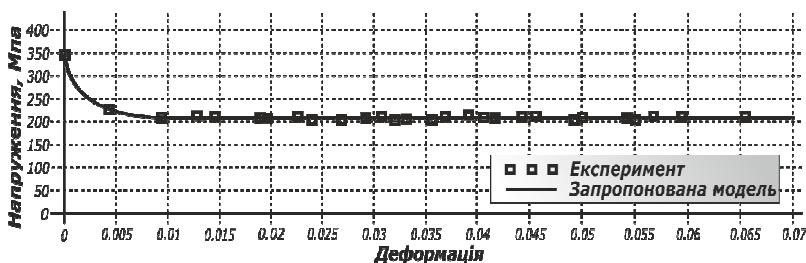


Рис.1. Зменшення межі текучості під час пластичного деформування

Після мінімізації функції (24) були отримані значення параметрів G^1 і b^1 , які представлені у таблиці 1. Як видно з рис. 1, для точного моделювання було достатньо одного компонента з суми, якою представлена функція H .

Далі необхідно визначити параметри матеріалу для моделі нелінійного кінематичного зміцнення, яка представлена виразом (19), де частина параметрів вже визначена згідно з узгодженням з функцією H .

Таблиця 1

Ідентифіковані параметри матеріалу

G^1	b^1	Q^1	Q^2	γ^1	γ^2	ζ^1	η^1
140 МПа	385	20 МПа	218 МПа	2125	7	60 МПа	71
ξ^1	μ^1	ζ^2	η^2	ξ^2	μ^2	Q_D^1	γ_D^1
-1390	85	-175 МПа	18	2	9	0.224	95

Решта параметрів повинна бути визначена з експерименту на циклічне розтягування-стискання. Для випадку одноосного розтягування-стискання вираз (19) запишеться наступним чином:

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^n \left[\bar{\gamma}^k \bar{Q}^k \dot{\varepsilon}^p - \bar{\gamma}^k X'^k \dot{p} \right] + b^1 G^1 \dot{\varepsilon}^p - b^1 H^1 \dot{p}. \quad (25)$$

Потрібно зазначити, що при циклічному деформуванні приріст компоненти пластичної деформації $\dot{\varepsilon}^p$ змінює знак, у той же час приріст накопиченої пластичної деформації \dot{p} є завжди позитивний. Параметри матеріалу \bar{Q}^k і $\bar{\gamma}^k$ є функціями попередньо накопиченої пластичної деформації, які у випадку розтягнення у першому циклі розтягнення-стискання є константами $\bar{Q}^k = Q^k$ і $\bar{\gamma}^k = \gamma^k$, так як до першого циклу ще не було пластичного деформування. Для цього випадку інтегрування виразу (25) з початковими умовами $X'^k(0) = 0, k = 1, n$ і $H^1(0) = 0$ дає наступний вираз:

$$X = \sum_{k=1}^n Q^k \left[1 - \exp(-\gamma^k p) \right] + G^1 \left[1 - \exp(-b^1 p) \right], \quad (26)$$

а інтегрування виразу (9) з початковими умовами $H^1(0) = 0$ - наступний:

$$H^1 = G^1 \left[1 - \exp(-b^1 p) \right]. \quad (27)$$

Згідно з модифікованим критерієм пластичності (1) напруження для одноосного розтягування визначається виразом (10). З урахуванням (26) і (27) напруження буде визначатись наступним чином:

$$\sigma = \sigma_y + \sum_{k=1}^n Q^k \left[1 - \exp(-\gamma^k p) \right]. \quad (28)$$



Рис. 2. Діаграма деформування

Для визначення невідомих параметрів матеріалу Q^k і γ^k була мінімізована цільова функція.

На рис. 2 показана експериментальна діаграма розтягнення у координатах напруження – пластична деформація, а також отримана за допомогою мінімізації розрахункова. Видно, що достатньо двох компонентів з суми, якою представлена функція X' .

Для визначення решти параметрів матеріалу для нелінійного кінематичного зміцнення потрібно використати експериментальні діаграми розтягнення-стиснення, отримані після проведення декількох циклів розтягнення-стиснення. На рисунку 3 показані криві розтягнення та стиснення в залежності від попередньо накопиченої пластичної деформації \bar{p} після проведення тесту на циклічне розтягування-стиснення. Криві побудовані у координатах напруження – пластична деформація, де відлік напруження починається від межі текучості.

Видно, що кожна наступна крива розтягнення чи стиснення збільшує амплітуду напружень по мірі накопичення пластичної деформації під час циклічного деформування. Цей ефект неможливо змоделювати за допомогою стандартної моделі нелінійного кінематичного зміцнення, тому було запропоновано ввести додаткові функції попередньо накопиченої пластичної деформації у вигляді (14) і (15), де невідомими параметрами матеріалу є ζ^k, η^k, ξ^k і μ^k , де $k=1,2$. Для випадку циклічного деформування інтегрування виразу (25) з початковими

умовами $X'^k(\bar{p}) = \bar{X}'^k, k = \overline{1,2}$ і $H^1(\bar{p}) = \bar{H}^1$, де \bar{p} , \bar{X}'^k і \bar{H}^1 - накопичені у попередніх циклах пластична деформація і компоненти тензора додаткових напружень при одноосному розтягуванні-стисканні, дає наступний вираз:

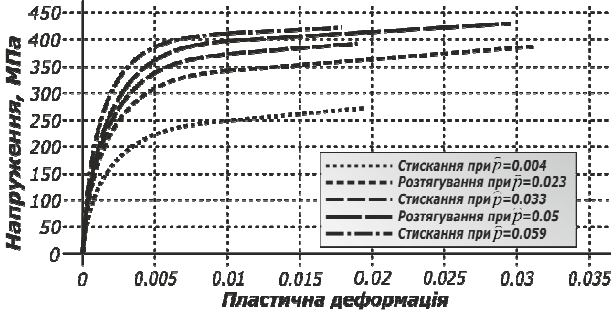


Рис.3. Криві розтягування і стискання при різних рівнях накопиченої пластичної деформації

$$X = \sum_{k=1}^2 (\bar{Q}^k + \bar{X}'^k) [1 - \exp(-\bar{\gamma}^k p)] + (G^1 + \bar{H}^1) [1 - \exp(-b^1 p)], \quad (29)$$

а інтегрування виразу (9) з початковими умовами $H^1(\bar{p}) = \bar{H}^1$ - наступний:

$$H^1 = (G^1 - \bar{H}^1) [1 - \exp(-b^1 p)]. \quad (30)$$

Одноосне напруження σ , починаючи відлік від межі текучості, для розтягування-стискання з урахуванням попередньо накопиченої пластичної деформації запишеться згідно з критерієм пластичності (1) у наступному вигляді:

$$\sigma = \sum_{k=1}^2 (\bar{Q}^k + \bar{X}'^k) [1 - \exp(-\bar{\gamma}^k p)] + (\bar{H}^1 + \bar{H}^1) [1 - \exp(-b^1 p)] \quad (31)$$

Далі, параметри матеріалу \bar{Q}^k і $\bar{\gamma}^k$, які залежать від попередньо накопиченої пластичної деформації були знайдені шляхом мінімізації цільової функції (24) для кожного окремого циклу розтягування-стискання. Параметри ζ^k, η^k, ξ^k і μ^k , де $k = \overline{1,2}$, також було отримано шляхом мінімізації цільової функції (24) і представлені у табл. 1.

Іншим важливим феноменом, який не може бути проігнорований у моделюванні таких операцій як автофретування є зменшення модуля пружності під час пружно-пластичного деформування. Тому для дослідження цього феномену були виміряні модулі пружності під час етапів розвантаження у експерименті на циклічне розтягування-стискання. Згідно

запропонованої моделі феномен зменшення модуля пружності моделюється параметром пошкоджуваності у відповідності до виразу (20). У свою чергу залежність введеного параметра пошкоджуваності від накопиченої пластичної деформації моделюється виразом (21), де невідомими параметрами матеріалу є D_D^k і γ_D^k , $k = 1, n$. Пошук параметрів матеріалу здійснювався шляхом мінімізації цільової функції:

На рисунку 4 зображена експериментальна залежність параметру пошкоджуваності від накопиченої пластичної деформації, а також математично змодельована. Видно, що для доброго узгодження з експериментальними даними достатньо одного компонента із суми, якою представлений параметр пошкоджуваності.

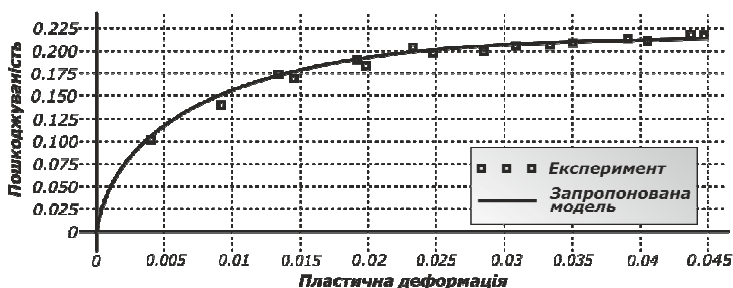


Рис.4. Залежність параметру пошкоджуваності від накопиченої пластичної деформації

Висновки. У статті проаналізована модель пластичності, яка урахує такі феномени як ефект Баушингера та пошкоджуваність матеріалу під час пружно-пластичного деформування. Для кращого узгодження з експериментальними даними запропоновано удосконалення моделі нелінійного кінематичного зміцнення шляхом введення додаткових функцій попередньо накопиченої пластичної деформації. Застосовано модифікований критерій пластичності Мізеса, у який введено функцію зменшення межі текучості під час пластичного деформування і який моделює зміщення і анізотропне зміння розмірів поверхні пластичності.

Також у статті представлені результати серії тестів на циклічне розтягування-стискання, проведених з метою виявлення ефекту Баушингера та пошкоджуваності матеріалу, а також отримання точних кривих стискання. Для цього були застосовані плоскі зразки з алюмінієвого сплаву Д16, які розтягувалися і стискалися з різними рівнями пластичної деформації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hill, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. — 1950. — Oxford, 451c.
2. Mroz Z. On the description of anisotropic work hardening. — *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. —1964. —Vol.15. —P. 163—175
3. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. — *Journal of Applied Mechanics*. —1956. —Vol.23. —P. 493—496
4. Dafalias Y. F., Popov E. P. Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. — *Journal of Applied Mechanics*.—1976. —Vol.43. —P. 645—650
5. Armstrong P. J., Frederick C. O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. — G.E.G.B. Report RD/B/N.—1966. —P. 731—747
6. Chaboche J. L. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. — *International Journal of Plasticity*. —1986. —Vol.2. —P.149—188
7. Helling D. E., Miller A. K. The Incorporation of Yield Surface Distortion into a Unified Constitutive Model, Part I: Equation Development. — *Acta Mechanica*. —1987. — Vol. 69. —P.9—23
8. Rokhgireh H., Nayebi A. A new yield surface distortion model based on Baltov and Sawczuk's model. —2013. —Vol.224. —P.1457—1469.
9. Ortiz M., Popov E.P. Directional hardening rules for metal plasticity. — *Journal of Engineering Mechanics*. —1983. —Vol.109. —P.1042—1057.
10. Eisenberg M.A., Yen C.F. The role of a loading surface in viscoplasticity theory. — *Acta Mechanica*. —1987. —Vol. 69. —P.77—96.
11. Rees D.W.A. An examination of yield surface distortion and translation. — *Acta Mechanica*. —1984. —Vol. 52. —P.15—40.
12. Baltov A., Sawczuk A. A rule of anisotropic hardening. - *Acta Mechanica*. -1965. - Vol. 1. -P.81-92.
13. Parker A. P., Troiano E., Underwood J. H., Mossey C. Characterization of steels using a revised kinematic hardening model incorporating Bauschinger effect. — *Journal of Pressure Vessel Technology*. —2003. — Vol. 125. —P. 277-281.
14. Aliakbari K., Farhangdoost K. The Investigation of Modeling Material Behavior in Autofrettagged Tubes Made from Aluminium Alloys. — *International Journal of Engineering*. —2014. —Vol. 27. —P. 803-810.
15. Puskar A. A Correlation among Elastic Modulus Defect, Plastic Strain and Fatigue Life of Metals. — *Material Science Forum*. —1993. — P.455—460.
16. Баженов В., Гуляр О., Пискунов С. Моделивання континуального руйнування просторових тіл в умовах тривалого статичного і циклічного навантаження. — *Вісник ТНТУ*. — 2013. — Том 72. — № 4. — С.108-117.
17. Пискунов С.О., Гуляр О.І., Мицюк С.В. Огляд співвідношень континуальної механіки руйнування для опису процесів повзучості і втоми. — *Опір матеріалів і теорія споруд*. — 2013. - Вип. 91. - С. 32-41.
18. Khan A.S., Chen X., Abdel-Karim M. Cyclic multiaxial and shear finite deformation response of OFHC: Part I, experimental results. — *International Journal of Plasticity*. —2007. —Vol. 23. —P.1285—1306.
19. Kurtyka T., Zyczkowski M. Evolution equations for distortional plastic hardening. — *International Journal of Plasticity*. —1996. —Vol. 12. —P.191—213.
20. Badnava H., Pezeshki S. M., Fallah K. Determination of combined hardening material parameters under strain controlled cyclic loading by using the genetic algorithm method. — *Journal of Mechanical Science and Technology*. —2012. —Vol.26. —P.3067-3072.
21. Franulovic M., Basan R., Krizan B. Kinematic Hardening Parameters Identification with Respect to Objective Function. —*International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*. —2014. — Vol. 8. —N. 4. —P. 677-681.
22. Szeliga D., Gawad J., Pietrzyk M. Parameter Identification of Material Model Based on the Inverse Analysis. —*International Journal of Applying Mathematics and Computational Science*. —2004. — Vol 14. —P.549-556.

REFERENCES

1. Hill, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*, 1950, Oxford, 451c.
2. Mroz Z. On the description of anisotropic work hardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1964, Vol.15, P. 163—175.
3. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*, 1956, Vol.23, P. 493—496.
4. Dafalias Y. F., Popov E. P. Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1976, Vol.43, P. 645—650.
5. Armstrong P. J., Frederick C. O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. G.E.G.B. Report RD/B/N, 1966, P. 731—747.
6. Chaboche J. L. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 1986, Vol.2, P.149—188.
7. Helling D. E., Miller A. K. The Incorporation of Yield Surface Distortion into a Unified Constitutive Model, Part 1: Equation Development. *Acta Mechanica*, 1987, Vol. 69, P.9—23.
8. Rokhgireh H., Nayebi A. A new yield surface distortion model based on Baltov and Sawczuk's model, 2013, Vol.224, P.1457—1469.
9. Ortiz M., Popov E.P. Directional hardening rules for metal plasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, 1983, Vol.109, P.1042—1057.
10. Eisenberg M.A., Yen C.F. The role of a loading surface in viscoplasticity theory. *Acta Mechanica*, 1987, Vol. 69, P.77—96.
11. Rees D.W.A. An examination of yield surface distortion and translation. *Acta Mechanica*, 1984, Vol. 52, P.15—40.
12. Baltov A., Sawczuk A. A rule of anisotropic hardening. *Acta Mechanica*, 1965, Vol.1, P.81—92
13. Parker A. P., Troiano E., Underwood J. H., Mossey C. Characterization of steels using a revised kinematic hardening model incorporating Bauschinger effect. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2003, Vol. 125, P. 277-281.
14. Aliakbari K., Farhangdoost K. The Investigation of Modeling Material Behavior in Autofrettagged Tubes Made from Aluminium Alloys. *International Journal of Engineering*, 2014, Vol. 27, P. 803-810.
15. Puskar A. A Correlation among Elastic Modulus Defect, Plastic Strain and Fatigue Life of Metals. *Material Science Forum*, 1993, P.455—460.
16. Bazhenov V., Gulyar O., Pyskunov S. Modelyuvannya kontynual'nogo rujnuvannya prostorovyh til v umovax tryvalogo statychnogo i cyklichnogo navantazhennya (Modeling of continuum failure of the volumetric solids under long-term static and cyclic load). *Visnyk TNTU*, 2013, Vol 72, № 4, P.108-117.
17. Pyskunov S.O., Gulyar O.I., Mycyuk S.V. Oglyad spivvidnoshen` kontynual'noyi mexaniky rujnuvannya dlya opysu procesiv povzuchosti i vtomy (Review of continuum damage mechanics relations intended for describing of creep and fatigue processes). *Visnyk TNTU*, 2013, Vol 72, № 4, P.108-117.
18. Khan A.S., Chen X., Abdel-Karim M. Cyclic multiaxial and shear finite deformation response of OFHC: Part I, experimental results. *International Journal of Plasticity*, 2007, Vol. 23, P.1285—1306.
19. Kurtyka T., Zyczkowski M. Evolution equations for distortional plastic hardening. *International Journal of Plasticity*, 1996, Vol. 12, P.191—213.
20. Badnava H., Pezeshki S. M., Fallah K. Determination of combined hardening material parameters under strain controlled cyclic loading by using the genetic algorithm method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, Vol.26, P.3067-3072.
21. Franulovic M., Basan R., Krizan B. Kinematic Hardening Parameters Identification with Respect to Objective Function. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*, 2014, Vol. 8, N. 4, P. 677-681.

22. Szeliga D., Gawad J., Pietrzyk M., Parameter Identification of Material Model Based on the Inverse Analysis. International Journal of Applying Mathematics and Computational Science, 2004, Vol 14, P.549-556.

Lvov G.I., Okorokov V.O.

MODELING OF MATERIAL DAMAGE AT CYCLIC ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION

The paper is devoted to modeling of the Bauschinger effect and material damage which occur at elastic-plastic deformation. The series of cyclic tension-compression tests of flat samples made from aluminum alloy D16 were conducted. Based on the experimental data a mathematical model of plasticity is developed. Damage parameter is introduced according to effective stress conception.

Keywords: the Bauschinger effect, material damage, tension-compression test, nonlinear kinematic hardening.

Львов Г.И., Окороков В.А.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

В статье рассматривается моделирование эффекта Баушингера и повреждаемости материала, которые возникают при упругопластическом деформировании. Представлены результаты проведенных серий испытаний на циклическое растяжение-сжатие плоских образцов, изготовленных из алюминиевого сплава Д16. По результатам экспериментальных данных была разработана математическая модель пластичности, в которую вводится параметр повреждаемости согласно концепции эффективных напряжений.

Ключевые слова: эффект Баушингера, повреждаемость материала, эксперимент на растяжение-сжатие, нелинейное кинематическое упрочнение.

УДК 539.43

ОЦІНКА МІНІМАЛЬНОЇ ШВИДКОСТІ РОСТУ ВТОМНОЇ ТРІЩИНИ ПІСЛЯ ПЕРЕВАНТАЖЕНЬ РОЗТЯГУВАННЯМ-СТИСКОМ З УРАХУВАННЯМ АСИМЕТРІЇ ЦИКЛУ НАВАНТАЖЕННЯ

П.В. Ясній¹

д-р техн. наук,

Ю.І. Пиндус¹

канд. техн. наук,

В.Б. Фостик¹¹*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*

На основі експериментальних досліджень встановлено закономірності росту втомних тріщин за умов комплексних перевантажень розтягуванням-стиском в сплаві Д16Т. Отримано функціональну залежність для оцінки мінімальної швидкості росту втомних тріщин після перевантаження розтягуванням та розтягуванням-стиском, яка враховує асиметрію циклу навантаження.

Ключові слова: перевантаження розтягуванням, перевантаження стиском, втомна тріщина, ріст втомної тріщини, затримка росту тріщини.

Вступ та аналіз останніх досліджень. Більшість елементів конструкцій (зокрема коренева частина крила літака) під час експлуатації працюють за комбінованого навантаження розтягуванням-стиском. Очевидними недоліками більшості моделей РВТ за нерегулярного навантаження є те, що вони не враховують вплив ефектів перевантаження стиском на швидкість РВТ [1, 2, 3], припускаючи, що напруження, які виникають у зразку під час стиску розподіляються рівномірно по всьому перерізу зразка. Тому важливо дослідити вплив перевантаження розтягуванням-стиском на швидкість РВТ.

Відомі моделі, зокрема модифікована модель Уїлера [4], які описують швидкість РВТ в умовах комбінування перевантажень стиском та розтягуванням. Проте дана модель не враховує ділянки сповільнення швидкості РВТ після перевантаження розтягуванням до мінімальної швидкості затримки тріщини V_{\min} , що знижує достовірність прогнозування РВТ.

Модифікована та узагальнена модель Уїленборга, яка була запропонована NASGRO [5], розширює узагальнений підхід Уїленборга на випадок зменшення пластичної зони після перевантаження стиском, під час подолання якої відбувається затримка швидкості РВТ. Недоліком цієї моделі є багато параметричних коефіцієнтів, що не мають фізичного змісту, та необхідність проведення великої кількості експериментів.

Мінімальна швидкість після одноразового перевантаження V_{\min} набула застосування в запропонованих [6, 7] модифікаціях моделей РВТ після

одноразових перевантажень, які базуються на концепції взаємодії пластичних зон. Автори [6] вказують на складність оцінки V_{\min} .

V_{\min} суттєво впливає на кількість циклів затримки РВТ, оскільки може набувати на порядки меншого значення (сягаючи порогових значень) у порівнянні з отриманою за сталої амплітуди навантаження швидкістю РВТ. Тому, достовірна оцінка V_{\min} дасть змогу підвищити точність та вдосконалити підходи щодо прогнозування РВТ після одноразових перевантажень розтягом.

Постановка задачі та мета досліджень. У працях [8, 9, 10] запропоновано методику прогнозування швидкості РВТ після одноразового перевантаження розтягуванням, яка заснована на визначенні мінімальної швидкості V_{\min} після одноразового перевантаження розтягуванням, і обчисленні коефіцієнта максимального зменшення швидкості РВТ C_{ol} , як основної характеристики, що визначає V_{\min} після перевантаження розтягуванням. Проте, задача достовірної оцінки швидкості РВТ за умови комплексних перевантажень розтягуванням-стиском не є вирішеною і вимагає подальших досліджень.

Метою даної роботи є розроблення аналітично - експериментальної методики оцінки мінімальної швидкості затримки РВТ V_{\min} після перевантажень розтягуванням та розтягуванням-стиском з урахуванням асиметрії циклу сталоамплітудного навантаження у сплаві Д16Т.

Експериментальні дослідження. Для дослідження швидкості РВТ за циклічного навантаження сталої амплітуди та з урахуванням перевантажень розтягуванням-стиском використовували плоскі прямокутні зразки з центральною тріщиною, виготовлені з алюмінієвого сплаву Д16Т, згідно ГОСТ 25.506-85. Зразки моделюють панель обшивки крила транспортного літака з отвором під заклепку [11]. Креслення зразка, механічні властивості та хімічний склад металу наведені в праці [12]. Для вимірювання швидкості РВТ на робочій ділянці зразка по обидва боки від концентратора, наносили розмітку у вигляді координатної сітки методом електрохімічного контурного травлення [13, 14].

Зразки випробовували на сервогідролінійній машині СТМ-100 з керуючим ПК. Температура випробувань 20°C , частота навантаження 10 Гц, коефіцієнт асиметрії циклу за сталої амплітуди навантаження $R = P_{\min}/P_{\max} = 0; 0,2; 0,4; 0,6$, де P_{\min} , P_{\max} - найменше і найбільше зусилля циклу навантаження. Форма циклу навантаження - синусоїдна.

Зародження та підростання тріщини вимірювали за методикою [12], з використанням мікроскопа МБС-10. Для попередження випучування плоских зразків при перевантаженнях стиском використовували захисний кожух [15].

До прикладання перевантажень швидкість РВТ стабілізували до значень, що відповідають кінетичній діаграмі втомного руйнування (КДВР) матеріалу. Після перевантаження машину програмно переводили в режим

циклічного навантаження сталої амплітуди з фіксованим розмахом коефіцієнта інтенсивності напруження (КІН) та коефіцієнтом асиметрії R . Для забезпечення необхідної точності експерименту, відпрацьовані машиною зусилля перевантажень записували на жорсткий диск ПК. На ділянці стрибкоподібного прискорення, подальшого зменшення швидкості тріщини і максимальної затримки тріщини після перевантажень, приріст тріщини заміряли через (0,02 - 0,03 мм). Із збільшенням (стабілізацією) швидкості РВТ дискретність замірів збільшували до 0,1 мм. Прирости тріщини після перевантажень вимірювали до досягнення нею розмірів розрахункової пластичної зони l_{pz} циклу перевантаження розтягуванням за умов плоского напруженого стану:

$$l_{pz} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{ol}}{\sigma_{0,2}} \right)^2, \quad (1)$$

де K_{ol} – максимальне значення КІН циклу перевантаження; $\sigma_{0,2}=318$ МПа - межа текучості досліджуваного сплаву.

Коефіцієнт перевантаження розтягуванням визначали за формулою:

$$Q_{ol} = \frac{\sigma_{ol}}{\sigma_{max}}, \quad (2)$$

де σ_{ol} - максимальне напруження циклу перевантаження розтягуванням; σ_{max} - максимальне напруження циклу за сталої амплітуди навантаження.

Перевантаження стиском характеризували коефіцієнтом перевантаження стиском Q_{ul} :

$$Q_{ul} = \frac{\sigma_{ul}}{\sigma_{ol}}, \quad (3)$$

де σ_{ul} - напруження перевантаження стиском.

Зразки перевантажували за схемами, що передбачали почергове перевантаження розтягуванням, стиском та подальше навантаження із сталою амплітудою. Значення напружень бруто за різних схем перевантажень подано у таблиці 1.

Таблиця 1

Напруження бруто перевантажень розтягуванням – стиском

σ_{ol} , МПа	σ_{ul} , МПа	Q_{ul}	σ_{ol} , МПа	σ_{ul} , МПа	Q_{ul}	σ_{ol} , МПа	σ_{ul} , МПа	Q_{ul}
124	0	0	145	0	0	167	0	0
	-75	-0,6		-85	-0,6		-102	-0,6
	-125	-1,0		-145	-1,0		-169	-1,0
	-179	-1,4		-203	-1,4		-230	-1,4

Швидкість РВТ після перевантажень розтягуванням-стиском досліджували в межах середньоамплітудних ділянок КДВР, при $Q_{ol} = 1,4; 1,7; 2$ та $Q_{ul} = -0,6; -1; -1,4$.

Результати досліджень та їх обговорення. Експериментальні дані швидкості РВТ за циклічного навантаження сталої амплітуди у подвійних логарифмічних координатах подано на рис. 1. Для опису експериментальних даних використовували рівняння Уокера [16], записане у вигляді:

$$V = C_R \cdot K_{max}^n, \quad (4)$$

де C_R - коефіцієнт, який залежить від асиметрії циклу навантаження і визначається як:

$$C_R = C_{R=0} \cdot (1-R)^{m \cdot n}, \quad (5)$$

де $C_{R=0} = 5,2 \cdot 10^{-11}$ і $n = 3,4$ стали рівняння (4), які визначали при $R = 0$; $m = 0,6$ – параметр рівняння Уокера, який визначає вплив асиметрії циклу навантаження на швидкість РВТ у сплаві Д16Т.

Перевантаження розтягуванням-стиском спочатку істотно збільшують швидкість РВТ (рис. 2), як і випадку одноразового перевантаження розтягуванням. Короткотривале зростання швидкості триває упродовж 20-170 циклів. Після періоду пришвидшення швидкість РВТ стрімко зменшується до деякого значення V_{min} . Потім, по мірі подолання тріщиною сформованої перевантаженням пластичної зони, поступово зростає

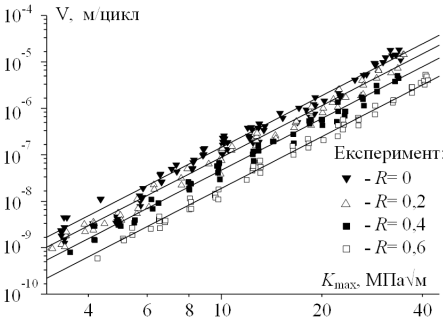


Рис. 1. КДВР сплаву Д16Т за додатніх асиметрій циклу навантаження та їх апроксимація рівнянням Уокера (4)

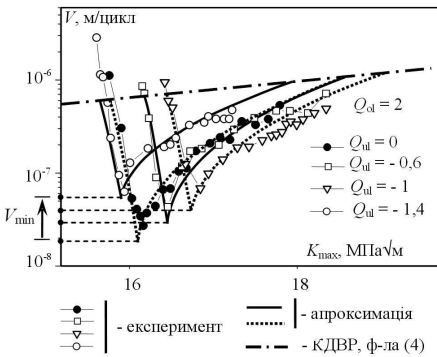


Рис. 2. Швидкість РВТ у сплаві Д16Т після перевантажень розтягуванням-стиском за асиметрії циклу навантаження $R=0$

швидкість РВТ до значень, що відповідають КДВР за сталої амплітуди навантаження.

Слід зазначити, що довжина ділянки затримки РВТ після комплексних перевантажень розтягуванням-стиском, приблизно дорівнювала ділянці

після одноразового перевантаження розтяганням тієї ж амплітуди. Це пов'язано із тим, що на берегах тріщини, після перевантаження розтяганням формуються пластичні утяжки, які зменшують розмах розкриття тріщини навіть після проходження пластичної зони [17]. В результаті цього, швидкість росту тріщини після подолання розрахункової пластичної зони повністю не досягає значення швидкості РВТ за сталої амплітуди навантаження.

Експериментально встановлено, що мінімальна швидкість РВТ V_{\min} суттєво збільшується із зростанням абсолютного значення коефіцієнта перевантаження стиском Q_{ul} (рис. 2).

Дослідження методом скінчених елементів напружено-деформованого стану спереду вістря тріщини [15] у пружно-пластичній постановці свідчать, що цей ефект збільшення V_{\min} спричинений зворотною пластичною деформацією матеріалу спереду вістря тріщини при перевантаженні стиском та зменшенням залишкових стискальних напружень, які були спричинені первинним перевантаженням розтягом (рис. 3 г,е).

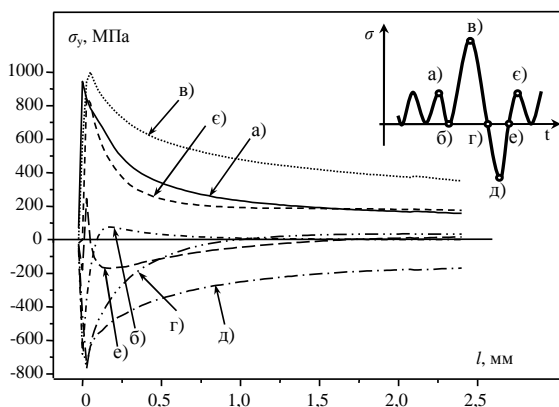


Рис. 3. Розподіл нормальних напружень спереду вістря тріщини до та після перевантажень розтягом-стиском при максимумі (а) і мінімумі (б) циклу сталоамплітудного навантаження до перевантаження розтягом; перевантаженні розтягом (в); розвантаженні після перевантаження розтягом (г); перевантаженні стиском (д); розвантаженні після перевантаження стиском (е); максимумі циклу сталоамплітудного навантаження після перевантаження стиском (є)

Для оцінки мінімальної швидкості РВТ після перевантаження розтяганням-стиском у рівнянні (4) застосували коефіцієнт $C_{V_{\min}}$, який характеризує зменшення швидкості РВТ при $Q_{ol} = \text{const}$ і $Q_{ul} = \text{const}$ [15]:

$$V_{\min} = C_{V_{\min}} \cdot K_{\max}^n \quad (6)$$

Слід відмітити, що у залежності (6) коефіцієнт n залишається сталим, тобто, отримані з її використанням криві (при $Q_{ol} = \text{const}$ і $Q_{ul} = \text{const}$) залишаються паралельними середньоамплітудній ділянці КДВР побудованій за рівнянням Уокера (4). Такий підхід базується на експериментально отриманих закономірностях впливу перевантажень на мінімальну швидкість РВТ [8, 10, 15] у сплавах Д16Т та Д16ЧТ.

Графічно залежності $C_{V_{\min}}$ від Q_{ul} за сталих значень $Q_{ol} = 1,4; 1,7; 2$ зображено на рис. 4. Виявлено, що за відсутності наступного перевантаження стиском, наприклад при $Q_{ol} = 2$ і $Q_{ul} = 0$ коефіцієнт $C_{V_{\min}}$ найменший (рис. 4), що свідчить про найбільшу затримку РВТ у цьому випадку. Збільшення абсолютного значення коефіцієнту перевантаження стиском Q_{ul} від 0 до -1,4 за сталого $Q_{ol} = 2$ призводить до поступового зростання $C_{V_{\min}}$ до значення C_R (горизонтальна пунктирна лінія (рис. 4). Така закономірність зберігається при зміні Q_{ul} за $Q_{ol} = 1,7; 1,4$. Зменшення коефіцієнта перевантаження розтягом Q_{ol} призводить до зміщення кривих $Q_{ul} \sim C_{V_{\min}}$ угору (рис. 4, криві 2, 3), наближаючись до коефіцієнта C_R рівняння Уокера, що свідчить про послаблення ефекту затримки РВТ.

Описані закономірності впливу перевантажень на швидкість РВТ зберігаються також за асиметрії циклу навантаження $R = 0,2; 0,4; 0,6$.

В таблиці 2 подано значення $C_{V_{\min}}$ у залежності від коефіцієнтів перевантаження Q_{ol} та Q_{ul} .

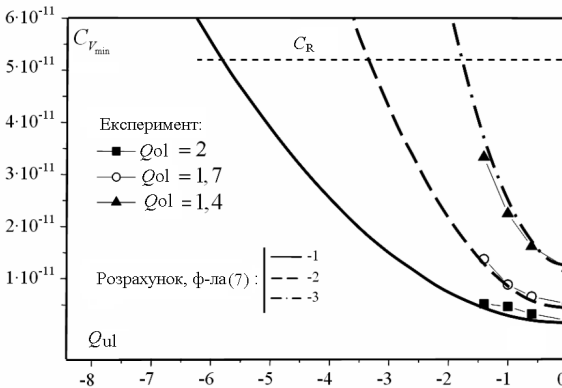


Рис. 4. Залежність коефіцієнта $C_{V_{\min}}$ від коефіцієнтів перевантаження розтягом Q_{ol} та стиском Q_{ul} за асиметрії циклу навантаження $R=0$

Таким чином, $C_{V_{\min}}$ є параметром, який характеризує мінімальну швидкість РВТ V_{\min} залежно від Q_{ol} та Q_{ul} і дає змогу визначати V_{\min} після перевантажень розтягуванням та розтягуванням-стиском.

Таблиця 2

Значення $C_{V\min}$ для різних коефіцієнтів перевантаження Q_{ol} , Q_{ul}
за асиметрії $R=0$

$C_{R=0}$	Q_{ol}	$C_{V\min}$				n
		$(Q_{ul}=0)$	$(Q_{ul}=-0,6)$	$(Q_{ul}=-1)$	$(Q_{ul}=-1,4)$	
$5,2 \cdot 10^{-11}$	1,4	$1,2 \cdot 10^{-11}$	$1,6 \cdot 10^{-11}$	$2,2 \cdot 10^{-11}$	$3,3 \cdot 10^{-11}$	3,4
	1,7	$5,2 \cdot 10^{-12}$	$6,6 \cdot 10^{-12}$	$8,9 \cdot 10^{-12}$	$1,4 \cdot 10^{-11}$	
	2,0	$2,0 \cdot 10^{-12}$	$3,2 \cdot 10^{-12}$	$4,7 \cdot 10^{-12}$	$5,2 \cdot 10^{-12}$	

Для опису отриманих експериментальних даних (рис. 4) запропоновано формулу:

$$C_{V\min} = C_{V\min}^{ol} \left(1 + (Q_{ul} / (1-R))^2 \right), \quad (7)$$

де $C_{V\min}^{ol}$ – значення, яке приймає $C_{V\min}$ після перевантаження розтягуванням та за відсутності перевантаження стиском $Q_{ul} = 0$:

$$C_{V\min}^{ol} = C_R - C_{ol}, \quad (8)$$

де C_{ol} - коефіцієнт, який визначає зменшення швидкості РВТ після одного перевантаження розтягом до мінімального значення з урахуванням асиметрії циклу навантаження [10]:

$$C_{ol} = C_R \left(1 - (g_0 (1-R))^{(Q_{ol}-1)} \right), \quad (9)$$

де $g_0 = 0,038$ - параметричний коефіцієнт за асиметрії $R = 0$ для сплаву Д16Т та Д16чТ.

Підставивши (8) і (9) у формулу (7) отримаємо:

$$C_{V\min} = C_R \cdot (g_0 (1-R))^{(Q_{ol}-1)} \cdot \left(1 + (Q_{ul} / (1-R))^2 \right). \quad (10)$$

З урахуванням (5) і (10) у залежності (6) можна записати:

$$V_{\min} = C_0 (K_{\max} (1-R)^m)^n \cdot (g_0 (1-R))^{(Q_{ol}-1)} \cdot \left(1 + (Q_{ul} / (1-R))^2 \right). \quad (11)$$

Слід відмітити, що отримана залежність (11) містить рівняння Уокера, а також враховує коефіцієнти перевантаження розтягом, стиском та асиметрію циклу навантаження сталої амплітуди при якій здійснюються перевантаження. Окрім параметрів рівняння Уокера залежність (11) містить лише один параметричний коефіцієнт g_0 , методика визначення якого подана у працях [9, 10].

Отриману залежність використали для знаходження мінімальної швидкості РВТ після перевантажень та розтягуванням-стиском. Деякі із результатів розрахунків V_{\min} зображені на рис. 5 та рис. 6.

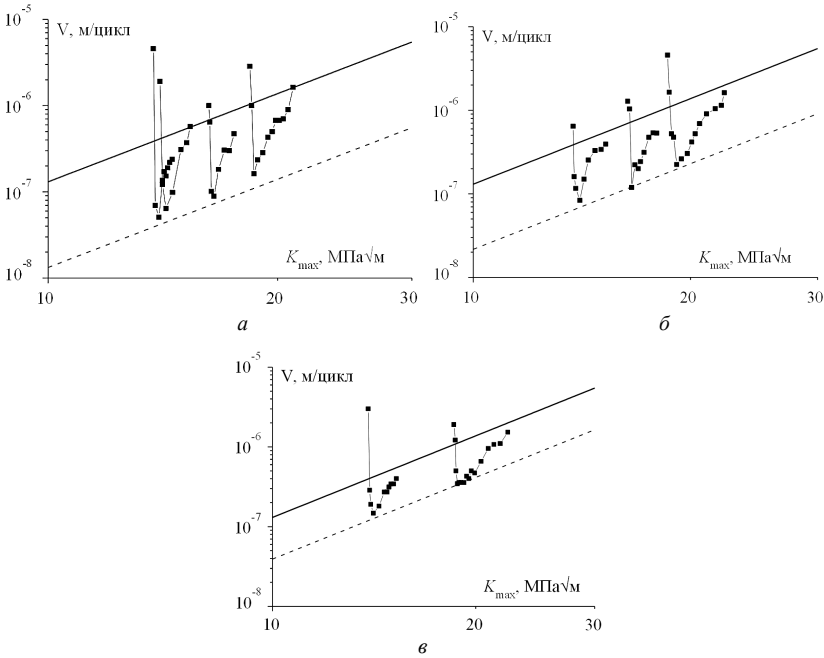


Рис. 5. Швидкість РВТ після перевантажень розтягуванням-стиском із $Q_{ol} = 1,7$ та: а) $Q_{ol} = 0$; б) $Q_{ol} = -0,6$; $Q_{ol} = -1,4$ в межах середньоамплітудної ділянки КДВР за асиметрії циклу навантаження $R = 0$ —■— - експериментальні дані; --- - мінімальна швидкість V_{min} (11); — - КДВР (4)

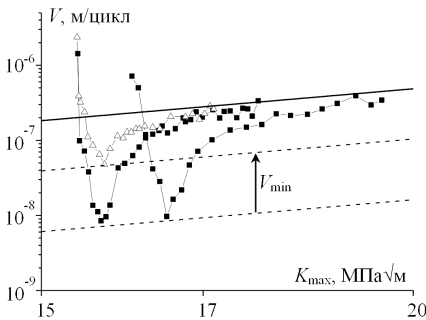


Рис. 6. Швидкість РВТ після перевантажень розтягуванням та розтягуванням-стиском в межах середньоамплітудної ділянки КДВР за асиметрії циклу навантаження $R = 0,4$ —■— - швидкість РВТ після перевантаження розтягуванням із $Q_{ol} = 2$; —△— - швидкість РВТ після перевантаження розтягуванням-стиском із $Q_{ol} = 2$ та $Q_{ol} = -1,4$; --- - мінімальна швидкість V_{min} (11); — - КДВР (4)

З рис. 5 (б, в) та рис. 6 видно, що розрахункові криві V_{\min} (11) зміщуються вгору із збільшенням абсолютного значення коефіцієнта перевантаження стиском Q_{ul} , що задовільно узгоджується з експериментальними даними. Це свідчить про можливість застосування залежності (11) у моделях РВТ після перевантажень розтягуванням та розтягуванням-стиском, для оцінки необхідного рівня перевантаження розтягуванням для зупинки росту тріщини чи досягнення нею порогових значень швидкості РВТ, а також для оцінки необхідного рівня перевантаження стискуванням для усунення ефекту затримки РВТ після перевантаження розтягуванням.

Разом з тим, попри зростання мінімальної швидкості РВТ із збільшенням абсолютного значення коефіцієнта перевантаження стиском, тривалість затримки РВТ не зменшується (рис. 6). Це свідчить про те, що перевантаження стиском зменшують залишкові стискальні напруження (рис. 3 г, е) і не впливають на довжину зони затримки РВТ (довжину зони пластичних деформацій) спереду вістря тріщини.

Висновки. Досліджено основні закономірності впливу комплексних перевантажень розтягуванням-стиском на мінімальну швидкість РВТ в сплаві Д16Т. Виявлено, що перевантаження стиском, які здійснюються після перевантажень розтягом призводять до збільшення мінімальної швидкості РВТ внаслідок часткового усунення залишкових стискальних напружень спереду вістря тріщини, але не зменшують довжини зони затримки (пластичної зони спереду вістря тріщини).

Отримано функціональну залежність, яка дозволяє оцінити мінімальну швидкість РВТ у сплаві Д16Т після перевантажень розтягуванням та розтягуванням-стиском і враховує коефіцієнти перевантаження розтягом, стиском та асиметрію циклу навантаження.

У перспективі планується використання отриманої залежності для розробки моделі РВТ після перевантажень розтягом, розтягуванням-стискуванням та за випадкового знакомінного циклічного навантаження

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *O.E. Wheeler.* Spectrum loading and crack growth/ O.E. Wheeler // Journal of basic engineering. – ASME. – 1972. – P. 181-186.
2. *Johnson W. S.* Multi-Parameter Yield Zone Model for Predicting Spectrum Crack Growth // Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading.- Philadelphia(Pa). - ASTM STP. – 1981. - № 748. - P. 85-102.
3. *D.E. Macha., A.F. Grandt., B.J. Wicks.* Effects of Gas turbine engines load spectrum variables on crack propagation // Effect of load spectrum variables on fatigue crack initiation and propagation. - ASTM STP. – 1980. – № 714. - P. 108–127.
4. *Rushton P.A., Taheri F.* Prediction of crack growth in 350 WT steel subjected to constant amplitude with over- and under-loads using a modified wheeler approach // Marine Structures. – 2003. - № 16. – С. 517-539.
5. NASGRO Reference Manual, Version 4.02, Southwest Research Institute, 2003.

6. *Ph. Darcis, N. Recho.* Fatigue Reliability Analysis of Overload effects in Welded Joints Including Crack Initiation and Plastic Zone as Random Variables // *Fatigue Testing and Analysis Under Variable Amplitude Loading Conditions*, ASTM STP, West Conshocken, PA. - Vol. 1439. – 2005. – P. 492-505.
7. *Kim J.-K., Shim D.-S.* A statistical approach for predicting the crack retardation due to a single tensile overload // *International Journal of Fatigue*. – 2003. – Vol. 25. – No.4. - p. 335–342.
8. *П.В. Ясній, Ю.І. Пиндус.* Вплив одноразового перевантажування на ріст втомної тріщини в сплаві Д16Т // *Фіз.–хім. механіка матеріалів*. – 2002. – №2. – С. 57–60.
9. *Пиндус Ю.І.* Прогнозування швидкості росту втомної тріщини при нерегулярному навантаженні в алюмінієвому сплаві Д16Т // *Вісник Тернопільського державного технічного університету*. - 2002. - Т.7. - №1. - С.11-19.
10. *Пиндус Ю.І, Ясній О.П., Фостик В.Б., Пиндус Т.Б.* Прогнозування мінімальної швидкості росту втомних тріщин після одноразових перевантажень розтягом // *Автомобільний транспорт*. – ХНАДУ, 2015. - № 35. – С 41-47.
11. РД 50-345-82. Методические указания. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при циклическом нагружении. – М.: Изд-во стандартов, 1983. – 95 с.
12. *П. Ясній, Ю. Пиндус, В. Фостик.* Вплив асиметрії циклу навантаження на характеристики циклічної трещиностійкості алюмінієвого сплаву Д16Т // *Вісник Тернопільського державного технічного університету*. - 2007 - Т.12 - №1 - С. 7-12.
13. Пат. 25367 України. МПК G 01 B 11/16. Спосіб нанесення на поверхню гладких зразків дільничних сіток / *П.В. Ясній, Ю.І. Пиндус, В.Б. Фостик*, заявник та патентокористувач Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя. - № 200702400; заяв. 05.03.2007; опубл. 10.08.07, Бюл. №12.
14. Пат. 33067 України. МПК G 01 N 1/00. Спосіб розмічування поверхонь металевих плоских зразків / *П.В. Ясній, Ю.І. Пиндус, П.О. Марущак, В.Б. Фостик*, заявник та патентокористувач Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя. - № 200801367; заяв. 04.02.2008; опубл. 10.06.08, Бюл. №11.
15. *Ясній П., Пиндус Ю., Фостик В., Галуцак О.* Оцінка мінімальної швидкості росту втомної тріщини після комбінованих перевантажень розтягом-стиском // *Вісник ТНТУ*. — 2011. — Спецвипуск — частина 2. — С.184-195. — (механіка та матеріалознавство).
16. *K. Walker.* The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum // *Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life*. - ASTM STP 462. – 1970. - P. 1-14.
17. *C. Makabe, A. Purnowidodo, A.J. McEvily.* Effects of surface deformation and crack closure on fatigue crack propagation after overloading and underloading // *International Journal of Fatigue*. – 2004. – Vol.26. – P. 1341-1348.

REFERENCES

1. *O.E. Wheeler.* Spectrum loading and crack growth/ O.E. Wheeler // *Journal of basic engineering*. – ASME. – 1972. – P. 181-186.
2. *Johnson W. S.* Multi-Parameter Yield Zone Model for Predicting Spectrum Crack Growth // *Methods and Models for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading*. - Philadelphia(Pa). - ASTM STP. – 1981. - № 748. - P. 85-102.
3. *D.E. Macha., A.F. Grandt., B.J. Wicks.* Effects of Gas turbine engines load spectrum variables on crack propagation // *Effect of load spectrum variables on fatigue crack initiation and propagation*. - ASTM STP. – 1980. – № 714. - P. 108–127.
4. *Rushton P.A., Taheri F.* Prediction of crack growth in 350 WT steel subjected to constant amplitude with over- and under-loads using a modified wheeler approach // *Marine Structures*. – 2003. - № 16. – С. 517-539.
5. NASGRO Reference Manual, Version 4.02, Southwest Research Institute, 2003.

6. *Ph. Darcis, N. Recho.* Fatigue Reliability Analysis of Overload effects in Welded Joints Including Crack Initiation and Plastic Zone as Random Variables // *Fatigue Testing and Analysis Under Variable Amplitude Loading Conditions*, ASTM STP, West Conshocken, PA. - Vol. 1439. – 2005. – P. 492-505.
7. *Kim J.-K., Shim D.-S.* A statistical approach for predicting the crack retardation due to a single tensile overload // *International Journal of Fatigue*. – 2003. – Vol. 25. – No.4. - p. 335–342.
8. *P.V. Yasniy, Yu.I. Pyndus.* Vplyv odnorazovogo perevantazhuvannya na rist vtomnoyi trishchyny v splavi D16T (Effect of single overload on fatigue crack growth in D16T alloy) // *Fiz.–him. mehanika materialiv*. – 2002. – No2. – P. 57–60.
9. *Pyndus Yu.I.* Prohnozuvannya shvydkosti rostu vtomnoi trishchyny pry nerehuliamomu navantazhenni v aluminiirovomu splavi D16T (Prediction of fatigue crack growth rate at variable amplitude loading in aluminum alloy D16T) // *Visnyk Ternopilskoho derzhavnogo tekhnichnoho universytetu*. - 2002. - Vol.7. – No.1. - P.11-19.
10. *Pyndus Yu.I, Yasni O.P., Fostyk V.B., Pyndus T.B.* Prohnozuvannya minimalnoi shvydkosti rostu vtomnykh trishchyn pislia odnorazovykh perevantazhen roztiatom (Prediction of minimal fatigue crack growth rate after a single overload by tension) // *Avtomobilnyi transport*. – KhNADU, 2015. – No. 35. – P. 41-47.
11. RD 50-345-82. Metodicheskiye ukazaniya. Raschety i ispytaniya na prochnost. Metody mekhanicheskikh ispytany metallov. Opredeleniye kharakteristik treshchinostoykosti (vyazkosti razrusheniya) pri tsiklicheskom nagruzhenni. (Methodical instructions. Calculations and tests on strength. Methods of mechanical testing of metals. Determination of crack resistance properties (fracture toughness) under cyclic loading.) – M.: Izd-vo standartov, 1983. – 95 pp.
12. *P. Yasniy, Yu. Pyndus, V. Fostyk.* Vplyv asymetrii tsykladnavantazhennia na kharakterystyky tsyklichnoi trishchynostiikosti aluminiirovoho splavu D16T (Effect of load ratio on fatigue crack resistance properties of aluminum alloy D16T) // *Visnyk Ternopilskoho derzhavnogo tekhnichnoho universytetu*. - 2007 - Vol.12 – No.1 - P. 7-12.
13. Pat. 25367 Ukrainy. MPK G 01 B 11/16. Sposib nanesennia na poverkhniiu hladkykh zrazkiv dilylnykh sitok (The method of separating grids etching on the surface of specimens) / P.V. Yasniy, Yu.I. Pyndus, V.B. Fostyk, zaiavnyk ta patentokorystuvach Ternopilskiy derzhavnyi tekhnichnyi universytet imeni Ivana Puliuia. - № 200702400; zaiav. 05.03.2007; opubl. 10.08.07, Biul. №12.
14. Patent 33067 Ukrainy. MPK G 01 N 1/00. Sposib rozmichuvannya poverkhon metalevykh ploskykh zrazkiv (The method of marking of metal specimen's flat surfaces) / P.V. Yasniy, Yu.I. Pyndus, P.O. Marushchak, V.B. Fostyk, zaiavnyk ta patentokorystuvach Ternopilskiy derzhavnyi tekhnichnyi universytet imeni Ivana Puliuia. - № 200801367; zaiav. 04.02.2008; opubl. 10.06.08, Biul. №11.
15. *Yasniy P., Pyndus Yu., Fostyk V., Halushchak O.* Otsinka minimalnoi shvydkosti rostu vtomnoi trishchyny pislia kombinovanykh perevantazhen roztiatom-styskom (Assessment of minimal fatigue crack growth rate after overload-underload) // *Visnyk TNTU*. — 2011. — Spetsvyпуск — chastyna 2. — P.184-195. — (mekhanika ta materialoznavstvo).
16. *K. Walker.* The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum // *Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life*. - ASTM STP 462. – 1970. - P. 1-14.
17. *C. Makabe, A. Purnowidodo, A.J. McEvily.* Effects of surface deformation and crack closure on fatigue crack propagation after overloading and underloading // *International Journal of Fatigue*. – 2004. – Vol.26. – P. 1341-1348.

Yasniy P.V., Pyndus Yu.I., Fostyk V.B.

ESTIMATION OF MINIMAL FATIGUE CRACK GROWTH RATE AFTER OVERLOAD-UNDERLOAD AT DIFFERENT STRESS RATIOS

Basing on experimental investigations the main regularities of the fatigue crack growth (FCG) under single overload and complex overload - underload in the alloy D16T have been determined. Functional relationship of the underload factor effect on the minimum FCG rate after preliminary tension overload has been obtained. The proposed equation allows to predict the minimal FCG rate at various stress ratios and taking into account the change of overload-underload factor.

Keywords: overload, underload, fatigue crack, fatigue crack growth, crack growth retardation.

Ясний П.В., Пындус Ю.И., Фостык В.Б.

ОЦЕНКА МИНИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ РОСТА УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН ПОСЛЕ ПЕРЕГРУЗОК РАСТЯЖЕНИЕМ-СЖАТИЕМ С УЧЕТОМ АСИММЕТРИИ ЦИКЛОВ НАГРУЖЕНИЯ

Основываясь на экспериментальных исследованиях установлены закономерности роста усталостных трещин в условиях комплексных перегрузок растяжением-сжатием в сплаве Д16Т. Получено функциональную зависимость для оценки минимальной скорости роста трещин после перегрузки растяжением и растяжением-сжатием, которая учитывает асимметрию цикла нагружения.

Ключевые слова: перегрузка растяжением, перегрузка сжатием, усталостная трещина, рост усталостной трещины, задержка роста трещины.

Інформація для реферативного журналу:

Ясний П.В., Пындус Ю.И., Фостык В.Б. **Оцінка мінімальної швидкості росту втомної тріщини після перевантажень розтягуванням-стиском з урахуванням асиметрії циклу навантаження** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 94. – С. 231 – 243.

На основі експериментальних досліджень встановлено закономірності росту втомних тріщин за умов комплексних перевантажень розтягуванням-стиском в сплав Д16Т. Отримано функціональну залежність для оцінки мінімальної швидкості росту втомних тріщин після перевантаження розтягуванням та розтягуванням-стиском, яка враховує асиметрію циклу навантаження

Табл. 2. Іл. 6. Бібліогр. 17 назв.

Ясний П.В., Пындус Ю.И., Фостык В.Б. **Оценка минимальной скорости роста усталостных трещин после перегрузок растяжением-сжатием с учетом асимметрии циклов нагружения** // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вып. 94. – С. 231 – 243.

Основываясь на экспериментальных исследованиях установлены закономерности роста усталостных трещин в условиях комплексных перегрузок растяжением-сжатием в сплаве Д16Т. Получено функциональную зависимость для оценки минимальной скорости роста трещин после перегрузки растяжением и растяжением-сжатием, которая учитывает асимметрию цикла нагружения

Табл. 2. Ил. 6. Библиогр. 17 назв.

Yasniy P.V., Pyndus Yu.I., Fostyk V.B. **Estimation of minimal fatigue crack growth rate after overload-underload at different stress ratios** // Strength of materials and the theory of structures. – 2015. – Issue. 94. – С. 231 – 243. – Ukr.

Basing on experimental investigations the main regularities of the fatigue crack growth (FCG) under single overload and complex overload - underload in the alloy D16T have been determined.

Functional relationship of the underload factor effect on the minimum FCG rate after preliminary tension overload has been obtained. The proposed equation allows to predict the minimal FCG rate at various stress ratios and taking into account the change of overload-underload factor.

Tables. 2. Figs. 6. Ref. 17 names.

Авторська довідка

Доктор технічних наук, професор, ректор Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

ЯСНІЙ Петро Володимирович.

Адреса: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56, ТНТУ ім. І. Пулюя, ЯСНІО П.В.

Роб. тел. +38 0352 524181

Моб. тел. +38 067 6734909

Ел. пошта yasniy@networkacad.net

Пиндус Юрій Іванович, к.т.н., докторант ТНТУ

Моб. тел. +38 067 7792530

Ел. пошта yurypindus@gmail.com

Фостик Василь Богданович, асистент кафедри зварювання ТНТУ

Моб. тел. +38 097 8825497

Ел. пошта vasyl.fostyk@gmail.com

УДК 539.3

РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ УНІВЕРСАЛЬНОГО СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Ю.В. Максим'юк¹
канд. техн. наук

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680*

Отримані розрахункові співвідношення моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) універсального скінченого елемента (СЕ), які дозволяють визначати напружено-деформований стан (НДС) не тільки масивних і тонкостінних тіл, але й вісесиметричних об'єктів складної структури, що поєднують масивні і тонкостінні елементи, з єдиних позицій просторової задачі теорії пружності. На основі розв'язання контрольних прикладів доведена достовірність результатів, отриманих на основі універсального СЕ і показана його ефективність при розрахунку тіл складної структури.

Ключові слова: моментна схема скінчених елементів, універсальний скінчений елемент, масивні і тонкостінні тіла, вісесиметричні об'єкти складної структури.

Вступ. Історично склалися два підходи до розгляду тіл складної структури на основі МСЕ:

- створення набору спеціалізованих СЕ, кожний з яких орієнтований на апроксимацію конкретних об'єктів [1, 2, 3];
- застосування СЕ загального типу, що дозволяють розглядати поведінку конструкції з позицій механіки суцільного середовища [10, 11].

Використання кількох типів СЕ, що базуються на різних вихідних рівняннях (теорія пружності, пластин та оболонок, стержневих систем) ускладнює правильний вибір розрахункової схеми, ускладнює формування умов контакту між окремими конструктивними елементами і крім цього як зазначено в роботі [5], приводить до громіздкості обчислювального комплексу. Тому більш перспективним слід вважати орієнтацію на використання універсальних СЕ.

Безпосереднє використання просторових СЕ, матриці жорсткості (МЖ) яких отримані виходячи із загальних співвідношень теорії пружності, без введення будь-яких припущень та гіпотез, в якості універсального СЕ не економічно. Так використання кількох СЕ по товщині тонкостінних і навіть відносно масивних конструкцій супроводжується невиправданим збільшенням числа невідомих без суттєвого уточнення результатів розрахунку. Ефективнішим є підхід, що передбачає апроксимацію оболонкових конструкцій одним просторовим СЕ по товщині [12]. Як показали дослідження ступінь поліномів, що апроксимують тангенціальні зміщення, в

цьому випадку повинна бути не нижче другого порядку, що, хоча й в меншій мірі, але погіршує економічність даного варіанта СЕ. Зменшення числа невідомих можна досягти зменшенням порядку поліномів до першого ступеня при одночасному корегуванні закону Гука, що базується на умові дорівнювання нулю напружень обтиску [12]. Однак такі елементи вже не можна вважати просторовими, оскільки по одному з напрямків вноситься похибка, що не зникає при згущенні сітки. Огляд робіт, присвячених проблемі універсального СЕ розглянуто в роботі [4].

1. Статичні гіпотези МССЕ для універсального СЕ. Висока ефективність МССЕ при розрахунку, як масивних так і тонкостінних тіл, була обґрунтована на основі розв'язку значної кількості контрольних прикладів [7, 8]. Але на відміну від розроблених типів просторових і оболонкових скінчених елементів при побудові розрахункових співвідношень універсального СЕ необхідно, використовуючи методику МССЕ, формулювати закон Гука окремо для нульових і лінійних членів розкладу деформацій і напружень в ряд Маклорена.

На відміну від статичної гіпотези про порівнювання нулю напружень обтиснення по товщині оболонки, прийнятої в роботі [8], тут приймається, що напруження обтиснення постійні в межах СЕ:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(\alpha\alpha)} = 0. \quad (1)$$

Це припущення для тонких оболонок з навантаженням, приведеним до серединної поверхні, відповідає в класичній теорії оболонок умові рівності нулю нормальних напружень на ділянках, паралельних дотичній площині до серединної поверхні.

Застосування моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) [9] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження комбінованих просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла, як жорсткого цілого, а також усуває явище “ хибного зсуву ”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Закон Гука, що зв'язує фізичні компоненти нульових членів розкладу напружень тензора напружень і тензора деформацій згідно МССЕ та їх похідні в центрі елемента визначаються формулами:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}^{\alpha\beta\gamma\mu} \overset{\circ}{\epsilon}_{\gamma\mu}, \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{C}^{33\gamma\mu} \overset{\circ}{\epsilon}_{\gamma\mu},$$

$$C^{ijkl} = \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) + \lambda g^{ij} g^{kl}$$

де коефіцієнти Ляме λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^i, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^i, T)$, які є функціями температури і координат:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Закон Гука для лінійних членів розкладу деформацій і напружень згідно МССЕ буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha\alpha\alpha)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)}^{\alpha} + \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)33} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(33),(3-\alpha)}^{\alpha}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} &= \overset{\circ}{B}_{\alpha}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^{\alpha} + \overset{\circ}{B}_{\alpha}^{3333} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^{\alpha}, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha\alpha\alpha)} &= \overset{\circ}{C}_{\alpha(\alpha\alpha\alpha)} - \frac{(\overset{\circ}{C}_{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)})^2}{\overset{\circ}{C}_{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{B}_{\alpha}^{3333} &= \overset{\circ}{C}_{\alpha}^{3333} - \frac{(\overset{\circ}{C}_{(3-\alpha)(3-\alpha)\alpha}^{33(\alpha)\alpha})^2}{\overset{\circ}{C}_{(\alpha\alpha\alpha\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{B}_{(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)33} &= \overset{\circ}{C}_{\alpha(\alpha)33} - \frac{\overset{\circ}{C}_{\alpha(\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)} \overset{\circ}{C}_{33(3-\alpha)(3-\alpha)}}{\overset{\circ}{C}_{(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)(3-\alpha)}}, \\ \overset{\circ}{B}_{\alpha}^{33(3-\alpha)(3-\alpha)} &= \overset{\circ}{C}_{33(3-\alpha)(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{C}_{33(\alpha)\alpha} \overset{\circ}{C}_{(3-\alpha)(3-\alpha)(\alpha)\alpha}}{\overset{\circ}{C}_{(\alpha\alpha\alpha\alpha)}}. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Універсальний СЕ. Розглянемо скінченні елементи (рис. 1). Будемо

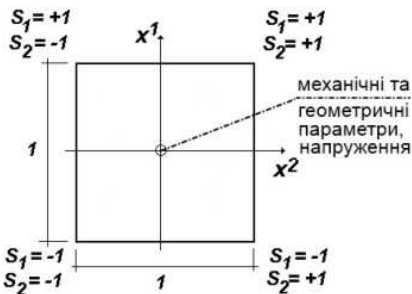


Рис. 1.

вважати, що компоненти тензора пружних сталей та визначник матриці, що складена з компонент метричного тензора g_{ij} , дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{ijkl} &\approx \overset{\circ}{C}^{ijkl} = \tilde{C}^{ijkl} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \\ g &= g \Big|_{x^{\alpha}=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [9] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження комбінованих просторових конструкцій на основі МСЕ. Окрім того, МССЕ забезпечує відсутність деформацій при зміщенні тіла, як жорсткого цілого, а

також усуває явище “хибного зсуву”, що виникає при розрахунку тонкостінних конструкцій за допомогою просторових СЕ.

Формули для обчислення вузлових реакцій r і коефіцієнтів матриці жорсткості $[K]_n$ за формою співпадають з наведеними в роботі [7]:

$$\left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\} = \left[\overset{\circ}{B} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}}, \quad (5)$$

$$[K]_n = \left\{ \left[\overset{\circ}{B} \right]^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left[\overset{\circ}{B} \right] + \frac{1}{12} \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left[\overset{\circ}{D}_1 \right] \left[\overset{\circ}{B}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left[\overset{\circ}{D}_2 \right] \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (6)$$

Суттєва відмінність цих виразів полягає в тому, що напруження визначаються за наступними формулами:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (7)$$

де

$$\left[\overset{\circ}{D} \right] = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1112} & C^{1122} & C^{1133} \\ C^{1211} & C^{1212} & C^{1222} & C^{1233} \\ C^{2211} & C^{2212} & C^{2222} & C^{2233} \\ C^{3311} & C^{3312} & C^{3322} & C^{3333} \end{bmatrix}, \quad \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] = \left[\overset{\circ}{B}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[\overset{\circ}{B}^{ij33} \right]. \quad (8)$$

2. Дослідження збіжності МССЕ при розрахунку комбінованих об'єктів.

Як показали чисельні дослідження проведені на масивних і тонкостінних об'єктах, розглянутих в роботах [7, 8] збіжність універсального СЕ не поступається об'єктно орієнтованим СЕ.

Швидкість збіжності МССЕ при розрахунку конструкцій із неоднорідного матеріалу визначаються шляхом порівнянь з результатами, отриманими на основі інтегрування диференційних рівнянь теорії пружності з високим ступенем точності по методиці, що описана в роботі [6].

В якості об'єкта складної структури розглянуто порожнистий циліндр (рис. 2), торці якого закріплені від зсувів в радіальному напрямку. Товщина циліндра дорівнює 11 см, внутрішній радіус $R=20$ см, довжина $H=40$ см. Матеріал конструкцій в напрямку осі z^2 розподілений по двох шарах: зовнішньому товщиною до $h=1$ см і внутрішньому товщиною $h_1=10$ см. Модуль пружності зовнішнього шару відноситься до модуля пружності внутрішнього шару як 100:1, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$. Навантаження, розподілене вздовж твірної по синусоїді, прикладене до зовнішньої поверхні циліндра. Умови контакту забезпечуються рівністю переміщення на стику двох шарів.

Апроксимуюча сітка, один з варіантів якої показаний на розрахунковій схемі, написана таким чином, що по товщині зовнішнього шару приймається завжди один елемент. За товщиною внутрішнього шару і в осьовому напрямку використовується рівномірна розбивка на скінченні елементи.

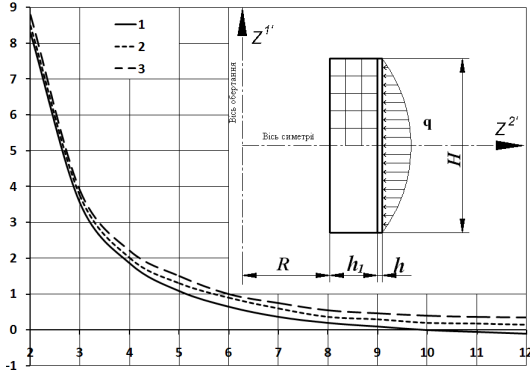


Рис. 2.

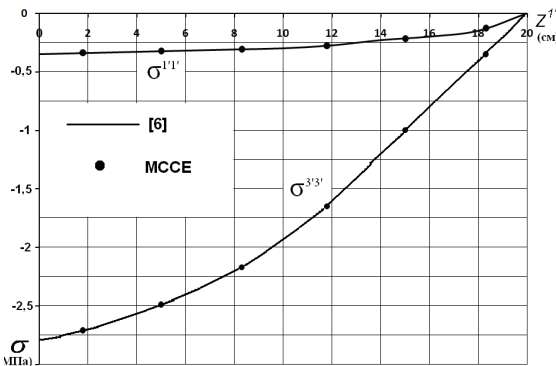


Рис. 3.

Результати розрахунку представлені на рис. 2 у вигляді кривих, що відображають залежність точності визначення переміщення в точці з координатами $z^1=0$, $z^2=R+h_1+h$ від числа елементів вздовж твірної по відношенню до розв'язку, отриманого за методикою [6]. Номер кривої збігається з кількістю елементів, прийнятих по товщині внутрішнього шару. На рис. 3 зображені епюри кільцевих $\sigma^{3'3'}$ і осьових $\sigma^{1'1'}$ напружень на зовнішній поверхні циліндра. Наведені результати наглядно

демонструють

практично повне співпадіння результатів, отриманих обома методами.

3. Комбіновані віссиметричні тіла складної структури.

В якості об'єкта складної структури розглянуто конструкцію занурюваного контейнера. На рис. 4 представлена розрахункова схема нероз'ємного з'єднання циліндричної оболонки зі скла з плоскою металевою заглушкою. Елементи з'єднання, включаючи матеріал опорного прошарку, володіють різними механічними характеристиками. Розрахунок проводився в припущенні ідеальної пружності всіх складових частин з'єднання і відсутності взаємного зміщення сполучених деталей на повер-

нях розділу. Оскільки міцність з'єднання в даному випадку цілком визначається міцністю елемента з крихкого матеріалу, руйнування якого починається зазвичай з поверхні, основну увагу було приділено вивченню напружень на бічній поверхні скляної циліндричної оболонки.

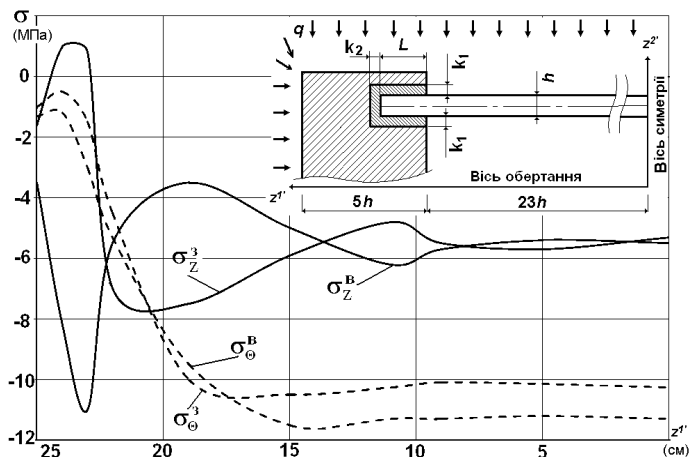


Рис. 4

Конструктивні параметри з'єднання такі: глибина защемлення оболонки $L=2h$, товщина бічних прошарків $k_1=0,25h$, товщина прошарку на торці $k_2=0,25h$, де $h=1$ см - товщина оболонки. Передбачалося, що механічні властивості елементів з'єднання характеризуються такими даними: модулі пружності: кришки - $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, прошарків - $E=0,035 \cdot 10^5$ МПа, оболонки - $E=0,8 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнти Пуасона: кришки - $\nu=0,3$, прошарків - $\nu=0,34$, оболонки - $\nu=0,22$.

На рис. 4 показане розподілення кільцевих σ_θ^3 і осевих σ_z^3 напружень на зовнішній поверхні оболонки та σ_θ^B , σ_z^B - на внутрішній поверхні.

Висновки. Чисельні дослідження, проведені на контрольних прикладах, показали, що результати, які отримані за допомогою універсального СЕ на основі МССЕ дозволяють визначати НДС не тільки масивних і тонкостінних тіл, але й вісесиметричних об'єктів складної структури, що поєднують масивні і тонкостінні елементи, з єдиних позицій просторової задачі теорії пружності. Результати розрахунку занурюваного контейнера дозволяють зробити висновок, що розроблена методика може бути використана при розрахунку відповідальних об'єктів сучасної техніки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Адясова Н.М.* Исследования упругопластического поведения составной осесимметричной конструкции с помощью комбинации конечных элементов различной мерности – В сб. «Метод конечных элементов в строительной механике», Горький, 1975.
2. *Адясова Н.М., Капустин С.А.* Исследование упругопластических составных конструкций МКЭ – В сб. «Прикладные проблемы прочности и пластичности». Вып. 2, Горький, 1975.
3. *Адясова Н.М., Капустин С.А., Яблонко Л.С.* Некоторые вопросы расчета нелинейных составных конструкций – В сб. «Прикладные проблемы прочности и пластичности». Вып. 1, Горький, 1975.
4. *Баженов В. А.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей.– К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.
5. *Галиев К.С., Гордон Л.А., Розин Л.А.* О построении универсальной матрицы жесткости в МКЭ. «Известия ВНИИГ», 1974, т. 105.
6. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* К расчету напряженного состояния толстостенных неоднородных анизотропных оболочек. Прикладная механика, «наукова думка», 1974, №5.
7. *Гуляр О.І., Солодей І.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В.* Ефективність МССЕ в задачах згину та з концентраторами напружень // Опір матеріалів і теорія споруд, № 89, 2012. – С.143-157.
8. *Пискунов С.О.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С. О. Пискунов, І. І. Солодей, Ю. В. Максим'юк, А. Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип. 91. – С. 59-75.
9. *Сахаров А. С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислюцкий, В. В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
10. *Толок В.А., Кравченко А.А., Щурин В.А., Кибец Ю.И.* К автоматизации программирования и исследования задач прочности ЭВМ – В сб. «Прикладные проблемы прочности и пластичности». Вып. 1, Горький, 1975.
11. *Толок В.А., Щурин В.А.* Вопросы реализации метода конечных элементов на ЭВМ– В сб. «Метод конечных элементов в строительной механике», Горький, 1975.
12. *Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Analysis of thin and thin shells structures by curved finite elements Int. J. Num. Meth. in Eng. V.2, 1970, N3.

REFERENCES

1. *Adyasova N.M.* Isledovaniya uprugoplasticheskogo povedeniya sostavnoy osesimmetrichnoy konstruktssii s pomoshchyu kombinatsii konechnykh elementov razlichnoy mernosti – V sb. «Metod konechnykh elementov v stroitelnoy mehanike», Gorkiy, 1975.
2. *Adyasova N.M., Kapustin S.A.* Issledovanie uprugoplasticheskikh sostavnykh konstruktssiy MKE – V sb. «Prikladnyye problemyi prochnosti i plastichnosti». Vyip. 2, Gorkiy, 1975.
3. *Adyasova N.M., Kapustin S.A., Yablonko L.S.* Nekotoryye voprosy rasheta nelineynykh sostavnykh konstruktssiy – V sb. «Prikladnyye problemyi prochnosti i plastichnosti». Vyip. 1, Gorkiy, 1975.
4. *Bazhenov V. A.* Nelineynye deformuvannya ta stilykIst pruzhnykh obolonok neodnorodnoyi strukturi / V. A. Bazhenov, O. P. Krivenko, M. O. Solovey.– K. : ZAT «Vipol», 2010. – 315 s.
5. *Galiev K.S., Gordon L.A., Rozin L.A.* O postroenii universalnoy matritsyi zhestkosti v MKE. «Izvestiya VNIIG», 1974, t. 105.
6. *Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D.* K rashetu napryazhennogo sostoyaniya tolstostennykh neodnorodnykh anizotropnykh obolochek. Prikladnaya mehanika, «naukova dumka», 1974, #5.

7. *Gulyar O.I., Solodey I.I., Piskunov S.O., Maksim'yuk Yu.V.* EfektivnIst MSSE v zadachah zginu ta z kontsentratorami napruzhen // OpIr materIalIv I teorIya sporud, # 89, 2012. – S.143-157.
8. *Piskunov S.O.* OsoblivostI vikoristannya momentnoYi shemi skInchenih elementIv (MSSE) pri lInIylnih rozrahunkah obolonok I plastin / S. O. Piskunov, I. I. Solodey, Yu. V. Maksim'yuk, A. D. Solodenko // OpIr materIalIv I teorIya sporud. 2013. – Vip. 91. – S. 59 75.
9. *Saharov A. S.* Metod konechnyih elementov v mehanike tverdyyih tel / A. S. Saharov, V. N. Kislookiy, V. V. Kirichevskiy. – K. : Vischa shk., 1982. – 480 s.
10. *Tolok V.A., Kravchenko A.A., Schurin V.A., Kibets Yu.I.* K avtomatizatsii programirovaniya i issledovaniya zadach prochnosti EVM – V sb. «Prikladnyie problemyi prochnosti i plastichnosti». Vyip. 1, Gorkiy, 1975.
11. *Tolok V.A., Schurin V.A.* Voprosyi realizatsii metoda konechnyih elementov na EVM– V sb. «Metod konechnyih elementov v stroitelnoy mehanike», Gorkiy, 1975.
12. *Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.* Analysis of thin and thin shells structures by curved finite elements Int. J. Num. Meth. in Eng. V.2, 1970, N3.

Максимиук Ю.В.

РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Получены расчетные соотношения моментной схемы конечных элементов универсального конечного элемента, которые позволяют определять напряженно-деформированное состояние не только массивных и тонкостенных тел, но и осесимметричных объектов сложной структуры, объединяющих массивные и тонкостенные элементы, с единых позиций пространственной задачи теории упругости. На основе решения контрольных примеров, доказана достоверность результатов, полученных на основе универсального конечного элемента и показана его эффективность при расчете тел сложной структуры.

Ключевые слова: моментная схема конечных элементов, универсальный конечный элемент, массивные и тонкостенные тела, осесимметричные объекты сложной структуры.

Maksymiuk Y.V.

THE CALCULATED RATIO OF UNIVERSAL FINITE ELEMENT BASED ON MOMENT SCHEMES OF FINITE ELEMENTS

The calculated ratio of moment sheme of finite elements for universal finite element is obtained. It allows to determine the stress-strained state not only of massive and thin bodies, but axisymmetric objects and complex structure, combining massive and thin elements with one voice of spatial elasticity problem. On the basis of the control examples solution the reliability of the results, obtained on the basis of universal finite element, and the efficiency of use for combine structure objects was proven.

Keywords: moment sheme of finite elements, universal finite element, massive and thin body, axially symmetric objects of combine structures.

МІЖНАРОДНИЙ СЕМІНАР

«Застосування ПОК SCAD в учбовому процесі та проектуванні»

22–23 жовтня 2015 р. в Київському національному університеті будівництва і архітектури відбувся міжнародний семінар «Застосування ПОК SCAD в учбовому процесі та проектуванні». В роботі семінару взяли участь представники Технічного університету ім. Гідемінуса (Литва), Технічного університету ім. Костюшко (Польща), Київського національного університету будівництва і архітектури, Криворізького національного університету, Національного транспортного університету, Одеської державної академії будівництва і архітектури, Allbau Software GmbH (Представництво в Україні), Megaline, Tekla Company (Представництво в США), ГПРОЦИВІЛЬПРОМБУД, ГПРОКОКС, УКРГПРОМЕЗ, Метротоннельпроект, НиколаевАгропроект, ХАРЬКОВСТАЛЬПРОМ, Южгипрониавиапром, АТ АРКАДА, НВТОВ СКАД, ПАТ КІЕП, ПАТ Укрспецтоннельпроект, ПАТ «УКРНЕФТЕХИМПРОЕКТ», ПП «Универсалинжиниринг», ТДВ «Институт «Стройремпроект», ТОВ «БК-Центр», ТОВ «Гідроінжинірінг», ТОВ Егуаль, ТОВ «ЗЕРНОВАЯ СТОЛИЦА-ИНЖИНИРИНГ», ТОВ «Імперія води Україна», ТОВ Лира-софт, ТОВ «Спецстроймонтаж-Украина», ТОВ «ТрансСтройКомплекс».

На семінарі були заслухані доповіді, присвячені організації будівельного процесу на основі технології інформаційного моделювання будівель (BIM), програмному забезпеченню Tekla, інформаційним технологіям в будівництві, використанню SCAD Office при розрахунках будівель і гідротехнічних споруд, рішенням BIM з Німеччини, автоматизованому формуванню розрахункової моделі будівлі із монолітного і збірного залізобетону для SCAD в системі Allplan, армуванню за результатами розрахунку SCAD в Allplan, автоматизованій системі перевірки якості моделі Allcheck і взаємодії учасників проектування на основі хмарної платформи BIM+, особливостям реалізації і новим можливостям SCAD Office версії 21.1, новим можливостям SCAD ++ при експертизі і розрахунках елементів залізобетонних і сталевих конструкцій, оцінці депланаций перерізів, що примикають до вузлів, і розподілу бімоментів у тонкостінних стрижневих системах, чисельному моделюванню з використанням комплексу SCAD++, програмному комплексу SCAD Office як частині курсу «Системи автоматизованого проектування у будівництві», особливостям викладання та практичним навичкам, електронному підручнику «Будівельна механіка», можливостям Tekla Structure для проектування і виробництва металевих і залізобетонних конструкцій, використанню три- і чотири- вузлових оболонкових скінченних елементів для аналізу несучої здатності залізобетонних конструкцій.

Е.З. Криксунов, П.П. Лізунов

Перельмутер В.А. Беседы о строительной механике

Москва, SCAD Soft. Издательство ассоциации строительных вузов. 2014, 252 с.



Книга, яка має підзаголовок «Короткий курс для підвищення кваліфікації», містить розділи присвячені основам статки і кінематики твердого тіла, методу скінчених елементів та нелінійним задачам будівельної механіки, питанням стійкості та динамічного аналізу конструкцій. У книзі обговорюються деякі принципові питання сучасної будівельної механіки, які є важливими для коректного використання сучасних скінчено елементних програмних засобів. Метою книги є поглиблене викладення основ тих методів, які використовуються в розрахункових програмах з акцентом на аналіз основних передумов і пояснення фізичного сенсу розрахункових операцій. Зважаючи на це, книга не розрахована на студентів, які тільки приступили до вивчення курсу будівельної механіки, а орієнтована на інженерів-будівельників, які вивчали університетський курс будівельної механіки і мають бажання покращити свою підготовку. Книга також може бути рекомендована аспірантам і магістрантам будівельних вузів і служити для них навчальним посібником.

ЗМІСТ

До 50-річчя науково-технічного збірника «Опір матеріалів і теорія споруд»	3
<i>Лобанов Л.М., Пивторак В.А., Савицкий В.В., Пащин Н.А.</i> Определение и регулирование остаточных напряжений с применением локального импульса тока высокой плотности	10
<i>Перельмутер А.В.</i> Формулировка задачи устойчивости для наращиваемой конструкции	19
<i>Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Аслами М., Негрозов О.А.</i> О развитии корректных дискретно-континуальных методов многоуровневого расчета конструкций	28
<i>Ulitinasa T., Kalantab S., Blaževičius G., Atkočiūnasd J.</i> Analysis of Ultimate Limit Load of Spherical Shells Applying von Mises Yield Criterion	49
<i>Харченко В.В., Чирков О.Ю., Кобельський С.В., Кравченко В.І.</i> Розвиток методології розрахунку на опір руйнуванню елементів обладнання АЕС	59
<i>Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Карнаухова Т.В.</i> Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок	75
<i>Limarchenko O.S., Limarchenko V.O., Majid M., Timokhin A.P.</i> Applied problems of dynamics of pipelines, conveying liquid	96
<i>Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкриль О.О., Романцова К.С.</i> Моментна схема МСЕ для кругового скінченного елемента	107
<i>Solodey I.I., Vabishevich M.O., Sizevych B.I., Cherpurna O.O.</i> Effectiveness of semi-analytical finite element method in the numeric analysis of deformation of non-homogeneous 3D constructions subject to initial deviation of form	119

<i>Semenuk M.P., Trach V.M., Podvornyi A.V.</i> Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement	126
<i>Гуляєв В.І., Гайдайчук .В.В, Шевчук Л.В.</i> Комп'ютерне моделювання стійкості коливань кружляння колонн глибокого буріння	139
<i>Фиалко С.Ю.</i> О параллельных решателях в конечноэлементных программных комплексах, ориентированных на многоядерные компьютеры с общей оперативной памятью	155
<i>Марчук О.В., Рассказов О.О., Гнедаш С.В., Левківський С.А.</i> Аналіз напружено-деформованого стану товстостінних анізотропних циліндричних оболонок, схильних до локального впливу	172
<i>Алявдин П.В.</i> Самоупрочняющиеся конструктивные системы	186
<i>Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Островский К.И., Новиков П.И.</i> Адаптивные КЭ-модели в основе систем мониторинга несущих конструкций уникальных зданий	202
<i>Львов Г.І., Огороков В.О.</i> Моделювання пошкоджуваності матеріалу при циклічному пружно-пластичному деформуванні	217
<i>Ясній П.В., Піндус Ю.І., Фостик В.Б.</i> Оцінка мінімальної швидкості росту втомної тріщини після перевантажень розтягуванням-стиском з урахуванням асиметрії циклу навантаження	231
<i>Максим'юк Ю.В.</i> Розрахункові співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів	244