

ISSN 2410-2547

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# **ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**

---

## **STRENGTH OF MATERIALS AND THEORY OF STRUCTURES**

Науково-технічний збірник  
Scientific-and-technica collected articles

---

Випуск 95

Заснований у 1965 р.

КИЇВ 2015

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Головний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник головного редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*П.В. Алявдін*, д-р техн. наук (Польща)  
*Ю. Аткичунас*, д-р техн. наук (Литва)  
*О.М. Белостоцький*, д-р техн. наук (Росія)  
*І. Елішаков*, д-р техн. наук (США)  
*С.Н. Кривошапко*, д-р техн. наук (Росія)  
*С.Ю. Фіалко*, д-р техн. наук (Польща)  
*Чан Дик Тінг*, д-р техн. наук (В'єтнам)  
*Л.М. Лобанов*, д-р техн. наук, академік  
НАН України

*А.В. Перельмутер*, д-р техн. наук  
*Ю.В. Верюжський*, д-р техн. наук  
*О.Ф. Дащенко*, д-р техн. наук  
*П.В. Ясній*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*Г.М. Іванченко*, д-р техн. наук  
*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*І.І. Солодей*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури.

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 95 / Голов. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2015. – 189 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталях і змінних у часі навантажень, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробничників, докторантів, аспірантів та студентів.

Індексація і партнери



<http://opir.knuba.edu.ua/>  
Адреса редакційної колегії:  
КНУБА, Повітрофлотський пр., 31.  
м. Київ, 03037  
Тел.: (044) 248-3040  
E-mail: [omtc@knuba.edu.ua](mailto:omtc@knuba.edu.ua)

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61  
© КНУБА, 2015

UDC 539.3

## DYNAMIC BEHAVIOUR OF NONLINEAR NONSMOOTH DISCONTINUOUS VIBROIMPACT SYSTEM

**V.A. Bazhenov<sup>1</sup>**Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the Ukraine National Academy of  
Pedagogical Sciences**O.S. Pogorelova<sup>1</sup>**

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

**T.G. Postnikova<sup>1</sup>**

Candidate of Engineering Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

*<sup>1</sup>Kyiv National University of Construction and Architecture*

Authors shortly describe the problem state about studying of discontinuous vibroimpact systems dynamical behaviour. Recently the investigations of such systems are developed rapidly. There is survey of world scientific literature about this problem. Information and description of an International Conference on Nonlinear Dynamics Complexity is given. Authors show owns the most spectacular results demonstrating the phenomena unique for nonsmooth systems describing by differential equations with discontinuous right-hand side. These results were obtained by numerical parameter continuation method.

**Keywords:** vibro-impact system, discontinuous, conference, parametric continuation technique, instability, monodromy matrix, multipliers, bifurcation points

### 1. Introduction

Vibroimpact machines and equipment are often encountered in many engineering practice applications. Therefore their dynamic behavior is studied very intensively now. Big attention is paid to investigate stability in systems with impacts, periodic motions, bifurcations, singularities at vibroimpact dynamics [1-10].

Vibroimpact system is strongly nonlinear one and is the system with discontinuous right-hand side. Many dynamical systems arising in applications are non-smooth; examples include the occurrence of impacting motion in mechanical systems. Many new phenomena unique to non-smooth systems are observed under variation of system parameters. Jumps and switches in a system's state represent the grossest form of nonlinearity [11].

Recently the investigations of such systems are developed rapidly. At 2002 Professor Liene R.I. [12] wrote: "During the last decades many textbooks about bifurcation theory for smooth systems appeared and bifurcations of smooth vector fields are well understood [13]. However, little is known about bifurcations of discontinuous vector fields." At 2012 Professor Ivanov A.P. [14] already said that there were considerable publication numbers about bifurcations in non-smooth systems. He referred to survey [15] and monograph [11] by Prof. di Bernardo M..

In general there were the numerical investigations which constructed phase portraits for different parameters values.

Professors Liene [16] and di Bernardo M. [17] divide discontinuous dynamical systems into three types according to their degree of discontinuity. There are among them Filippov systems and the impacting systems with velocity reversals.

In review [15] three classes of systems are considered, involving either state jumps, jumps in the vector field or jumps in some derivative of the vector field. In this work there is the explanation of dynamics that may be observed in simulations of systems which include friction oscillators, impact oscillators, DC-DC converters, and problem in control theory. Authors note that in recent years there has been significant progress in identifying, classifying, unfolding and applying novel kinds of bifurcations that are unique to nonsmooth systems.

In [11] authors say that it has become increasingly clear that there are distinctive phenomena unique to discontinuous systems, which can be analyzed mathematically but fall outside the usual methodology for smooth dynamical systems. This book introduces a similar qualitative theory for non-smooth systems. Authors propose general techniques for analyzing the bifurcation that are unique to non-smooth dynamical systems, so-called discontinuity-induced bifurcations (DIBs). Authors give a consistent classification of all known DIBs for piecewise-smooth continuous-time dynamical systems (flows), including such diverse phenomena as sliding, chattering, grazing and corner collision.

The paper [17] proposes a strategy for the classification of codimension-two grazing bifurcations of limit cycles in piecewise-smooth systems of ordinary differential equations.

In [12,16] discontinuous systems of the Filippov type were studied. Authors explain how jumps in the fundamental solution matrix lead to jumps of the Floquet multipliers of periodic solutions. A Floquet multiplier of a discontinuous system can jump through the unit circle causing a discontinuous bifurcation when a parameter of the system is varied. Discontinuous bifurcations come into being through jumps of the fundamental solution matrix. Discontinuous bifurcation is a novel, nonclassical type of bifurcation.

In contemporary monograph [5] authors pay big attention to investigation of discontinuous dynamical systems which extensively exist in engineering. In mechanical engineering there are two common and important contacts in dynamical systems, that is, impact and friction. The theory of discontinuous dynamical systems is presented as a base from which to study vibro-impact dynamics in engineering. In this book, a systematic way is developed through a few simple vibro-oscillators in order to understand the physics of vibro-impact systems in engineering.

In comprehensive works [18,19] dynamics of impacting systems is reviewed in depth. These works are devoted to study of rigid multi-body mechanical systems subject to nonsmooth effects, such as impacts, Coulomb friction, constraints addition and deletion.

In [20] author studies the dynamics of piecewise-smooth (PWS) systems. Of his particular interest are hybrid PWS. This class of dynamical systems can exhibit a rich bifurcation scenario involving the occurrence of both classical bifurcations (saddle-node, period-doubling, etc.) and so-called discontinuity-induced bifurcations (DIBs). DIBs are unique to piece-smooth dynamical systems. He writes that in impacting systems the most notable type of DIB is the grazing bifurcation of a limit cycle, observed when, under parameter variations, a limit cycle becomes tangential to the system discontinuity manifold. In [21] have been shown that grazing bifurcations are associated to a wide range of dynamical transitions including nonsmooth folds and sudden transitions from periodic to chaotic behavior. The study of the system was performed by combining experimental, numerical and analytical procedures that allowed to unveil the coexistence between a classical period-doubling route to chaos and a novel discontinuity-induced bifurcation phenomenon generated at interruption of a periodic complete-chattering motion.

In [14] author considers dynamical systems with discontinuous right-hand side. A method of stepwise is proposed allowing the reduction of discontinuous bifurcations to a sequence of typical bifurcations: saddle-node, period-doubling and Hopf bifurcations.

At our works we apply the numerical parameter continuation method in order to study dynamic behaviour and periodic motions stability for specific discontinuous vibroimpact system, to find the bifurcation points. We use parametric continuation technique in conjunction with shooting and Newton-Raphson methods [22].

We have watched the phenomena unique for nonsmooth discontinuous system under considering specific two-body two-degree-of-freedom vibroimpact system with discontinuous right-hand side. We have observed discontinuous bifurcation points where set-valued Floquet multipliers cross the unit circle by jump. At these points monodromy matrix is changed by jump too. We also have observed chattering regimes leading to chaos [23,24].

These results were the contents of our contribution into an International Conference on Nonlinear Dynamics Complexity [25]. Below at section 3 we'll show the most spectacular results.

## 2. Information about an International Conference on Nonlinear Dynamics Complexity

In May 2015 during 5 days there was an International Conference on Nonlinear Dynamics Complexity in Spain. The Conference was small but very interesting. There were 40 reports. Many of them were made at high scientific level. The Conference was represented by scientists from many countries: Spain, Germany, Egypt, Mexico, Turkey, Poland, China, France, India, Russia, Algeria, USA, Romania, Ukraine, UK, Portugal, and Brazil. Ukraine was represented by our talk “Bifurcation Points under 2-DOF Vibroimpact System Moving. Numerical Analysis by Parameter Continuation Method” by V.A.Bazhenov, P.P.Lizunov, O.S.Pogorelova, T.G.Postnikova. (Fig. 1).

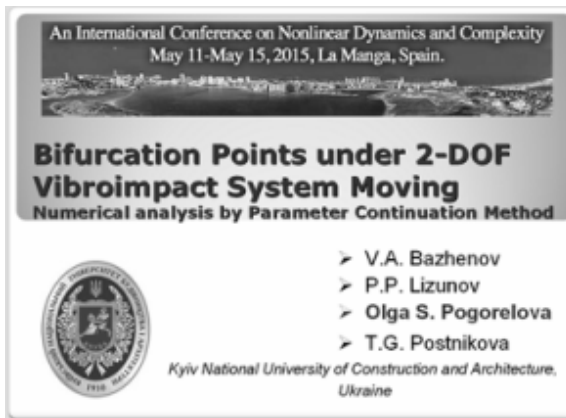


Fig. 1

There were two well talks from Russia. There were two scientists who had lived in USSR before but now they represented other countries (Mexico and Turkey).

The General chair of Organizing Committee was Full Professor of Applied Mathematics from Universidal Politecnica de Cartagena Juan Luis Garcia Guirao. The Co-Chair of Organizing Committee was Professor of Southern Illinois University (USA) Albert C.J. Luo. Note that Professor Albert C.J.Luo and Coordinator Professor of ISEP-Institute of Engineering of Porto (Portugal) J.A. Tenreiro Machado are Editors of “Journal of Applied Nonlinear Dynamics”. We want to note by the way that Professor Albert Luo did not omit single report during conference. There is photo of participants near Universidal Politecnica de Cartagena (Fig.2). Olga S.Pogorelova, Professor Juan Luis Garcia Guirao, Professor James Yorke (USA), and Professor Mahmoud Abdel-Aty (Egypt) are sitting on the bench. Professor Tenreiro Machado is sitting on

the floor. Professor Albert Luo in blue shirt is standing behind Juan L.G. Guirao.



Fig. 2

At short meeting in Universidal Politecnica de Cartagena President of University and Chief of Department of Applied Mathematics have talked the short speeches and have welcomed the Conference participants. Both of them spoke English freely (Fig 3). The Conference President Juan Luis Garcia Guirao is left.



Fig. 3

Our report was successfully talking by Olga S. Pogorelova (Fig.4). We placed an Ukrainian girl at our last poster. Professor James Yorke asked who this girl is.



Fig.4

There is Certifies about our talk delivering (Fig.5).

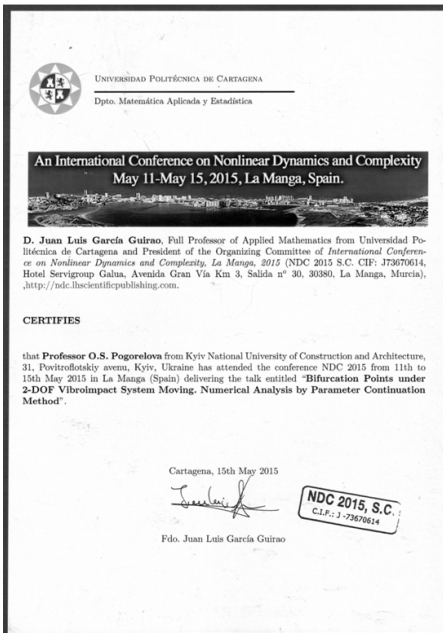


Fig. 5

Professor from Egypt Mahmoud Abdel-Aty delivered the first plenary talk “Multi-Qubit Dynamics Quantum Search Algorithm”. He proposed a new physical scheme for perfect implementation of quantum search algorithm in presence of the dissipation of qubits. Roughly speaking it is an algorithm for evaluation of scientist quality. Is present researcher excellent? He introduces some factors (for example, h-factor and A-factor) for evaluation and calculates them under considering the author’s publications alone and with co-authors, in journals with high impact factor or without it and



so on.

The most participants were mathematicians and their talks about nonlinear dynamics and nonlinear differential equations were mathematical.

Professor Albert Luo and scientists from his school (Professors Yu Guo, USA, Xilin Fu, China, Siyuan Xing, USA) investigate periodic motions of the discontinuous dynamical systems. They have experimental equipment and may to compare analytical and numerical results with experimental ones. At the talk “On Bifurcation trees for period-1 motion to chaos in a periodically forced quadratic nonlinear oscillator with time delay” by Albert C.J.Luo and Siyuan Xing the corresponding stability and bifurcation analysis of periodic motions are completed through eigenvalue analysis. From the analytical prediction, numerical results of periodic motions in the time-delayed quadratic nonlinear systems are illustrated.

Professor James A.Yorke, USA, is very famous serious scientist. He is very picturesque man. He is elderly man of 73 years old with big grey beard. Every day including the day of his talking and the day of conference banquet he was wearing shorts and red long socks. He overturned his name badge and wrote by hand “Jim Yorke”. His talk “Chaos in higher dimensions” was very bright and rich. The title of one his poster was “It is the nature of chaotic systems to surprise”. He gave very obvious picture of three typical recurrent motions: chaotic, quasiperiodic, periodic, such as at Fig. 6.

In general the western scientists like free and picturesque style in their oral and written speeches. They devote scientific monographs to their wives, daughters and mothers. In his famous monograph [13] Professor Seydel names one section as “The Art and Science of Parameter Study”. He writes that “it is not always sufficient to rely on numerical methods only. To find all the branches good luck is also needed.” Now when we investigate the periodic motion stability, find bifurcation points by numerical parameter continuation method we always say that we have found so many different branches as good luck allowed us. Professor Enrique Ponce, Spain, is serious mathematician. At his talking he considered the false Fillippov systems, discontinuous piece-wise systems. His talk had the title “The boundary Focus in Planar Fillippov Systems: a

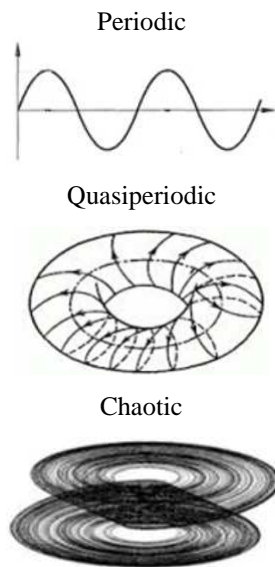


Fig. 6

Wolf in Sheep's Clothing". He often used the words: hunting, the wolf is coming and so on. Even the method of periodic solutions construction for nonlinear differential equations is called as shooting method for a long time.

At once the next day after conference we have received two invitations to submit our unpublished papers to American journals.

### 3. Examples of the phenomena unique for non-smooth discontinuous systems

Now we'll show the most spectacular results of our investigation. These results obviously show the phenomena unique for non-smooth discontinuous systems. Our vibroimpact system is exactly such one. These results were represented in our talk at Conference. Here we show our posters. All pictures illustrate the discontinuous bifurcation points on frequency-amplitude response that is under excitation frequency varying. At Fig.7 we show how two complex conjugate Floquet multipliers  $\mu_1$  and  $\mu_2$  are leaving the unit circle at discontinuous bifurcation point  $B$ . They are experiencing a discontinuous change by jump and accepting big values.

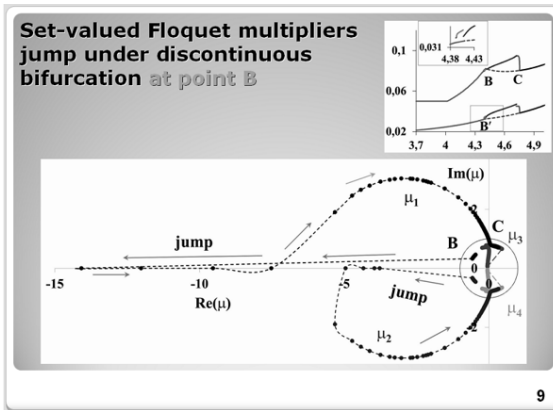


Fig. 7. Poster 9

At Fig. 8 one can see the jump of monodromy matrix and Floquet multipliers at this point  $B$ .

We have observed several different chattering regimes. Chatter (or rattle) is oscillatory regime with large period ( $nT$ -periodic regime where  $T$  is excitation period,  $n$  is sufficiently big number) with big impacts quantity per cycle. At non-smooth systems chattering regimes often lead to chaos. At Fig. 9 we depict the Poincare sections for such regimes under close excitation frequency.

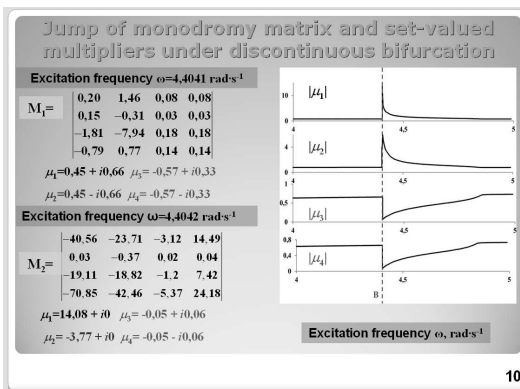


Fig. 8. Poster 10

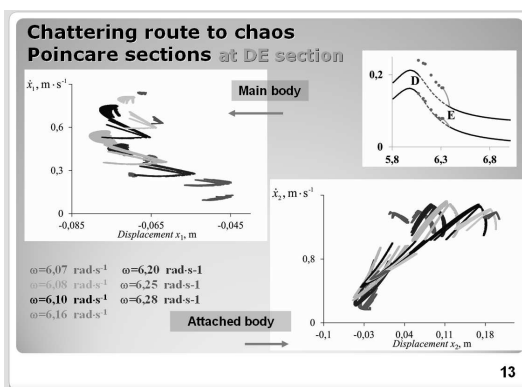


Fig. 9. Chattering route to chaos (Poster 13)

At Fig. 10 the point  $M$  of frequency-amplitude response is the turning point. At this point Floquet multiplier  $\mu_1$  passes through the unit circle over the  $+1$  and moves along the positive real axis faraway. Its way under  $MN$  unstable regime is shown by flat points at Fig.10. Its velocity in motion along the axis is increasing and we see its appearance less and less often. The multiplier motion along positive real axis is demonstrated by Table at Fig.10. At point  $N$  we observe phenomenon unique to discontinuous system – discontinuous fold bifurcation. The discontinuous fold bifurcation connects a stable branch (solid line) to unstable branch (dotted line). Here set-valued Floquet multiplier  $\mu_1$  is returning (or is leaving) the unit circle by jump.

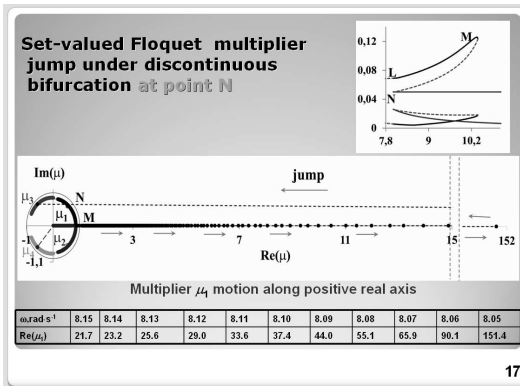


Fig. 10. Poster 17

#### 4. Conclusions

1. The investigations of non-smooth discontinuous systems are very contemporary now and recently are developed rapidly. Therefore authors' researches are very actually.
2. The report told at an International Conference on Nonlinear Dynamics Complexity was successful and was taken into account with big interest. The participation at Conference allowed establishing the business-like and scientific connections.
3. Numerical results are very spectacular and obviously demonstrate the phenomena unique for non-smooth discontinuous system.

#### REFERENCES

1. *Babitsky, V. I.* Theory of vibro-impact systems and applications. – Springer Science & Business Media, 1998.
2. *Ibrahim R. A.* Vibro-impact dynamics: modeling, mapping and applications. – Springer Science & Business Media, 2009. – T. 43.
3. *Stronge W. J.* Impact mechanics. – Cambridge university press, 2004.
4. *Иванов А. П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М. : Междунар. прогр. образования, 1997.
5. *Luo A. C. J., Guo Y.* Vibro-impact dynamics. – John Wiley & Sons, 2012.
6. *Ajibose O. et al.* Influence of contact force models on the global and local dynamics of drifting impact oscillator //Proceedings of the 8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM'08) and 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS'08).–2008. – 2008.
7. *Foale S., Bishop S. R.* Bifurcations in impact oscillations //Nonlinear Dynamics. – 1994. – T. 6. – №. 3. – С. 285-299.
8. *Toulemonde C., Gontier C.* Sticking motions of impact oscillators //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 1998. – T. 17. – №. 2. – С. 339-366.

9. *Blazejczyk-Okolewska B., Czolczynski K., Kapitaniak T.* Dynamics of a two-degree-of-freedom cantilever beam with impacts //Chaos, Solitons & Fractals. – 2009. – Т. 40. – №. 4. – С. 1991-2006.
10. *Peterka F.* An investigation of the motion of impact dampers, paper I, II, III //Strojnicku Casopis XXI, c. – 1971. – Т. 5.
11. *Bernardo M. et al.* Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications. – Springer Science & Business Media, 2008. – Т. 163.
12. *Leine R. I., Van Campen D. H.* Discontinuous bifurcations of periodic solutions //Mathematical and computer modelling. – 2002. – Т. 36. – №. 3. – С. 259-273.
13. *Seydel R.* Practical bifurcation and stability analysis. – Springer Science & Business Media, 2009. – Т. 5.
14. *Ivanov A. P.* Analysis of discontinuous bifurcations in nonsmooth dynamical systems //Regular and Chaotic Dynamics. – 2012. – Т. 17. – №. 3-4. – С. 293-306.
15. *Di Bernardo M. et al.* Bifurcations in nonsmooth dynamical systems //SIAM review. – 2008. – С. 629-701.
16. *Leine R. I., Van Campen D. H.* Discontinuous bifurcations of periodic solutions //Mathematical and computer modelling. – 2002. – Т. 36. – №. 3. – С. 259-273.
17. *Kowalczyk P. et al.* Two-parameter discontinuity-induced bifurcations of limit cycles: classification and open problems //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2006. – Т. 16. – №. 03. – С. 601-629.
18. *Brogliato B.* Nonsmooth mechanics: models, dynamics and control. – Springer Science & Business Media, 1999.
19. *Brogliato B.* Impacts in mechanical systems: analysis and modelling. – Springer Science & Business Media, 2000. – Т. 551.
20. *Alzate R.* Analysis and Application of Bifurcations in Systems with Impacts and Chattering : дис. – Università degli Studi di Napoli Federico II, 2008.
21. *Bernardo M. et al.* Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications. – Verlag,UK, 2007.
22. *Bazhenov V. A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Modification of the One-Parameter Numerical Continuation Method for Analysis of the Dynamics of Vibroimpact Systems //Strength of Materials. – 2014. – Т. 46. – №. 6. – С. 801-809.
23. *Bazhenov V. A., Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Otrasheskaia V.V.* Stability and Bifurcations Analysis for 2-DOF Vibroimpact System by Parameter Continuation Method. –of Applied Nonlinear Dynamics. – 2015. – Т. 4. – №. 4. (in press)
24. *Bazhenov V. A., Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Numerical Bifurcation Analysis of Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System. Part 2: Frequency-Amplitude response //Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2016. (in press).
25. *Bazhenov V. A., Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Bifurcation Points under 2-DOF Vibroimpact System Moving Numerical analysis by Parameter Continuation Method // Proceedings of the International Conference on Nonlinear Dynamics and Complexity (NDC2015). – 11-15 May 2015. – La Manga del Mar Menor, Spain.

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.*

### **ДИНАМІЧНА ПОВЕДІНКА НЕЛІНІЙНОЇ НЕГЛАДКОЇ РОЗРИВНОЇ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ**

Автори коротко описують стан проблеми вивчення динамічної поведінки розривних віброударних систем. В даний час дослідження таких систем розвиваються дуже швидко. Наводиться огляд світової наукової літератури про цю проблему. Міститься також інформація та опис Міжнародної Конференції про Нелінійну Динаміку Складних Структур. Автори показують власні найбільш ефектні результати, які демонструють явища унікальні для негладких систем, що описані диференціальними рівняннями з розривною правою частиною. Ці результати були отримані чисельним методом продовження розв'язку за параметром.

**Ключові слова:** віброударна система, розривна, конференція, методика продовження за параметром, нестійкість, матриця монодромії, мультиплікатори, точки біфуркації

### **ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕГЛАДКОЙ РАЗРЫВНОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ**

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.*

Авторы кратко описывают состояние проблемы изучения динамического поведения разрывных виброударных систем. В настоящее время исследования таких систем развивается очень быстро. Приводится обзор мировой научной литературы по этой проблеме. Дана информация и описание Международной Конференции по Нелинейной Динамике Сложных Структур. Авторы показывают свои результаты, демонстрирующие явления уникальные для негладких систем, описанных дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Эти результаты были получены численным методом продолжения решения по параметру.

**Ключевые слова:** виброударная система, разрывная, методика продолжения по параметру, неустойчивость, матрица монодромии, мультипликаторы, точки бифуркации

UDC 539.3

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* **Dynamic behaviour of nonlinear nonsmooth discontinuous vibroimpact system** // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2015. – Issue. 95 (00). – P. 3 – 15.

*The problem state about studying of discontinuous vibroimpact systems dynamical behaviour is described, information about an International Conference on Nonlinear Dynamics Complexity (NDC2015) is given.*

Table 0. Fig. 10. Ref. 25

УДК 539.3

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* **Динамічна поведінка нелінійної негладкої розривної віброударної системи** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 95 (00). – С. 3 – 15.

*Розглядається стан проблеми вивчення динамічної поведінки розривних динамічних систем, наводиться інформація щодо Міжнародної Конференції про Нелінійну Динаміку Складних Структур (NDC2015).*

УДК 539.3

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* **Динамическое поведение нелинейной негладкой разрывной виброударной системы** // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вып. 95 (00). – С. 3 – 15.

*Рассматривается состояние проблемы изучения динамического поведения разрывных виброударных систем, приводится информация о Международной Конференции по Нелинейной Динамике Сложных Структур (NDC2015).*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, зав. кафедрою будівельної механіки КНУБА, директор НДІ будівельної механіки КНУБА БАЖЕНОВ Віктор Андрійович  
**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу  
**Адреса домашня:** 01001 м. Київ, вул. Заньковецької, б. 5/2, кв. 31. БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу.  
**Роб. тел.** +38(044) 245-48-29.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки ПОГОРЕЛОВА Ольга Семенівна  
**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПОГОРЕЛОВІЙ Ользі Семенівні.  
**Адреса домашня:** 02147 Україна, м. Київ, вул. Русанівська Набережна 18, кв. 61, ПОГОРЕЛОВІЙ Ользі Семенівні  
**Роб. тел.** +38(044) 245-48-29;  
**мобільний тел.:** +38(067) 606-03-00;  
**дом. тел.:** +38(044) 517-25-08.  
**E-mail** – [pogos13@ukr.net](mailto:pogos13@ukr.net)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки ПОСТНІКОВА Тетяна Георгіївна  
**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПОСТНІКОВІЙ Тетяні Георгіївні.  
**Адреса домашня:** 04210, Україна, м. Київ, пр. Героїв Сталінграду 24, кв. 17, ПОСТНІКОВІЙ Тетяні Георгіївні  
**Роб. тел.** +38(044) 245-48-29;  
**мобільний тел.:** +38(050) 353-47-19;  
**дом. тел.:** +38(044) 411-46-56.  
**E-mail** – [posttan@ukr.net](mailto:posttan@ukr.net)

УДК 539.4

## РОЗВИТОК ЗМІШАНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ

**О.Ю. Чирков<sup>1</sup>**

д-р. техн. наук, ст. наук. співр.

<sup>1</sup> *Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Київ, Україна*

Розвинуто загальну теорію змішаних схем метода скінченних елементів для розв'язання крайових задач термомеханіки неоднорідних середовищ, зокрема, нелінійних задач, що описують неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування за криволінійними траєкторіями малої кривизни. Із застосуванням апарату функціонального аналізу досліджено коректність змішаних проєкційно-сіткових алгоритмів і на цій основі сформульовано умови, що забезпечують стійкість та збіжність змішаної апроксимації для напружень, деформацій і переміщень. Встановлено, що змішаний метод призводить до більш точних розрахункових розподілів напружень і деформацій порівняно із класичним методом переміщень. Побудовано спеціальні скінченні елементи, що забезпечують стійкість та збіжність запропонованих змішаних апроксимацій. Отримано систему розв'язувальних рівнянь змішаного методу з урахуванням точного задоволення статичним межовим умовам на поверхні тіла, для розв'язання яких запропоновано економічні та стійкі кроково-ітераційні обчислювальні алгоритми.

**Ключові слова:** метод скінченних елементів, неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування, змішана схема метода скінченних елементів.

Загальновідомо, що прикладні задачі термомеханіки неоднорідних середовищ належать до найбільш складних у математичній фізиці, розв'язання яких, як правило, досягається за допомогою наближених методів розрахунку. У той же час відомі чисельні методи механіки деформованого тіла можуть виявитися недостатньо точними і ефективними для розв'язання практичних задач, тому що велика розмірність дискретної задачі, а також раптова змінність фізико-механічних властивостей матеріалу і їх суттєва нелінійність можуть призвести до втрати стійкості або порушення збіжності обчислювальних процесів. Через це виникає необхідність розроблення більш досконалого апарату проведення розрахункових досліджень, що містить удосконалені методи та алгоритми розв'язання прикладних задач термомеханіки.

Нині найбільш універсальним методом розв'язання крайових задач термомеханіки є метод скінченних елементів (МСЕ). Ефективність МСЕ мало залежить від конфігурації тіла, характеру межових умов, закону змінення властивостей середовища і зовнішнього впливу на тіло. Найбільш дослідженими і поширеними в даний час є класичні схеми МСЕ у переміщеннях, що відображено у великій кількості публікацій закордонних і вітчизняних авторів.



Вказуючи на переваги класичного МСЕ, необхідно враховувати також його недоліки. До найбільш суттєвих з них належать розривна апроксимація напружень і деформацій, а також більш низький порядок збіжності апроксимації для напружень і деформацій порівняно з таким для переміщень. У той же час напруження зазвичай є основними шуканими функціями у задачах механіки деформованого тіла і, відповідно, їх визначають із достатньо високим ступенем точності.

Традиційні підходи щодо підвищення точності шляхом збільшення щільності скінченно-елементного розбиття або переходу до більш складних скінченних елементів не завжди ефективні навіть для лінійних задач. Для нестационарних і нелінійних тривимірних задач термомеханіки вони практично не прийнятні, тому що збільшення порядку розв'язуваної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь і велика кількість часових кроків та ітерацій призводять до суттєвого зростання обчислювальних витрат. Тому перспективним у чисельному аналізі задач механіки деформованого тіла є застосування змішаних формулювань МСЕ, в яких напруження і деформації входять у розв'язувальні рівняння поряд з переміщеннями як рівноправні невідомі. Саме такі формулювання МСЕ розглянено у даній роботі.

У задачах теорії пружності і пластичності основна перевага використання змішаних формулювань МСЕ щодо класичного підходу МСЕ у формі методу переміщень полягає у зменшенні похибки апроксимації для напружень і деформацій, а також можливості побудови розв'язків для напружень з врахуванням точного задоволення статичним межовим умовам на частині поверхні тіла. Ще одна важлива перевага полягає в тому, що змішані схеми МСЕ дозволяють забезпечити неперервність апроксимації не тільки для переміщень, але й для напружень і деформацій, тоді як класичні схеми МСЕ призводять до розривної апроксимації напружень і деформацій.

Початкові передумови для побудови змішаних формулювань МСЕ можуть бути різними. Нині можна виділити три підходи, що мають загальні характерні особливості. Перший ґрунтується на використанні варіаційних принципів механіки, згідно з якими розв'язання крайової задачі зводиться до знаходження стаціонарного значення деякого функціоналу за відповідними аргументам. Другий підхід базується на подвійно-основному (змішаному) формулюванні крайової задачі виходячи із принципу подвійності. Третій підхід ґрунтується на узагальненому формулюванні крайової задачі та результатах теорії, розробленої Ф.Брезі [1]. За такого підходу розглядають змішане формулювання крайової задачі незалежно від того, одержано воно із задачі про сідлову точку або ні. Загальна теорія і аналіз змішаних та гібридних методів містяться в [1,2]. Деякі за-

стосування змішаних формулювань МСЕ до розв'язання задач теорії пружності і пластичності та їх реалізація описані в [3-9].

Зазначимо, що для дослідження умов існування, єдиності, стійкості і збіжності наближених розв'язків, що отримані на основі змішаного методу, класичні результати аналізу схем МСЕ у переміщеннях непридатні. Необхідні і достатні умови стійкості та збіжності змішаних і гібридних методів сформульовано в [1,2], проте для багатьох практично важливих варіантів змішаних і гібридних схем МСЕ достатні умови не виконуються. У [9] сформульовано менш обмежувальні умови та запропоновано інший шлях доведення коректності та збіжності наближених розв'язків, що одержані на основі змішаного формулювання задач теорії пружності і пластичності.

Отже, незважаючи на те, що змішані формулювання МСЕ виявляються більш гнучкими і універсальними, а відповідні їм схеми МСЕ мають переваги у точності, вони не знайшли на практиці широкого поширення і їх застосування для розв'язання прикладних задач термомеханіки досить обмежене. Сучасні комерційні програмні комплекси орієнтовано в основному на класичний варіант МСЕ і не містять у своїх бібліотеках скінченних елементів змішаного типу, за допомогою яких можна одержати відчутні переваги у точності і ефективності розв'язання двох- і тривимірних задач теорії пружності та пластичності. Це пояснюється труднощами практичного конструювання змішаної апроксимації, що задовольняє умовам стійкості та збіжності змішаного методу. До цього часу не існує придатної для всіх класів задач механіки єдиної методології побудови найкращої змішаної апроксимації для напружень, деформацій і переміщень. У кожному конкретному випадку необхідно ретельно обґрунтувати коректність побудови апроксимувальних функцій та детально аналізувати збіжність у разі їх використання. До того ж залишається важлива для практики задача фактичного знаходження дискретного розв'язку, що пов'язано з розробленням і реалізацією ефективних методів та обчислювальних алгоритмів розв'язання матричних рівнянь змішаного методу.

Далі представлено основні результати аналізу змішаного проекційно-сіткового методу в задачах термомеханіки. Запропоновані змішані схеми та алгоритми МСЕ дозволили підвищити точність і ефективність розв'язання прикладних задач термомеханіки, а також забезпечити отримання стійких і надійних чисельних розв'язків задач зазначеного типу.

Узагальнене представлення крайової задачі термопластичності. Для розрахунку полів напружень, деформацій і переміщень необхідно розв'язати крайову задачу, яку представлено системою диференціальних рівнянь з частковими похідними. Розв'язок зазначеної системи повинен задовольняти кінематичним і статичним межовим умовам на поверхні ті-

ла, а також умовам у початковий момент часу. У разі використання проєкційних і сіткових методів розв'язання крайової задачі її необхідно сформулювати не у формі системи диференціальних рівнянь, а в узагальненому представленні, тобто у вигляді інтегральних тотожностей.

Узагальнене представлення крайової задачі дозволяє знизити вимоги до гладкості шуканого розв'язку, тому що в інтегральні тотожності входять похідні нижчих порядків, ніж в диференціальні рівняння. Вказана обставина суттєво розширює клас допустимих функцій у разі побудови узагальненого розв'язку крайової задачі, а також дозволяє використовувати наближені методи розрахунку, які особливо вдало поєднують сучасні проєкційні і сіткові методи, наприклад метод скінченних елементів.

Вважаємо, що тіло займає область  $\Omega$  у двох- або тривимірному евклідовому просторі і має регулярну межу  $S$ . На частині межі задано переміщення, що унеможлиблюють переміщення  $\Omega$  як жорсткого тіла, а на іншій частині – поверхневі навантаження, щільність яких визначають компоненти  $\rho_i^S(\mathbf{x}, t)$ , де  $\mathbf{x}$  – координати точки,  $t$  – час. Крім того, тіло зазнає впливу нерівномірного температурного поля  $T(\mathbf{x}, t)$ , масових сил  $\rho_i^M(\mathbf{x}, t)$  і початкових деформацій  $\xi_{ij}(\mathbf{x}, t)$ . Вектор переміщень у кожній точці представлено компонентами  $u_i(\mathbf{x}, t)$ , а деформації  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$  і напруження  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  описуються симетричними тензорами другого рангу.

У разі математичного моделювання неізотермічних процесів пружно-пластичного деформування у квазістатичному представленні узагальнену крайову задачу для фіксованого моменту часу можна подати наступною системою рівнянь:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(t) \delta \sigma_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_i(t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(t)}{\partial x_i} \right) \delta \sigma_{ij} d\Omega;$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(t) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} d_{ijkl}(\varepsilon_{ij}(t), \xi_{ij}(t), t) (\varepsilon_{kl}(t) - \xi_{kl}(t)) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega;$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(t) \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_i^M(t) \delta u_i d\Omega + \int_S \rho_i^S(t) \delta u_i dS, \quad (1)$$

де  $\delta \sigma_{ij}$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}$ ,  $\delta u_i$  – довільні неперервні функції, які можна інтерпретувати як варіації напружень, деформацій і переміщень;  $d_{ijkl}$  – компоненти тензора четвертого рангу, що зв'язують компоненти напружень і деформацій рівнянням стану.

Перше рівняння системи (1) відповідає співвідношенням Коші, друге – визначає фізичний закон пружно-пластичного середовища, а третє – забезпечує виконання умов статичної рівноваги тіла у формі варіаційного рівняння Лагранжа.

Зазначимо, що у другому рівнянні системи (1) рівняння стану матеріалу сформульовано не у приростах, а для повних компонентів напружень і деформацій. Для їх отримання необхідно проінтегрувати рівняння пластичного плину Прандлі-Рейсса за етап навантажування. Загальну схему математичних перетворень для побудови множини двошарових схем інтегрування рівнянь пластичного плину, а також формулювання умов, за яких ці рівняння узгоджуються з принципом необоротності роботи на приростах пластичних деформацій і постулатом зміцнення Друкера, наведено в [10].

Вважаємо, що переміщення є елементами множини  $U$ , що складається з вектор-функцій, які інтегруються з квадратом на  $\Omega$  разом зі своїми першими похідними включно і дорівнюють нулю на частини межі тіла. Напруження і деформації будемо розглядати як елементи множини  $L$  тензор-функцій, що інтегруються з квадратом на  $\Omega$ , з нормою, яка асоційована зі скалярним добутком

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})_L = \int_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega.$$

На підставі рівнянь (1) узагальнену крайову задачу можна сформулювати так.

Знайти трійку  $(\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)) \in U \times L \times L$ , таку що

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \delta \boldsymbol{\sigma})_L = (B \mathbf{u}(t), \delta \boldsymbol{\sigma})_L, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma} \in L;$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \delta \boldsymbol{\varepsilon})_L = (D(\boldsymbol{\varepsilon}(t), \xi(t), t) (\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \xi(t)), \delta \boldsymbol{\varepsilon})_L, \quad \forall \delta \boldsymbol{\varepsilon} \in L;$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), B \delta \mathbf{u})_L = \langle \boldsymbol{\rho}(t), \delta \mathbf{u} \rangle, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in U, \quad (2)$$

де  $B$  – лінійний диференційний оператор, тобто оператор обчислення малих деформацій  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  за визначеними переміщеннями  $\mathbf{u}(t)$ ;  $D$  – нелінійний оператор, що зв'язує напруження з деформаційною та тепловою історією;  $\langle \boldsymbol{\rho}(t), \delta \mathbf{u} \rangle$  – лінійна форма, що ототожнюється з роботою повернених навантажень і масових сил на можливих переміщеннях.

Система нелінійних рівнянь (2) визначає узагальнене представлення крайової задачі теорії пластичності щодо переміщень, деформацій і напружень [11].

Зазначимо, що рівняння (2) дозволяють сформулювати узагальнену крайову задачу теорії пластичності у переміщеннях:

$$(D(B\mathbf{u}(t), \xi(t), t) (B\mathbf{u}(t) - \xi(t)), B\delta\mathbf{u})_L = \langle \boldsymbol{\rho}(t), \delta\mathbf{u} \rangle, \quad \forall \delta\mathbf{u} \in U, \quad (3)$$

Застосування рівняння (3) для побудови сіткових схем призводить до класичного формулювання МСЕ у формі методу переміщень [8]. У такому випадку деформації визначаються диференціюванням наближених переміщень, одержаних із розв'язку задачі у переміщеннях, що є основною причиною погіршення збіжності апроксимації для деформацій і напружень порівняно з розрахунком самих переміщень.

Альтернативний підхід полягає у використанні крайової задачі у формі рівнянь (2), за якої деформації і напруження є її безпосередніми аргументами, а не визначаються на основі розв'язання задачі у переміщеннях. Зауважимо, що для континуальних задач теорії пластичності узагальнене представлення у переміщеннях і формулювання крайової задачі щодо переміщень, деформацій і напружень еквівалентні, але узагальнене представлення у формі системи рівнянь (2) є більш гнучким для побудови проекційно-сіткової схеми.

Зазначимо, що у разі практичного використання проекційного методу узагальнений розв'язок рівнянь (2), (3) не обов'язково задовольняє статичним умовам на поверхні тіла, оскільки межові умови для напружень належать до природних і їх враховують у самих рівняннях проекційного методу. Ця обставина значною мірою спрощує побудову пробних (базисних) функцій, тому що їх можна вибирати без врахування статичним межовим умовам на поверхні тіла, що полегшує розв'язок багатьох практично важливих задач, особливо у випадку дво- або тривимірної області зі складною формою межі. Зокрема потрібно враховувати, що точність наближених розв'язків для напружень і деформацій не завжди буде прийнятною, особливо для примежової смуги і на межі області.

Наведемо узагальнене представлення крайової задачі, використання якої для побудови сіткових схем дозволяє одержати наближений розв'язок із врахуванням точної відповідності статичним межовим умовам на частині поверхні тіла. Для цього введемо до розгляду множини можливих тензор-функцій для напружень і деформацій, що задовольняють заданим умовам на межі тіла.

Напруження будемо розглядати як елементи функціональної множини  $Z$ , яка складається із тензор-функцій, що інтегруються з квадратом на  $\Omega$  разом із своїми першими похідними включно і дорівнюють заданим напруженням на частині поверхні тіла. Простір можливих напружень  $Z^0$  визначимо, як підмножину елементів із множини  $Z$ , що задовольняють однорідним статичним умовами на межі області.

Вважаємо, що деформації, як і напруження, інтегруються з квадратом на  $\Omega$  разом із своїми першими похідними включно і забезпечують виконання статичних межових умов на частині поверхні тіла. Множину деформацій із перерахованими властивостями позначимо  $X$ . Тоді простір мо-

жливих деформацій  $X^0$  складається з елементів множини  $X$ , що задовольняють однорідним статичним умовам на межі області.

Якщо напруження і деформації подати у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma^0(t) + \sigma^S(t), & \sigma^0(t) &\in Z^0; & \sigma^S(t) &\in Z; \\ \epsilon(t) &= \epsilon^0(t) + \epsilon^S(t), & \epsilon^0(t) &\in X^0; & \epsilon^S(t) &\in X,\end{aligned}\quad (4)$$

де  $\sigma^S(t)$  – напруження, що задовольняють неоднорідним статичним умовами на частині поверхні тіла;  $\epsilon^S(t)$  – деформації, які визначають за напруженням  $\sigma^S(t)$  з використанням рівняння стану матеріалу, то узагальнену крайову задачу (2) можна переформулювати так.

Знайти трійку  $(\mathbf{u}(t), \epsilon^0(t), \sigma^0(t)) \in U \times X^0 \times Z^0$  і пару  $(\epsilon^S(t), \sigma^S(t)) \in X \times Z$ , такі що

$$\begin{aligned}(\epsilon^0(t), \delta\sigma)_L &= (B\mathbf{u}(t), \delta\sigma)_L, & \forall \delta\sigma &\in Z^0; \\ (\sigma^0(t), \delta\epsilon)_L &= (D(\epsilon(t), \xi(t), t)(\epsilon(t) - \xi(t)), \delta\epsilon)_L, & \forall \delta\epsilon &\in X^0; \\ (\sigma^0(t), B\delta\mathbf{u})_L &= (\rho(t), \delta\mathbf{u}) - (\sigma^S(t), B\delta\mathbf{u})_L, & \forall \delta\mathbf{u} &\in U.\end{aligned}\quad (5)$$

Система нелінійних рівнянь (4), (5) визначає узагальнене представлення крайової задачі теорії пластичності щодо переміщень, деформацій і напружень [12].

Що стосується умов існування та єдиності узагальненого розв'язку нелінійної крайової задачі, що сформульована у формі систем рівнянь (2), (3), (5), то справедливим є наступне твердження. Якщо за різних фіксованих температур функції, що описують криві деформування матеріалу, випуклі, узагальнений розв'язок крайової задачі існує і єдиний, а також безперервно залежить від зміни навантажень і початкових деформацій [11].

**Основні положення змішаної схеми МСЕ.** У проекційно-сітковому методі для побудови скінченновимірних просторів як базисні використовують кусково-поліноміальні функції, тобто функції із скінченним малим носієм (фінітні функції) [8]. Для їх побудови за допомогою сітки здійснюють дискретизацію області  $\Omega$  на скінченні елементи простішої геометричної форми і на об'єднанні елементів, що прилягають до кожного вузла сітки, будують кусково-поліноміальні функції із скінченним носієм, що дорівнює обраному об'єднанню. Будь-яку повну лінійно-незалежну

систему функцій такого виду приймають як базисну. Переваги такого базису полягають у тому, що носії його функцій набагато менші  $\Omega$  і базис «майже ортогональний». Для проєкційного методу з такими базисними функціями матриці систем розв'язувальних рівнянь стають рідкозаповненими, що суттєво спрощує процес розв'язання задачі.

Наведемо спочатку класичне представлення скінченновимірної задачі у переміщеннях. Зведення узагальненої крайової задачі, що описується нелінійним рівнянням (3), до деякої скінченновимірної задачі становить суть проєкційно-сіткового методу.

Для побудови скінченновимірної задачі множину можливих переміщень  $U$  апроксимуємо послідовністю скінченновимірних просторів  $U_h$ , де  $h$  – визначальний параметр множини скінченновимірних просторів, що наближається до нуля.

Вважаємо, що множина апроксимувальних просторів  $U_h$  задовольняє введенню  $U_h \subset U$ . Тоді за аналогією з рівнянням (3) сформулюємо скінченновимірну задачу так.

Знайти переміщення  $\bar{\mathbf{u}}_h(t) \in U_h$  такі, що

$$(D(B\bar{\mathbf{u}}_h(t), \xi_h(t), t)(B\bar{\mathbf{u}}_h(t) - \xi_h(t)), B\delta\mathbf{u}_h)_L = \langle \mathbf{p}(t), \delta\mathbf{u}_h \rangle, \forall \delta\mathbf{u}_h \in U_h, \quad (6)$$

Рівняння (6) визначає проєкційно-сіткове формулювання крайової задачі теорії пластичності у переміщеннях. Якщо матеріал характеризується властивістю зміцнення на ділянці пружно-пластичного деформування, розв'язок нелінійного рівняння (6) існує і єдиний, а також безперервно залежить від зміни навантажень і початкових деформацій.

Отже, використання рівняння (6) для побудови сіткових схем призводить до найбільш поширеного формулювання МСЕ у формі методу переміщень [8]. У цьому методі для апроксимації переміщень застосовують кусково-поліноміальні неперервні функції, а розподіли деформацій і напружень характеризуються розривною апроксимацією, внаслідок диференціювання переміщень. Тоді похибка наближеного обчислення напружень і деформацій буде на порядок більше, ніж похибка за переміщенням, зокрема найбільш помітно ця похибка проявляється у вузлах на межі тіла.

Альтернативний підхід ґрунтується на використанні узагальненого представлення крайової задачі у формі системи нелінійних рівнянь (2) щодо переміщень, деформацій і напружень. Побудова проєкційно-сіткової схеми на основі рівнянь (2) призводить до змішаного формулювання МСЕ. У разі такого формулювання напруження і деформації входять у розв'язувальні рівняння поряд із переміщеннями як рівноправні невідомі.

Для формулювання скінченновимірної задачі простори  $U$  і  $L$  апроксимуємо послідовністю скінченновимірних підпросторів  $U_h$  і  $L_h$ . Вважаємо, що для побудови просторів  $U_h$  і  $L_h$  використано окрему апроксимацію переміщень, деформацій і напружень за допомогою різного набору кусково-поліноміальних базисних функцій. Тоді за аналогією з континуальною задачею (2) представимо скінченновимірну задачу так.

Знайти трійку  $(\mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\varepsilon}_h(t), \boldsymbol{\sigma}_h(t)) \in U_h \times L_h \times L_h$ , таку що

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\varepsilon}_h(t), \delta \boldsymbol{\sigma}_h)_L &= (B \mathbf{u}_h(t), \delta \boldsymbol{\sigma}_h)_L, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma}_h \in L_h; \\ (\boldsymbol{\sigma}_h(t), \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h)_L &= (D(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t), \boldsymbol{\xi}_h(t), t)(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t) - \boldsymbol{\xi}_h(t)), \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h)_L, \quad \forall \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h \in L_h; \\ (\boldsymbol{\sigma}_h(t), B \delta \mathbf{u}_h)_L &= \langle \boldsymbol{\rho}(t), \delta \mathbf{u}_h \rangle, \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in U_h. \end{aligned} \quad (7)$$

Система нелінійних рівнянь (7) визначає змішане проекційно-сіткове формулювання крайової задачі теорії пластичності щодо переміщень, деформацій і напружень [13].

Для врахування статичних межових умов на частині поверхні тіла переформулюємо скінченновимірну задачу (7) так. Вважаємо, що  $X_h \times Z_h$  – апроксимувальна підмножина для напружень і деформацій, які забезпечують виконання статичних умов на межі тіла. Тоді простір  $X_h^0 \times Z_h^0$  складається з елементів множини  $X_h \times Z_h$ , що задовольняють однорідним статичним межовим умовам.

Якщо напруження і деформації представити у вигляді

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_h(t) &= \boldsymbol{\sigma}_h^0(t) + \boldsymbol{\sigma}_h^S(t), \quad \boldsymbol{\sigma}_h^0(t) \in Z_h^0; \quad \boldsymbol{\sigma}_h^S(t) \in Z_h; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_h(t) &= \boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_h^S(t), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t) \in X_h^0; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_h^S(t) \in X_h, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\boldsymbol{\sigma}_h^S(t), \boldsymbol{\varepsilon}_h^S(t)$  – напруження і деформації, що задовольняють неоднорідним статичним межовим умовам на частині поверхні тіла, то скінченновимірну задачу за аналогією із рівняннями (5) сформулюємо так.

Знайти трійку  $(\mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t), \boldsymbol{\sigma}_h^0(t)) \in U_h \times X_h^0 \times Z_h^0$  і пару  $(\boldsymbol{\varepsilon}_h^S(t), \boldsymbol{\sigma}_h^S(t)) \in X_h \times Z_h$ , такі що

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\varepsilon}_h^0(t), \delta \boldsymbol{\sigma}_h)_L &= (B \mathbf{u}_h(t), \delta \boldsymbol{\sigma}_h)_L, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma}_h \in Z_h^0; \\ (\boldsymbol{\sigma}_h^0(t), \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h)_L &= (D(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t), \boldsymbol{\xi}_h(t), t)(\boldsymbol{\varepsilon}_h(t) - \boldsymbol{\xi}_h(t)), \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h)_L, \quad \forall \delta \boldsymbol{\varepsilon}_h \in X_h^0; \\ (\boldsymbol{\sigma}_h^0(t), B \delta \mathbf{u}_h)_L &= \langle \boldsymbol{\rho}(t), \delta \mathbf{u}_h \rangle - (\boldsymbol{\sigma}_h^S(t), B \delta \mathbf{u}_h)_L, \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in U_h. \end{aligned} \quad (9)$$

Система нелінійних рівнянь (8), (9) визначає змішане проекційно-сіткове представлення крайової задачі теорії пластичності щодо перемі-



щень, деформацій і напружень з урахуванням статичних межових умов на частині поверхні тіла [12].

Сформулюємо основні результати аналізу стійкості і збіжності змішаного методу в задачах теорії пластичності. Для цього необхідно встановити спочатку відповідність між полями деформацій для класичного та змішаного підходів МСЕ [9].

Визначимо простір  $Y_h$  як множину значень оператора  $B$ , що діє на замкнутому підпросторі  $U_h \subset U$ , тобто  $Y_h = BU_h$ . Тоді  $Y_h$  – апроксимувальний підпростір для простору деформацій. Обидва простори  $X_h^0$  і  $Y_h$  скінченновимірні, але жоден з них не є підмножиною іншого.

Введемо до розгляду проєктувальний оператор  $I_h : Y_h \rightarrow X_h^0$ , який ставить у відповідність кожному елементу з простору  $Y_h$  його ортогональну проєкцію в  $X_h^0$ . Оператор проєктування  $I_h$  породжує розкладання простору деформацій  $X_h^0$  у пряму суму підпросторів:

$$X_h^0 = \text{Im}(I_h) \oplus \text{Ker}(I_h^*),$$

де  $I_h^*$  – спряжений щодо  $I_h$  проєктувальний оператор, який діє з  $X_h^0$  в  $Y_h$ . Зауважимо, що простори  $Y_h$  і  $\text{Im}(I_h)$  можна інтерпретувати як поля можливих деформацій для класичних і змішаних схем МСЕ, а простір  $\text{Ker}(I_h^*)$  як всілякі «саморівноважні» розподіли деформацій.

Відзначимо, що визначений таким чином оператор ортогонального проєктування  $I_h$  відіграє вирішальну роль в аналізі стійкості і збіжності змішаного методу.

Дійсно, з використанням оператора проєктування  $I_h$  систему нелінійних рівнянь змішаного методу (9) представимо у еквівалентному вигляді

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\epsilon}_h^0(t), \delta \boldsymbol{\sigma}_h)_L &= (I_h B \mathbf{u}_h(t), \delta \boldsymbol{\sigma}_h)_L, \quad \forall \delta \boldsymbol{\sigma}_h \in Z_h^0; \\ (\boldsymbol{\sigma}_h^0(t), \delta \boldsymbol{\epsilon}_h)_L &= (D(\boldsymbol{\epsilon}_h(t), \boldsymbol{\xi}_h(t), t)(\boldsymbol{\epsilon}_h(t) - \boldsymbol{\xi}_h(t)), \delta \boldsymbol{\epsilon}_h)_L, \quad \forall \delta \boldsymbol{\epsilon}_h \in X_h^0; \\ (\boldsymbol{\sigma}_h^0(t), I_h B \delta \mathbf{u}_h)_L &= \langle \boldsymbol{\rho}(t), \delta \mathbf{u}_h \rangle - (\boldsymbol{\sigma}_h^S(t), B \delta \mathbf{u}_h)_L, \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in U_h, \end{aligned}$$

звідки випливає нелінійне рівняння щодо переміщень:

$$\begin{aligned} (D(I_h B \mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\xi}_h(t), t)(I_h B \mathbf{u}_h(t) - \boldsymbol{\xi}_h(t)), I_h B \delta \mathbf{u}_h)_L &= \\ = \langle \boldsymbol{\rho}(t), \delta \mathbf{u}_h \rangle - (\boldsymbol{\sigma}_h^S(t), B \delta \mathbf{u}_h)_L, \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in U_h, \end{aligned} \quad (10)$$

Отже, якщо нелінійний оператор  $D$  має властивості сильної монотонності та ліпшиць-неперервності, одержимо необхідну і достатню умову коректного розв'язання рівняння (10).

**Умова стійкості.** Якщо для всякого  $h$  і довільних переміщень  $\mathbf{v}_h \in U_h$  виконується оцінка

$$d \|\mathbf{B}\mathbf{v}_h\|_L \leq \|I_h \mathbf{B}\mathbf{v}_h\|_L, \quad 0 < d \leq 1, \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h, \quad (11)$$

де стала  $d$  не залежить від  $h$ , то розв'язок рівняння (10), а отже, і рівнянь змішаного методу (9) існує і єдиний, а також стійкий щодо вільних варіацій навантажень і початкових деформацій.

Відзначимо, що для практичного застосування нерівність (11) зручно подати в іншому вигляді. Дійсно, згідно з умовою стійкості (11) маємо

$$d = \inf_{\mathbf{v}_h \in U_h} \frac{\|I_h \mathbf{B}\mathbf{v}_h\|_L}{\|\mathbf{B}\mathbf{v}_h\|_L}. \quad (12)$$

Тоді з урахуванням властивостей проектувального оператора  $I_h$  рівність (12) перетворимо до наступного вигляду

$$d^2 = 1 - \sup_{\mathbf{v}_h \in U_h} \inf_{\boldsymbol{\eta}_h \in X_h^0} \frac{\|\mathbf{B}\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\eta}_h\|_L^2}{\|\mathbf{B}\mathbf{v}_h\|_L^2},$$

звідки отримуємо оцінку знизу для  $d$ :

$$d^2 \geq 1 - \sup_{\mathbf{v}_h \in U_h} \frac{\|\mathbf{B}\mathbf{v}_h - \boldsymbol{\eta}_h\|_L^2}{\|\mathbf{B}\mathbf{v}_h\|_L^2}, \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in X_h^0. \quad (13)$$

Зауважимо, що для практичного обґрунтування коректності змішаної апроксимації простіше використовувати нерівність (13), ніж умову (11), тому що перевірка нерівності (13) не потребує побудови та використання у явному вигляді проектувального оператора  $I_h$ .

Що стосується збіжності змішаної апроксимації, то справедливим є наступне твердження. Якщо виконується умова (11), то одержані у [13] оцінки похибок змішаної апроксимації для деформацій і напружень дозволяють встановити не тільки факт збіжності змішаного методу в задачах термопластичності, але також вказують на можливість одержання покращеної апроксимації для деформацій і напружень порівняно зі звичайною апроксимацією МСЕ.

Більше того, якщо початкові пластичні деформації для поточного етапу навантажування визначити на основі розв'язування пружно-пластичної задачі для попередніх етапів навантажування, то отримуємо оцінки сумарної похибки для деформацій і напружень наприкінці етапу навантажування [13]. Одержані нерівності дозволяють встановити глобальну збіжність змішаного методу для квазістатичних задач термопластичності, що описують неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування з урахуванням початкових деформацій, які залежать від історії деформування і нагрівання. Згідно з отриманими оцінками точність розв'язування

скінченновимірної задачі (9) для початкових станів навантажування повинна бути достатньою, щоб не допустити впливу зростання перших коефіцієнтів у розкладі сумарної похибки на точність розв'язування пружно-пластичної задачі на наступних етапах навантажування.

Потрібно підкреслити, що принципова відмінність змішаних схем МСЕ від традиційних полягає у необхідності побудови таких апроксимувальних функцій, для яких забезпечується виконання умови стійкості (11), що гарантує розв'язуваність, збіжність та одержання стійкого розв'язку скінченновимірної задачі за будь-якого кроку сітки.

Чисельний аналіз свідчить, що спроби ігнорування умови стійкості (11) у разі конструювання змішаних апроксимацій призводять до погано обумовлених скінченновимірних задач, розв'язки яких мають нестійкий осцилювальний характер. Отже, сформульована умова стійкості, яку записано у формі нерівності (11) або (12), відіграє фундаментальну роль в аналізі коректності змішаного методу в задачах теорії пластичності.

**Формулювання матричних рівнянь змішаного методу.** Застосування змішаної апроксимації МСЕ для розв'язання крайової задачі неізотермічної термопластичності приводить до системи нелінійних матричних рівнянь щодо вузлових невідомих переміщень, деформацій і напружень:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}] \{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} &= [\mathbf{H}] \{\mathbf{u}(t)\}; \\ \{\boldsymbol{\sigma}(t)\} &= [\mathbf{D}(\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}, \{\boldsymbol{\xi}(t)\})] (\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\} - \{\boldsymbol{\xi}(t)\}); \\ [\mathbf{H}]^T \{\boldsymbol{\sigma}(t)\} &= \{\boldsymbol{\rho}(t)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Перше рівняння системи (14) визначає вектор значень деформацій  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}$  у вузлах сітки за вузловими переміщенням  $\{\mathbf{u}(t)\}$ , друге – пов'язане з рівнянням стану матеріалу для побудови вектора вузлових напружень  $\{\boldsymbol{\sigma}(t)\}$  і третє – забезпечує виконання умов статичної рівноваги. Вектори  $\{\boldsymbol{\rho}(t)\}$  і  $\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}$  відповідають наведеним до вузлів сітки заданим навантаженням і початковим деформаціям.

Через використання апроксимувальних функцій із скінченним малим носієм матриці  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{H}]$  рідкозаповнені. Крім того, матриці  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{H}]$  і  $[\mathbf{D}]$  мають блокову структуру заповнення, матричні блоки яких відповідають вузлам сітки, при чому  $[\mathbf{M}]$  – симетрична додатно визначена матриця,  $[\mathbf{D}]$  – нелінійна блочно-діагональна матриця, що зв'язує вектори вузлових напружень і деформацій рівняннями стану.

Для обчислення елементів матриць  $[\mathbf{M}]$  і  $[\mathbf{H}]$  використовували інтерполяційні квадратурні формули, в яких точки зважування збігаються з вузлами інтерполяції скінченного елемента. У цьому випадку матриця  $[\mathbf{M}]$  стає діагональною і розв'язання системи матричних рівнянь (14)

суттєво спрощується, тому що не потрібно застосовувати алгоритми обчислення зворотної матриці  $[M]$  для знаходження вектора вузлових деформацій  $\{\varepsilon(t)\}$  з першого рівняння системи (14).

**Врахування статичних межових умов.** Розглянемо процедуру побудови матричних рівнянь змішаного методу, яка дозволяє врахувати межові умови на частини поверхні тіла для вектора вузлових напружень і деформацій.

Уведемо до розгляду вектор поверхневих напружень  $\{q'\}$  для поверхневих вузлів сітки, заданий в місцевій системі координат  $x'$ , яка не обов'язково збігається з глобальними осями  $x$ . Компоненти вектора  $\{q'\}$  відповідають відомим компонентам вектора напружень на межі області і дорівнюють нулю у всіх інших випадках. Вважаємо, що  $[T']$  – матриця перетворення вектора вузлових напружень з глобальної координатної системи в місцеву і  $[T]$  – матриця зворотного перетворення з місцевої в глобальну систему координат. Тоді можна визначити напруження  $\{\sigma\}$  на межі в місцевій системі координат  $x'$ :

$$\{\sigma'\} = [T']\{\sigma\}. \quad (15)$$

Для вектора  $\{\sigma'\}$  використовуємо розкладання

$$\{\sigma'\} = \{\sigma'_0\} + \{q'\}, \quad (16)$$

де  $\{\sigma'_0\}$  – напруження, що задовольняють однорідним межовим умовам на поверхні тіла. Якщо прийняти, що напруження  $\{\sigma'_0\}$  відомі, то з застосуванням зворотного перетворення, маємо

$$\{\sigma\} = [T]\{\sigma'\} = [T](\{\sigma'_0\} + \{q'\}). \quad (17)$$

Для більшості практичних задач компоненти вектора напружень  $\{\sigma\}$  на межі відмінні від заданих компонент вектора поверхневих напружень  $\{q'\}$ . У цьому випадку напруження  $\{\sigma'\}$  неможливо уявити у вигляді розкладання (16), оскільки не задовольняються межові умови на поверхні тіла.

Перетворимо вектор напружень  $\{\sigma\}$  таким чином, щоб забезпечити виконання статичних межових умов на поверхні тіла. Для цього використовуємо ортогональну проєкцію вектора  $\{\sigma'\}$  на безліч можливих напружень, що задовольняють межовим умовам. З урахуванням того що компоненти вектора поверхневих напружень фіксовані  $\{q'\}$ , безліч можливих напружень складається з всіляких векторів напружень, що задовольняють однорідним межовим умовам. Більше того, оскільки згадане перетворення вектора напружень не повинно призводити до порушення рів-

няння стану матеріалу, в проєкційному рівнянні необхідно враховувати відповідне перетворення і для вектора деформацій  $\{\sigma\}$ , отже, рівняння для побудови проєкції вектора напружень  $\{\sigma'\}$  слід формулювати в енергетичній метриці, тобто з використанням скалярного добутку векторів напружень і деформацій.

Позначимо через  $\{\tilde{\sigma}'\}$  ортогональну проєкцію вектора напружень  $\{\sigma'\}$  на безліч можливих напружень, що задовольняють однорідним межовим умовам на поверхні тіла. Тоді з урахуванням наведених вище зауважень вектор  $\{\tilde{\sigma}'\}$  визначимо на підставі тотожності:

$$\{\delta\sigma'_0\}^T [\mathbf{D}']^{-1} \{\tilde{\sigma}'\} = \{\delta\sigma'_0\}^T [\mathbf{D}']^{-1} \{\sigma'\}, \quad (18)$$

де  $[\mathbf{D}']$  – матриця, що відповідає матриці  $[\mathbf{D}]$  в місцевій системі координат,  $\{\delta\sigma'_0\}$  – довільний вектор напружень, що задовольняє однорідним межовим умовам.

Оскільки вектор проєкції  $\{\tilde{\sigma}'\}$  задовольняє статичним межовим умовам на поверхні тіла, напруження  $\{\tilde{\sigma}'\}$  можна представити у вигляді розкладання

$$\{\tilde{\sigma}'\} = \{\tilde{\sigma}'_0\} + \{\mathbf{q}'\}, \quad (19)$$

де  $\{\delta\sigma'_0\}$  – невідомі напруження, що задовольняють однорідним межовим умовам,  $\{\mathbf{q}'\}$  – задані поверхневі напруження.

На підставі співвідношень (18), (19) отримуємо рівняння відносно вектора напружень  $\{\delta\sigma'_0\}$ :

$$\{\delta\sigma'_0\}^T [\mathbf{D}']^{-1} \{\tilde{\sigma}'_0\} = \{\delta\sigma'_0\}^T [\mathbf{D}']^{-1} (\{\sigma'\} - \{\mathbf{q}'\}). \quad (20)$$

Для матриці  $[\mathbf{D}']^{-1}$  в рядку, що відповідає заданому напруженню на межі тіла, покладемо всі елементи нульовими і модифіковану таким чином матрицю  $[\mathbf{D}']^{-1}$  позначимо  $[\mathbf{S}']$ . Крім того, для матриці  $[\mathbf{S}']$  у стовпці, що відповідає нульовому рядку, в діагональну позицію помістимо одиницю, а всі інші елементи у стовпці покладемо нульовими. Побудовану таким чином матрицю позначимо  $[\mathbf{Q}']$ . З урахуванням матриць  $[\mathbf{S}']$ ,  $[\mathbf{Q}']$  з рівності (20) знаходимо

$$\{\sigma'_0\} = [\mathbf{Q}']^{-1} [\mathbf{S}'] (\{\sigma'\} - \{\mathbf{q}'\}). \quad (21)$$

Відповідно до формул (15)-(17), (19) і (21) для довільного вектора напружень  $\{\sigma\}$  отримуємо вектор  $\{\tilde{\sigma}\}$ , що задовольняє статичним межовим умовам на поверхні тіла:

$$\{\bar{\sigma}\} = [C] \{\sigma\} + [P] \{q'\}, \quad (22)$$

де матриці  $[C]$ ,  $[P]$  визначено так:

$$[C] = [T] [Q']^{-1} [S'] [T']; \quad [P] = [T] - [T] [Q']^{-1} [S']. \quad (23)$$

Вважаємо, що матриці  $[C]$ ,  $[P]$  мають блочно-діагональну структуру заповнення, яка відповідає вузлам сітки. Для поверхневих вузлів, в яких враховують межові умови для напружень, діагональні блоки цих матриць визначають за допомогою співвідношень (23), а для всіх інших вузлів – вони дорівнюють одиничній і нульовій матриці відповідно.

Вектор вузлових деформацій  $\{\bar{\epsilon}\}$  визначаємо через напруження  $\{\bar{\sigma}\}$  за допомогою співвідношення

$$\{\bar{\epsilon}\} = [D]^{-1} \{\bar{\sigma}\} + \{\xi\}. \quad (24)$$

Отже, на підставі формулювання (14) і співвідношень (22)-(24) отримуємо систему нелінійних матричних рівнянь змішаного методу з урахуванням статичних межових умов на поверхні тіла:

$$\begin{aligned} \{\epsilon(t)\} &= [M]^{-1} [H] \{u(t)\}; \\ \{\sigma(t)\} &= [D] (\{\bar{\epsilon}(t)\}, \{\xi(t)\}) (\{\epsilon(t)\} - \{\xi(t)\}); \\ \{\sigma^0(t)\} &= [C] (\{\bar{\epsilon}(t)\}, \{\xi(t)\}) \{\sigma(t)\}; \\ \{\sigma^S(t)\} &= [P] (\{\bar{\epsilon}(t)\}, \{\xi(t)\}) \{q'(t)\}; \\ \{\bar{\sigma}(t)\} &= \{\sigma^0(t)\} + \{\sigma^S(t)\}; \\ \{\bar{\epsilon}(t)\} &= [D] (\{\bar{\epsilon}(t)\}, \{\xi(t)\})^{-1} \{\bar{\sigma}(t)\} + \{\xi(t)\}; \\ [H]^T \{\bar{\sigma}(t)\} &= \{p(t)\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Системи нелінійних рівнянь (14), (25) визначають матричне формулювання змішаного методу для розв'язання задач неізотермічної термопластичності щодо вузлових переміщень, деформацій і напружень.

Для розв'язання систем рівнянь (14), (25) розроблено та реалізовано спеціальні крокові-ітераційні алгоритми. Встановлено, що сформульована умова стійкості змішаного методу забезпечує збіжність і стійкість запропонованих ітераційних процедур. Одержано результати з оптимізації швидкості збіжності ітераційних алгоритмів і показано можливість їх ефективною практичною реалізацією.

Деякі приклади побудови стійких змішаних апроксимацій МСЕ для розв'язання двох- і тривимірних задач, а також вирази для елементів розв'язувальних матриць наведено в [14, 15]. Результати розв'язання модельних задач теорії пружності, пластичності і механіки руйнування, що

одержані на основі запропонованої змішаної апроксимації, та їх порівняння з аналітичними розв'язками і результатами розрахунків за методом переміщень, наведено в [9, 14-17].

Аналіз модельних і досвід розв'язання практичних задач свідчать про ефективність змішаного методу у задачах про вигинання, концентрацію напружень, а також у разі розв'язання пружно-пластичних задач з розвненими зонами пластичних деформацій. Врахування статичних межових умов на поверхні тіла призводить до покращеної змішаної апроксимації напружень і деформацій особливо за пружно-пластичного моделювання. Застосування змішаної апроксимації до розв'язання задач теорії тріщин дозволяє отримати більш точні і стійкі розрахункові значення локальних параметрів руйнування порівняно з класичним методом переміщень. На розріджених і помірних за розмірами сітках застосування змішаного методу до розрахунку тіл складної конфігурації дозволяє отримати більш точні результати порівняно з класичним варіантом МСЕ. Для задач, що мають незначний градієнт напружень, результати розрахунків на основі змішаного і класичного підходів МСЕ близькі між собою. Результати чисельного аналізу підтвердили ефективність розроблених методів розрахунку і програмного забезпечення до розв'язання широкого спектра наукових і прикладних задач термомеханіки.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Brezzi F.* On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers // *RAIRO*. – 1974. – R.2 – P. 129 – 151.
2. *Babuska I.* Error Bounds for Finite Element Method // *Numer. Math.* – 1971. – 16, № 3. – P. 322 – 333.
3. *Ворошико П.П.* Формулировка вариационных принципов типа Рейсснера для классических задач термоупругости // *Докл. АН УССР*. – 1984. – № 3. – С. 31 – 33.
4. *Ворошико П.П.* Смешанные вариационные формулировки задач теории упругости и их реализация методом конечных элементов // *Пробл. прочности*. – 1985. – № 1. – С. 100 – 105.
5. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учётом жёстких смещений // *Сопротивление материалов и теория сооружений*. – 1974. – Вып. 24. – С. 147 – 156.
6. *Сахаров А.С., Альтенбах И.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 478 с.
7. *Уманский С.Э.* Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // *Пробл. прочности*. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
8. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. – Butterworth-Heinemann. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi. – 5th ed., 2000. – Vol. 1 – 3. – 1482 p.
9. *Чирков А.Ю.* Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – К.: Ин-т пробл. прочности им. Г.С.Писаренко НАН Украины, 2003. – 250 с.
10. *Чирков А.Ю.* Построение двухслойных схем интегрирования уравнений пластического течения в теории процессов деформирования по траектории малой кривизны // *Пробл. прочности*. – 2012. – № 6. – С. 93 – 124.

11. *Чирков А.Ю.* Анализ краевых задач, описывающих неизотермические процессы упруго-пластического деформирования с учётом истории нагружения // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 69 – 99.
12. *Чирков А.Ю.* Некоторые приложения смешанного метода конечных элементов к решению задач механики деформируемого тела // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 5. – С. 126–141.
13. *Чирков А.Ю.* Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения краевых задач, описывающих неизотермические процессы упругопластического деформирования // Пробл. прочности. – 2007. – № 3. – С. 87 – 117.
14. *Чирков А.Ю.* Построение смешанной аппроксимации к решению двухмерных задач теории упругости методом конечных элементов // Пробл. прочности. – 2003. – № 6. – С. 93 – 126.
15. *Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А.* Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надёжность и долговечность машин и сооружений. – 2008. – Вып. 31. – С. 195 – 207.
16. *Чирков А.Ю.* Применение смешанной схемы метода конечных элементов к решению задач линейной механики разрушения // Вестник НТУУ «КПИ», Машиностроение. – 2007. – № 50. – С. 91 – 101.
17. *Чирков А. Ю.* Расчетный анализ модельных задач теории трещин на основе смешанной схемы метода конечных элементов // Надёжность и долговечность машин и сооружений. – 2012. – Вып. 35. – С. 200 – 208.

#### REFERENCES

1. *Brezzi F.* On the existence uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers // RAIRO. – 1974. – R.2 – P. 129 – 151.
2. *Babuska I.* Error Bounds for Finite Element Method // Numer. Math. – 1971. – 16, № 3. – P. 322 – 333.
3. *Voroshko P.P.* Formulirovka variatsionnykh printsipov tipa Reysnnera dlya klassicheskikh zadach termouprugosti (Formulation of Reissner-type variational principles for classical problems of thermoelasticity) // Dokl. AN USSR. – 1984. – № 3. – S. 31 – 33.
4. *Voroshko P.P.* Smeshannyye variatsionnyye formulirovki zadach teorii uprugosti i ih realizatsiya metodom konechnykh elementov (Mixed variational formulations of problems of the theory of elasticity and their realization of the finite-element method) // Probl. prochnosti. – 1985. – № 1. – S. 100 – 105.
5. *Saharov A.S.* Momentnaya shema konechnykh elementov (MSKE) s uchyotom zhyostkikh smescheniy (A moment finite-element scheme (MFES) that allows for rigid-body displacements) // Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy. – 1974. – Vyip. 24. – S. 147 – 156.
6. *Saharov A.S., Altenbah I.* Metod konechnykh elementov v mehanike tverdykh tel (Finite-Element Method in Mechanics of Solid Bodies). – K.: Vischa shkola, 1982. – 478 s.
7. *Umanskiy S.E.* Obschaya teoriya i prakticheskoe primeneniye smyagchenno-smeshannykh shem metoda konechnykh elementov (General theory and practical application of modified-mixed schemes of the finite elements method) // Probl. prochnosti. – 1984. – № 12. – S. 83 – 89.
8. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. – Butterworth-Heinemann. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi. – 5th ed., 2000. – Vol. 1 – 3. – 1482 p.
9. *Chirkov A.Yu.* Smeshannaya shema metoda konechnykh elementov dlya resheniya kraevykh zadach teorii uprugosti i malyykh uprugoplasticheskikh deformatsiy (A Mixed Scheme of Finite-Element Method for Solving Boundary-Value Problems of Elasticity and Small Elastoplastic Strains). – K.: In-t probl. prochnosti im. G.S.Pisarenko NAN Ukrainyi, 2003. – 250 s.
10. *Chirkov A.Yu.* Postroenie dvuhsloynnykh shem integrirovaniya uravneniy plasticheskogo techeniya v teorii protsessov deformirovaniya po traektorii maloy krivizny (Construction of two-level integration schemes for the equations of plasticity in the theory of deformation along the paths of small curvature) // Probl. prochnosti. – 2012. – № 6. – S. 93 – 124.



11. *Chirkov A.Yu.* Analiz kraevyih zadach, opisyvayuschih neizotermicheskie protsessy uprugoplasticheskogo deformirovaniya s uchyotom istorii nagruzheniya (Analysis of boundary-value problems describing the non-isothermal processes of elastoplastic deformation taking into account the loading history) // *Probl. prochnosti.* – 2006. – № 1. – S. 69 – 99.
12. *Chirkov A.Yu.* Nekotorye prilozheniya smeshannogo metoda konechnyih elementov k resheniyu zadach mehaniki deformiruемого tela (Some applications of the mixed finite-element method to the solution of problems in solid mechanics) // *Kibernetika i sistemnyiy analiz.* – 2012. – № 5. – S. 126 – 141.
13. *Chirkov A.Yu.* Smeshannaya proektsionno-setochnaya shema metoda konechnyih elementov dlya resheniya kraevyih zadach, opisyvayuschih neizotermicheskie protsessy uprugoplasticheskogo deformirovaniya (Mixed projection-mesh scheme of the finite-element method to solve boundary-value problems describing the non-isothermal processes of elastoplastic deformation) // *Probl. prochnosti.* – 2007. – № 3. – S. 87 – 117.
14. *Chirkov A.Yu.* Postroenie smeshannoy approksimatsii k resheniyu dvuhmernyih zadach teorii uprugosti metodom konechnyih elementov (Mixed approximation scheme of the finite-element method for the solution of two-dimensional problems of the elasticity theory) // *Probl. prochnosti.* – 2003. – № 6. – S. 93 – 126.
15. *Chirkov A.Yu., Kobelskiy S.V., Zvyagintseva A.A.* Postroenie smeshannoy approksimatsii MKE dlya resheniya prostranstvennyih zadach teorii uprugosti (Construction of mixed approximation of FEM for the solution of dimensional problems of elasticity theory) // *Nadyozhnost i dolgovechnost mashin i sooruzheniy.* – 2008. – Vyip. 31. – S. 195 – 207.
16. *Chirkov A.Yu.* Primenenie smeshannoy shemy metoda konechnyih elementov k resheniyu zadach lineynoy mehaniki razrusheniya (Application of mixed scheme of finite element method to the solution of problems of linear mechanics of fracture) // *Vestnik NTUU «KPI», Mashinostroenie.* – 2007. – № 50. – S. 91 – 101.
17. *Chirkov A.Yu.* Raschetnyiy analiz modelnyih zadach teorii treschin na osnove smeshannoy shemy metoda konechnyih elementov (Computational analysis of model problems of crack theory based on mixed scheme of finite element method) // *Nadyozhnost i dolgovechnost mashin i sooruzheniy.* – 2012. – Vyip. 35. – S. 200 – 208.

УДК 539.4

*Чирков О.Ю.* Розвиток змішаного методу скінченних елементів до розв’язання крайових задач термомеханіки // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – Вип. 95. – С. 16–34.

Розвинуто загальну теорію змішаних схем метода скінченних елементів для розв’язання крайових задач термомеханіки неоднорідних середовищ, зокрема, нелінійних задач, що описують неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування за криволінійними траєкторіями малої кривизни. Із застосуванням апарату функціонального аналізу досліджено коректність змішаних проєкційно-сіткових алгоритмів і на цій основі сформульовано умови, що забезпечують стійкість та збіжність змішаної апроксимації для напружень, деформацій і переміщень. Встановлено, що змішаний метод призводить до більш точних розрахункових розподілів напружень і деформацій порівняно із класичним методом переміщень. Побудовано спеціальні скінченні елементи, що забезпечують стійкість та збіжність запропонованих змішаних апроксимацій. Отримано систему розв’язувальних рівнянь змішаного методу з урахуванням точного задоволення статичним межовим умовам на поверхні тіла, для розв’язання яких запропоновано економічні та стійкі кроковий ітераційні обчислювальні алгоритми.

Ключові слова: метод скінченних елементів, неізотермічні процеси пружно-пластичного деформування, змішана схема метода скінченних елементів.

Бібліогр. 17 назв.

*Чирков А.Ю. Развитие смешанного метода конечных элементов к решению краевых задач термомеханики // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 2015. – Вып. 95. – С. 16–34.*

Развита общая теория смешанных схем метода конечных элементов для решения краевых задач термомеханики, в частности нелинейных задач, описывающих неизоотермических процессы упругопластического деформирования по криволинейным траекториям малой кривизны. С применением аппарата функционального анализа исследована корректность смешанных проекционно-сеточных алгоритмов и на этой основе сформулированы условия, обеспечивающие устойчивость и сходимостъ смешанной аппроксимации для напряжений, деформаций и перемещений. Установлено, что смешанный метод приводит к более точным расчётным распределениям напряжений и деформаций по сравнению с классическим методом перемещений. Построены специальные конечные элементы, обеспечивающие устойчивость и сходимостъ смешанной аппроксимации. Получена система разрешающих уравнений смешанного метода с учетом точного удовлетворения статическим граничным условиям на части поверхности тела, для решения которых предложены экономичные и устойчивые шагово-итерационные алгоритмы.

Ключевые слова: метод конечных элементов, неизоотермические процессы упругопластического деформирования, смешанная схема метода конечных элементов.

*Chirkov A.Y. Development of mixed finite element method for the solution of thermo-mechanical boundary problems // Strength of materials and the theory of structures. – 2015. – Issue. 95. – P. 16–34.*

A general theory of mixed schemes of finite element method has been developed for the solution of thermo-mechanical boundary problems of inhomogeneous media, in particular nonlinear problems that describe the non-isothermal processes of elasto-plastic deformation using curved trajectories with small radius of curvature. Using the device for functional analysis the correctness of mixed projection-mesh algorithms is studied and based on it the conditions that provide stability and convergence of mixed approximation for stresses, strains and displacements have been laid down. It is found that the mixed method results in more accurate computational distribution of stresses and strains compared with the classical method of displacements. Special finite elements have been constructed, which ensure stability and convergence of the proposed mixed approximations. The system of equations for mixed method with consideration of specific fulfillment of static boundary conditions on the body surface has been obtained. The efficient and stable step-iteration computational algorithms have been proposed for the solution of this system.

Keywords: finite element method, non-isothermal processes of elasto-plastic deformation, mixed finite element method.

**ЧИРКОВ Олександр Юрійович**, *д-р. техн. наук, ст. наук. співр., провідн. наук. співр. Інституту проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України*

**Адреса робоча:** 01014 Україна, м. Київ, вул. Тимірязєвська 2, Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, Чиркову Олександрю Юрійовичу

Роб. тел.: +38 (044) 286- 48- 57

мобільний тел.: +38 (093) 718-17-39

УДК 539.3

**ВИВЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ТІЛ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ  
СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ: ОГЛЯД  
ПУБЛІКАЦІЙ ДО 2010 Р.****Я.М. Пастернак<sup>1</sup>**

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри технічної механіки

**Г.Т. Сулим<sup>2</sup>**

доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри механіки

**Р.М. Пастернак<sup>1</sup>**

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та електротехніки

<sup>1</sup> *Луцький національний технічний університет*<sup>2</sup> *Львівський національний університет імені Івана Франка*

У роботі здійснено огляд сучасних наукових досліджень щодо вивчення взаємодії фізико-механічних полів у деформованих твердих тілах із тонкими неоднорідностями, отворами, тріщинами та іншими дефектами.

**Ключові слова:** термомагнітоелектропружність, тріщина, тонке включення, анізотропний, композит, інтелектуальний матеріал

На даний час людство, пройшовши епохи каменю, бронзи, заліза та пластику, увійшло в еру передових матеріалів (Advanced Materials Age). Значний інтерес до прикладних та теоретичних досліджень композитних структурно неоднорідних тіл зумовлений розвитком шести основних напрямів технологій [1]: нанотехнології, біомеханіки, сенсорних технологій, енергоощадності, виготовлення високотехнологічних матеріалів (high-performance materials), а також паливних елементів. За даними [2] питома вага наукових теорій та засобів моделювання у загальному процесі розробки та виробництва передових матеріалів за десятибальною шкалою складає 5–8 балів, тобто, чинить істотний вплив.

Проектування сучасних композитів не обходиться без використання тонких елементів геометрії та структури. Зокрема, у роботах [3–6] відзначена значна перевага армування стрічками замість волокон: міцність на розтяг у трансверсальному напрямі досягає 50–70 % від величини міцності у поздовжньому, натомість використання волокон дає, зазвичай, лише 2–15 %. Експериментальних досліджень властивостей нанокompозитів стосуються праці [7–10]. У роботах [11, 12] обґрунтовано також можливість розрахунку композитів із карбонових нанотрубок за допомогою методів механіки континууму.

Розрахункові моделі суцільних середовищ також невпинно розширюються в сенсі врахування якомога більшої кількості фізичних

властивостей тіл та полів, що діють у них. Одними з ключових у цьому сенсі є методи розрахунку та проектування смарт- (інтелектуальних) матеріалів, здатних змінювати свої властивості, самостійно налаштовуючись на оптимальні для матеріалу і конструкції режими роботи. П'єзоелектричні матеріали, основною властивістю яких є взаємозв'язок впливів електричного та механічного полів, вже доволі давно і щораз ширше використовують в інтелектуальних електромеханічних системах для виготовлення сенсорів, перетворювачів та актуаторів [13–16]. Зокрема, п'єзоелектричні сенсори часто впроваджуються в конструкційні елементи для контролю наслідків прикладеного навантаження. Нещодавно запропоновано [17, 18] використовувати композити на основі п'єзоелектричних матриць із п'єзоволокнами, що дають можливість проектувати пристрої з великою кількістю додаткових функцій, зокрема, моніторингу внутрішнього стану, перетворення енергії, керування вібраціями, демпфування тощо [17].

Вагомe місце серед новітніх матеріалів посідають магнітоелектричні композити, тобто, виготовлені за керамо- чи нанотехнологіями тверді суміші п'єземагнітної та п'єзоелектричної компонент [19–22], у яких магнітоелектричний ефект виникає внаслідок механічної взаємодії цих двох фаз. Огляд лінійних теорій електромагнітомеханіки таких діелектриків, а також виклад локально-градієнтної теорії діелектриків подано у роботах [23, 24]. Унаслідок структурної неоднорідності магнітоелектричних композитів, одна із фаз може розглядатися як сукупність мікрвключень. З іншого боку, недосконалість чи порушення технології виробництва або експлуатації таких композитів можуть зумовити утворення на мезо- та макрорівнях дефектів гомогенізованої структури у вигляді тонких включень або тріщин.

Тонкі неоднорідності можуть чинити також і небажаний вплив, адже вони є одними з найпоширеніших типів дефектів конструкційних матеріалів. До них належать тріщини, тонкі плівкові прошарки, заповнені чужорідними матеріалами порожнини тощо. Результати експериментальних досліджень впливу на втому металів різноманітних порожнин і неметалевих включень та класифікацію останніх подано у книзі [25]. У монографії П.В. Яснія [26] виявлений багатоплановий вплив попереднього пластичного деформування на механічні властивості конструкційних матеріалів та їхню міцність. Доведено, що істотну роль при цьому відіграють дрібні включення.

Із поширенням ін'єкційних технологій заліковування тріщин [27–30] задача розрахунку напруженого стану тіла з включеннями з урахуванням варіювання механічних і теплофізичних характеристик наповнювача набуває все більшої ваги [27, 31], а додаткове врахування анізотропії

властивостей матеріалу є важливим аспектом при дослідженні цього комплексу задач.

**Основні методи дослідження тіл із тонкими неоднорідностями.** Проблем побудови моделей та методів дослідження тонких включень у пружних та термопружних середовищах стосуються оглядові праці Д.В. Грилицького, Г.Т. Сулима та Й.З. Піскозуба [32, 33], Г.Я. Попова [34], Т. Mura [35] та ін. Практично всеохоплюючий огляд робіт, що стосуються тематики тонких неоднорідностей подано у монографії Г.Т. Сулима [36]. Зокрема, у ній зазначено, що для аналізу тіл із тонкими включеннями використовують такі основні підходи: 1) попередній розгляд включення довільної форми, а потім істотне зменшення одного із його розмірів; 2) використання експериментальних методів; 3) докладний розгляд напружено-деформованого стану біля вістря неоднорідності та межі поділу матеріалів за допомогою асимптотичних методів; 4) опрацювання специфічних теорій, що дала би можливість досить просто розв'язувати відповідні задачі з урахуванням саме малої товщини дефекту; 5) застосування прямих числових методів.

Математична складність першого підходу зумовила появу специфічних теорій тонких включень, у яких властивості неоднорідності усереднюються за товщиною, а певні параметри взагалі відкидаються. Тобто, саме включення вилучається із розгляду, а його вплив описується певними умовами неідеального контакту на деякій серединній поверхні (лінії у двовимірних задачах). Вперше таку ідею сформулював Я.С. Підстригач [37] стосовно задач теплопровідності, побудувавши відповідні умови взаємодії. Цей підхід аналізу тіл із тонкими включеннями та щілинами пізніше отримав значний розвиток у роботах В.М. Александрова, О.Є. Андрейківа, Н.Х. Арутюняна, Л.Т. Бережницького, В.В. Божидарніка, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, Д.В. Грилицького, В.Т. Грінченка, В.С. Гудрамовича, О.М. Гузя, І.Т. Денисюка, А.П. Зінковського, О.О. Євтушенка, С.О. Калоєрова, Г.С. Кіта, Я.І. Кунця, Р.М. Кушніра, В.В. Лободи, В.М. Максимовича, Р.М. Мартиняка, В.В. Мелешка, В.В. Михаськіва, О.Б. Мовчана, В.В. Можаровського, М.Ф. Морозова, М.М. Николишина, В.К. Опанасовича, В.А. Осадчука, В.І. Острика, В.В. Панасюка, В.Г. Попова, Г.Я. Попова, Я.Г. Савули, В.С. Саркієяна, М.Г. Стащука, Г.Т. Сулима, А.О. Сяського, Л.А. Фільштинського, П.О. Фомічова, М.В. Хая, Г.П. Черепанова, К.С. Чобаняна, А.С. Хачикяна, Е.Е. Gdoutos, Г.С. Sih та ін. [26, 32, 36, 38–75]. Поєднання континуумних та молекулярних моделей при аналізі тонких неоднорідностей будови матеріалу також використано у роботах Т. Belytschko, S.P. Xiao [76], S. Badia та ін. [77].

У зв'язку з активним розвитком механіки руйнування, значна кількість робіт стосується вивчення задач для тіл зі щілинами та тріщинами, які є частковим випадком загального класу дефектів типу тонких неоднорідностей і моделюються математичним розрізом із заданими крайовими умовами на ньому. Зокрема, слід відзначити праці О.Є. Андрейківа, О.П. Дацишин, Р.М. Кушніра, З.Т. Назарчука, М.М. Николишина, В.А. Осадчука, В.В. Панасюка, М.П. Саврука, Г.П. Черепанова та інших вчених [60, 78–85].

Основні результати, що стосуються, загалом, двовимірних задач теорії тонких деформівних включень в ізотропних тілах, були отримані на основі застосування методів функцій стрибка [36], лінійного розвинення комплексних потенціалів [65, 86] та розривних розв'язків [68, 69]. У роботі [87] вперше розв'язано задачу для тонкого пружного включення у повному спектрі зміни його властивостей, а також знайдено асимптотичний розподіл напружень та переміщень в околі вершини такого включення.

Дещо менше уваги приділено просторовим задачам теорії пружності для тіл із тонкими включеннями. Зокрема, у працях [88–90] досліджено коефіцієнти інтенсивності напружень для жорстких пластинчатих включень. У роботах [91, 92] розглянуто жорсткі дискові включення (тонкі абсолютно жорсткі влючення називають подеколи антитріщинами) на межі поділу пружних півпросторів, а також взаємодію включень і тріщин у півпросторі. Тонкі жорсткі включення в пружному середовищі досліджено також у монографії [93]. Просторові задачі для тонких податних включень (вінклерова модель) детально розглянуті у монографіях [94, 95].

Спеціальні підходи, зокрема й метод функцій стрибка [36], продуктивні при розв'язуванні задач для лінійних включень у безмежних середовищах, смугах, півплощинах тощо, тобто для задач, у яких геометричні параметри та вид і спосіб навантаження дають можливість записати зручну для подальших обчислень систему інтегральних рівнянь. Що стосується викривлених включень, то з використанням таких підходів та їхніх спеціальних модифікацій на цей час було досліджено лише включення уздовж дуги кола [96, 97].

Застосування прямих числових методів [98–100] дає можливість розглядати різноманітні задачі для обмежених і необмежених тіл із прямолінійними та викривленими включеннями, однак їхня ефективність істотно залежить від використаних методів моделювання тонких елементів тіл [98, 99] та можливостей регуляризації побудованих рівнянь.

Тому при дослідженні напруженого стану скінченних тіл із тонкими непрямолінійними включеннями видається ефективним поєднання

прямих числових методів (граничних чи скінченних елементів) зі спеціальними підходами. Зокрема, у роботах [43, 101] модель тонкого податного включення уведено в метод скінченних елементів. У роботі [102] на основі методу граничних елементів (МГЕ) побудована модель тіла з тонким жорстким включенням, що описується стрижневими скінченними елементами. Цю модель розвинуто в роботі [103] для випадку податних включень. Унаслідок врахування при розбитті тіла малої товщини включення при розв'язуванні задач використовуються спеціальні підходи обчислення квазісингулярних інтегралів.

При моделюванні методом граничних елементів тонких включень їхній вплив на основний матеріал часто замінюють силами, розподіленими з певною густиною уздовж лінії, що лежить на серединній поверхні включення (метод масових сил). Такий підхід використано при моделюванні паль у ґрунті (модель згину стрижнів) в роботі [104], для дослідження впливу загвинчених у породу утримуючих болтів (модель розтягу-стиску стрижнів) [105], для моделювання прямолінійних армувань бетону [106, 107]. Найповнішою серед розглянутих є модель [107], оскільки вона враховує розтяг, зсув та згин тонкого включення. Проте внаслідок використання методу масових сил у таких моделях не вдається описати поперечне деформування включення, яке супроводжується стрибком переміщень при переході через серединну поверхню. Саме тому згадані вище моделі тонкої неоднорідності потребують розвитку в напрямі урахування також і поперечної податності матеріалу включення, зокрема, із використанням підходів методу функцій стрибка. Крім того, видається необхідним врахувати вплив можливої викривленості форми тонкого включення.

#### **Анізотропні середовища з тріщинами та тонкими включеннями.**

На цей час достатньо повно опрацьована математична теорія тріщин в анізотропних середовищах, а докладний виклад методики розв'язування відповідних задач за допомогою інтегральних рівнянь на основі комплексних потенціалів С.Г. Лехніцького [108] та огляд відповідних літературних джерел можна знайти у монографії [42]. Основи теорії тонких пружних прямолінійних включень, механічні властивості яких можуть змінюватися у найширшому спектрі від абсолютної податності (тріщини) до абсолютної жорсткості, в анізотропних середовищах відображено у монографії [36] та праці [304]. Перші результати у цьому напрямі були отримані у працях [109, 110], причому у граничних випадках було одержано інтегральні рівняння задач про тріщину чи абсолютно жорстке включення в анізотропному середовищі. Тонкі абсолютно жорсткі включення в анізотропних середовищах розглядалися також у роботах [90, 111] та ін. Детальний огляд використання

розвинутого пізніше формалізму Стро подано у працях [111, 112]. Моделі податного та гнучкого прямолінійних включень в анізотропному матеріалі та розв'язки відповідних задач для безмежного середовища подано у роботі [113].

**П'єзоелектричні та магнітоелектропружні тіла з тонкими неоднорідностями.** Значний особистий внесок у створення фундаментальних загальнотеоретичних принципів та методів розв'язування конкретних задач із урахуванням взаємовпливу полів різної фізичної природи зробили Я.Й. Бурак, О.Р. Гачкевич, Б.Д. Дробенко, В.Ф. Кондрат, Л.В. Мольченко, В.З. Партон, Я.С. Підстригач, Р.Ф. Терлецький, А.Ф. Улітко, В.Ф. Чекурін та ін. [15, 23, 114–121]. І все ж при цьому здатність тонких неоднорідностей будови матеріалу чинити істотний вплив на фізико-механічні поля і розраховані експлуатаційні характеристики виробу вивчена далеко неповно. Зокрема, тріщини, чужорідні прошарки, електропровідні включення тощо створюють великі градієнти фізико-механічних полів, що може спричинити відмову чи навіть механічне руйнування конструкційного елемента.

Дослідження тонких неоднорідностей у матеріалах та конструкціях стосуються, в основному, дефектів типу щілин (тріщин). На відміну від лінійної механіки руйнування пружних тіл, задачі теорії тріщин у п'єзоелектричних та магнітоелектропружних (МЕП) матеріалах є, загалом, нелінійними [122–124], оскільки діелектрична та магнітна проникності газу (зазвичай, повітря), що заповнює просвіт щілини, не дорівнює нулю. Відтак, завжди існують додаткові, переважно нелінійні, зв'язки між розкриттям тріщини та розривами електричного і магнітного потенціалів на ній. Найпростіші залежності між останніми часто будують за аналогією із моделлю пружної основи Вінклера [122], записуючи крайові умови на берегах напівпроникної тріщини (*semi-permeable crack*), для якої стрибок електричного чи магнітного потенціалів на дефекті пропорційний до добутку розкриття на нормальну складову електричного зміщення чи магнітної індукції [123]. Лінеаризуючи ці рівняння, для спрощення вводять також моделі непроникної тріщини (*impermeable crack*), для якої електричне зміщення та магнітна індукція на поверхнях дефекту є заданими (зазвичай, нульовими, тобто, магнітний і електричний контакт поверхонь відсутній), а також проникної тріщини (*permeable crack*) – електричний та магнітний потенціали разом із нормальними складовими електричного зміщення та магнітної індукції є неперервними при переході через поверхню дефекту, тобто, реалізується ідеальний електричний і магнітний контакт [125, 126].

Однак, можна запропонувати й іншу лінійну модель напівпроникної тріщини. Адже реальні тріщини, як правило, мають певну все ж



ненульову товщину, що дає можливість нехтувати міжмолекулярною взаємодією її берегів. Тому тріщину можна розглядати як тонкостінну порожнину з певною товщиною (необов'язково сталою), яка заповнена певною субстанцією (наприклад, повітрям). Вважаючи, що прикладене навантаження зумовлює малі розкриття щілини порівняно з її товщиною (а саме ці припущення використовує лінійна теорія п'єзоелектриків [118]), модель напівпроникної тріщини вдається лінеаризувати. Змінюючи проникність наповнення тонкої щілини, у граничних випадках можна отримати моделі як абсолютно проникної, так і абсолютно непроникної тріщин. Вперше цю ідею було висловлено у монографії В.З. Партона та Б.А. Кудрявцева [118], де для запису умов електричного контакту берегів тріщини використано модель тонкого діелектричного шару.

Велика кількість задач щодо тріщин у п'єзоелектричних матеріалах були розв'язані за допомогою методів теорії функції комплексної змінної та інтегральних рівнянь. Прямолінійні електрично непроникні, проникні та електропровідні тріщини в п'єзоелектричних матеріалах розглянуті у роботах [122–124, 127–131] та ін. Задач електро- та магнітопружності тіл із тріщинами стосуються монографії [118, 132–134]. Міжфазні проникні та непроникні тріщини в п'єзоелектричному біматеріалі вивчені у роботах В.В. Лободи та В.Б. Говорухи [135–140]. Електропровідні та феромагнітні тіла з тріщинами за дії зовнішнього електромагнітного поля досліджені у роботах О.Є. Андрейківа, З.Т. Назарчука, В.Р. Скальського та ін. [141, 142].

Е. Pan [143] вперше розробив метод граничних елементів без підобластей (single domain boundary element method) для аналізу плоских задач механіки руйнування п'єзоелектричних тіл. R. Rajapakse та X.-L. Xu [144] запропонували МГЕ, що використовує сильно сингулярні інтегральні рівняння, в яких тріщина моделюється розподіленими уздовж лінії дислокаціями. При вивченні тріщин U. Groh та M. Kuna [145] використали методи декомпозиції області та крайові інтегральні рівняння на переміщення і електричний потенціал. F. Garcia-Sanchez та ін. [146] для аналізу задач теорії тріщин розробили змішаний граничноелементний підхід, що використовує як сингулярні, так і гіперсингулярні інтегральні рівняння. K.M. Liew, Y. Sun та S. Kitipornchai [147] запропонували безелементний підхід (boundary element free approach), який базується на гіперсингулярних інтегральних рівняннях та апроксимації рухомих найменших квадратів (moving least square approximation). N. Sheng та K.Y. Sze [148] побудували схему МГЕ типу Треффца для вивчення тріщин у плоских задачах електропружності. M. Denda у статті [124] розробив алгоритм аналізу напівпроникних тріщин у п'єзоелектрику за

допомогою методу граничних елементів. Просторові задачі теорії тріщин у п'єзоелектричних тілах вивчені у працях [149–151] та ін. Граничноелементний аналіз задач теорії тріщин у п'єзоелектричних та магнітоелектропружних тілах подано також у монографіях [152, 153].

Значно менше публікацій стосується поєднаних електричних і механічних полів у тілах із тонкими включеннями. Еліптичні включення в п'єзоелектриках вивчені у монографіях [132, 152]. Еліпсоїдні отвори, включення та плоскі просторові тріщини в п'єзоелектричних та п'єзомагнітних матеріалах розглянуто у роботах Ю.М. Подільчука та його учнів [154–156]. Електропружний простір із довільно орієнтованим еліпсоїдним включенням вивчено у статті [157]. Квантові нитки в п'єзоелектричному середовищі досліджені за допомогою МГЕ у працях [158–160]. J.J. Ramsey, E. Pan та P.W. Chung [161] подали порівняння заснованих на МГЕ методів механіки континууму та підходів молекулярної статистики при моделюванні квантових ниток. Електронапружений стан тіл із тонкими жорсткими включеннями за антиплоскої деформації вивчено у працях [133, 162] із використанням методів теорії функції комплексної змінної та інтегральних рівнянь. Z.M. Xiao та ін. [163] дослідили задачу зародження мікротріщини на вістрі півбезмежного жорсткого включення у п'єзоелектричному середовищі. L. Wu та S. Du [164] вивчили задачу про тонке жорстке включення, розміщене конфокально в еліптичному електропружному включенні, вставленому в безмежне п'єзоелектричне середовище. Динамічну взаємодію SH-хвиль із тонким провідним жорстким включенням у п'єзоматеріалі розглянуто у праці [165]. У роботі [166] вивчено напружений стан п'єзоелектричного середовища з плоскою тріщиною, що розкривається жорстким включенням. С.-F. Gao, W.-X. Fan [167] розглянули задачу про жорстке діелектричне включення на межі контакту двох п'єзоелектричних півплощин. У роботі [168] розв'язано плоску задачу про взаємодію гвинтової дислокації та системи співвісних жорстких прямолінійних включень в електропружному середовищі. Z. Huang та Z.-B. Kuang [169] розглянули взаємодію дислокації та еліптичної неоднорідності в п'єзоелектрику.

Дослідження тонких пружних і п'єзоелектричних включень за антиплоскої деформації середовища започатковано у роботах Я.І. Кунця, Р.В. Рабоша та Г.Т. Сулима [170–172].

Задачі МЕР для тіл із непроникними та проникними тріщинами розглянуто у монографіях С.О. Калоєрова та ін., Б.А. Кудрявцева та В.З. Партон, Д.І. Бардзокаса, М.Л. Фільштинського та Л.А. Фільштинського, Q.H. Qin [19, 118, 132, 133, 152] та ін. Дослідження тонких дефектів, зокрема й тріщин, в МЕР матеріалах стосуються також

роботи В.В. Лободи, Y.H. Chen, N. Hasebe, E. Pan, J. Sladek, V. Sladek, W.Y. Tian, M. Wünsche, Ch. Zhang та ін. [130–181]. У працях [182–185] на основі методу граничних елементів розроблено низку числових підходів для визначення параметрів, що характеризують руйнування магнітоелектричних композитів із тріщинами. В основному, вони стосуються дослідження тіл із непроникними тріщинами. Тому доцільною видається уніфікація в межах лінійної задачі опису всіх трьох моделей проникних, непроникних і напівпроникних тріщин на основі моделі тонкого включення, адже непроникними для електричного чи магнітного полів є середовища, для яких діелектрична чи магнітна проникності є близькими до нуля. Натомість для проникних середовищ відповідні величини прямують до безмежності. Проміжними значеннями діелектричної та магнітної проникностей, очевидно, можна моделювати усі чи майже усі напівпроникні середовища.

Дослідження включень у магнітоелектричному композиті стосуються лише поодинокі роботи. Еліптичні п'єзомагнітні включення розглянуто у монографії [152]. У роботі [186] досліджено включення Ешелбі у п'єзомагнітному матеріалі. У праці [187] вивчено взаємодію електромагнітних та механічних полів у середовищі, що містить сферойдне включення. Можна також згадати про застосування розвинутих у роботі [188] експериментальних методів при дослідженні магнітних та електричних полів у матеріалах із нанонеоднорідностями.

### **Термопружність анізотропних та піроелектричних тіл.**

Дослідження концентрації та інтенсивності полів напружень, а також електричних зміщень поблизу включень, отворів та тріщин в анізотропних термопружних і термоелектропружних матеріалах добре відображені у науковій літературі, зокрема, й з огляду на те, що явище піроефекту, тобто виникнення електричного поля у матеріалі при його нагріванні, має широке використання, наприклад, у сенсорах інфрачервоного випромінювання [189]. Також ці ефекти активно використовують при створенні сучасних смарт-матеріалів. Наявність у таких матеріалах структурних неоднорідностей зумовлює високу концентрацію напружень, температурних і електричних полів поблизу них. При цьому теплове розширення та/чи піроефект відіграють істотну роль.

У працях Г.С. Кіта з учнями [190–194] вивчено задачі плоскої та просторової термопружності ізотропних тіл із тріщинами та включеннями. Тонкі прямолінійні включення в кусково-однорідних ізотропних термопружних тілах розглянуто у роботах Г.Т. Сулима та Й.З. Піскозуба [36, 195, 196]. У статті [197] досліджено періодичні системи еліптичних включень в анізотропному термопружному тілі. У

монографії В.Г. Карнаухова та В.В. Михайленка [198] розглянуто задачі нелінійної термомеханіки в'язкопружних п'єзоелектриків. У праці [199] досліджено вібророзігрівання в'язкопружних пластинок із п'єзошарами. У роботі [200] побудовано розв'язок для еліптичного отвору в п'єзоелектрику за дії однорідного теплового потоку. У праці [201] досліджено вплив однорідного теплового потоку на концентрацію напружень та електричних зміщень у пластині з еліптичним включенням та отвором. У статті В.С. Кирилюка [202] вивчено тривимірний термоелектропружний стан тіла з плоскою тріщиною за дії симетричного теплового потоку з її поверхонь. У роботах [203, 204] визначено коефіцієнти інтенсивності напружень поблизу періодичної системи тріщин у термоелектропружному та термомагнітоелектропружному матеріалах. У статтях С.О. Калоєрова та К.Г. Хорошева [205, 206] отримано комплексні потенціали термоелектропружності типу Лехніцького та на основі методу рядів побудовано числові розв'язки низки задач для багатозв'язних пластинок із отворами та тріщинами. У подальших роботах С.О. Калоєров та його учні [207, 208] поширили ці результати на випадок термомагнітоелектропружних тіл. У працях [209, 210] отримано функції Гріна для піроелектриків та термомагнітоелектропружних матеріалів з отворами різної форми і прямолінійними тріщинами. У публікації [211] побудовано фундаментальні розв'язки для ортотропної піроелектричної площини та півплощини. Майже у всіх працях (окрім робіт за авторства С.О. Калоєрова), що досліджують термоелектропружність безмежних тіл, використовується припущення, що однорідний тепловий потік не зумовлює напружень та електричних зміщень у суцільному бездефектному піроелектричному тілі, хоча належного обґрунтування такого твердження у роботах за оглянутий період не було подано.

Перелічені роботи, в основному, використовують суто аналітичні чи аналітично-числові методи дослідження неоднорідних піроелектричних тіл, реалізація яких можлива лише при накладанні істотних обмежень на геометричні форми останніх. Позбутися цих обмежень дає можливість використання числових методів, зокрема, методу граничних елементів, який унаслідок своєї напіваналітичної природи поєднує високу точність з вимогою дискретизації лише межі області.

При вивченні впливу теплового розширення на напружений стан тіл за допомогою методів інтегральних рівнянь (чи граничних елементів), у числовій схемі слід обчислювати додатковий об'ємний інтеграл (у двовимірних задачах поверхневий), що часто нівелює усі переваги методу. У випадку ізотропного тіла цей об'ємний інтеграл можна доволі легко перетворити до граничного (по поверхні, яка охоплює цей об'єм).

Такий спосіб використано у роботах [212–215] при дослідженні термопружної рівноваги ізотропних тіл із тріщинами. Однак, у випадку анізотропних тіл зведення об'ємного інтегралу до поверхневого стає досить складним і технічно громіздким завданням. У роботі [216] для випадку неоднорідних ортотропних площин, півплощин та смуг задача термопружності зведена до інтегрального рівняння Вольтерра. Для розв'язування задачі у випадку області довільної геометрії було запропоновано низку підходів. Скажімо, у роботах [217, 218] розроблено частковий інтегральний підхід (particular integral approach), що передбачає розбиття зайнятої тілом області на комірки, у кожній з яких температура апроксимується поліномом. У працях [219, 220] запропоновано алгоритм перетворення об'ємного інтегралу до контурного. Цей підхід успішно використано при аналізі термонапруженого стану анізотропних тіл із тріщинами у роботі [221]. Однак, деякі з контурних інтегралів слід обчислювати у певним чином відображеній області, що ускладнює алгоритм МГЕ. W.T. Ang та D.L. Clements [222] розробили непрямий метод інтегральних рівнянь, що дає можливість досліджувати прямолінійні тріщини в анізотропному термопружному тілі, проте у кожному конкретному випадку обчислювальну схему слід підлаштовувати під геометрію задачі. Основні дослідження у напрямі вивчення термоелектропружних тіл здійснив Q.H. Qin [152, 223–225], який шляхом мінімізації певних потенціальних функцій отримав розрахункові схеми МГЕ для піроелектриків із теплоізолюваними непроникними тріщинами. J. Sladek та ін. [226] розробили схему безсіткового методу Петрова – Гальоркіна для аналізу задач термоелектромагнітопружності тіл із тріщинами.

Проте при застосуванні МГЕ до аналізу анізотропних термопружних і піроелектричних тіл до останнього часу не було розв'язано низки важливих проблемних питань. Зокрема, не було побудовано інтегральних рівнянь чи навіть обчислювальних схем методу граничних елементів, що дали би можливість досліджувати не тільки теплоізолювані тріщини, але й тріщини із заданою температурою їхніх берегів. Також при аналізі п'єзоелектричних тіл із тріщинами у більшості випадків слід зважати на електричну проникність середовища, що заповнює просвіт, оскільки для проникних і непроникних тріщин коефіцієнти інтенсивності напружень є різними [203]. Тобто, слід було будувати та використовувати певні моделі тонких включень.

Математичне формулювання задач термопружності аналогічне до відповідного для задач вологопружності [227]. У зв'язку із дослідженням процесів сушіння виробів та заготовок, а також роботи елементів конструкцій за сумісної дії теплових факторів та вологості

навколишнього середовища, актуальним є вивчення задач термовологопружності [227–229]. Метод граничних елементів при аналізі вологоперенесення застосовано у роботі [230].

**Періодичні задачі.** Періодичні системи тріщин в ізотропному матеріалі розглянуто у значній кількості статей, основні результати яких відображено у монографіях [36, 84, 231]. Істотно менше робіт стосується періодичних систем тріщин в анізотропному середовищі. Серед них можна відзначити праці [232–234].

Періодичні системи тонких жорстких включень розглянуті у роботах [45, 235]. Системи тонких пружних включень в ізотропному середовищі вивчено у працях [36, 236–238]. Періодичні задачі для глобулярних криволінійних включень в анізотропному тілі досліджені у монографії [239]. Тривимірна задача для періодичної системи включень розглянута за допомогою методу граничних елементів у праці [240].

**Подвійно періодичні системи неоднорідностей. Ефективні характеристики композитів.** При дослідженні взаємодії тонких дефектів, як правило, зосереджуються на вивченні регулярно розташованих неоднорідностей, адже, як зазначено у роботах [241–244], такими можна вважати системи тріщин, що часто наявні у шаруватих кристалах, гірських породах та композитних матеріалах. Подвійно періодичні системи тріщин в ізотропному матеріалі розглянуто у монографіях М.П. Саврука, О.М. Лінькова, Г.Т. Сулима [36, 84, 231] та великій кількості статей, зокрема, [241–244]. Значно менше робіт стосується подвійно періодичних систем тріщин в анізотропному середовищі. Серед них можна відзначити праці [232–234, 245, 246].

Важливість дослідження подвійно та потрійно періодичних задач зумовлена також можливістю за допомогою їхнього розв'язку вирішити проблему визначення та оптимізації ефективних механічних властивостей композитного матеріалу з регулярною структурою [36, 231, 244]. При побудові відповідних моделей армованого волокнами чи платівками композиту зміцнювальні елементи найчастіше описують тонкими абсолютно жорсткими включеннями [45, 244, 247]. У монографії [36] та статті [248] для задач антиплоскої деформації ці результати узагальнено на випадок систем тонких пружних включень. У книзі [239] методами рядів із поліномами Фабера розглянуто подвійно періодичні задачі для анізотропних пластинок із криволінійними глобулярними включеннями. У роботі [249] досліджено ефективні властивості композиту з анізотропною матрицею, що армована системою тонких гнучких включень. У праці [250] запропоновано узагальнену схему методу Морі – Танаки для вивчення ефективних характеристик магнітоелектропружних композитів із глобулярними вкладеними одне в одного включеннями.

При дослідженні ефективних характеристик середовищ із регулярними системами неоднорідностей за допомогою методів інтегральних рівнянь (чи граничних елементів) склалися три основні підходи. Перший, використаний Y. Liu [251], X. Zhu зі співавторами [185] та ін., розглядає середовище з багатьма включеннями (волоконками) без огляду на періодичну структуру. Мабуть вперше при вивченні динамічних пружних властивостей середовища із тонкими жорсткими включеннями такий підхід застосовано В.В. Михаськівим зі співавторами [252]. Численні дослідження, що стосуються моделювання та прогнозування ефективних характеристик п'єзоелектричних та п'єзомагнітних композитів здійснено Л.П. Хорошуном, М.О. Шульгою, Б.П. Масловим та їхніми учнями [253–259].

У другому підході розглядається лише один представницький елемент об'єму (representative volume element) композитного матеріалу з регулярною будовою. Зокрема, такий спосіб вивчення ефективних сталих композиту впроваджено в МГЕ у працях Y.J. Liu та X.L. Chen [260], C.Y. Dong та K.Y. Lee [244], C.Y. Dong [261] та ін.

Третій підхід використовує спеціальні крайові інтегральні рівняння подвійно періодичних задач. Застосовуючи цей підхід А.М. Lin'kov та V.F. Koshelev [262] і О.М. Ліньков [231] розробили комплексний МГЕ для вивчення подвійно періодичних систем тріщин, отворів та глобулярних включень в ізотропному пружному середовищі. Унаслідок своєї напіваналітичної природи цей підхід дає можливість не тільки обчислювати коефіцієнти інтенсивності напружень регулярних систем тріщин чи концентрацію напружень на отворах і включеннях, а також визначати ефективні характеристики композитних матеріалів без додаткового розгляду межі представницького елемента об'єму та відповідних періодичних крайових умов на ній. Тому за числового моделювання розглядається лише поверхня тріщини чи отвору, що істотно зменшує розмір результуючої системи лінійних алгебричних рівнянь.

Останній підхід широко використовується для високоточного кількісного аналізу подвійно періодичних систем тріщин та тонких включень. Зокрема, G.S. Wang [243] запропонував ефективний алгоритм вивчення взаємодії подвійно періодичних систем та підсистем тріщин в ізотропному пружному середовищі. J. Xiao та C. Jiang [246] вивчили антиплоску деформацію ортотропного середовища з подвійно періодичними системами тріщин різного розміру. Y.Z. Chen, N. Hasebe та K.Y. Lee [263] дослідили задачі взаємодії систем тріщин, зокрема, й періодичних, у пружних середовищах. J.H. Xiao, Y.L. Xu та C.P. Jiang [264] отримали замкнуті розв'язки для коефіцієнтів інтенсивності

напружень та електричної індукції, а також ефективні характеристики п'єзоелектричних матеріалів із подвійно періодичними системами електропровідних жорстких лінійних включень, що перебувають в умовах антиплоскої деформації. Р. Malits [247] вивчив взаємодію подвійно періодичних систем жорстких лінійних включень в ізотропному середовищі.

З огляду на розвиток нанотехнологій у виготовленні магнітоелектричних композитів дослідження п'єзоелектричних та магнітоелектропружних матеріалів із подвійно періодичними системами тонких включень чи тріщин є надзвичайно затребуваним, проте й значно складнішим завданням.

**Посднані, гіллясті та ламані включення.** Аналіз пружних ламаних чи перехрещених включень, в основному, стосується задач антиплоскої деформації. Зокрема у роботах [265, 266] розглянуто системи довільно орієнтованих злучених стрічкових пружних включень. У працях [267–269] здійснено аналіз антиплоскої деформації середовища, що містить систему зв'язаних тонких жорстких включень, зокрема, у формі фасонних профілів кутника, тавра, двотавра тощо.

У межах плоскої задачі теорії пружності розроблено методи опису тріщин ламаного профілю [81, 82, 84], а також перехрещених абсолютно жорстких включень [270, 271]. Гнучке пружне хрестоподібне включення розглянуто у роботі [272]. Питання ж аналізу гіллястих (розгалужених) тонких включень довільної жорсткості та геометрії до 2010 року залишалося цілком не дослідженим.

**Відшаровані включення та накладки.** Частково відшаровані глобулярні еліптичні включення розглянуто у роботі [273]. Відшарування коротких волокон у композиті вивчено у праці [274]. Тривимірне поле напружень поблизу частково відшарованого жорсткого циліндричного волокна досліджено у статті [275]. Стосовно тонких включень, то в основному, досліджувалися тільки тонкі абсолютно жорсткі включення, однобічно відшаровані уздовж всієї довжини повністю чи за гладкого контакту з оточуючим матеріалом [40, 69, 276], а також з урахуванням тертя [69, 277, 278]. Взаємодію міжфазної тріщини та жорсткого однобічно відшарованого включення вивчено у роботі [279]. У працях В.Г. Попова та О.П. Мойсеєнка [68, 280] досліджено нестационарну задачу для тонкого жорсткого відшарованого включення за умов плоскої та антиплоскої деформації. Розгляду пружних включень стосуються лише поодинокі роботи, наприклад, тонке однобічно повністю відшароване гнучке включення розглядається у праці [281]. Тонкі відшаровані включення в п'єзоелектричному матеріалі залишилися практично поза увагою дослідників.



Дослідження задач для підкріплених розвантажувальних отворів пластинчатих елементів конструкцій стосуються численні праці А.О. Сяського з учнями, зокрема й [282–284], що розвивають результати ґрунтовних досліджень з цієї тематики, здійснювані ще у 1950–70-х рр. Г.М. Савіним, М.П. Шереметьєвим, Н.П. Флейшманом, В.В. Божидарніком та іншими вченими [285–290]. У монографії [239] методами рядів розраховано концентрацію напружень в анізотропних пластинках із подвійно періодичними системами пружних кілець. У роботі [291] побудовано алгоритм визначення термонапруженого стану анізотропних пластинок із пружними кільцями. У праці [292] розглянуто розсіювання електромагнітних хвиль тонким діелектричним покривом на циліндрі. У роботі I. Benedetti та ін. [293] побудовано швидкий МГЕ для аналізу пошкоджених конструкцій із наклеєними тонкими п'єзоелектричними сенсорами, що моделюються методом скінченних елементів.

**Руйнування тіл із тонкими включеннями.** Однією з основних проблем у дослідженні граничної рівноваги тіл із тонкими неоднорідностями є три можливі сценарії руйнування, пов'язані з місцем його зародження [36]: 1) у тілі поблизу вершини дефекту; 2) на спільній межі з основним матеріалом; 3) усередині включення. Не виключено, що процес руйнування може виникати також і на невеликій відстані від включення, або охоплювати реалізацію одночасно декількох сценаріїв.

У літературі найбільше уваги приділено вивченню руйнування, що зароджується в тілі поблизу вершини дефекту. Тут слід відзначити роботи Л.Т. Бережницького, Р.С. Гром'яка, В.В. Панасюка та І.І. Труша [294, 295], в яких руйнування поблизу жорстких гострокінцевих включень пов'язане з радіальною складовою тензора напружень в околі вістря дефекту; Е.Е. Gdoutos [74, 296], де започатковано і розвинуто ідею застосування при вивченні граничного стану тіл із жорсткими тонкими чи гострокінцевими включеннями критерію стаціонарності густини енергії деформації G.C. Sih [297]; С.Ю. Попіни та Г.Т. Сулима [298], в якій у критеріальному співвідношенні для тонких пружних включень враховано як кільцеву, так і радіальну складові тензора напружень; М.М. Кундрата [299], де комплексно розглядаються механізми руйнування, спричинені відшаруванням та розривом включення тощо. Експериментального дослідження тонких жорстких включень, а також теоретичного вивчення включень у попередньо напружених матеріалах стосуються праці F. Dal Corso, D. Bigoni, M. Gei [300, 301], де руйнування пов'язано з радіальною складовою тензора напружень. У роботах М.М. Стадника та О.Є. Андрейківа [302] і В.П. Силванюка та Р.Я. Юхима [95, 303] опрацьовано теорію руйнування тонких податних включень на основі

вінклерової моделі. Достатньо повний огляд досліджень, що стосуються руйнування тіл із тонкими чи гострокінцевими жорсткими і пружними вклученнями, можна знайти у монографії [36] та працях [298, 299].

**Висновок.** Дослідження проблематики взаємодії фізико-механічних полів у анізотропних структурно-неоднорідних тілах має широкі можливості для практичного застосування у конструюванні інноваційних продуктів і технології їхнього виготовлення, а також великі перспективи отримання важливих теоретичних результатів у механіці деформівного твердого тіла.

Певним важливим кроком в опрацюванні цієї тематики і вирішення багатьох проблем, зокрема, побудови математичної теорії третинного піроелектричного ефекту, загальних принципів побудови фундаментальних розв'язків та суто крайових інтегральних рівнянь термомагнітоелектропружності, методів отримання моделей та аналізу тіл із тонкими накладками та неоднорідностями довільної гладкої чи ламаної (у т.ч. гіллястої) форми, визначення ефективних фізико-механічних характеристик магнітоелектричних композитів тощо, які не вдавалося вирішити до 2010 року є граничноелементний метод функцій стрибка, опрацьований у публікаціях [305–323]. Аналіз результатів, отриманих за допомогою цього методу вимагає окремого викладу.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Woo H.-G., Li H.* Advanced functional materials. – London: Springer, 2011. – 350 p.
2. *Moskowitz S.L.* The advanced materials revolution: technology and economic growth in the age of globalization. – Wiley, 2009. – 280 p.
3. *Ванин Г.А.* Механика ленточных композиционных материалов // Прикл. механика. – 1985. – 21. – № 4. – С. 24–32.
4. *Goldwasser D.J., Ostocka E.P., Kear B.H.* The mechanical behavior of polysulfone matrix composites reinforced with amorphous metal ribbon // Mater. Sci. and Eng. – 1978. – 34, No. 2. – P. 139–146.
5. *Pollock J.T., Arthur J.* Tensile strength of ribbon reinforced composites // Mater. Sci. and Eng. – 1975. – 2. – No. 18. – P. 209–212.
6. *Rexer J., Anderson E.* Composites with planar reinforcements (flakes, ribbons). A review // Polym. Eng. and Sci. – 1979. – 19, No. 1. – P. 1–11.
7. *Bower C., Rosen R., Jin L., Han J., Zhou O.* Deformation of carbon nanotubes in nanotube-polymer composites // Applied Physics Letters. – 1999. – 74. – P. 3317–3319.
8. *Qian D., Dickey E.C., Andrews R., Rantell T.* Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube-polystyrene composites // Applied Physics Letters. – 2000. – 76. – P. 2868–2870.
9. *Schadler L.S., Giannaris S.C., Ajayan P.M.* Load transfer in carbon nanotube epoxy composites // Applied Physics Letters. – 1998. – 73. – P. 3842–3844.
10. *Wagner H.D., Lourie O., Feldman Y., Tenne R.* Stress-induced fragmentation of multiwall carbon nanotubes in a polymer matrix // Applied Physics Letters. – 1998. – 72. – P. 188–190.
11. *Chen X.L., Liu Y.J.* Square representative volume elements for evaluating the effective material properties of carbon nanotube-based composites // Computational Materials Science. – 2004. – 29, No. 1. – P. 1–11.

12. *Liu Y.J., Chen X.L.* Evaluations of the effective materials properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element // *Mechanics of Materials*. – 2003. – 35. – P. 69–81.
13. *Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сеник Н.А., Фильмитинский М.Л.* Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел. – М.: КомКнига, 2005. – 312 с.
14. *Сыржин Л.Н.* Пьезомагнитная керамика. – Л.: Энергия. Ленингр. отд-ние, 1980. – 208 с.
15. *Улітко А.Ф., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф.* Магнітопружність при динамічному навантаженні. – К.: Либідь, 1994. – 155 с.
16. *Encyclopedia of smart materials / ed. by M. Schwartz*. – New York: Wiley, 2002. – 1073 p.
17. *Lin Y., Sodano H.A.* Fabrication and electromechanical characterization of a piezoelectric structural fiber for multifunctional composites // *Advanced Functional Materials*. – 2009. – 19. – P. 592–598.
18. *Lin Y., Sodano H.A.* A double inclusion model for multiphase piezoelectric composites // *Smart Materials and Structures*. – 2010. – 19, No. 3.
19. *Калоев С.А., Петренко А.В.* Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
20. *Eerenstein W., Mathur N.D., Scott J.F.* Multiferroic and magnetoelectric materials // *Nature*. – 2006. – 442. – P. 759–765.
21. *Glinchuk M.D., Eliseev E.A., Morozovska A.N., Blinc R.* Giant magnetoelectric effect induced by intrinsic surface stress in ferroic nanorods // *Phys. Rev. B*. – 2008. – 77, No. 2. – P. 024106-11.
22. *Vaz C.A.F., Hoffman J., Ahn C.H., Ramesh R.* Magnetoelectric Coupling Effects in Multiferroic Complex Oxide Composite Structures // *Adv. Mater.* – 2010. – 22. – P. 2900–2918.
23. *Бурак Я., Кондрат В., Грицина О.* Основи локально градієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. – 208 с.
24. *Кондрат В., Грицина О.* Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків // *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології*. – 2009. – Вип. 9. – С. 7–46.
25. *Murakami Y.* Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions. – Elsevier, 2002. – 369 p.
26. *Ясній П.В.* Пластично деформовані матеріали: втома і тріщинотривкість. – Львів: Світ, 1998. – 292 с.
27. *Маруха В.І., Панасюк В.В., Силованюк В.П.* Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: СПОЛЮМ, 2009. – 262 с.
28. *Маруха В.І., Середницький Я.А., Гнип І.П., Силованюк В.П.* Розробка ін'єкційних технологій та створення комплексу пересувного устаткування для діагностики та відновлення працездатності бетонних і залізобетонних конструкцій і споруд, що експлуатуються в умовах корозійно-механічного руйнування // *Наука та інновації*. – 2007. – Т. 3, № 5. – С. 26–33.
29. *Панасюк В.В., Силованюк В.П., Маруха В.І.* Міцність пошкоджених тріщинами елементів конструкцій, залікованих за ін'єкційними технологіями // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2005. – № 6. – С. 60–64.
30. *Силованюк В.П., Маруха В.І., Онищак Н.В.* Залишкова міцність циліндричних елементів з тріщинами, залікованими за ін'єкційною технологією // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2007. – № 1. – С. 99–104.
31. *Panasjuk V., Sylovanjuk V., Marukha V.* Static and cyclic strength of a cracked body which strengthened by injection technologies // *Acta mechanica et automatica*. – 2007. – Vol. 1, No. 1 – P. 85–88.
32. *Грилицький Д.В., Сулим Г.Т.* Розвиток теорії тонкостінних включень у Львівському державному університеті // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – Львів: Вища школа. Вид-во при Львів. ун-ті, 1987. – Вип. 27. – С. 3–9.
33. *Сулим Г.Т., Піскозуб Й.З.* Умови контактної взаємодії тіл (огляд) // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – 2004. – 47, № 3. – С. 110–125.
34. *Попов Г.Я.* Вклад одесских исследователей в развитие методов решения смешанных задач механики деформируемого тела // *Тез. докл. IV Всесоюз. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела»* (Одесса, 26–29 сент. 1989 г.). – Одесса, 1989. – Т. 2. – С. 59–60.

35. *Mura T.* Inclusion problem // *Appl. Mech. Rev.* – 1988. – 41. – P. 15–20.
36. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
37. *Підстригач Я.С.* Умови теплового контакту твердих тіл // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1963. – № 7. – С. 872–874.
38. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 487 с.
39. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. – М.: Факториал, 1998. – 223 с.
40. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – М.: Физматлит, 1993. – 224 с.
41. *Арутюнян Н.Х.* Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями // *Успехи мат. наук.* – 1987. – Т. 10. – № 4. – С. 3–91.
42. *Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. Монографія. У 2-х т. – Луцьк: Надстир'я, 2007.
43. *Винницька Л.І., Григоренко Я.М., Савула Я.Г.* Гетерогенна математична модель пружного тіла з тонким податливим на згин включенням // *Доп. НАН України.* – 2009. – № 9. – С. 62–66.
44. *Вишневский К.В., Кушир Р.М.* Граничные интегральные уравнения для тела с инородными включениями // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1996. – 39. – № 1. – С. 37–41.
45. *Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Сташук Н.Г.* Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
46. *Григоренко О., Савула Н.* Полівимірна крайова задача гетерогенної математичної моделі контактної взаємодії пружного тіла з тонким включенням // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем.* та інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 120–126
47. *Гузь А.Н.* Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
48. *Денисюк И.Т.* Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке // *Изв. Рос. АН. Механика твердого тела.* – 2000. – № 4. – С. 140–148.
49. *Мартиняк Р.М.* Механоцифוזійна взаємодія тіл з урахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2000. – 36. – № 2. – С. 124–126.
50. *Матисяк С.Й., Євтушенко О.О., Зеленьк В.М.* Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – 40. – № 4. – С. 34–40.
51. *Калюков С.А., Авдюшина Е.В., Качан Ю.Б.* Напряженное состояние кусочно-однородного анизотропного полупространства с трещинами, упругими и жесткими включениями // *Теоретическая и прикладная механика.* – Донецк, 2002. – Вып. 35. – С. 53–65.
52. *Гудрамович В.С.* Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций. – К.: Наук. думка, 2005. – 223 с.
53. *Кит Г.С., Емец В.Ф., Кунец Я.И.* Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 1999. – № 3. – С. 55–64.
54. *Кит Г.С., Кунец Я.И., Михаськів В.В.* Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 2004. – № 5. – С. 82–89.
55. *Кунец Я.І.* Пружна рівновага тіла з тонким гострокінцевим м'яким включенням в умовах поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2004. – 47. – № 3. – С. 144–148.
56. *Лобода В.В.* Применение метода осреднения к расчету плиты, подкрепленной стрингерами // *Прикл. мат. и механика.* – 1981. – 45, № 5. – С. 867–875.
57. *Мелешко В.В.* Генерация акустических волн в полупространстве прямоугольным излучателем конечных размеров // *Акуст. вісн.* – 1999. – 2. – № 1. – С. 42–49.
58. *Михаськів В.В., Хай О.М.* Симетрична задача взаємодії тріщин і тонких жорстких включень у тривимірній матриці // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2003. – 39, № 2. – 11 с.

59. *Мовчан А.Б., Морозов Н.Ф., Назаров С.А.* О разрушении вблизи пикообразных включений при посадке с натягом // Пластичность и разрушение тверд. тел. – М., 1988. – С. 137–145.
60. *Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
61. *Назаренко Л.Д., Острик В.И.* Изгиб прямоугольной пластинки с тонким криволинейным включением // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1988. – Вып. 44. – С. 19–24.
62. *Кухарський В., Кухарська Н., Савула Я., Мандзак Т.* Фізико-математичне моделювання процесів тепломасоперенесення в середовищах із включеними тонкими шарами // Вісн. Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 2006 – 11, № 3. – С. 145–152.
63. *Саркисян В.С.* Контактные задачи для полуплоскостей с упругими накладками. – Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.
64. *Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Асимптотическое поведение напряженно-деформированного состояния вблизи острых включений // Докл. АН СССР. – 1986. – Т. 290, № 1. – С. 48–51.
65. *Опанасович В.К., Драган М.С.* Антиплоска деформація тіла з системою тонких пружних включень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вып. 22. – С. 71–77.
66. *Панасюк В.В., Андрейків О.С.* Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 7. – С. 636–639.
67. *Поддубяк А.П., Кулець Я.И.* Осесимметричное кручение упругого полупространства с упругой шайбой // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 7. – С. 66–70.
68. *Попов В.Г., Мойсеенок А.П.* Концентрация напряжений вблизи отслоившегося тонкого упругого включения при воздействии нестационарной волны продольного сдвига // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 184–192.
69. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
70. *Сяський А.А., Сяський В.А.* Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 5. – С. 94–99.
71. *Фильтинский Л.А.* Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119–127.
72. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
73. *Чобанян К.С., Хачикян А.С.* Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1967. – Т. 20, № 6. – С. 19–29.
74. *Gdoutos E.E.* Failure of a composite with a rigid fiber inclusion // Acta mech. – 1981. – 39, No. 3–4. – P. 251–262.
75. *Sih G.C.* Plane extension of rigidly embedded line inclusions // Developments in mechanics, vol.3, Pt.1. Solid Mech. and Mater. New York-Wiley, 1965. – P. 61–79.
76. *Belytschko T., Xiao S.P.* Coupling methods for continuum model with molecular model // Int. J. for Multiscale Computational Engineering. – 2003. – 1(1). – P. 115–126.
77. *Badia S., Parks M., Bochev P., Gunzburger M., Lehoucq R.* On atomistic-to-continuum coupling by blending // Multiscale Model. Simul. – 2008. – 7, No. 1. – P. 381–406.
78. *Андрейків А.Е.* Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. – К.: Наук. думка, 1992. – 184 с.
79. *Назарчук З.Т., Стаднік Т.М.* Дифракційна взаємодія тріщиноподібних дефектів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, № 4. – С. 47–51.
80. *Осадчук В., Кушнір Р., Николишин М.* Залишкові напруження в циліндричній оболонці з тріщиною // Машинознавство. – 1998. – № 4/5. – С. 40–43.
81. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
82. *Саврук М.П.* Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. Панасюка В.В. / Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

83. *Саврук М.П., Зеленьяк В.М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: РАСТР, 2009. – 212 с.
84. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
85. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
86. *Опанасович В.К., Драган М.С., Тисовский Л.О.* Напряжения в плоскости, содержащей систему прямолинейных включений // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – 21, № 6. – С. 21–26.
87. *Сулим Г.Т.* Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 11. – С. 82–89.
88. *Бережницкий Л.Т., Денисюк И.Т.* Напряженно-деформированное состояние вблизи жесткого дискообразного включения в транслопном теле // Физ.-хим. механика материалов. – 1984. – 1. – С. 45–50.
89. *Бережницкий Л.Т., Денисюк И.Т.* О распределении напряжений и смещений вблизи жесткого дискообразного включения // Физ.-хим. механика материалов. – 1984. – 6. – С. 105–106.
90. *Денисюк И.Т.* Пружна рівновага тіла з негладким включенням. – Луцьк: Ред.-видавничий відділ ЛДУУ, 2004. – 220 с.
91. *Selvadurai A.P.S.* An inclusion at a bi-material elastic interface // Journal of Engineering Mathematics. – 2000. – 37, No. 1–3. – P. 155–170.
92. *Selvadurai A.P.S.* Mechanics of a rigid circular disc bonded to a cracked elastic half-space // Int. J. of Solids and Structures. – 2002. – 39. – P. 6035–6053.
93. *Kanaun S.K., Levin V.M.* Self-Consistent Methods for Composites. Vol.1: Static Problems. – Springer, 2008. – 376 p.
94. *Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
95. *Силованюк В.П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: НАНУ Фіз.-мех. ін-т ім. Г.В. Карпенка, 2000. – 300 с.
96. *Бернар И.И., Опанасович В.К.* Напряженное состояние пластины с тонкостенным включением по дуге окружности // Прикладная математика и механика. – 1983. – 47. – № 2. – С. 249–256.
97. *Френчко Ю.С., Ткач М.Д.* Антиплоская деформация тела с тонким дугообразным включением // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. К.: Наук. думка, 1978. – С. 81–84.
98. *Сулим Г., Пастернак Я.* Регуляризована тотожність Сомільяни для задач теорії пружності з тонкостінними структурами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. – Вип. 13. – 2007. – С. 142–150.
99. *Сулим Г.Т., Пастернак Я.М.* Застосування методу граничних елементів до аналізу антиплоскої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 136–144.
100. *Опанасович В.К.* О двух подходах к исследованию антиплоской деформации изотропного массива с тонким упругим включением // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52. – Вып. 1. – С. 116–119.
101. *Винницька Л., Саула Я.* Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням // Фіз.-мат. моделювання та інф. технології. – 2008. – № 7. – С. 21–29.
102. *Leite L.G.S., Coda H.B., Venturini W.S.* Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2003. – 27. – P. 193–201.
103. *Leite L.G.S., Venturini W.S.* Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft thin inclusions // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2005. – 29. – P. 257–267.
104. *Padron L.A., Aznarez J.J., Maeso O.* BEM–FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2007. – 31. – P. 473–484.
105. *Riederer K., Duenser C., Beer G.* Simulation of linear inclusions with the BEM // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2009. – 33. – P. 959–965.

106. *Saleh A.L., Aliabadi M.H.* Crack growth analysis in reinforced concrete using BEM // *J. Eng. Mech.* – 1998 – 124, No. 9. – P.949–958.
107. *Aliabadi M.H., Saleh A.L.* Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method // *Eng. Fract. Mech.* – 2002. – 69. – P. 267–280.
108. *Лехницький С.Г.* Теорія еластичності анізотропного тіла. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
109. *Павлычко В.М., Сулим Г.Т.* Плоская задача для линейных включений на границе раздела анизотропных материалов. – Львов, 1987. – 11 с. – Ред. журн. «Физ.-хим. механика материалов». Деп. в ВИНТИ 15 янв. 1987 г., № 330-B87.
110. *Сулим Г.Т., Шевчук С.П.* Плоская задача для кусково-однородного анизотропного тела зі стрічковим пружним включенням // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1999. – 35, № 6. – С. 7–16.
111. *Ting T.C.T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.
112. *Pan E.* A general boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics // *Int. J. Fract.* – 1997. – 88 – P. 41–59.
113. *Fan H., Keer L.M.* Two-dimensional line defects in anisotropic elastic solids // *Int. J. Fract.* – 1993. – 62. – P. 25–42.
114. *Бурак Я.Й.* Вибрані праці. – Львів: НУЦДМІПІММ ім. Я.С.Підстригача НАН України. В-во «Ахіл», 2001. – 352 с.
115. *Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д.* Визначення параметрів термомеханічного стану термом'яких магнітотвердих феромагнітних тіл за умов дії квазіусталених електромагнітних полів // *Доп. НАН України.* – 2007. – № 8. – С. 53–58.
116. *Бурак Я.И., Чекурин В.Ф.* Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
117. *Гачкевич А.Р.* Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
118. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
119. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
120. *Терлецький Р.Ф.* Моделювання термомеханічної поведінки багатокомпонентних деформівних твердих тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання. Ч.1. Балансові співвідношення механіки і другий закон термодинаміки // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2002. – 45, № 2. – С. 81–91.
121. *Терлецький Р.Ф.* Моделювання термомеханічної поведінки багатокомпонентних деформівних твердих тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання. Ч. 2. Статистичний опис чинників дії електромагнітного поля на багатокомпонентні тіла // *Мат/ методи та фіз.-мех. поля.* – 2002. – 45, № 3. – С. 155–168.
122. *Haо T.H., Shen Z.Y.* A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications // *Eng. Fract. Mech.* – 1994. – 47. – P. 793–802.
123. *Zhao M.H., Wang H., Yang F., Liu T.* A magneto-electroelastic medium with an elliptical cavity under combined mechanical–electric–magnetic loading // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* – 2006. – 45. – P. 227–237.
124. *Denda M.* BEM analysis of semipermeable piezoelectric cracks // *Key Engng. Materials.* – 2008. – 383. – P. 67–84.
125. *Mikhailov G.K., Parton V.Z.* Electromagnetoelasticity. – New York: Hemisphere, 1990.
126. *Shindo Y., Ozawa E., Nowacki J.P.* Singular stress and electric fields of a cracked piezoelectric strip // *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.* – 1990. – 1. – P. 77–87.
127. *Ang W.T., Athanasius L.* A boundary integral approach for plane analysis of electrically semi-permeable planar cracks in a piezoelectric solid // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2011. – 35. – P. 647–656.
128. *Kulikov A.A., Nazarov S.A.* Cracks in piezoelectric and electroconductive bodies // *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* – 2007. – Vol. 1, No. 2. – P. 201–216.

129. Zhang T.Y., Zhao M.H., Tong P. Fracture of piezoelectric ceramics // Adv. Appl. Mech. –2002. – 38. – P. 147–289.
130. Chen Y.H., Hasebe N. Current understanding on fracture behaviors of ferroelectric/piezoelectric // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2005. – 16. – P. 673–687.
131. Park S.B., Sun C.T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics // J. Am. Ceram. Soc. – 1995. – 78. – P. 1475–1480.
132. Калюеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей: Монография. – Донецк: ООО «Юго-Восток, Лтд», 2007. – 268 с.
133. Bardzokas D., Filshinsky M.L., Filshinsky L.A. Mathematical methods in electro-magneto-elasticity. – New York: Springer, 2007. – 530 p.
134. Qin Q.H. Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials. – Boston: WIT Press, 2001.
135. Говоруха В.Б. Численно-аналитическое исследование трещины в области раздела двух пьезоэлектрических материалов // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2005. – Вип. 9, Т. 2. – С. 27–34.
136. Говоруха В.Б. О зоне электрического предразрушения в окрестности вершины трещины в пьезокерамическом материале // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А.: Природничі науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 66–71.
137. Говоруха В.Б. Об электромеханических эффектах у вершины трещины между двумя пьезокерамическими материалами // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вип. 43. – С. 176–182.
138. Говоруха В.Б., Геррманн К.П., Лобода В.В. Электрически проникаемая трещина с зонами контакта между двумя пьезоэлектрическими материалами // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 66–74.
139. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Аналіз міжфазної тріщини в п'єзокерамічному тілі скінченних розмірів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип. 4. – С. 47–52.
140. Говоруха В.Б., Лобода В.В. Вплив електричної проникності міжфазної тріщини на характеристики електромеханічного поля в околі її вершини // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 44–55.
141. Андрейків О.С., Назарчук З.Т., Скальський В.Р., Рудавський Д.В., Сергієнко О.М. Коэффициенты интенсивности напряжений, спрчинених магнетним полем у ферромагнетиках // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, № 3. – С. 130–132.
142. Куличич Я.П., Назарчук З.Т. Інтегральні рівняння для електромагнетного поля у провідному тілі з тріщиною // Відбір і оброб. інформації: Міжвід. зб. наук. пр. – 2005. – Вип. 23. – С. 11–16.
143. Pan E. A BEM analysis of fracture mechanics in 2D anisotropic piezoelectric solids // Eng. Anal. Bound. Elem. – 1999. – 23. – P. 67–76.
144. Rajapakse R.K.N.D., Xu X.-L. Boundary element modelling of cracks in piezoelectric solids // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2001. – 25. – P. 771–781.
145. Groh U., Kuna M. Efficient boundary element analysis of cracks in 2D piezoelectric structures // Int. J. Sol. Struct. – 2005. – 42. – P. 2399–2416.
146. Garcia-Sanchez F., Saez A., Dominguez J. Anisotropic and piezoelectric materials fracture analysis by BEM // Computers and Structures. – 2005. – 83. – P. 804–820.
147. Liew K.M., Sun Y., Kitipornchai S. Boundary element-free method for fracture analysis of 2-D anisotropic piezoelectric solids // Int. J. Num. Meth. Eng. – 2007. – 69. – P. 729–749.
148. Sheng N., Sze K.Y. Multi-region Trefftz boundary element method for fracture analysis in plane piezoelectricity // Comput. Mech. – 2006. – 37. – P. 381–393.
149. Sanz J.A., Ariza M.P., Dominguez J. Three-dimensional BEM for piezoelectric fracture analysis // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2005. – 29. – P. 586–596.
150. Qin T., Yu Y.S., Noda N.A. Finite-part integral and boundary element method to solve three-dimensional crack problems in piezoelectric materials // Int. J. Solids Struct. – 2007. – 44. – P. 4770–4783.
151. Rungtornrat J., Mear M.E. Analysis of fractures in 3D piezoelectric media by a weakly singular integral equation method // Int. J. Fract. – 2008. – 151. – P. 1–27.



152. *Qin Q.H.* Green's function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.
153. *Yang J.* Special topics in the theory of piezoelectricity. – London: Springer, 2009. – 342 p.
154. *Подільчук Ю.Н., Дашко О.Г.* Напряженно-деформированное состояние упругого ферромагнетика с эллипсоидальным включением при действии однородного магнитного поля // Прикладная механика. – 2003. – 39, № 7. – С. 64–74.
155. *Подільчук Ю.Н.* Напряженное состояние ферромагнетика с эллиптической трещиной при действии однородного магнитного поля // Прикладная механика. – 2001. – 37, № 2. – С. 78–88.
156. *Подільчук Ю.Н.* Электроупругое равновесие трансверсально-изотропных пьезокерамических сред с полостями, включениями и трещинами // Прикладная механика. – 1998. – 34, № 10. – С. 109–119.
157. *Бабич И.Ю., Кирилук В.С.* Напряженное состояние электроупругого пространства с произвольно ориентированным трехосным эллипсоидальным включением // Приклад. механика. – 2009. – 45, № 4. – С. 72–80.
158. *Pan E., Albrecht J.D., Zhang Y.* Elastic and piezoelectric fields in quantum wire semiconductor structures – A boundary integral equation analysis // Phys. Stat. Sol. (b). – 2007. – 244, No. 6. – 1925–1939.
159. *Han F., Pan E., Albrecht J.D.* Strain and piezoelectric fields in embedded quantum wire arrays // Superlattices and Microstructures. – 2006. – 40. – P. 125–136.
160. *Pan E., Han F., Albrecht J.D.* Strain fields in InAs/GaAs quantum wire structures: Inclusion versus inhomogeneity // J. Appl. Phys. – 2005. – 98. – P. 013534.
161. *Ramsey J.J., Pan E., Chung P.W.* Modelling of strain fields in quantum wires with continuum methods and molecular statics // J. Phys.: Condens. Matter. – 2008. – 20. – P. 485215–27.
162. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. – М.: Физматгиз, 1994. – 335 с.
163. *Xiao Z.M., Zhang H.X., Chen B.J.* Microcrack initiation at the tip of a semi-infinite rigid line inhomogeneity in piezoelectric solids // International Journal of Engineering Science. – 2005. – 43, No. 15–16. – P. 1223–1233.
164. *Wu L., Du S.* A rigid line in a confocal elliptic piezoelectric inhomogeneity embedded in an infinite piezoelectric medium // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – 37, No. 10. – P. 1453–1469.
165. *Li X.-F.* Dynamic response of a piezoelectric material with a conducting rigid inclusion // Meccanica. – 2000. – 35. – P. 383–392.
166. *Кирилук В.С.* О напряженном состоянии пьезокерамического тела с плоской трещиной, раскрываемой жестким включением // Приклад. механика. – 2008. – 44, № 7. – С. 47–60.
167. *Gao C.-F., Fan W.-X.* An interface inclusion between two dissimilar piezoelectric materials // Applied Mathematics and Mechanics. – 2001. – 22, No. 1. – P. 96–104.
168. *Chen B.J., Shu D.W., Xiao Z.M.* Electro-elastic interaction between a piezoelectric screw dislocation and collinear rigid lines // International Journal of Engineering Science. – 2006. – 44. – P. 422–435.
169. *Huang Z., Kuang Z.-B.* Dislocation inside a piezoelectric media with an elliptic inhomogeneity // Int. J. Solid. Struct. – 2001. – 38. – P. 8459–8479.
170. *Сулим Г., Рабош Р.В.* Антиплоска задача для тонкого пружного включения у п'єзоелектричному просторі // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – 69. – С. 189–202.
171. *Сулим Г.Т., Кунець Я.І., Рабош Р.В.* Асимптотичний аналіз динамічної взаємодії тонкого прямолінійного п'єзоелектричного включення з пружним середовищем за позовжнього зсуву // Вісн. Дон. ун-ту. – 2008. – № 1. – С. 137–141.
172. *Рабош Р.В.* Динамічна взаємодія пружного середовища з тонкостінним криволінійним п'єзоелектричним включенням при позовжніх коливаннях композита // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 1. – С. 101–106.
173. *Лобода В.В., Ходанен Т.В.* Задача термоелектромагнітопружності для п'єзоелектричного/п'єзомагнітного біматеріалу з міжфазною тріщиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 3. – С. 121–132.

174. *Feng W.J., Pan E., Wang X.* Dynamic fracture analysis of a penny-shaped crack in a magneto-electroelastic layer // *International Journal of Solids and Structures.* – 2007. – 44. – P. 7955–7974.
175. *Li R., Kardomateas G.A.* The mixed mode I and II interface crack in piezoelectromagneto-elastic anisotropic bimaterials // *Journal of Applied Mechanics.* – 2007. – 74. – P. 614–627.
176. *Sladek J., Sladek V., Wünsche M., Zhang Ch.* Analysis of an interface crack between two dissimilar piezoelectric solids // *Eng. Fract. Mech.* – 2012. – 89. – P. 114–127.
177. *Sladek J., Sladek V., Solek P., Pan E.* Fracture analysis of cracks in magneto-electro-elastic solids by the MLPG // *Computational mechanics.* – 2008. – 42, No. 5. – P. 697–714.
178. *Tian W.Y., Gabbert U.* Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // *European Journal of Mechanics A/Solids.* – 2004. – 23. – P. 599–614.
179. *Tian W.Y., Gabbert U.* Macrocrack-microcrack interaction problem in magneto-electroelastic solids // *Mechanics of Materials.* – 2005. – 37. – P. 565–592.
180. *Zhou Z.-G., Wang B., Sun Y.-G.* Two collinear interface cracks in magneto-electro-elastic composites // *International Journal of Engineering Science.* – 2004. – 42. – P. 1155–1167.
181. *Zhu T., Yang W.* Crack kinking in a piezoelectric solid // *International Journal of Solids and Structures.* – 1999. – 36. – P. 5013–5027.
182. *Dong C.Y., Lo S.H., Antes H.* Fracture analysis in 2D magneto-electro-elastic media by the boundary element method // *Comput. Mech.* – 2008. – 41. – P. 207–217.
183. *Garcia-Sanchez F., Rojas-Diaz R., Saez A., Zhang Ch.* Fracture of magneto-electroelastic composite materials using boundary element method (BEM) // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* – 2007. – 47. – P. 192–204.
184. *Rojas-Diaz R., Garcia-Sanchez F., Saez A.* Analysis of cracked magneto-electroelastic composites under time-harmonic loading // *International Journal of Solids and Structures.* – 2010. – 47. – P. 71–80.
185. *Zhu X., Huang Z., Jiang A., Chen W.Q., Nishimura N.* Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2010. – 34. – P. 927–933.
186. *Li J.Y.* Magnetolectric Green's functions and their application to the inclusion and inhomogeneity problems // *Int. J. Sol. Struct.* – 2002. – 39. – P. 4201–4213.
187. *Hou P.-F., Leung A.Y.T.* A spheroidal inclusion in an infinite magneto-electro-elastic material // *Int. J. Engng. Science.* – 2004. – 42. – P. 1255–1273.
188. *Midgley P.A., Dunin-Borkowski R.E.* Electron tomography and holography in materials science // *Nature Materials.* – 2009. – 8. – P. 271–280.
189. *Lang S.B.* Pyroelectricity: from ancient curiosity to modern imaging tools // *Physics Today.* – August 2005. – P. 31–36.
190. *Кім Г.С., Кривіцин М.Г.* Плоскіе задачі термоупругості для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
191. *Кім Г.С., Сушко О.П.* Стационарне температурне поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням // *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології.* – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.
192. *Кім Г.С., Сушко О.П.* Вплив джерела тепла на напружений стан тіла з теплоізолюваною круговою трщиною // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2011. – Вип. 9. – С. 11–121.
193. *Кім Г.С., Черняк М.С.* Напружений стан тіла з теплопровідними сферичними включеннями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – 54, № 4. – С. 82–89.
194. *Кім Г.С., Черняк М.С.* Напружений стан тіл з термічними циліндричними включеннями та трщинами (плоска деформація) // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2010. – 46, № 3. – С. 30–37.
195. *Піскозуб Й.З., Сулим Г.Т.* Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1996. – 32, № 4. – С. 39–48.
196. *Sulim G.T., Piskozub J.Z.* Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // *Journal of Engineering Mathematics.* – 2008. – 61. – P. 315–337.
197. *Добряк Д.А.* Периодическая задача термоупругости для пластины с упругими включениями // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. наук.* – 2008. – Вип. 1. – С. 98–105.

198. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Изд-во ЖТТУ, 2005. – 428 с.
199. *Киричок И.Ф.* Вынужденные моногармонические колебания и виброрагрев вязкоупругих гибких круглых пластинок с пьезослоями // Приклад. механика. – 2013. – 49, № 6. – С. 100–112.
200. *Lu P., Tan M.J., Liew K.M.* Piezothermoelastic analysis of a piezoelectric material with an elliptic cavity under uniform heat flow // Archive of Applied Mechanics. – 1998. – 68. – P. 719–733.
201. *Liu Jinxi, Zhang Xiaosong, Liu Xianglin, Zheng Jian.* Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow // Acta Mechanica Sinica. – 2000. – Vol. 16, No. 2. – P. 148–163.
202. *Кирилюк В.С.* Термонапряженное состояние пьезокерамического тела с плоской трещиной при симметричном тепловом потоке с её поверхностей // Приклад. механика. – 2010. – 46, № 7. – С. 23–33.
203. *Gao C.-F., Wang M.-Z.* Collinear permeable cracks in thermopiezoelectric materials // Mechanics of Materials. – 2001. – 33. – P. 1–9.
204. *Gao C.-F., Kessler H., Balke H.* Fracture analysis of electromagnetic thermoelastic solids // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2003. – 22. – P. 433–442.
205. *Калоеров С.А., Хорюшев К.Г.* Термоэлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 11. – С. 116–126.
206. *Калоеров С.А., Хорюшев К.Г.* Термоэлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 124–133.
207. *Калоеров С.А., Сорочан О.А.* Двумерные задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред // Теорет. и прикл. мех. – 2008. – Вып. 44. – С. 61–79.
208. *Калоеров С.А., Добряк Д.А.* Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной анизотропной полуплоскости // Теорет. и прикл. мех. – 2010. – Вып. 1(47). – С. 45–61.
209. *Qin Q.H.* Green's function for thermopiezoelectric plates with holes of various shapes // Archive of Applied Mechanics. – 1999. – 69. – P. 406–418.
210. *Qin Q.H.* 2D Green's functions of defective magnetoelastoelectric solids under thermal loading // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2005. – 29, No. 6. – P. 577–585.
211. *Hou P.F.* 2D fundamental solution for orthotropic pyroelectric media // Acta Mech. – 2009. – 206. – P. 225–235.
212. *Prasad N.N.V., Aliabadi M.H., Rooke D.P.* The dual boundary element method for thermoelastic crack problems // Int. J. Fract. – 1994. – 66. – P. 255–272.
213. *Mohammadi M., Hematiyan M.R., Aliabadi M.H.* Boundary element analysis of thermo-elastic problems with non-uniform heat sources // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. – 2010. – 45. – P. 605–627.
214. *Mukherjee Y.X., Shah K., Mukherjee S.* Thermoelastic fracture mechanics with regularized hypersingular boundary integral equations // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1999. – 23. – P. 89–96.
215. *Koshlev V., Ghassemi A.* Complex variable BEM for thermo- and poroelasticity // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2004. – 28. – P. 825–832.
216. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids // Int. J. Sol. Struct. – 2009. – 46, No. 21. – P. 3850–3859.
217. *Deb A., Banerjee P.K.* BEM for general anisotropic 2D elasticity using particular integrals // Commun. Appl. Num. Meth. – 1990. – 6. – P. 111–119.
218. *Deb A., Henry D.P. Jr., Wilson E.B.* Alternate BEM formulation for 2D and 3D anisotropic thermoelasticity // Int. J. Solids Struct. – 1991. – 27. – P. 1721–1738.
219. *Shiah Y.C., Tan C.L.* Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity // Computational Mechanics. – 1999. – 23. – P. 87–96.
220. *Shiah Y.C., Guao T.L., Tan C.L.* Two-dimensional BEM thermoelastic analysis of anisotropic media with concentrated heat sources // CMES. – 2005. – Vol. 7, No. 3. – P. 321–338.

221. *Shiah Y.C., Tan C.L.* Fracture mechanics analysis in 2-D anisotropic thermoelasticity using BEM // CMES. – 2000. – Vol. 1, No. 3. – P. 91–99.
222. *Ang W.T., Clements D.L.* Hypersingular integral equations for a thermoelastic problem of multiple planar cracks in an anisotropic medium // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1999. – 23, No. 9. – P. 713–720.
223. *Qin Q.H.* Fracture analysis of cracked thermopiezoelectric materials by BEM // Electronic Journal of Boundary Elements. – 2003. – Vol. 1, No. 2. – P. 283–301.
224. *Qin Q.H., Lu M.* BEM for crack-inclusion problems of plane thermopiezoelectric solids // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2000. – 48. – P. 1071–1088.
225. *Qin Q.H., Mai Y.W.* BEM for crack-hole problems in thermopiezoelectric materials // Engineering Fracture Mechanics. – 2002. – 69(5). – P. 577–588.
226. *Sladek J., Sladek V., Sulek P., Zhang Ch.* Fracture analysis in continuously nonhomogeneous magneto-electro-elastic solids under a thermal load by the MLPG // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – 47. – P. 1381–1391.
227. *Hsieh M.C., Hwu C.* Hygrothermal stresses in unsymmetric laminates disturbed by elliptical holes // J. Appl. Mech. – 2006. – 73. – P. 228–239.
228. *Гайвась Б.* Модель формостійкості пористої пластини в процесі природного осушення // Фіз.-мат. модел. та інформ. техн. – 2010. – Вип. 11. – С. 56–65.
229. *Поберейко Б.П.* Вплив температури на міцність деревини у пружній області деформування // Науковий вісник НЛТУ України: зб. наук.-техн. праць. – Львів: НЛТУ України. – 2007. – Вип. 17.2. – С. 61–66.
230. *Tadeu A., Simoes N., Branco F.* Steady-state moisture diffusion in curved walls, in the absence of condensate flow, via the BEM: a practical Civil Engineering approach (Glaser method) // Building and Environment. – 2003. – 38. – P. 677–688.
231. *Линьков А.М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
232. *Фильштинский Л.А.* Двоякопериодическая задача теории упругости для анизотропной среды с криволинейными разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 6. – С. 116–124.
233. *Choi H.J.* A periodic array of cracks in a functionally graded nonhomogeneous medium loaded under in-plane normal and shear // Int. J. Fract. – 1997. – 88. – P. 107–128.
234. *Божидарнік В.В., Максимович О.В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 228 с.
235. *Chen Y.Z.* Periodic rigid line problem in an infinite plate // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). – 1993. – 63, No. 7. – P. 464–471.
236. *Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т.* Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // Прикладная математика и механика. – 1975. – 39, № 3. – С. 520–529.
237. *Мартыняк Р.М., Сулим Г.Т.* Периодическая задача для системы линейных компланарных включений в изотропной плоскости // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Киев: Наук. думка, 1982. – Вип. 15. – С. 113–117.
238. *Опанасович В.К., Драган М.С.* Периодическая система параллельных тонких упругих включений в плоскости // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1985. – Вип. 23. – С. 83–89.
239. *Космодамианский А.С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К.: Вища школа, 1976. – 200 с.
240. *Clouteau D., Elhabre M.L., Aubry D.* Periodic BEM and FEM-BEM coupling // Comp. Mech. – 2000. – 25, No. 6. – P. 567–577.
241. *Коваленко Ю.Ф., Салганик Р.Л.* Трещиновидные неоднородности и их влияние на эффективные механические характеристики // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 5. – С. 76–86.
242. *Wang J., Fang J., Karihaloo B.L.* Asymptotic of multiple crack interactions and prediction of effective modulus // Int. J. Sol. Struct. – 2000. – 37. – P. 4261–4273.

243. Wang G.S. The interaction of doubly periodic cracks // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2004. – 42. – P. 249–294.
244. Dong C.Y., Lee K.Y. Numerical analysis of doubly periodic array of cracks/rigid-line inclusions in an infinite isotropic medium using the boundary integral equation method // *Int. J. Fract.* – 2005. – 133. – P. 389–405.
245. Максимович О.В. Двоперіодичні задачі теорії пружності для анізотропних пластинок із тріщинами // Наукові нотатки. – 2011. – Вип. 33. – С. 136–143.
246. Xiao J., Jiang C. Exact solution for orthotropic materials weakened by doubly periodic cracks of unequal size under antiplane shear // *Acta Mechanica Solida Sinica.* – 2009. – Vol. 22, No. 1. – P. 53–63.
247. Malits P. Doubly periodic array of thin rigid inclusions in an elastic solid // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 2010. – Vol. 63, No. 2. – P. 115–144.
248. Oranovich V., Porochovsky V., Delyavsky M. Antiplane deformation of isotropic body with a periodic system of thin rectilinear inclusions // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1999. – 37, No. 1. – P. 65–79.
249. Филытинский Л.А., Долгих В.Н. Модель анизотропной среды, армированной тонкими лентами // *Прикл. механика.* – 1979. – Т. 15, № 4. – С. 24–30.
250. Li J.Y. Magnetoelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials // *International Journal of Engineering Science.* – 2000. – 38. – P. 1993–2011.
251. Liu Y. A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2006. – 65. – P. 863–881
252. Mykhas'kiv V.V., Khay O.M., Zhang Ch., Bostrom A. Effective dynamic properties of 3D composite materials containing rigid penny-shaped inclusions // *Waves in Random and Complex Media.* – 2010. – 20, No. 3. – P. 491–510.
253. Леценко П.В., Маслов Б.П. Эффективные постоянные пьезоактивных композитов стохастической структуры // *Прикладная механика.* – 1987. – 23, № 3. – С. 71–77.
254. Маслов Б.П., Леценко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезомагнитной керамики, упрочненной дискретными волокнами // *Прикладная механика.* – 1981. – 17, № 8. – С. 114–118.
255. Хорошун Л.П., Дородных Т.И. Задача об эффективных свойствах стохастических пьезомагнитных композитных материалов // *Теорет. и прикладная механика.* – 2001. – Вып. 32. – С. 3–16.
256. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Леценко П.В. Прогнозирование эффективных пьезоактивных композитных материалов. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
257. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шкула Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с.
258. Шульга Н.А. Эффективные магнитоупругие свойства слоистых композитов // *Прикладная механика.* – 2006. – 42, № 8. – С. 36–43.
259. Шульга Н.А. Эффективные физико-механические свойства мелкослоистых пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов // *Сопротивление материалов и теория сооружений.* – 1986. – Вып. 48. – С. 43–45.
260. Liu Y.J., Chen X.L. Continuum models of carbon nanotube-based composites using the boundary element method // *Electronic Journal of Boundary Elements.* – 2003. – Vol. 1, No. 2. – P. 316–335.
261. Dong C.Y. Effective elastic properties of doubly periodic array of inclusions of various shapes by the boundary element method // *Int. J. Sol. Struct.* – 2006. – 43. – P. 7919–7938.
262. Lin'kov A.M., Koshelev V.F. Complex variables BIE and BEM for a plane doubly periodic system of flaws // *J. Chinese Institute of Engineers.* – 1999. – Vol. 22, No. 6. – P. 709–720.
263. Chen Y.Z., Hasebe N., Lee K.Y. Multiple crack problems in elasticity. – Southampton: WIT, 2003. – 356 p.
264. Xiao J.H., Xu Y.L., Jiang C.P. Exact solution to the antiplane problem of doubly periodic conducting rigid line inclusions of unequal size in piezoelectric materials // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2011. – 91, No. 5. – P. 413–424.

265. *Осів О.П., Сулим Г.Т.* Антиплоска деформація ізотропного середовища зі злученими пружними стрічковими включеннями // *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій.* – 2002. – Вип. 5. – С. 154–164.
266. *Osiv O., Sulym G.* Antiplane deformation of isotropic medium with connected elastic ribbon-like inclusions // Abstracts of the Fourth Polish-Ukrainian Conference “Current Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Media” (Łódź, 4–8 Sept., 2001). – Łódź: Technol. Univ. of Łódź, 2001. – P. 46.
267. *Шацький Л.П., Кундрат А.М.* Антиплоска деформація пружного простору зі зв'язаними жорсткими стрічковими включеннями // *Доп. НАН України.* – 2004. – № 11. – С. 55–60.
268. *Кундрат А.М.* Антиплоска задача для пружного простору із жорстким тонкостінним кутником // *Наукові нотатки.* – 2007. – Вип. 20, Т. 1. – Луцький національний технічний університет. – С. 245–249.
269. *Кундрат А.М.* Ізотропне тіло армоване фасонними профілями тавра та кутника в умовах поздовжнього зсуву // *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування.* – 2009. – 46, вип. 2. – С. 173–178.
270. *Антипов Ю.А., Попов Г.Я., Яцко С.И.* Решение задач о концентрации напряжений возле пересекающихся дефектов при помощи задачи Римана с бесконечным индексом // *Прикладная математика и механика.* – 1987. – 51, № 3. – С. 458–467.
271. *Попов В.Г.* Динамическая задача теории упругости для плоскости, содержащей жесткое крестообразное включение // *Прикладная математика и механика.* – 1993. – 57, № 1. – С. 100–115.
272. *Григорян Э.Х., Торосян Д.Р., Шагинян С.С.* Задача для упругой плоскости, содержащей крестообразное включение // *Известия НАН Армении. Механика.* – 2002. – 55, № 1. – С. 6–16.
273. *Zheng S.F., Denda M., Weng G.J.* Interfacial partial debonding and its influence on the elasticity of a two-phase composite // *Mechanics of Materials.* – 2000. – 32. – P. 695–709.
274. *Tvergaard V.* Debonding of short fibres among particulates in a metal matrix composite // *Int. J. Sol. Struct.* – 2003. – 40. – P. 6957–6967.
275. *Chaudhuri R.A.* Three-dimensional singular stress field near a partially debonded cylindrical rigid fiber // *Composite Structures.* – 2006. – 72. – P. 141–150.
276. *Ильина И.И., Сильвестров В.В.* Задача о тонком жестком межфазном включении, отслоившемся вдоль одной стороны от среды // *Изв. РАН. Мех. твердого тела.* – 2005. – № 3. – С. 153–166.
277. *Ильина И.И., Сильвестров В.В.* Частично отслоившееся тонкое жесткое включение между разными упругими материалами при наличии трения в зоне контакта // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* – 2007. – № 4 (54). – С. 124–139.
278. *Руссакова И.И.* Плоскость с включением, отслоившемся вдоль одной стороны от среды, под действием различных нагрузок при наличии трения // *Труды Всеросс. науч. конф. (26–28 мая 2004 г.). Часть 1, Мат. модел. мех., прочн. и надежн. конструкций, Мат. модел. и краев. задачи, СамГУ.* – Самара, 2004. – С. 191–194.
279. *Ярдухин А.К.* Аналитическое решение задачи взаимодействия межфазной трещины с отслоившимся межфазным включением при наличии сосредоточенных сил // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* – Самара, 2003. – 19. – С. 107–110.
280. *Мойсеенок А.П., Попов В.Г.* Нестационарная задача о концентрации упругих напряжений вблизи тонкого жесткого отслоившегося включения находящегося в условиях плоской деформации // *Вісн. Дніпр. ун-ту.* – 2007, №2/2. – Серія МЕХАНІКА. – Вип. 11. – Т. 2. – С. 130–140.
281. *Moraru G.* Concentration of stresses near a debonded flexible inclusion in plane elasticity // *Rev. Roum. Sci. Techn. – Мéc. Appl. – Bucarest, 2008. – TOME 53, No. 2. – P. 175–182.*
282. *Сяський А.О., Батишкіна Ю.В.* Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці // *Вісник ТДТУ.* – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 5–12.
283. *Сяський А.О., Шевцова Н.В.* Пружна рівновага пластинки з криволінійним контуром, частково підсиленою системою трьох несиметричних ребер // *Вісник ТДТУ.* – 2008. – Т. 13, № 1. – С. 13–19.

284. *Сяський А.О., Трохимчук О.Я.* Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і системи штампів з кутовими точками // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. «Машинобудування». – К., 2010. – № 58. – С. 36–41.
285. *Божидарник В.В.* Двовимірні задачі пружності й термопружності структурно-неоднорідних тіл. – Львів: Світ, 1998. – 352 с.
286. *Савин Г.Н.* Концентрація напружень около отверстий. – М.: Гос. изд-во тех.-теор. л-ры, 1951. – 496 с.
287. *Савин Г.Н., Флейшман Н.П.* Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – К.: Наук. думка, 1964. – 384 с.
288. *Савин Г.Н., Тульчий В.И.* Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. – К.: Наук. думка, 1971. – 268 с.
289. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
290. *Шереметьев М.П.* Пластинки с подкрепленным краем. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960. – 258 с.
291. *Калоеров С.А., Добряк Д.А.* Термоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими кольцами // Теорет. и прикл. мех. – 2009. – Вып. 46. – С. 155–168.
292. *Назарчук З.Т.* Моделювання розсіяння електромагнетних хвиль тонким діелектричним покривом на циліндрі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 1. – С. 96–104.
293. *Benedetti I., Aliabadi M.H., Milazzo A.* A fast BEM for the analysis of damaged structures with bonded piezoelectric sensors // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2010. – 199. – P. 490–501.
294. *Бережницький Л.Т., Громяк Р.С., Труш І.І.* О построении диаграмм локального разрушения для хрупких тел с остроконечными жесткими включениями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1975. – 11, № 5. – С. 40–47.
295. *Бережницький Л.Т., Панасюк В.В., Труш І.І.* О локальном разрушении хрупкого тела с остро-конечными жесткими включениями // Пробл. прочности. – 1973. – № 10. – С. 8–11.
296. *Gdoutos E.E.* Fracture mechanics. – Dordrecht: Springer, 2005. – 369 p.
297. *Mechanics of Fracture / ed. G.C. Sih.* – Leyden: Noordhoff, 1973. – 517 p.
298. *Попина С.Ю., Сулим Г.Т.* Предельная нагрузка для хрупкого тела с тонкостенным упругим включением // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1987. – 23, № 2. – С. 115–118.
299. *Кундрат Н.М.* Отслоение включения в ортотропной композиции // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 9. – С. 123–128.
300. *Dal Corso F., Bigoni D., Gei M.* The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part I Full-field solution and asymptotics // J. Mech. Phys. Sol. – 2008. – 56, No. 3. – P. 815–838.
301. *Dal Corso F., Bigoni D., Gei M.* The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part II Implications on shear band nucleation, growth and energy release rate // J. Mech. Phys. Sol. – 2008. – 56, No. 3. – P. 839–857.
302. *Стадник М.М., Андрейків А.Е.* Прочность материалов, содержащих системы тонких включений // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1986. – 22, № 1. – С. 29–35.
303. *Силованюк В.П., Юхим Р.Я.* Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням тіла // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 6. – С. 31–35.
304. *Сулим Г.Т.* Применение формулы Сомильяна в задачах теории упругости для тел с тонкостенными включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Киев: Наук. думка, 1983. Вып. 18. – С. 48–51.
305. *Pasternak I.A.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2011. – 35. – No. 4. – P. 678–690.
306. *Pasternak Ya.M., Sulym H.T.* Solution of the problems of antiplane deformation of bodies with thin ribbonlike inclusions by the methods of integral equations. I. General relations // Materials Science. – 2011. – 47, No. 1. – P. 36–44.
307. *Pasternak I.A.M., Sulym H.T.* Dual boundary element method for problems of the theory of thin inclusions // J. Math. Sci. – 2011. – 178, No. 4. – P. 421–434.

308. *Pasternak Ia.* Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magnetoelastic medium // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2012. – 36. – No. 5. – P. 799–811.
309. *Pasternak Ia.* Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2012. – 36, No. 12. – P. 1931–1941.
310. *Pasternak Ia.M.* Plane problem of elasticity for anisotropic bodies with thin elastic inclusions // *J. Math. Sci.* – 2012. – 186, No. 1. – P. 31–47.
311. *Pasternak Ia., Sulym H.* Stroh formalism based boundary integral equations for 2D magnetoelasticity // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2013. – 37, No. 1. – P. 167–175.
312. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelastic solids with cracks and thin inhomogeneities // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2013. – 37, No. 2. – P. 419–433.
313. *Pasternak Ia., Sulym H.* Stress state of solids containing thin elastic crooked inclusions // *J. Eng. Math.* – 2013. – 78. – P. 167–180.
314. *Pasternak Ia.M., Vasil'ev K.V., Sulym H.T.* Antiplane deformation by concentrated factors of bounded bodies with cracks and rigid inclusions // *J. Math. Sci.* – 2013. – 190, No. 5. – P. 710–724.
315. *Pasternak Ia.M., Sulym H.T.* Coupled 2D electric, magnetic, and mechanical fields in dielectrics with cracks and thin inclusions // *J. Math. Sci.* – 2013. – 192, No. 5. – P. 565–582.
316. *Pasternak Ya.M., Sulym H.T.* Solution of the problems of antiplane deformation of bodies with thin ribbonlike inclusions by the methods of integral equations. II. Analysis of the stress concentration and stress intensity // *Materials Science.* – 2013. – 48, No. 6. – P. 788–794.
317. *Sulym H., Pasternak Ia., Kutsyk S., Grodzki W.* Doubly periodic sets of thin branched inclusions in the elastic medium: stress concentration and effective properties // *Acta mechanica et automatica.* – 2013. – Vol. 7, No. 1. – P. 48–52.
318. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* Boundary integral equations for 2D thermoelasticity of a half-space with cracks and thin inclusions // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2013. – 37, No. 11. – P. 1514–1523.
319. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* Temperature field and heat flux that do not induce stress and electric displacement in a free thermoelastic anisotropic solid // *Mechanics Research Communications.* – 2014. – 57. – P. 40–43.
320. *Pasternak Ya.M., Sulim G.T.* Plane problem of elasticity for an anisotropic body with doubly periodic systems of thin inhomogeneities // *Mechanics of Solids.* – 2014. – Vol. 49, No. 2. – P. 162–174.
321. *Pasternak I.M., Sulym H.T., Oliyarnyk N.R.* Antiplane deformation of anisotropic bodies with periodic systems of thin inhomogeneities // *Materials Science.* – 2014. – Vol. 49, No. 5. – P. 602–611.
322. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelastic bimaterial // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* – 2014. – 48. – P. 87–101.
323. *Pasternak Ya.M., Sulym H.T., Pasternak R.M.* Generalized Somigliana identity for thermomagnetoelastic anisotropic bodies // *J. Math. Sci.* – 2015. – 205, No. 5. – P. 677–690.

#### REFERENCES

1. *Woo H.-G., Li H.* *Advanced functional materials.* London: Springer, 2011, 350 p.
2. *Moskowitz S.L.* *The advanced materials revolution: technology and economic growth in the age of globalization.* Wiley, 2009, 280 p.
3. *Vanin G.A.* *Mekhanika lentochnykh kompozitov (Mechanics of ribbon-like composites)* // *Int. Appl. Mech.*, 1985, 21, No. 4, P. 24–32.
4. *Goldwasser D.J., Otocka E.P., Kear B.H.* The mechanical behavior of polysulfone matrix composites reinforced with amorphous metal ribbon. *Mater. Sci. and Eng.*, 1978, 34, No. 2, P. 139–146.



5. *Pollock J.T., Arthur J.* Tensile strength of ribbon reinforced composites. *Mater. Sci. and Eng.*, 1975, 2, No. 18, P. 209–212.
6. *Rexer J., Anderson E.* Composites with planar reinforcements (flakes, ribbons). A review. *Polym. Eng. and Sci.*, 1979, 19, No. 1, P. 1–11.
7. *Bower C., Rosen R., Jin L., Han J., Zhou O.* Deformation of carbon nanotubes in nanotube-polymer composites. *Applied Physics Letters*, 1999, 74, P. 3317–3319.
8. *Qian D., Dickey E.C., Andrews R., Rantell T.* Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube-polystyrene composites. *Applied Physics Letters*, 2000, 76, P. 2868–2870.
9. *Schadler L.S., Giannaris S.C., Ajayan P.M.* Load transfer in carbon nanotube epoxy composites. *Applied Physics Letters*, 1998, 73, P. 3842–3844.
10. *Wagner H.D., Lourie O., Feldman Y., Tenne R.* Stress-induced fragmentation of multiwall carbon nanotubes in a polymer matrix. *Applied Physics Letters*, 1998, 72, P. 188–190.
11. *Chen X.L., Liu Y.J.* Square representative volume elements for evaluating the effective material properties of carbon nanotube-based composites. *Computational Materials Science*, 2004, 29, No. 1, P. 1–11.
12. *Liu Y.J., Chen X.L.* Evaluations of the effective materials properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mechanics of Materials*, 2003, 35, P. 69–81.
13. *Bardzokas D.I., Zobnin A.I., Senik N.A., Filshinskii M.L.* Sticheskie i dinamicheckie zadachi elektropругosti dlia sostavnykh mnogoviaznykh tel (Static and dynamic problems of electroelasticity for composite multiconnected solids). Moscow: KomKniga, 2005, 312 p.
14. *Syrkin L.N.* Piezomagnitnaya keramika (Piezomagnetic ceramics). Leningrad: Energiia, 1980, 208 p.
15. *Ulitko A.F., Mol'chenko L.V., Koval'chuk V.F.* Magnitopruzhnist' pry dynamichnomu navantazhenii (Magnetoelasticity at dynamic loading). Kyiv: Lybid', 1994, 155 p.
16. *Encyclopedia of smart materials / ed. by M. Schwartz.* New York: Wiley, 2002, 1073 p.
17. *Lin Y., Sodano H.A.* Fabrication and electromechanical characterization of a piezoelectric structural fiber for multifunctional composites. *Advanced Functional Materials*, 2009, 19, P. 592–598.
18. *Lin Y., Sodano H.A.* A double inclusion model for multiphase piezoelectric composites. *Smart Materials and Structures*, 2010, 19, No. 3.
19. *Kaloerov S.A., Petrenko A.V.* Dvumernye zadachi elektromagnitnouprugosti dlia mnogoviaznykh tel (Two-dimensional problems of electromagnetoelasticity for multi-connected solids). Donetsk: Yugo-Vostok, 2011, 232 p.
20. *Eerenstein W., Mathur N.D., Scott J.F.* Multiferroic and magnetoelectric materials. *Nature*, 2006, 442, P. 759–765.
21. *Glinchuk M.D., Eliseev E.A., Morozovska A.N., Blinc R.* Giant magnetoelectric effect induced by intrinsic surface stress in ferroic nanorods. *Phys. Rev. B*, 2008, 77, No. 2, P. 024106-11.
22. *Vaz C.A.F., Hoffman J., Ahn C.H., Ramesh R.* Magnetoelectric Coupling Effects in Multiferroic Complex Oxide Composite Structures. *Adv. Mater.*, 2010, 22, P. 2900–2918.
23. *Burak Ia., Kondrat V., Hrytsyna O.* Osnovy lokal'no gradiientnoyi teorii dielektrykiv (The bases of locally gradient theory of dielectrics). Uzhgorod: Lira, 2011, 208 p.
24. *Kondrat V., Hrytsyna O.* Liniini teorii elektromagnitomekhaniky dielektrykiv (Linear theories of electromagnetomechanics of dielectrics). *Fiz.-mat. modeliuvannia ta inform. technolog.*, 2009, Issue 9, P. 7–46.
25. *Murakami Y.* Metal fatigue: effects of small defects and nonmetallic inclusions. Elsevier, 2002, 369 p.
26. *Yasniy P.V.* Plastychno deformovani materialy: vtoma i trishchynovytrymkist' (Plastic deformed materials: fatigue and fracture toughness). Lviv: Svit, 1998, 292 p.
27. *Marukha V.I., Panasyuk V.V., Sylovanyuk V.P.* Inyektysini tekhnologiyi vidnovlennya robotozdatnosti poshkodzhennykh sporud tryvaloyi ekspluatatsiyi (Injection technologies for

- restoring the workability of defective buildings of long-term exploit). Lviv: SPOLOM, 2009, 262 p.
28. *Marukha V.I., Serednytskyi Ya.A., Gnyv I.P., Sylovanyuk V.P.* Rozrobka inyektsiynykh tekhnologiy ta stvorennia kompleksu presuvnogo ustatkuvannia dlia diagnostyky ta vidnovlennia pratsezdatsnosti betonnykh i zalizobetonnykh konstruksiy i sporud, shcho ekspluatuyutsia v umovakh korozivno-mechanichnogo ruynuvannia (Development of injection technologies and production of the complex of mobile devices for diagnostics and restoring of workability of concrete and ferroconcrete structures and buildings, which are exploited at the conditions of corrosion-mechanical fracture). *Nauka ta innovatsii*, 2007, Vol. 3, No. 5, P. 26–33.
  29. *Panasjuk V.V., Sylovanyuk V.P., Marukha V.I.* Mitsnist' poskodzhenykh trishchynamy elementiv konstruksiy, zalikovanykh za inyektsiynymi tekhnolohiyamy. *Fiz.-khim. mekhanika materialiv*, 2005, No. 6, P. 60–64.
  30. *Sylovanyuk V.P., Marukha V.I., Onyshchak N.V.* Zalyshkova mitsnist' tsylindrychnykh elementiv z trishchynamy, zalikovanykh za inyektsiynoyu tekhnolohiyeyu. *Fiz.-khim. mekhanika materialiv*, 2007, No.1, P. 99–104.
  31. *Panasjuk V., Sylovanyuk V., Marukha V.* Static and cyclic strength of a cracked body which strengthened by injection technologies. *Acta mechanica et automatica*, 2007, Vol. 1, No. 1 – P. 85–88.
  32. *Hrylits'kyy D.V., Sulym H.T.* Rozvytok teorii tonkostinnykh vkluchen' u L'viv's'komu derzhavnomu universyteti. *Visn. L'viv. un-tu. Ser. mekh.-mat, L'viv: Vyscha shkola. Vyd-vo pry L'viv. un-ti*, 1987, Vyp. 27, P. 3–9.
  33. *Sulym H.T., Piskozub Y.Z.* Umovy kontaktnoyi vzayemodiyi til (ohlyad). *Mat. metody i fiz.-mekh. polya*, 2004, 47, No. 3, P. 110–125.
  34. *Popov H.Ya.* Vklad odeskykh yssledovateley v razvytye metodov reshenyia smeshannykh zadach mekhaniky deformyruemoho tela. *Tez. dokl. IV Vsesoyuz. konf. «Smeshannye zadachy mekhaniky deformyruemoho tela» (Odessa, 26–29 sent. 1989 h.)*.— Odessa, 1989, T. 2, P. 59–60.
  35. *Mura T.* Inclusion problem. *Appl. Mech. Rev.*, 1988, 41, P. 15–20.
  36. *Sulym H.T.* Osnovy matematychnoyi teorii termopruzhnoyi rivnovahy deformivnykh tverdyykh til z tonkymy vkluchennyamy, L'viv: Doslidno-vydavnychyy tsentr NTSh, 2007, 716 p.
  37. *Pidstryhach Ya.S.* Umovy teplovoho kontaktu tverdyykh til. *Dop. AN URSR. Ser. A*, 1963, No. 7, P. 872–874.
  38. *Aleksandrov V.M., Mkhlytaryan S.M.* Kontaktnye zadachy dlya tel s tonkymy pokrytyyamy y prosloykamy, M.: Nauka, 1983, 487 p.
  39. *Aleksandrov V.M., Pozharskyi D.A.* Neklassycheskye prostranstvennye zadachy mekhaniky kontaktnykh vzaymodeystviy upruhykh tel, M.: Faktorial, 1998, 223 p.
  40. *Aleksandrov V.M., Smetanyn B.Y., Sobol' B.V.* Tonkye kontsentratory napryazheny v upruhykh telakh, M.: Fyzmatlyt, 1993, 224 s.
  41. *Arutyunyan N.Kh.* Povedenye reshenyia zadach teoryi uprughosti v neohranychnykh oblastyakh s paraboloidal'nymy y tsylindrycheskymy vkluchennyamy yly polostyamy. *Uspekhy mat. nauk*, 1987, T. 10, No. 4, P. 3–91.
  42. *Bozhydarnik V.V., Andreykiv O.Ye., Sulym H.T.* Mekhanika ruynuvannya, mitsnist' i dovhovichnist' nepereravno armovanykh kompozytiv. *Monohrafiya. U 2-kh t, Luts'k: Nadstyrya*, 2007.
  43. *Vynnyts'ka L.I., Hryhorenko Ya.M., Savula Ya.H.* Heterohenna matematychna model' pruzhnogo tila z tonkym podatlyvym na z-hyn vkluchennyam. *Dop. NAN Ukrayiny*, 2009, No. 9, P. 62–66.
  44. *Vyshnevskyy K.V., Kushnir R.M.* Hranichnye intehral'nye uravneniya dlya tela s inorodnymi vklucheniymi. *Mat. metody i fiz.-mekh. polya*, 1996, 39, No. 1, P. 37–41.

45. *Berezhnytsky L.T., Panasyuk V.V., Stashchuk N.H.* Vzaimodeystvie zhestkikh lineynykh vklyucheniyy i treshchin v deformiruemom tele. K.: Nauk. dumka, 1983, 288 p.
46. *Hryhorenko O., Savula N.* Polivymirna krayova zadacha heterohennoyi matematychnoyi modeli kontaktnoyi vzayemodiyi pruzhnogo tila z tonkym vklyuchennyam. Visn. L'viv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inform., 2006, Vyp. 11, C. 120–126
47. *Huz' A.N.* Mekhanika khrupkoho razrusheniya materialov s nachal'nymi napryazhenyami, K.: Nauk. dumka, 1983, 296 p.
48. *Denysyuk I.T.* Odnа model' tonkikh upruhikh vklyucheniyy v izotropnoy plastinke. Izv. Ros. AN. Mekhanika tverdogo tela, 2000, No. 4, P. 140–148.
49. *Martynyak R.M.* Mekhanodyfuziyna vzayemodiya til z urakhuvannym zapovnyuvacha mizhkontaktnykh zazoriv. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 2000, 36, No. 2, P. 124–126.
50. *Matysyak S.Y., Yevtushenko O.O., Zelenyak V.M.* Nahrivannya pivprostora z vklyuchennyam i trishchynoyu. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 2004, 40, No. 4, P. 34–40.
51. *Kaloerov S.A., Avdyushina E.V., Kachan Yu.B.* Napryazhennoe sostoyanie kusochno-odnorodnogo anizotropnogo poluprostranstva s treshchinamy, upruhimi i zhestkimi vklyuchenyami. Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika, Donetsk, 2002, Vyp. 35, P. 53–65.
52. *Hudramovych V.S.* Teoriya polzuchesti i ee prilozheniya k raschetu elementov tonkostennykh konstruktsey, K.: Nauk. dumka, 2005, 223 p.
53. *Kit H.S., Emets V.F., Kunets Ya.I.* Asimptoticheskoe povedenie resheniya zadachi rasseyaniya upruhoy volny tonkostennym inorodnym vklyucheniem. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 1999, No. 3, P. 55–64.
54. *Kit H.S., Kunets Ya.I., Mykhas'kiv V.V.* Vzaimodeystvie statsionarnoy volny s tonkim diskoobraznym vklyucheniem maloy zhestkosti v upruhom tele. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 2004, No. 5, PS. 82–89.
55. *Kunets' Ya.I.* Pruzhna rivnovaha tila z tonkym hostrokontsevm m'yakym vklyuchennyam v umovakh pozdovzhn'oho zsvuvu. Mat. metody ta fiz.-mekh. polya, 2004, 47, No. 3, P. 144–148.
56. *Loboda V.V.* Primenenie metoda osredneniya k raschetu plity, podkreplennoy strinheramy. Prikl. mat. i mekhanika, 1981, 45, No. 5, P. 867–875.
57. *Meleshko V.V.* Heneratsiya akusticheskikh voln v poluprostranstve pryamouhol'nym izluchatelem konechnykh razmerov. Akust. visn, 1999, 2, No. 1, P. 42–49.
58. *Mykhas'kiv V.V., Khay O.M.* Symetrychna zadacha ustalenozy vzayemodiyi trishchyn i tonkykh zhorstkykh vklyuchen' u tryvymirnyy matrytsi. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 2003, 39, No. 2.
59. *Movchan A.B., Morozov N.F., Nazarov S.A.* O razrushenii vblizi pikoobraznykh vklyucheniyy pri posadke s natyahom. Plastichnost' i razrushenie tverd. tel., M., 1988, P. 137–145.
60. *Kushnir R.M., Nykolyshyn M.M., Osadchuk V.A.* Pruzhnyy ta pruzhno-plastychnyy hranychnyy stan obolonok z defektamy, L'viv: Spolom, 2003, 320 p.
61. *Nazarenko L.D., Ostryk V.I.* Izhib pryamouhol'noy plastinki s tonkim krivolineynym vklyucheniem. Dinamika i prochnost' mashin, Khar'kov, 1988, Vyp. 44, P. 19–24.
62. *Kukhars'kyy V., Kukhars'ka N., Savula Ya., Mandzak T.* Fyzyko-matematychnе modelyuvannya protsesiv teplomasoperenensennya v seredovyshchakh iz vklyuchenyamy tonkymy sharamy. Visn. Ternopil's'koho derzh. tekhn. un-tu, 2006 – 11, No. 3, P. 145–152.
63. *Sarkysyan V.S.* Kontaktnye zadachi dlia poluploskostey s upruhimi nakladkami, Erevan: Izd-vo Erevan. un-ta, 1983, 260 p.
64. *Movchan A.B., Nazarov S.A.* Asimptoticheskoe povedenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya vblizi ostrykh vklyucheniyy. Dokl. AN SSSR, 1986, T. 290, No. 1, P. 48–51.
65. *Opanasovych V.K., Drahan M.S.* Antyploska deformatsiya tila z systemoyu tonkykh pruzhnykh vklyuchen'. Visn. L'viv. un-tu. Ser. mekh.-mat, 1984, Vyp. 22, P. 71–77.
66. *Panasyuk V.V., Andreykiv O.Ye.* Pruzhna rivnovaha neobmezhenoho tila z tonkym vklyuchennyam. Dop. AN URSSR. Ser. A, 1976, No. 7, P. 636–639.

67. *Podlubnyak A.P., Kunets Ya.I.* Osesimmetrichnoe kruchenie uprugo-ho poluprostranstva s uprugoy shayboy. Prikl. mekhanika, 1983, 19, No. 7, P. 66–70.
68. *Popov V.H., Moysenenok A.P.* Kontsentratsiya napryazheniy vblizi otloivshchegosya tonkoho uprugo-ho vklucheniya pri vozdeystviy nestatsionarnoy volny prodol'nogo sdviga. Teoret. i prikladnaya mekhanika, 2005, Vyp. 41, P. 184–192.
69. *Popov H.Ya.* Kontsentratsiya uprugi-hk napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklucheniy i podkrepleniy. M.: Nauka, 1982, 344 p.
70. *Syas'kyy A.A., Syas'kyy V.A.* Napryazhennoe sostoyanie kusochno-odnorodnoy plastinki s uprugim vklucheniem. Prikl. mekhanika, 1983, 19, No. 5, P. 94–99.
71. *Fyl'shtynskyy L.A.* Difraktsiya uprugi-hk voln na treshchinakh, otverstiyakh, vklucheniya-hk v izotropnoy srede. Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdohu tela, 1991, No. 4, P. 119–127.
72. *Cherepanov H.P.* Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov, M.: Nauka, 1983, 296 p.
73. *Chobanyan K.S., Khachikyan A.S.* Ploskoe deformirovannoe sostoyanie uprugo-hu tela s tonkostennym hibkim vklucheniem. Izv. AN ArmSSR. Mekhanika, 1967, T. 20, No. 6, P. 19–29.
74. *Gdoutos E.E.* Failure of a composite with a rigid fiber inclusion. Acta mech, 1981, 39, No. 3–4, P. 251–262.
75. *Sih G.C.* Plane extension of rigidly embedded line inclusions. Developments in mechanics, vol.3, Pt.1. Solid Mech. and Mater. New York-Wiley, 1965, P. 61–79.
76. *Belytschko T., Xiao S.P.* Coupling methods for continuum model with molecular model. Int. J. for Multiscale Computational Engineering, 2003, 1(1), P. 115–126.
77. *Badia S., Parks M., Bochev P., Gunzburger M., Lehoucq R.* On atomistic-to-continuum coupling by blending. Multiscale Model. Simul. 2008, 7, No. 1, P. 381–406.
78. *Andreykiv A.E.* Razrushenie kvazikhрупkikh tel s treshchinami pri slozhnom napryazhennom sostoyanii, K.: Nauk. dumka, 1992, 184 p.
79. *Nazarchuk Z.T., Stadnik T.M.* Dyfraktsiyna vzayemodiya trishchynopodibnykh defektiv. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 2008, 44, No. 4, P. 47–51.
80. *Osadchuk V., Kushnir P., Nykolyshyn M.* Zalyshkovy napruzheniya v tsylindrychniy obolontsi z trishchynoyu. Mashynoznavstvo, 1998, No. 4/5, P. 40–43.
81. *Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P.* Raspre-delenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh, K.: Nauk. dumka, 1976, 444 p.
82. *Savruk M.P.* Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov: Sprav. posobie: V 4 t. / Pod obshch. red. Panasyuka V.V. / T. 2. Koeffitsienty intensivnosti napryazheniy v telakh s treshchinami, K.: Nauk. dumka, 1988, 620 p.
83. *Savruk M.P., Zelenyak V.M.* Dvovymirni zadachi termopruzhnosti dlya kuskovo-odnorodnykh til z trishchynami, L'viv: RASTR, 2009, 212 p.
84. *Savruk M.P.* Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami, K.: Nauk. dumka, 1981, 324 p.
85. *Cherepanov G.P.* Mekhanika khрупkogo razrusheniya, M.: Nauka, 1974, 640 p.
86. *Opanasovich V.K., Dragan M.S., Tisovskiy L.O.* Napryazheniya v ploskosti, soderzhashchey sistemu pryamolineynykh vklucheniy. Fiz.-khim. mekhanika materialov, 1985, 21, № 6, P. 21–26.
87. *Sulim G.T.* Kontsentratsiya napryazheniy vozle tonkostennykh lineynykh vklucheniy. Prikl. mekhanika, 1981, 17, № 11, P. 82–89.
88. *Berezhnitskiy L.T., Denisuk I.T.* Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie vblizi zhestkogo diskoobraznogo vklucheniya v transtropnom tele. Fiz.-khim. mekhanika materialov, 1984, 1, P. 45–50.
89. *Berezhnitskiy L.T., Denisuk I.T.* O raspre-delenii napryazheniy i smeshcheniy vblizi zhestkogo diskoobraznogo vklucheniya. Fiz.-khim. mekhanika materialov, 1984, 6, P. 105–106.

90. Denysyuk I.T. Pruzhna rivnovaha tila z nehladkym vkladyennyam, Luts'k: Red.-vydavnychyy viddil LDTU, 2004, 220 p.
91. Selvadurai A.P.S. An inclusion at a bi-material elastic interface. *Journal of Engineering Mathematics*, 2000, 37, No. 1–3, P. 155–170.
92. Selvadurai A.P.S. Mechanics of a rigid circular disc bonded to a cracked elastic half-space. *Int. J. of Solids and Structures*, 2002, 39, P. 6035–6053.
93. Kanaun S.K., Levin V.M. *Self-Consistent Methods for Composites. Vol.1: Static Problems*. Springer, 2008, 376 p.
94. Panasyuk V.V., Stadnik M.M., Silovanyuk V.P. Kontsentratsiya napryazheniy v trekhmernykh telakh s tonkimi vkladyeniyami, K.: Nauk. dumka, 1986, 216 p.
95. Sylovanyuk V.P. Ruznyuvannya poperedn'o napruzhenykh i transversal'no-izotropnykh til iz defektamy, L'viv: NANU Fiz.-mekh. in-t im. H.V. Karpenka, 2000, 300 z.
96. Bernar I.I., Opanasovich V.K. Napryazhennoe sostoyanie plastinki s tonkostennym vkladyeniem po duze okruzhnosti. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1983, 47, № 2, P. 249–256.
97. Frenchko Yu.S., Tkach M.D. Antiploskaya deformatsiya tela s tonkim dugoobraznym vkladyeniem. *Fiz.-mekh. polya v deformiruemyykh sredakh*. K.: Nauk. dumka, 1978, P. 81–84.
98. Sulym H., Pasternak Ya. Rehulyaryzovana totozhnist' Comil'yany dlya zadach teoriiy pruzhnosti z tonkostinnymy strukturamy. *Visn. L'viv. un-tu. Ser. Prykladna matematika ta informatyka*, Vyp. 13, 2007, P. 142–150.
99. Sulym H.T., Pasternak Ya.M. Zastosuvannya metodu hranychnykh elementiv do analizu antyploskoyi deformatsiyi anizotropnykh til iz tonkostinnymy strukturamy. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*, 2008, 51, No. 4, P. 136–144.
100. Opanasovich V.K. O dvukh podkhodakh k issledovaniyu antiploskoy deformatsii izotropnogo massiva s tonkim uprugim vkladyeniem. *Prikl. matematika i mekhanika*, 1988, 52, Vyp. 1, P. 116–119.
101. Vynnyts'ka L., Savula Ya. Napruzhenno-deformovany stan pruzhnogo tila z tonkym vkladyennyam. *Fiz.-mat. modelyuvannya ta inf. tekhnolohiyi*, 2008, No. 7, P. 21–29.
102. Leite L.G.S., Coda H.B., Venturini W.S. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2003, 27, P. 193–201.
103. Leite L.G.S., Venturini W.S. Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft thin inclusions. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2005, 29, P. 257–267.
104. Padron L.A., Aznarez J.J., Maeso O. BEM–FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2007, 31, P. 473–484.
105. Riederer K., Duenser C., Beer G. Simulation of linear inclusions with the BEM. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2009, 33, P. 959–965.
106. Aliabadi A.L., Aliabadi M.H. Crack growth analysis in reinforced concrete using BEM. *J. Eng. Mech.*, 1998, 124, No. 9, P.949–958.
107. Aliabadi M.H., Saleh A.L. Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method. *Eng. Fract. Mech.*, 2002, 69, P. 267–280.
108. Lekhnitskiy S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*, M.: Nauka, 1977, 416 z.
109. Pavlychko V.M., Sulim G.T. Ploskaya zadacha dlya lineynykh vkladyeniy na granitse razdela anizotropnykh materialov, L'vov, 1987, 11 p, Red. zhurn. «Fiz.-khim. mekhanika materialov». Dep. v VINITI 15 yanv. 1987 g., № 330-V87.
110. Sulym H.T., Shevchuk S.P. Ploska zadacha dlya kuskovo-odnorodnogo anizotropnogo tila zi strichkovym pruzhnym vkladyennyam. *Fiz.-khim. mekhanika materialiv*, 1999, 35, No. 6, P. 7–16.
111. Ting T.C.T. *Anisotropic elasticity: theory and applications*. New York: Oxford University Press, 1996, 567 p.
112. Pan E. A general boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics. *Int. J. Fract.*, 1997, 88 – P. 41–59.

113. *Fan H., Keer L.M.* Two-dimensional line defects in anisotropic elastic solids. *Int. J. Fract.*, 1993, 62, P. 25–42.
114. *Burak Ya.Y.* Vybrani pratsi, L'viv: NUTsMMIPPM im. Ya.S.Pidstryhacha NAN Ukrainy. V-vo «Akhil», 2001, 352 p.
115. *Burak Ya.Y., Hachkevych O.R., Drobenko B.D.* Vyznachennya parametriv termomekhanichnoho stanu termochutlyvykh mahnitotverdykh feromahnitnykh til za umov diyi kvaziustalenykh elektromahnitnykh poliv. *Dop. NAN Ukrainy*, 2007, No. 8, P. 53–58.
116. *Burak Ya.I., Chekurin V.F.* Fiziko-mekhanicheskie polya v poluprovodnikakh. *Matematicheskie osnovy teorii*, K.: Nauk. dumka, 1987, 264 p.
117. *Gachkevich A.R.* Termomekhanika elektroprovodnykh tel pri vozdeystvii kvaziustalenykh elektromagnitnykh poley, K.: Nauk. dumka, 1992, 192 p.
118. *Parton V.Z., Kudryavtsev B.A.* Elektromagnitoupругost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel, M.: Nauka, 1988, 472 p.
119. *Podstrigach Ya.S., Burak Ya.I., Kondrat V.F.* Magnitotermoupругost' elektroprovodnykh tel, K.: Nauk. dumka, 1982, 296 p.
120. *Terlets'kyy R.F.* Modelyuvannya termomekhanichnoyi povedinky bahatokomponentnykh deformivnykh tverdykh til nyz'koyi elektroprovodnosti pry diyi elektromahnitnoho vyprominyuvannya. Ch.1. Balansovi spivvidnoshennya mekhaniky i druhyy zakon termodynamiky. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*, 2002, 45, No. 2, P. 81–91.
121. *Terlets'kyy R.F.* Modelyuvannya termomekhanichnoyi povedinky bahatokomponentnykh deformivnykh tverdykh til nyz'koyi elektroprovodnosti pry diyi elektromahnitnoho vyprominyuvannya. Ch. 2. Statystychnyy opys chynnykiv diyi elektromahnitnoho polya na bahatokomponentni tila. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*, 2002, 45, No. 3, P. 155–168.
122. *Hao T.H., Shen Z.Y.* A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. *Eng. Fract. Mech.*, 1994, 47, P. 793–802.
123. *Zhao M.H., Wang H., Yang F., Liu T.* A magnetoelastoelectric medium with an elliptical cavity under combined mechanical–electric–magnetic loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2006, 45, P. 227–237.
124. *Denda M.* BEM analysis of semipermeable piezoelectric cracks. *Key Engng. Materials*, 2008, 383, P. 67–84.
125. *Mikhailov G.K., Parton V.Z.* Electromagnetoelasticity. New York: Hemisphere, 1990.
126. *Shindo Y., Ozawa E., Nowacki J.P.* Singular stress and electric fields of a cracked piezoelectric strip. *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.*, 1990, 1, P. 77–87.
127. *Ang W.T., Athanasius L.* A boundary integral approach for plane analysis of electrically semi-permeable planar cracks in a piezoelectric solid. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, 35, P. 647–656.
128. *Kulikov A.A., Nazarov S.A.* Cracks in piezoelectric and electroconductive bodies. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2007, Vol. 1, No. 2, P. 201–216.
129. *Zhang T.Y., Zhao M.H., Tong P.* Fracture of piezoelectric ceramics. *Adv. Appl. Mech.*, 2002, 38, P. 147–289.
130. *Chen Y.H., Hasebe N.* Current understanding on fracture behaviors of ferroelectric/piezoelectric. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 2005, 16, P. 673–687.
131. *Park S.B., Sun C.T.* Fracture criteria for piezoelectric ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1995, 78, P. 1475–1480.
132. *Kaloerov S.A., Baeva A.I., Boronenko O.I.* Dvumernye zadachi elektro- i magnitoupругosti dlya mnogovyaznykh oblastey: Monografiya, Donetsk: OOO «Yugo-Vostok, Ltd», 2007, 268 p.
133. *Bardzokas D., Filshinsky M.L., Filshinsky L.A.* Mathematical methods in electro-magneto-elasticity. New York: Springer, 2007, 530 p.
134. *Qin Q.H.* Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials. Boston: WIT Press, 2001.

135. *Govorukha V.B.* Chislenno-analiticheskoe issledovanie treshchiny v oblasti razdela dvukh p'ezoelektricheskikh materialov. *Visn. Dnipropetr. un-tu. Ser.: Mekhanika*, 2005, Vip. 9, T. 2, P. 27–34.
136. *Govorukha V.B.* O zone elektricheskogo predrazrusheniya v okrestnosti vershiny treshchiny v p'ezokeramicheskom materiale. *Visn. Donets. un-tu. Ser. A.: Prirodnichi nauki*, 2007, Vip. 2, P. 66–71.
137. *Govorukha V.B.* Ob elektromekhanicheskikh effektakh u vershiny treshchiny mezhdru dvumya p'ezokeramicheskimi materialami. *Teoret. i prikladnaya mekhanika*, 2007, Vyp. 43, S. 176–182.
138. *Govorukha V.B., Gerrmann K.P., Loboda V.V.* Elektricheski pronitsaemaya treshchina s zonami kontakta mezhdru dvumya p'ezoelektricheskimi materialami. *Prikl. mekhanika*, 2008, 44, № 3, P. 66–74.
139. *Hovorukha V.B., Loboda V.V.* Analiz mizhfaznoyi trishchiny v p'yezokeramichnomu tili skinchennykh rozmiriv. *Visn. Kyiv. un-tu. Ser.: fiz.-mat. nauky*, 2008, Vyp. 4, P. 47–52.
140. *Hovorukha V.B., Loboda V.V.* Vplyv elektrychnoy pronykhnosti mizhfaznoyi trishchiny na kharakterystyky elektromekhanichnoho polya v okoli yiyi vershyny. *Visn. L'viv. un-tu. Ser. mekh.-mat*, 2010, Vyp. 73, P. 44–55.
141. *Andreykiv O.Ye., Nazarchuk Z.T., Skal's'kyy V.R., Rudavs'kyy D.V., Serhiyenko O.M.* Koefitsiyenty intensyvnosti napruzhen', sprychynenykh mahnetnym polem u feromahnetnykakh. *Fiz.-khim. mekhanika materialiv*, 2008, 44, No. 3, P. 130–132.
142. *Kulynych Ya.P., Nazarchuk Z.T.* Intehral'ni rivnyannya dlya elektromahnetnoho polya u providnomu tili z trishchynoyu. *Vidbir i obrob. informatsiyi: Mizhvid. zb. nauk. pr*, 2005, Vyp. 23, P. 11–16.
143. *Pan E.* A BEM analysis of fracture mechanics in 2D anisotropic piezoelectric solids. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 1999, 23, P. 67–76.
144. *Rajakakse R.K.N.D., Xu X.-L.* Boundary element modelling of cracks in piezoelectric solids. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2001, 25, P. 771–781.
145. *Groh U., Kuna M.* Efficient boundary element analysis of cracks in 2D piezoelectric structures. *Int. J. Sol. Struct.*, 2005, 42, P. 2399–2416.
146. *Garcia-Sanchez F., Saez A., Dominguez J.* Anisotropic and piezoelectric materials fracture analysis by BEM. *Computers and Structures*, 2005, 83, P. 804–820.
147. *Liew K.M., Sun Y., Kitipornchai S.* Boundary element-free method for fracture analysis of 2-D anisotropic piezoelectric solids. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2007, 69, P. 729–749.
148. *Sheng N., Sze K.Y.* Multi-region Trefftz boundary element method for fracture analysis in plane piezoelectricity. *Comput. Mech.*, 2006, 37, P. 381–393.
149. *Sanz J.A., Ariza M.P., Dominguez J.* Three-dimensional BEM for piezoelectric fracture analysis. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2005, 29, P. 586–596.
150. *Qin T., Yu Y.S., Noda N.A.* Finite-part integral and boundary element method to solve three-dimensional crack problems in piezoelectric materials. *Int. J. Solids Struct.*, 2007, 44, P. 4770–4783.
151. *Rungamornrat J., Mear M.E.* Analysis of fractures in 3D piezoelectric media by a weakly singular integral equation method. *Int. J. Fract.*, 2008, 151, P. 1–27.
152. *Qin Q.H.* Green's function and boundary elements of multifield materials. *Oxford: Elsevier*, 2007, 254 p.
153. *Yang J.* Special topics in the theory of piezoelectricity. *London: Springer*, 2009, 342 p.
154. *Podil'chuk Yu.N., Dashko O.G.* Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie uprugogo ferromagnetika s ellipsoidal'nym vklucheniem pri deystvii odnorodnogo magnitnogo polya. *Prikladnaya mekhanika*, 2003, 39, № 7, P. 64–74.
155. *Podil'chuk Yu.N.* Napryazhennoe sostoyanie ferromagnetika s ellipticheskoy treshchinoy pri deystvii odnorodnogo magnitnogo polya. *Prikladnaya mekhanika*, 2001, 37, № 2, P. 78–88.

156. *Podil'chuk Yu.N.* Elektropругoe ravnovesie transversal'no-izotropnykh p'ezokeramicheskikh sred s polostyami, vlyucheniymi i treshchinami. *Prikladnaya mekhanika*, 1998, 34, № 10, P. 109–119.
157. *Babich I.Yu., Kirilyuk V.S.* Napryazhennoe sostoyanie elektropругogo prostranstva s proizvol'no orientirovannym trekhosnym ellipsoidal'nym vlyucheniem. *Priklad. mekhanika*, 2009, 45, № 4, P. 72–80.
158. *Pan E., Albrecht J.D., Zhang Y.* Elastic and piezoelectric fields in quantum wire semiconductor structures – A boundary integral equation analysis. *Phys. Stat. Sol. (b)*, 2007, 244, No. 6, 1925–1939.
159. *Han F., Pan E., Albrecht J.D.* Strain and piezoelectric fields in embedded quantum wire arrays. *Superlattices and Microstructures*, 2006, 40, P. 125–136.
160. *Pan E., Han F., Albrecht J.D.* Strain fields in InAs/GaAs quantum wire structures: Inclusion versus inhomogeneity. *J. Appl. Phys.*, 2005, 98, P. 013534.
161. *Ramsey J.J., Pan E., Chung P.W.* Modelling of strain fields in quantum wires with continuum methods and molecular statics. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2008, 20, P. 485215–27.
162. *Grigolyuk E.L., Fil'shtinskiy L.A.* Regul'yarnye kusochno-odnorodnye struktury s defektami, M.: Fizmatgiz, 1994, 335 p.
163. *Xiao Z.M., Zhang H.X., Chen B.J.* Microcrack initiation at the tip of a semi-infinite rigid line inhomogeneity in piezoelectric solids. *International Journal of Engineering Science*, 2005, 43, No. 15–16, P. 1223–1233.
164. *Wu L., Du S.* A rigid line in a confocal elliptic piezoelectric inhomogeneity embedded in an infinite piezoelectric medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37, No. 10, P. 1453–1469.
165. *Li X.-F.* Dynamic response of a piezoelectric material with a conducting rigid inclusion. *Meccanica*, 2000, 35, P. 383–392.
166. *Kirilyuk V.S.* O napryazhennom sostoyanii p'ezokeramicheskogo tela s ploskoy treshchinoy, raskryvaemoy zhestkim vlyucheniem. *Priklad. mekhanika*, 2008, 44, № 7, P. 47–60.
167. *Gao C.-F., Fan W.-X.* An interface inclusion between two dissimilar piezoelectric materials. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22, No. 1, P. 96–104.
168. *Chen B.J., Shu D.W., Xiao Z.M.* Electro-elastic interaction between a piezoelectric screw dislocation and collinear rigid lines. *International Journal of Engineering Science*, 2006, 44, P. 422–435.
169. *Huang Z., Kuang Z.-B.* Dislocation inside a piezoelectric media with an elliptic inhomogeneity. *Int. J. Solid. Struct.*, 2001, 38, P. 8459–8479.
170. *Sulym H., Rabosh R.* Antyploska zadacha dlya tonkoho pruzhnogo vlyuchennya u pyezoelektrychnomu prostori. *Visn. L'viv. un-tu. Seriya mekh.-mat*, 2008, 69, P. 189–202.
171. *Sulym H.T., Kunets' Ya.I., Rabosh R.V.* Asymptotichnyy analiz dynamichnoyi vzyemodiyi tonkoho pryamolinynoho pyezoelektrychnoho vlyuchennya z pruzhnym seredovyschem za pozdovzhn'oho zsvu. *Visn. Don. un-tu*, 2008, No. 1, P. 137–141.
172. *Rabosh R.V.* Dynamichna vzyemodiya pruzhnogo seredovyscha z tonkostinnyim kryvoliniynym p"yezoelektrychnym vlyuchennyam pry pozdovzhnikh kolyvannyakh kompozyta. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*, 2009, 52, No. 1, P. 101–106.
173. *Loboda V.V., Khodamen T.V.* Zadacha termoelektromahnitopruzhnosti dlya pyezoelektrychnoho/ pyezomahnitnoho bimaterialu z mizhfaznoyu trishchynoyu. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya*, 2008, 51, No. 3, P. 121–132.
174. *Feng W.J., Pan E., Wang X.* Dynamic fracture analysis of a penny-shaped crack in a magnetoelastoelectroelastic layer. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, 44, P. 7955–7974.
175. *Li R., Kardomateas G.A.* The mixed mode I and II interface crack in piezoelectromagneto-elastic anisotropic bimaterials. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, 74, P. 614–627.
176. *Sladek J., Sladek V., Witsche M., Zhang Ch.* Analysis of an interface crack between two dissimilar piezoelectric solids. *Eng. Fract. Mech.*, 2012, 89, P. 114–127.



177. *Sladek J., Sladek V., Solek P., Pan E.* Fracture analysis of cracks in magneto-electro-elastic solids by the MLPG. Computational mechanics, 2008, 42, No. 5, P. 697–714.
178. *Tian W.Y., Gabbert U.* Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids. European Journal of Mechanics A/Solids, 2004, 23, P. 599–614.
179. *Tian W.Y., Gabbert U.* Macrocrack-microcrack interaction problem in magneto-electroelastic solids. Mechanics of Materials, 2005, 37, P. 565–592.
180. *Zhou Z.-G., Wang B., Sun Y.-G.* Two collinear interface cracks in magneto-electro-elastic composites. International Journal of Engineering Science, 2004, 42, P. 1155–1167.
181. *Zhu T., Yang W.* Crack kinking in a piezoelectric solid. International Journal of Solids and Structures, 1999, 36, P. 5013–5027.
182. *Dong C.Y., Lo S.H., Antes H.* Fracture analysis in 2D magneto-electro-elastic media by the boundary element method. Comput. Mech., 2008, 41, P. 207–217.
183. *Garcia-Sanchez F., Rojas-Diaz R., Saez A., Zhang Ch.* Fracture of magneto-electroelastic composite materials using boundary element method (BEM). Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2007, 47, P. 192–204.
184. *Rojas-Diaz R., Garcia-Sanchez F., Saez A.* Analysis of cracked magneto-electroelastic composites under time-harmonic loading. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47, P. 71–80.
185. *Zhu X., Huang Z., Jiang A., Chen W.Q., Nishimura N.* Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media. Eng. Anal. Bound. Elem., 2010, 34, P. 927–933.
186. *Li J.Y.* Magnetolectric Green's functions and their application to the inclusion and inhomogeneity problems. Int. J. Sol. Struct., 2002, 39, P. 4201–4213.
187. *Hou P.-F., Leung A.Y.T.* A spheroidal inclusion in an infinite magneto-electro-elastic material. Int. J. Engng. Science, 2004, 42, P. 1255–1273.
188. *Midgley P.A., Dunin-Borkowski R.E.* Electron tomography and holography in materials science. Nature Materials, 2009, 8, P. 271–280.
189. *Lang S.B.* Pyroelectricity: from ancient curiosity to modern imaging tools. Physics Today, August 2005, P. 31–36.
190. *Kit G.S., Krivtsov M.G.* Ploskie zadachi termouprugosti dlya tel s treshchinami, K.: Nauk. dumka, 1983, 280 p.
191. *Kit H.S., Sushko O.P.* Statsionarne temperaturne pole u pivbezmezchnomu tili z teploaktyvnym abo teploizol'ovanyim dyskovym vklyuchennyam. Fiz.–mat. modelyuvannya ta informatsiyni tekhnolohiyi, 2011, Vyp. 13, P. 67–80.
192. *Kit H.S., Sushko O.P.* Vplyv dzhherela tepla na napruzheny stan tila z teploizol'ovanoyu kruhovoyu trishchynoyu. Prykl. problemy mekh. i mat, 2011, Vyp. 9, P. 11–121.
193. *Kit H.S., Chernyak M.S.* Napruzheny stan tila z teplovydil'nymy sferychnymy vklyuchennyamy. Mat. metody ta fiz.-mekh. polya, 2011, 54, No. 4, P. 82–89.
194. *Kit H.S., Chernyak M.S.* Napruzheny stan til z termichnymy tsylindrychnymy vklyuchennyamy ta trishchynamy (ploska deformatsiya). Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 2010, 46, No. 3, P. 30–37.
195. *Piskozub Y.Z., Sulym H.T.* Asymptotyka napruzhen' v okoli kintsiv tonkoho mizhfaznoho vkraplennya. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 1996, 32, No. 4, P. 39–48.
196. *Sulim G.T., Piskozub J.Z.* Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions. Journal of Engineering Mathematics, 2008, 61, P. 315–337.
197. *Dobryak D.A.* Periodicheskaya zadacha termouprugosti dlya plastinki s uprugimi vklyuchenyami. Visn. Donets. un-tu. Ser. A: Prirodn. nauk, 2008, Vip. 1, P. 98–105.
198. *Karnaukhov V.G., Mikhaylenko V.V.* Nelineynaya termomekhanika p'ezoelektricheskikh neuprugikh tel pri monogarmonicheskome nagruzhenii, Zhitomir: Izd-vo ZhTTU, 2005, 428 p.
199. *Kirichok I.F.* Vynuzhdennyye monogarmonicheskyye kolebaniya i vibrirazogrev vyazkouprugikh gibkikh kruglykh plastinok s p'ezosloyami. Priklad. mekhanika, 2013, 49, № 6, P. 100–112.

200. *Lu P., Tan M.J., Liew K.M.* Piezothermoelastic analysis of a piezoelectric material with an elliptic cavity under uniform heat flow. *Archive of Applied Mechanics*, 1998, 68, P. 719–733.
201. *Liu Jinxi, Zhang Xiaosong, Liu Xianglin, Zheng Jian.* Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, Vol. 16, No. 2, P. 148–163.
202. *Kirilyuk V.S.* Termonapryazhennoe sostoyanie p'ezokeramicheskogo tela s ploskoy treshchinoy pri simmetrichnom teplovom potoke s eye poverkhnostey. *Prikladnaya mekhanika*, 2010, 46, № 7, P. 23–33.
203. *Gao C.-F., Wang M.-Z.* Collinear permeable cracks in thermopiezoelectric materials. *Mechanics of Materials*, 2001, 33, P. 1–9.
204. *Gao C.-F., Kessler H., Balke H.* Fracture analysis of electromagnetic thermoelastic solids. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2003, 22, P. 433–442.
205. *Kaloerov S.A., Khoroshev K.G.* Termoelektrouprugoe sostoyanie mnogosvyaznoy anizotropnoy plastinki. *Prikladnaya mekhanika*, 2005, T. 41, № 11, P. 116–126.
206. *Kaloerov S.A., Khoroshev K.G.* Termoelektrouprugoe sostoyanie anizotropnoy plastinki s otverstiyami i treshchinami. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2005, Vyp. 41, P. 124–133.
207. *Kaloerov S.A., Sorochan O.A.* Dvumernye zadachi termoelektromagnitoupругosti dlya mnogosvyaznykh sred. *Teoret. i prikl. mekh*, 2008, Vyp. 44, P. 61–79.
208. *Kaloerov S.A., Dobryak D.A.* Termoelektromagnitouprugoe sostoyanie mnogosvyaznoy anizotropnoy polploskosti. *Teoret. i prikl. mekh*, 2010, Vyp. 1(47), P. 45–61.
209. *Qin Q.H.* Green's function for thermopiezoelectric plates with holes of various shapes. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69, P. 406–418.
210. *Qin Q.H.* 2D Green's functions of defective magnetoelastic solids under thermal loading. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2005, 29, No. 6, P. 577–585.
211. *Hou P.F.* 2D fundamental solution for orthotropic pyroelectric media. *Acta Mech.*, 2009, 206, P. 225–235.
212. *Prasad N.N.V., Aliabadi M.H., Rooke D.P.* The dual boundary element method for thermoelastic crack problems. *Int. J. Fract.*, 1994, 66, P. 255–272.
213. *Mohammadi M., Hematiyan M.R., Aliabadi M.H.* Boundary element analysis of thermoelastic problems with non-uniform heat sources. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 2010, 45, P. 605–627.
214. *Mukherjee Y.X., Shah K., Mukherjee S.* Thermoelastic fracture mechanics with regularized hypersingular boundary integral equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, 23, P. 89–96.
215. *Koshelev V., Ghassemi A.* Complex variable BEM for thermo- and poroelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, 28, P. 825–832.
216. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids. *Int. J. Sol. Struct.*, 2009, 46, No. 21, P. 3850–3859.
217. *Deb A., Banerjee P.K.* BEM for general anisotropic 2D elasticity using particular integrals. *Commun. Appl. Num. Meth.*, 1990, 6, P. 111–119.
218. *Deb A., Henry D.P. Jr., Wilson E.B.* Alternate BEM formulation for 2D and 3D anisotropic thermoelasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 1991, 27, P. 1721–1738.
219. *Shiah Y.C., Tan C.L.* Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity. *Computational Mechanics*, 1999, 23, P. 87–96.
220. *Shiah Y.C., Guao T.L., Tan C.L.* Two-dimensional BEM thermoelastic analysis of anisotropic media with concentrated heat sources. *CMES*, 2005, Vol. 7, No. 3, P. 321–338.
221. *Shiah Y.C., Tan C.L.* Fracture mechanics analysis in 2-D anisotropic thermoelasticity using BEM. *CMES*, 2000, Vol. 1, No. 3, P. 91–99.

222. *Ang W.T., Clements D.L.* Hypersingular integral equations for a thermoelastic problem of multiple planar cracks in an anisotropic medium. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, 23, No. 9, P. 713–720.
223. *Qin Q.H.* Fracture analysis of cracked thermopiezoelectric materials by BEM. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2003, Vol. 1, No. 2, P. 283–301.
224. *Qin Q.H., Lu M.* BEM for crack-inclusion problems of plane thermopiezoelectric solids. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2000, 48, P. 1071–1088.
225. *Qin Q.H., Mai Y.W.* BEM for crack-hole problems in thermopiezoelectric materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69(5), P. 577–588.
226. *Sladek J., Sladek V., Solek P., Zhang Ch.* Fracture analysis in continuously nonhomogeneous magneto-electro-elastic solids under a thermal load by the MLPG. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47, P. 1381–1391.
227. *Hsieh M.C., Hwu C.* Hygrothermal stresses in unsymmetric laminates disturbed by elliptical holes. *J. Appl. Mech.*, 2006, 73, P. 228–239.
228. *Hayvas' B.* Model' formostiystki porystoyi plastyny v protsesi pryrodnoho osushennya. *Fiz.-mat. model. ta inform. tekhn.*, 2010, Vyp. 11, P. 56–65.
229. *Pobereyko B.P.* Vplyv temperatury na mitsnist' derevyny u pruzhnyi oblasti deformuvannya. *Naukovyy visnyk NLTU Ukrainy: zb. nauk.-tekhn. prats'*, L'viv: NLTU Ukrainy, 2007, Vyp. 17.2, P. 61–66.
230. *Tadeu A., Simoes N., Branco F.* Steady-state moisture diffusion in curved walls, in the absence of condensate flow, via the BEM: a practical Civil Engineering approach (Glaser method). *Building and Environment*, 2003, 38, P. 677–688.
231. *Lin'kov A.M.* Kompleksnyy metod granichnykh integral'nykh uravneniy teorii uprugosti, SPb.: Nauka, 1999, 382 p.
232. *Fil'shtinskiy L.A.* Dvoyakoperiodicheskaya zadacha teorii uprugosti dlya anizotropnoy sredy s krivolinyeynymi razrezami. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1977, № 6, P. 116–124.
233. *Choi H.J.* A periodic array of cracks in a functionally graded nonhomogeneous medium loaded under in-plane normal and shear. *Int. J. Fract.*, 1997, 88, P. 107–128.
234. *Bozhydnarik V.V., Maksymovych O.V.* Pruzhna ta hranychna rivnovaha anizotropnykh plastynok z otvoramy i trishchynamy, Luts'k: LDTU, 2003, 228 p.
235. *Chen Y.Z.* Periodic rigid line problem in an infinite plate. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, 1993, 63, No. 7, P. 464–471.
236. *Grilitskiy D.V., Sulim G.T.* Periodicheskaya zadacha dlya uprugoy ploskosti s tonkostennymi vkluyucheniyami. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1975, 39, № 3, P. 520–529.
237. *Martynyak R.M., Sulim G.T.* Periodicheskaya zadacha dlya sistemy lineynykh komplannyykh vkluyucheniy v izotropnoy ploskosti. *Mat. metody i fiz.-mekh. polya*, Kiev: Nauk. dumka, 1982, Vyp. 15, P. 113–117.
238. *Opanasovich V.K., Dragan M.S.* Periodicheskaya sistema parallel'nykh tonkikh uprugikh vkluyucheniy v ploskosti. *Vestn. L'vov. un-ta. Ser. mekh.-mat*, 1985, Vyp. 23, P. 83–89.
239. *Kosmodamianskiy A.S.* Napryazhennoe sostoyanie anizotropnykh sred s otverstiyami ili polostyami, K.: Vishcha shkola, 1976, 200 p.
240. *Clouteau D., Elhabre M.L., Aubry D.* Periodic BEM and FEM-BEM coupling. *Comp. Mech.*, 2000, 25, No. 6, P. 567–577.
241. *Kovalenko Yu.F., Salganik R.L.* Treshchinovidnye neodnorodnosti i ikh vliyanie na effektivnye mekhanicheskie kharakteristiki. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1977, № 5, P. 76–86.
242. *Wang J., Fang J., Karihaloo B.L.* Asymptotic of multiple crack interactions and prediction of effective modulus. *Int. J. Sol. Struct.*, 2000, 37, P. 4261–4273.
243. *Wang G.S.* The interaction of doubly periodic cracks. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2004, 42, P. 249–294.

244. *Dong C.Y., Lee K.Y.* Numerical analysis of doubly periodic array of cracks/rigid-line inclusions in an infinite isotropic medium using the boundary integral equation method. *Int. J. Fract.*, 2005, 133, P. 389–405.
245. *Maksymovych O.V.* Dvoperiodychni zadachi teoriiy pruzhnosti dlya anizotropnykh plastynok iz trishchynamy. *Naukovi notatky*, 2011, Vyp. 33, P. 136–143.
246. *Xiao J., Jiang C.* Exact solution for orthotropic materials weakened by doubly periodic cracks of unequal size under antiplane shear. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2009, Vol. 22, No. 1, P. 53–63.
247. *Malits P.* Doubly periodic array of thin rigid inclusions in an elastic solid. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 2010, Vol. 63, No. 2, P. 115–144.
248. *Opanasovich V., Porochovskiy V., Delyavsky M.* Antiplane deformation of isotropic body with a periodic system of thin rectilinear inclusions. *J. Theor. Appl. Mech.*, 1999, 37, No. 1, P. 65–79.
249. *Fil'shtinskiy L.A., Dolgikh V.N.* Model' anizotropnoy sredy, armirovannoy tonkimi lentami. *Prikl. mekhanika*, 1979, T. 15, № 4, P. 24–30.
250. *Li J.Y.* Magneto-electroelastic multi-inclusion and inhomogeneity problems and their applications in composite materials. *International Journal of Engineering Science*, 2000, 38, P. 1993–2011.
251. *Liu Y.* A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2006, 65, P. 863–881.
252. *Mykhas'kiv V.V., Khay O.M., Zhang Ch., Bostrom A.* Effective dynamic properties of 3D composite materials containing rigid penny-shaped inclusions. *Waves in Random and Complex Media*, 2010, 20, No. 3, P. 491–510.
253. *Leshchenko P.V., Maslov B.P.* Effektivnye postoyannye p'ezoaktivnykh kompozitov stokhasticheskoy struktury. *Prikladnaya mekhanika*, 1987, 23, № 3, P. 71–77.
254. *Maslov B.P., Leshchenko P.V.* Prognozirovaniye effektivnykh svoystv p'ezomagnitnoy keramiki, uprochnennoy diskretnymi voloknami. *Prikladnaya mekhanika*, 1981, 17, № 8, P. 114–118.
255. *Khoroshun L.P., Dorodnykh T.I.* Zadacha ob effektivnykh svoystvakh stokhasticheskikh p'ezomagnitnykh kompozitnykh materialov. *Teoret. i prikladnaya mekhanika*, 2001, Vyp. 32, P. 3–16.
256. *Khoroshun L.P., Maslov B.P., Leshchenko P.V.* Prognozirovaniye effektivnykh p'ezoaktivnykh kompozitnykh materialov, K.: Nauk. dumka, 1989, 208 p.
257. *Khoroshun L.P., Maslov B.P., Shikula E.N., Nazarenko L.V.* Statisticheskaya mekhanika i effektivnye svoystva materialov, K.: Nauk. dumka, 1993, 390 p.
258. *Shul'ga N.A.* Effektivnye magnitoprugie svoystva sloistykh kompozitov. *Prikladnaya mekhanika*, 2006, 42, № 8, P. 36–43.
259. *Shul'ga N.A.* Effektivnye fiziko-mekhanicheskie svoystva melkosloistykh p'ezoelektricheskikh i p'ezomagnitnykh materialov. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy*, 1986, Vyp. 48, P. 43–45.
260. *Liu Y.J., Chen X.L.* Continuum models of carbon nanotube-based composites using the boundary element method. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2003, Vol. 1, No. 2, P. 316–335.
261. *Dong C.Y.* Effective elastic properties of doubly periodic array of inclusions of various shapes by the boundary element method. *Int. J. Sol. Struct.*, 2006, 43, P. 7919–7938.
262. *Lin'kov A.M., Koshelev V.F.* Complex variables BIE and BEM for a plane doubly periodic system of flaws. *J. Chinese Institute of Engineers*, 1999, Vol. 22, No. 6, P. 709–720.
263. *Chen Y.Z., Hasebe N., Lee K.Y.* Multiple crack problems in elasticity. *Southampton: WIT*, 2003, 356 p.
264. *Xiao J.H., Xu Y.L., Jiang C.P.* Exact solution to the antiplane problem of doubly periodic conducting rigid line inclusions of unequal size in piezoelectric materials. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2011, 91, No. 5, P. 413–424.

265. *Osiv O.P., Sulym H.T.* Antyploska deformatsiya izotropnoho seredovyscha zi zluchenyymi pruzhnyymi strichkovyymi vkladyennyamy. *Mekhanika i fizyka ruynuvannya budivel'nykh materialiv ta konstruksiy*, 2002, Vyp. 5, P. 154–164.
266. *Osiv O., Sulym G.* Antiplane deformation of isotropic medium with connected elastic ribbon-like inclusions. Abstracts of the Fourth Polish-Ukrainian Conference “Current Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Media” (Łódź, 4–8 Sept., 2001), Łódź: Technol. Univ. of Łódź, 2001, P. 46.
267. *Shats'kyy I.P., Kundrat A.M.* Antyploska deformatsiya pruzhnogo prostoru zi zv'yazanymy zhorstkymy strichkovyymi vkladyennyamy. *Dop. NAN Ukrayiny*, 2004, No. 11, P. 55–60.
268. *Kundrat A.M.* Antyploska zadacha dlya pruzhnogo prostoru iz zhorstkym tonkostinnyym kutnykom. *Naukovi notatky*, 2007, Vyp. 20, T. 1, Luts'kyy natsional'nyy tekhnichnyy universytet, P. 245–249.
269. *Kundrat A.M.* Izotropne tilo armovane fasonnyymi profilyamy tavra ta kutnyka v umovakh pozdovzhn'oho zsvuu. *Visnyk Natsional'noho universytetu vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannya*, 2009, 46, vyp. 2, P. 173–178.
270. *Antipov Yu.A., Popov G.Ya., Yatsko S.I.* Reshenie zadach o kontsentratsii napryazheniy vozle peresekayushchikhsya defektov pri pomoshchi zadachi Rimana s beskonechnym indeksom. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1987, 51, № 3, P. 458–467.
271. *Popov V.G.* Dinamicheskaya zadacha teorii uprugosti dlya ploskosti, sodержashchey zhestkoe krestoobraznoe vkluyuchenie. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1993, 57, № 1, P. 100–115.
272. *Grigoryan E.Kh., Torosyan D.R., Shaginyan S.S.* Zadacha dlya uprugoy ploskosti, sodержashchey krestoobraznoe vkluyuchenie. *Izvestiya NAN Armenii. Mekhanika*, 2002, 55, № 1, P. 6–16.
273. *Zheng S.F., Denda M., Weng G.J.* Interfacial partial debonding and its influence on the elasticity of a two-phase composite. *Mechanics of Materials*, 2000, 32, P. 695–709.
274. *Tvergaard V.* Debonding of short fibres among particulates in a metal matrix composite. *Int. J. Sol. Struct.*, 2003, 40, P. 6957–6967.
275. *Chaudhuri R.A.* Three-dimensional singular stress field near a partially debonded cylindrical rigid fiber. *Composite Structures*, 2006, 72, P. 141–150.
276. *Il'ina I.I., Sil'vestrov V.V.* Zadacha o tonkom zhestkome mezhfaznom vkluyuchenii, otsloivshemysya vdol' odnoy storony ot sredi. *Izv. RAN. Mekh. tverdogo tela*, 2005, № 3, P. 153–166.
277. *Il'ina I.I., Sil'vestrov V.V.* Chastichno otsloivsheesya tonkoe zhestkoe vkluyuchenie mezhdu raznymi uprugimi materialami pri nalichii treniya v zone kontakta. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seriya*, 2007, № 4 (54), P. 124–139.
278. *Russakova I.I.* Ploskost' s vkluyucheniem, otsloivshemysya vdol' odnoy storony ot sredi, pod deystviem razlichnykh nagruzok pri nalichii treniya. *Trudy Vseross. nauch. konf. (26–28 maya 2004 g.)*. Chast' 1, *Mat. model. mekh., prochn. i nadezhn. konstruksiy, Mat. model. i kraev. zadachi*, SamGTU, Samara, 2004, P. 191–194.
279. *Yardukhin A.K.* Analiticheskoe reshenie zadachi vzaimodeystviya mezhfaznoy treshchiny s otsloivshimysya mezhfaznym vkluyucheniem pri nalichii sosredotochennykh sil. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, Samara, 2003, 19, P. 107–110.
280. *Moyseenok A.P., Popov V.G.* Nestatsionarnaya zadacha o kontsentratsii uprugikh napryazheniy vblizi tonkogo zhestkogo otsloivshegosya vkluyucheniya nakhodyashchegosya v usloviyakh ploskoy deformatsii. *Visn. Dnipr. un-tu*, 2007, №2/2, Seriya MEKHANIKA, Vip. 11, T. 2, P. 130–140.
281. *Moraru G.* Concentration of stresses near a debonded flexible inclusion in plane elasticity. *Rev. Roum. Sci. Techn., Méc. Appl.*, Bucarest, 2008, TOME 53, No. 2, P. 175–182.
282. *Syas'kyy A.O., Batyshkina Yu.V.* Chastkove symetrychne pidsvyleniya kryvoliniynoho otvoru v neskinchenniy plastyntsi. *Visnyk TDTU*, 2004, T. 9, No. 2, P. 5–12.

283. Syas'kyy A.O., Shevtsova N.V. Pruzhna rivnovaha plastynky z kryvoliniynym konturom, chastkovo pidsylenym systemoyu tr'okh nesymetrychnykh reber. Visnyk TDTU, 2008, T. 13, No. 1, P. 13–19.
284. Syas'kyy A.O., Trokhymchuk O.Ya. Mishana kontaktna zadacha dlya plastynky z kryvoliniynym otvorum i systemy shtampiv z kutovymy tochkamy. Visnyk NTUU «KPI». Ser. «Mashynobuduvannya», K., 2010, No. 58, P. 36–41.
285. Bozhydarnyk V.V. Dvovymirni zadachi pruzhnosti y termopruzhnosti strukturno-neodnorodnykh til. L'viv: Svit, 1998, 352 p.
286. Savin G.N. Kontsentratsiya napryazheniy okolo otverstiy. M.: Gos. izd-vo tekhn.-teor. I-ry, 1951, 496 p.
287. Savin G.N., Fleysman N.P. Plastinki i obolochki s rebrami zhestkosti. K.: Nauk. dumka, 1964, 384 p.
288. Savin G.N., Tul'chiy V.I. Plastinki, podkreplennye sostavnymi kol'tsami i uprugimi nakladkami. K.: Nauk. dumka, 1971, 268 p.
289. Savin G.N. Raspreделение napryazheniy okolo otverstiy. K.: Nauk. dumka, 1968, 888 p.
290. Sheremet'ev M.P. Plastinki s podkreplennym kraem. L'vov: Izd-vo L'vov. un-ta, 1960, 258 p.
291. Kaloerov S.A., Dobryak D.A. Termouprugoe sostoyanie anizotropnoy plastinki s uprugimi kol'tsami. Teoret. i prikl. mekh, 2009, Vyp. 46, P. 155–168.
292. Nazarchuk Z.T. Modelyuvannya rozsiyannya elektromahnetnykh khvyly' tonkym dielektrychnym pokryvom na tsylindri. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 2006, 42, No. 1, P. 96–104.
293. Benedetti I., Aliabadi M.H., Milazzo A. A fast BEM for the analysis of damaged structures with bonded piezoelectric sensors. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2010, 199, P. 490–501.
294. Berezhnitskiy L.T., Gromykh R.S., Trush I.I. O postroenii diagramm lokal'nogo razrusheniya dlya khрупkikh tel s ostrokonechnymi zhestkimi vklucheniyaми. Fiz.-khim. mekhanika materialov, 1975, 11, № 5, P. 40–47.
295. Berezhnitskiy L.T., Panasyuk V.V., Trush I.I. O lokal'nom razrushenii khрупkogo tela s ostrokonechnymi zhestkimi vklucheniyaми. Probl. prochnosti, 1973, № 10, P. 8–11.
296. Gdoutos E.E. Fracture mechanics. Dordrecht: Springer, 2005, 369 p.
297. Mechanics of Fracture / ed. G.C. Sih. Leyden: Noordhoff, 1973, 517 p.
298. Popina S.Yu., Sulim G.T. Predel'naya nagruzka dlya khрупkogo tela s tonkostennym uprugim vklucheniem. Fiz.-khim. mekhanika materialov, 1987, 23, № 2, P. 115–118.
299. Kundrik N.M. Otsloenie vklucheniya v ortotropnoy kompozitsii. Prikl. mekhanika, 2000, 36, № 9, P. 123–128.
300. Dal Corso F., Bigoni D., Gei M. The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part I Full-field solution and asymptotics. J. Mech. Phys. Sol., 2008, 56, No. 3, P. 815–838.
301. Dal Corso F., Bigoni D., Gei M. The stress concentration near a rigid line inclusion in a prestressed, elastic material. Part II Implications on shear band nucleation, growth and energy release rate. J. Mech. Phys. Sol., 2008, 56, No. 3, P. 839–857.
302. Stadnik M.M., Andreykiv A.E. Prochnost' materialov, soderzhshchikh systemy tonkikh vklucheniy. Fiz.-khim. mekhanika materialov, 1986, 22, № 1, P. 29–35.
303. Sylovanyuk V.P., Yukhym R.Ya. Deformatsiya ta ruynuvannya materialiv bilya vkluchen' pid statychnym navantazhenniam tila. Fiz.-khim. mekhanika materialiv, 2007, 43, No. 6, 3. 31–35.
304. Sulim G.T. Primenenie formuly Somil'yana v zadachakh teorii uprugosti dlya tel s tonkostennymi vklucheniyaми. Mat. metody i fiz.-mekh. polya. Kiev: Nauk. dumka, 1983, Vyp. 18, P. 48–51.
305. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35, No. 4, P. 678–690.

306. *Pasternak Ya.M., Sulym H.T.* Solution of the problems of antiplane deformation of bodies with thin ribbonlike inclusions by the methods of integral equations. I. General relations . Materials Science, 2011, 47, No. 1, P. 36–44.
307. *Pasternak Ia.M., Sulym H.T.* Dual boundary element method for problems of the theory of thin inclusions . J. Math. Sci, 2011, 178, No. 4, P. 421–434.
308. *Pasternak Ia.* Doubly periodic arrays of cracks and thin inhomogeneities in an infinite magnetoelastic medium . Engineering Analysis with Boundary Elements, 2012, 36, No. 5, P. 799–811.
309. *Pasternak Ia.* Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity . Engineering Analysis with Boundary Elements, 2012, 36, No. 12, P. 1931–1941.
310. *Pasternak Ia.M.* Plane problem of elasticity for anisotropic bodies with thin elastic inclusions . J. Math. Sci, 2012, 186, No. 1, P. 31–47.
311. *Pasternak Ia., Sulym H.* Stroh formalism based boundary integral equations for 2D magnetoelasticity . Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37, No. 1, P. 167–175.
312. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities . Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37, No. 2, P. 419–433.
313. *Pasternak Ia., Sulym H.* Stress state of solids containing thin elastic crooked inclusions . J. Eng. Math, 2013, 78, P. 167–180.
314. *Pasternak Ia.M., Vasil'ev K.V., Sulym H.T.* Antiplane deformation by concentrated factors of bounded bodies with cracks and rigid inclusions . J. Math. Sci, 2013, 190, No. 5, P. 710–724.
315. *Pasternak Ia.M., Sulym H.T.* Coupled 2D electric, magnetic, and mechanical fields in dielectrics with cracks and thin inclusions . J. Math. Sci, 2013, 192, No. 5, P. 565–582.
316. *Pasternak Ya.M., Sulym H.T.* Solution of the problems of antiplane deformation of bodies with thin ribbonlike inclusions by the methods of integral equations. II. Analysis of the stress concentration and stress intensity . Materials Science, 2013, 48, No. 6, P. 788–794.
317. *Sulym H., Pasternak Ia., Kutsyk S., Grodzki W.* Doubly periodic sets of thin branched inclusions in the elastic medium: stress concentration and effective properties . Acta mechanica et automatica, 2013, Vol. 7, No. 1, P. 48–52.
318. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* Boundary integral equations for 2D thermoelectroelasticity of a half-space with cracks and thin inclusions . Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37, No. 11, P. 1514–1523.
319. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* Temperature field and heat flux that do not induce stress and electric displacement in a free thermoelectroelastic anisotropic solid . Mechanics Research Communications, 2014, 57, P. 40–43.
320. *Pasternak Ya.M., Sulim G.T.* Plane problem of elasticity for an anisotropic body with doubly periodic systems of thin inhomogeneities . Mechanics of Solids, 2014, Vol. 49, No. 2, P. 162–174.
321. *Pasternak I.M., Sulym H.T., Oliyarnyk N.R.* Antiplane deformation of anisotropic bodies with periodic systems of thin inhomogeneities . Materials Science, 2014, Vol. 49, No. 5, P. 602–611.
322. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial . Engineering Analysis with Boundary Elements, 2014, 48, P. 87–101.
323. *Pasternak Ya.M., Sulym H.T., Pasternak R.M.* Generalized Somigliana identity for thermomagnetoelastic anisotropic bodies . J. Math. Sci, 2015, 205, No. 5, P. 677–690.

*Pasternak Ia.M., Sulym H.T., Pasternak R.M.*

**STUDIES ON STRESS STATE OF SOLIDS MADE OF FUNCTIONAL STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS MATERIALS: A REVIEW OF PUBLICATIONS TILL 2010**

The paper presents a review on the recent advances in the theoretical and experimental studies of functional (smart) materials and structures. Particular attention is paid to piezoelectric and magnetoelastoelectric materials, which internally couple mechanical, electric and magnetic fields and can operate as sensors or actuators. Modern smart magnetoelastoelectric materials consisting of piezoelectric and piezomagnetic phases are widely used due to the effect of electromagnetic coupling, which is hundred or even thousand times larger than that of a single crystal magnetoelastoelectric materials. The highest electromagnetic coupling due to the regular arrangement of phases is possessed by ferrite-piezoelectric nanostructures, in particular self-assembled nanocomposite thin films. Ferroelectric materials are widely used in modern technologies, especially precise devices, due to the highest values of electro-mechanical coupling among other piezoelectric materials. In turn, all ferroelectric materials are pyroelectric ones, thus, polarize when heated or cooled. The presence of different defects (e.g. cracks or inclusions) can additionally cause high stress and electric displacement intensity under the applied thermal load, especially, when the pyroelectric material is not homogeneous, or consists of homogeneous parts bonded together. The paper presents a comprehensive review on the methods, especially numeric and analytic ones, used to study the influence of different fields on stress concentration at defects and fibers. The questions on fracture of defective solids with thin inclusions are also examined.

**Keywords:** thermomagnetoelastoelectricity, crack, thin inclusion, anisotropic, composite, smart material

*Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Пастернак Р.М.*

**ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ: ОБЗОР ПУБЛИКАЦИ ДО 2010 Г.**

В работе произведен обзор современных научных исследований по изучению взаимодействия физико-механических полей в деформируемых твердых телах с тонкими неоднородностями, отверстиями, трещинами и другими дефектами.

**Ключевые слова:** термомагнитоэлектроупругость, трещина, тонкое включение, анизотропный, композит, интеллектуальный материал



УДК 539.3

## МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ І ВЕКТОР ВУЗЛОВИХ РЕАКЦІЙ КРУГОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА З ЧИСЕЛЬНИМ ІНТЕГРУВАННЯМ

**О.І. Гуляр<sup>1</sup>**,  
д-р техн. наук

**С.О. Пискунов<sup>1</sup>**,  
д-р техн. наук,

**О.О. Шкриль<sup>1</sup>**,  
канд. техн. наук,

**К.С. Романцова<sup>1</sup>**,  
аспірант

*<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

На основі варіаційного принципу можливих переміщень розроблено круговий СЕ зі змінною площею поперечного перерізу у напрямку твірної, який за рахунок чисельного інтегрування враховує змінність фізико-механічних і геометричних параметрів у поперечному перерізі. У процесі розв'язання тестових задач була підтверджена правильність результатів, які дозволяють отримувати розроблений варіант СЕ.

**Ключові слова:** просторова задача, напіваналітичний метод скінчених елементів, матриця жорсткості, чисельне інтегрування.

**Вступ.** Значна кількість об'єктів мають складну геометричну форму, і крім того, характеризуються змінністю фізико-механічних параметрів вздовж просторових координат (наприклад внаслідок їхнього відхилення від номінальних значень або наявності вирізів, порожнин або зон руйнування). Використання в цьому випадку в дискретних моделях МСЕ скінчених елементів (СЕ) із сталими фізико-механічними параметрами, які дорівнюють відповідним значенням в центрі поперечного перерізу СЕ, може спричинити значне спотворення результатів. У такому разі необхідно надмірно згущувати СЕ сітку або застосовувати інші підходи, наприклад, такі як чисельне інтегрування або інтегрування у замкнену вигляді, що дозволяють враховувати змінність фізико-механічних параметрів. Проте при інтегруванні у замкненому вигляді значно ускладнюються розрахункові співвідношення, тому більш зручним є використання чисельного інтегрування.

В даній роботі описується варіант скінченного елемента, матриця жорсткості і вузлові реакції якого визначаються на основі чисельного інтегрування в області поперечного перерізу.

**Скінчений елемент з чисельним інтегруванням в поперечному**

**перерізі.** Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи  $N$  СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0.$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.1)$$

Представимо фізичні деформації через ненормовані коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена з урахуванням змінності компонент метричного тензора в поперечному перетині СЕ

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} \xi_{ij};$$

де

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left( \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) x^{(3-\alpha)}; \quad \xi_{12} = \overset{\circ}{\epsilon}_{12}; \\ \xi_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} + \left( \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3} \left( \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right) x^{(3-\alpha)}; \\ \xi_{33} &= \overset{\circ}{\epsilon}_{33} + \left( \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\epsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) x^{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тоді формулу (1.1) із використанням нефізичних компонентів напружень та деформацій представимо в матричному вигляді

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta \{ \xi \}^T \{ \sigma \} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.3)$$

де

$$\begin{aligned} \{ \xi \}^T &= \{ \xi_{11} \quad 2\xi_{12} \quad \xi_{22} \quad 2\xi_{23} \quad 2\xi_{13} \quad \xi_{33} \}, \\ \{ \sigma \} &= \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{33} \}. \end{aligned}$$

Співвідношення (1.2), що описують залежність між ненормованими компонентами деформацій – складовими коефіцієнтів розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\{\xi\} = \sum_{l=0}^L \left( [B_1] \Phi^{(l)} + [B_2] \Phi_{,3}^{(l)} \right) \{u_l\}; \quad (1.4)$$

де

$$\begin{aligned} \{u\}_l^T &= \{u_{l(-1;-1)}^T u_{l(1;-1)}^T u_{l(-1;1)}^T u_{l(1;1)}^T\}; \\ \{u\}_{l(S_1, S_2)}^T &= \{u_{1(S_1, S_2)}^l\} \{u_{2(S_1, S_2)}^l\} \{u_{3(S_1, S_2)}^l\}; \\ [B_\alpha] &= [B_\alpha]^{(-1;-1)} [B_\alpha]^{(1;-1)} [B_\alpha]^{(-1;1)} [B_\alpha]^{(1;1)}. \end{aligned}$$

Склад матриць  $[B_\alpha]^{(S_1, S_2)}$  є наступним:

$$[B_1]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 z_{,1}^{\circ 1} + (B_1)_1 x^2 & \frac{1}{2} S_1 z_{,1}^{\circ 2} + (B_1)_2 x^2 & 0 \\ \frac{1}{2} (S_2 z_{,1}^{\circ 1} + S_1 z_{,2}^{\circ 1}) & \frac{1}{2} (S_2 z_{,1}^{\circ 2} + S_1 z_{,2}^{\circ 2}) & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 z_{,2}^{\circ 1} + (B_1)_3 x^1 & \frac{1}{2} S_2 z_{,2}^{\circ 2} + (B_1)_4 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3} \left( S_2 \frac{z_{,2}^{\circ 2}}{z_{,2}^{\circ 2}} \right) + (B_1)_5 x^1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3} \left( S_1 \frac{z_{,1}^{\circ 1}}{z_{,2}^{\circ 2}} \right) + (B_1)_6 x^2 \\ 0 & \frac{1}{4} z_{,3}^{\circ 2} \left( z_{,3}^{\circ 3} \right)^2 + (B_1)_7 x^1 + (B_1)_8 x^2 & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$(B_1)_1 = S_1 S_2 z_{,1}^{\circ 1} + \frac{S_1}{2} z_{,12}^{\circ 1} - \frac{1}{2} S_1 z_{,2}^{\circ 1} h_{11,2};$$

$$(B_1)_2 = S_1 S_2 z_{,1}^{\circ 2} + \frac{S_1}{2} z_{,12}^{\circ 2} - \frac{1}{2} S_1 z_{,2}^{\circ 2} h_{11,2};$$

$$(B_1)_3 = S_1 S_2 z_{,2}^{\circ 1} + \frac{S_2}{2} z_{,12}^{\circ 1} - \frac{1}{2} S_1 z_{,2}^{\circ 1} h_{11,2};$$

$$(B_1)_4 = S_1 S_2 z_{,2}^{\circ 2} + \frac{S_2}{2} z_{,12}^{\circ 2} - \frac{1}{2} S_1 z_{,2}^{\circ 2} h_{11,2};$$

$$\begin{aligned}
 (B_1)_5 &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} \left[ 2 \cdot S_1 S_2 - \frac{1}{z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ}} \left( z_{,12}^{\circ} + z_{,2}^{\circ} z_{,1}^{\circ} \left( 2S_1 - \frac{z_{,1}^{\circ}}{z_{,2}^{\circ}} \right) \right) - \frac{1}{2} \left( S_2 - \frac{z_{,2}^{\circ}}{z_{,2}^{\circ}} \right) \left( h_{22,1}^{\circ} + h_{33,1}^{\circ} \right) \right]; \\
 (B_1)_6 &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} \left( \left( 2 \cdot S_1 S_2 - \frac{1}{z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ}} \left( z_{,12}^{\circ} + z_{,1}^{\circ} z_{,2}^{\circ} \left( 2S_2 - \frac{z_{,2}^{\circ}}{z_{,2}^{\circ}} \right) \right) \right) - \frac{1}{2} \left( S_1 - \frac{z_{,1}^{\circ}}{z_{,2}^{\circ}} \right) \left( h_{11,2}^{\circ} + h_{33,2}^{\circ} \right) \right) \\
 (B_1)_7 &= \frac{1}{4} \left( z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} \right)^2 \left( z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} + 2S_1 z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ} - z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ} h_{33,1}^{\circ} \right) \\
 (B_1)_8 &= \frac{1}{4} \left( z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} \right)^2 \left( z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ} + 2S_2 z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} - z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} h_{33,2}^{\circ} \right) \\
 [B_2]^{(S_1, S_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ} + (B_2)_1 x^1 & \frac{1}{4} z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ} + (B_2)_2 x^1 & 0 \\ \frac{1}{4} z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} + (B_2)_3 x^1 & \frac{1}{4} z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} + (B_2)_4 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} + (B_2)_5 x^1 + (B_2)_6 x^2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 (B_2)_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} z_{,12}^{\circ} z_{,12}^{\circ} + S_1 z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} - \frac{1}{4} z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ} \left( h_{22,1}^{\circ} + h_{33,1}^{\circ} \right) \right); \\
 (B_2)_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} z_{,12}^{\circ} z_{,12}^{\circ} + S_1 z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} - \frac{1}{4} z_{,2}^{\circ} z_{,2}^{\circ} \left( h_{22,1}^{\circ} + h_{33,1}^{\circ} \right) \right); \\
 (B_2)_3 &= \frac{1}{2} z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} \left( \frac{1}{2} z_{,12}^{\circ} z_{,12}^{\circ} + S_2 - \frac{1}{4} \left( h_{11,2}^{\circ} + h_{33,2}^{\circ} \right) \right); \\
 (B_2)_4 &= \frac{1}{2} z_{,1}^{\circ} z_{,1}^{\circ} \left( \frac{1}{2} z_{,12}^{\circ} z_{,12}^{\circ} + S_2 - \frac{1}{4} \left( h_{11,2}^{\circ} + h_{33,2}^{\circ} \right) \right); \\
 (B_2)_5 &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} S_1 - \frac{1}{4} z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} h_{33,1}^{\circ}; \\
 (B_2)_6 &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} S_2 - \frac{1}{4} z_{,3}^{\circ} z_{,3}^{\circ} h_{33,2}^{\circ}.
 \end{aligned}$$

Підставляючи (1.4) в (1.3), запишемо варіацію енергії деформації

елемента через переміщення  $\{u\}$  та вузлові реакції  $\{r_\sigma\}$ :

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_\sigma\}_l, \quad (1.5)$$

де

$$\{r_\sigma\}_l = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left( [B_1]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi^{(l)} dx^3 + [B_2]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \{\sigma\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (1.6)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримасмо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними в перерізі  $x^3 = const$  механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ \left( [B_1]^T \{\sigma_1\}_i + [B_2]^T \{\sigma_2\}_j \right) \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}, \quad (1.7)$$

де  $\{\sigma_1\}_i = \sum_{m=1}^M \left( \{\sigma\} \varphi^{(l)} H_m \right)_{(x_m^3)}$ ,  $\{\sigma_2\}_j = \sum_{m=1}^M \left( \{\sigma\} \varphi_{,3}^{(l)} H_m \right)_{(x_m^3)}$ ,  $I, J, M$  - кількість

точок інтегрування по  $x_i^1, x_j^2, x_m^3$ , відповідно,  $H_i, H_j, H_m$  - вагові функції,  $x_i^1, x_j^2, x_m^3$  - координати точок інтегрування.

Для виведення матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\sigma\} = [D] \{\xi\}. \quad (1.8)$$

де

$$[D] = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1122} & D^{1133} \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1222} & D^{1233} \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2222} & D^{2233} \\ D^{3311} & D^{3312} & D^{3322} & D^{3333} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці  $[D]$  визначаються згідно формул (2.7).

Варіація енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta \{\xi\}^T [D] \{\xi\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.9)$$

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \delta\{u\}_l^T \left( [B_1]^T \varphi^{(l)} + [B_2]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) [D] \times \\ \times \sum_{n=0}^L \{u\}_n \left( [B_1] \varphi^{(n)} + [B_2] \varphi_{,3}^{(n)} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.10)$$

Інтегруючи в (1.10) по  $x^3$  і позначимо:

$$G_1^{ln} = \sum_{m=1}^M \left( \varphi^{(l)} \varphi^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \quad G_2^{ln} = \sum_{m=1}^M \left( \varphi_{,3}^{(l)} \varphi^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \\ G_3^{ln} = \sum_{m=1}^M \left( \varphi^{(l)} \varphi_{,3}^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}, \quad G_4^{ln} = \sum_{m=1}^M \left( \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_{,3}^{(n)} H_m \right)_{(x_m^3)}.$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримаємо:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta\{u\}_l^T [k]_{ln} \{u\}_n, \quad (1.11)$$

де  $[k]_{ln}$  – матриця жорсткості:

$$[k]_{ln} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \left( [B_1]^T [D] [B_1] G_1^{ln} + [B_2]^T [D] [B_1] G_2^{ln} + \right. \\ \left. + [B_1]^T [D] [B_2] G_3^{ln} + [B_2]^T [D] [B_2] G_4^{ln} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (1.12)$$

Після інтегрування по  $x^1$  і  $x^2$ , отримаємо формулу для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості кругового СЕ із змінними в перерізі  $x^3 = const$  геометричними та фізичними параметрами:

$$[k]_{ln} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left( [B_1]^T [D] [B_1] G_1^{ln} + [B_2]^T [D] [B_1] G_2^{ln} + \right. \\ \left. + [B_1]^T [D] [B_2] G_3^{ln} + [B_2]^T [D] [B_2] G_4^{ln} \right) \sqrt{g} H_i H_j_{(x_i^1, x_j^2)}. \quad (1.13)$$

Як відомо з попередніх публікацій, чисельне інтегрування є ефективним для тонкостінних об'єктів, у яких відношення товщини стінки до середнього радіуса в межах  $t/r=1/8 \dots 1/10$ , але викликає інтерес ефективність застосування чисельного інтегрування до тіл, відношення у яких виходить за приведені вище межі. Тому для визначення кола задач, у яких доцільно використовувати чисельне інтегрування, були розглянуті наступні тестові приклади.

1. Розрахунок нескінченної труби навантаженої внутрішнім тиском (рис. 1). Середній радіус  $R_0=2.2\text{ см}$ , середньою товщиною стінок  $t_0=2.4\text{ см}$ . Розглянуто три варіанти зміни модуля пружності по товщині стінки: а) постійний модуль пружності; б) модуль пружності зменшується з радіусом на 1%; в) модуль пружності радіусом ся по висоті у два рази; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ . Еталонний розв'язок може бути отриманий на основі відомих аналітичних співвідношень [5].

Використані для дослідження збіжності дискретні моделі налічували 4, 6 і 12 СЕ, при цьому характер збіжності результатів для всіх випадків є однаковим. Отримані основні НМСЕ результати наведені у вигляді графіків співставлення величин радіальні напружень по радіусу для трьох названих випадків зміни модуля пружності на рис. 2.

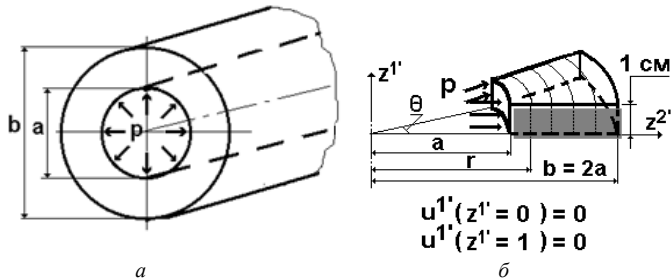


Рис.1. Труба зі змінним модулем пружності по товщині стінки: розрахункова схема (а) і дискретна модель НМСЕ (б).

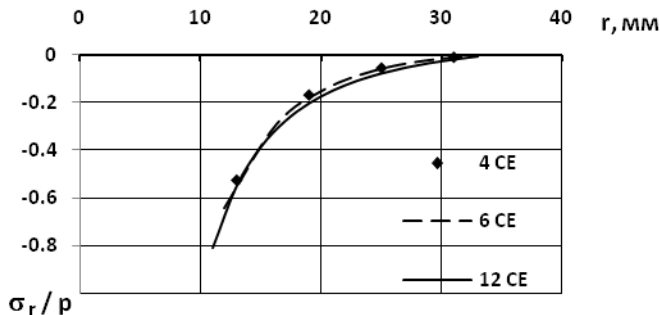


Рис.2. Аналіз збіжності НМСЕ при зміні модуля пружності по радіусу на 1%

2. Розрахунок нескінченного циліндра, навантаженого внутрішнім тиском із середнім радіус  $R_0=10\text{ см}$ , середня товщина стінок  $t_0=2\text{ см}$ . Модуль пружності  $E=1$ ; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$

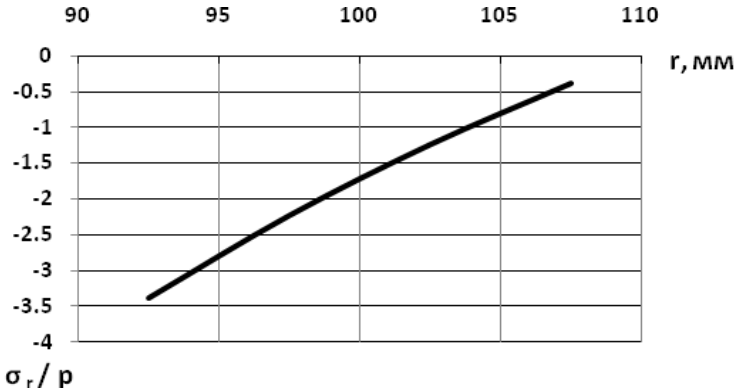


Рис.3. Графік розподілення радіальних напружень в циліндрі при  $R_0=10\text{см}$ , середня товщина стінок  $t_0=2\text{см}$

Таким чином, як можна побачити з графіків, у першому випадку спостерігається значна нелінійність у розподіленні напружень по радіусу. Тому збіжність розв'язку при використанні СЕ із чисельним членуванням буде мати такий самий характер, як і при використанні СЕ із сталими фізико-механічними характеристиками, тобто чисельне інтегрування буде неефективним. У другому випадку, незважаючи на те, що відношення середньої товщини стінки до середнього радіусу становить 1/5 розподілення напружень дуже близьке до лінійного, тобто чисельне інтегрування у перерізі СЕ є доцільним і ефективним.

Таким чином, використанням чисельного інтегрування може бути ефективним не тільки у випадках, які лежать в теоретично встановлених межах співвідношення товщини і середнього радіусу, а і при співвідношенні порядку 1/5. Отримані результати збігаються із отриманими в роботі [6] для оболонкових конструкцій і пластин.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
4. *Писаренко Г.С.* Сопротивление материалов / Писаренко Г.С., Агаев В.А Квитка А.Л., Попков В.Г. Уманский Э.С. – Киев: Вища школа, 1979. - 696 с.



5. Пискунов С.О., Солодей І.І., Максим'юк Ю.В., Солоденко А.Д. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонки і пластин // — Опір матеріалів і теорія споруд. — 2013. - Вип. 91. - С. 60-68.
6. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский. — К. : Вища шк., 1982. — 480 с.

## REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Hulyar A.Y., Sakharov A.S., Topor A.H. Poluanalytycheskyy metod konechnykh elementov v mekhanike deformyruemykh tel (Semi-analytical finite element method in the mechanics of deformable bodies) – К.: NYYSM, 1993. – 376s.
2. Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Py'skunov S.O., Saxarov O.S. Napivanalitichnyj metod skinchennyx elementiv v zadachax rujnivanja prostoroxyx til: Monografiya – К.: KNUBA, 2005. – 298 s.
3. Blokh V.Y. Teoryya uprugosti „Theory of elasticity” / V.Y. Blokh. – Kh.: Yzd. Khar'kovsk. Hos. Unyversyteta, 1964. – 484 s.
4. Pisarenko G.S. Soprotivlenie materialov / Pisarenko G.S., Agaev V.A Kvitka A.L., Popkov V.G. Umanskiy E.S. – Kiev: Vischa shkola, 1979. - 696 s.
5. Piskunov S.O., Solodey I.I., Maksim'yuk Y.V., Solodenko A.D. Osoblivosti vikoristannya momentnoyi shemi skinchenih elementiv (MSSE) pri liniynih rozrahunkah obolonok i plastin // — Opir materialiv i teoriya sporud. — 2013. - Vip. 91. - S. 60-68.
6. Sakharov A.S. Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdyykh tel (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) / A.S. Sakharov, V.N. Kyslookyy, V.V. Kyrychevskyy. – К.: Vyshcha shk., 1982. – 480 s.

*Guliar O., Piskunov S., Shkriyl' A., Romantsova K.*

#### **STIFFNESS MATRIX AND THE VECTOR OF NODAL REACTIONS OF CIRCULAR FINITE ELEMENT WITH NUMERICAL INTEGRATION**

On the basis of virtual work variations a new finite element with a variable crosssectional area along a generation, which due to numerical integration takes into account the variability of mechanical and geometrical parameters in cross-section was developed. In the process of test problem solving the correctness of the results, which allows to get this version of FE, was confirmed.

**Keywords:** spatial problem, semianalitic finite element method, stiffness matrix, vector of nodal reactions, numerical integration.

*Гуляр А.И., Пискунов С. О., Шкряль О.О., Романцова К. С.*

#### **МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОР УЗЛОВЫХ РЕАКЦИЙ КРУГОВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА С ЧИСЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ**

На основании вариационного принципа возможных перемещений разработан конечный элемент с переменной площадью в направлении образующей, который за счет численного интегрирования учитывает изменение физико-механических и геометрических параметров в поперечном сечении. В процессе решения тестовых задач была подтверждена правильность результатов, которые позволяет получать разработанный вариант КЭ.

**Ключевые слова:** пространственная задача, полуаналитический метод конечных элементов, матрица жесткости, вектор узловых реакций, численное интегрирование.

УДК 539.3

## ПРО ОДИН АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

**В.К. Чибіряков<sup>1</sup>,**

д-р техн. наук, зав. кафедри вищої математики

**А.М. Станкевич<sup>1</sup>,**

канд. техн. наук, зав. кафедри опору матеріалів

**В.Ф. Мельничук<sup>1</sup>,**

асистент кафедри вищої математики

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва та архітектури. Київ*

У даній роботі запропоновано для розв'язання диференціальних рівнянь задач теплопровідності використовувати метод скінченних різниць по часовій координаті та метод дискретної ортогоналізації С.Г. Годунова для кожного часового шару по просторовій координаті.

**Ключові слова:** нестационарна теплопровідність, метод скінченних різниць, метод С.Г. Годунова, неявний алгоритм, точність, стійкість.

При розрахунках напружено-деформованого стану (НДС) несучих конструкцій під дією температурних впливів в рамках теорії термопружності передбачається дослідження проводити в два етапи. На першому розв'язується задача теплопровідності, а на другому по знайденому температурному полю знаходяться характеристики НДС. Таким чином розв'язання задач теплопровідності є суттєвим елементом дослідження напружено-деформованого стану несучого об'єкта.

Задача теплопровідності для деформівного твердого тіла є однією з основних задач математичної фізики і тому для її розв'язання розроблено багато аналітичних та наближених методів. Тим не менш в наш час продовжується розробка методів розв'язання цих задач, правда, перевага віддається чисельним методам та алгоритмам. Для розв'язання стаціонарних задач теплопровідності, диференціальні рівняння яких визначені в просторовій області, використовують різні чисельні методи, що зводять (редукують) вихідні рівняння до систем рівнянь меншої вимірності по просторовим координатам, а то й до алгебраїчних рівнянь. Один з досить поширених методів зниження вимірності вихідних рівнянь є так званий метод прямих. Головна ідея цього метода полягає в зведенні багатовимірної по просторових координатах задачі до одновимірної. У наш час цей метод набуває особливого значення, оскільки розроблено

високоєфективний стійкий метод розв'язання одновимірних граничних задач – метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [2].

Правда, при знаходженні температурних полів частіше необхідно враховувати нестационарний характер (залежність від часу цих полів). Для дослідження нестационарної задачі теплопровідності ставиться початково-гранична задача. Для розв'язання початково-граничних задач розроблено чисельні алгоритми, за допомогою яких шукаються наближені розв'язки цих задач [1]. Як відомо, ці алгоритми використовують метод скінченних різниць для апроксимації частинних похідних по часовій координаті та метод скінченних різниць або метод скінченних елементів по просторових координатах. Ці алгоритми поділяються на явні та неявні. Явні алгоритми значно простіші, але є умовно стійкими і в зв'язку з цим вимагають використання занадто малих кроків по часовій координаті. Неявні алгоритми, як правило, стійкі, але на кожному кроці за часом вимагають розв'язування рівнянь по просторових координатах. Тут використовуються деякі чисельні алгоритми, які розроблені для розв'язання граничних задач по одній просторовій змінній (частіше це різні методи прогонки).

Використання згаданих алгоритмів ускладнюється, якщо розв'язувальні рівняння мають коефіцієнти, що залежать від просторових координат. Застосування в цих випадках метода скінченних різниць по просторових координатах вимагає різницевого наближення мішаних похідних та врахування законтурних точок, що значно ускладнює алгоритм та знижує точність.

Уже відомо [2], що для розв'язання одновимірних граничних задач, які описуються системами звичайних диференціальних рівнянь навіть із змінними коефіцієнтами найкращим (з точки зору алгоритмічності та точності) є метод дискретної ортогоналізації С.Г. Годунова. У зв'язку з цим виникає необхідність застосування позитивних рис метода дискретної ортогоналізації для побудови ефективного алгоритму розв'язання початково-граничних задач нестационарної теплопровідності, що одновимірні по просторових координатах. При цьому передбачається застосування по часовій координаті метода скінченних різниць, як звичайно. При цьому бажано зберегти неявний характер алгоритму.

Побудову алгоритму розглянемо на прикладі початково-граничної задачі для одновимірних по просторових координатах рівнянь теплопровідності

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x, y), \quad T(x, t) : (x, t) \in [0, l] \times [0, \infty) \quad (1)$$

$$\text{при } t = 0 \quad T(x, 0) = T_0(x).$$

В якості граничних умов беремо умови конвективного теплообміну як універсальні природні граничні умови

$$\text{при } x=0 \quad q_x - q_x^0 = \alpha_T^0 (T(0,t) - T^0(t)), \quad (2)$$

$$\text{при } x=l \quad q_x - q_x^l = \alpha_T^l (T(l,t) - T^l(t)). \quad (3)$$

Ці умови охоплюють умови першого роду – для цього необхідно  $\alpha_T \rightarrow \infty$ , та умови другого роду – тут необхідно задати  $\alpha_T = 0$ .

Тут позначено:  $T(x,t)$  - температурна функція,  $\lambda_T$  - коефіцієнт теплопровідності,  $\rho$  - густина,  $c$  - питома теплоємність,  $Q(x,t)$  - розподілені теплові джерела,  $\alpha_T^0, \alpha_T^l$  - коефіцієнти тепловіддачі при  $x=0$  та  $x=l$  відповідно,  $T^0(t), T^l(t)$  - температура оточуючого середовища при  $x=0$  та  $x=l$  відповідно.

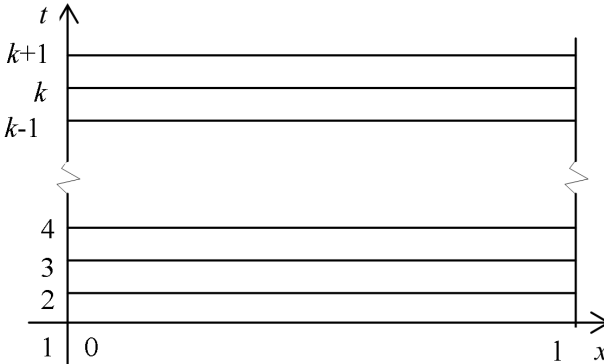


Рис. 1. Часові шари неперервних функцій

Вихідні рівняння по просторовій координаті запишемо у формі Коші, як це необхідно при використанні метода С.К. Годунова. Тобто, введемо нову функцію-компоненту  $q_x$  теплового потоку, щоб рівняння були записані як система диференціальних рівнянь по просторовій координаті першого порядку

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda_T} q_x, \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q(x,t). \end{cases} \quad (4)$$

Область визначення задачі по змінній  $t$  розіб'ємо на часові шари і будемо розрахункові функції розглядати неперервними по  $x$  та дискретними по  $t$ , що підкреслюється рис. 1.

По часовій координаті похідну наблизимо часткою скінченних різниць першого порядку точності (різниці «назад»). При цьому рівняння розглядаємо на шарі  $k+1$

$$\begin{cases} \frac{dT_{k+1}}{dx} = -\frac{1}{\lambda_T} q_{x,k+1}, \\ \frac{dq_{x,k+1}}{dx} = -\rho c \frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta t} + Q_{k+1} \end{cases} \quad (5)$$

або в матричній формі, що зручно при застосуванні метода С.К. Годунова

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} T_{k+1} \\ q_{x,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\lambda_T} \\ -\frac{\rho c}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{k+1} \\ q_{x,k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho c}{\Delta t} T_k + Q_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Тут остання матриця-стовпчик розглядається в якості правої частини, оскільки  $T_k$  - значення температурної функції на попередньому шарі, які вважаються відомими,  $Q_{k+1}$  розглядається на шарі  $k+1$ , але це задана функція.

Розрахунок починається з другого шару ( $k+1=2$ ), оскільки на першому шарі ( $k=1$ ) значення функції  $T$  відомі з початкових умов. За методом дискретної ортогоналізації з використанням граничних умов (2),(3) розв'язується система звичайних диференціальних рівнянь (6), в результаті чого знаходяться значення розв'язувальних функцій на шарі  $k+1=2$ . Ці значення використовуються для знаходження значення розв'язувальних функцій на шарі  $k+1=3$  і так далі. Розрахунок продовжується, поки температурна функція не виходить на стаціонарний режим.

У якості прикладу розглянуто задачу теплопровідності з такими вихідними даними

$$\rho = 2.5, \quad c = 1, \quad \lambda_T = 6, \quad l = 1, \quad \alpha_0 = 10^{10}, \quad \alpha_l = 10^{10}$$

при раптовому підвищенні на  $20^\circ\text{C}$  температури зовнішнього середовища при  $x=0$  та  $x=l$ . На рис. 2 показано зміну температурної функції в часі для точки в першій чверті  $l$ .

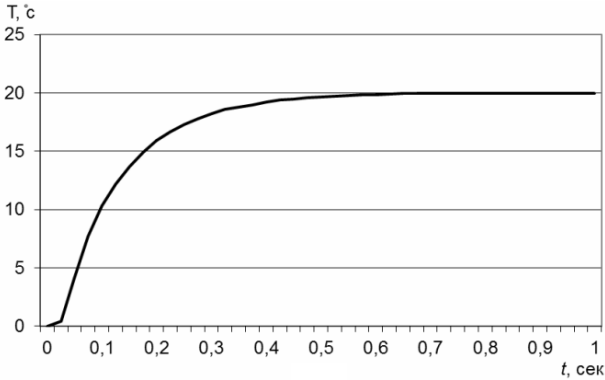


Рис. 2. Зміна температури в часі

При тестуванні алгоритму, що пропонується, помічене специфічне явище. Для дуже малих значень  $\Delta t$  та досить великих значень  $\Delta t$  алгоритм втрачає стійкість. Проміжні значення  $\Delta t$  забезпечують стійкість та достатню точність дослідження нестационарного процесу.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. - М.: Мир, 1972, 420 с.
2. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 416 с.
3. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / НАН Украины. Ин-т механики им. С. П. Тимошенко. Техн. центр. — К.: Академперіодика, 2006. — 472 с.

#### REFERENCES

1. *Richtmyer R. Morton K.* Difference methods for solving boundary value problems: Trans. from English. - M: Mir, 1972, 420 p.
2. *Godunov S.K.* Equations of mathematical physics. - M.: Nauka, 1971. - 416 p.
3. *Grigorenko Y.M., Vlaiu G.G., Grigorenko A.J.* Numerically-analytical solution of problems of mechanics of shells on the basis of various models / NAS. Institute of Mechanics. Timoshenko. Tech. Center. - K.: Academperiodika, 2006. - 472 p.

*Chybyryakov V.K., Stankevich A.M., Melnychuk V.F.*

**ABOUT ONE ALGORITHM OF SOLVING AN INITIAL-BOUNDARY PROBLEM FOR THE EQUATION OF NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION**

In this paper we propose to solve differential equations of heat conduction problems using finite difference method in time coordinates and the method of discrete orthogonalization S.G. Godunov for each time layer to the spatial coordinate.

**Keywords:** unsteady heat conduction, finite difference method, method SG Godunov implicit algorithm accuracy and stability.

*Чибирияков В.К., Станкевич А.М., Мельничук В.Ф.*

**ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

В данной работе предложено для решения дифференциальных уравнений задач теплопроводности использовать метод конечных разностей по временной координате и метод дискретной ортогонализации С. Годунова для каждого временного слоя по пространственной координате.

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, метод конечных разностей, метод С. Годунова, неявный алгоритм, точность, устойчивость.

УДК 539.3

## СТІЙКІСТЬ І ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

**В.А. Баженов<sup>1</sup>**,  
д-р техн. наук

**О.П. Кривенко<sup>1</sup>**,  
канд. техн. наук

**А.Д. Легостаєв<sup>1</sup>**,  
канд. техн. наук

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; e-mail: olakor@ukr.net*

Робота присвячена проблемі розробки єдиної методології на основі ефективного чисельного аналізу задач стійкості та власних коливань широкого класу неоднорідних оболонок, як тонких, так і середньої товщини. У задачах про власні коливання враховується наявність попереднього напруження конструкції від дії статичних навантажень, що істотно впливає на спектр власних коливань і дає можливість визначати точки біфуркації та значення критичної сили при втраті стійкості за динамічним критерієм.

**Ключові слова:** тонка пружна оболонка, геометрично нелінійне деформування, стійкість, власні коливання, універсальний просторовий скінченний елемент.

**Вступ.** Тонкостінні пружні оболонки широко застосовуються у будівництві, авіабудуванні та у інших галузях техніки і відносяться до особливо відповідальних несучих конструкцій. Розповсюджене використання оболонок, як одного з головних конструктивних елементів, пов'язано з їхньою високою несучою спроможністю, легкістю та міцністю. Оболонкові конструкції можуть поєднувати у собі різноманітні конструктивні неоднорідності: ребра та накладки, підкріплені та невідкріплені отвори, виїмки, канали, місцеві потовщення, зломи серединної поверхні, багат шарову структуру матеріалу й інші особливості.

Недоліком тонкостінних оболонкових конструкцій є можливість втрати ними стійкості. Тому дослідження нелінійного деформування та стійкості оболонки є важливою задачею. При цьому визначення частот і форм власних коливань оболонки дає змогу прослідкувати процес деформування конструкції при різних рівнях навантаження.

До теперішнього часу є безліч публікацій, присвячених розрахунку гнучких оболонкових систем. За останнє десятиріччя кількість робіт за тематикою значно зросла [1-12]. Серед них велика увага приділяється вивченню пружних оболонок ступінчасто-змінної товщини [1,2,4,9,10,12].



Дослідженню власних коливань оболонок з урахуванням переднапруженого стану присвячені поодинокі роботи [11,12]. У зв'язку з цим питання, що пов'язані з розробкою моделей нелінійного деформування тонких пружних оболонок неоднорідної структури, та проведення на їхній основі комплексного дослідження стійкості та власних коливань оболонок представляються актуальними і важливими.

**Постановка задачі.** Розрахунки оболонок як систем з ускладненою структурою викликають не тільки обчислювальні, але й принципові методичні труднощі. Їхнє вирішення приводить до необхідності створення нових універсальних розрахункових моделей і розробки нових уточнених методів дослідження оболонок [1-3,5,7-9], які мають ширше коло використання, ніж традиційні методи розрахунку окремих класів оболонок. Найуспішніше ця проблема може бути розв'язана методом скінчених елементів (МСЕ) на основі розробки та застосування для неоднорідних оболонок універсальних просторових скінчених елементів (СЕ). Метою роботи є:

- розробка комплексного підходу до розв'язування статичних задач геометрично нелінійного деформування та втрати стійкості широкого класу пружних неоднорідних оболонок складної форми та структури у поєднанні з методикою розрахунку неоднорідних оболонок на власні коливання з урахуванням переднапруженого стану на кожному кроці термосилового навантаження;
- застосування розробленого методу до розрахунку тонкої оболонки на стійкість з визначенням форм і частот власних коливань.

**1. Методика комплексного чисельного аналізу нелінійного деформування та стійкості неоднорідних оболонок з визначенням власних коливань на кроці навантаження.** Для розв'язування динамічних задач зазвичай застосовують два основні методи: статичний і енергетичний. Статичний метод ґрунтується на використанні рівнянь динамічної рівноваги, які відрізняються від рівнянь статичної рівноваги додатковим врахуванням сил інерції. Енергетичний метод ґрунтується на застосуванні закону збереження енергії.

При побудові розв'язувальних рівнянь за МСЕ у роботі використовується перший підхід із застосуванням принципу можливих переміщень Лагранжа у поєднанні з принципом Даламбера [3, 13-17]

$$\sum_{FE} (\delta W_{FE} - (\delta K_{FE} + \delta Q_{FE})) = 0, \quad (1)$$

де  $K_{FE}$ ,  $W_{FE}$  та  $Q_{FE}$  – роботи сил інерції, внутрішніх і зовнішніх сил СЕ,  $\sum_{FE}$  – сума за скінченими елементами скінченноелементної моделі оболонки (СЕМО).

Обчислення віртуальної роботи внутрішніх сил виконується за співвідношенням [1, 2]

$$\delta W_{FE} = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv. \quad (2)$$

Віртуальна робота сил інерції СЕ визначається як [16]

$$\delta K_{FE} = - \int_{V_{FE}} \rho \ddot{u}^i \delta u^i dv. \quad (3)$$

При дослідженні напружено-деформованого стану оболонки, який виникає від дії термосилового навантаження, віртуальну роботу внутрішніх сил СЕ з врахуванням закону Дюамеля–Неймана подамо у вигляді [1, 2]

$$\begin{aligned} \delta W_{FE} &= \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^e dv = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) dv = \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \\ &= \int_{V_{FE}} \bar{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv - \int_{V_{FE}} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^T dv = \delta \bar{W}_{FE} - \delta W_{FE}^T, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\varepsilon_{kl}^e$  – пружні деформації, поява яких у тілі спричинена виникненням внутрішніх напружень  $\sigma^{ij}$ , що відповідають узагальненому закону Гука

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e; \quad (5)$$

$C^{ijkl}$  – компоненти тензора пружних сталей;  $\varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl} T$  – температурні деформації, що зумовлені зміною температури тіла на величину  $T$  щодо його початкової температури  $T_0$ ;

$$\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^T. \quad (5')$$

Таким чином, (4) складається з двох доданків, які, маючи однакову структуру, виконують різні ролі при розв'язуванні задачі термпружності.

Перший інтеграл являє собою віртуальну роботу внутрішніх сил  $\delta \bar{W}_{FE}$  від повних деформацій

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^T, \quad (6)$$

що залежать від шуканих функцій переміщень

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} \left( C_j^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} + C_i^{k'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial u^{k'}}{\partial x^j}. \quad (7)$$

На основі цього інтегралу визначається ліва частина нелінійної системи розв'язувальних рівнянь МСЕ [1, 2, 16].

Другий інтеграл являє собою віртуальну роботу внутрішніх сил, що залежить від температурних деформацій. На основі цього інтегралу отримується так звана матриця еквівалентних температурних навантажень [1, 2], яка в правій частині системи розв'язувальних рівнянь додається до матриці силових вузлових навантажень. Тому співвідношення (1) подається як

$$\sum_{FE} (\delta \bar{W}_{FE} - (\delta K_{FE} + \delta P_{FE})) = 0, \quad (8)$$

де

$$\delta P_{FE} = \delta Q_{FE} + \delta W_{FE}^T. \quad (8')$$

Для задач статички співвідношення (8) набуває вигляду

$$\sum_{FE} (\delta \bar{W}_{FE} - \delta P_{FE}) = 0, \quad (9)$$

а для задач щодо вільних коливань –

$$\sum_{FE} (\delta \bar{W}_{FE} - \delta K_{FE}) = 0. \quad (10)$$

У роботі задача з визначення власних частот і форм коливань неоднорідної оболонки розв'язується кроковим методом за два етапи.

На першому етапі розв'язується статична задача нелінійного деформування оболонки на кроці навантаження за методикою [1, 2], що реалізує розв'язання нелінійного рівняння (9). На цьому етапі при відповідних приростах навантаження знаходиться напружено-деформований стан (НДС) оболонки: деформована форма (нові координати) та прирости полів переміщень і напружень.

На другому етапі – навантаження «знімається», тобто навантаження приймається рівним нулю при новій формі та наявності переднапруженого стану оболонки.

На цьому етапі власні частоти та форми коливань обчислюються до появи від'ємного значення основного тону (найнижчої) частоти, що відповідає моменту втрати стійкості оболонки.

За динамічним критерієм навантаження, якому відповідає поява від'ємного значення основного тону частоти, приймається за критичне [18]. Надалі визначення частот власних коливань оболонки не виконується, а досліджується лише її закритична поведінка. Точність розрахунку на власні коливання оболонки з урахуванням переднапруженого стану підтверджується збігом величини верхнього критичного навантаження, з отриманим в інший спосіб.

Таким чином, розроблений підхід дозволяє комплексно досліджувати геометрично нелінійне деформування та стійкість тонких і середньої товщини пружних оболонок неоднорідної структури та вивчати малі

коливання оболонок відносно відлікового деформованого стану, що викликаний довільним статичним навантаженням, з урахуванням великих переміщень і переднапруженого стану.

**2. Методика розв'язування геометрично нелінійних задач статики неоднорідних оболонок.** З єдиних методологічних позицій просторової теорії термопружності в [1, 2] розроблено теоретичні положення, метод та обчислювальні процедури чисельного дослідження процесів геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких неоднорідних оболонок, що знаходяться в умовах складного термосилового навантаження. Під неоднорідністю оболонки розуміються її геометричні особливості у вигляді неперервно-змінної та ступінчасто-змінної товщини, зломів, отворів і неоднорідність матеріалу вздовж товщини й у плані.

Дослідження процесів нелінійного деформування оболонок виконуються на основі загальної лагранжевої постановки варіаційної задачі у приростах, коли траєкторія векторів деформацій та напружень будується за компонентами приростів скінченних деформацій та приростів напружень у базисі лагранжевої (супутньої) системи координат. Задача полягає в

знаходженні нового НДС оболонки (приростів напружень та приростів скінченних деформацій у актуальній конфігурації) від дії довільних зовнішніх сил у приростах. Співвідношення, що в компактній тензорній формі описують НДС оболонки, подаються в місцевій криволінійній  $x^i$  та глобальній декартовій  $x^i$  системах координат (рис. 1).

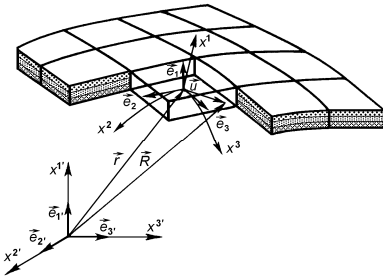


Рис. 1

Використана модель пружного нелінійно деформівного суцільного середовища при великих переміщеннях  $u^{k'}$  і малих деформаціях  $\epsilon_{kl}$ . Матеріали шарів оболонки розглядаються як лінійно-пружні, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана.

Особливості НДС тонкої оболонки враховані двома гіпотезами: щодо сталості нормальних напружень обтиснення волокон шарів за напрямком товщини (слабкіша, ніж класична гіпотеза) та деформівної прямої [1, 2]. Остання гіпотеза забезпечує стиковку елементів без порушення сумісності за переміщеннями і координатами у процесі деформування. Шари оболонки жорстко поєднані між собою в монолітний пакет, деформуючись спільно без проковзування та відриву по поверхнях

контактів, на яких виконується вимога рівності компонент вектора переміщень. Температурне поле в об'ємі оболонки вважається відомою та незалежною від НДС функцією координат.

На основі стандартного ізопараметричного просторового СЕ з полілінійними функціями форми для координат і переміщень розроблено універсальний просторовий скінченний елемент з додатковими змінними параметрами, на базі якого побудована розрахункова модель, що враховує неоднорідності матеріалу та геометричні особливості різних конструктивних елементів оболонки (змінність товщини, зломи та гранованість обшивки, складну форму ребер, накладок, виїмок, отворів, багатшарову структуру матеріалу).

Для побудови розв'язувальних скінченноелементних співвідношень застосована моментна схема скінченних елементів (МССЕ) [1, 2, 14]. Для ізопараметричного просторового СЕ з полілінійними функціями форми для координат і переміщень відповідно до МССЕ функції повних деформацій  $\varepsilon_{ij}$  подаються у вигляді відрізків рядів Маклорена в околі центру СЕ ( $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ ). Відповідно до положень МССЕ, в рядах утримані тільки ті члени, які точно обчислюються і точно враховують зміщення елемента як жорсткого тіла, при цьому для даного СЕ деформації  $\varepsilon_{ij}$  в межах елемента визначаються як лінійні функції від  $x^i$ .

Розроблено алгоритм автоматизованого проходження діаграми “навантаження–прогин” (“ $\bar{q} - \bar{u}$ ”) із визначенням особливих точок (точок розгалуження та критичних) для задач стійкості неоднорідних оболонок при комбінованій дії температурного та силового навантажень. Виконано чисельне обґрунтування достовірності та точності отримуваних нелінійних розв'язків, наприклад [1, 2, 19-24].

**3. Врахування напруженого стану неоднорідної оболонки при визначенні власних коливань.** Для визначення частот і форм власних коливань оболонки будемо розглядати оболонку в процесі крокового навантаження. У процесі коливань переміщення точок середовища оболонки будемо відраховувати від рівноважного стану.

На  $s$ -му кроці поле термосилового навантаження ( $8^\circ$ )

$$P_s = P_{s-1} + \Delta_s P \quad (11)$$

рівноважується відповідним полем напружень

$$\sigma_s^{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} + \Delta_s \sigma^{ij}, \quad (12)$$

де  $P_{s-1} = \sum_{k=1}^{s-1} \Delta_k P$  та  $\overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} = \sum_{k=1}^{s-1} \Delta_k \sigma^{ij}$  – навантаження та напруження, що накопичені на  $(s-1)$  кроках;  $\Delta_s \sigma^{ij} = C^{ijkl} \overset{e}{\varepsilon}_{kl}$  – приріст напружень на  $s$ -му кроці навантаження  $\Delta_s P$ ;  $C^{ijkl}$  – компоненти тензора пружних сталих, що відповідають  $s$ -му кроку;  $\overset{e}{\varepsilon}_{kl}$  – приріст пружних деформацій, що спричиняє приріст напружень  $\Delta_s \sigma^{ij}$ .

Обмежимося розглядом малих коливань оболонкової конструкції відносно деформованого рівноважного стану. Процедура лінеаризації співвідношень (10) полягає у наступному.

Враховуючи (4), (5'), (8') та (12), а також співвідношення

$$\bar{\sigma}_s^{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij} + \Delta_s \bar{\sigma}^{ij}, \quad (12')$$

подаємо віртуальну роботу внутрішніх сил від приросту повних деформацій  $\delta \bar{W}_{CE}$  (4) у вигляді

$$\delta \bar{W}_{FE} = \delta \bar{W}_{FE}^1 + \delta \bar{W}_{FE}^2 + \delta \bar{W}_{FE}^3 + \delta \bar{W}_{FE}^4 + \delta \bar{W}_{FE}^5, \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_{FE}^1 &= \int_{V_{FE}} C^{ijkl} \varepsilon_{kp}^l \delta \varepsilon_{ij}^l dv, & \delta \bar{W}_{FE}^2 &= \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^n dv, & \delta \bar{W}_{FE}^3 &= \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^l dv, \\ \delta \bar{W}_{FE}^4 &= \int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^n \delta \varepsilon_{ij}^l dv, & \delta \bar{W}_{FE}^5 &= \int_{V_{FE}} C^{ijkp} (\varepsilon_{kp}^l + \varepsilon_{kp}^n) \delta \varepsilon_{ij}^n dv. \end{aligned}$$

Третій доданок у (13) вилучаємо з розгляду, оскільки на  $(s-1)$ -му кроці напруження  $\overset{\circ}{\sigma}_{s-1}^{ij}$  врівноважене навантаженням  $P_{s-1}$ . Четвертий та п'ятий доданки мають нелінійні члени третього та четвертого порядків відносно функції переміщень і тому при лінеаризації нелінійних рівнянь ними нехтуємо. Таким чином, після лінеаризації нелінійних співвідношень (13) маємо

$$\delta \bar{W}_{FE} = \delta \bar{W}_{FE}^1 + \delta \bar{W}_{FE}^2. \quad (14)$$

Віртуальну роботу внутрішніх сил від приросту повних деформацій  $\delta \bar{W}_{FE}$  (14) з використанням закону Коші–Гріна (7) та узагальненого закону Гука (5), враховуючи властивість симетрії компонент тензора пружних сталих, подаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
\delta \bar{W}_{FE} &= \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^l \delta \varepsilon_{ij}^l dv + \int_{V_{FE}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij}_{s-1} \delta \varepsilon_{ij}^n dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left[ C^{ijkp} \frac{1}{2} \left( C_l^{n'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} + C_k^{n'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^l} \right) \frac{1}{2} \delta \left( C_j^{m'} \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} + C_j^{m'} \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^j} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \overset{\circ}{\sigma}^{ij}_{s-1} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^i} + \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^i} \delta \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^j} \right) \right] dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left( C^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} + \overset{\circ}{\sigma}^{ij}_{s-1} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} \right) dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left( C^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^i} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^k} + \overset{\circ}{\sigma}^{ik}_{s-1} \delta^{n'm'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} \right) dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left( C^{ijkp} + \overset{\circ}{\sigma}^{ik}_{s-1} C_{r'}^p C_{r'}^j \right) C_l^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \left( C^{ijkp} + \overset{\circ}{\sigma}^{ik}_{s-1} g^{pj} \right) C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dv = \\
&= \int_{V_{FE}} \tilde{C}^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dv, \tag{15}
\end{aligned}$$

де

$$\tilde{C}^{ijkp} = C^{ijkp} + \overset{\circ}{\sigma}^{ik}_{s-1} g^{pj}. \tag{15'}$$

Співвідношення (15) за формою збігається з варіацією нескінченно малих деформацій оболонки відносно ненапруженого стану

$$\int_{V_{FE}} C^{ijkp} \varepsilon_{kp}^l \delta \varepsilon_{ij}^l dv = \int_{V_{FE}} C^{ijkp} C_p^{n'} C_j^{m'} \frac{\partial u^{n'}}{\partial x^k} \delta \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^i} dv. \tag{16}$$

Таким чином, співвідношення МСЕ для попередньо напруженого (15) та ненапруженого (16) станів збігаються за виглядом, якщо при визначенні віртуальної роботи внутрішніх сил від приросту повних деформацій  $\delta \bar{W}_{FE}$  коригувати компоненти тензора пружних сталей за формулою (15'). Цей факт дозволяє на основі лінійних рівнянь істотно спростити процедуру отримання відповідних співвідношень МСЕ, у яких ураховується переднапружений стан оболонки.

Процедура інтегрування (15) звичайна для МСЕ. Застосувавши МССЕ, представивши функції напружень у вигляді відповідних до  $\varepsilon_{ij}$  рядів і

виконавши інтегрування аналітично, всі визначальні співвідношення для СЕ отримуються в явному вигляді. Здобуті залежності є універсальними: за ними на всіх ділянках оболонки ступінчасто-змінної товщини обчислюються коефіцієнти необхідних матриць СЕ. За невідомі функції прийняті узагальнені вузлові переміщення, які є сукупністю переміщень вузлів на серединній поверхні та різниці переміщень вузлів на обмежуючих поверхнях обшивки оболонки. При отриманні коефіцієнтів системи розв'язувальних рівнянь використовується методика, яка враховує ексцентричне розміщення СЕ відносно серединної поверхні оболонки на ділянках ступінчасто-змінної товщини.

Алгоритм щодо визначення спектру нижчих частот і векторів власних коливань оболонок неоднорідної структури реалізується методом ітерації підпросторів [15].

У задачах про власні коливання враховується наявність попереднього напруження конструкції від різноманітних статичних навантажень, що істотно впливає на спектр власних коливань і дає можливість визначити точки біфуркації та значення критичної сили при втраті стійкості за динамічним критерієм.

**4. Стійкість і коливання квадратної у плані сферичної панелі при дії тиску.** Розглядається квадратна в плані гладка сферична панель сталі товщини, що шарнірно оперта вздовж контуру та навантажується рівномірним тиском інтенсивністю  $q$  (рис. 2). Матеріал оболонки – ізотропний. Кривизна панелі визначається параметром  $K = 2a^2/(Rh)$ , де  $a$  – розмір всієї панелі у плані,  $R$  – радіус серединної поверхні,  $h$  – товщина. Прийнято такі вихідні данні: модуль пружності

$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ ,  $h = 1 \text{ см}$ ,  $a = 60h$ ,  $R = 225h$ , об'ємна вага  $\rho = 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3$ , прискорення вільного падіння  $g = 981 \text{ см/с}^2$ .

Результати досліджень подані з використанням безрозмірних параметрів

$$\bar{q} = a^4 q / (Eh^4),$$

$$\bar{u}^I = u^I / h, \text{ де } u^I \text{ – прогин панелі}$$

вздовж осі  $x^I$ . Розглядалися панелі ідеальної та неідеальної (збуреної) вихідної форм.

За розрахункову скінченноелементну модель було прийнято дві схеми: ціла панель з рівномірною сіткою  $16 \times 16$  СЕ і чверть панелі з сіткою

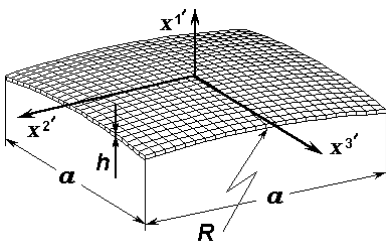


Рис. 2. Полога сферична панель сталі товщини



8×8 СЕ. Як довели дослідження, прийняті сітки забезпечують збіжність розв'язків.

Докладне дослідження нелінійного деформування та стійкості панелі за статичним критерієм, коли розв'язок задачі подається у вигляді діаграм “навантаження–прогин” наведено в [1,2]. У [22,23] для цієї панелі виконано порівняння з розрахунками, проведеними за допомогою програмних комплексів ЛІРА та SCAD, де отримано повний збіг розв'язків.

**4.1.** Спочатку вивчалосся питання про врахування в незбуреній СЕМО існуючих площин симетрії. Це пов'язано з тим, що використання площин симетрії вилучає можливі появи несиметричних форм деформування та коливання, особливих точок і гілок нелінійних розв'язків. Розглянуто два варіанти СЕМО: 1-й – ціла панель без площин симетрії, 2-й – чверть панелі з двома площинами симетрії. Результати досліджень показано на рис. 3 - 4 і наведено в табл. 1 - 2. Навантаження № 0 відповідає вихідному стану, коли панель не навантажена. На діаграмі “ $\bar{q} - \bar{u}'$ ” кружечками відмічено навантаження, при яких виконувався розрахунок на власні коливання (рис. 3).

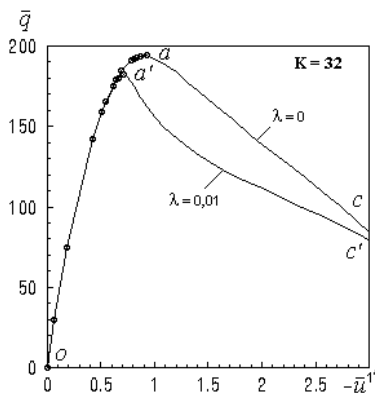


Рис. 3 Діаграми “навантаження–прогин”

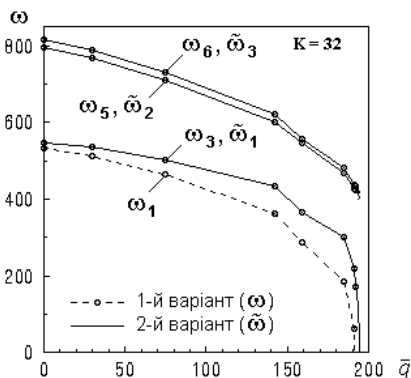


Рис. 4. Частоти власних коливань для СЕМО цілої ( $\omega$ ) та чверті ( $\tilde{\omega}$ ) панелі

У 1-му варіанті визначено, що втрата стійкості відбувається при навантаженні № 7 ( $\omega = \omega_1$  є від'ємним, табл. 1). Згідно з динамічним критерієм значення навантаження  $\bar{q} = 191.6$ , яке відповідає частоті

$\omega = \omega_1$ , приймається за критичне  $\bar{q}_{кр}^e$ . Для цього варіанта СЕМО отримано кратні частоти  $\omega_1 = \omega_2$  (табл. 1).

У 2-му варіанті отримано, що втрата стійкості відбувається при навантаженні № 11 ( $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1$  має від'ємне значення, табл. 1). Відповідне навантаження  $\bar{q}_{кр}^e = 194.1$  на 1.3% більше, ніж у 1-му варіанті.

Таблиця 1

Порівняння нижчих частот власних коливань для двох варіантів розрахункових СЕМО при різних рівнях навантаження: 1-й варіант –  $\omega$ , 2-й варіант –  $\tilde{\omega}$







№ $\bar{q}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3 / \tilde{\omega}_1$	$\omega_4$	$\omega_5 / \tilde{\omega}_2$	$\omega_6 / \tilde{\omega}_3$
0	.53378e+3	.53378e+3	.54740e+3 .54740e+3	.69124e+3	.79609e+3 .79609e+3	.81664e+3 .81664e+3
1	.51165e+3	.51165e+3	.53649e+3 .53649e+3	.66655e+3	.76658e+3 .76658e+3	.78817e+3 .78817e+3
2	.46283e+3	.46283e+3	.50307e+3 .50307e+3	.61388e+3	.71076e+3 .71076e+3	.73122e+3 .50307e+3
3	.36146e+3	.36146e+3	.43510e+3 .43510e+3	.50919e+3	.60013e+3 .60013e+3	.62064e+3 .62064e+3
4	.28587e+3	.28587e+3	.36695e+3 .36695e+3	.44483e+3	.54589e+3 .54589e+3	.55704e+3 .55704e+3
5	.18497e+3	.18497e+3	.30210e+3 .30210e+3	.36883e+3	.46713e+3 .46713e+3	.48017e+3 .48017e+3
6	.61401e+2	.61401e+2	.21912e+3 .21912e+3	.33078e+3	.42794e+3 .42794e+3	.43779e+3 .43779e+3
7	-.28992e+5	-.28992e+5	.17155e+3 .17155e+3	.33099e+3	.42306e+3 .42306e+3	.43369e+3 .43369e+3
8			.15189e+3		.41757e+3	.42908e+3
9			.11824e+3		.41026e+3	.42304e+3
10			.37174e+2		.40263e+3	.41733e+3
11			-.93272e+5		.39843e+3	.41587e+3

Для обох варіантів розрахункової моделі в табл. 2 наведено результати порівняння частот і форм власних коливань панелі для вихідного (ненавантаженого, № 0) стану. Видно, що розрахункова модель з площинами симетрії (2-й варіант) виключає кососиметричні форми коливань. Частоти, що відповідають симетричним формам, для обох

варіантів повністю збігаються. Характер коливань панелі для інших рівнів навантаження не змінюється (рис. 4, табл. 1).

Таблиця 2

Нижчі частоти та відповідні форм власних коливань для двох розрахункових СЕМО при відсутності навантаження (№ 0)

Ціла панель (1-й варіант)						
$\omega = 1 \div 6$	.53378e+3	.53378e+3	.54740e+3	.69124e+3	.79609e+3	.81664e+3
Форма коливань						
Чверть панелі з двома площинами симетрії (2-й варіант)						
$\tilde{\omega} = 1 \div 3$			.54740e+3		.79609e+3	.81664e+3

Дослідження врахування переднапруженого стану панелі показало, що неврахування накопиченого напруження (враховувався лише новий деформований стан оболонки) приводить до збільшення жорсткості панелі та невірного визначення  $\bar{q}_{кр}^e$  та частот (рис. 5).

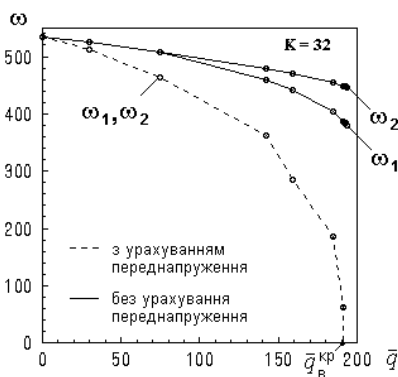


Рис. 5. Врахування та неврахування переднапруженого стану

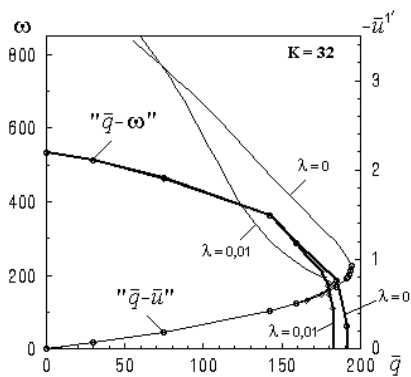


Рис. 6. Вплив початкової недосконалості форми оболонки на втрату стійкості та частоту основного тону панелі

**4.2.** Досліджувався вплив на частоти та форми власних коливань панелі несиметричного збурення у вигляді початкових недосконалостей

$\lambda \sin(2\pi\xi)$  внесених у вихідну форму серединної поверхні оболонки [1, 2]. На підставі проведеного вище дослідження подальший аналіз впливу початкових несиметричних недосконалостей на стійкість і власні коливання панелі слід виконувати по 1-му варіанту СЕМО.

За величину параметра збурення прийнято  $\lambda=0.01$  (табл. 3). Одержана діаграма “ $\bar{q}-\bar{u}$ ” має вигляд нової кривої “ $oa'c'$ ” на відміну від кривої “ $oac$ ”, що відповідає  $\lambda=0$  (рис. 3, рис. 6). Відповідна величина верхнього критичного навантаження ( $\bar{q}_{кр}^6=182.1$ ) відрізняється від отриманого при  $\lambda=0$  (табл. 1) на -5%. Зниження величини критичного навантаження впливає на розходження діаграм “навантаження – частота” (“ $\bar{q}-\omega$ ”) при підході до  $\bar{q}_{кр}^6$  (рис. 6).

Через внесення малого збурення у вихідну форму СЕМО нижчі частоти власних коливань, які для випадку  $\lambda=0$  були отримані кратними ( $\omega_1=\omega_2$ , табл. 1), при  $\lambda=0.01$  вже не є кратними, при цьому вони різняться між собою на малу величину ( $\bar{\omega}_1 \neq \bar{\omega}_2$ , табл. 3).

Таблиця 3

Частоти власних коливань панелі з початковою недосконалістю форми ( $\lambda=0.01$ ) при різних рівнях навантаження ( $16 \times 16$  СЕ)

№ $\bar{q}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
0	.53320e+3	.53375e+3	.54798e+3	.69128e+3	.79610e+3	.81664e+3
1	.51131e+3	.51161e+3	.53683e+3	.66660e+3	.76659e+3	.78817e+3
2	.46252e+3	.46276e+3	.50336e+3	.61395e+3	.71077e+3	.73122e+3
3	.36102e+3	.36113e+3	.43538e+3	.50935e+3	.60008e+3	.62059e+3
4	.28420e+3	.28471e+3	.36789e+3	.44540e+3	.54570e+3	.55687e+3
5	.25080e+3	.25196e+3	.34094e+3	.42289e+3	.52429e+3	.53336e+3
6	.21031e+3	.21152e+3	.31673e+3	.39602e+3	.49491e+3	.50440e+3
7	.17224e+3	.17626e+3	.29408e+3	.38299e+3	.47893e+3	.48787e+3
8	.14794e+3	.15620e+3	.28459e+3	.37973e+3	.47228e+3	.48144e+3
9	.10878e+3	.11897e+3	.27448e+3	.37371e+3	.45824e+3	.47095e+3
10	-.19149e+5	.50649e+2	.27119e+3	.38402e+3	.45173e+3	.47008e+3

## Висновки

1. Розроблено комплексний підхід до розв'язування статичних задач геометрично нелінійного деформування та втрати стійкості пружних оболонок у поєднанні з методикою розрахунку тонких і середньої товщини оболонок на власні коливання з урахуванням переднапруженого стану на кожному кроці навантаження.

2. Розроблений метод застосовано до розрахунку тонкої оболонки сталої товщини на стійкість з визначенням частот і форм власних коливань.

3. Дослідження коливань оболонки необхідно виконувати з урахуванням нового деформованого стану та передісторії її напруження.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
3. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
4. *Карпов В.В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х ч. Ч.1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.; Ч.2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 248 с.
5. *Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А.* Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек: монография – Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. – 264 с.
6. *Якушев В.Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. – М.: Наука, 2004. – 276 с.
7. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition - CRC Press, 2006. – 568 p.
8. *Chapelle D., Bathe K.J.* The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.
9. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanics, 2009. – Vol. 45, № 3. – Pp. 245-271.
10. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.* Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // Strength of Materials, 2011. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 347-351.
11. *Легостаев А.Д., Гречух Н.А.* Побудова співвідношень МСЕ для просторового попередньо напруженого скінченного елемента // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 84. – С. 65-76.
12. *Жгутов В.М.* Математическое и компьютерное моделирование нелинейных свободных колебаний упругих пологих оболочек ступенчато-переменной толщины // Инженерно-строительный журнал, 2010. – №4. – С. 38-48.
13. *Кислюцкий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А., Легостаев А.Д.* Об одном варианте метода конечных элементов в задачах статики и динамики консольных оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1974. – Вып. 27. – С. 45-52.
14. Метод конечных элементов в механике твердых тел / *А.С.Сахаров, В.Н.Кислюцкий, В.В.Киричевский и др.*— К.: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. – 480 с.
15. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек / *Баженов В.А., Сахаров А.С., Гондляр А.В., Мельников С.Л.* – К.: НИИ строительной механики, 1994. – 264 с.

16. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Матриця мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 114-125.
17. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
18. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – С. 432.
19. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашиников О.Б., Тамілко О.А.* Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 84. – С. 89-95.
20. *Соловей М.О., Кривенко О.П., Мищенко О.О.* Порівняльний аналіз нелінійного деформування та стійкості гранованих оболонок ступінчасто-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 86. – С. 131-139.
21. *Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P.* Modeling of Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 92. – С. 121-147.
22. *Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Мищенко О.А.* Моделирование процессов нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2014. – № 5. – С. 14–33.
23. *Баженов В.А., Кривенко О.П.* Конечноэлементное моделирование процессов нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных тонкостенных конструкций при действии термосиловых нагрузок // Труды Междун. молодежной научной конференции «Прочность, ползучесть и разрушение строительных и машиностроительных материалов и конструкций» (Мастер-классы известных специалистов), Москва, 18-21 ноября 2014 г. – С. 55-64.
24. *Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А.* Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками // Инженерно-строительный журнал, 2015. – № 1. – С. 56-69.

## REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei M.O.* Nelineiine deformuvannia ta stiiikist pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury. – К.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s.
2. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoy struktury: Modeli, metodyi, algoritmyi, maloizuchennyie i novyie zadachi. – М.: Knizhnyiy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 s.
3. *Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F.* Metod konechnyih elementov v statike i dinamike tonkostennyih konstruksiy. – М.: FIZMATLIT, 2006. - 392 s.
4. *Karpov V.V.* Prochnost i ustoychivost podkreplennyih obolochek vrascheniya. V 2-h. ch. Ch.1. Modeli i algoritmyi issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennyih obolochek vrascheniya. – М.: FIZMATLIT, 2010. – 288 s.; Ch.2. Vyichislitelnyiy eksperiment pri staticheskom mehanicheskom vozdeystvii. – М.: FIZMATLIT, 2011. – 248 s.
5. *Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Kiselev A.P., Gureeva N.A.* Vektornaya interpolatsiya polei peremescheniy v konechno-elementnyih raschetah obolochek: monografiya – Volgograd: FGBOU VPO Volgogradskiy GAU, 2012. – 264 s.
6. *Yakushev V.L.* Nelineynnye deformatsii i ustoychivost tonkih obolochek. – М.: Nauka, 2004. – 276 s.
7. *Reddy J.N.* Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition - CRC Press, 2006. – 568 p.
8. *Chapelle D., Bathe K.J.* The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.

9. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // *International Applied Mechanics*, 2009. – Vol. 45, № 3. – Pp. 245-271.
10. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.* Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // *Strength of Materials*, 2011. – Vol. 43, No. 3. – Pp. 347-351.
11. *Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A.* Pobudova spivvidnoshen MSE dlia prostorovoho poperedno napruzhenoho skinchennoho elementa // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2009. – Vyp. 84. – S. 65-76.
12. *Zhgutov V.M.* Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie nelineynykh svobodnykh kolebaniy uprugih pologih obolochek stupenchato-peremennoy tolschiny // *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*, 2010. – №4. – S. 38-48.
13. *Kislookiy V.N., Saharov A.S., Solovey N.A., Legostaev A.D.* Ob odnom variante metoda konechnykh elementov v zadachah statiki i dinamiki konsolnykh obolochek // *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy.* – Kiev: BudIvelnik, 1974. – Vyip. 27. – S. 45-52.
14. *Metod konechnykh elementov v mehanike tverdykh tel / A.S.Saharov, V.N.Kislookiy, V.V.Kirichevskiy i dr.* – K.: Vischa shk. Golov. izd-vo, 1982. – 480 s.
15. *Nelineynnye zadachi mehaniki mnogoslownykh obolochek / Bazhenov V.A., Saharov A.S., Gondlyah A.V., Melnikov S.L.* – K.: NII stroitelnoy mehaniki, 1994. – 264 s.
16. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovei M.O.* Matrytsia mas modyfikovanoho prostorovoho skinchennoho elementa neodnorodnoi obolonky // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2013. – Vyp. 91. – C. 114-125.
17. *Korobeynikov S.N.* Nelineynnoe deformirovanie tverdykh tel. – Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000. – 262 s.
18. *Volmir A.S.* Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek. – M.: Nauka, 1972. – S. 432.
19. *Solovei M.O., Kryvenko O.P., Kalashnikov O.B., Tamilko O.A.* Porivnialnyi analiz stiiokosti osesymetrychnykh obolonok liniino-zminnoi tovshchyny // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2009. – Vyp. 84. – S. 89-95.
20. *Solovei M.O., Kryvenko O.P., Mishchenko O.O.* Porivnialnyi analiz neliniinoho deformuvannia ta stiiokosti hranovanykh obolonok stupinchasto-zminnoi tovshchyny // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn.* – K.: KNUBA, 2010. – Vyp. 86. – C. 131-139.
21. *Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P.* Modeling of Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells // *Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tex. zbirn.* – K.: KHUBA, 2013. – Вып. 92. – C. 121-147.
22. *Bazhenov V.A., Solovey N.A., Krivenko O.P., Mischenko O.A.* Modelirovanie protsessov nelineynogo deformirovaniya i poteri ustoychivosti uprugih neodnorodnykh obolochek // *Stroitel'naya mehanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*, 2014. – № 5. – S. 14–33.
23. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P.* Konechnoelementnoe modelirovanie protsessov nelineynogo deformirovaniya i poteri ustoychivosti uprugih neodnorodnykh tonkostennykh konstruksiy pri deystvii termosilovykh zagruzok // *Trudy Mezhdun. molodezhnoy nauchnoy konferentsii «Prochnost, polzuchest i razrushenie stroitelnykh i mashinostroitelnykh materialov i konstruksiy» (Master-klassy izvestnykh spetsialistov)*, Moskva, 18-21 noyabrya 2014 g. – S. 55-64.
24. *Solovey N.A., Krivenko O.P., Malyigina O.A.* Konechnoelementnyie modeli issledovaniya nelineynogo deformirovaniya obolochek stupenchato-peremennoy tolschiny s otverstiyami, kanalami i vyiemkami // *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*, 2015. – № 1. – S. 56-69.

*Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Legostaev A.D.*

### **STABILITY AND NATURAL VIBRATIONS OF INHOMOGENEOUS SHELLS TAKING INTO ACCOUNT THE STRESS STATE**

The work is devoted to the problem of developing a unified methodology based on the efficient numerical analysis of problems of stability and natural vibrations of a wide class of inhomogeneous shells, thin and medium thickness. In problems of its natural vibrations takes into account the presence of a pre-stressed state of the structure from the action of static loads, which significantly affect the spectrum of natural vibrations and allows determining the bifurcation point and the value of the critical force of buckling by dynamic criteria.

**Keywords:** thin elastic shell, geometrically nonlinear deformation, natural vibrations, universal solid finite element.

*Баженов В.А., Кривенко О.П., Легостаев А.Д.*

### **УСТОЙЧИВОСТЬ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ**

Работа посвящена проблеме разработки единой методологии на основе эффективного численного анализа задач устойчивости и собственных колебаний широкого класса неоднородных оболочек, как тонких, так и средней толщины. В задачах о собственных колебаниях учитывается наличие преднапряженного состояния конструкции от действия статических нагрузок, что существенно влияет на спектр собственных колебаний и позволяет определять точки бифуркации и значение критической силы при потере устойчивости по динамическому критерию.

**Ключевые слова:** тонкая упругая оболочка, геометрически нелинейное деформирование, собственные колебания, универсальный пространственный конечный элемент.



**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, зав. кафедрою будівельної механіки КНУБА, директор НДІ будівельної механіки КНУБА БАЖЕНОВ Віктор Андрійович  
**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу  
**Адреса домашня:** 01001 м. Київ, вул. Заньковецької, б. 5/2, кв. 31. БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу.  
**Роб. тел.** +38(044) 245-48-29.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА КРИВЕНКО Ольга Петрівна  
**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КРИВЕНКО Ользі Петрівні.  
**Адреса домашня:** 03035, Україна, м. Київ, вул. Кудряшова 7-б, кв. 145, КРИВЕНКО Ользі Петрівні  
**Роб. тел.** +38(044) 245-48-29;  
**мобільний тел.:** +38(066) 048-32-77.  
**E-mail –** [olakor@ukr.net](mailto:olakor@ukr.net)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА, ЛЕГОСТАЄВ Анатолій Дмитрович  
**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛЕГОСТАЄВУ Анатолію Дмитровичу  
**Роб. тел.** +38(044) 241-54-66.

UDC 539.3

## CALCULATION OF RANDOM WAVE PARAMETERS USING REGRESSION METHOD

Dang Xuan Truong<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*PhD. Candidate - MSc. Civil engineering Faculty – University of transport Ho Chi Minh city,  
PhD. Candidate – HCMC University of Technology – VNU Ho Chi Minh city, Viet Nam*

**Abstract:** This research introduces a new method to calculate the parameters of random waves. Here we calculate the wave height and period. The process observation data from multiple waves of different conditions is a complex problem for the designers of offshore structures. The regression method is proposed as a new method with high reliability to solve this problem.

**Key words:** random waves, regression method.

### 1. Definition

In fact, the wave is usually non-uniform waves and random transformation (random). It is a combination of waves component from different areas on the sea and spread to observe location. So that height and wave period is fixed time to be continuous alternation. Currently, we are using two analytical random wave method which are statistical and spectral analysis method.

In this research, we used statistical methods to determine the wave parameters for design and calculations process. Regression function is used to analyze and process of observed figures from the wave parameters such as period, season, wind direction, frequency etc. Regression analysis was used to field in success and we want to propose new method in order to solving on random wave of problem.

### 2. Regression function

The analysis is the basis for the theory the analysis factor and prepare the ground for problem of experimental plan.

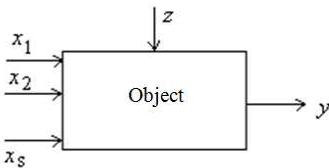


Fig. 2.1. Multidimensional non-linear object

Regression analysis method create the condition to determine the mathematical description of the objects that have characterized the unknown on basis of monitoring the values input and output (figure 2.1).

We consider an object input  $x_1, x_2, \dots, x_S$  and output  $y$ . Object is

disturbance  $z$  (2.1). Subject specific nonlinear to be unknown:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_S, z). \quad (2.1)$$

Factor caused constantly disturbance  $z$  change. As value specified by the input  $x_1, x_2, \dots, x_S$ , to be able to value of output  $y$ .

We are interest in dependence (2.1) of output  $y$  and in put  $x_1, x_2, \dots, x_S$ , it did not depend on function that dependent caused disturbance.

The concept of the relationship functional dependence is used in field of science and other technology, in which the mathematical analysis. In fact this functional dependence is change  $y$  and change  $x$  to be one-valued (figure 2.2).

Each value of  $x$  may be define a value  $y$  as following:

$$y=f(x). \tag{2.2}$$

In the statistical analysis, the concept is very narrow  $y=f(x)$  this, because the people provided general conception which is dependent relation to cause disturbance. In fact when the observational function (2.2) is rarely because we did not exclude the effect factor to be random. In fact, the observational dependence of relation are dependent relation to disturbance, therefore dependent relation is multi-value (figure 2.3).

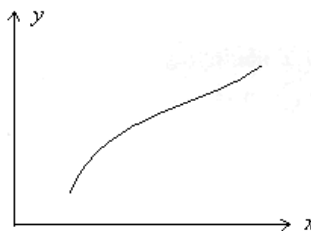


Fig. 2.2. Functional Dependence

In fact, dependent relation of disturbance is dependent relation of random variable  $y$  and random  $x$ , which is single-valued dependence relation of probability distribution of random variable  $y$  depends on value  $x$  to be selected through random variable  $x$ .

It said that random variable  $Y$  is relation of disturbance on random variable  $X$  if distribution  $F$  of random variable  $Y$  with condition  $X=x$  are a value function of the random variable  $Y$  that of value  $x$

$$F(y/x)=P(Y<x/X=x)=f(y/x), \tag{2.3}$$

$$E(Y/X=x) = f(x). \tag{2.4}$$

Now, we said that correlation are random variables  $X$  and  $Y$

When you have point  $n$ , know the value of input  $x_1, x_2, \dots, x_S$  and corresponding with value of output  $y$  as aboved (figure 2.1), we group data into observation as follows:

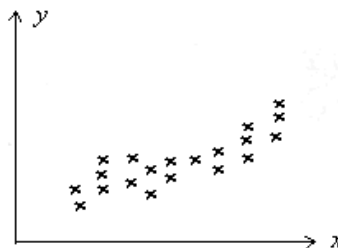


Fig. 2.3. Dependent relation of disturbance

$$\left. \begin{matrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1S}, & y_1 \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2S}, & y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{N1}, x_{N2}, \dots, x_{NS}, & y_N \end{matrix} \right\} \tag{2.5}$$

$x_{NS}$  is value of input  $x_S$  at point  $n$ ,  $y_N$  is the value of output at point  $n$ .

The purpose is identified specific alternative as selected the arbitrary:

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_S; b_0, b_1, \dots, b_k). \quad (2.6)$$

In (2.6) there is  $k+1$  factor of unknown  $b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, K < N-1C$ ).

For some given point  $n$ , the function has a value (2.6)

$$\hat{y}_n = f(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nS}; b_0, b_1, \dots, b_k). \quad (2.7)$$

Specific (2.7) approximately characterized (2.1) that characterized (2.1) unknown because of disturbance  $z$ . It is continuous time  $n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) it did not know usual natural type of non-linear object (2.1).

Specific (2.6) approximately characterized (2.1) often called the mathematical model of the subject drawing on figure (2.1).

To determine the optimum factor of  $b_0, b_1, \dots, b_k$  of mathematical model (2.6) we chose this model below the function:

$$S_R = S_R [\{y_1, y_2, \dots, y_N\}; \{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N\}]. \quad (2.8)$$

It determine distance between group of output value  $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  and object (2.1) and the output  $\{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N\}$  of the model (2.7).

In fact it is the simplest to Öclit distance in space direction  $n$ , it took mathematics to determine optimum factor  $b_0, b_1, \dots, b_k$  of the model (2.7), bring to math minimum expression

$$S_R = \sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2 = \sum_{n=1}^N [y_n - f(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nS}; b_0, b_1, \dots, b_k)]^2. \quad (2.9)$$

For a long time, the math called square minimum math to entered by Lagrang 1806, the math is the foundation of regression analysis.

After the minimize formula (2.9) for the value of parameter  $b_0, b_1, \dots, b_k$  we determine the optimal parameters through  $b_0, b_1, \dots, b_k$ , that way we get the function:

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_S; b_0, b_1, \dots, b_k). \quad (2.10)$$

Often called the regression function.

We called regression function which is linear for unknown parameter:

$$\hat{y} = \hat{y}(x; b_0, b_1, \dots, b_k) = b_0 + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \dots + b_k f_k(x) \quad (2.11)$$

Sign:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_S]. \quad (2.12)$$

With the function  $f_k(x)$  and  $k=1, 2, \dots, K$  knows and it is independent linear. Generally, it maybe non-linear [1], [2].

### Calculation of factor of regression function

Firstly, we study as a separate case determine factor of linear regression function in directions.

We find object to research on figure 2.1 at the time  $N$  to determine the input of value  $S$ :  $x_1, x_2, \dots, x_S$  and correspond with output  $y$ , we group results into a table of output monitoring (2.5). We find regression function with directions:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_S x_S. \quad (2.13)$$

Mean:

$$\hat{y}_n = b_0 + b_1 x_{n1} + b_2 x_{n2} + \dots + b_S x_{nS}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.14)$$

The parameters are unknown the regression function (2.13) how to make the best approximated  $y$  with meaning is the sum of squared deviation of the observation data (2.5) have the smallest value.

$$S_R = \sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2 = \sum_{n=1}^N [y_n - f(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nS}; b_0, b_1, \dots, b_K)]^2 = \min. \quad (2.15)$$

The math selected optimum factor of regression function in way of matrix as followed. So, we present result of results into a table of output monitoring (2.5) as form of matrix

Input  $X$ :

$$X = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N0} & x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NN} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

We insert to be fixed column elements No1 among them:

$$x_{10} = x_{20} = \dots = x_{N0} = 1. \quad (2.17)$$

For the purpose described in the form of matrix which included the factor  $b_0$ . We write the observation results of input object and the output model to present of model vectors, which means value of regression function in the following:

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_N], \quad (2.18)$$

$$\hat{y} = [\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N]. \quad (2.19)$$

We write unknown parameter to form of their vector as following

$$b = [b_0, b_1, \dots, b_S]. \quad (2.20)$$

Then, value of regression function (2.14) shall present form:

$$\hat{y} = Xb. \quad (2.21)$$

Pay attention to  $(A+B)^T = A^T + B^T$  and  $(AB)^T = B^T A^T$  math for minimum the total squared deviation of (2.15) form shall be followed:

$$\begin{aligned} S_R &= \sum_{n=1}^N (y_n - \hat{y}_n)^2 = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) = (y - Xb)^T (y - Xb) = \\ &= y^T y - y^T Xb - b^T X^T y + b^T X^T Xb = y^T y - 2b^T X^T y + b^T X^T Xb = \min. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Optimum conditions of partial derivative  $S_R$  (2.22) with  $b$

$$\frac{\partial S_R}{\partial b} = -2X^T y + 2X^T Xb. \quad (2.23)$$

And it is zero as we have set of equation as following:

$$X^T Xb = X^T y. \quad (2.24)$$

It is multiplied by two member of (2.24) matrix  $(X^T X)^{-1}$  we have vectors  $b$ :

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y. \quad (2.25)$$

### The experimental plan

We studied the object to figure 2.1 as following:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_S, z). \quad (2.26)$$

Including  $x_1, x_2, \dots, x_S$  effect on the subject,  $z$  is a factor disturbance. Form of the function (2.26) unknown, assuming the function  $y$  is continuous and a point called only extremity. Functional assumption (2.26) is non-linear and we can get it around the given point  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_S^0$  by regression function in the linear:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_S x_S. \quad (2.27)$$

Firstly, we prepared experimental to determine the value of input  $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nS}$  with  $n=1, 2, \dots, N$  of a series of experiments. We shall make next experiment to receive the value of input the corresponding  $y_1, y_2, \dots, y_n$  of the subject. Basing on this experiment we had data as following:

$$\left. \begin{array}{l} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1S}, y_1 \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2S}, y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nS}, y_n \end{array} \right\}. \quad (2.28)$$

We calculate coefficient of regression function:  $b_0, b_1, \dots, b_S$ , coefficient determined the direction of Gradient and find extreme in this direction [3], [4].

The two level of experimental plan based on the receiving of value input  $x_s$ , in which  $s=1, 2, \dots, S$  in two levels:

$$x_s^0 - \Delta x_s; \quad x_s^0 + \Delta x_s; \quad (2.29)$$

$s=1, 2, \dots, S$  may be two cases:

- full extreme  $2^S$  testing;
- particular extreme  $2^{2-S}$  testing.

To improve reliability of the study, we consider a simple example to prepare the planning with two levels to illustrate the method optimization. We find out of the subject  $S = 3$  which, it was written by non-linear function:

$$y = f(x_1, x_2, x_3). \quad (2.30)$$

It is limited in the area

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 100, \\ 0 \leq x_2 \leq 500, \\ 0 \leq x_3 \leq 100. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Now we study found initial locally max with first point begin

$$\left. \begin{aligned} X_1^0 = 30, \\ X_2^0 = 250, \\ X_3^0 = 50. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

At nearby points (2.32) find nearby function in the following:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3. \quad (2.33)$$

We have increments

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_2 = 3, \\ \Delta x_2 = 20, \\ \Delta x_2 = 2. \end{aligned} \right\}$$

Carried out the experiment  $2^3 = 8$  time of testing as following:

The results of experiments Boxa-Wilsona

Factor $x_S$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$y$
Facility $x_S^0$	30	250	50	160
Increment $x_S$	3	20	2	
High level: $x_S^0 + \Delta x_S$	33	270	52	
Low level: $x_S^0 - \Delta x_S$	27	230	48	
Data testing	27	230	48	169,4
Data testing 2	33	230	48	182,6
Data testing 3	27	270	48	129,4
Data testing 4	33	270	48	142,6
Data testing 5	27	230	48	178,6
Data testing 6	33	230	52	189,4
Data testing 7	27	270	52	138,6
Data testing 8	33	270	52	149,4

As result of matrix of input and output of object  $y$  as following:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 27 & 230 & 48 \\ 1 & 33 & 230 & 48 \\ 1 & 27 & 270 & 48 \\ 1 & 33 & 270 & 48 \\ 1 & 27 & 230 & 52 \\ 1 & 33 & 230 & 52 \\ 1 & 27 & 270 & 52 \\ 1 & 33 & 270 & 52 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} 169,4 \\ 182,6 \\ 129,4 \\ 142,6 \\ 178,6 \\ 189,4 \\ 138,6 \\ 149,4 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Coefficients  $b_0, b_1, b_2, b_3$  of model (2.33) defined on general basic of regression analysis (2.25). When multiplication of matrix  $(X^T X)^{-1} X^T$  with vector  $y$  we will receive the coefficient vector of regression function is:

$$b = \left( X^T X \right)^{-1} X^T y = \begin{Bmatrix} 250,0 \\ 2,0 \\ -1,0 \\ 2,0 \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

Mathematical model (2.33) explicit form is:

$$\hat{y} = 250,0 + 2,0x_1 + 1,0x_2 + 2,0x_3. \quad (2.36)$$

### Meaning of regression function

Regression function  $\hat{y}$  considered full range of many factors  $x_i$  impact to  $y$  – object is considering. Example in economical  $\hat{y}$  is price of product, in biological  $\hat{y}$  is growth height of plant. In our case,  $H$  is the height of wave and depend on many factors as cycle, season, wind direction, frequency, etc.

Upon having regression function, we can easily take input  $x_i$  depend on the choice, at the same time it demonstrates the dominant of any factor at  $x_i$  to  $\hat{y}$ . Specifically in this case, seasonal factors are most obvious effectively to the height of wave. So here we have chosen in June to calculate for  $H$ .

### Apply regression function method to calculate the height of wave

View the height of wave is a fuction, with 3 variables as frequency, direction and month have been observational [5]

Period $T$	Direction (frequency =50)	Month	$H(T)$	$H$ (direction)	$H$ (month)
10,7	8,9	1	4,5	9,2	7,5
11,3	6,5	2	5,3	6,9	7,9
12,0	3,6	3	5,9	4,3	4,4
12,6	5,0	4	6,4	5,6	5,1



13,4	6,1	5	7,2	6,3	5,3
4,1	5,9	6	7,9	6,1	5,0
14,5	6,7	7	8,3	7,3	6,0

$H$  is the height of wave was defined by average of 3 final columns:

$$H = (H(T) + H(\text{direction}) + H(\text{month}))/3.$$

Period ( $T$ )	Direction (50)	Month	$H$
10,7	8,9	1	7,07
11,3	6,5	2	6,7
12,0	3,6	3	4,87
12,6	5,0	4	5,7
13,4	6,1	5	6,27
4,1	5,9	6	6,33
14,5	6,7	7	7,2

In case data is being in original form of observing data [5] with 50 years direction (column 2<sup>nd</sup>). Since there are 3 unknowns, so we should add a photogrammetry of the 8<sup>th</sup> ( that is need to conduct  $2^S = 8$  observations or experiment). There are 7 experiments in the table above, so we should add the 8<sup>th</sup> experiment from the 2<sup>nd</sup> experiment in the table above. Since we have two full matrixes with input ( $X$ ) and output  $\{Y\}$ :

$$(X) = \begin{pmatrix} 1 & 10,7 & 8,9 & 1 \\ 1 & 11,3 & 6,5 & 2 \\ 1 & 12,0 & 3,6 & 3 \\ 1 & 12,6 & 5,0 & 4 \\ 1 & 13,4 & 6,1 & 5 \\ 1 & 4,1 & 5,9 & 6 \\ 1 & 14,5 & 6,7 & 7 \\ 1 & 11,3 & 6,5 & 8 \end{pmatrix}; \quad \{Y\} = \begin{pmatrix} 7,07 \\ 6,7 \\ 4,87 \\ 5,7 \\ 6,27 \\ 6,33 \\ 7,2 \\ 6,7 \end{pmatrix}.$$

Putting 2 matrixes into the program to find a linear function  $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$  (inside  $\hat{y} \equiv H$  is the height of wave) according to 3 variables:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \quad (\hat{y} \equiv H).$$

Period  $T(x_1)$ , direction ( $x_2$ ), month ( $x_3$ ).

Search from the computer programs [6], [7]:

$$b_0=2,75, b_1=0,018, b_2=0,478, b_3=0,103.$$

So regression function explicit form is:

$$\hat{y} = 2,75 + 0,018x_1 + 0,478x_2 + 0,103x_3.$$

Selected point  $T=6$  ( $4,1 \leq T \leq 14,5$ ); direction =3 ( $3,6 \leq direction \leq 8,9$ ); month = 6 ( $1 \leq month \leq 8$ ), from there:

$$H_{\max}=4,9 \text{ m with } T=6 \text{ sec.}$$

The 8<sup>th</sup> Experiment can be defined by average of any 2 month (input is {X} and output is {Y}):

$$(X) = \begin{pmatrix} 1 & 10,7 & 8,9 & 1 \\ 1 & 11,3 & 6,5 & 2 \\ 1 & 12,0 & 3,6 & 3 \\ 1 & 12,6 & 5,0 & 4 \\ 1 & 13,4 & 6,1 & 5 \\ 1 & 4,1 & 5,9 & 6 \\ 1 & 14,5 & 6,7 & 7 \\ 1 & 17,6 & 7,8 & 8 \end{pmatrix}; \quad \{Y\} = \begin{pmatrix} 7,07 \\ 6,7 \\ 4,87 \\ 5,7 \\ 6,27 \\ 6,33 \\ 7,2 \\ 7,13 \end{pmatrix}.$$

### Conclusions and recommendations

From the observed data as the height of wave  $H$  and wave period  $T$  depend on factors of month, season, wind direction, frequency, etc, regression analysis can define the height of wave  $H$  and the wave period  $T$  with the high reliability to make input basis for the calculation process and design.

Random wave theory becomes more actual when using regression function to handle the observation data about the real waves on sea. It can be applied to analyse other parameters of wave when having results of observation from many different conditions.

### REFERENCES

- [1] Nguyen Huu Bang - Tran Van Ban, *Basis designed of works ocean to serve the oil and gas industry*. Publishing house of Science and Technology, Hanoi, Vietnam 2009
- [2] Nguyen Huu Bang, *Theory of structures*, Publishing house of Science and Technology, Hanoi, Vietnam 2005
- [3] G.S. Pisarenko and Coworker, *Strength of materials*, Publishing house of Science and Technology, Kiev 1967
- [4] B.P. Đemidôvitrov - I.A Maroon, *Basis Mathematical calculations*, Publishing house of Science, Maskva 1970
- [5] Dai Hung complex metocean & environmental design criteria. Petrovietnam Exploration and production company (PVEP). 2006.
- [6] Gunther F. Clauss, *Offshor structures volum 1*, Edition London, Verlag. 1992.
- [7] Design guides for offshore structures. Clarom Edition Technip 1993.
- [8] James F. Winson, *Dynamics of Offshore structures*, John Wiley & Sons Inc. Canada 2003.

УДК 539.3

## АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

**В.П. Андрієвський<sup>1</sup>**

канд. техн. наук., асистент кафедри будівельної механіки

**О.І. Гуляр<sup>1</sup>**

д-р техн. наук., професор

**Ю.В. Максим'юк<sup>1</sup>**

канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки

**С.В. Мищок<sup>1</sup>**

канд. техн. наук

<sup>1</sup> *Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ*

Наведені основні розрахункові співвідношення вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності в криволінійній системі координат. Проведені чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів.

**Ключові слова:** метод скінчених елементів (МСЕ), скінчений елемент (СЕ), нестационарна теплопровідність, вісесиметричні тіла, криволінійна система координат.

**Вступ.** Експлуатація значної кількості відповідальних конструкцій, таких як ротори парових турбін і газотурбінних установок, здійснюється в умовах складних теплових режимів, які мають визначальний вплив при оцінці їх напружено-деформованого стану, що особливо виражається на етапах пуску або зупинки. В цих випадках визначення нерівномірних температурних полів потребує розв'язку нестационарної вісесиметричної задачі теплопровідності.

**1. Розрахункові співвідношення нестационарної теплопровідності вісесиметричних задач.** Температурне поле неоднорідного ізотропного тіла обертання, об'ємом  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$  описується рівнянням нестационарної теплопровідності [5]:

$$\operatorname{div}(\lambda_T \nabla T) + q_0 = C_V \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (1)$$

де  $\lambda_T$  - коефіцієнт теплопровідності;  $T$  - температура в точці тіла, що розглядається;  $q_0$  - щільність виділення тепла внутрішніми джерелами за одиницю часу;  $C_V$  - питома об'ємна теплоємність матеріалу.

В криволінійній системі координат  $x^\alpha$  [1] покомпонентна форма диференційного рівняння (1) приймає вигляд [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \lambda_T(T) g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial x^\beta} \right) + q_0 = C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Однозначність розв'язання рівняння (2) забезпечується введенням відповідних початкових та граничних умов. В якості початкових умов приймається відоме розподілення температури в тілі в деякий фіксований момент часу  $t_0$ , що приймається за початок часової координати.

$$T(x^\alpha, t_0) = T_0(x^\alpha), \quad x^\alpha \in V, \quad (3)$$

де  $T_0(x^\alpha)$  - задана функція координат.

Граничні умови в теорії теплопровідності формуються в вигляді трьох ідеалізованих типів теплопередачі на границі тіла:

1. відомі зміни з часом температури точок поверхні тіла

$$T(x^\alpha, t) = f(x^\alpha, t), \quad x^\alpha \in S_1, \quad (4)$$

де  $f(x^\alpha, t)$  - задана функція;  $S_1$  - частина поверхні тіла  $S$ , на якій задані граничні умови першого роду.

2. відома щільність теплового потоку з поверхні тіла в зовнішнє середовища

$$q(x^\alpha, t) = -\lambda_T(T) \frac{\partial T(x^\alpha, t)}{\partial n}, \quad x^\alpha \in S_2, \quad (5)$$

де  $n$  - зовнішня нормаль до поверхні тіла в точці  $x^\alpha$ ;  $S_2$  - частина поверхні тіла  $S$ , на якій задані граничні умови другого роду.

3. відома температура зовнішнього середовища  $\theta$  і закон конвекційного теплообміну між поверхнею тіла і зовнішнім середовищем

$$-\lambda_T(T) \frac{\partial T(x^\alpha, t)}{\partial n} = \alpha(T) [T(x^\alpha, t) - \theta(x^\alpha, t)], \quad x^\alpha \in S_3, \quad (6)$$

де  $\alpha(T)$  - коефіцієнт тепловіддачі;  $S_3$  - частина поверхні тіла  $S$ , на якій задані граничні умови третього роду.

Рівняння (2) з початковими (3) і граничними (4)-(6) умовами однозначно визначає нестаціонарне температурне поле в тілі, властивості якого в загальному випадку залежать від просторових координат і температури.

Диференціальне рівняння (2) з граничними умовами (4)-(6) еквівалентне варіаційному рівнянню вісесиметричної задачі нестаціонарної теплопровідності [4]:

$$\delta\chi = \int_V \left( \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta} + q_0 \delta T \right) \sqrt{g} dV + \int_S \alpha(T - \theta) \delta T dS -$$

$$-\int_V C_V \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \sqrt{g} dV = 0 \dots \dots \dots \quad \dots (7)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1,2, а позначені латинськими – 1,2,3.

В межах СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_T$ , питома об'ємна теплоємність  $C_V$  та значення компонент метричного тензору  $g^{ij}$  несуттєво змінюється в площини СЕ і приймаються рівними їх відповідним значенням в центрі:

$$\lambda_T = \overset{\circ}{\lambda}_T = \lambda_T|_{x^\alpha=0}, \quad C_V = \overset{\circ}{C}_V = C_V|_{x^\alpha=0}, \quad g^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ij} = g^{ij}|_{x^\alpha=0}. \quad (8)$$

В якості невідомих при розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності приймається значення температури в вузлах елемента  $T_{(S_1, S_2)}$ .

Розподілення температури у межах СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (9)$$

де  $T_{(S_1, S_2)}$  – вузлові значення температури.

Вирази для похідних від температури мають вигляд:

$$T_{, \alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_\alpha. \quad (10)$$

Для системи з  $M$  скінченних елементів варіаційне рівняння (7) можна записати в наступному вигляді

$$\begin{aligned} \delta \chi = & \sum_{i=1}^M \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_V \left[ \int \left[ \lambda_T(T_{(S_1, S_2)}) \frac{\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4}}{x^\alpha S_\alpha + \frac{1}{2}} \times \right. \right. \\ & \times \delta T_{(P_1, P_2)} \frac{\frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4}}{x^\beta P_\beta + \frac{1}{2}} g^{\alpha\beta} + \\ & \left. \left. + q_{0(S_1, S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) * \right. \right. \\ & \left. \left. \times \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_V \frac{dT_{(S_1, S_2)}}{dt} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \times \\
& \times \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) ] dV + \int_{\Gamma_3} \alpha(T_{(S_1, S_2)} - \theta_{(S_1, S_2)}) \times \\
& \times \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) \times \\
& \times \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{2} P_1 x^1 + \frac{1}{2} P_2 x^2 + P_1 P_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right) d\Gamma_3 ]_i = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Ґрунтуючись на введених гіпотезах про постійність теплофізичних і геометричних характеристик в межах поперечного перерізу СЕ, використовуючи раніше обчислені інтеграли (2.29), а також після обчислення наступних інтегралів по площі поперечного перерізу:

$$\begin{aligned}
& \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^\alpha x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0; \quad \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^1)^2 (x^2)^2 dx^1 dx^2 = \frac{1}{144}, \\
& \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0; \quad \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^1 x^2 dx^1 dx^2 = 0,
\end{aligned}$$

отримаємо:

$$\begin{aligned}
\delta \chi = & \sum_{i=1}^M \left[ \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{x^3} \left[ \int [a(T_{(S_1, S_2)}) \delta T_{(P_1, P_2)} (S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta}) \left[ (1 - \delta_\beta^\alpha) \times \right. \right. \right. \\
& \times \delta T_{(P_1, P_2)} \frac{\frac{3}{4} S_1 P_1 + \frac{3}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{3} S_1 S_2 P_1 P_2 + 2 \frac{1}{4}}{(S_\alpha P_\alpha + 3)(S_\beta P_\beta + 3)} + \\
& \left. \left. \left. + \delta_\beta^\alpha \frac{\frac{1}{4} S_1 P_1 + \frac{1}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{3}{4}}{S_\alpha P_\alpha + 3} \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. + q_{0(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{dT_{(S_1, S_2)}}{dt} \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) \right] \sqrt[3]{g} dx^3 + \\
& + \int_{x^3} \frac{a}{C_V} \left[ \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} (T_{(S_1, S_2)} - \theta_{(S_1, S_2)}) \delta T_{(P_1, P_2)} \frac{S_1 P_1 + 3}{12} \sqrt{g^{22}} + \right. \\
& \left. + \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} (T_{(S_1, S_2)} - \theta_{(S_1, S_2)}) \delta T_{(S_1, P_2)} \frac{S_2 P_2 + 3}{12} \sqrt{g^{11}} \right] \sqrt[3]{g} dx^3 \Big]_i = 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

де  $a$  – коефіцієнт температуропровідності,  $a = \frac{\lambda_T}{C_V}$ .

Враховуючи довільність  $\delta T$  рівняння (8) еквівалентне системі звичайних диференціальних рівнянь з перемінними коефіцієнтами, яке в матричній формі набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^M \left[ \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left[ -C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} \frac{\delta T_{(S_1, S_2)}}{dt} + \left[ A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} \right] T_{(S_1, S_2)} \right]_i \right] = \sum_{i=1}^M \{ Q_0 \}_i ; \quad (13)$$

де

$$Q_0 = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} -q_{0(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} - \quad (14)$$

компоненти вектора правих частин, які характеризуються інтенсивністю зовнішньої теплової дії,

$$A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \left[ a S_\alpha P_\beta g^{\alpha\beta} \left[ (1 - \delta_\beta^\alpha) \frac{\frac{3}{4} S_1 P_1 + \frac{3}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{3} S_1 S_2 P_1 P_2 + 2 \frac{1}{4}}{(S_\alpha P_\alpha + 3)(S_\beta P_\beta + 3)} + \delta_\beta^\alpha \frac{\frac{1}{4} S_1 P_1 + \frac{1}{4} S_2 P_2 + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{3}{4}}{S_\alpha P_\alpha + 3} \right] \sqrt{g} \right] - \quad (15)$$

коефіцієнти матриці теплопровідності,

$$C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \left( \frac{1}{48} S_1 P_1 + \frac{1}{48} S_2 P_2 + \frac{1}{144} S_1 S_2 P_1 P_2 + \frac{1}{16} \right) \sqrt{g}, - \quad (16)$$

коефіцієнти матриці теплоємності,

$$B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} = \frac{a}{C_V} \frac{S_\alpha P_\alpha + 3}{12} \sqrt{g^{(3-\alpha)(3-\alpha)}} \sqrt{g}, -$$

додаткові члени коефіцієнтів матриці теплопровідності для скінченних елементів, що примикають до граничної поверхні, що співпадає з координатною лінією  $x^n$ .

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь (13) приймається метод скінченних різниць. Вздовж часової координати  $t$  вибирається скінченна множина  $N$  точок  $t_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) з кроком  $\Delta t_n$  таким чином, щоб  $t_n \big|_{n=0} = t_n$ ;  $t_n \big|_{n=N} = t_n$ . Замінюючи похідну за часом в (13) скінченно-різничевим алгоритмом другого порядку точності за схемою

Кранка-Ніколсона [6] і приймаючи в якості невідомих значення температури в вузлах сіткової області в момент часу  $t_{n+1}$ , маємо систему алгебраїчних рівнянь відносно  $T_{(S_1, S_2)}^{n+1}$

$$\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} [C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} T_{(S_1, S_2)}^{n+1} + \frac{\Delta t_n}{2} [A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}] T_{(S_1, S_2)}^{n+1}] = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} [C_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} T_{(S_1, S_2)}^n - \frac{\Delta t_n}{2} [A_{(S_1, S_2, P_1, P_2)} + B_{(S_1, S_2, P_1, P_2)}] T_{(S_1, S_2)}^n + \frac{\Delta t_n}{2} (Q_0^n + Q_0^{n+1})], \quad (17)$$

або в матричному вигляді

$$[C]\{T\}_{n+1} + [A]\{T\}_{n+1} = [C]\{T\}_n - [A]\{T\}_n + \{Q_0\}_n. \quad (18)$$

## 2. Збіжність і точність приближених рішень в вісесиметричних нестационарних задачах теплопровідності.

Розглянемо застосування розробленої методики по дослідженню температурних полів, що не встановились в конструкціях, які знаходяться в умовах конвекційного теплообміну з зовнішнім середовищем, температура якого змінюється з залежності від часу.

**Довгий циліндр.** Чисельні дослідження проведемо при розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності для довгого циліндру при конвекційному теплообміні між його поверхнею і навколишнім середовищем, температура якого  $\theta_2$  змінюється в залежності від часу  $t$  за законом

$$\theta_2 = \theta_0 (1 + k_1 \cdot e^{k\tau}),$$

де  $\tau = \frac{\alpha t}{r^2}$  - безрозмірний час,  $r$  - радіус циліндру,  $\theta_0 = 823^\circ \text{C}$ ,  $\alpha = 0.557 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$  - коефіцієнт теплопровідності,  $k_1 = -0.5473$ ,  $k = 53.6$ .

Температура циліндра при  $t_0 = 0$  прийнята  $323^\circ \text{C}$ , критерій теплової подібності  $B_i = \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = 15$ .

Для даної задачі досліджувалась узгодженість рішення, яке отримане по розробленій методиці, з аналітичним рішенням [5], а також з чисельним розв'язком отриманим на основі використання просторово-часових СЕ [3] в залежності від кількості СЕ по радіусу. Аналіз результатів показав, що при достатньо малій (5 СЕ) кількості елементів,



взятих по товщині циліндра, максимальна похибка не перевищує 3%, а десять елементів забезпечує точність  $x$  максимальною похибкою до 1%.

На рис. 1 в вигляді ізоліній показано розподілення температури в циліндрі для моментів часу  $t = 180\text{ с}$ ,  $300\text{ с}$ ,  $420\text{ с}$ ,  $540\text{ с}$ . Суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку [5], штрихпунктирна – рішенню, яке отримане за МСЕ [3], а кружечками за розробленою методикою.

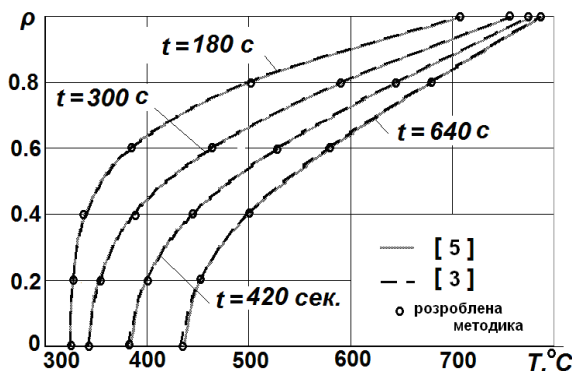


Рис. 1 Нестационарное температурное поле сплошного цилиндра

Співставлення кривих аналітичного і наближених розв'язків, дозволяє констатувати, що запропонована методика досить добре узгоджується з аналітичним і чисельним розв'язком інших авторів.

**Необмежена пластина.** Досліджуємо розподілення температури по товщині необмеженої сталеві пластины при конвекційному теплообміні між її поверхнею  $z^1 = +h/2$  і навколишнім середовищем. Поверхня  $z^1 = -h/2$  передбачається ідеально теплоізолюваною. Початкова температура пластины  $T_0 = 293^\circ\text{ K}$ , температура теплоносія  $\theta = 1273^\circ\text{ K}$ , коефіцієнт теплопровідності  $\alpha = 0.66 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Критерій теплової подібності, що відповідає товщині пластины  $h = 0.008\text{ м}$ ,  $B_i = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} = 0.2$ .

На рис. 2 в вигляді ізоліній показано розподілення температури по товщині пластины для моментів часу  $t = 5\text{ с}$ ,  $10\text{ с}$ ,  $15\text{ с}$ ,  $20\text{ с}$ ,  $30\text{ с}$ ,  $60\text{ с}$ . Як і в попередньому прикладі суцільна лінія відповідає аналітичному розв'язку [5], штрихпунктирна – рішенню, яке отримане за МСЕ [3], а кружечками за розробленою методикою.

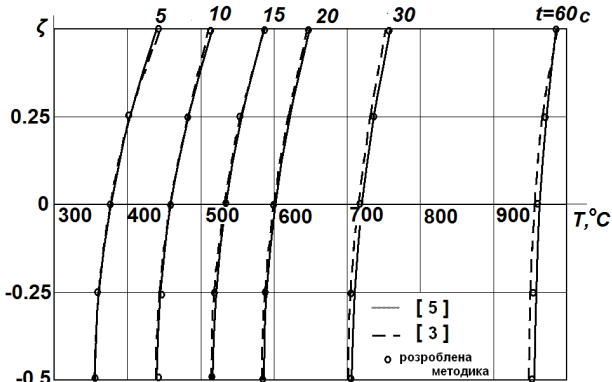


Рис. 2. Розподілення невстановленої температури в необмеженій пластині

Аналіз результатів показує, що в даному прикладі спостерігається добра збіжність наближених і аналітичного розв'язку.

**Висновок.** Наведені розв'язки контрольних прикладів свідчать про достовірність отримуваних на основі розробленої методики результатів і її ефективність, як по просторовій так і часовій координаті порівняно з методикою, що базується на використанні просторово-часових СЕ.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрієвський В.П., Максим'юк Ю.В. Методика розв'язання вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності на основі МССЕ/ В. П. Андрієвський, Ю. В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2014. - Вип. 93. - С. 64-72.
2. Блох В. И. Теория упругости / В. И. Блох. - Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. - 484 с.
3. Гуляр А.И., Кислокий В.Н., Сахаров А.С., Чорный С.М. Решения трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат методом конечных элементов.- В.сб.: «Сопротивление материалов и теория сооружений». Вып. XXII. Киев, «Будівельник», 1974.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975.
5. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. - К. : Наук. думка, 1970. - 204 с.
6. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. - Л.: Машиностроение, 1968. - 212 с.

#### REFERENCES

1. Andrievskiy V.P., Maksym'yuk Y. Methods of solving axisymmetrical problems of stationary heat conduction and thermoelasticity based MSSE / VP Andrievsky, V. // Maksym'yuk resistance of materials and structures theory. 2014 - Vol. 93 - P. 64 72.
2. Bloch V.I. Theory upruhosity VI / VI Bloch. - H., Ed. Of Kharkiv. Gos. University, 1964. - 484 P.
3. Gulyar A.I., Kyslookyy V.N., Sakharov A.S., Chornyy S.M. Solutions teploprovodnosty a three-

- dimensional problem kryvolyneynoy coordinate system by Finite elementov.- V.sb .: "Resistance of materials and structures theory." Vup.XXII. Kiev, "builder", 1974.
4. *Zenkevich A.* finite elements method in technology. Moscow, "Mir", 1975.
  5. *Kovalenko A.D.* Fundamentals termoupruhosty / AD Kovalenko. - K.: Science. opinion, 1970. - 204 p.
  6. *Shabrov N.N.* The method of finite elements calculation details in thermal engines. - L .: Mashinostroenie, 1968. - 212 p.

*Guliar A., Pyskunov S., Andriievskiy V., Maximjuk Yu.*

#### **ALGORITHM SOLVING PROBLEMS AXISYMMETRICAL NONSTATIONARY HEAT CONDUCTION**

The basic estimated value axisymmetrical unsteady heat conduction problems in curvilinear coordinate system. Numerical study to justify the validity of results.

**Keywords:** finite element method (FEM), finite element (SE), unsteady heat conduction, axially symmetric body curvilinear coordinate system.

*Гуляр А.И., Пискунов С.О., Андриевский В.П., Максимюк Ю.В.*

#### **АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Приведены основные расчетные соотношения осесимметричных задач нестационарной теплопроводности в криволинейной системы координат. Проведенные многочисленные исследования для обоснования достоверности результатов.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов (МКЭ), конечный элемент (СЭ), нестационарная теплопроводность, осесимметричные тела, криволинейная система координат.

УДК 539.3

## СТІЙКІСТЬ І КОЛИВАННЯ БУРИЛЬНИХ КОЛОН З ВНУТРІШНІМИ ПОТОКАМИ РІДИНИ В КАНАЛАХ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ СВЕРДЛОВИН

О.М. Андрусенко<sup>1</sup>,  
канд. техн. наук

С.М. Глазунов<sup>1</sup>,  
аспірант

<sup>1</sup>Національний транспортний університет,  
вул. Суворова, 1, м. Київ. 01010

У зв'язку з розробкою нових технологій видобутку вуглеводневих палив із сланцевих порід у нафтогазовій промисловості все більша увага приділяється задачам буріння похилих і горизонтальних свердловин. Специфіка процесів проходки таких свердловин полягає в тому, що на їх перебіг істотно впливають сили контактної і фрикційної взаємодії між поверхнею бурильної колони і стінкою свердловини, що виникають у таких випадках. У даній роботі поставлена задача про біфуркаційні випинання і малі згинні коливання бурильної колони, що обертається, яка лежить в каналі горизонтальної свердловини. З урахуванням сил тертя і додаткових реакцій в'язів виведені диференціальні рівняння, для яких побудовані розв'язки задач на власні значення про стійкість і вільні коливання колон скінченної й необмеженої довжини.

**Ключові слова:** бурильна колона, горизонтальна свердловина, обертання, тертя, стійкість, коливання, моделювання.

**Вступ.** Однією з найбільш актуальних проблем сучасної нафтогазової промисловості є вдосконалення технології буріння глибоких похило скерованих свердловин. Домінуюче положення в цій технології займає роторний спосіб. При його використанні, однак, часто виникають нештатні ситуації, до яких відносяться

(1) втрата стійкості рівноваги бурильної колони за типом стисло закрученого стержня [3, 10, 12, 16];

(2) збудження поздовжніх і згинних коливань під дією нестационарних збуджень технологічного характеру [6, 7];

(3) збудження коливань кружляння, викликаних дисбалансом системи, конструкцією долота й геометричними недосконаlostями всієї системи [1, 9];

(4) ініціювання торсіонних коливань у результаті нелінійних фрикційних ефектів взаємодії долота з гірською породою [2].

Зазначені явища можуть призвести до аварій, пов'язаних з розривом труби бурильної колони й прихопленням долота.

Найбільш типовою позаштатною ситуацією при бурінні є втрата стійкості й пружне біфуркаційне випинання колони. Задача про

дослідження цього ефекту для вертикальних і похилих свердловин розглядалась у роботах [4, 5, 11, 13 – 15] без урахування фрикційних ефектів, що викликані обертанням бурильної колони. Вплив цих сил досліджено в роботі [8]. У даній роботі розглянута задача про стійкість та коливання бурильної колони, що обертається на дні прямолінійної горизонтальної свердловини. Враховані сили фрикційної взаємодії колони зі стінкою свердловини та в'язі, що реалізуються за рахунок їх контакту. Досліджено вплив сил інерції внутрішнього потоку промивної рідини на характер випинання колони в критичних станах і моди її вільних коливань. Встановлено, що в результаті впливу коріолісових сил інерції цього потоку коливання колони можуть бути реалізовані лише у формі біжучих хвиль, причому швидкості розповсюдження цих хвиль у напрямку руху потоку й проти нього мають різні значення.

**1. Розв'язувальні співвідношення критичної рівноваги й коливань горизонтальної бурильної колони.** Розглянемо стан квазістатичної рівноваги бурильної колони (рис. 1) при її стаціонарному обертанні з кутовою швидкістю  $\omega$  на дні горизонтальної прямолінійної свердловини.

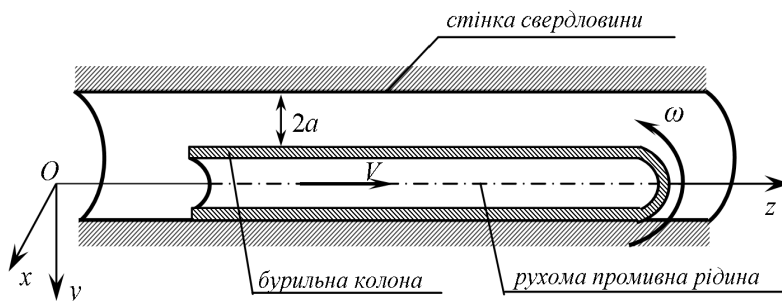


Рис. 1

Колона стиснута осьюовою силою  $F_z$ , її поздовжні рухи відсутні. Міжтрубний зазор системи дорівнює  $a$ . Завдяки його наявності, колона може згинатися та здійснювати поперечні коливання, залишаючись у контакті циліндричною поверхнею свердловини. У результаті цих рухів між колоною та стінкою свердловини генерізуються орієнтовані в окружному напрямку розподілені кулонівські сили тертя ковзання  $f^{тер} \leq \mu f^{конт}$ , де  $\mu$  – коефіцієнт сухого тертя,  $f^{конт}$  – розподілені сили контактного тиску.

По досягненні величиною  $f^{тер}$  граничного значення  $\mu f^{конт}$  дотичні поверхні приходять у відносний рух і реалізується динамічне тертя-ковзання, при якому сила тертя зберігає своє граничне значення  $\mu f^{конт}$ , яке не залежить від швидкості  $v$ .

Приймемо, що в даному випадку БК обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  та в зоні контакту елементарні ділянки поверхні БК ковзають по поверхні свердловини зі стаціонарною позитивною відносною швидкістю  $v^{см}$ . При цьому  $f^{тер} = \mu f^{конт}$ . Нехай потім при втраті стійкості чи малих коливаннях швидкість  $v^{см}$  отримала малі прирости  $\pm \delta v$ , але при цьому повна швидкість  $v = v^{см} \pm \delta v$  зберегла позитивне значення. У цьому випадку сила  $f^{тер} = \mu f^{конт}$  залишиться незмінною. Ця властивість збереження силою тертя свого постійного значення при малих переміщеннях і швидкостях коливань використовується нижче при постановці задач про згинанні БК.

Під дією сил тертя труба, що обертається, перекочується вгору по поверхні свердловини і займає деяке граничне положення, в якому розподілена сила  $\vec{f}^{конт}$  контактного тиску зменшується, а внаслідок цього зменшується і сила тертя-зчеплення  $\vec{f}^{тер}$ , що переходить потім у силу тертя-ковзання. У цьому положенні діюча на трубу розподілена сила  $\vec{f}^{тяж}$  тяжіння врівноважується силами  $\vec{f}^{конт}$ ,  $\vec{f}^{тер}$  та БК знаходиться в стані рівноваги. Однак якщо на трубу діє осьова стискаюча сила  $\vec{F}_z$ , то при деякому її значенні цей стан може виявитися нестійким і відбудеться випинання колони. Задача дослідження цього ефекту істотно відрізняється від задачі ейлерової втрати стійкості стержня, оскільки на колону крім того діють сили інерції внутрішнього потоку рідини і по всій її довжині накладені додаткові в'язі, що обмежують її переміщення по поверхні свердловини. Тому для аналізу стійкості БК, що обертається, спочатку визначимо положення її рівноваги, а потім будемо досліджувати його стійкість.

У стаціонарному стані БК, що обертається, відхилена від вісі  $Oy$  на кут  $\theta$  (вона прямолінійна), і на неї діють сили  $\vec{f}^{тяж}$ ,  $\vec{f}^{конт}$  і  $\vec{f}^{тер}$ . Оскільки при цьому БК зберегла свою прямолінійність, додаткові сили інерції від рухомого потоку промивної рідини залишаються рівними нулю. Спроектувавши зазначені сили на нормаль та дотичну до поверхонь БК та свердловини в точці їх контакту, отримаємо

$$\begin{aligned} f^{\text{конт}} - f^{\text{тяж}} \cos \theta &= 0, \\ f^{\text{тер}} - f^{\text{тяж}} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Відповідно до закону тертя Кулона при ковзанні  $f^{\text{тер}} = \mu f^{\text{конт}}$ . Тоді з (1) випливає, що

$$\begin{aligned} f^{\text{конт}} &= f^{\text{тяж}} \cos \theta, \\ f^{\text{тер}} &= f^{\text{тяж}} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Підставляючи вираз для  $f^{\text{тер}}$  у другу рівність системи (1), отримаємо

$$\mu \cos \theta - \sin \theta = 0 \quad \text{або} \quad \text{tg } \theta = \mu. \quad (3)$$

Таким чином, в результаті обертання БК, що лежить на дні каналу горизонтальної свердловини, залишається прямолінійною і відхиляється під дією сил тертя від свого нижнього положення на кут  $\theta$ , рівний куту тертя  $\text{arctg } \mu$ , що узгоджується з загальним уявленням про рівновагу тіла на похилій шорсткуватій площині. Для перевірки стійкості цього стану складемо рівняння пружної рівноваги елемента труби довжиною  $dz$  в збуреному стані. Відзначимо, що в цьому стані до описаних вище зовнішніх сил, що діють на БК, додаються також розподілені сили інерції внутрішнього потоку промивної рідини. Рівняння рівноваги моментів відносно нормалі до контактуючих поверхонь записується у вигляді:

$$d \delta M - \delta Q dz - F_z a d \delta \theta = 0. \quad (4)$$

Тут символ  $\delta$  позначає різницю відповідної величини, викликаний малим пружним згинанням труби БК в результаті малої зміни кута нахилу  $\delta \theta(z)$  кожного її елемента;  $d$  – символ, що позначає приріст відповідний функції, пов'язаний з приростом  $dz$  її аргументу  $z$ ;  $M(z)$  – внутрішній згинальний момент;  $Q(z)$  – внутрішня перерізуюча сила.

При втраті стійкості колона набуває викривленої конфігурації, її елементи займають нові положення, сили тертя і гравітації змінюються на величини  $\delta f^{\text{тер}}$ ,  $\delta f^{\text{тяж}}$  та промивна рідина починає рухатися всередині викривленого каналу, генеруючи додаткову відцентрову силу інерції  $\delta f^{\text{pid}}$ .

З умови балансу всіх сил, прикладених до елемента в окружному напрямку, дотичному до контактуючих поверхонь, маємо

$$d \delta Q - \delta f^{\text{тер}} dz + \delta (f^{\text{тяж}} \sin \theta) dz + \delta f^{\text{pid}} dz = 0. \quad (5)$$

Перетворимо рівняння (4), (5) до вигляду

$$\delta Q = \frac{d\delta M}{dz} - aF_z \frac{d\delta\theta}{dz}, \frac{d}{dz} \delta Q - \delta f^{мер} + \delta(f^{тяж} \sin\theta) + \delta f^{pid} = 0. \quad (6)$$

Використовуючи вираз

$$\delta M = EI \frac{d^2}{dz^2} (a\delta\theta) \quad (7)$$

і рівності, що випливають з (1), (2)

$$\begin{aligned} \delta f^{мер} &= \mu \delta f^{конт} = \mu \delta(f^{тяж} \cos\theta) = -\mu f^{тяж} \sin\theta \cdot \delta\theta, \\ \delta(f^{тяж} \sin\theta) &= f^{тяж} \cos\theta \cdot \delta\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

а також рівність, що визначає силу інерції від потоку рідини [10]

$$\delta f^{pid} = V^2 \gamma_{pid} a \frac{d^2 \delta\theta}{dz^2},$$

одержимо рівняння пружного критичного стану БК

$$aEI \frac{d^4 \delta\theta}{dz^4} - aF_z \frac{d^2 \delta\theta}{dz^2} + V^2 \gamma_{pid} a \frac{d^2 \delta\theta}{dz^2} + f^{gr} (\mu \sin\theta + \cos\theta) \delta\theta = 0. \quad (9)$$

Тут  $V$  – швидкість руху рідини,  $\gamma_{pid}$  – погонна густина.

За допомогою (3) виразимо в (9) кут  $\theta$  через  $\mu$ . Тоді

$$\theta = \arctg \mu, \sin\theta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}. \quad (10)$$

Вважаючи кут  $\delta\theta$  малим, введемо величину  $\delta u = a \delta\theta$ , що представляє собою функцію малого пружного переміщення елементів БК у площині, дотичній до стичних поверхонь.

Виконавши в (9) заміни (10) і підстановку  $\delta u = a \delta\theta$ , побудуємо остаточне розв'язувальне рівняння

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + V^2 \gamma_{pid} \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a} f^{тяж} \delta u = 0. \quad (11)$$

Воно визначає критичний стан БК, що обертається, на дні каналу горизонтальної свердловини в стані, відхиленому від нижнього положення на кут  $\theta = \arctg \mu$ . Відзначимо, що при  $\mu = 0$  і  $V = 0$  це співвідношення зводиться до відомого рівняння [15]

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + \frac{f^{тяж}}{a} \delta u = 0, \quad (12)$$

побудованому в припущенні відсутності сил тертя між БК і стінкою свердловини.



Обидва ці рівняння аналогічні рівнянням рівноваги балки на пружній основі з коефіцієнтом постелі  $k = f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2} / a$  для (11) і  $k = f^{тяж} / a$  для (12), хоча скельна порода прийнята абсолютно жорсткою і грає роль в'язі, накладеної на переміщення БК.

**2. Критичні стани БК, що обертаються в горизонтальній циліндричній порожнині свердловини.** Рівняння (11) є однорідним, тому має тривіальний розв'язок  $\delta u(z) \equiv 0$  при будь-яких значеннях осьової сили  $F(z)$ . Значення  $F(z)$ , при яких це рівняння має нетривіальні розв'язки  $\delta u(z) \neq 0$ , є біфуркаційними. У цих станах БК втрачає стійкість своєї прямолінійної форми і випинається. Розглянемо спочатку випадок втрати стійкості БК необмеженої довжини  $L = \infty$ . Ненульовий розв'язок рівняння (11) представимо у вигляді (рис. 2)

$$\delta u_{\lambda}(z) = \delta c \sin(\pi z / \lambda). \quad (13)$$

Тут  $\lambda$  – довжина напівхвилі втрати стійкості.

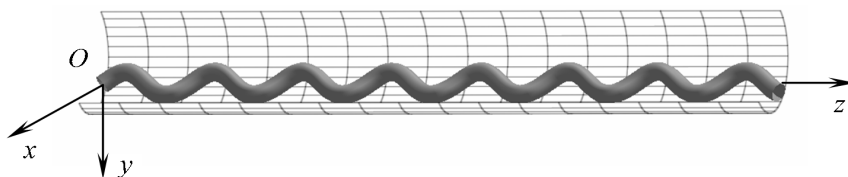


Рис. 2

Підставивши (13) у (11), отримаємо характеристичне рівняння

$$EI \frac{\pi^4}{\lambda^4} + (F_z - V^2 \gamma_{pi0}) \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} = 0, \quad (14)$$

що визначає власні значення  $(F_z - V^2 \gamma_{pi0})_{\lambda}$  при обраному  $\lambda$

$$(F_z - V^2 \gamma_{pi0})_{\lambda} = \left[ \pi^2 EI / \lambda^2 + \lambda^2 f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2} / (\pi^2 a) \right]. \quad (15)$$

Критичне значення різниці  $F_z - V^2 \gamma_{pi0}$  досягається при  $\lambda$ , що мінімізує цю величину. З умови

$$d(F_z - V^2 \gamma_{pi0})_{\lambda} / d\lambda = 0 \quad (16)$$

отримуємо критичне значення різниці

$$(F_z - V^2 \gamma_{pi0})^{kp} = -2\sqrt{EI f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2} / a}. \quad (17)$$

Відповідне йому  $\lambda$  дорівнює

$$\lambda^{kp} = \pi \sqrt[4]{EI a / \sqrt{1 + \mu^2} \cdot f^{тяж}}. \quad (18)$$

Якщо довжина  $L$  БК обмежена і на її кінцях здійснюються умови шарнірного закріплення, то нетривіальні розв'язки рівняння (11) слід шукати у вигляді

$$\delta u_n(z) = \delta c \sin(n \pi z / L), \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Представивши (19) в (11), отримаємо

$$\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)^{kp} = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} f^{тяж}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Таким чином, кожному значенню  $n$  в рівності (20) відповідає своє значення різниці  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)^{kp}$ . Оскільки практичний інтерес представляє тільки найменше за модулем значення цієї величини, необхідно праву частину в (20) мінімізувати по  $n$ . Для цього необхідно обчислити похідну  $d\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)/dn$  і прирівняти її до нуля. В результаті отримаємо

$$n^{kp} = \frac{L}{\pi} \sqrt[8]{1 + \mu^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{f^{тяж}}{EI a}}. \quad (21)$$

Оскільки знайдене значення  $n^{kp}$  в загальному випадку не є цілим, для практичного використання необхідно взяти два найближчих до  $n^{kp}$  цілих  $n$  і вибрати з них те, яке забезпечує найменше величини  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)^{kp}$ .

Як приклад розглянемо випадок  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $I = 1,555 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ ,  $f^{тяж} = 316,35 \text{ Н / м}$ ,  $\mu = 0,32$ ,  $a = 0,04 \text{ м}$ ,  $L = 500 \text{ м}$ . При цих значеннях за формулою (21) знайдено  $n^{kp} = 36,03$ , після чого підраховані  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)_{36}^{kp} = -3,293 \cdot 10^5 \text{ Н}$ ,  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)_{37}^{kp} = 3,302 \cdot 10^5 \text{ Н}$ . Звідси випливає, що критичне значення цього параметра дорівнює  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)_{36}^{kp}$ , а число півхвиль у формі бифуркационного випинання становить  $n = 36$  при довжині  $\lambda = L / n = 13,89 \text{ м}$ .

Важливо відзначити, що в поставленій задачі про стійкість БК у каналі горизонтальної свердловини осьова сила  $F_z$  і величина  $V^2 \gamma_{pid}$  складають один визначальний параметр і надають однаковий вплив на стійкість колони. Причому, оскільки права частина рівності (20) завжди від'ємна,

то від'ємною повинна бути і різниця  $(F_z - V^2 \gamma_{pid})^{kp}$ . Оскільки  $\square V^2 \gamma_{pid}$  теж від'ємна, то можлива ситуація, коли втрата стійкості БК настає і при розтягувальній осьовій силі  $F_z < V^2 \gamma_{pid}$ . Якщо ж сила  $F_z < 0$  – стискаюча, то потік рідини тільки знижує величину критичної сили  $F_z$ .

**3. Власні коливання БК.** Вище показано, що БК, що обертається в горизонтальній свердловині, під дією постійних сил тертя, орієнтованих у окружному напрямку, перекочується вгору по поверхні свердловини і встановлюється у стан стаціонарного обертання під кутом  $\theta = \arctg \mu$ . Досліджуємо малі згинні коливання БК відносно цього стану. Прийmemo, що швидкості ковзання БК по поверхні свердловини в результаті коливань не перевищують швидкість її ковзання, викликану обертанням, тому при коливаннях додаткові сили тертя не виникають. У цьому випадку для побудови рівняння динаміки достатньо в ліву частину співвідношення (12) додати доданок

$$\delta f^{in} = \gamma_{mp} a \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial t^2} = \gamma_{mp} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2}, \quad (22)$$

що визначає силу інерції  $\delta f^{in}$ . Тут  $\gamma_{mp}$  – погонна густина труби БК. У підсумку одержимо рівняння вільних коливань

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + V^2 \gamma_{pid} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial z^2} + 2V \gamma_{pid} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial z \partial t} + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} f^{тяж} \delta u + (\gamma + \gamma_{pid}) \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} = 0. \quad (23)$$

Безпосередньою підстановкою

$$\delta u(z, t) = \delta c \sin\left(\frac{\pi z}{\lambda}\right) \sin kt, \quad (24)$$

можна переконатися, що коливання колони з внутрішнім потоком не можуть відбуватися у формі стоячих хвиль (24), тому їх потрібно шукати в формі біжучих гармонійних хвиль.

$$\delta u(z, t) = \delta c \sin\left(\frac{\pi z}{\lambda} - kt\right), \quad (25)$$

Тут  $\pi/\lambda$  – хвильове число,  $k$  – циклічна частота. Ці параметри визначають фазову швидкість поширення гармонійної хвилі

$$v = k \lambda / \pi. \quad (26)$$

Для отримання залежності між  $k$  і  $\lambda$  необхідно в рівнянні (23) замість змінної  $\delta u(z, t)$  підставити праву частину рівності (25). В результаті отримаємо дисперсійне рівняння

$$EI \frac{\pi^4}{\lambda^4} + (F_z - V^2 \gamma_{pid}) \frac{\pi^2}{\lambda^2} + 2V \gamma_{pid} \frac{\pi}{\lambda} k + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} f^{тяж} - (\gamma + \gamma_{pid}) k^2 = 0. \quad (27)$$

Воно має розв'язок у формі

$$k_{1,2} = \frac{V \gamma_{pid}}{(\gamma + \gamma_{pid})} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \pm \sqrt{\left[ \frac{V \gamma_{pid}}{(\gamma + \gamma_{pid})} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \right]^2 + \frac{\left[ EI \frac{\pi^4}{\lambda^4} + (F_z - V^2 \gamma_{pid}) \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} f^{тяж} \right]}{\gamma + \gamma_{pid}}}. \quad (28)$$

З його допомогою вираз для фазової швидкості

$$v_{1,2} = \frac{V \gamma_{pid}}{(\gamma + \gamma_{pid})} \pm \sqrt{\left( \frac{V \gamma_{pid}}{\gamma + \gamma_{pid}} \right)^2 + \frac{\left[ EI \frac{\pi^2}{\lambda^2} + (F_z - V^2 \gamma_{pid}) + \frac{\lambda^2 \sqrt{1 + \mu^2}}{\pi^2 a} f^{тяж} \right]}{\gamma + \gamma_{pid}}}. \quad (29)$$

На рис. 3 наведені дисперсійні криві (28) у діапазоні  $10 \leq \lambda \leq 50$  м для випадку  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $r_1 = 0,08415$  м,  $r_2 = 0,07415$  м,  $I = \pi(r_1^4 - r_2^4)/4$ ,  $\gamma = 39$  кз/м,  $\gamma_{pid} = 26$  кз/м,  $\mu = 0,32$ ,  $f^{тяж} = 307$  Н/м,  $a = 0,04$  м,  $V = 20$  м/с,

$$F_z = 0,5 \cdot \left( -2\sqrt{EI f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2}/a + V^2 \gamma_{pid}} \right) \text{ (криві } k_{1,1}, k_{2,1}),$$

$$F_z = 0,75 \cdot \left( -2\sqrt{EI f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2}/a + V^2 \gamma_{pid}} \right) \text{ (криві } k_{1,2}, k_{2,2}),$$

$$F_z = 0,95 \cdot \left( -2\sqrt{EI f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2}/a + V^2 \gamma_{pid}} \right) \text{ (криві } k_{1,3}, k_{2,3}).$$

Вони дають можливість простежити як значення  $F_z$  впливає на характер цих кривих.

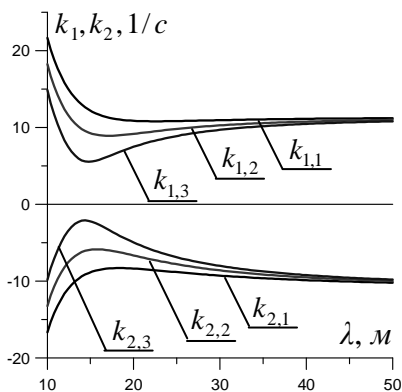


Рис. 3

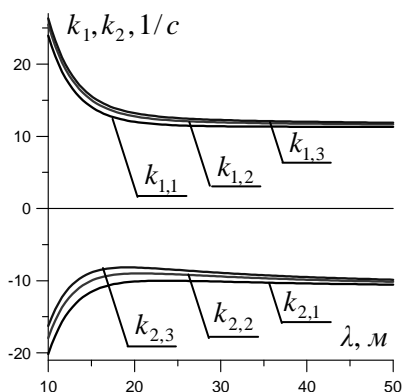


Рис. 4

Розглянуто також випадок, коли величина  $F_z$  була фіксована ( $F_z = -0,5\sqrt{EI f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2/a}}$ ), а швидкість рідини  $V$  приймала значення  $V = 15, 30$  і  $40$  м/с (відповідно криві  $k_{1,1}$ ,  $k_{1,2}$ ,  $k_{1,3}$ ,  $k_{2,1}$ ,  $k_{2,2}$ ,  $k_{2,3}$  на рис. 4).

У цьому ж діапазоні зміни довжини напівхвилі  $\lambda$  були побудовані графіки фазових швидкостей  $v_1$  і  $v_2$  (формула (29)). Рис. 5 відповідає значенням параметрів, що використовувалися для побудови графіків на рис. 3, рис. 6 відповідає випадку, що представлений на рис. 4. На них суцільні криві відповідають швидкості  $v_1$ , пунктирні криві – швидкості  $v_2$ . Як видно, із збільшенням  $V$  відмінності цих кривих стають помітнішими.

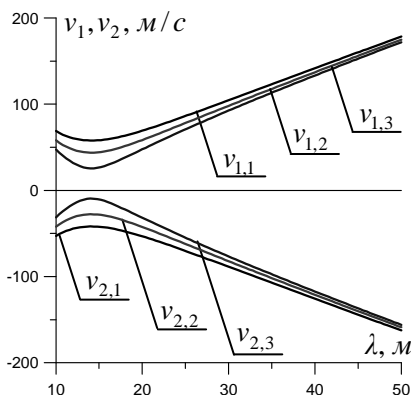


Рис. 5

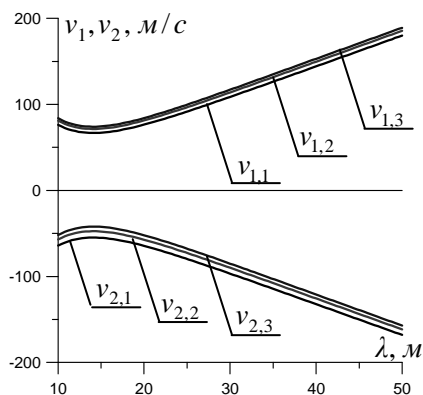


Рис. 6

Відзначимо три важливі властивості, якими володіють ці розв'язки. По-перше, вільні коливання бурильної колони, яка обертається, з внутрішнім потоком рідини і лежить на дні горизонтальної свердловини, можуть бути реалізовані тільки у формі біжучих гармонійних хвиль.

По-друге, оскільки фазова швидкість хвилі залежить від довжини напівхвилі  $\lambda$ , виявляється, що згинні гармонійні хвилі з різними довжинами поширюються уздовж осі БК з різними швидкостями. Це означає, що згинна хвиля довільної форми при переміщенні змінює свій профіль, тобто диспергує, а без дисперсії можуть поширюватися тільки синусоїдальні (косинусоїдальні) хвилі. Причому швидкості цих хвиль зростають зі збільшенням поздовжньої розтягуючої сили  $F_z$  і зменшенням міжтрубного зазору  $a$ .

По-третє, як впливає з рівності (29), для кожного напрямку і значення швидкості  $V$  течії промивної рідини й кожного значення довжини напівхвилі  $\lambda$  існує два різні значення фазової швидкості  $v_1$  і  $v_2$ . Це означає, що одна і та ж гармонійна хвиля може розповсюджуватися з двома різними швидкостями. Причому, так як другий доданок під коренем в правій частині рівності (28), як правило, по модулю більше першого доданка, то швидкості  $v_1$  і  $v_2$  відрізняються знаками. Тому дві встановлені хвилі з однаковими довжинами поширюються в протилежних напрямках уздовж осі БК з різними за модулем швидкостями.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляев В.И. Колебания кружения конструкции низа бурильной колонны / В.И. Гуляев., С.Н. Худой, Е.И. Борщ // Пробл. прочности. – 2010. – №6. – С. 13 – 25.
2. Гуляев В.И. Самовозбуждение крутильных колебаний колонн глубокого бурения / В.И. Гуляев, С.Н. Худой, О.В. Глушакова // Пробл. прочности. – 2009. – №6. – С. 31 – 43.
3. Гуляев В.И. Устойчивость бурильных колонн в наклонно-направленных скважинах / В.И. Гуляев, И.В. Горбунович // Пробл. прочности. – 2008. – №6. – С. 71 – 81.
4. Chen Y.-C. Tubular and casing buckling in horizontal wells / Y.-C. Chen, Y.-H. Lin, J.B. Cheatham // J. of Petroleum Technology. – 1990. – 42(2). – P. 140 – 146.
5. Dawson R. Drill pipe buckling in inclined holes / R. Dawson, P.R. Paslay // J. of Petroleum Technology. – 1984. – 36(10). – P. 1734 – 1738.
6. Dunayevsky V.A. Dynamic stability of drill strings under fluctuating weight on bit / V.A. Dunayevsky, F. Abbassian, A. Judzis // SPE Drilling and Completion. – 1993. – 8(2). – P. 84 – 92.
7. Gulyayev V.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells / V.I. Gulyayev, E.I. Borshch // J. Petroleum Sci. Eng. – 2011. – 78. – P. 759 – 764.
8. Gulyayev V.I. Modeling the energy-saving regimes of curvilinear bore-hole drive / V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, E.N. Andrusenko, N.V. Shlyun // J. of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. – 2015. – 1. – P. 011402-1 – 011402-8.
9. Gulyayev V.I. Nonholonomic dynamics of drill string bit whirling in a deep bore-hole / V.I. Gulyayev, L.V. Shevchuk // J. of Multi-body Dynamics. – 2013. – 227(3). – P. 234 – 244.
10. Gulyayev V.I. The buckling of elongated rotating drill strings / V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, and I.V. Gorbunovich // J. Petroleum Sci. Eng. – 2009. – 67. – P. 140 – 148.

11. *Kyllingstad A.* Buckling of tubular strings in curved wells / A. Kyllingstad // *J. Petroleum Sci. Eng.* – 1995. – 12(3). – P. 209 – 218.
12. *Lubinski A.* Helical buckling of tubing sealed in packers / A. Lubinski, W.S. Althouse, J.L. Logan // *J. of Petroleum Technology.* – 1962. – 14(6). – P. 655 – 670.
13. *Mitchell R.F.* Effects of well deviation on helical buckling / R.F. Mitchell // *SPE Drilling and Completion.* – 1997. – 12(1). – P. 63 – 70.
14. *Mitchell R.F.* Helical buckling of pipe with connectors and torque / R.F. Mitchell, and S. Miska // *SPE Drilling and Completion.* – 2006. – 21(2). – P. 108 – 115.
15. *Mitchell R.F.* Tubing buckling – The state of art / R.F. Mitchell // *SPE Drilling and Completion.* – 2008. – 23(4). – P. 361 – 370.
16. *Paslay P.R.* The stability of a circular rod laterally constrained to be in a contact with an inclined circular cylinder / P.R. Paslay, D.B. Bogy // *J. of Applied Mechanics.* – 1964. – 31(3). – P. 604 – 610.

## REFERENCES

1. *Gulyayev V.I.* Kolebaniya kruzheniya konstrukcii niza burilnoy kolonny / V.I. Gulyayev, S.N. Hudoliy, E.I. Borshch // *Problemy prochnosti.* – 2010. – №6. – P. 13 – 25.
2. *Gulyayev V.I.* Samovozbuzhdenie krutilykh kolebaniy kolonn glubokogo bureniya / V.I. Gulyayev, S.N. Hudoliy, O.V. Glushakova // *Problemy prochnosti.* – 2009. – №6. – P. 31 – 43.
3. *Gulyayev V.I.* Ustoychivost burilnykh kolonn v naklonno-napravlyennykh skvazhinah / V.I. Gulyayev, I.V. Gorbunovich // *Problemy prochnosti.* – 2008. – №6. – P. 71 – 81.
4. *Chen Y.-C.* Tubular and casing buckling in horizontal wells / Y.-C. Chen, Y.-H. Lin, J.B. Cheatham // *J. of Petroleum Technology.* – 1990. – 42(2). – P. 140 – 146.
5. *Dawson R.* Drill pipe buckling in inclined holes / R. Dawson, P.R. Paslay // *J. of Petroleum Technology.* – 1984. – 36(10). – P. 1734 – 1738.
6. *Dunayevsky V.A.* Dynamic stability of drill strings under fluctuating weight on bit / V.A. Dunayevsky, F. Abbassian, A. Judzis // *SPE Drilling and Completion.* – 1993. – 8(2). – P. 84 – 92.
7. *Gulyayev V.I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells / V.I. Gulyayev, E.I. Borshch // *J. Petroleum Sci. Eng.* – 2011. – 78. – P. 759 – 764.
8. *Gulyayev V.I.* Modeling the energy-saving regimes of curvilinear bore-hole drivage / V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, E.N. Andrusenko, N.V. Shlyun // *J. of Offshore Mechanics and Arctic Engineering.* – 2015. – 1. – P. 011402-1 – 011402-8.
9. *Gulyayev V.I.* Nonholonomic dynamics of drill string bit whirling in a deep bore-hole / V.I. Gulyayev, L.V. Shevchuk // *J. of Multi-body Dynamics.* – 2013. – 227(3). – P. 234 – 244.
10. *Gulyayev V.I.* The buckling of elongated rotating drill strings / V.I. Gulyayev, V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, and I.V. Gorbunovich // *J. Petroleum Sci. Eng.* – 2009. – 67. – P. 140 – 148.
11. *Kyllingstad A.* Buckling of tubular strings in curved wells / A. Kyllingstad // *J. Petroleum Sci. Eng.* – 1995. – 12(3). – P. 209 – 218.
12. *Lubinski A.* Helical buckling of tubing sealed in packers / A. Lubinski, W.S. Althouse, J.L. Logan // *J. of Petroleum Technology.* – 1962. – 14(6). – P. 655 – 670.
13. *Mitchell R.F.* Effects of well deviation on helical buckling / R.F. Mitchell // *SPE Drilling and Completion.* – 1997. – 12(1). – P. 63 – 70.
14. *Mitchell R.F.* Helical buckling of pipe with connectors and torque / R.F. Mitchell, and S. Miska // *SPE Drilling and Completion.* – 2006. – 21(2). – P. 108 – 115.
15. *Mitchell R.F.* Tubing buckling – The state of art / R.F. Mitchell // *SPE Drilling and Completion.* – 2008. – 23(4). – P. 361 – 370.
16. *Paslay P.R.* The stability of a circular rod laterally constrained to be in a contact with an inclined circular cylinder / P.R. Paslay, D.B. Bogy // *J. of Applied Mechanics.* – 1964. – 31(3). – P. 604 – 610.

*Andrusenko E.N., Glazunov S.N.*

### **STABILITY AND VIBRATION OF DRILL STRINGS WITH INTERNAL FLOWS OF LIQUIDS IN THE CHANNELS OF HORIZONTAL BORE-HOLES**

In connection with elaboration of new technologies of hydrocarbons extraction from shales, in the oil and gas industry, the great attention is paid to the problems of drilling inclined and horizontal bore-holes. The peculiarities of these bore-hole drivage consist in essential influence of friction and contact forces on proceeding of drilling processes. In this paper, the problem about bifurcational buckling and small bending vibration of a rotating drill string lying in the channel of a horizontal bore-hole is stated. With allowance made for friction forces and additional constraint reactions, differential equations are deduced, their eigen-value solutions describing stability and vibration of the drill string of finite and infinite lengths are received.

**Key words:** drill string, horizontal hole, rotation, friction, stability, vibration, modeling.

*Андрусенко Е.Н., Глазунов С.Н.*

### **УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ БУРИЛЬНЫХ КОЛОНН С ВНУТРЕННИМИ ПОТОКАМИ В КАНАЛАХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СКВАЖИН**

В связи с разработкой новых технологий добычи углеводородных топлив из сланцевых пород в нефтегазовой промышленности все большее внимание уделяется задачам бурения наклонных и горизонтальных скважин. Специфика процессов проходки таких скважин заключается в том, что на их протекание существенное влияние оказывают возникающие в таких случаях силы контактного и фрикционного взаимодействия между поверхностью бурильной колонны и стенкой скважины. В данной работе поставлена задача о бифуркационном выпучивании и малых изгибных колебаниях вращающейся бурильной колонны, лежащей в канале горизонтальной скважины. С учётом сил трения и дополнительных реакций связей выведены дифференциальные уравнения, для которых построены решения задач на собственные значения об устойчивости и свободны колебаниях колонн конечной и неограниченной длины.

**Ключевые слова:** бурильная колонна, горизонтальная скважина, вращение, трение, устойчивость, колебания, моделирование.



UDC 624.014:621.315.1

## EXPERIMENTAL RESEARCHES OF ELASTOMERIC MATERIALS TO STABILIZE THE OSCILLATION OF POWER GRID STRUCTURES

**Iurii Priadko**<sup>1</sup>

PhD (Engineering), Associated Professor of Theoretical and Applied Mechanics Department

**Anton Tanasoglo**<sup>2</sup>

PhD (Engineering), Associated Professor of Metal Structures Department

**Igor Garanzha**<sup>2</sup>

PhD (Engineering), Associated Professor of Metal Structures Department

<sup>1</sup>*Kyiv national university of construction and architecture*

<sup>2</sup>*Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture*

This paper proposes a new type of insulator, has both insulating and damping properties to improve the operational reliability of overhead power lines' structures (OHPL). In order to assess an effectiveness of the new insulator's design have made laboratory tests of a insulator model with different types of elastomer seals, differed of the rubber marks and the type of reinforcement. An experiment consist of two stages: at the first stage an object of study has been exposed to cyclical vibration, at the second – the impact of an impulsively load. Results of the research showed, that the most effective are the elastomeric gasket with a minimum rigidity characteristics without reinforcement. Using insulators with such dampers allows to reduce the first maximum impulse to a support by an average of 20% and reduce the frequency and amplitude characteristics of the system. Based on this was developed a new type of elastomer reinforcing with steel sheet elements in the form of a truncated cone.

**Key words:** damper, elastomeric gasket, string of insulators, lattice support, overhead transmission power line.

### Introduction

The main drawback of currently used insulators is to use materials with low damping properties [1 – 4]. For this reason, usually occur weakly damped oscillations in the rod of the insulator under the influence of external excitation forces [5 – 7]. This paper presents the experimental research into the use of elastomeric materials to stabilize the power grid structures.

Based on the theoretical research was proposed the design of damper device shown in fig. 1. The distinguishing feature of this design is that the damping assembly which consists of two delta-shaped staples, perceive tensile load, causes in the gasket of elastomer compression deformation. Thus, it is possible to use flexible elastomeric damper, suspension and conductor-stayed systems. On the power lines such element can be mounted into the polymer insulator strings, the more that the elastomeric gasket is a good dielectric [8, 9].

## 1. Design of the damper device

The new type of insulator proposed in this paper (fig. 2) having an insulating and damping properties simultaneously and can be used to improve the operational reliability of overhead lines owned by the enterprises of electrical networks.

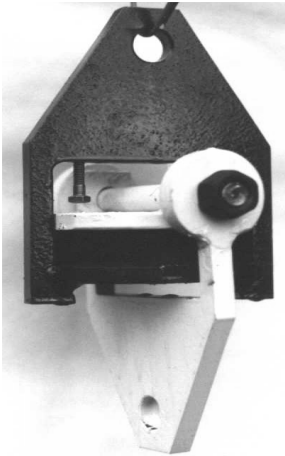


Fig. 1. The damper's general view

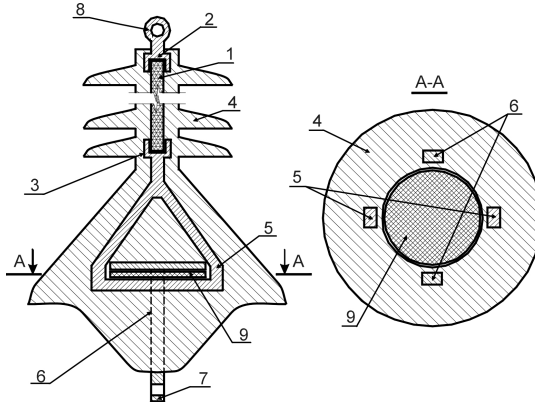


Fig. 2. The insulator with the damper

The insulator, showed in fig. 2, consists of FRP rod 1 and fixed at its ends of metal end fittings 2, 3 with connecting elements 7, 8, which are covered with a protective sheath 4 of a dielectric polymer material. Between the lower end fitting 3 and the element 7 inserted damping assembly in the form of two delta-shaped staples 5, 6 are connected in series with a gasket disposed therebetween elastomeric material 9 is of a cylindrical form.

## 2. The methodology of experimental researches

In order to assess the effectiveness of the above designs were conducted laboratory tests of model insulator strings, which were introduced damping assembly.

During the experiment used elastomeric gasket provided by Ukrainian Research, Design and Technology Institute of elastomeric materials and products (URDTI «DINTEM»), Dnepropetrovsk city [10].

The main purpose of the tests was to determine the effectiveness of the proposed design under dynamic loads and impacts to the OHPL supports from the electrical cables and ground wires and an evaluation the structural damping, depending on the type and design of the elastomeric gasket.

So elastomeric materials have a pronounced nonlinear properties, and the data about physical and mechanical properties are clearly insufficient to carry out theoretical studies, it was decided to establish a simple methodology to assess the complexity with minimal vibration damping properties of elastomeric materials in the proposed design.

According to the proposed methodology were tested insulator strings with different types of elastomer gaskets, rubber marks, and differing types of reinforcement. The experiment consisted of two stages. At the first – stage research object exposed to cyclical vibration load, at the second – to impulsively load. Tests were conducted in December 2014 in the Testing Center of Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture at a temperature of  $+1^{\circ}\text{C}$ .

### 2.1. Tests of the insulator strings with damping unit on the action of the cyclic vibration load

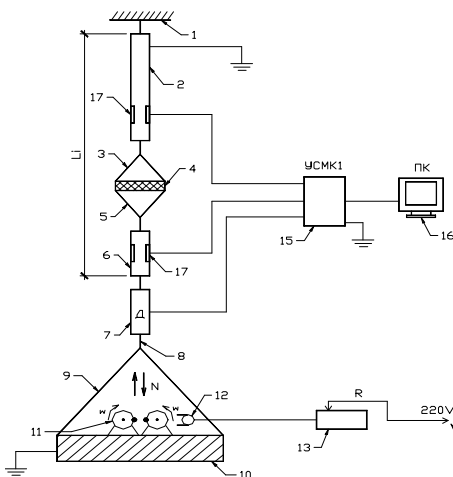


Fig. 3. The scheme of insulators strings' tests under cyclic load:

- 1 – a support;
- 2, 6 – a model of a string;
- 3, 5 – the damper;
- 4 – the elastomeric gasket;
- 7 – a dynamometer;
- 8 – a wire;
- 9 – a metal frame;
- 10 – a weight load;
- 11 – the vibrator;
- 12 – the DC motor;
- 13 – a strenght;
- 14 – the power supply;
- 15 – a monitoring system;
- 16 – PC;
- 17 – strain gauges

The insulator was modeled using a steel pipe with a diameter of 22 mm, which was introduced on hinges damping assembly. The total length of the string was 1.5 m. Strings of similar length are used on real lines with voltage of 110 kV.

The testing scheme of insulator strings by the cyclical load is shown in fig. 3.

Prior to the tests, was a preliminary calibration of strain gauges readings (in cross-section has 6 strain gauges), located in the stringd between the damper and the wire, between the damper and the support by comparing the readings with the latest readings of the dynamometer by-step application of the load unit weight loads.

To the suspended insulator strings through the conductor sent the load form the weight load, on which was established vibrator, with the help of which excited oscillates system (fig. 4).

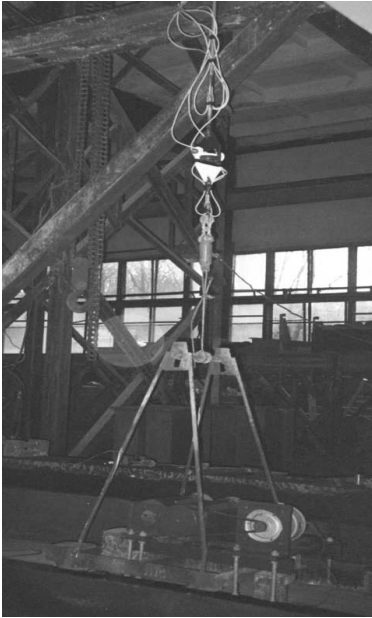


Fig. 4. The test model's general view

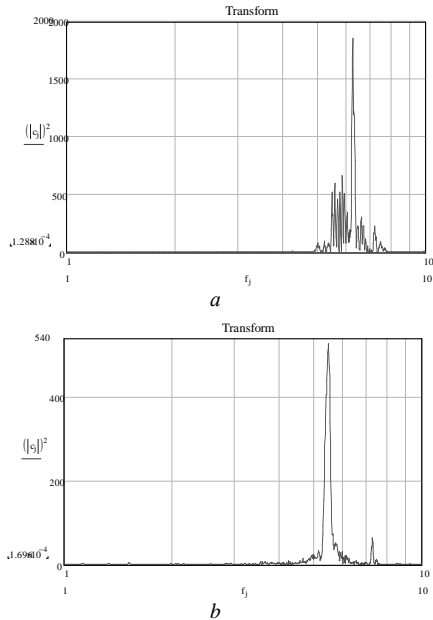


Fig. 5. Spectral dependences: *a* – the model without elastomeric gasket; *b* – with gasket

Controlled parameters were voltage in insulator strings between the damper and the wire and between the damper and the support, measured by the strain gauges of resistance and also the force in the connecting conductor, measured with a dynamometer. Variable parameters were the mass of the weight load and the frequency of exposure.

In order to assess natural frequencies of structural vibrations were built spectras using a Fast Fourier Transform (FFT). As seen in fig. 5 the use of elastomeric gasket reduces the first natural frequency of the system from 6.2 to 5.5 Hz. Thus, when applying the described damper may apply so-called "frequency tuning."

In fig. 6 can see the characteristic recording of the signal implementation by the time. The values of the vertical axis corresponds to the voltage in kgf / cm<sup>2</sup>, the line voltage shown in the body of between damper and–strings between the wire and damper broken lines support.

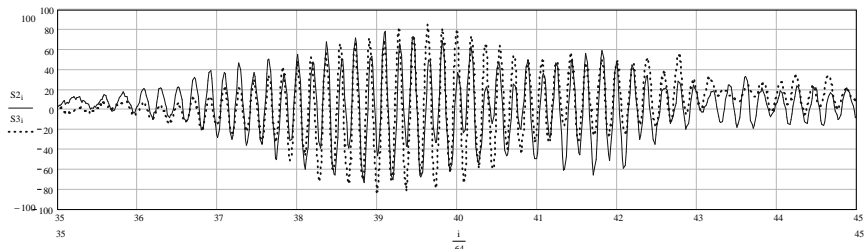


Fig. 6. An example of the signal realization

## 2.2. Tests of the insulator strings with damping unit on the pulse loading at breakage of wires

To study the damping properties of the proposed insulator have been conducted researches of the dynamic behavior under the influence of the impulse loading from the wire breakage. As the object of study was used the span model of wire between the anchor and intermediate supports. The case of wire breakage was simulated in the second span from the anchor support. The experimental scheme is shown in fig. 7.

The wire was modeled using a steel conductor with a diameter of 10 mm (fig. 8) with equivalent stiffness properties. The span length is 30 m. To create a design load the span of electrical conductor were pre-loading using the unit weight loads by mass 10 kg, is rigidly attached to the wire.

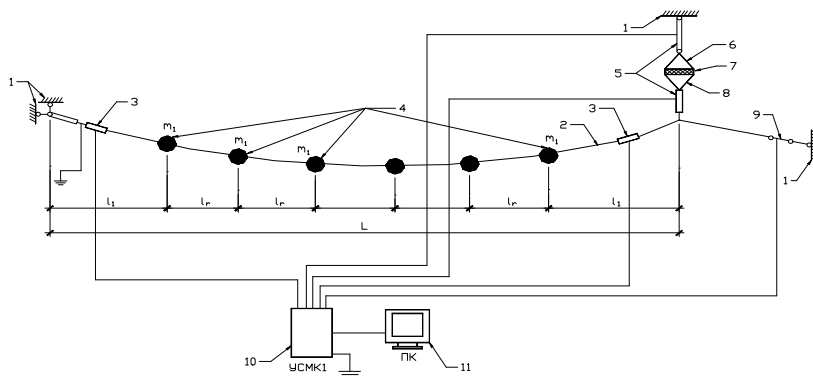


Fig. 7. Driving test insulator strings cyclical load: 1 – a support; 2 – wire; 3 – dynamometers; 4 – loads; 5 – model garlands; 6, 8 – damper; 7 – elastomeric gasket; 9 – breaking bracket; 10 – monitoring system; 11 – PC

Breakage was carried out using a discontinuous brackets. During the breakage were measured: the moment of the conductor's breakage, a traction in

the wire near the insulator, a strenght in the insulator rod between the damper and the support and between the damper and the conductor is carried out using the monitoring system of building structures "UMSK-1." The frequency of the parameters removal was  $64 \text{ Hz}$ .

The open architecture of the "UMSK-1" enabled mobile make and implement the breakage sensor, the principle of action is based on breaking the electrical circuit [11–13]. During the experiment achieved tension in the conductor from  $1000$  to  $9000 \text{ N}$ , with a step of  $100 \text{ N}$ .



Fig. 8. The insulator string's general view

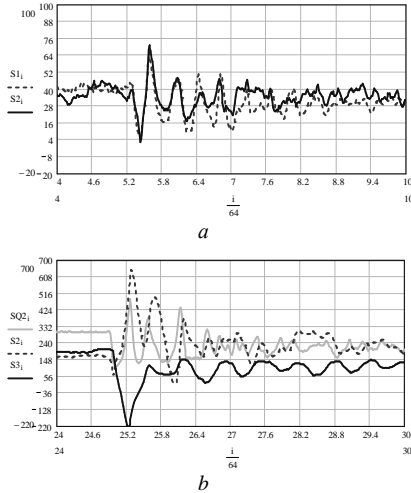


Fig. 9. Change forces in the insulator's rod:  
*a* – without elastomeric gaskets; *b* – with elastomeric gasket

Fig. 9,*a* shows the change of forces for the insulator without elastomeric gasket ( $S1$  – forces in the rod between the damper and the conductor,  $S2$  – forces in the rod between the damper and the support). Fig. 9,*b* shows forces in the insulator with the gasket without reinforcing ( $SQ2$  – the traction of in the conductor,  $S2$  – forces in the rod between the damper and the support,  $S1$  – forces in the rod between the damper and the conductor).

Although the use of FFT (fig. 10) allows to judge about the frequency shift of the system with the introduction one or other damper, but to evaluate the vibration damping properties by the frequencies is difficult [14, 15].

The most complete information about the oscillations damping by the elastomeric element on frequencies can be obtained on the basis of the filtering the digital signal implementation obtained by using Haar transformation [16,

17, 18]. With its help, in fact, carried out a multi-stage digital filtering the signal through a set of filters, low and high frequency with constant relative transmittance [19].

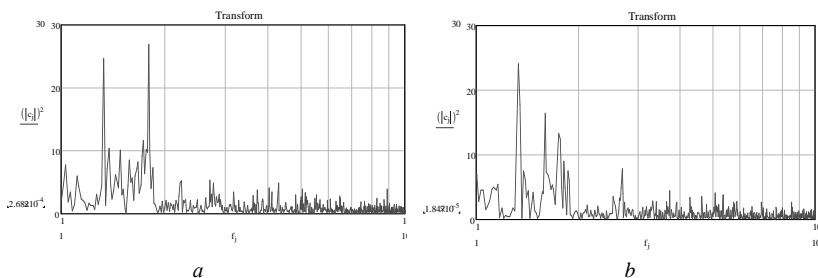


Fig. 10. The spectra: *a* – without estameric gaskets; *b* – with elastomeric gasket.

The construction of discrete Haar transformation begins from the determination of the scaling function  $\varphi(u)$ , depending on the of some restrictions and is used to specify the "mother" function  $\psi(u)$ . The basis functions, which representing the signal, defined by extensions  $\psi(u)$ . The form of "mother" transformation is not unique and depends on the desired order of the transformation. The analyzed signal must consist of  $2^M$  samples, where  $M$  – whole number. During the the conversion the signal is decomposed into  $M+1$  levels ( $i=1,0,1, \dots, M+1$ ). Each  $i$ -th level consists of  $k = 2^i$  partially overlapping basis functions are equally distributed in the interval  $2^M/k$ . The realization of the signal is uniquely determined by the expression:

$$x(t) = A_v + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{2^{j-1}} \psi(2^j \cdot t - k \cdot T), \quad 0 \leq x(t) \leq T, \quad (1)$$

where  $\psi(2^i \cdot t - k \cdot T)$  – Haar functions,  $t$  - time.

Through the ratio given the function algorithm of normalized low-frequency and high-frequency digital filters. Setting the value of " $M$ " practically determines the "Tree" of digital signal filtering. As a result of the decomposition of the signal is a set of implementations that display the time dependence of the filtered frequency bands in normalized components of the original signal. In this frequency band  $f_i$  for each implementation associated with the sampling frequency and the signal  $f_e$  may be determined as follows:

$$f_i \in \left[ \frac{f_e}{2^{i+1}}, \frac{f_e}{2^i} \right]. \quad (2)$$

Thus, the use of Haar transform allows you to explore a broadband signal, detailing it in the normalized frequency bands. Thus it is possible to identify the characteristics of the signal hidden in its initial implementation. Filtered

implementation can be further analyzed by conventional means of statistical processing of signals.

The highest frequency in the transformation is determined using the Kotel'nikov theorem. So, the sampling frequency signal is  $64 \text{ Hz}$ , the lower frequency will be  $32 \text{ Hz}$ . Fig. 11 graphs  $d1 \square d6$  correspond to octave band signals expansion  $f \in [0,5; 32] \text{ Hz}$ .

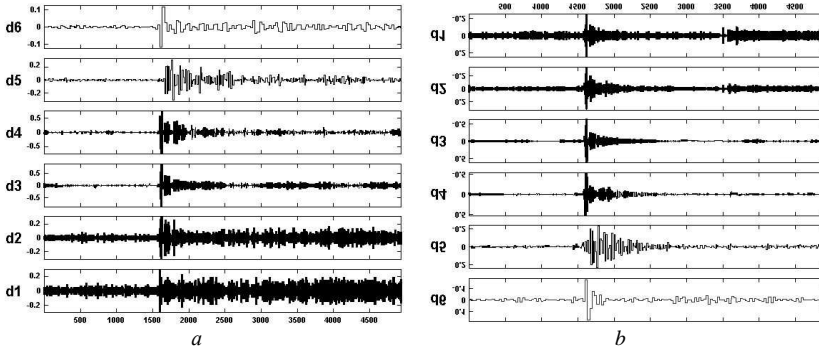


Fig. 11. Discrete Haar transformation: *a* – the signal between the damper and conductor; *b* – the signal between the damper and support

From the analysis of the results can be concluded increasing of dissipative properties of the elastomeric gasket with increasing frequency the disturbing force. To quantify this fact was introduced stabilization factor, which is the ratio of the amplitude of the system oscillation before the damper ( $A_2$ ), and after the damper ( $A_1$ ):

$$Y_n = \frac{A_2}{A_1}. \quad (3)$$

Analysis of the results allowed to reveal the dependence of attenuation coefficient on the frequency (fig. 12) and the magnitude of the pre-compression damping (fig. 13).

The graph on fig. 12 is built on the tests basis of the insulator strings by cyclical load:

$$Y_n = \left( \frac{\sum_1^n M_2 \cdot \frac{1}{n} - S_2}{\sum_1^n M_1 \cdot \frac{1}{n} - S_1} \right), \quad (4)$$



where  $n$  – the number of oscillation's periods in the implementation of the selected target frequency oscillations;  $M_{2,1}$  – the maximum of realization for the period before and after the damper respectively;  $S_{2,1}$  – the average value of the selected implement, before and after the damper.

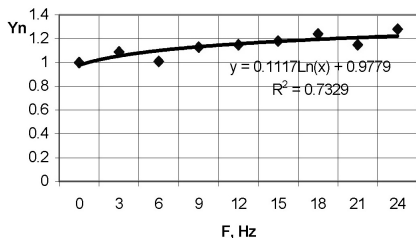


Fig. 12. Dependence of the stabilization of the frequency of the disturbing force

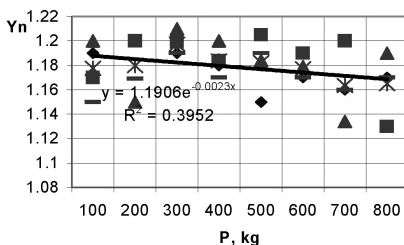


Fig. 13. Dependence of the stabilization of the value of the compressive force

The graphs in fig. 12 and 13 show an increase of the vibration damping properties of elastomers with increased frequency and decrease the amount of compressive force. However, if the dependence of the frequencies managed to build quite precisely, to establish  $Y_n$  depending on the compression force to simulate a real forces arising from the conductor breakage of overhead lines of 220 kV and above, it was not possible, because the conductor's tension of data overhead lines up to several tons .

### 3. The proposed reinforcement type of elastomeric parts

As an alternative, we propose a new type of reinforcement of elastomeric parts. A feature of this type is the reinforcement of the elastomer by the sheet steel elements in the form of a truncated cone. In fig. 14,a is shown rubber reinforced supporting part (RRSP) with conical reinforcement; in fig. 14,b a lower support plate rigidly attached the locking element in the form of a cone; in fig. 14,c RRSP enclosed in a steel beaker. The reinforcing elements are derived from pairwise elastomeric body and fixed to the lower and upper support plates.

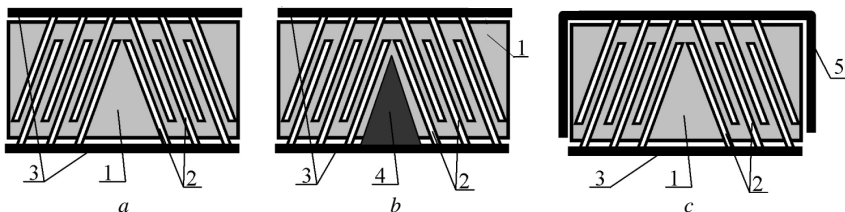


Fig. 14. The proposed types of the reinforcement of RRSP: 1 – elastomeric material, 2 – cone steel sheets, 3 – support plates, 4 – the locking element in the form of a cone, 5 – steel beaker

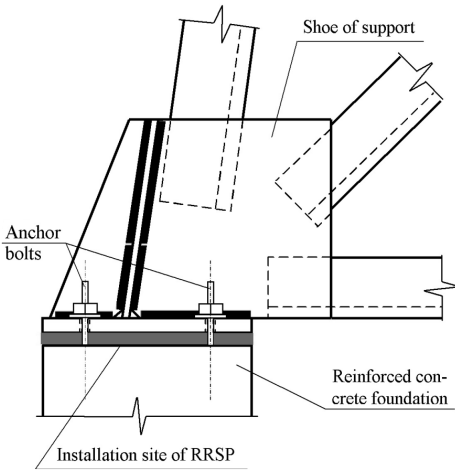


Fig. 15. The support assembly

plates of the support's bases (fig. 15). The use of dampers in this case will not only dampening of oscillations in the base area, but also allow you to change and adjust the natural frequencies of the tower supports, ie to apply the so-called frequency detuning.

#### 4. Conclusions

1. Analysis of test results showed a fairly clear dependence of the dissipative properties increase of the system while reducing the stiffness parameters of elastomeric seals. This served as the basis for developing a new type of the steel sheetreinforcement of elastomer elements in the form of a truncated cone.

2. The experimental results showed that the most effective are the elastomeric gasket with a minimum rigidity characteristics (a hardness by Shore is 40) without reinforcement. Using insulators with such dampers allows to reduce the first maximum impuls to the support by an average of 20% and to reduce the frequency and amplitude characteristics of the system.

3. During the processing of the experimental data was set ineffectiveness of horizontal reinforcement of RRSP, because stabilizing effect observed in the range of 3% and is comparable to the experimental error.

In the proposed RRSP is possible application of the most soft elastomers. The conical reinforcement facilitates the fullest use of the height of the elastomer material, and the use of the steel beaker, in this case, promotes deformation of the elastomer along the line of action of force, which also contributes to more efficient damping.

To reduce the dynamic impacts in the area of lattice towers' bases of overhead lines proposed to establish new types of RRSP under steel

#### REFERENCES

1. *Rules for electrical installation*. Head 2.5 «The overhead power transmission lines voltages above 1 kV to 750 kV». Kyiv: OEP «GRIFRE», 2006. 125 p. (in Ukrainian).
2. *Wadell, Brian C. Transmission Line Design : handbook / Brian C. Wadell. – Norwood : Artech house, 2005. – 266 p.*

3. *Bazant, Z.P.* Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories / Z.P. Bazant, L. Cedolin. – 3-rd ed. – New York : Oxford University Press, 2010. – 1011 p.
4. *Gaudry, M.* Increasing the ampacity of overhead lines using homogeneous compact conductors / M. Gaudry, F. Chore, C. Hardy. – CIGRE (Paris). – 2008. – P. 180–201.
5. *Thermomechanics of elastomeric structural elements under cyclic loading* / V.N. Poturaev, V.I. Dyrda, V.G. Karnaukhov, I.K. Sechenkov, V.I. Kozlov, A.V. Mazentsova. – К.: Naukova dumka, 1987. – 288 p.
6. *Kemp, A.R.* Behaviour of cross-bracing in latticed towers / A.R. Kemp, R.H. Behneke. – J. Struct. Eng. Am. Soc. Civil Eng. – 124(4), 1998. – P. 360–367.
7. *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures* / Edited by Ronald D. Ziemian. – Sixth Edition. – Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2010. – 1117 p.
8. *Li, H.* High voltage transmission tower line system subjected to disaster loads / H. Li and H. Bai // Progress in Natural Science. – 2006. – Vol. 16, No. 9. – P. 899–911.
9. *Design of Latticed Steel Transmission Structures* / American Society of Civil Engineers. ANSI/ASCE 10-90, A.N.S.I. – New York (USA). – 1991. – 64 p.
10. *Aerodynamics of the power grid structures* / Ye.V. Gorokhov, M.I. Kazakevich, S.N. Shapovalov, Ya.V. Nazim / By edition of Gorokhov Ye.V., Kazakevich M.I. – Donetsk, 2000. – 336 p.
11. *Perelmuter, A.V.* Stability of equilibrium structures and related problems. Vol. 1 / A.V. Perelmuter, V.I. Slivker. – М.: SCAD Soft, 2010. – 704 p.
12. *Tanasoglo A.V.* Investigation of the of steel lattice transmission towers' stability / A.V. Tanasoglo // Modern constructions of metal and wood: collection of scientific papers – Odessa : OSACEA, 2011. – №15. – Part 3. – p. 233-238.
13. *Shevchenko, Ye.V.* The research of stress-strain state of a double circuit anchor-corner support 330 kV using a variety of software systems / Ye.V. Shevchenko, V. Glukhov, A. Tanasoglo // Metal constructions– 2010. – Vol. 16, №1. – p. 31-39.
14. *Kadisov, G.M.* Dynamic and stability of structures : workbook / G.M. Kadisov. – М.: ACB, 2007. – 272 p.
15. *Coşkun, S.B.* Advances in computational stability analysis : study guide / S.B. Coşkun. – Rijeka : InTech, 2012. – 132 p.
16. *Malkov, V. M.* Mechanics multilayer elastomer structures / V.M. Malkov. SPb.: Univ of S. - St. Petersburg University, 1998. – 320 p.
17. *Winterstetter, T.* Stability of circular cylindrical steel shells under combined loading / T. Winterstetter, H. Schmidt // Thin-Walled Structures. – Vol. 40. – 2002. – P. 893–909.
18. *Yoo, Chai H.* Stability of structures : principles and applications / Chai H. Yoo, Sung C. Lee. – Elsevier Academic Press, 2011. – 529 p.
19. *Yang, B.* Stress, strain, and structural dynamics : an interactive handbook of formulas, solutions, and MATLAB toolboxes / Bingen Yang. – Elsevier Academic Press, 2005. – 960 p.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. *Правила улаштування електроустановок.* Глава 2.5 «Повітряні лінії електропередавання напругою вище 1 кВ до 750 кВ» / Міністерство палива та енергетики України. – К.: ОЕП «ГРІФРЕ», 2006. – 125 с. – (Нормативний документ Мінпаливенерго України).
2. *Wadell, Brian C.* Transmission Line Design : handbook / Brian C. Wadell. – Norwood : Artech house, 2005. – 266 p.
3. *Bazant, Z.P.* Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories / Z.P. Bazant, L. Cedolin. – 3-rd ed. – New York : Oxford University Press, 2010. – 1011 p.
4. *Gaudry, M.* Increasing the ampacity of overhead lines using homogeneous compact conductors / M. Gaudry, F. Chore, C. Hardy. – CIGRE (Paris). – 2008. – P. 180–201.

5. *Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении* / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов, И.К. Сенченков, В.И. Козлов, А.В. Мазнецова. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 288 с.
6. *Kemp, A.R. Behaviour of cross-bracing in latticed towers* / A.R. Kemp, R.H. Behneke. – J. Struct. Eng. Am. Soc. Civil Eng. – 124(4), 1998. – P. 360–367.
7. *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures* / Edited by Ronald D. Ziemian. – Sixth Edition. – Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2010. – 1117 p.
8. *Li, H. High voltage transmission tower line system subjected to disaster loads* / H. Li and H. Bai // *Progress in Natural Science*. – 2006. – Vol. 16, No. 9. – P. 899–911.
9. *Design of Latticed Steel Transmission Structures* / American Society of Civil Engineers. ANSI/ASCE 10-90, A.N.S.I. – New York (USA). – 1991. – 64 p.
10. *Аэродинамика электросетевых конструкций* / Е.В. Горохов, М.И. Казакевич, С.Н. Шаповалов, Я.В. Назим / Под. ред. Горохова Е.В., Казакевича М.И. – Донецк, 2000. – 336 с.
11. *Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1* / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М. : СКАД СОФТ, 2010. – 704 с.
12. *Танасогло, А.В. Исследование устойчивости решетчатых стальных опор линий электропередачи* / А.В. Танасогло // *Современные строительные конструкции из металла и древесины: Сб. науч. тр. – Одесса : ОГАСА, 2011. – №15. – Часть 3. – С. 233-238.*
13. *Шевченко, Е.В. Исследование напряженно-деформированного состояния двухцепной анкерно-угловой опоры ВЛ 330 кВ с использованием различных программных комплексов* / Е.В. Шевченко, В.А. Глухов, А.В. Танасогло // *Металеві конструкції*. – 2010. – Т. 16, №1. – С. 31-39.
14. *Кадисов, Г.М. Динамика и устойчивость сооружений : учебное пособие* / Г.М. Кадисов. – М. : АСВ, 2007. – 272 с.
15. *Coşkun, S.B. Advances in computational stability analysis : study guide* / S.B. Coşkun. – Rijeka : InTech, 2012. – 132 p.
16. *Мальков, В. М. Механика многослойных эластомерных конструкций* / В. М. Мальков. СПб. : Изд-во С. - Петербургского университета, 1998. – 320 с.
17. *Winterstetter, T. Stability of circular cylindrical steel shells under combined loading* / T. Winterstetter, H. Schmidt // *Thin-Walled Structures*. – Vol. 40. – 2002. – P. 893–909.
18. *Yoo, Chai H. Stability of structures : principles and applications* / Chai H. Yoo, Sung C. Lee. – Elsevier Academic Press, 2011. – 529 p.
19. *Yang, B. Stress, strain, and structural dynamics : an interactive handbook of formulas, solutions, and MATLAB toolboxes* / Bingen Yang. – Elsevier Academic Press, 2005. – 960 p.

*Прядко Ю.Н., Танасогло А.В., Гаранжа И.М.*

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛАСТОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОСЕТЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

В статье предложен новый тип изолятора, обладающий одновременно изолирующими и демпфирующими свойствами для повышения эксплуатационной надежности конструкций воздушных линий (ВЛ). Для оценки эффективности применения новой конструкции изолятора выполнены лабораторные испытания модели изолятора с различными типами эластомерных прокладок, отличающихся маркой резины и типом армирования. Эксперимент состоял из двух этапов: на первом этапе объект исследования подвергался воздействию циклической вибрационной нагрузки, на втором – действию импульсивной нагрузки. Результаты исследований показали, что наиболее эффективными являются эластомерные прокладки с минимальными жесткостными характеристиками без армирования. Использование изоляторов с подобными демпферами позволяет уменьшить первый максимальный импульс на опору в среднем на 20% и снизить частотные и амплитудные характеристики системы. На основании этого разработан новый тип армирования эластомера стальными листовыми элементами в форме усеченного конуса.

**Ключевые слова:** демпфер, эластомерная прокладка, гирлянда изоляторов, решетчатая опора, воздушная линия электропередачи.

*Прядко Ю.М., Танасогло А.В., Гаранжа И.М.*

### **ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛАСТОМЕРНИХ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ СТАБІЛІЗАЦІЇ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОМЕРЕЖЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ**

У статті запропоновано новий тип ізолятора, що має одночасно ізолюючі та демпфуючі властивості для підвищення експлуатаційної надійності конструкцій повітряних ліній (ПЛ). Для оцінки ефективності застосування нової конструкції ізолятора виконані лабораторні випробування моделі ізолятора з різними типами еластомерних прокладок, що відрізняються маркою та типом армування. Експеримент складався із двох етапів: на першому етапі об'єкт дослідження піддавався впливу циклічного вібраційного навантаження, на другому – дії імпульсивного навантаження. Результати досліджень показали, що найбільш ефективними є еластомерні прокладки з мінімальними жорсткісними характеристиками без армування. Використання ізоляторів з подібними демпферами дозволяє зменшити перший максимальний імпульс на опору в середньому на 20% і знизити частотні та амплітудні характеристики системи. На підставі цього розроблений новий тип армування еластомеру сталевими листовими елементами у формі усіченого конуса.

**Ключові слова:** демпфер, еластомерна прокладка, гірлянда ізоляторів, ґратчаста опора, повітряна лінія електропередачі.

UDC 624.014:621.315.1

*Priadko I., Tanasoglo A., Garanzha I. Experimental researches of elastomeric materials to stabilize the oscillation of power grid structures // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2015. – Issue. 95. – P. 145 – 158.*

*A new type of insulator, has both insulating and damping properties to improve the operational reliability of overhead power lines' structures (OHPL) is described. A new type of elastomer reinforcing with steel sheet elements in the form of a truncated cone was developed.*

Table 0. Fig. 15. Ref. 19

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри «Теоретична механіка», ПРЯДКО Юрій Миколайович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПРЯДКУ Юрію Миколайовичу.

**Адреса домашня:** 02091 Україна, м. Київ, Харківське шосе 172а, кв. 22, ПРЯДКУ Юрію Миколайовичу.

**Роб. тел.** +38(044) 245-48-29;

**мобільний тел.:** +38(095) 420-89-82;

**дом. тел.:**

**E-mail:** y.n.pryadko@gmail.com

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри «Металеві конструкції», ТАНАСОГЛО Антон Володимирович.

**Адреса робоча:** 84313, Україна, м. Краматорськ, вул. Шкадінова 72, Донбаська національна академія будівництва і архітектури, ТАНАСОГЛО Антону Володимировичу.

**Адреса домашня:** 84333 Україна, м. Краматорськ, вул. Лазо 16, кв. 12, ТАНАСОГЛО Антону Володимировичу.

**Роб. тел.** +38(0626) 41-76-99;

**мобільний тел.:** +38(066) 051-92-15;

**дом. тел.:**

**E-mail:** a.v.tan@mail.ru

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри «Металеві конструкції», ГАРАНЖА Ігор Михайлович.

**Адреса робоча:** 84313, Україна, м. Краматорськ, вул. Шкадінова 72, Донбаська національна академія будівництва і архітектури, ГАРАНЖА Ігору Михайловичу.

**Адреса домашня:** 84333 Україна, м. Краматорськ, вул. Лазо 16, кв. 24, ГАРАНЖА Ігору Михайловичу.

**Роб. тел.** +38(0626) 41-76-99;

**мобільний тел.:** +38(095) 479-46-72;

**дом. тел.:**

**E-mail:** garigo1984@gmail.com

УДК 539.3

## ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

*Присвячується професору Є.С. Дехтярюку*

**В.А. Баженов<sup>1</sup>**

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки

**О.О. Лук'яненко<sup>1</sup>**

кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник

**Ю.В. Ворона<sup>1</sup>**

кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки

**О.В. Костіна<sup>1</sup>**

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури*

Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем при періодичних та стохастичних навантаженнях досліджена на основі редукованих дискретних математичних моделей. Редуковані матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості отримані за допомогою процедур сучасного програмного комплексу скінченно-елементного аналізу та створених авторами програм. Розв'язана задача динамічної стійкості періодичних параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою при головному та комбінованому резонансах. Оцінено вплив стаціонарного стохастичного параметричного навантаження на динамічну поведінку та стійкість пологої тонкостінної оболонки.

**Ключові слова:** параметричний резонанс, область нестійкості, метод скінченних елементів, редуковані матриці

**Вступ.** Серед динамічних задач механіки значне місце займають задачі про динамічну стійкість параметричних коливань пружних систем [1-17]. Першим кроком до їх розв'язання є створення редукованих дискретних математичних моделей, які дозволять отримати достовірну інформацію про динамічну поведінку та стійкість параметричних коливань систем. За допомогою аналітичних методів розв'язання таких задач є складним і містить деякі припущення, тому частіше застосовуються чисельні методи, які реалізовані в сучасних обчислювальних комплексах.

В статті представлена чисельна методика побудови редукованих дискретних моделей динамічної стійкості параметричних коливань пружних систем із застосуванням програмного комплексу скінченно-елементного аналізу NASTRAN [18]. Для отримання редукованих матриць мас, жорсткості, геометричної жорсткості та демпфірування

застосовані обчислювальні процедури програмного комплексу та спеціально розроблені авторами програми, які працюють з текстовим файлом комплексу. Виявлена особливість редукування рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем при параметричному навантаженні. Сформульована задача побудови дискретної моделі стохастичної стійкості параметричних коливань пружних систем відносно моментних функцій другого порядку.

Чисельна методика застосована авторами при дослідженні динамічної стійкості параметричних коливань балки Ейлера [9], плоскої статично невизначеної рами [16], плоских ферм різної конфігурації [10], високої балки-стілки [10], двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою [11], довгої гнучкої циліндричної оболонки [12] та пологої тонкостінної оболонки [1, 2]. В статті наведені результати дослідження динамічної стійкості періодичних параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою. Визначені області динамічної нестійкості плоскої форми згину балки при головному та комбінованому резонансах. Оцінено вплив періодичної складової параметричного навантаження на динамічну поведінку та стійкість гофрованої балки. Отримана система диференціальний рівнянь першого марківського наближення для других моментів, яка дозволила дослідити стійкість параметричних коливань пологої квадратної дералномієвої оболонки при дії дельта-корельованого стохастичного навантаження, визначити критичні значення стохастичної складової параметричного впливу при різних частотах схованої періодичності, побудувати області динамічної нестійкості.

**1. Побудова редукованих моделей динамічної стійкості параметричних коливань пружних систем.** Розрахункові математичні моделі дозволяють дослідити стійкість динамічних станів пружних систем, що обумовлені зовнішнім змінним за часом впливом. Вважається, що співвідношення між найменшими власними частотами пружної системи в незбудженому русі та частотами збудження таке, що при знаходженні незбудженого напружено-деформованого стану системи можливо застосовувати квазістатичне наближення і нехтувати переміщеннями в цьому стані. Якщо до рівняння статичної рівноваги системи додати даламберові сили інерції, дисипативні сили та деякі складові незбудженого напружено-деформованого стану, що залежать від часу, отримаємо рівняння динамічної стійкості пружної системи у вигляді

$$\tilde{M}\ddot{\bar{v}}(t) + \tilde{C}\dot{\bar{v}}(t) + \tilde{K}\bar{v}(t) + \alpha\tilde{K}_{G_1}\bar{v}(t) + \beta f(t)\tilde{K}_{G_2}\bar{v}(t) = 0, \quad (1)$$

де  $\tilde{M}$  та  $\tilde{K}$  – інерційний та пружний оператори,  $\tilde{K}_{G_1}$  та  $\tilde{K}_{G_2}$  – складові оператора параметричних сил в рівнянні квазістатичної рівноваги,  $\tilde{C}$  –



оператор, що враховує дисипативні сили. Область визначення розв'язків  $v(\bar{x}, t)$  рівняння (1) збігається з областю визначення оператора  $\tilde{K}$ . Оператори  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{K}_{G_1}$  та  $\tilde{K}_{G_2}$  – позитивно визначенні. Рівняння (1) записано для випадку, коли параметричні сили задані з точністю до двох множників, один з яких  $\alpha$  характеризує сталу складову зовнішнього впливу, а другий  $\beta$  – складову, що змінюється по часу за законом  $f(t)$ . Рівняння (1) представляють собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, які доповненні відповідними граничними умовами. Незбудженому стану відповідає тривіальний розв'язок рівняння (1). Проблема динамічної стійкості формулюється як задача визначення області значень коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$  та параметрів, що характеризують функцію  $f(t)$ , при яких тривіальний розв'язок рівняння є нестійким.

При проведенні прикладних розрахунків виконується перехід від операторного рівняння (1) до дискретної динамічної моделі. Для цього частіше застосовується метод дискретних елементів або метод скінчених різниць. Дискретна динамічна модель записується у вигляді звичайних диференціальних рівнянь

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + C\dot{\bar{u}}(t) + K\bar{u}(t) + \alpha K_{G_1}\bar{u}(t) + \beta f(t)K_{G_2}\bar{u}(t) = 0, \quad (2)$$

де  $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$  – вектор вузлових переміщень,  $M$ ,  $K$ ,  $K_{G_1}$  та  $K_{G_2}$  – позитивно визначені матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно,  $C$  – матриця демпфірування.

Рівняння (2) формулює задачу динамічної стійкості для систем із скінченим числом ступенів свободи. Це класична задача і в теперішній час існує багато підходів для її розв'язання, коли  $f(t)$  є детерміністичною періодичною функцією [4, 6, 8, 17], а коли  $f(t)$  є стаціонарний випадковий процес [5, 6, 8, 14]. Однак при розгляданні реальних об'єктів для адекватного описання його пружних властивостей необхідно будувати дискретні моделі (2) великого розміру. Пряме застосування таких моделей пов'язано з великими обчислювальними труднощами. Необхідно виконати редукцію вихідної дискретної моделі, при цьому суттєво враховуються характеристики параметричного впливу.

Для побудови редукованих моделей можна застосувати метод узагальнених координат. Нехай  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m$  достатньо представлена система лінійно-незалежних векторів у просторі  $E_n$ . Нетривіальний розв'язок системи (2) можна апроксимувати виразом

$$\bar{u}(t) = V\bar{y}(t), \quad (3)$$

де матриця  $V$  розмірністю  $n \times m$  визначається системою базисних векторів  $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^m$ :

$$V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m), \quad (4)$$

$\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$  – вектор узагальнених координат. Виходячи з (2) та (3) відносно компонент вектора  $\bar{y}(t)$  записується система  $m$  звичайних диференціальних рівнянь

$$V^T M V \ddot{\bar{y}}(t) + V^T C V \dot{\bar{y}}(t) + V^T K V \bar{y}(t) + \alpha V^T K_{G_1} V \bar{y}(t) + \beta f(t) V^T K_{G_2} V \bar{y}(t) = 0. \quad (5)$$

Система (5) записується у вигляді

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + \alpha K_{G_1}^* \bar{y}(t) + \beta f(t) K_{G_2}^* \bar{y}(t) = 0, \quad (6)$$

де редуковані матриці мас  $M^*$ , демпфірування  $C^*$ , жорсткості  $K^*$ , геометричної жорсткості  $K_{G_1}^*$  та  $K_{G_2}^*$  розмірністю  $m \times m$  представляються відповідно виразами:

$$M^* = V^T M V, \quad (7)$$

$$C^* = V^T C V, \quad (8)$$

$$K^* = V^T K V, \quad (9)$$

$$K_{G_1}^* = V^T K_{G_1} V, \quad (10)$$

$$K_{G_2}^* = V^T K_{G_2} V. \quad (11)$$

При побудові редукованих моделей  $m$  береться значно менше за  $n$  ( $m \ll n$ ), так що і для складних об'єктів дослідження динамічної стійкості може бути виконано. Однак, завжди залишається принциповим питання про адекватність моделі (6). Це питання вирішується з одного боку дослідженням внутрішньої збіжності результатів при збільшенні  $m$ , а з другого боку, застосуванням при редукції для порівняння інших базисних векторів.

В даній роботі розглядаються питання формування редукованих моделей виду (6) за допомогою сучасних обчислювальних комплексів. При цьому головні обчислювальні проблеми пов'язані з визначенням редукованих матриць. Для цього треба вміти обчислювальними процедурами відповідного обчислювального комплексу формувати матриці  $MV, CV, KV, K_{G_1}V, K_{G_2}V$ ,  $j$ -ті стовпці яких представляють собою відповідно вектори  $M\bar{v}_j, C\bar{v}_j, K\bar{v}_j, K_{G_1}\bar{v}_j, K_{G_2}\bar{v}_j$ , де ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Однак, в стандартних обчислювальних комплексах обчислювальних

процедур для визначення всіх цих векторів, як правило, нема. Є процедура для визначення реакції системи на задане поле переміщень  $\bar{v}$ , тобто для обчислення вектора  $K\bar{v}$ , де  $K$  - матриця жорсткості задачі, яка розглядається. Застосовуючи цю процедуру можна визначити вектори  $M\bar{v}, K_{G_1}\bar{v}, K_{G_2}\bar{v}$ , а при деяких умовах структуру матриці  $C$  та вектора  $C\bar{v}$ . Для цього крім вказаної вище процедури використовуються процедури аналізу вільних коливань та процедури розв'язання задачі стійкості.

Спочатку представляється алгоритм обчислення для будь-якого поля переміщень  $\bar{v}$  вектора  $M\bar{v}$ .

Для розглядуваної системи формулюється задача про визначення частот та форм власних коливань

$$(K - \omega^2 M)\bar{\varphi} = 0. \quad (12)$$

Нехай  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) – вектор частот власних коливань дискретної моделі,  $\bar{\varphi}_k = (\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \dots, \varphi_{nk})^T$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) – система векторів власних форм коливань. Система векторів  $\{\bar{\varphi}_k\}$  ортогональна, тобто

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j^T M \bar{\varphi}_i &= 0, \\ \bar{\varphi}_j^T K \bar{\varphi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j).$$

За допомогою підмножини власних форм коливань  $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$  можливо наближено представити поле переміщень  $\bar{v}$  у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i \bar{\varphi}_i. \quad (13)$$

В силу ортогональності векторів  $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$

$$a_i = \frac{\bar{\varphi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\varphi}_i^T K \bar{\varphi}_i}. \quad (14)$$

Внаслідок (12)

$$M \bar{\varphi}_i = \frac{1}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (15)$$

Тоді враховуючи (14) можна записати

$$M \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i M \bar{\varphi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (16)$$

Таким чином, виходячи із процедури обчислення  $K \bar{\varphi}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m_1$ ), можна підрахувати вектор  $M \bar{v}$ .

Аналогічно будується алгоритм обчислення векторів  $K_{G_1} \bar{v}$  та  $K_{G_2} \bar{v}$  тільки замість процедури аналізу власних коливань застосовується процедура розв'язку задачі статичної стійкості. Спочатку розглядається алгоритм обчислення вектора  $K_{G_1} \bar{v}$ . Для системи формулюється задача стійкості

$$(K + \lambda K_{G_1}) \bar{\psi} = 0. \quad (17)$$

Нехай  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_2}$  – сукупність критичних значень задачі (17),  $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{m_2}$  – відповідні форми втрати стійкості. Внаслідок виконаних вище припущень відносно властивостей матриць  $K$  та  $K_{G_1}$  ці вектори ортогональні в метриці, що визначається матрицею  $K_{G_1}$ , і відповідно матрицею  $K$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_j^T K_{G_1} \bar{\psi}_i &= 0, \\ \bar{\psi}_j^T K \bar{\psi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (18)$$

За допомогою підмножини форм втрати стійкості  $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$  наближено поле переміщень  $\bar{v}$  представляється у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} b_i \bar{\psi}_i. \quad (19)$$

Аналогічно (16) можна записати, що вектор

$$K_{G_1} \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} -\frac{b_i}{\lambda_i} K \bar{\psi}_i, \quad (20)$$

де

$$b_i = \frac{\bar{\psi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\psi}_i^T K \bar{\psi}_i}. \quad (21)$$

Таким чином задача визначення вектора  $K_{G_1} \bar{v}$  вирішена.

Так само визначається вектор  $K_{G_2} \bar{v}$ . Розглядається задача стійкості

$$(K + \mu K_{G_2}) \bar{\chi} = 0. \quad (22)$$

Нехай  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_3}$  – сукупність критичних значень задачі (22),  $\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_{m_3}$  – відповідні ортогональні в метриці матриці жорсткості форми втрати стійкості.

Сукупність векторів  $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$  є базисом в просторі  $E_n$ , який задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_j^T K_{G_2} \bar{\chi}_i &= 0, \\ \bar{\chi}_j^T K \bar{\chi}_i &= 0. \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (23)$$

За допомогою підмножини векторів  $\bar{\chi}_i$  ( $i=1,2,\dots,m_3$ ) аналогічно (13) поле переміщень  $\bar{v}$  можна наближено представити у вигляді

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i \bar{\chi}_i, \quad (24)$$

де

$$c_i = \frac{\bar{\chi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\chi}_i^T K \bar{\chi}_i}. \quad (25)$$

Аналогічно (20) вектор  $K_{G_2} \bar{v}$  можна наближено представити у вигляді

$$K_{G_2} \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_3} c_i K_{G_2} \bar{\chi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_3} -\frac{c_i}{\mu_i} K \bar{\chi}_i. \quad (26)$$

Таким чином для довільного поля переміщень  $\bar{v}$  побудовані алгоритми апроксимації векторів  $M\bar{v}$ ,  $K_{G_1} \bar{v}$  та  $K_{G_2} \bar{v}$  за допомогою процедури обчислення реакції  $K\bar{v}$  та процедури розв'язку відповідних узагальнених задач на власні значення.

Для визначення вектора  $C\bar{v}$  необхідно зробити додаткові припущення про структуру матриці демпфірування  $C$ . Далі матриця демпфірування  $C$  представлена у формі Релея:

$$C = d_0 M + d_1 K, \quad (27)$$

де  $d_0$  та  $d_1$  – довільні коефіцієнти пропорційності. В силу (16)

$$C\bar{v} \cong d_0 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i + d_1 K \bar{v}. \quad (28)$$

Тепер, коли для довільного поля переміщень  $\bar{v}$  сформульовані обчислювальні процедури для апроксимації векторів  $M\bar{v}$ ,  $C\bar{v}$ ,  $K_{G_1} \bar{v}$  та  $K_{G_2} \bar{v}$  можна перейти до побудови розрахункової динамічної моделі (6). Виходячи з представлень (16), (20), (26) та (28), можна записати представлення для матриць  $MV$ ,  $CV$ ,  $KV$ ,  $K_{G_1} V$ ,  $K_{G_2} V$ , що входять до формул (7), (8), (10), (11), та підрахувати апроксимації редукованих матриць мас  $M^*$ , демпфірування  $C^*$ , жорсткості  $K^*$ , геометричної

жорсткості  $K_{G_1}^*$  та  $K_{G_2}^*$ . Приймається, що підмножина векторів  $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ ,  $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$  та  $\{\bar{\chi}_i\}_{i=1}^{m_3}$  мають однакову розмірність  $m$ , тобто  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ . Використовуючи (16), (20), (26), (28) та в силу (14), (21), (25), можна записати

$$MV = K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV, \quad (29)$$

$$CV = d_0 K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV + d_1 KV, \quad (30)$$

$$K_{G_1} V = K\Psi\Lambda^{-1}\Psi^T KV, \quad (31)$$

$$K_{G_2} V = KX\Theta^{-1}X^T KV. \quad (32)$$

Тут матриці  $\Phi, \Psi$  та  $X$  розмірністю  $n \times m$  визначаються співвідношеннями

$$\Phi = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m), \quad (33)$$

$$\Psi = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_m), \quad (34)$$

$$X = (\bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \dots, \bar{\chi}_m), \quad (35)$$

а діагональні матриці  $\Omega^{-1}, \Lambda^{-1}, \Theta^{-1}$  – співвідношеннями

$$\Omega^{-1} = \text{diag}(\omega_1^{-2}, \omega_2^{-2}, \dots, \omega_m^{-2}), \quad (36)$$

$$\Lambda^{-1} = \text{diag}(-\lambda_1^{-1}, -\lambda_2^{-1}, \dots, -\lambda_m^{-1}), \quad (37)$$

$$\Theta^{-1} = \text{diag}(-\mu_1^{-1}, -\mu_2^{-1}, \dots, -\mu_m^{-1}). \quad (38)$$

Редуковані матриці мас  $M^*$ , демпфірування  $C^*$ , жорсткості  $K^*$ , геометричної жорсткості  $K_{G_1}^*$  та  $K_{G_2}^*$  обчислюються за формулами

$$M^* = V^T K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV, \quad (39)$$

$$CV = d_0 V^T K\Phi\Omega^{-1}\Phi^T KV + d_1 V^T KV = d_0 M^* + d_1 K^*, \quad (40)$$

$$K_{G_1}^* = V^T K\Psi\Lambda^{-1}\Psi^T KV, \quad (41)$$

$$K_{G_2}^* = V^T KX\Theta^{-1}X^T KV. \quad (42)$$

Таким чином, співвідношення (9), (39)-(42) дозволяють визначити усі коефіцієнти редукованої моделі (6).

**1.1. Особливість редукування рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем.** Редукція дискретних моделей динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем має особливість, яка викликана видом параметричного впливу. В дискретній моделі (2) матриці мас, жорсткості та геометричної жорсткості повинні бути позитивно визначеними. При дії параметричного навантаження, яке

викликає плоску форму згину системи, ця умова буде виконана, якщо редуковані матриці геометричної жорсткості  $K_{G_1}^*$  та  $K_{G_2}^*$  будуть отримані із застосуванням розв'язку докритичного стану системи. Для цього згідно формули (12) знаходяться форми коливань системи та розв'язується нелінійна задача статки при поетапному навантаженні. В околі докритичного стану виконується згортання нелінійного оператора по базису, що складається з кількох нижніх форм коливань. При цьому в форми коливань вводиться малий параметр, який дає можливість відсікти квадратичну і кубічну складову згорнутого оператора. Різниця між таким згорнутим оператором і згорнутим лінійним оператором дає можливість отримати оператор геометричної жорсткості. Згортання операторів виконується шляхом знаходження векторів реакцій від векторів переміщень, які є формами коливань, і з подальшим скалярними добутками векторів реакцій на вектори переміщень.

Задача динамічної стійкості плоскої форми згину пружної системи має вигляд рівняння (6), в якому  $\bar{y}(t) = \{u_1(t), \gamma_1(t)\}^T$  – вектор узагальнених координат. Базисними є вектори матриці власних форм коливань  $\Phi = \{\bar{\varphi}_k\} = \{\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}\}$ , де  $\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}$  – вектори першої згинальної та першої крутильної форм коливань, які отримані при розв'язанні задачі на власні значення (12). Система векторів  $\{\bar{\varphi}_{1u}, \bar{\varphi}_{1\gamma}\}$  ортогональна. В обчислювальному комплексі матриця власних форм нормована по матриці мас, тому редукована матриця мас  $M^* = E = \text{diag}(1,1)$ .

Редукована матриця жорсткості має вигляд

$$K^* = \text{diag}(\omega_{1u}^2, \omega_{1\gamma}^2), \quad (43)$$

де  $\omega_{1u}$  та  $\omega_{1\gamma}$  – частоти першої згинальної та першої крутильної форм коливань пружної системи.

Нелінійна задача статки формулюється таким чином

$$(K^* + K_G^*)(U + V) = P + R, \quad (44)$$

де  $U$  та  $V$  – матриці вузлових переміщень відповідно від навантаження та форм вільних коливань;  $K^*$  та  $K_G^*$  – редуковані матриці жорсткості та геометричної жорсткості відповідно;  $P$  – матриця вузлових навантажень;  $R$  – матриця реакцій пружної системи на задане поле переміщень.

У виразі (44)

$$K^* \cdot U = P, \quad K_G^* \cdot U = 0. \quad (45)$$

Представимо  $R = R_K + R_{K_G}$ , де  $R_K$  – матриця реакцій пружної системи на задане поле переміщень, що отримана при розв’язанні лінійної задачі статички

$$K^* \cdot V = R_K. \quad (46)$$

Нелінійність має місце при розв’язанні задачі

$$\lambda K_G^* \cdot V + \lambda^2 S \cdot V \cdot V + \lambda^3 T \cdot V \cdot V \cdot V = \lambda R_{K_G}, \quad (47)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт, що дозволяє зменшувати поле переміщень за модулем,  $S$  – квадратичний нелінійний оператор,  $T$  – кубічний нелінійний оператор, знак « $\cdot$ » означає процедуру згортання операторів.

Квадратичні та кубічні оператори є малими величинами, тому вираз можна переписати у вигляді

$$\lambda K_G^* \cdot V = \lambda R_{K_G} \text{ або } K_G^* \cdot V = R_{K_G}. \quad (48)$$

При формулюванні задачі необхідно виконати умову ортогональності матриць  $R$  та  $P$

$$R^T \cdot P = 0. \quad (49)$$

Для цього вводяться нові граничні умови, які дозволяють визначити реакцію пружної системи по тим степеням свободи, які є ортогональними дії навантаження.

Процедура нелінійної задачі статички з поетапним навантаженням дозволяє визначити матрицю реакцій системи  $R$ , яка може бути представлена у вигляді

$$(K^* + K_G^*) \cdot V = R. \quad (50)$$

Тоді редукована редукована матриця геометричної жорсткості обчислюється за формулою

$$(K^* + K_G^*) - (K^*) = K_G^* \quad (51)$$

і представляється у вигляді

$$K_G^* = \begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Всі процедури виконуються автоматично в спеціально створеній програмі, яка працює з текстовим файлом обчислювального комплексу [18].

**1.2. Формування редукованих моделей стохастичних параметричних коливань.** Поведінка стохастичних систем описується за допомогою диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, зміна значень яких має випадковий характер. Стійкість таких систем може розглядатися



як стійкість за ймовірністю, стійкість у середньому або по сукупності моментних функцій різних порядків [5, 14]. Типовою проблемою для цих задач є редукція нескінченної системи до скінченної. Для цього використовується функціональний або класичний підхід. Розв'язання проблеми за допомогою аналітичних методів є складним і містить деякі припущення, тому частіше застосовуються чисельні методи.

В роботі побудова редукованих моделей стохастичних параметричних коливань пружних систем виконується за допомогою розробленої авторами чисельної методики (див. п. 1) і асимптотичного методу. Цей метод заснований на розкладанні статистичних характеристик розв'язків динамічної задачі за малим параметром, який є відношенням часу кореляції випадкового впливу до характерних часових масштабів задачі. Проблема стійкості зводиться до дослідження стійкості тривіальних розв'язків диференціальних рівнянь, змінні коефіцієнти яких являють собою випадкові функції. Задача стійкості формулюється як задача стійкості відносно моментних функцій другого порядку, для отримання яких застосовується функціональний підхід [5, 14]. За рахунок розщеплення кореляції зовнішнього впливу на пружну систему з відповідними динамічними станами отримана система лінійних автономних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Редукована дискретна модель стохастичних параметричних коливань пружної системи записується у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + C^* \dot{\bar{y}}(t) + K^* \bar{y}(t) + z(t)K_G^* \bar{y}(t) = 0, \quad (53)$$

де  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $K^*$  та  $K_G^*$  – редуковані матриці мас, демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості відповідно, що обчислюються за методикою (п. 1),  $\bar{y}(t)$  –  $n$  – вимірний вектор вузлових переміщень,  $z(t)$  – випадковий процес, який характеризує інтенсивність параметричного впливу.

Якщо ввести  $2m$  – вимірний вектор фазових змінних  $\bar{\zeta}(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_{2m}(t))^T = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_m(t))^T$ , тоді систему (53) можна переписати в нормальній формі

$$\frac{d}{dt} \bar{\zeta}(t) = A \bar{\zeta}(t) + z(t)B \bar{\zeta}(t). \quad (54)$$

Матриці  $A$  і  $B$  обчислюються за формулами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -(M^*)^{-1} K^* & -(M^*)^{-1} C^* \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(M^*)^{-1} K_G^* & 0 \end{bmatrix},$$

де  $E$  – одинична матриця розмірністю  $m \times m$ .

Для системи (3) розглядається задача Коші з початковими умовами  $\vec{\zeta}(0) = \vec{\zeta}_0$ , де вектор  $\vec{\zeta}_0 = (\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{02m})^T$  вважається детермінованим.

Питання про втрату динамічної стійкості оболонки еквівалентне питанню про стійкість тривіальних розв'язків рівнянь (54). При усередненні за ансамблем реалізацій системи (54) рівняння набувають вигляду

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\zeta}(t) \rangle = A \langle \vec{\zeta}(t) \rangle + B \langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle, \quad \langle \vec{\zeta}(0) \rangle = \vec{\zeta}_0. \quad (55)$$

Системи (55) незамкнута відносно змінних  $\langle \vec{\zeta}(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$ , бо містить нові невідомі функції  $\langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle = (\langle z(t) \zeta_1(t) \rangle, \langle z(t) \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle z(t) \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$ , які є кореляціями в момент часу  $t$  випадкового процесу  $z(t)$  з рішенням  $\vec{\zeta}(t)$  системи (54), компоненти якого є функціоналами від випадкового процесу  $z(t)$  в інтервалі  $[0, t]$ . При розгляданні системи (55) застосовується підхід розщеплення середнього добутку двох функціоналів. Якщо  $R[z(\tau)]$  – деякий функціонал від Гаусового центрованого процесу, то для середнього добутку  $\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle$  має місце формула Фурутцу-Новікова [4]

$$\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle. \quad (56)$$

Тут  $K(t)$  – кореляційна функція процесу  $z(t)$ ,  $\left\langle \frac{\delta R[z]}{\delta z(\tau)} \right\rangle$  – середнє варіаційної похідної від функціонала  $R[z]$  по  $z$  в точці  $\tau$ .

Для середнього  $\langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle$  формула (56) запишеться у вигляді

$$\langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta \vec{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m. \quad (57)$$

З урахуванням (57) система (55) набуває виду:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{\zeta}(t) \rangle = A \langle \vec{\zeta}(t) \rangle + B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta \vec{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \right\rangle, \quad \langle \vec{\zeta}(0) \rangle = \vec{\zeta}_0. \quad (58)$$

За допомогою розщеплення функціоналів зроблено перехід від незамкнutoї системи диференціальних рівнянь (55) відносно вектор-функцій  $\langle \vec{\zeta}(t) \rangle$  та  $\langle z(t) \vec{\zeta}(t) \rangle$  до незамкнutoї системи інтегрально-

диференціальних рівнянь відносно вектор-функцій  $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle$  та  $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle$ . Для

вектор-функцій  $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle$  записується нова система інтегрально-диференціальних рівнянь. Вар'юючи (54) по  $z(\tau)$  ( $\tau < t$ ) маємо систему

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + z(t) B \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \quad (59)$$

з початковими умовами  $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(\tau)}{\delta z(\tau)} \rangle = B \bar{\zeta}(\tau)$ ,  $\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = 0$ .

Після усереднення (59) отримуємо систему інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + B \langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle. \quad (60)$$

з початковими умовами

$$\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(\tau)}{\delta z(\tau)} \rangle = B \langle \bar{\zeta}(\tau) \rangle, \quad \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = 0 \quad (t < \tau). \quad (61)$$

Система рівнянь (58), (60) та (61) незамкнута відносно змінних  $\langle \bar{\zeta}(t) \rangle = (\langle \zeta_1(t) \rangle, \langle \zeta_2(t) \rangle, \dots, \langle \zeta_{2m}(t) \rangle)^T$  та

$\langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \left( \langle \frac{\delta \zeta_1(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \langle \frac{\delta \zeta_2(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \dots, \langle \frac{\delta \zeta_{2m}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle \right)^T$ . Вона містить нові невідомі

функції

$$\langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \left( \langle z(t) \frac{\delta \zeta_1(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \langle z(t) \frac{\delta \zeta_2(t)}{\delta z(\tau)} \rangle, \dots, \langle z(t) \frac{\delta \zeta_{2m}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle \right)^T.$$

Знову застосуємо формулу Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t) \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = \int_0^t d\tau_1 K(t - \tau_1) \langle \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, 2m), \quad (62)$$

де  $\langle \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle$  – друга варіаційна похідна функціонала  $\bar{\zeta}[z(\tau)]$  по  $z(\tau)$  в момент часу ( $\tau < t$ ) ( $\tau_1 < t$ ). Аналогічно отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle = A \langle \frac{\delta \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau)} \rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t - \tau_1) \langle z(t) \frac{\delta^2 \bar{\zeta}(t)}{\delta z(\tau) \delta z(\tau_1)} \rangle. \quad (63)$$

Якщо продовжити цей процес, то можна отримати нескінченну послідовність рівнянь відносно моментних функцій другого порядку. В силу (54) для матриці  $(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))$  записується матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)) = (A + z(t)B)(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)) + (\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))(A^T + z(t)B^T) \quad (64)$$

з початковими умовами  $(\bar{\zeta}(0)\bar{\zeta}^T(0)) = (\bar{\zeta}_0\bar{\zeta}_0^T)$ .

При усередненні за ансамблем реалізацій системи (64) рівняння набувають виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle &= A\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle + B\langle z(t)\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle + \\ &+ \langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle A^T + \langle z(t)\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle B^T \end{aligned} \quad (65)$$

з початковими умовами  $\langle\bar{\zeta}(0)\bar{\zeta}^T(0)\rangle = (\bar{\zeta}_0\bar{\zeta}_0^T)$ . Система незамкнута відносно змінних  $\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle = (\langle\zeta_1(t)\zeta_1^T(t)\rangle, \langle\zeta_2(t)\zeta_2^T(t)\rangle, \dots, \langle\zeta_{2m}(t)\zeta_{2m}^T(t)\rangle)^T$ , бо містить нові функції  $\langle z(t)\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle = (\langle z(t)\zeta_1(t)\zeta_1^T(t)\rangle, \langle z(t)\zeta_2(t)\zeta_2^T(t)\rangle, \dots, \langle z(t)\zeta_{2m}(t)\zeta_{2m}^T(t)\rangle)^T$ .

Застосуємо підхід розщеплення добутку двох функціоналів за формулою Фурутцу-Новікова

$$\langle z(t)\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta\bar{x}(\tau)} \right\rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m. \quad (66)$$

Система (65) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle &= A\langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle + \langle\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t)\rangle A^T + \\ &+ B \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta\bar{x}(\tau)} \right\rangle + \int_0^t d\tau K(t-\tau) \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta\bar{x}(\tau)} \right\rangle B^T. \end{aligned} \quad (67)$$

Для вектор-функції  $\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))$  запишеться нова система інтегрально-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta\bar{x}(\tau)} &= A \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta\bar{x}(\tau)} + z(t)B \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta\bar{x}(\tau)} + \\ &+ \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta\bar{x}(\tau)} A^T + z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta\bar{x}(\tau)} B^T. \end{aligned} \quad (68)$$

При усередненні за ансамблем реалізацій системи (68) рівняння набувають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle &= A \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle A^T + \langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle B^T \end{aligned} \quad (69)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle &= B \langle \bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t) \rangle + \langle \bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T \\ \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle &= 0, \quad t < \tau. \end{aligned} \quad (70)$$

Знову застосуємо формулу Фуругцу-Новікова

$$\langle z(t) \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \rangle = \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle, \quad (71)$$

де  $\left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle$  – друга варіаційна похідна функціонала.

В результаті наведеного вище підходу система (54) набуває вигляду зв'язаної нескінченної послідовності рівнянь для моментних функцій другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle &= A \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + B \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle A^T + \int_0^t d\tau_1 K(t-\tau_1) \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle B^T \end{aligned} \quad (72)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(\tau_1)\bar{\zeta}^T(\tau_1))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle &= B \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)} \right\rangle B^T \\ \left\langle \frac{\delta^2(\bar{\zeta}(t)\bar{\zeta}^T(t))}{\delta z(\tau)\delta z(\tau_1)} \right\rangle &= 0, \quad t < \tau. \end{aligned} \quad (73)$$

Питання про стохастичну стійкість системи (54) зводиться до дослідження стійкості тривіальних рішень інтегрально-диференціальних рівнянь (72). Для подальших досліджень необхідно виконати редукцію нескінченної системи до скінченної системи. Для цього випадковий процес приймаємо дельта-корельованим з кореляційною функцією

$$K(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\alpha\tau} \left( \cos \theta_\alpha \tau + \frac{\alpha}{\theta_\alpha} \sin \theta_\alpha \tau \right), \quad (74)$$

і скінченним часом кореляції

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \int K(\tau) d\tau = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2}, \quad (75)$$

де  $\sigma_0^2 = D$  – дисперсія стохастичного впливу;  $\alpha$  – параметр кореляції,  $\theta_\alpha$  – частота схованої періодичності.

Матричне диференціальне рівняння для моментів другого порядку (72) становиться замкнутим, а інші рівняння нескінченної системи стають зайвими. Отримана система рівнянь представляє собою рівняння першого марківського наближення для других моментів

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle &= (A + DB^2) \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle + \\ &+ \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle (A + DB^2)^T + 2\sqrt{DB} \langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}^T(t) \rangle B^T, \end{aligned} \quad (76)$$

з початковими умовами  $\langle \bar{\zeta}(0) \bar{\zeta}^T(0) \rangle = \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_0 & \bar{\zeta}_0^T \end{pmatrix}$ .

Рівняння (76) дає змогу дослідити динамічну стійкість стохастичних параметричних коливань пружних систем, визначити області нестійкості і оцінити вплив стохастичної складової параметричного навантаження на поведінку системи.

## 2. Дослідження динамічної стійкості параметричних коливань пружних систем

**2.1. Дослідження головних та комбінаційних параметричних резонансів двотаврової балки з гофрованою синусоїдальною стінкою.** Двотаврова гофрована балка розглядається як система, що складається з двох поясів, гофрованої стінки та граничних ребер жорсткості. Балка має такі геометричні характеристики:  $l=1000$  мм,  $h=200$  мм,  $b=80$  мм,  $\delta_n=4$  мм,  $\delta_{cm}=1,5$  мм. Пружні характеристики відповідають матеріалу сталь:  $E = 2,06E^{11}$  Па;  $\mu = 0,3$ ;  $G = 0,792E^{11}$  Па. Розрахункова скінченно-елементна модель балки (рис. 1,а), що побудована за допомогою обчислювального комплексу [18], містить 7227 вузлів та 8020 елементів. Стінка та полки моделюються пластинчатими елементами, граничні ребра жорсткості – балочними. Поперечний переріз балки та геометричні параметри гофра (глибина  $f$  та довжина  $a$ ) наведені на рис. 1,б.

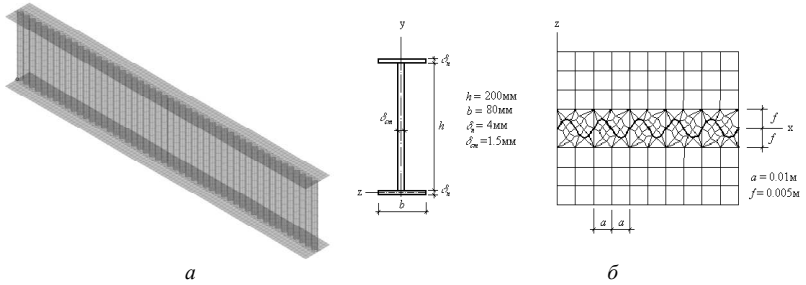


Рис. 1. Скінченно-елементна модель балки та параметри синусоїдального гофра

На балку діє розподілене періодичне навантаження, що викликає плоску форму згину балки з площини її стінки. Це навантаження є параметричним. Воно прикладається до вузлів, що розташовані посередині стінки балки вздовж її довжини, і дорівнює  $q(t) = q_0 + q_t \cos \theta t$ . Амплітуда статичної складової навантаження приймається рівною  $q_0 = 100 \text{ H}$  на кожен вузол або  $q_0 = 25525 \text{ H}$  на  $1 \text{ м}$  довжини синусоїдальної гофрованої стінки балки.

Для побудови редукованої матриці геометричної жорсткості застосовується процедура розв'язання задачі нелінійної статки при поетапному навантаженні пружної системи. Побудова матриці геометричної жорсткості виконується за допомогою згортання оператора на основі базису, що складається з форм коливань (рис. 2), і знаходження різниці між згорнутими операторами в околі докритичного і ненавантаженого станів (див. п. 1.1).

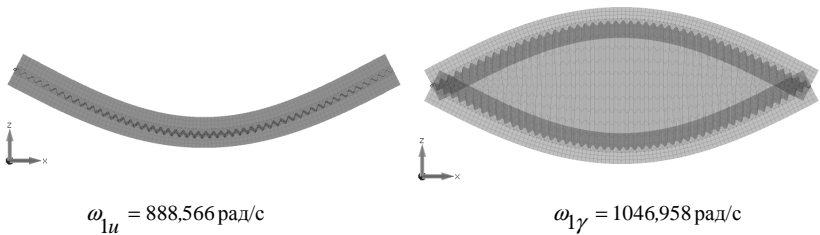


Рис. 2. Перші форми та частоти власних згинальних та крутильних коливань балки

Редукована розрахункова модель динамічної стійкості параметричних коливань балки набуває вигляду

$$\begin{cases} \ddot{u}_k + 888,566^2 [u_k - 2,161982 \times 10^{-6} q(t) \gamma_k] = 0, \\ \ddot{\gamma}_k + 1046,958^2 [\gamma_k - 1,50865 \times 10^{-6} q(t) u_k] = 0. \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (77)$$

Дослідження динамічної стійкості параметричних коливань гофрованої балки при дії розподіленого навантаження полягає у визначенні областей нестійкості при головних та комбінованих параметричних резонансах. Области нестійкості або області збудження – це області, в яких будь яке початкове відхилення буде необмежено збільшуватися з часом, тобто прямолінійна форма балки буде динамічно нестійкою. Ці області мають границі, які відповідають умові, при якій диференціальні рівняння мають періодичні або майже періодичні розв'язки з періодами  $T$  та  $2T$ . Головні резонанси відбуваються при частотах зовнішнього навантаження, що дорівнюють подвоєній частоті згинальних та крутильних власних коливань завантаженої балки. Области динамічної нестійкості параметричних коливань гофрованої балки відповідно при першому і другому головних резонансах (рис. 3, а, б) визначені для різних значень статичної  $q_0$  та динамічної  $q_t$  складових розподіленого навантаження.

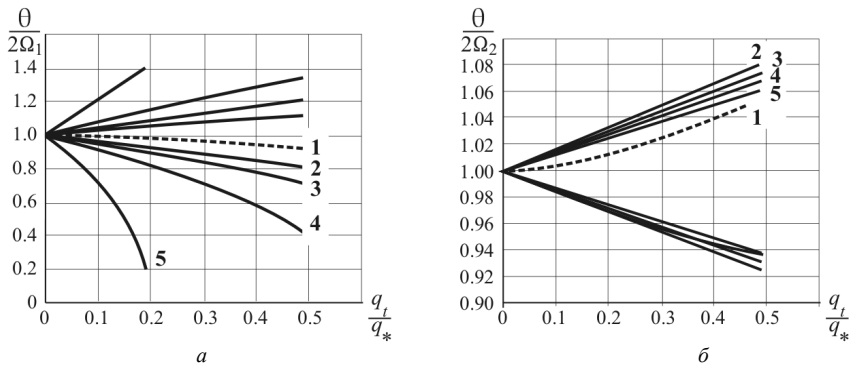


Рис. 3 Области нестійкості гофрованої балки при першому і другому головних резонансах: 1)  $q_0=0$ ; 2)  $q_0=0.3q_*$ ; 3)  $q_0=0.5q_*$ ; 4)  $q_0=0.7q_*$ ; 5)  $q_0=0.9q_*$

Критичне значення статичної складової параметричного навантаження визначається чисельно і аналітично  $q_* = 365510 \text{ H}$ . Власні частоти завантаженої балки та границі областей динамічної нестійкості без урахування демпфірування визначені за допомогою формул Болотіна та Якубовича [4, 17].

Частоти власних коливань завантаженої балки обчислені згідно виразу



$$\Omega_{1(2)} = \frac{\omega_{1u(1\gamma)}}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{1 + \lambda - \sqrt{(1-\lambda)^2 + 4\lambda \frac{q_0^2}{q_*^2}}}, \quad (78)$$

де  $\lambda = \frac{\omega_{1\gamma}}{\omega_{1u}} = 1,178$ . Отримані частоти співпадають зі значеннями, які

визначені чисельно за допомогою обчислювального комплексу [18].

Границі областей нестійкості параметричних коливань гофрованої балки при першому та другому головному резонансах обчислені за формулою

$$\theta_{1(2)}^{(1,2)} = \frac{2\omega_{1u(1\gamma)}}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{1 + \lambda - \sqrt{(1-\lambda)^2 + 4\lambda \left(\frac{q_0 \pm \frac{1}{2}q_t}{q_*}\right)^2}}. \quad (79)$$

Видно, що ширина області нестійкості при першому головному резонансі збільшується при збільшенні як статичної так і динамічної складової. Для другого головного параметричного резонансу ширина області нестійкості залежить лише від динамічної складової навантаження. Область нестійкості при першому головному резонансі більше за область другого головного резонансу.

Області нестійкості параметричних коливань балки при комбінованому резонансі представлені на рис. 4.

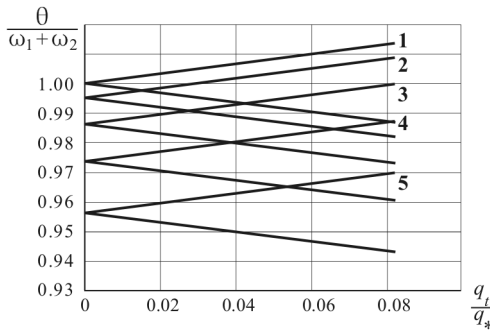


Рис. 4 Області нестійкості гофрованої балки при комбінованому резонансі:

1)  $q_0=0$ ; 2)  $q_0=0.3q_*$ ; 3)  $q_0=0.5q_*$ ; 4)  $q_0=0.7q_*$ ; 5)  $q_0=0.9q_*$

Тут  $\omega_1 = \omega_{1u}$ ,  $\omega_2 = \omega_{1\gamma}$ .

Границі області нестійкості обчислені за формулою

$$\theta^{(1,2)} = \omega_{1u} + \omega_{1\gamma} \pm \frac{q_t}{2\sqrt{\omega_{1u} \cdot \omega_{1\gamma}}} - \frac{\left(q_0^2 + \frac{1}{8}q_t^2\right)}{2(\omega_{1u} + \omega_{1\gamma})\omega_{1u} \cdot \omega_{1\gamma}}. \quad (80)$$

Видно, що при комбінованому резонансі ширина області нестійкості параметричних коливань гофрованої балки для всіх значень статичної складової навантаження однакова. Видно, що частота збудження зменшується і області нестійкості зміщуються вниз при збільшенні статичної складової параметричного навантаження.

**2.2. Динамічна стійкість стохастичних параметричних коливань пологої тонкостінної оболонки.** Для дослідження динамічної стійкості стохастичних параметричних коливань дералюмінієвої квадратної пологої тонкостінної оболонки формується редукована модель згідно представленому в п. 1.2 чисельному підходу. Оболонка має наступні вхідні дані: сторона  $a = b = 0,480 \text{ м}$ , товщина  $h = 0,004 \text{ м}$ , модуль пружності  $E = 7,2 \times 10^7 \text{ кПа}$ , питома вага  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ , коефіцієнт Пуасона  $\mu = 0,3$ , прогин в середині і на контурі  $f = 0,096 \text{ м}$ . Поверхня оболонки моделюється у вигляді сукупності трикутних плоских скінченних елементів зі шістьма ступенями вільності в вузлах (рис. 5). Вводяться обмеження згинальних і мембранних переміщень вузлів всіх чотирьох сторін оболонки. На оболонку зі сторони її випуклості діє поверхневе розподілене стохастичне параметричне навантаження  $z(t) = z_0 + \tilde{z}(t)$ , де  $z_0$  – стала складова навантаження;  $\tilde{z}(t)$  – дельта-корельована випадкова складова навантаження з кореляційною функцією (74) і скінченним радіусом кореляції (75).

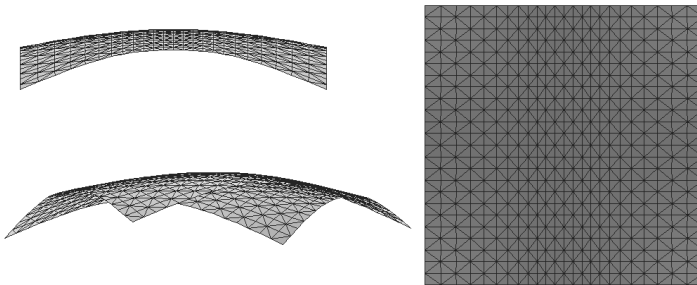
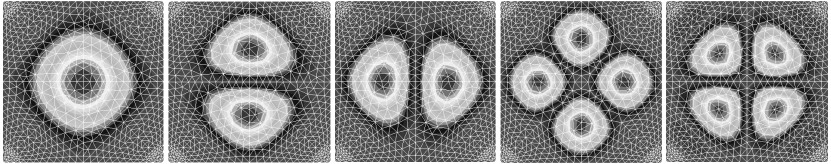


Рис. 5. Скінченно-елементна модель пологої оболонки

Вектори форм власних коливань оболонки  $U = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m)$ , де  $m$  – кількість утриманих форм, в обчислювальному комплексі нормовані по

матриці мас  $M^* = U^T M U = E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ . Форми та частоти власних коливань пологої оболонки визначаються чисельно згідно формули (12) за допомогою метода Ланцоша. На рис. 6 представлені п'ять перших форм власних коливань оболонки.



$\omega_1 = 1243, 4 \text{ рад/с}$     $\omega_2 = 2486, 8 \text{ рад/с}$     $\omega_3 = 2493, 2 \text{ рад/с}$     $\omega_4 = 3906, 2 \text{ рад/с}$     $\omega_5 = 4402, 3 \text{ рад/с}$

Рис. 6. Форми і частоти власних коливань пологої оболонки

Квадрати частот власних коливань оболонки є членами редукованої матриці жорсткості  $K^* = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_m^2)$ . Редукована матриця демпфірування  $C^*$  має вигляд  $C^* = U^T C U = \text{diag}(2\varepsilon_1 \omega_1, 2\varepsilon_2 \omega_2, \dots, 2\varepsilon_m \omega_m)$ , де  $\varepsilon_i$  – коефіцієнт конструкційного демпфірування оболонки.

Для визначення редукованої матриці геометричної жорсткості розв'язується задача статичної стійкості (17). Значення критичної сталої складової поверхневого тиску наведені в таблиці 1. Форми втрати стійкості пологої оболонки співпадають з формами власних коливань (рис. 6).

Таблиця 1

Критичні значення сталої складової поверхневого тиску $\lambda$ , $\kappa \text{Па}$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
155	274	276	429	457	518	637	638	748	754

Редукована матриця геометричної жорсткості має вигляд:

$$K_G^* = \begin{vmatrix} -110727 & 958 & 958 & 288 & 288 \\ -295484 & -1406926 & -1406926 & 536437 & 536437 \\ 204522 & -1031 & -1031 & -517892 & -517892 \\ 124630 & 2622 & 2622 & -2938378 & -2938378 \\ 50131 & 2717 & 2717 & 23776 & 23776 \end{vmatrix}$$

Редуковану модель стохастичної стійкості параметричних коливань оболонки запишемо у вигляді системи незв'язаних рівнянь першого марковського наближення для других моментів (76) у фазових змінних  $\zeta_1(t) = y_1(t)$ ,  $\zeta_2(t) = \dot{y}_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \zeta_1^2(t) \rangle &= 2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle &= \langle \zeta_2^2(t) \rangle - \omega_i^2 \langle \zeta_1^2(t) \rangle - 2\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \zeta_2^2(t) \rangle &= -4\varepsilon_i \omega_i \langle \zeta_2^2(t) \rangle - 2\omega_i^2 \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle + a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 \langle \zeta_2^2(t) \rangle, \end{aligned} \quad (81)$$

з початковими умовами  $\zeta_1(t) = y(t)$ ,  $\zeta_2(t) = \dot{y}(t)$ ,  $\zeta_1(0) = y_0$ ,  $\zeta_2(0) = \dot{y}_0$ .

Коефіцієнти  $a_i = k_{gii}^* / \omega_i^2$  характеризують вплив сталої складової стохастичного параметричного навантаження на жорсткісні характеристики оболонки. Аналіз динамічної стійкості пологої оболонки при стохастичному параметричному навантаженні зводиться до дослідження стійкості рівнянь від моментних функцій другого порядку (82) по кожній формі коливань.

Досліджено вплив статичної складової параметричного навантаження  $z_0$  на частоти власних коливань оболонки (рис. 7). Суцільна лінія відповідає частотам власних коливань навантаженої оболонки, штрихова лінія – ненавантаженої.

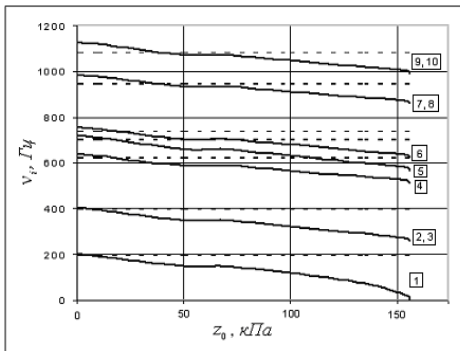


Рис. 7 Частоти власних коливань пологої оболонки

Видно, що при збільшенні  $z_0$  власні частоти навантаженої оболонки зменшуються. Однак, при  $z_0 < 40$  кПа по 4-10 формах коливань оболонка стає більш жорсткою. Перша частота власних коливань оболонки дорівнює нулю при  $z_0 = 155$  кПа, що відповідає втраті стійкості.

Режими параметричних коливань оболонки досліджується за допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Куты

четвертого порядку рівнянь (81). При дії статичної складової стохастичного навантаження  $z_0$  спостерігаються стійкі режими гармонічних та затухаючих коливань оболонки відповідно без урахування та з урахуванням конструкційного демпфірування. При дії стохастичної складової параметричного навантаження  $z_t$  при  $z_0 = 0$  спостерігаються як стійкі (рис. 8,а,в) так і нестійкі (рис. 8,б) режими параметричних коливань оболонки.

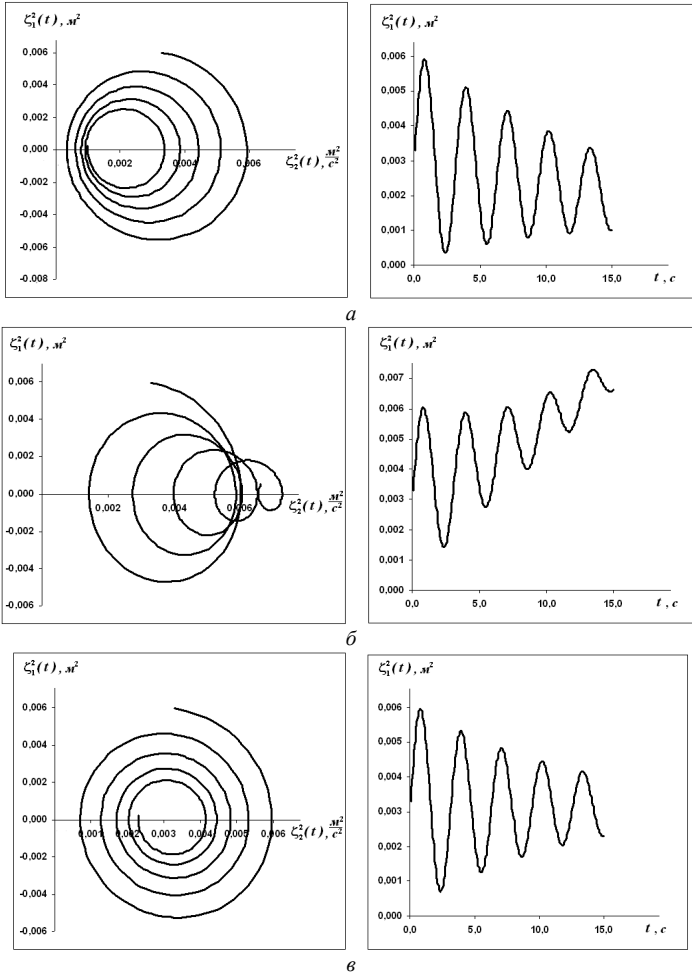


Рис. 8. Динамічні режими коливань оболонки при стохастичному параметричному впливі: а) стійкий; б) нестійкий; в) стійкий режим на границі області стійкості

Якщо переписати систему детерміністичних диференціальних рівнянь (81) у вигляді лінійної автономної системи

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix} = G(t) \begin{Bmatrix} \langle \zeta_1^2(t) \rangle \\ \langle \zeta_1(t) \zeta_2(t) \rangle \\ \langle \zeta_2^2(t) \rangle \end{Bmatrix}, \quad (82)$$

де  $G(t)$  – матриця, коефіцієнти якої є  $\frac{2\pi}{\omega}$  – періодичні функції

$$G(t) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\omega_i^2 & -2\varepsilon_i \omega_i & 1 \\ a_i^2 \omega_i^4 \sigma_0^2 \tau_0 & -2\omega_i^2 & -4\varepsilon_i \omega_i \end{vmatrix}, \quad (83)$$

тоді аналіз стійкості оболонки зводиться до задачі про стійкість тривіальних розв'язків системи (83). За допомогою методу узагальнених показників Хілла розв'язується алгебраїчна задача на власні значення, визначаються характеристичні показники та границі області нестійкості системи (83). Якщо серед характеристичних показників Хілла є хоча б один з додатною дійсною частиною, тривіальний розв'язок системи є нестійким. Границі області нестійкості відповідають значення параметрів, при яких максимальна дійсна частина характеристичних показників дорівнює нулю. На рис. 9,а представлена поведінка характеристичних показників Хілла від впливу стохастичного параметричного навантаження на оболонку при частоті схованої періодичності  $\theta_\alpha = \omega_1$ , параметрі кореляції  $\alpha = \varepsilon_1 \omega_1 = 0,0276 \omega_1$  та радіусі кореляції

$$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \theta_\alpha^2} = \frac{0,0552}{\omega_1}. \text{ Дійсні частини характеристичних показників}$$

показані суцільною лінією, комплексні – штриховою.

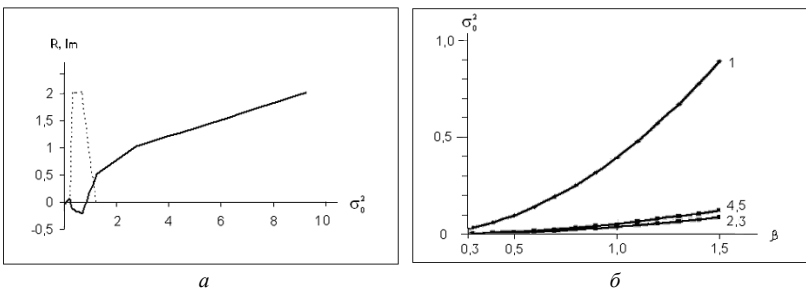


Рис. 9. Вплив стохастичної складової параметричного навантаження на динамічну поведінку оболонки

При нестійкому режиму коливань оболонки додатні дійсні частини характеристичних показників лежать у верхній півплощині. Точки перетину суцільної кривої з віссю координат  $\sigma_0^2$  відповідають критичним значенням стохастичної складової параметричних коливань, які також представлені на рис. 9, б при зміні коефіцієнта  $\beta = \theta_\alpha / \omega_1$ . Зі збільшенням частоти схованої періодичності  $\theta_\alpha$  критичні навантаження зростають. Значення інтенсивності стохастичного навантаження, що лежать вище за криві по кожній формі коливань, належать до областей нестійкості оболонки. Для визначення критичного стохастичного навантаження з урахуванням всіх форм коливань необхідно виконати операцію сумування значень по окремих формах, що отримані для конкретної частоти схованої періодичності.

**Висновок.** Редуковані дискретні моделі динамічної стійкості параметричних коливань пружних систем дають змогу дослідити динамічну поведінку систем в часі, визначити режими коливань, оцінити вплив статичних та динамічних, в тому числі стохастичних, складових навантаження на стійкість параметричних коливань пружних систем.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Лук'янченко О.А., Костина Е.В.* Численное построение редуцированных моделей стохастических параметрических колебаний пологих оболочек // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 51–59.
2. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Костина О.В.* Динамічна поведінка пологої оболонки при стохастичному параметричному навантаженні // Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 31–38.
3. *Баженов В.А., Лук'янченко О.О., Костина О.В., Геращенко О.В.* Вплив навантаження на частоти власних коливань складної оболонкової конструкції // Опір матеріалів та теорія споруд. - К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 49–58.
4. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956 - 600 с.
5. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М., Наука, 1979. - 335 с.
6. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978—Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. 352 с.,ил.*
7. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 880 с.
8. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1982. - 432 с.
9. *Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С.
10. *Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Борисенко В.Г.* Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем. // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2005. – Вип. 77. – С. 65–77.

11. Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О. Визначення областей динамічної нестійкості параметричних коливань гофрованої двотаврової балки//Опір матеріалів та теорія споруд. - К.: КНУБА, 2009. – Вип.83. – С.15-24.
12. Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О. Побудова редукованої моделі параметричних коливань циліндричної оболонки при чистому згині// Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2009. – Вип.84. – С.11-19.
13. Дехтярюк Є.С., Лук'янченко О.О., Отрашевська В.В. Динамічна стійкість пружних систем при комбінованому стохастичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2003. – Вип.72. – С.51 – 59.
14. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения в случайно однородных средах М., Наука, 1980. - 336 с.
15. Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В. Стохастичні параметричні коливання пружних систем з урахуванням їх попередніх станів// Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2014. – Вип.92. – С.102 – 113.
16. Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В. Parametric resonance in statically indeterminate frames// Опір матеріалів та теорія споруд. К.: КНУБА, 2014. – Вип.93. – С.91 – 99.
17. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972 - 718 с.
18. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 с.

#### REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Dehtyaryuk E.S., Lukyanchenko O.A., Kostina E.V. Chislennoe postroenie redutsirovannykh modeley stohasticheskikh parametricheskikh kolebaniy pologih obolochek (Numerical construction of reduced models of shallow shells stochastic parametric oscillations // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2011. – V. 87. – S. 51 – 59.
2. Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V. Dynamic behavior of a shallow shell under stochastic parametric load // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2012. – S. 31-38.
3. Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V. Vplyv navantazheniya na chastoty vlasnykh kolyvan' skladnoyi obolonkovoyi konstruktsiyi (The influence of loads on the eigenfrequencies of complex shell structures) // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2013. – V.91. – S.49-58.
4. Bolotin V.V. Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem (The dynamic stability of elastic systems). – М.: Gostekhizdat, 1956. – 600 s.
5. Bolotin V.V. Sluchaynie kolebaniya uprugikh sistem (Random vibrations of elastic systems). М.: Nauka, 1979. - 335 s.
6. Vibratsii v tekhnike: Spravochnik (Vibration in engineering: Handbook). V 6-ty t./Red. sovet: V.N. Chelomey (pred.). – М.: Mashynostroenye, 1978-T. 1. Kolebaniya lineynykh sistem (Oscillations of linear systems) /Pod red. V.V. Bolotina. 1978. – 352 s., il.
7. Volmir A.S. Ustoychivost' uprugikh sistem (Stability of elastic systems) – М.: Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1963. – 880 s.
8. Volmir A.S. Nelineynaya dinamika plastin i obolochek (Nonlinear dynamic of plates and shells). М.: Nauka, 1982. - 432 s.
9. Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Borysenko V.H. Metodyka redukovannya rivnyan' v zadachakh parametrychnykh kolyvan' konstruksiyi (Techniques of equations reduction in problems of structures parametric oscillation). // Opir materialiv i teoriya sporud. K.: KNUBA, 2004. – V. 74.



10. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Borysenko V.H.* Pobudova redukovanykh rivnyan' dynamichnoyi stiykosti ploskoyi formy zhynu pruzhnykh system (Derivation of dynamic stability reduced equations of elastic systems plane bending modes). // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2005. – V.77. – S. 65-77.
11. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O.* Vyznachennya oblastey dynamichnoyi nestiykosti parametrychnykh kolyvan' hofrovanoyi dvotavrovoyi balky (Determination of dynamic instability domains of corrugated I-beam parametric oscillation) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2009. – V. 83. – S.15-24.
12. *Gotsulyak Ye.O., Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O.* Pobudova redukovanoi modeli parametrychnykh kolyvan' tsylindrychnoyi obolonky pry chystomu zhyni (Reduced model of a cylindrical shell parametric oscillation under pure bending) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2009. – V.84. – S.11-19.
13. *Dekhtyaryuk Ye.S., Lukyanchenko O.O., Otrasheska V.V.* Dynamichna stiykist pruzhnykh system pry kombinovanomu stokhastychnomu navantazhenni (Dynamic stability of elastic systems under combined stochastic load) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2003. – V. 72. – S.51 – 59.
14. *Klyatskin V.I.* Stokhasticheskie uravneniya v sluchaino odnorodnykh sredakh (Stochastic equations in randomly homogeneous media) M.: Nauka, 1980. - 336 s.
15. *Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Stokhastychni parametrychni kolyvannya pruzhnykh system z urakhuvannyam yikh poperednykh staniv (Analysis of stochastic parametric oscillations of elastic systems taking into consideration their previous states) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2014. – V.92. – S.102 – 113.
16. *Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.* Parametric resonance in statically indeterminate frames // *Opir materialiv i teoriya sporud.* K.: KNUBA, 2014. – V.93. – S.91 – 99.
17. *Yakubovich V.A., Starzhinskiy V.M.* Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koefitsientami i ikh prilozheniya (Linear differential equations with periodic coefficients and its applications). – M.: Nauka, 1972. – 718 s.
18. *Shimkovich D.H.* Raschet konstruksiy v MSC/NASTRAN for Windows (Structural analysis using MSC/NASTRAN for Windows). – M.: DMK Press, 2001. – 448 s.

*Bazhenov V.A., Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V.*

### **DYNAMIC STABILITY OF ELASTIC SYSTEMS PARAMETRIC OSCILLATIONS**

Parametric resonance of elastic systems under periodic and stochastic loads is investigated on the basis of the reduced discrete mathematical models. Reduced mass matrix, stiffness matrix and geometric stiffness matrix are obtained using procedures of modern finite-element analysis software and with the help of computer code developed by authors. The problem of periodic parametric oscillations stability of an I-beam with a sine wave corrugated wall under the main and combined resonance was solved. The effect of stationary stochastic parametric load on the dynamic behavior and stability of shallow thin shell was estimated.

**Keywords:** parametric resonance, instability domain, finite element method, reduced matrixes.

*Баженов В.А., Лукьянченко О.О., Ворона Ю.В., Костина Е.В.*

### **ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ**

Динамическая устойчивость параметрических колебаний упругих систем при периодических и стохастических нагрузках исследована на основе редуцированных дискретных математических моделей. Редуцированные матрицы масс, жесткости и геометрической жесткости получены с помощью процедур современного программного комплекса конечно-элементного анализа и созданных авторами программ. Решена задача динамической устойчивости периодических параметрических колебаний двутавровой балки с гофрированной синусоидальной стенкой при главном и комбинированном резонансах. Оценено влияние стационарной стохастической параметрической нагрузки на динамическое поведение и устойчивость пологой тонкостенной оболочки.

**Ключевые слова:** параметрический резонанс, область неустойчивости, метод конечных элементов, редуцированные матрицы.

## ЗМІСТ

<i>Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.</i> Dynamic behaviour of nonlinear nonsmooth discontinuous vibroimpact system . . . . .	3
<i>Чирков О.Ю.</i> Розвиток змішаного методу скінченних елементів до розв'язання крайових задач термомеханіки . . . . .	16
<i>Пастернак Я.М., Сулим Г.Т., Пастернак Р.М.</i> Вивчення напруженого стану тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів: огляд публікацій до 2010 р. . . . .	35
<i>Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О., Романцова К.С.</i> Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій кругового скінченного елемента з чисельним інтегруванням . . . . .	81
<i>Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Мельничук В.Ф.</i> Про один алгоритм розв'язання початково-граничних задач для рівняння нестационарної теплопровідності . . . . .	90
<i>Баженов В.А., Кривенко О.П., Легостаєв А.Д.</i> Стійкість і власні коливання неоднорідних оболонок з урахуванням напруженого стану . . . . .	96
<i>Dang Xuan Truong</i> Calculation of random wave parameters using regression method . . . . .	114
<i>Андрієвський В.П., Гуляр О.І., Максим'юк Ю.В., Мицюк С.В.</i> Алгоритм розв'язання вісесиметричних задач нестационарної теплопровідності . . . . .	123
<i>Андрусенко О.М., Глазунов С.М.</i> Стійкість і коливання буриньних колон з внутрішніми потоками рідини в каналах горизонтальних свердловин . . . . .	132
<i>Priadko Iu., Tanasoglo A., Garanzha I.</i> Experimental researches of elastomeric materials to stabilize the oscillation of power grid structures . . . . .	145

*Баженів В.А., Лук'яненко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В.*

Динамічна стійкість параметричних коливань пружних систем . . . 159