

Методика визначення коефіцієнту розрахункової довжини колон багатоповерхових рам шарнірно закріплених на фундаментах

Артем Білик¹, Євгеній Цюпин², Любомир Джанов³

Київський національний університет будівництва і архітектури,
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037
¹vartist@ukr.net, orcid.org/0000-0002-9219-920X
²standartbc@gmail.com, orcid.org/0000-0001-9428-6166
³angeldl@ukr.net, orcid.org/0000-0001-5144-3424

DOI: 10.32347/2522-4182.4.2019.70-77

Анотація. Після проведення статичного розрахунку рами, виникає необхідність визначити та проаналізувати її властивості з точки зору стійкості. У даній статті розглянуто методику визначення коефіцієнту розрахункової довжини колон, що шарнірно закріплені у нижній частині та мають пружне закріплення у верхній частині. Методика побудована на основі методу початкових параметрів який застосовується для аналізу стержнів. Вихідними даними для даної методики є статичний розрахунок рами. У статті наведено два підходи для визначення стійкості колон при різній жорсткості рами та визначено відсоток співпадіння. Також вказані рекомендації щодо подальшого використання методики.

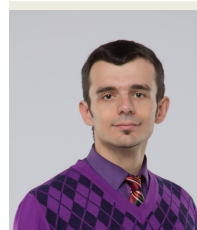
Ключові слова. Критична сила, коефіцієнт розрахункової довжини, стійкість колон, метод початкових параметрів, стержень, шарнір, пружні опори.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблематика даної статті полягає у визначення достовірності методики, що розглядається у статті на прикладі трьох рам, що мають різну жорсткість колон та ригелів. Порівняння даного підходу з вже існуючим та синтез рекомендацій, щодо застосування методики на практиці.

АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Якщо говорити про стійкість стержнів закріплених з одного кінця шарнірно, а з іншого пружно, то першим хто отримав формулу для шарнірно закріпленого стержня був Л.Ейлер, [1]. Також для деяких випадків стержнів постійного і змінного перерізу на жорстких



Артем Білик
доцент кафедри металевих і дерев'яних конструкцій
к.т.н., доц.



Євген Цюпин
асистент кафедри металевих і дерев'яних конструкцій



Любомир Джанов
аспірант кафедри металевих і дерев'яних конструкцій

[1,2,3,11] та на пружних опорах отримані критерії у наукових працях [3,6,7,11]. Визначені загальні методики розрахунку стійкості стержнів за експериментальними даними при різних умовах закріплення [5,12]. Значення стійкості з урахуванням розвитку обмежених пластичних деформацій і початкових недосконалостей та місцевої стійкості стержнів наведено у наукових розробках [8,9,10,13].

ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

Якщо в роботах [5,12] отримано в розгорнутому вигляді критерій центрально-стиснутого пружного стержня стержня, який одним кінцем шарнірно закріплений, а іншим пружно закріплений від повороту і

горизонтальних переміщень при позначеннях $k_{Mb} = \frac{k_M b_r^2}{2}$.

$$\frac{\sin(\alpha_N l) k_{Mb} k_q}{\alpha_N} \left\{ -1 + \left(\alpha_N l - \frac{\alpha_N^3 E I_x}{k_q} \right) \times \left[\text{ctg}(\alpha_N l) - \frac{\alpha_N E I_{x0}}{k_{Mb}} \right] \right\} = 0 \quad (1)$$

Випадок 1. Для випадку коли стрижень шарнірно опертий одним кінцем і пружно защемлений другим кінцем на вільних пересувних опорах умови жорсткості опор мають запис: $k_{Mb} \neq 0, k_q = 0$.

Такі умов описують можливість зміни жорсткості пружного защемлення і відповідно перехід від стійкості консольного стрижня до стійкості колон на пружній основі. З іншого боку такі умови дозволяють проаналізувати зміну коефіцієнта роз-

рахункової довжини колон порталних рам при різній жорсткості ригеля. Критерій стійкості пружного стрижня має відповідний вигляд [5,12].

$$\left\{ -k_q + \left(k_q \alpha_N l - k_q \frac{\alpha_N^3 E I_x}{k_q} \right) \times \left[\text{ctg}(\alpha_N l) - \frac{\alpha_N E I_{x0}}{k_{Mb}} \right] \right\} = 0$$

$$\text{ctg}(\alpha_N l) - \frac{\alpha_N l (E I_{x0} / l)}{k_{Mb}} = 0. \quad (2)$$

Проведено чисельні дослідження трансцендентного рівняння (2) при певній зміні жорсткості пружності опори защемлення.

Табл. 1. Коефіцієнт (μ_x) розрахункової довжини колон, випадок 1, ($k_{Mb} \neq 0, k_q = 0$)

Table 1. Factor (μ_x) accounting for the end conditions the effective length of column, case 1, ($k_{Mb} \neq 0, k_q = 0$)

$\alpha_N l$	$\frac{(E I_{x0} / l)}{k_{Mb}}$	$\frac{\alpha_N l (E I_{x0} / l)}{k_{Mb}}$	μ_x
1,5708	0,00001	0	2,0
1,4289	0,1	0,14289	2,198609
1,3139	0,2	0,26278	2,391044
1,0769	0,5	0,53845	2,917256
0,9729	0,7	0,68103	3,229101
0,8603	1	0,8603	3,651741
0,736	1,5	1,104	4,268468
0,6533	2	1,3066	4,808806
0,5932	2,5	1,483	5,296009
0,5472	3	1,6416	5,741215

($k_{Mb} \rightarrow \infty, k_q \neq 0$). Критерій стійкості за (1) має запис.

$$\left(\alpha_N l - \frac{\alpha_N^3 l^3 E I_x}{k_q l^3} \right) \text{ctg}(\alpha_N l) - 1 = 0. \quad (3)$$

У відповідності з рівнянням (30) проведено числові дослідження залежності коефіцієнта розрахункової довжини

стрижня в залежності від пружності го-

ризонтальної опори (табл.2)

Табл. 2. Коефіцієнт (μ_x) розрахункової довжини колон , випадок 2, ($k_{Mb} \rightarrow \infty, k_q \neq 0$)

Table 2. Factor (μ_x) accounting for the end conditions the effective length of column, case 2, ($k_{Mb} \rightarrow \infty, k_q \neq 0$)

$\alpha_N l$	$\frac{EI_x}{k_q l^3}$	$\frac{\alpha_N^3 l^3 EI_x}{k_q l^3}$	μ_x
4,4889	0,001	0,090452	0,7
3,1554	0,1	3,14169	0,995624
2,9302	0,125	3,144864	1,072143
2,7621	0,15	3,160891	1,137393
2,5283	0,2	3,232331	1,242571
2,0175	0,5	4,105921	1,557171
1,8092	1	5,921882	1,736454
1,6215	5	21,31674	1,937461
1,5964	10	40,68414	1,967923

При зростанні жорсткості пружної горизонтальної опори коефіцієнт розрахункової довжини стрижня наближається до $\mu_x \rightarrow 0,7$. При зменшенні жорсткості горизонтальної пружної опори при значеннях параметра $\frac{EI_x}{k_q l^3} = 0,1..0,125$ значення коефіцієнт розрахункової довжини стрижня буде $\mu_x \approx 0,996..1,072$.

При подальшому зменшенні жорсткості пружної опори втрата стійкості стрижня набуває форму близьку до стрижня, який консольно защемлений: $k_q \rightarrow \infty, \mu_x \rightarrow 2$.

Випадок 3. Загальний випадок. Для числових досліджень загального випадку необхідно критерій (1) записати в такому вигляді.

Проведені числові дослідження коефіцієнта розрахункової довжини колон при різних параметрах пружного обпирання, які представлені в таблиці 3.

$$\frac{EI_x}{k_q l^3} = \frac{1}{\alpha_N^3 l^3} \left\{ \alpha_N l - \frac{1}{\left[\operatorname{ctg}(\alpha_N l) - \frac{\alpha_N l EI_{x0}}{k_{Mb} l} \right]} \right\}$$

Розглянемо трьох прольотну раму, що має довжину 7,5 м, а висоту колон – 3 м. Постійне навантаження, що діє на раму вертикальну рівномірно-розподілену силу $q=75\text{кН/м}$, що прикладена до ригеля і дві горизонтальні сили $q_{w1}=2,82\text{кН/м}$, $q_{w2}=1,4\text{кН/м}$ прикладені на ліву і праву крайні колони відповідно (рис.1).

Табл. 3. Коефіцієнт (μ_x) розрахункової довжини колон, випадок 3, ($k_{Mb} \neq 0, k_q \neq 0$)

Table 3. Factor (μ_x) accounting for the end conditions the effective length of column, case 3, ($k_{Mb} \neq 0, k_q \neq 0$)

μ_x	$\alpha_N l$	$\frac{(EI_{x0} / l)}{k_{Mb}}$	$\frac{EI_x}{k_q l^3}$
0,7	4,48799	1	0,052244

Продовження Табл.1
Continuation of Tabl.1

0,8	3,926991	1	0,070487
0,9	3,490659	1	0,113706
1	3,141593	1	0,101321
1,5	2,094395	1	0,268713
2	1,570796	1	0,56954
2,5	1,256637	1	1,174119
3	1,047198	1	2,765241
3,5	0,897598	1	15,05183
3,6	0,872665	1	46,14339

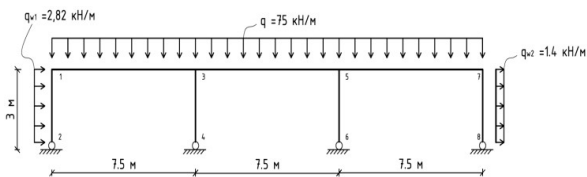


Рис.1.Схема рами, що використовується у дослідженні

Fig.1. Scheme of the frame used in the research.

Розглянемо перший випадок коли погонна жорсткість ригеля становить 0,909 погонної жорсткості колон (Рис.2.).

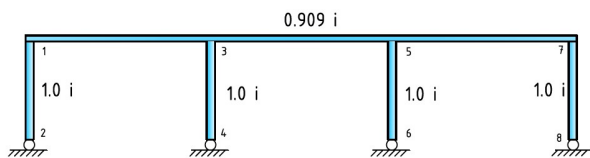


Рис.2 Перший випадок співвідношення жорсткостей

Fig.2 The first case of the ratio of stiffness

У другому випадку жорсткість середніх колон (стержні 3-4 та 5-6) збільшено у 1,247 рази. (рис.3.)

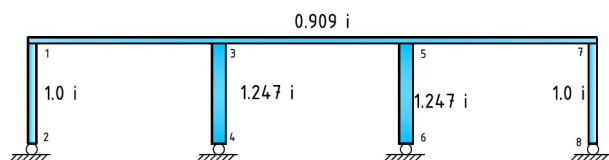


Рис.3. Другий випадок співвідношення жорсткостей

Fig.3. The second case of the ratio of stiffness

В третьому випадку жорсткість ригелів збільшена до 1,244і (рис.4.).

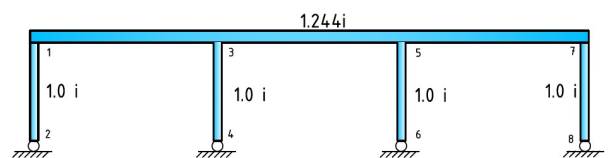


Рис.4. Третій випадок співвідношення жорсткостей

Fig.4. The third case of the ratio of stiffness

Виконавши статичний розрахунок для трьох варіантів знаходимо коефіцієнт розрахункової довжини, використавши узагальнений критерій стійкості стрижня, що визначений за випадком 1. Для порівняння отриманих результатів використаємо ПК «Асистент», розробник кафедра будівельної механіки КНУБА який базується на методі скінченних елементів у формі методу переміщення. Результати розрахунку наведені у табл.4, табл.5 і табл.6. розрахункової довжини, використавши узагальнений критерій стійкості стрижня.

Табл.4. Порівняння методик для випадку першого, рис 2
Table 4. Comparison of techniques for the case of the first, fig.2

Стержень Rod	Погон. Жорстк. Relative stiffness	Коефіцієнт (μ_x) розрахункової довжини колон Factor (μ_x) accounting for the end conditions the effective length of column,		
		ПК "Асистент"	Даний метод	$\Delta, \%$
1-2	1i	2.995	2.688	10%
3-4		1.936	2.053	6%
5-6		1.936	2.059	6%
7-8		2.984	2.6491	11%

Табл.5. Порівняння методик для випадку другого
Table 5. Comparison of techniques for the case of the second

Стержень Rod	Погон. Жорстк. Relative stiffness	Коефіцієнт (μ_x) розрахункової довжини колон Factor (μ_x) accounting for the end conditions the effective length of column,		
		ПК "Асистент"	Даний метод	$\Delta, \%$
1-2	1.247i	2.834	2.685	5%
3-4		2.041	2.0608	1%
5-6		2.041	2.069	1%
7-8		2.824	2.6501	6%

Проведені дослідження показують, що на перших етапах проектування є можливість приблизно вираховувати коефі-

цієнти розрахункової довжини рам, використовуючи результати статичного розрахунку на відомі навантаження.

Табл.6. Порівняння методик для третього випадку, рис 4.
Table 6. Comparison of techniques for the third case, fig.4

Стержень Rod	Погон. Жорстк. Relative stiffness	Коефіцієнт (μ_x) розрахункової довжини колон. Factor (μ_x) accounting for the end conditions the effective length of column,		
		ПК "Асистент"	Даний метод	$\Delta, \%$
1-2	1.247i	2.834	2.685	5%
3-4		2.041	2.0608	1%
5-6		2.041	2.069	1%
7-8		2.824	2.6501	6%

Узагальнення результатів досліджень приведено у таблиці 7, які показують можливість використання приблизного підходу

для визначення коефіцієнтів розрахункової довжин різних конструкцій багатопрогонових рам.

Табл.7. Середнє значення похибки між методами
Table.7. The average error value between the technique

Назва характеристики The name of the characteristic	Випадок 1 The First case	Випадок 2 The Second case	Випадок 3 The Third case
Середнє значення похибки між методиками The average error value between the techniques, Δ %	8.47%	3.44%	9.25%

ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розвинуто та узагальнено теоретичні підхід, щодо визначення коефіцієнтів розрахункової довжини колон рам складних конструкцій. Порівняння результатів дослідження на прикладі трьох рам із різною жорсткістю показав похибку між в межах до 1%-10%.

Методика підходить для попереднього аналізу стійкості рам після результатів статичного розрахунку. Методика потребує вдосконалення та в перспективі може бути застосований для аналізу малоповерхових і одноповерхових багатопрогонових рам з урахуванням піддатливості вузлів і опор. Можливий також на базі цієї методики перехід до перевірки стійкості колон за деформованою схемою [13,14,15].

ЛІТЕРАТУРА

1. **Timoshenko S.P., Gere J.M., 1961.** Theory of Elastic Stability, McGraw Hill Kogakusha Ltd., New York.
2. **Баженов В.А.** Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії / В.А.Баженов, Ю.В.Ворона, А.В.Перельмутер. – К.: Каравела, 2016. – 428 с26.
3. **Киселев В.А.** Строительная механика: Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений 3-е изд., испр, и доп. — М.: Стройиздат, 1980. — 616 с.
4. **Bilyk S., 2006.** The peculiarities of buckling and strength analysis of frame elements of I-shaped cross-section with variable web height. Progress in Steel, Composite and Aluminium

Structures. Proceeding of the XI international conference on metal structures (ICMS-2006), Pzeszow, Poland, 21-23 June, 144-145.

5. **Bilyk S., 2016.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data/ S.Bilyk // Underwater technologies. Industrial and civil engineering. 2016. Vol. 04, 89-96
6. **Білик С. І.** Рациональні сталеві каркаси малоенергоємних будівель із двотаврів змінного перерізу : дис. доктора. техн. наук: 05.23.01 /С.І. Білик – Київ, 2008. – 460 с.
7. **Снитко Н.К.** Расчет сжато-изогнутых стержней. Проект и стандарт, 1938, № I, с.28-31.
8. **Білик С.І.** Залишкові напруження в сталевих холодно-гнутих швелерах / Білик С.І., Білик А.С., Усенко М.В., Куземко В.В., Нущий В.В. // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№61. - Дн-вск., ПГАСА, 2011.-С.43-49.
9. **Білик С.І. Білик А.С.** Коефіцієнт стійкості центрально-стиснутих сталевих елементів з урахуванням початкових деформацій та геометричних недосконалостей / Білик С.І., Білик А.С.// Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. науч. трудов. Вып.№82. - Дн-вск., ПГАСА, 2015.-С.32-37.
10. **Білик С.І. Білик А.С., Усенко М.В.,** Золотопольський О.Є. Стійкість холодногнутих швелерів з урахуванням пластичних властивостей мало вуглецевих сталей //Збірник наукових праць Українського науководослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. Вип.7. – К.: Вид-во «Сталь», 2011. – С.26-35.
11. **Бутенко Ю.И.** (ред.) Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. – Ю.И. Бутенко К.:Вища школа, 1984 . –328с.
12. **Білик С.І.** Порівняння о місцевої стійкості стінок двотаврових балок за ДБН В.2.6-198-2014 і Єврокодом 3 (ДСТУ-Н Б EN 1993-1-1:2010) при пружній роботі сталі/ С.І. Білик,

Л.І.Лавриненко, Н. Алтайе // Будівельні конструкції. Теорія і практика. Зб. наук. пр. Вип. 1. – Київ. МОН України, КНУБ, 2017. – С. 36–47.

13. **Білик С.І.** Теоретичне порівняння фактора стійкості і коефіцієнта поздовжнього згину центрально-стиснутих сталевих колон з урахуванням початкових деформацій та вигинів // Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського. Вип. 15. – К.: Вид-во «Сталь», 2015. – С. 48-61.
14. **Bilyk Sergiy, Tonkacheiev Vitaliy,** Determining sloped-load limits inside von Mises truss with elastic support. *Materiali in tehnologije.*, Ljubljana, Slovenija 52 (2018), 105-109, doi:10.17222/mit.2016.083.
15. **Bilyk S.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data // Підводні технології. Промислова та цивільна інженерія. міжнар. наук.-вироб. журн. К., КНУБА, Вип.04/2016, С.89-96.

REFERENCES

1. **Timoshenko S.P., Gere J.M., 1961.** The Theory of Elastic Stability, McGraw Hill Kogakusha Ltd., New York.
2. **Bazhenov V.A.** Construction Mechanics and Theory of Structures. Essays on history / VA Bazhenov, YV Vorona, AV Perelmuter. - K.: Caravel, 2016 - 428 p26. (in Ukrainian)
3. **Kiselev V.A.** Construction Mechanics: Special Course. Dynamics and stability of structures 3rd ed., Ispr, and add. - M.: Stroyizdat, 1980. - 616 p.
4. **Bilyk S., 2006.** The peculiarities of buckling and strength analysis of frame elements of an I-shaped cross section with variable web height. *Progress in Steel, Composite and Aluminum Structures. Proceeding of the XI International Conference on Metal Structures (ICMS-2006)*, Pzeszow, Poland, 21-23 June, 144-145. (in Ukrainian)
5. **Bilyk S., 2016.** Determination of the critical load of an elastic steel column based on experimental data / S.Bilyk // *Underwater technologies. Industrial and civil engineering.* 2016. Vol. 04, 89-96. (in Ukrainian)
6. **Bilyk S.I.** Rational steel frameworks of low-energy buildings with alternating-section double-tauruses: dis. doctors. tech. Sciences: 05.23.01 /C.I. Bilyk - Kyiv, 2008. - 460 p. (in Ukrainian)
7. **Snitko N.K.** Calculation of compressed-curved rods. *Design and Standard*, 1938, No. I, pp.28-31.
8. **Bilyk S.I.** Residual stresses in cold steel bent channels / Bilyk SI, Bilyk AS, Usenko MV, Kuzemko VV, Nuzhny VV // *Construction, materials science, mechanical engineering: Sat. scientific works.* Issue # 61. - Day-Sun, PSASA, 2011.-С.43-49. (in Ukrainian)
9. **Bilyk S.I. Bilyk A.S.** The coefficient of durability of centrally-compressed steel elements, taking into account the initial deformations and geometric imperfections / Bilyk SI, Bilyk AS // *Construction, material science, mechanical engineering: Sat. scientific works.* Issue # 82. - Day-Sun, PSGAS, 2015.-С.32-37. (in Ukrainian)
10. **Bilyk S.I. Bilyk A.S., Usenko M.V.,** Zolotopolsky OE Stability of cold-bent channels, taking into account plastic properties of low carbon steels // *Collection of scientific papers of Ukrainian Research and Design Institute of Steel Structures named after V.M. Shimanovsky.* Issue 7. - K.: Publishing House "Steel", 2011. - P.26-35. (in Ukrainian)
11. **Butenko Yu.I.** (ed.) *Construction Mechanics. Practical Guide.* - Yu.I. Butenko K.: High School, 1984. –328s.
12. **Bilyk S.I.** Comparison on the local stability of the walls of I-beams according to DBN B.2.6-198-2014 and Eurocode 3 (DSTU-N B EN 1993-1-1: 2010) at the elastic work of steel / SI. Bilyk, LI Lavrinenko, N. Altaye // *Building structures. Theory and Practice. Coll. Sciences.* ave. 1. - Kiev. MES of Ukraine, KNUB, 2017. - P. 36-47. (in Ukrainian)
13. **Bilyk S.I.** Theoretical Comparison of the Stability Factor and the Longitudinal Bending Ratio of Centrally-Compressed Steel Columns with Initial Deformities and Bends // *Collection of Scientific Papers of VM Shimanovsky Ukrainian Research and Design Institute for Steel Structures.* No. 15. - K.: View of "Steel", 2015. - P. 48-61. (in Ukrainian)
14. **Bilyk Sergiy, Tonkacheiev Vitaliy,** Determining sloped-load limits inside von Mises truss with elastic support. *Materials and Technologies.*, Ljubljana, Slovenia 52 (2018), 105-109, doi: 10.17222 / mit.2016.083. (in Ukrainian)
15. **Bilyk S.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data // *Underwater technologies. Industrial and civil engineering. international. scientific-production.* K., KNUBA, Vol.04 / 2016, P.89-96. (in Ukrainian)

Method of determining the coefficient of the calculated length of the columns, hinged to the lower end by the method of initial parameters

Annotation. After static calculation of the frame, there is a need to determine and analyze its properties in terms of stability. In this article, the method of determining the coefficient of calculated length of columns, which are hinged in the lower part and have an elastic fastening in the upper part, is considered. The method is based on the method of initial parameters used for the analysis of the rods. The baseline for this technique is the static frame calculation. The article presents two approaches for determining the stability of columns at different stiffness of a frame and a percentage of coincidence is defined. The recommendations for further use of the technique are also given.

Keywords. Critical force, coefficient of estimated length, stability of columns, method of initial parameters, rod, hinge, elastic support.

FORMULATION OF THE PROBLEM

The problem of this article is to determine the reliability of the methodology that is considered in the article on the example of three frames having different stiffness of columns and crossbars. Comparison of this approach with the existing one and the synthesis of recommendations on the application of the methodology in practice.

ANALYSIS OF PREVIOUS STUDIES

If we talk about the stability of the rods fixed at one end hingedly, and on the other elastic, then the first one who received the formula for a hinged rod was L. Euler, [1]. Also, in some cases, the rods of the permanent and alternating section on the hard [1,2,3,11] and elastic supports are the criteria in scientific papers [3,6,7,11]. The general methods of calculation of stability of rods according to experimental data at different conditions of fixing [5,12] are determined. The value of stability, taking into account the development of limited plastic deformations and initial imperfections and the local stability of the rods, are given in scientific developments [8,9,10,13].

MAIN RESEARCH

Consider the three flying frame, which has a length of 7.5 m, and the height of the columns is 3 m. The constant load acting on the frame is a vertical uniformly distributed force $q = 75 \text{ kN / m}$ applied to the bolt and two horizontal forces $q_{w1} = 2, 82 \text{ kN / m}$, $q_{w2} = 1.4 \text{ kN / m}$ applied to the left and right extreme columns respectively (Fig. 1).

In the second case, tighten the middle columns (rods 3-4 and 5-6) increased by 1,247 times. (Fig. 3)

In the third case, the stiffness of the crossbars is increased to 1,244i (Fig. 4). After performing a static calculation for the three variants we find the stability coefficient using a generalized criterion of stability of the rod, as defined in [2]. To compare the results we use the "Asistent" PC, which is based on the finite element method in the form of a moving method. The results of calculation are given in Table 1, Table 2 and Table 3.

CONCLUSIONS AND PERSPECTIVES FOR FURTHER STUDIES

Comparison of the results of the study with an example of three frames of varying rigidity showed an error of between 10%. The method is suitable for preliminary analysis of the stability of frames after the results of static calculation. The method needs to be improved and in the long run can be used to analyze multi-frame frames, taking into account the feasibility of nodes.