

УДК 004.432:691.173:539.3

**Морозов Денис Миколайович**

Кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедрою інформаційних технологій в туризмі,  
ORCID: 0000-0001-9446-8736

Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя.

**Юречко Василь Зіновійович**

Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій в туризмі,  
ORCID: 0000-0002-6281-0602

Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя.

**Гнездовський Олексій Валентинович**

Аспірант кафедри комп'ютерних наук, ORCID: 0000-0003-0392-3030

Запорізький національний університет, Запоріжжя.

**СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИЙ ПІДХІД ДО ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ ЗАСОБАМИ PYTHON**

***Анотація.** Аналітичний розрахунок для більшості конструкцій є дуже складною, а інколи і неможливою процедурою, тому велике значення набуває використання чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів. В даній роботі розроблено програмний комплекс з використанням мови програмування Python, в якому реалізований тривимірний метод скінчених елементів для однорідних матеріалів, а також матеріалів маючих пористу структуру. Проведено розрахунок параметрів напружено-деформованого стану пористої гумової труби з урахуванням пор сферичної форми. Результати розрахунку порівнювались з аналітичним розв'язком для представленого рівня деформацій, похибка сягнула 3-5%, що показує стійку збіжність отриманих чисельних результатів.*

***Ключові слова:** програмний комплекс; мова програмування Python; пориста гума; метод скінченних елементів; напружено-деформований стан.*

**Постановка проблеми**

Аналіз досвіду передових держав у рішенні проблеми енергозбереження дозволяє визначити один з найбільш ефективних його шляхів – скорочення витрат тепла крізь конструкції будинків, споруджень, промислового устаткування, теплових мереж та інших об'єктів, в яких використовуються теплоносії. В зв'язку з цим відзначається інтенсивний розвиток промисловості пористих матеріалів (ПМ) в багатьох розвинених державах. Одним з напрямків рішення даної проблеми є впровадження ефективних ПМ. Але для впровадження і використання необхідно визначити механічні властивості поведінки ПМ під час експлуатації, для чого потрібно проводити дослідження параметрів напружено-деформованого стану (НДС) конструкцій із ПМ. Зростаюча складність таких конструкцій передбачає вдосконалення математичних моделей, за для того, щоб точніше враховувати наявність пористості. Одним зі стимулюючих факторів цього є те, що при створенні ПМ можливо впливати на властивості отриманого матеріалу варіюючи його пористість,

розміри та форми пор тощо. І, таким чином, знизити матеріалоємність без втрати високої міцності при експлуатації та інших механічних властивостей. Досить актуальною є задача розрахунку НДС пористих гумових труб, які використовуються для перекачування рідини під великим тиском, у турбінах та нагнітачах, також можуть використовуватися в досить жорстких середовищах.

**Аналіз сучасного стану проблеми, останніх досліджень і публікацій**

Дослідженню НДС конструкцій із ПМ присвячено багато робіт. У роботі [1] за допомогою скінченноелементного аналізу процесу напрусування пористої втулки на компактний вал, визначені градієнти залишкових напружень, що виникають у пористій втулці і валу при утворенні з'єднання з натягом.

У роботі [2] досліджені процеси в'язкопружного деформування при пресуванні ненасиченого капілярно-пористого анізотропного середовища з урахуванням зовнішнього тертя.

Робота [3] присвячена розробці методів

чисельного моделювання нелінійних процесів деформування і руйнування тривимірних тіл при високошвидкісній ударній взаємодії на базі відомої пружно-пластичної швидкісної моделі пористого матеріалу Маккензі.

В роботах [4-5] розроблено методику чисельного аналізу НДС конструкцій із ПМ в умовах в'язкопружного та геометрично нелінійного деформування на основі моментної схеми скінченного елемента з використанням різних методів визначення модулів пружності ПМ.

Аналітичний розрахунок для більшості конструкцій є дуже складною, а інколи і неможливою процедурою, тому велике значення набуває використання чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів (МСЕ). В наші дні, МСЕ – це, напевно, найпоширеніший метод для розв'язання широкого класу прикладних інженерних задач. Історично, він з'явився з механіки, проте згодом отримав подальший розвиток й у інших науково-технічних галузях. Сьогодні є велика кількість програмних пакетів, таких як ANSYS, Abaqus, Patran, Cosmos, MIPELA+, FORTUFEM тощо, в яких реалізований традиційний МСЕ та його модифікації. Ці програмні пакети дозволяють розв'язувати задачі будівельної механіки, механіки рідини, термодинаміки, електродинаміки і багато інших.

Реалізації методу скінчених елементів на Python присвячені наступні роботи. В роботах Р. Цірманна та О. Сертика [6] висвітлюються питання використання пакета SFEPY для розв'язання задач оптимізації форми в задачах нестискаємого потоку та скінченноелементної дискретизації рівнянь Шрьоденгера. Загальні питання щодо реалізації МСЕ на Python та ілюстрація роботи програми на прикладі деталі 1D розглянуто в роботі М. Зусмана [7]. О. Плетзер присвятив свою роботу [8] створенню пакету ELLIPT2D, призначеному для розв'язання двовірних еліптичних рівнянь.

Зручно організований обчислювальний процес – один з найважливіших етапів проведення прикладних досліджень або виконання інженерних розрахунків. У свою чергу, він багато в чому визначається зручністю використовуваного середовища для виконання обчислень. З розвитком обчислювальної техніки і розробки нових програм, ці середовища помітно еволюціонували.

Користувачами під час роботи з "універсальним" обчислювальним середовищем пред'являються наступні вимоги:

- відсутність необхідності "вручну" виділяти і звільняти пам'ять під змінні і \ або масиви даних;

- зручність роботи з масивами даних;
- читабельність і простота коду;
- простота визначення потрібних типів даних;
- незалежність від встановленої на комп'ютері операційної системи;

Мова програмування Python в цьому відношенні відповідає всім перерахованим вимогам. Це мова програмування загального призначення: використовується для розробки самостійних додатків, веб-рішень, що, при необхідності, передбачає можливість порівняно простого інтеграційного процесу будь-якої обчислювальної функціональності в проекти.

Синтаксис мови Python є куди більш привабливим (читабельність забезпечується як необхідністю виділяти блоки коду відступами, так і "неформальними" вимогами до написання коду), але остаточне рішення на користь Python було зроблено з огляду на його універсальності (затребуваності для самостійних додатків і веб рішень), наявності власної концепції розробки коду, наявності зручних пакетів для виконання наукових розрахунків (SciPy, Pandas, Sklearn) і роботи з масивами даних (NumPy); наявності додаткових засобів візуалізації даних (matplotlib), обробки зображень (scikit-image, PIL), свідчить про успішність застосування і правильності вибору Python для розв'язання задач математичного моделювання та чисельних методів. Наявні бібліотеки дозволяють добитися швидкості виконання Python-програм. Існуючі бібліотеки дають вибір між більш менш високорівневими рішеннями.

## Основна частина

Детальна реалізація МСЕ, як правило, вважається об'ємна і загальновідома, тому в даній роботі наводитися не буде. При дослідженні параметрів НДС ПМ використовувався метод самоузгодження для пор сферичної форми, який виражає залежність модулю об'ємного стиску  $K(p)$  та модулю зсуву  $G(p)$  ПМ від їх відносної щільності  $\rho = 1 - p$  [4-5]:

$$\frac{K(p)}{K_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \alpha_0 \rho}; \quad \frac{G(p)}{G_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \beta_0 \rho}, \quad (1)$$

де  $\alpha_0 = \frac{1 + \nu_0}{3(1 - \nu_0)}$ ;  $\beta_0 = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu_0}{1 - \nu_0}$ ;  $K(p)$ ,  $G(p)$ ,

$K_0$ ,  $G_0$  – модулі об'ємного стиску та зсуву ПМ і матриці відповідно;  $\nu_0$  – коефіцієнт Пуассона матриці.

Скінченноелементна модель визначення параметрів НДС ПМ будується на основі варіації повної потенційної енергії системи, яка

представлена в тензорній формі згідно роботи [9]:

$$\delta\Pi = \delta W - \delta A. \quad (2)$$

Тут  $\delta A$  – варіація роботи розподілених об’ємних  $P^i$  і поверхневих  $F^i$  сил:  $\delta A = \iiint_v P^i \delta u_i dv + \iint_s F^i \delta u_i ds$ ,

$\delta W$  – варіація внутрішньої енергії пружної деформації:  $\delta W = \iiint_v \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv$ .

Компоненти тензора напружень для пружного пористого тіла визначаються на основі узагальненого закону Гука:

$$\sigma^{ij} = 2G(p) \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \theta \right) + K(p) g^{ij} \theta, \quad (3)$$

де  $\theta = \varepsilon_{ij}$  – функція об’ємного стиску,  $g^{ij}$  – компоненти метричного тензору.

Для демонстрації розробленого підходу розв’яжемо статичну лінійну задачу пружності в тривимірній постановці для труби із пористої гуми з наступними вихідними даними: марка гуми – 51-1562,  $h = 0,01$  м – товщина,  $L = 0,1$  м – довжина,  $K_0 = 99,3 \times 10^6$  Па,  $G_0 = 2,0 \times 10^6$  Па,  $\nu_0 = 0,4899$ ,  $Q = 0,5 \times 10^6$  Па – розподілений внутрішній тиск, пористість  $p = 40\%$ .

При розв’язуванні розглянутої нами задачі були використані такі науково-розрахункові пакети: NumPy – пакет для високошвидкісної роботи з масивами даних; SciPy – бібліотека функцій для оптимізації та розв’язання звичайних диференціальних рівнянь, інтерполяції тощо; Matplotlib – пакет для візуалізації результатів обчислень.

На рисунках 1-3 представлено відповідно розподілення радіальних переміщень  $u_1$ , нормальних напружень  $\sigma_{11}$  та деформацій  $\varepsilon_{11}$ .

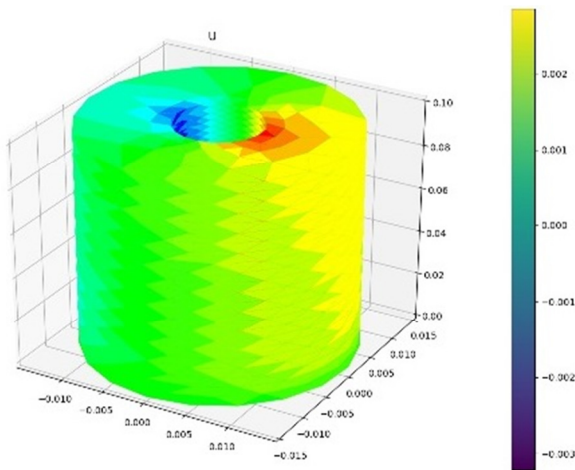


Рисунок 1 – Розподілення радіальних переміщень  $u_1$

Отримані наступні рівні деформацій:  $\varepsilon_{\max} = 0,49$  та  $\varepsilon_{\min} = -0,582$ . Результати розрахунку порівнювались з аналітичним розв’язком на прикладі задачі Ляме, для представленого рівня деформацій похибка сягнула 3-5%, що показує стійку збіжність отриманих чисельних результатів.

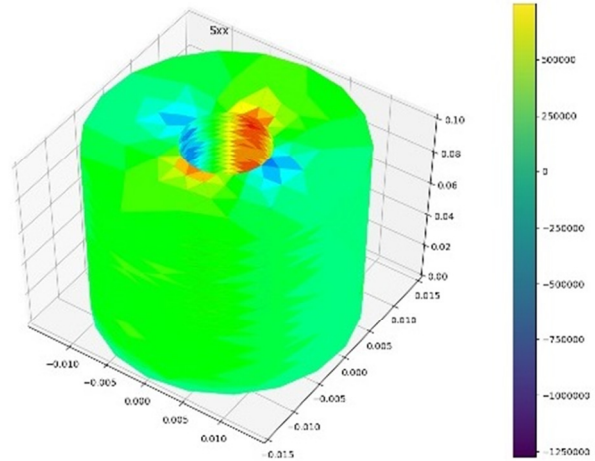


Рисунок 2 – Розподілення нормальних напружень  $\sigma_{11}$

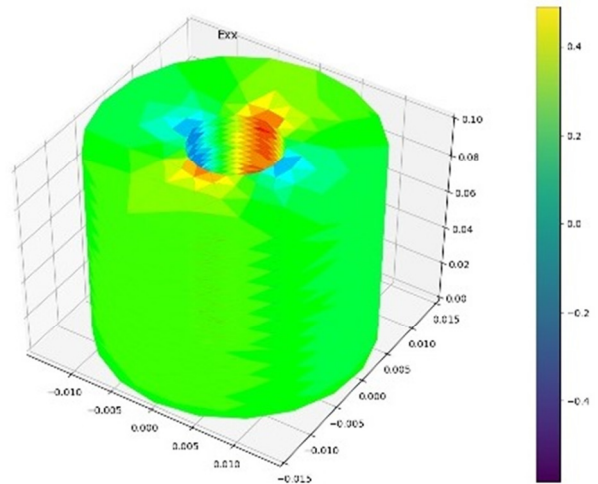


Рисунок 3 – Розподілення деформацій  $\varepsilon_{11}$

## Висновки

В роботі за допомогою програмних засобів Python побудований тривимірний скінченноелементний підхід до визначення параметрів напружено-деформованого стану пористого матеріалу, який дозволяє здійснювати ефективний чисельний аналіз конструкцій із пористих матеріалів в реальних умовах експлуатації та отримувати уточнені механічні характеристики для подальшого вдосконалення, розвитку та впровадження таких конструкцій в різні галузі народного господарства, за для застосування у вирішенні проблем енергозбереження.

## Література

1. Бабец А. В. Особенности напряженно-деформированного состояния прессовых соединений с использованием деталей из порошковых материалов / А. В. Бабец, С. А. Дебеева, Д. Б. Волжсин, А. С. Яковенко // Изв. вуз. Сев.-Кав. регион. Техн. науки, 2009, № 4. – С. 80-82.
2. Дорняк О. Р. Численное решение краевой задачи вязкоупругого деформирования ортотропного капиллярно-пористого материала при прессовании / О. Р. Дорняк // Вестник ВГУ, Серия: Фізика, Математика, 2005, №2. – С. 138-146.
3. Голованов А. И. Расчет больших упругопластических деформаций трехмерных тел МКЭ / А. И. Голованов, Л. У. Султанов // Математическое моделирование систем и процессов. – 2004. – №12. – С. 4-11.
4. Гребенюк С. М. Визначення напружено-деформованого стану конструкцій із пористих матеріалів в умовах нелінійного деформування / С. М. Гребенюк, В. З. Юречко // «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – 2012. – Вип. 20. – С. 130-136.
5. Гребенюк С. М. Визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндра із пористого матеріалу в умовах в'язкопружного деформування / С. М. Гребенюк, В. З. Юречко // «Труды ИПММ НАН Украины». – 2011. – Том 23. – С. 53-60.
6. Robert Cimrman, Ondřej Čertík. SfePy - Simple Finite Elements in Python Short Introduction [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.ondrejcertik.com/media/euroscipy2008.pdf>
7. M. M. Sussman. FEM example in Python. May 12 – June 19, 2014. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.math.pitt.edu/~sussmanm/3040Summer14/FEM1D.pdf>
8. Alexander Plezter. Python and Finite Elements. March 01, 2002. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.drdoobs.com/jvm/python-and-finite-elements/184404994>
9. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / [В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб и др.]. – К.: Наук. думка, 2005. – 416 с.

Стаття надійшла в редколегію 05.04.2017

**Рецензент:** д-р економічних наук, проф. О. А. Бондар, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ.

### **Морозов Денис Николаевич**

Кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий в туризме,  
ORCID: 0000-0001-9446-8736

Запорожский национальный технический университет, Запорожье

### **Юречко Василий Зиновьевич**

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий в туризме,  
ORCID: 0000-0002-6281-0602

Запорожский национальный технический университет, Запорожье

### **Гнездовський Алексей Валентинович**

Аспирант кафедры компьютерных наук, ORCID: 0000-0003-0392-3030

Запорожский национальный университет, Запорожье

## **КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ СРЕДСТВАМИ PYTHON**

**Аннотация.** Аналитический расчет для большинства конструкций является очень сложной, а иногда и невозможной процедурой, поэтому большое значение приобретает использование численных методов, в частности метода конечных элементов. В данной работе разработан программный комплекс с использованием языка программирования Python, в котором реализован трехмерный метод конечных элементов для однородных материалов, а также материалов имеющих пористую структуру. Проведен расчет параметров напряженно-деформированного состояния пористой резиновой трубы с учетом пор сферической формы. Результаты расчета сравнивались с аналитическим решением для представленного уровня деформаций, погрешность составила 3-5%, что показывает устойчивую сходимость полученных численных результатов.

**Ключевые слова:** программный комплекс; язык программирования Python; пористая резина; метод конечных элементов; напряженно-деформированное состояние.

**Morozov Denys**

*Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Information Technologies in Tourism,  
ORCID: 0000-0001-9446-8736*

*Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhia*

**Yuriechko VasyI**

*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Information Technology in Tourism,  
ORCID: 0000-0002-6281-0602*

*Zaporizhzhya National Technical University, Zaporizhzhia*

**Gnezdovskiy Alexey**

*Postgraduate student of the Department of Computer Science, ORCID: 0000-0003-0392-3030*

*Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhia*

#### **FINITE ELEMENT APPROACH TO DETERMINING THE STRESS-STRAINED STATE OF THE POROUS MATERIAL BY MEANS OF PYTHON**

**Abstract:** *Analytical calculation for most designs is very difficult and sometimes impossible procedure because great importance is the use of numerical methods, including finite element method. In this work software package has been developed using the programming language Python, which implemented a three-dimensional finite element method for homogeneous materials as well as materials having a porous structure. The calculation parameters of the stress-strain state of porous rubber tube considering pores of the spherical form. The calculation results are compared with analytical solutions for the present level of deformation error reached 5.3%, showing a steady convergence of numerical results obtained.*

**Keywords:** *software complex; programming language Python; porous rubber; finite element method; stress-strain state.*