МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

І. С. Безклубенко, О. І. Баліна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

У двох частинах

Частина 1

Рекомендовано вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури як підручник для студентів галузі знань 12 «Інформаційні технології» спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія», 125 «Кібербезпека» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»

Київ 2024

УДК 517

Б39

Рецензенти: *В. А. Лабжинський*, канд. техн. наук, доцент кафедри автоматизації проєктування енергетичних процесів і систем НТТУ «КПІ» ім. Ігоря Сікорського;
Ю. П. Буценко, канд. фіз-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТТУ «КПІ» ім. Ігоря Сікорського;
Є. В. Бородавка, д-р техн. наук, професор кафедри інформаційних технологій проєктування та прикладної математики КНУБА

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 16 від 22 грудня 2023 року.

Безклубенко І. С.

Б39 Математичний аналіз : підручник: у 2 ч. – Ч. 1 / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна. – Київ : КНУБА, 2024. – 224 с.

ISBN 978-966-627-258-7

Розглянуто основи математичного аналізу відповідно до програми першого курсу. Містить основні теоретичні відомості, приклади розв'язання стандартних задач. Наведено завдання до контрольних робіт і запитання для самоконтролю.

Призначено для студентів, які навчаються за спеціальностями 123 «Комп'ютерна інженерія» та 125 «Кібербезпека» освітньо- кваліфікаційного рівня «бакалавр».

УДК 517

ISBN 978-966-627-258-7

ЗМІСТ

Вступ

Математичний аналіз є фундаментальною дисципліною. Його викладання розвиває логічне й алгоритмічне мислення, дає змогу засвоїти основні методи досліджень чисельними методами математики, сприяє вмінню самостійно розширювати математичні знання, проводити математичний аналіз інженерних задач. Загальний курс математичного аналізу є фундаментом технічної освіти інженера.

Основою навчання студента є самостійна робота над підручником, навчальним матеріалом, яка складається з елементів вивчення теоретичного матеріалу, розв'язування задач і виконання розрахунково-графічних робіт. Підручник побудовано за схемою: елементи теорії, приклади розв'язання задач, завдання для контрольних робіт за варіантами.

У процесі вивчення курсу «Математичний аналіз» студент повинен виконати розрахунково-графічні роботи, головна мета яких – допомогти студенту поглибити знання з математичного аналізу.

Студенти мають ***знати***:

- основні математичні поняття сучасної математичної символіки, елементи теорії множин і математичної логіки як основних можливостей мінімально-збиткового представлення математично формалізованих процесів;
- метод координат як загальний метод геометрії для дослідження плоских кривих першого і другого порядку, поверхонь першого і другого порядків;
- теорію матриць, визначників, які є основним математичним апаратом системного опису складних зв'язків матеріального світу і які забезпечують ефективну обчислювальну роботу методів лінійного й нелінійного програмування;
- теорію векторного числення і його застосування, яка є базовим апаратом лінійної алгебри, математичної фізики, механіки;
- теорію функцій однієї та багатьох змінних, яка дає змогу якісно аналізувати дискретні та неперервні функціональні зв'язки, даючи їм геометричну й аналітичну інтерпретацію, а також визначати аналітично функціональний зв'язок в умовах цього експерименту;

- теорію і методи екстремізації функцій однієї та багатьох змінних, які є основою розв'язування оптимізаційних економічних, організаційних, технологічних і виробничих процесів.

Програма курсу «Математичний аналіз» для студентів, які навчаються за спеціальностями 123 «Комп'ютерна інженерія» та 125 «Кібербезпека», містить такі обов'язкові розділи з курсу математичного аналізу:

1. Лінійна алгебра.
2. Елементи векторної алгебри.
3. Аналітична геометрія.
4. Комплексні числа.
5. Функції однієї та багатьох змінних.
6. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних.

Після вивчення цих розділів студенти повинні ***вміти***:

- виконувати лінійні операції над матрицями й операцію множення матриць; обчислити обернену матрицю; обчислити визначник і знайти ранг матриці різними методами;
- розв'язати систему лінійних рівнянь за методом Крамера, методом Гаусса, методом оберненої матриці та дослідити систему за теоремою Кронекера – Капеллі;
- розв'язати систему просторової геометрії із застосуванням векторної алгебри; привести квадратичну форму до канонічного вигляду;
- знайти границю послідовностей і границю функції; порівняти нескінченно малі та нескінченно великі функції; розкрити невизначеності різних типів;
- дослідити функцію однієї змінної на неперервність; дослідити й побудувати графік функції за допомогою диференціального числення;
- дослідити функцію двох змінних на екстремум; застосувати метод найменших квадратів.

У підручнику систематизовано та наведено в зручному й доступному вигляді потрібні теоретичні відомості, проведено розв'язання опорних задач, запропоновано задачі для аудиторної та самостійної роботи студентів. Наприкінці кожного розділу є перелік основних питань з теоретичного матеріалу, яким повинен оволодіти студент. Приведено список рекомендованої літератури для поглиблення базових знань.

Підручник може використовуватися студентами першого курсу для самостійної роботи, студентами вищих курсів для повторення й систематизації набутих раніше знань, а також викладачами для організації практичних занять із математичного аналізу.

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ. ВИЗНАЧНИКИ

1.1. Матриці. Дії над матрицями

Матрицею розміром $m \times n$ називається множина з mn елементів a_{ij}, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right), \text{ де } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Якщо $m = n$, то матрицю називають ***квадратною***.

Квадратну матрицю (a_{ij}) порядку n називають:

- *верхньою трикутною матрицею*, якщо $a_{ik} = 0$, для всіх $i > k$;
- *нижньою трикутною матрицею*, якщо $a_{ik} = 0$, для всіх $i < k$;
- *діагональною матрицею*, якщо $a_{ik} = 0$, для всіх $i \neq k$;
- *одиничною матрицею* $E = (a_{1,j})$, якщо

$$a_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \neq j; \\ 1, \text{ якщо } i = j. \end{cases}$$

Квадратна матриця, у якій усі елементи, що не належать до головної діагоналі, дорівнюють 0, називається *діагональною*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця 4-го порядку.

Діагональна матриця, у якій усі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, називається *одиничною*. Позначається E.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця 4-го порядку.

Матрицю $(a_{1,j}),\ j=\overline{1,\ n}$, називають *матрицею-рядком*:

$A=(a_{11},\ a_{12},\ \dots,\ a_{1n})$.

Матрицю $(a_{1,j}),\ j=\overline{1,\ n}$, називають *матрицею-стовпцем*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{pmatrix}.$$

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, її називають нуль-матрицею та позначають O.

Приклад 3. $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ – нульова матриця розміром 2×3.

Рівність матриць. Дві матриці $A=(a_{ij})$ та $B=(b_{ij})$ рівні $(A=B)$, якщо вони мають однаковий розмір $m\times n$ і всі відповідні елементи рівні між собою.

Сумою $A+B$ розміру $m\times n$ матриць $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ називають матрицю $C=(c_{ij})$ того самого порядку, кожний елемент c_{ij} якої дорівнює $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$.

Властивості операції додавання

1. $A+B=B+A$ – комутативність додавання.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – асоціативність додавання.
3. Існує протилежна до A матриця $(-A)$ така, що $A+(-A)=0$.

Зауваження. Різниця матриць A і B визначається як сума матриць A і $(-B)$:

$$A-B=A+(-B).$$

Приклад 4. Знайти суму та різницю матриць

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&4\\5&1&2&8\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}2&2&1&5\\4&-1&2&3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$A+B=\begin{pmatrix}1&-2&3&4\\5&1&2&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2&1&5\\4&-1&2&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+2&-2+2&3+1&4+5\\5+4&1-1&2+2&8+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&4&9\\9&0&4&11\end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1&-2&3&4\\5&1&2&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&1&5\\4&-1&2&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1-2 & -2-2 & 3-1 & 4-5 \\ 5-4 & 1+1 & 2-2 & 8-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Добутком αA матриці $A=(a_{ij})$ на число α називають матрицю $B=(b_{ij})$, елементи якої $b_{ij}=\alpha a_{ij}$.

Властивості операції множення матриці на число

Для будь-яких матриць $A,\ B$ однієї розмірності і для будь яких чисел α,β:

1. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$ – асоціативність операції множення матриці на число.

2. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ – дистрибутивність операції множення матриці на число відносно додавання чисел.

3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ – дистрибутивність операції множення матриці на число відносно додавання матриць.

4. $1\cdot A=A$.

5. $(-1)\cdot A=-A$.

Приклад 5. Дано матриці A,B:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити: $2A+3B$.

Розв'язання.

$$2A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 10 & -8 \end{pmatrix};\quad 3B=\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$2A+3B=\begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}.$$

Операції додавання і множення матриці на число називають *лінійними операціями*.

Добутком AB розміру $m \times n$ матриці $A = (a_{ij})$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміром $(n \times k)$ називають $(m \times k)$ C – матрицю $C = (c_{ij})$, елемент якої c_{ij}, що стоїть в *i*-му рядку та *j*-му стовпці, дорівнює сумі добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці A на *j*-й стовпець матриці B:

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu i}, \quad i = \overline{1,m}; \;\; j = \overline{1,k}.$$

Зауваження. З означення випливає, що множити можна тільки такі дві матриці, у яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої (такі матриці називаються *узгодженими*).

Властивості операції множення двох матриць

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$, тобто добуток матриць некомутативний у загальному випадку. Якщо $A \cdot B = B \cdot A$, матриці називають *комутативними* або *переставними*.

2. $A(BC) = (AB)C$ – асоціативність операції множення матриць.

3. Існує матриця E, така, що $AE = EA = A$.

4. $A(B+C) = AB + AC$; $(A+B)C = AC + BC$ – дистрибутивність відносно додавання.

Приклад 6. Дано матриці A, B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити: $A \cdot B$.

Розв'язання.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \\ 5 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 & 5 \cdot 4 + (-4) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Дано матриці A, B:

$$A=\begin{pmatrix}1\,2\\3\,4\\2\,6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Обчислити: $A\cdot B$ та $B\cdot A$ та перевірити рівність $A\cdot B=B\cdot A$.

Розв'язання. Знайдемо добуток матриць $A\cdot B$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot(-2)+2\cdot 3 & 1\cdot 4+2\cdot 2\\3\cdot 0+4\cdot 1 & 3\cdot(-2)+4\cdot 3 & 3\cdot 4+4\cdot 2\\2\cdot 0+6\cdot 1 & 2\cdot(-2)+6\cdot 3 & 2\cdot 4+6\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 4 & 8\\4 & 6 & 20\\6 & 14 & 20\end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер добуток $B\cdot A$:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1+(-2)\cdot 3+4\cdot 2 & 0\cdot 2+(-2)\cdot 4+4\cdot 6\\1\cdot 1+3\cdot 3+2\cdot 2 & 1\cdot 2+3\cdot 4+2\cdot 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 16\\14 & 26\end{pmatrix}.$$

Отже, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Операція транспонування. Нехай $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$. Матриця $A^{\mathrm{T}}=(a_{ji}),\ j=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m}$, отримана з матриці A заміною рядків стовпцями, а стовпців – рядками, називається *транспонованою* до матриці A. Очевидно, що $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

Приклад 8. Матрицею, транспонованою щодо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ є матриця } A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивості транспонування матриці

Для будь-яких матриць A і B:

1. $\left(A^T\right)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$, якщо матриці A і B однієї розмірності.
3. $(\gamma A)^T = \gamma A^T$, $\gamma \in R$.
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, якщо добуток матриць $A \cdot B$ визначений.

Оберненою матрицею відносно квадратної матриці A називається матриця A^{-1}, яка задовольняє умову $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

1.2. Визначники

Для квадратної матриці A порядку n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

існує число, яке називають *визначником (детермінантом)* такого ж порядку. Визначник матриці A позначають $\det A$ (або $|A|$, або Δ).

Визначником квадратної матриці A порядку n (або просто визначником) *називається число*

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник 2-го порядку – це число Δ таке, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначником третього порядку називається число Δ таке, що

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Основні властивості визначників

1. Визначник матриці не змінюється з її транспонуванням.
2. Визначник змінює знак у разі перестановки двох рядків (двох стовпців).
3. Визначник, який має два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.
4. Визначник дорівнює нулю, якщо всі елементи рядка (стовпця) дорівнюють нулю.
5. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.
6. Величина визначника не змінюється, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число.
7. Визначник дорівнює сумі елементів деякого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення.
8. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Методи обчислення визначників

Якщо $n = 1$:

$$A = (a_1), \qquad \det A = a_1.$$

Якщо $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Якщо $n = 3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Визначники вищих порядків

Якщо $n \geq 3$, застосовують такі методи:

1. Метод розкладу визначника за елементами деякого рядка (стовпця) (властивість 7).

2. Метод зведення визначника до трикутного вигляду. Такий визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

3. Визначник 3-го порядку обчислюють за правилом трикутника (рис.1) і Саррюса (рис. 2).

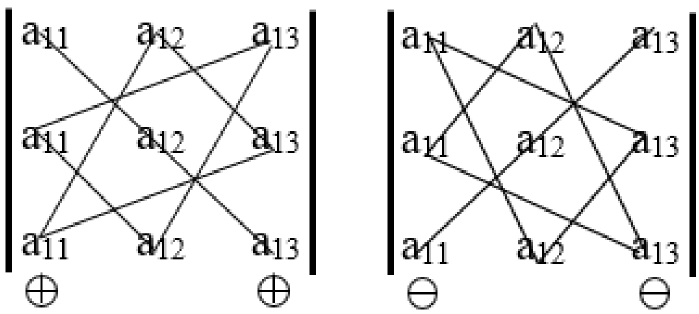

Рис. 1. Правило трикутника

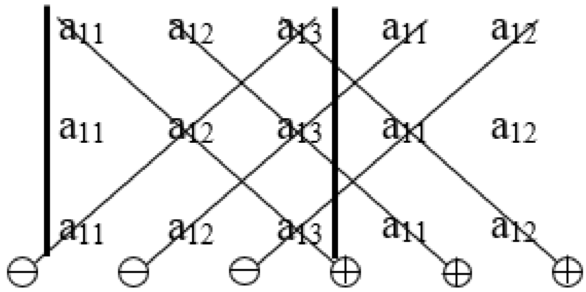

Рис. 2. Правило Саррюса

Приклад 1. Обчислити:

а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \cos\alpha =$

$$= -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos 2\alpha .$$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 4\cdot 0 - 1\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 4 - 2\cdot 0\cdot 3 =$

$$= 9 + 2 - 4 = 7 .$$

Приклад 2. Обчислити:

а) $\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ методом зірочки;

б) $\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ методом Саррюса.

Розв'язання.

а) Обчислимо ΔА методом зірочки:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 12 + 0 - 8 - 10 - 0 = 6.$$

б) Обчислимо ΔВ методом Саррюса:

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{matrix} = -2 + 0 + 2 + 4 - 3 - 0 = 1.$$

Якщо у визначнику порядку n закреслити j-й стовпець та i-й рядок, на перетині яких перебуває елемент a_{ij}, то одержаний визначник $(n-1)$-го порядку називають мінором елемента a_{ij} (M_{ij}), а число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – його *алгебраїчним доповненням*.

Визначник порядку $n \geq 4$ обчислюється за методом зниження порядку визначника за формулою

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \text{ , або } \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \text{ .}$$

Відношення $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ називають розкладом визначника за i-м рядком, а відношення $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ – розкладом за j-м стовпцем.

Приклад 3. Обчислити визначник, розкладаючи його по елементах першого рядка:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(6-5) + 4(3-2) = 6$$

.

Обернена матриця. Квадратна матриця А називається *особливою*, якщо $\det A = 0$, і *неособливою*, якщо $\det A \neq 0$.

Якщо A – неособлива матриця, то існує єдина матриця A^{-1} така, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця. A^{-1} – називають оберненою матрицею до матриці A.

Одним з основних методів обчислення оберненої матриці є метод перетворення. Справедлива рівність:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці.

Приклад 4. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 5 + 3\cdot(-2)(-1) + 2\cdot 2\cdot 4 - 4\cdot 0\cdot(-1) -$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 5 = -4 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7; \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{21}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8; \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5; \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Отже,

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 7/4 & -9/4 & 5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}.$$

1.3. Ранг матриці

Елементарні перетворення матриць

Елементарними перетвореннями рядків (стовпців) матриць називають такі перетворення:

1. Перестановка рядків (або стовпців).
2. Множення рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля.
3. Додавання до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.
4. Викреслювання рядка чи стовпця, який містить лише нульові елементи.

За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна звести до матриці, у якої всі елементи, крім, можливо, діагональних, дорівнюють нулю.

Таку матрицю називають *канонічною*.

Дві матриці A та B однієї розмірності називають *еквівалентними*, якщо одна з них отримана за допомогою елементарних перетворень іншої.

Будь-яка матриця A еквівалентна деякій канонічній матриці B.

Означення. Якщо мінор k-го порядку $\neq 0$, а всі мінори $(k+1)$-го порядку = 0, то число k називається ***рангом*** матриці A.

$r = rangA$.

Ранг матриці – це найвищий порядок мінору, відмінний від нуля. Із цього означення випливають такі властивості рангу матриці:

1. Ранг прямокутної матриці A розмірності $m \times n$ не перевищує меншого з двох чисел m та n, тобто $0 \leq rangA \leq \min(m, n)$.
2. Ранг матриці A дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли матриця A нульова. В інших випадках ранг матриці рівний деякому додатному числу.
3. Для квадратної матриці n-го порядку ранг матриці дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена, тобто її визначник відмінний від нуля.

Обчислення рангу матриці

Серед методів знаходження рангу матриці виділяють два методи:

1. Метод оточуючих мінорів.
2. Метод елементарних перетворень.

Алгоритм методу оточуючих мінорів.

Знаходимо будь-який, відмінний від нуля, мінор першого порядку $(M_I \neq 0)$. Якщо такого мінору немає, то матриця нульова і, як зазначалося вище, ранг її дорівнює нулю. Якщо ж серед мінорів першого порядку існує хоча б один відмінний від нуля, то переходимо до дослідження мінорів другого порядку, які містять у собі (оточують) M_I, і робимо це доти, доки не знайдемо мінор M_{II}. Якщо такого мінору немає, то $rangA = 1$. В іншому випадку досліджуємо мінори третього, четвертого і так далі порядків і таким чином переходимо до обчислення, якщо вони існують, мінорів k-го порядку, які обводять (оточують) мінор $M_{k-1} \neq 0$. Якщо таких мінорів немає або вони всі дорівнюють нулю, то $rangA = k-1$. Якщо ж хоча б один мінор $M_k \neq 0$, то $rangA \geq k$, тобто ітераційний процес методу оточуючих мінорів потрібно продовжувати далі.

Зауважимо, що такий підхід для обчислення рангу матриці не завжди зручний, оскільки пов’язаний з обчисленням значної кількості визначників. Простішим способом обчислення рангу матриці є алгоритм методу елементарних перетворень. Цей метод базується на твердженні, що елементарні перетворення матриці не змінюють її рангу.

Суть методу елементарних перетворень полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень матриця A зводиться до еквівалентної діагональної матриці B. Ранг матриці A дорівнює кількості ненульових елементів матриці B.

Приклад 1. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $rangA=2$.

Приклад 2. Знайти ранг матриці

$$C=\begin{pmatrix} 18 & 4 & 10 \\ 25 & 4 & 16 \\ 28 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Знаходимо ранг матриці методом оточуючих мінорів.

Обчислюємо мінори першого, другого та третього порядку:

$M_I = 18 \neq 0;$

$M_{II} = \begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 25 & 4 \end{vmatrix} = 72 - 100 = -28 \neq 0;$

$M_{III} = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 10 \\ 25 & 4 & 16 \\ 28 & 5 & 17 \end{vmatrix} = 18 \cdot 4 \cdot 17 + 25 \cdot 5 \cdot 10 + 4 \cdot 16 \cdot 28 - 28 \cdot 4 \cdot 10 - 5 \cdot 16 \cdot 18 - 4 \cdot 25 \cdot 17 = 6 \neq 0;$

Визначник матриці $C = 6$, тобто $\Delta C = 6 \neq 0$.

=> $r = rangC$ за означенням дорівнює 3.

Приклад 3. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За допомогою елементарних перетворень зводимо матрицю до трикутникової форми:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Кількість ненульових елементів дорівнює 3.

Отже, $rangA = 3$.

1.4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Матричні рівняння

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь складають, коли йдеться про взаємодію кількох процесів, кожен з яких можна описати лінійним рівнянням. Розв'язати систему означає знайти таку взаємодію. Система n-лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

або в матричному вигляді

$AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матриця системи;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матриця невідомих;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – матриця вільних членів.

Існує три типи матричних рівнянь:

$AX = B;$ $\quad XA = B;$ $\quad AXB = C,$

де X – невідома матриця; A, C, B – відомі матриці.

Розв'яжемо ці рівняння.

1. $AX = B;$ $\quad A^{-1}AX = A^{-1}B;$ $\quad X = A^{-1}B.$

2. $XA = B;$ $\quad XAA^{-1} = BA^{-1};$ $\quad X = BA^{-1}.$

3. $AXB = C;$ $\quad A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1};$ $\quad X = A^{-1}CB^{-1}.$

Система лінійних рівнянь називається ***однорідною,*** якщо $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, і ***неоднорідною***, якщо хоча б один із вільних членів b_i не дорівнює нулю.

Розв'язком системи називають сукупність чисел $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$, які перетворюють усі рівняння системи на тотожності.

Система лінійних рівнянь може не мати розв'язків, може мати єдиний розв'язок або нескінченну множину розв'язків.

Система лінійних рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Система лінійних рівнянь називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок.

Система лінійних рівнянь називається ***невизначеною***, якщо вона має більше одного розв'язку.

Система лінійних рівнянь називається ***несумісною***, якщо вона не має розв'язків.

Дві системи лінійних рівнянь називають еквівалентними, якщо вони мають ту саму множину розв'язків, можливо, порожню.

Матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

називають *основною матрицею* системи, а матрицю

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

називають *розширеною матрицею* системи.

Теорема Кронекера – Капеллі (*умова сумісності системи*). Система лінійних рівнянь сумісна тоді і лише тоді, коли ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці A^*. Сумісна система має єдиний розв'язок, якщо ранг матриці A дорівнює кількості невідомих n, і нескінченну множину розв'язків, якщо ранг матриці A менше за n.

Приклад 1. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання.

Записуємо розширену матрицю системи та за допомогою елементарних перетворень зводимо її до діагонального вигляду:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 2 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, система сумісна і має один розв’язок, оскільки ранги основної та розширеної матриць дорівнюють 3 і дорівнюють числу невідомих.

Приклад 2. Розв’язати системи рівнянь:

$$1)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 1. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 - x_2 = -1; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ x_1 + 5x_2 = 5. \end{cases}$$

Розв’язання.

1) Записуємо розширену матрицю системи та за допомогою елементарних перетворень зводимо її до діагонального вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Ранг основної матриці дорівнює 2, а ранг розширеної – 3. Отже, система несумісна.

2) Записуємо розширену матрицю системи та за допомогою елементарних перетворень зводимо її до діагонального вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Система еквівалентна системі трикутного вигляду. Оскільки ранги основної та розширеної матриць дорівнюють 3 і дорівнюють числу невідомих,
то система має один розв’язок: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1.$

3) Записуємо розширену матрицю системи й виконуємо елементарні перетворення над її рядками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Отже, система еквівалентна системі трапецієподібного вигляду і матиме безліч розв'язків. Маємо:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ \qquad 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Позначимо $x_3 = t$. Змінна t може набувати довільних значень, $t \in (-\infty; +\infty)$ і називається ***параметром.***

З другого рівняння системи знаходимо x_2, підставляємо в перше рівняння і знаходимо x_1. Маємо:

$$x_1 = 1 - \frac{t}{3} + 2t - 1 = \frac{5t}{3},\, x_2 = 1 - \frac{t}{3},\, x_3 = t.$$

Отже, розв'язки системи мають вигляд $x_1 = \dfrac{5t}{3}, x_2 = 1 - \dfrac{t}{3}, x_3 = t$, де $t \in R$.

Приклад 3. За допомогою теореми Кронекера – Капеллі розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Система завжди сумісна і має тривіальний розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Перевіримо, чи існують нетривіальні розв'язки.
Знаходимо ранг матриці:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, $r = rangA = 2$.

Відкидаємо рівняння, яке відповідає нульовому рядку, отримаємо:

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0;\\ \frac{3}{2}x_1 \qquad + \frac{1}{2}x_3 = 0.\end{cases}$$

Змінну, яка відповідає нульовому стовпчику, позначимо через t: $x_3 = t$, тоді

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 = -5t;\\ \frac{3}{2}x_1 \qquad = -\frac{1}{2}t.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2 = 2x_1 + 5t;\\ x_1 \quad = -\frac{t}{3}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2 = \frac{13}{3}t;\\ x_1 = -\frac{t}{3}.\end{cases}$$

Відповідь: $\begin{pmatrix}x_1 = -\frac{t}{3}\\ x_2 = \frac{13}{3}t\\ x_3 = t\end{pmatrix}.$

Приклад 4. За допомогою теореми Кронекера – Капеллі розв'язати неоднорідну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 4; \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = -1; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання:

Записуємо розширену матрицю системи й виконуємо елементарні перетворення над її рядками:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -8 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & -20 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -36 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -36 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -36 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -36 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, система сумісна, оскільки ранги основної та розширеної матриць дорівнюють 4. Змінну, яка відповідає нульовому стовпчику, позначимо через t.

Нехай $x_5 = t$, тоді отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 - 2t; \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 1 - 5t; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 + t; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2t. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему методом Гаусса.

За допомогою елементарних перетворень виключаємо з другого, третього і четвертого рівнянь змінну x_1:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 - 2t; \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 - 3t; \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -9 + 5t; \\ 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -12 + 8t. \end{cases}$$

За допомогою елементарних перетворень виключаємо з третього і четвертого рівнянь змінну x_2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 - 2t; \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 - 3t; \\ -2x_3 + 8x_4 = 14t; \\ 8x_3 + 12x_4 = 20t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 - 2t; \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 - 3t; \\ -x_3 + 4x_4 = 7t; \\ 2x_3 - 3x_4 = -5t. \end{cases}$$

За допомогою елементарних перетворень виключаємо з четвертого рівняння змінну x_3:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 - 2t; \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 - 3t; \\ -x_3 + 4x_4 = 7t; \\ 5x_4 = 9t. \end{cases}$$

Зворотним ходом метода Гаусса знаходимо:

$$x_4 = \frac{9t}{5};$$

$$x_3 = \frac{36t}{5} - 7t = \frac{t}{5};$$

$$x_2 = -3 - 3t - \frac{t}{5} + \frac{18t}{5} = \frac{2t-15}{5};$$

$$x_1 = 4 - 2t + \frac{2t-15}{5} - \frac{t}{5} + \frac{9t}{5} = 1.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{2t-15}{5} \\ x_3 = \dfrac{t}{5} \\ x_4 = \dfrac{9t}{5} \\ x_5 = t \end{pmatrix}.$

1.5. Метод Крамера розв'язання системи лінійних рівнянь

Теорема Крамера. Якщо визначник Δ основної матриці системи n лінійних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, який знаходять за формулами Крамера

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}; \quad i = \overline{i, n},$$

де Δx_i – визначник, отриманий із визначника Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Якщо $\Delta = 0$ і всі $\Delta x_i = 0$, то система має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один $\Delta x_i \neq 0$, то система не має розв'язків (несумісна).

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Записуємо основну матрицю системи і знаходимо визначники $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}; \ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = -4.$$

Отже, за формулами Крамера знаходимо:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = 1; \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = 1; \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = 1.$$

1.6. Матричний спосіб розв'язання систем лінійних рівнянь

Запишемо систему у вигляді матричного рівняння.

$AX = B$, тоді $X = A^{-1}B$.

Приклад. Розв'язати матричним методом систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + 7x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо матрицю A й обчислимо $\det A$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\3&7&0\end{pmatrix};\quad \det A=-4;\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}.$$

Матричне рівняння системи має вигляд:

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B.$$

Знайдемо обернену матрицю. Для цього визначимо алгебраїчні доповнення.

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&1\\7&0\end{vmatrix}=-7;\qquad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&1\\3&7\end{vmatrix}=11;\qquad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&0\\7&0\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&0\\3&0\end{vmatrix}=0;\qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\3&7\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1;\qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1.$$

Тоді $A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7&0&1\\3&0&-1\\11&-4&-1\end{pmatrix}$. Звідси

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7&0&1\\3&0&-1\\11&-4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-14+0+10\\6+0-10\\22-16-10\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=x_2=x_3=1$.

1.7. Метод Гаусса

Суть методу Гаусса полягає в тому, що послідовним виключенням невідомих система перетворюється в еквівалентну їй *трикутну систему*. Метод Гаусса можна використовувати за розмірів системи $m \times n$ і $n \times m$.

Спочатку нормують перше рівняння, поділивши його коефіцієнти на a_{11}. Отримане рівняння множать на перші коефіцієнти всіх інших рівнянь і послідовно віднімають від решти рівнянь. Унаслідок цього першу змінну буде виключено з усіх рівнянь, крім першого. На наступному етапі розв'язання така процедура застосовується до решти $(n-1)$ рівнянь, з яких виключається друга змінна. Процедура повторюється доти, доки після n кроків система не буде зведена до трикутного вигляду.

Математично цю процедуру можна описати так: на k-му кроці процесу виключення нормовані коефіцієнти k-го рівня мають вигляд

$$b_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}},$$

а нові коефіцієнти в наступних рівняннях записуються так:

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{ik} b_{ki}, \qquad i = k.$$

Головні коефіцієнти рівнянь ($a_{11}, a_{22}^{(1)}, ..., a_{nn}^{(n-1)}$) не дорівнюють нулю. Цієї умови можна дотримуватись, виконавши відповідні перетворення.

Схема зведення системи рівнянь до трикутного вигляду називається *схемою єдиного ділення*. Процес визначення коефіцієнтів b_{ij} трикутної системи називається прямим ходом. З останнього рівняння трикутної системи, яке містить одну змінну, знаходимо її значення, а далі зворотним ходом обчислюємо значення решти змінних.

Отже, алгоритм Гаусса складається з двох етапів:

1) побудова допоміжної матриці (прямий хід);

2) знаходження розв'язків побудованої системи (зворотний хід).

Розглянутий метод дає змогу розв'язувати і так звані погано обумовлені системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Зауважимо, що оскільки йдеться про матриці твердості, то метою у виборі основної системи є отримання на головній діагоналі таких елементів, які були б значно більшими за решту. При цьому, якщо найбільший елемент у кожному рядку матриці взяти за головний, то можна відразу зменшити можливість поганої обумовленості.

Розробка алгоритмів розв'язання задач і створення відповідних програм обчислень є насамперед справою спеціалістів із числових методів. У разі розв'язування прикладних задач значна частина машинного часу витрачається на відшукання розв'язків систем алгебраїчних рівнянь і обернення матриць. Бажано, щоб студент мав уявлення про те, за якими схемами реалізуються відповідні програми.

Приклад 1. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання.

	x_1	x_2	x_3	x_4	Вільні члени	
	1	1	1	-1	2	
	1	-1	-1	1	0	
	2	+1	-1	2	9	
	3	1	2	-1	7	A(4×4)
	1	1	1	-1	2	
	0	+2	2	-2	2	
Прямий хід	0	1	3	-4	-5	B(3×3)
	0	2	1	-2	2	
		1	1	-1	1	
			-2	3	6	
			1	0	3	C(2×2)
			1	-3/2	-3	

Зворот-ний хід				1	4	Корені системи рівнянь
			1		3	
		1			2	
	1				1	

$x_3 \cdot 1 - 3/2 \cdot 4 = -3;$ $\qquad$ $x_3 = -3 + 6 = 3;$

$x_2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 1;$ $\qquad$ $x_2 = 1 + 4 - 3 = 2;$

$x_1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2;$ $\qquad$ $x_1 = 2 + 4 - 3 - 2 = 1.$

Виконавши прямий хід, дістанемо матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Зворотним ходом знаходимо корені:

$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4.$

Приклад 2. Розв’язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Розмір системи 5×4.

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи та зведемо її до трикутної:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right)\to$$

Четвертий рядок пропорційний другому, і тому його відкидаємо, а другий скорочуємо на –2.

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \end{array}\right).$$

Запишемо систему:

$$x_1+2x_2+3x_3-x_4=1;$$
$$2x_2+4x_3-x_4=1;$$
$$-6x_3+5x_4=-1.$$

З третього рівняння маємо $x_3=\dfrac{5x_4+1}{6}$;

з другого – $x_2=\dfrac{1-7x_4}{2}$;

з першого – $x_1=\dfrac{-1+5x_4}{6}$.

Позначимо змінну $x_4=t$ і остаточно отримаємо:

$$x_1=\frac{-1+5t}{6};\; x_2=\frac{1-7t}{2};\; x_3=\frac{5t+1}{6};\; x_4=t.$$

1.8. Ітераційні методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Ітераційні схеми розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовуються до систем, зведених до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1); \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn}x_{n-1} + b_n). \end{cases}$$

(перше рівняння розв'язане відносно x_1, друге – відносно x_2 і т. д.). Праві частини рівнянь системи можна розглядати як функції від n аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Позначимо праву частину i-го рівняння через $L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (зберігаючи єдиний підхід, не зважаємо на те, що у правій частині i-го рівняння x_i відсутнє).

Тоді система матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = L_1(x_1, \ldots, x_n); \\ x_2 = L_2(x_1, \ldots, x_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = L_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}.$$

Задамо початкові (нульові) наближення коренів цієї системи: $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Тоді перші наближення дістаємо, підставивши у праві частини початкові наближення:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = L_1(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}); \\ x_2^{(1)} = L_2(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = L_n(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}). \end{cases}$$

Одержані перші наближення можна використати для знаходження других і т. д. Ітераційний процес продовжується доти, доки $x^{(k)}$ не стануть достатньо близькі до $x^{(k-1)}$, тобто почне виконуватися нерівність

$$M^k = \max(x_i^k - x_i^{k-1}) \le \varepsilon,$$

де $i = \overline{1,n};$ ε – задана точність.

Краще порівнювати з ε не абсолютні, а відносні різниці сусідніх величин, розглядаючи нерівність

$$\max\left|\frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}}\right| < \varepsilon.$$

Щоб систему лінійних рівнянь можна було обчислити методом ітерацій, треба перевірити достатні умови збіжності ітераційного процесу.

Достатньо використати такі умови:

1) $$A = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

– максимальна сума модулів відношень коефіцієнтів будь-якого рядка до діагонального коефіцієнта менша за одиницю.

Нерівність виконуватиметься, якщо діагональні елементи системи задовольняють умову

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j \ne 1 \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|;$$

2) $$A = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

– максимальна із сум модулів коефіцієнтів за невідомих у правій частині системи, взятих по стовпцях, повинна бути менша за одиницю;

3) $$A=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{2}}<1$$

– сума квадратів усіх коефіцієнтів за невідомих у правій частині системи повинна бути менша за одиницю.

Приклад 3. Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}5x_1+2x_2-2x_3=7;\\3x_1-6x_2+x_3=8;\\8x_1-2x_2+11x_3=9.\end{cases}$$

Звести систему до виду зручному для ітерації.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов збіжності:

$$|5|>|2|+|-2|=4;$$
$$|-6|>|3|+|1|=4;$$
$$|11|>|8|+|-2|=10.$$

Отже, ця умова виконується.

Зведемо цю систему до вигляду:

$$x_1=1/5(7-2x_2+2x_3);$$
$$x_2=1/6(-8+3x_1+x_3);$$
$$x_3=1/11(9-8x_1+2x_2).$$

Припустимо, що

$$x_1=x;\quad x_2=y;\quad x_3=z\,.$$

Тоді систему запишемо так:

$$\begin{cases}x=1{,}4-0{,}4y+0{,}4z;\\y=-1{,}33+0{,}5x+0{,}167z;\\z=0{,}818-0{,}727x+0{,}182y.\end{cases}$$

1.9. Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає метод Саррюса?
2. У чому полягає метод зірочки?
3. Чим мінор відрізняється від алгебраїчного доповнення?
4. Напишіть формулу для знаходження оберненої матриці.
5. Яка система лінійних рівнянь називається квадратною?
6. Яка система лінійних рівнянь називається визначеною?
7. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?
8. Яка система рівнянь називається лінійною?
9. Коли система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв’язок?
10. Коли система лінійних алгебраїчних рівнянь не має розв’язків?
11. Коли система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч розв’язків?
12. Що називається оберненою матрицею?
13. Назвіть умови існування оберненої матриці.
14. Як знайти транспоновану матрицю алгебраїчних доповнень?
15. У чому полягає прямий хід метода Гаусса ?
16. Що називається розширеною матрицею системи?
17. У чому полягає зворотний хід метода Гаусса?
18. Які умови збіжності ітераційного процесу?
19. Як вибрати нульові корені системи?
20. Назвіть умову зупинки ітераційного процесу.

Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Вектори і лінійні операції над ними

Геометричним вектором називають напрямлений відрізок $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$, який отримано прикладанням вектора до точки *A*. Довжина вектора називається модулем вектора й позначається $|\vec{a}|$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор нульової довжини називається *нуль-вектором* і позначається символом $\vec{0}$. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають *рівними* ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні (паралельні), однаково спрямовані і модулі їх рівні.

Одиничним вектором, або ортом $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$, називають вектор, довжина якого дорівнює 1, а напрямок збігається з напрямком $\vec{a}$. Якщо вектор можна переносити паралельно самому собі, його називають *вільним*. Якщо вектор можна переміщувати вздовж однієї прямої, його називають *ковзним*. Якщо вектор жорстко зв'язаний із точкою прикладення, то він називається *зв'язаним*.

Додавання векторів здійснюється за правилами трикутника чи паралелограма (рис. 3, 4) за умови $n > 2$ за правилом многокутника (рис. 5).

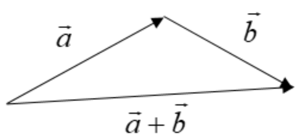

Рис. 3

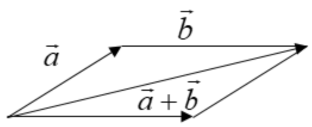

Рис. 4

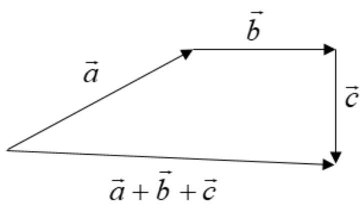

Рис. 5

Різницею $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, такий, що $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}$.

Властивості операції додавання

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4. Для кожного вектора $\vec{a}$ знайдеться вектор, позначимо його $(-\vec{a})$, такий, що $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число $\lambda\in R$ називається вектор $\lambda\vec{a}$, такий, що $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ і напрямок його збігається з напрямком $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, або протилежний $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Властивості операції множення вектора на число

1. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.
2. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$.
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Рівність $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$, де $\lambda\in R$, є необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2.2. Базис

Базисом векторного простору називається мінімальний (за кількістю) набір векторів, через які можна виразити будь-який вектор простору.

Будь-які два *неколінеарні* вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що лежать в одній площині, утворюють базис на цій площині.

Вектори, що лежать у паралельних площинах або, що те ж саме, в одній площині, називаються *компланарними*.

Зручно ввести в розгляд два вектори: $\vec{i}$ – вектор довжини 1 (одиничний вектор), паралельний осі OX, $\vec{j}$ – одиничний вектор, паралельний осі OY.

Тоді будь-який вектор $\vec{a}$ на площині можна виразити через вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ (рис. 6).

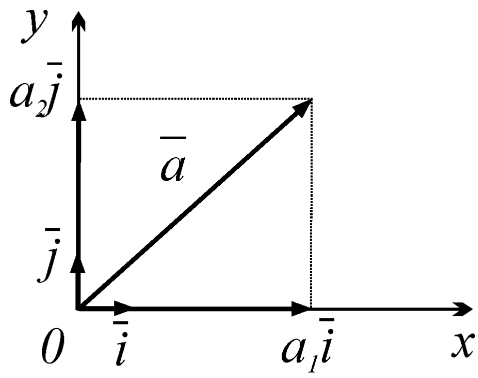

Рис. 6

Таким чином, вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ утворять базис простору (площини), оскільки будь-який вектор площини можна виразити через $\vec{i}$, $\vec{j}$, а одного із цих векторів недостатньо для одержання довільного вектора площини, тобто це мінімальний набір $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$.

Числа α_1, α_2 у розкладанні вектора $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ є, очевидно, його проєкціями на осі координат, які ми назвали координатами вектора в цій системі координат. Таким чином, векторну величину на площині можна представляти у вигляді напрямленого відрізка або парою дійсних чисел (координат вектора).

Якщо векторна величина розглядається у звичайному тривимірному просторі, то до двох координат додається третя – проєкція на ось OZ.

Відмітимо, що базис на площині утворюють будь-які два *неколінеарні* (непаралельні) вектори, а базис у тривимірному просторі утворять будь-які три вектори, які не лежать в одній площині.

Кількість векторів у базисі називають розмірністю простору.

Відразу зауважимо, що в лінійному просторі базис визначений неоднозначно, але кількість векторів у ньому – величина постійна.

Довільний геометричний вектор має єдине зображення у вигляді $\vec{a} = \alpha_1\vec{l}_1 + \alpha_2\vec{l}_2 + \alpha_3\vec{l}_3$, де $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ – три впорядковані *некомпланарні* вектори в просторі R_3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координати вектора в цьому базисі, а $\vec{a} = \alpha_1 \vec{l}_1 + \alpha_2 \vec{l}_2 + \alpha_3 \vec{l}_3$ – розклад вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$.

Базис $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ називають *прямокутним*, якщо вектори $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ попарно перпендикулярні і довжина їх дорівнює одиниці. У такому випадку їх позначають $\vec{l}_1 = \vec{i}$, $\vec{l}_2 = \vec{j}$, $\vec{l}_3 = \vec{k}$ [12].

При цьому зручно ввести в розгляд, крім уже відомих нам векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, одиничний (довжина якого дорівнює 1) вектор $\vec{k}$, паралельний осі OZ. Як і у випадку площини, можна показати, що будь-який вектор $\vec{a}$ в тривимірному просторі однозначно представляється у вигляді суми

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

Числа a_1, a_2, a_3 є координатами вектора $\vec{a}$ в цій системі координат, тобто є його проєкціями на осі координат. Таким чином, у фіксованій системі координат записи $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ і $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ є еквівалентними (рис. 7).

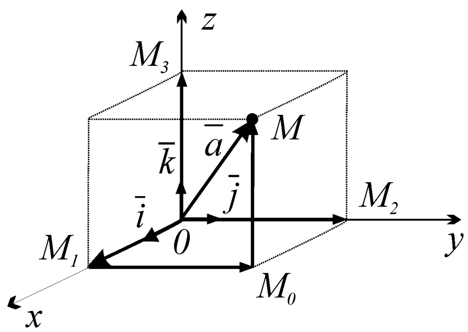

Рис. 7

Довжину (модуль) вектора обчислюють за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, оскільки квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

При цьому $a_1 = |\vec{a}| \cos\alpha$, $a_2 = |\vec{a}| \cos\beta$, $a_3 = |\vec{a}| \cos\gamma$, де α, β, γ – кути, утворені вектором $\vec{a}$ з осями OX, OY, OZ відповідно. Очевидно, що такі кути задають напрямок вектора $\vec{a}$, тому їх косинуси називають *напрямними косинусами* вектора. Знаходяться напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ за формулами: $\cos a = \dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$

і задовольняють умову $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Отже, вектор $\vec{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – *орт* вектора $\vec{a}$. Орт вектора має важливе значення в роботі з векторами, оскільки задає напрямок і масштаб на осі. Зверніть увагу, що довжина вектора $\vec{e}$ дорівнює 1, тобто орт – одиничний вектор.

Якщо точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та $B(x_2; y_2; z_2)$ – довільні точки простору R_3, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ записуються так:

$$\overrightarrow{AB} = ((x_2 - x_1); (y_2 - y_1); (z_2 - z_1)).$$

2.3. Скалярний добуток

Проєкцією вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$ називається число $np_{\vec{b}}\vec{a} = |a| \cdot \cos\alpha$, де $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$ (рис. 8).

Проєкція може бути як додатна (рис. 8а), так і від'ємна (рис. 8б) [12].

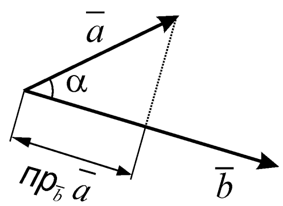

Рис. 8а

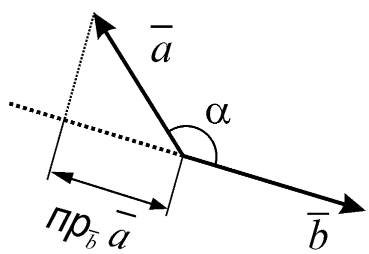

Рис. 8б

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають число, що дорівнює добутку цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha.$$

Фізичне тлумачення скалярного добутку двох векторів полягає в тому, що такий добуток означає роботу, виконану переміщенням матеріальної точки під дією одного вектора вздовж другого.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.
3. $\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}),\lambda\in R$.
4. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Геометричні властивості скалярного добутку

Теорема 1 (*умова перпендикулярності векторів*)

Для того щоб вектор $\vec{a}$ був перпендикулярний вектору $\vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб скалярний добуток дорівнював нулю.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$$

Теорема 2

Для того щоб кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ був гострий, необхідно і достатньо, щоб скалярний добуток векторів був більший за нуль.

Для того щоб кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ був тупий, необхідно і достатньо, щоб скалярний добуток векторів був менший за нуль.

Вираз скалярного добутку через координати векторів

Якщо вектори $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ та $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ задані координатами в прямокутному базисі, то скалярний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2.$$

2.4. Векторний добуток

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, який задовольняє такі умови:

1. $\vec{c}\perp\vec{a}$; $\vec{c}\perp\vec{b}$.
2. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.
3. Вектор $\vec{c}$ напрямлений у той бік, з якого поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на найменший кут здійснюється проти руху стрілки годинника (рис. 9).

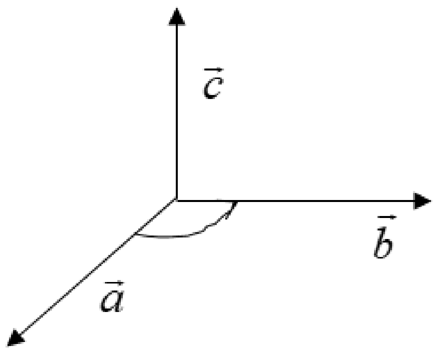

Рис. 9

Алгебраїчні властивості векторного добутку.

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

2. $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \lambda \vec{b}), \lambda \in R$.

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$.

Геометричні властивості скалярного добутку

Теорема 1 (*умова паралельності векторів*)

Для того щоб вектор $\vec{a}$ був паралельний вектору $\vec{b}$, необхідно і достатньо, щоб векторний добуток дорівнював нулю.

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Теорема 2

Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, сторонами якого є ці вектори.

Вираз векторного добутку через координати векторів

Якщо вектори $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ задані координатами в прямокутному базисі, то векторний добуток

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

2.5. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число, що дорівнює $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Алгебраїчні властивості мішаного добутку.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$, тобто мішаний добуток не змінюється із циклічною перестановкою трьох його множників;

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}$, тобто мішаний добуток змінює знак із перестановкою двох його множників.

Теорема 1 (*умова компланарності векторів*)

Для того щоб вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ були компланарні, необхідно і достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}-\textit{компланарні}.$$

Теорема 2. Модуль мішаного добутку – це об’єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Об’єм піраміди, побудованої на векторах, можна записати у вигляді

$$V=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Обчислити $(\vec{a}+\vec{b})^2$, якщо $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3;\ \widehat{\vec{a}\vec{b}}=60^\circ$.

Розв’язання.

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ+|\vec{b}|^2=4+2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+9=19.$$

Приклад 2. Знайти координати вектора $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}(2;1;-1)$ та задовольняє умову $\vec{x}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=-6$.

Розв'язання. Якщо вектори колінеарні, то координати їх пропорціональні. Нехай $\vec{x}(x;y;z)$, тоді

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}=t; \Rightarrow\ x=2t;\ y=t;\ z=-t.$$

Вектор $\vec{b}(2;-1;\ 1);\ \vec{x}\cdot\vec{b}=-6\ \Rightarrow 4t-t-t=-6;\ t=-3$, звідси $\vec{x}(-6;-3;3)$.

Приклад 3. Чи належать точки $A(2;-3;5)$, $B(0;2;1)$, $C(-2;-2;3)$ та $D(3;2;4)$ одній площині?

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ (рис. 10), якщо вони колінеарні, то $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}=0$ і всі точки належать одній площині.

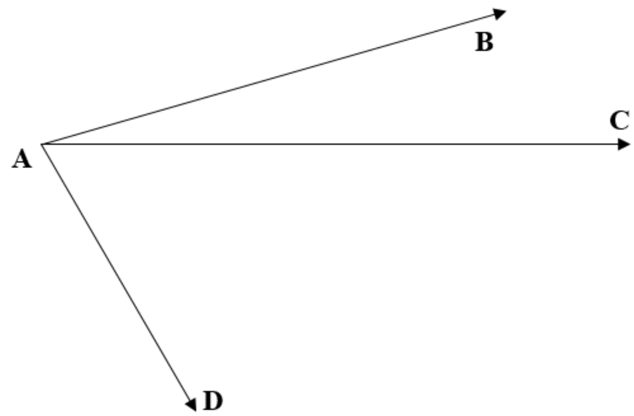

Рис. 10

$$\overrightarrow{AB}=(0-2;\ 2+3;\ 1-5)=(-2;\ 5;-4);$$

$$\overrightarrow{AC}=(-2-2;\ -2+3;\ 3-5)=(-4;\ 1;\ -2);$$

$$\overrightarrow{AD}=(3-2;\ 2+3;\ 4-5)=(1;\ 5;-1).$$

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}=36\neq 0.$$

Тобто точки не належать одній площині.

Приклад 4. Дано вектори: $\vec{x}(-2;\,4;\,7)$; $\vec{a}(0;\,1;\,2)$; $\vec{b}(1;\,0;\,1)$; $\vec{c}(-1;\,2;\,4)$. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$.

Розв'язання. У базисі $\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}$ $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

Тоді

$$\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 7\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases}-2=0\cdot\alpha+\beta-\gamma;\\ 4=\alpha+0\cdot\beta+2\gamma;\\ 7=2\alpha+\beta+4\gamma.\end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $\alpha=10;\ \beta=-1;\ \gamma=-3.$ У даному базисі $\vec{x}=10\vec{a}-\vec{b}-3\vec{c}.$

Приклад 5. Обчислити площу трикутника *ABC* (рис. 11).

Розв'язання. Нехай задано трикутник *ABC* з вершинами $A(x_1;y_1;z_1),\ B(x_2;y_2;z_2),\ C(x_3;y_3;z_3).$

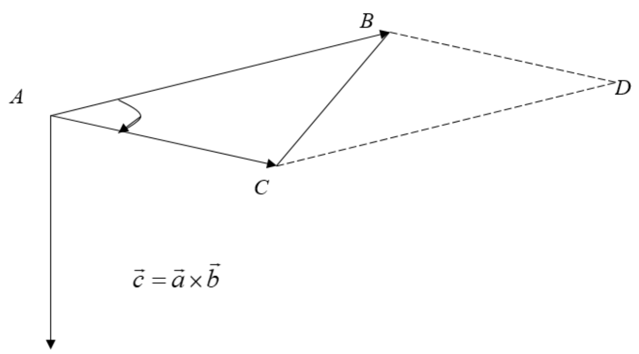

Рис. 11

Розглянемо два вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1);$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).$$

Тоді $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{ABCD}$ – площа паралелограма, побудованого на векторах як на основі.

Таким чином, площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Знайдемо векторний добуток

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k};$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\alpha\vec{i} \times \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}\right|.$$

Отже, $S = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Приклад 6. Обчислити площу трикутника ABC, якщо

$A(1;\ 0;\ 2),\ B(1;\ 2;\ 0),\ C(0;\ 1;\ 2).$

Розв'язання. Знайдемо вектори

$\overrightarrow{AB} = (1-1; 2-0; 0-2) = (0; 2; -2)$ та

$\overrightarrow{AC} = (0-1;\ 1-0; 2-2) = (-1;\ 1;\ 0)$

Тоді

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\,;$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+4}=\frac{1}{2}\sqrt{12}=\frac{2}{2}\sqrt{3}\,.$$

Отже, $S_{ABC}=\sqrt{3}$.

Окремим є випадок, коли трикутник ABC лежить в одній з координатних площин, наприклад xOy. Тоді $z_1=z_2=z_3$, а добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$, де $\alpha=\beta=0$, а $\gamma=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}$.

Площа трикутника $S=\frac{1}{2}\cdot|\gamma|$.

Визначник другого порядку можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ z_1 & z_2 & 1\end{vmatrix}.$$

Тоді площа трикутника з вершинами вершинами $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ виражається формулою

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ z_1 & z_2 & 1\end{vmatrix}.$$

***Приклад** 7*. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(1;\,2)$, $B(0;\,1)$, $C(3;\,2)$.

Розв’язання. Обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+6-3-2-0=2.$$

Тоді $S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$

Відповідь. $S_{ABC} = 1.$

Приклад 8. Силу $\vec{F}$ прикладено до точки $M(1;\ 2;\ 3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $A(3;\ 2;\ -1)$, якщо сила $\vec{F} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$

Розв'язання. Знайдемо вектор $\vec{AM}$:

$$\vec{AM} = (1-3)\vec{i} + (2-2)\vec{j} + (3+1)\vec{k}$$

Оскільки момент сили $\vec{F}$, прикладеної до точки M, відносно точки A знаходиться через векторний добуток плеча сили $\vec{AM}$ на силу $\vec{F}$, маємо:

$$m_A\left(\vec{F}\right) = \vec{AM} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 12\vec{j} - 4\vec{k}\ .$$

2.6. Запитання для самоконтролю

1. Означення вектора.
2. Які вектори називаються колінеарними?
3. Які вектори називаються компланарними?
4. Лінійні операції над векторами.
5. Що називається базисом?

6. Означення скалярного добутку векторів.

7. Алгебраїчні та геометричні властивості скалярного добутку векторів.

8. Умова перпендикулярності двох векторів.

9. Вираз скалярного добутку через координати векторів.

10. Яка система векторів називається правоорієнтовною?

11. Яка система векторів називається лівоорієнтовною?

12. Означення векторного добутку векторів.

13. Алгебраїчні та геометричні властивості векторного добутку.

14. Умова колінеарності векторів.

15. Вираз векторного добутку через координати векторів.

16. Означення мішаного добутку векторів.

17. Алгебраїчні та геометричні властивості мішаного добутку векторів.

18. Умова компланарності трьох векторів.

Розділ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Пряма на площині

Пряма на площині в декартовій прямокутній системі координат xOy може бути задана рівнянням одного з таких видів:

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1;\ y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n} = (A; B)$.

Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x; y)$ і введемо вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ (рис. 12) [6].

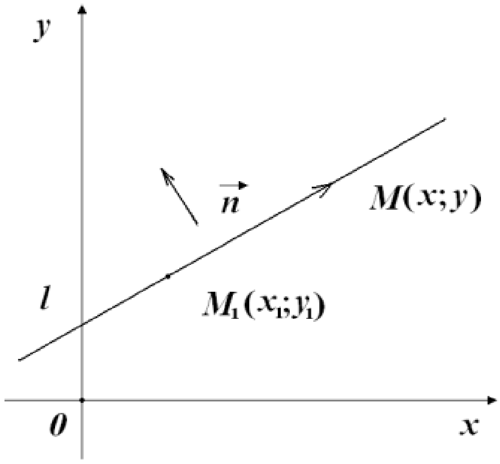

Рис. 12

Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) ***називається рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора***.

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ називається ***нормальним*** вектором прямої. Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельни між собою, отже, їх координати пропорційні.

Загальне рівняння прямої

Рівняння будь-якої прямої, яка лежить в площині xOy, є лінійним рівнянням відносно x і y. З рівняння (1) маємо рівняння

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається ***загальним рівнянням прямої***. Коефіцієнти A і B за невідомих x і y загального рівняння є координатами її нормального вектора.

Розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат xOy залежно від значень коефіцієнтів A, B і C.

Рівняння у відрізках

1. Якщо $A \neq 0;\ B \neq 0;\ C \neq 0,$ то рівняння (2) зводиться до рівняння виду:

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1, \text{ або}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{3}$$

Рівняння (3) називається рівнянням прямої у відрізках на осях. Тобто пряма перетинає осі координат в точках з координатами $(a;\ 0)$ і $(0;\ b)$ де $(0;\ b)$, де $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$ (рис. 13).

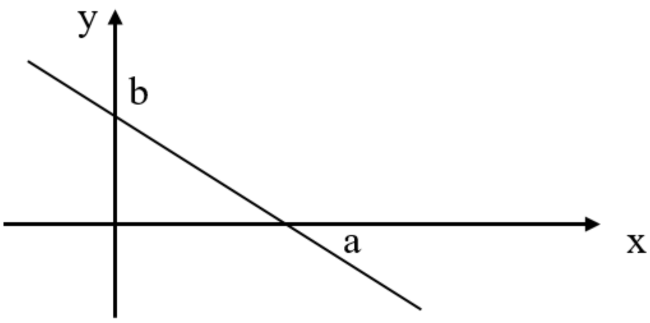

Рис. 13

2. Якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox і проходить через точку $\left(0; -\dfrac{C}{B}\right)$ (рис. 14).

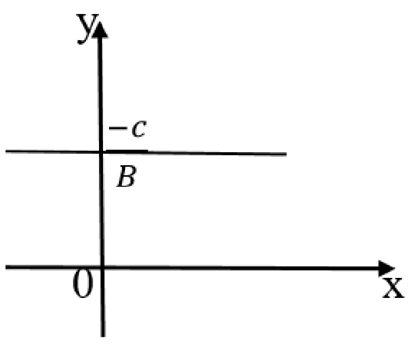

Рис. 14

3. Якщо $B=0$, то пряма $Ax+C=0$ паралельна осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A};0\right)$.

4. Якщо $C=0$, то пряма $Ax+By=0$ проходить через початок координат.

5. Якщо $A=C=0$, то пряма $By=0$ або $y=0$ визначає вісь Ox.

6. Якщо $B=C=0$, то пряма $Ax=0$ або $x=0$ визначає вісь Oy.

Рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом

З рівняння (2) маємо

$$y=kx+b \tag{4}$$

– ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*** k, $k=tg\alpha$, де α – кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox, b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy (рис. 15).

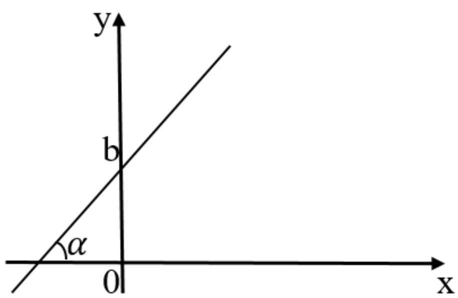

Рис. 15

Рівняння пучка прямих, що проходять через точку $M_0(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$ дістанемо з умови колінеарності векторів $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (5)$$

– рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$.

Канонічне рівняння прямої

Канонічне рівняння прямої дістанемо з умови колінеарності вектора $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ і напрямного вектора $\vec{s} = (m;\ n)$, маємо

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}. \qquad (6)$$

Параметричні рівняння прямої

З канонічного рівняння прямої маємо параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_1 + mt; \\ y = y_1 + nt. \end{cases} \qquad (7)$$

Змінна t може набувати довільних значень, $t \in (-\infty;\ +\infty)$ і називається ***параметром.***

Нормальне рівняння прямої

Загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ називається нормальним якщо:

1) $A^2 + B^2 = 1,$ тобто $\left|\vec{N}\right| = 1$;
2) $C \le 0$.

$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta - \rho = 0$ – ***нормальне рівняння*** прямої, $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (A; B)$ прямої, а $\rho > 0$ – відстань від початку координат до прямої. Загальне рівняння приводиться до нормального виду шляхом множення на нормуючий множник

$\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (знак береться протилежний знаку *C*).

Відстань від точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямої l обчислюється за формулою

$$d = \left| x_1 \cdot \cos\alpha + y_1 \cdot \cos\beta - \rho \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Приклад 1. Загальне рівняння прямої $11x - 4y - 44 = 0$.

Записати рівняння прямої у вигляді рівнянь:

1) з кутовим коефіцієнтом;
2) у відрізках;
3) у нормальному виді;
4) у параметричному виді.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно *y*.

$$y = \frac{11}{4}x - 4; \quad k = \frac{11}{4}; \quad b = -4.$$

Перенесемо вільний член вправо і поділимо на нього рівняння

$$\frac{11x}{44} - \frac{4y}{44} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-11} = 1. \quad |\vec{a}| = 4; \quad |\vec{b}| = 11.$$

Пряма проходить через точки $A(4;\, 0)$ та $B(0;\, -11)$ (рис. 16).

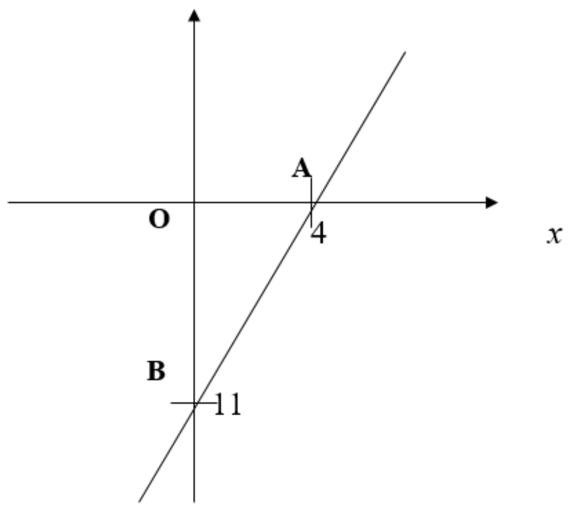

Рис. 16

Знайдемо нормуючий множник $\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{137}}$.

Помножимо на нього загальне рівняння прямої і отримаємо нормальне рівняння прямої:

$\frac{11}{\sqrt{137}}x - \frac{4}{\sqrt{137}}y - \frac{44}{\sqrt{137}} = 0$, де $\cos\alpha = \frac{11}{\sqrt{137}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{137}}$; $\rho = \frac{44}{\sqrt{137}}$.

Нехай $x = t$, тоді $y = \frac{11}{4}t - 4.$

$$\begin{cases} x = t; \\ y = \frac{11}{4}t - 4. \end{cases}$$ – параметричне рівняння прямої.

Приклад 2. Загальне рівняння прямої $3x - 4y + 5 = 0.$ Скласти нормальне рівняння.

Розв'язання. Знаходимо нормуючий множник за формулою

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}:$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Отже, нормальне рівняння прямої має вигляд:

$$-\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - 1 = 0.$$

Приклад 3. Скласти загальне рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3;\ 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(2;\ 3)$.

Розв'язання. З рівняння (1) маємо:

$$2(x+3) + 3(y-5) = 0;$$

$$2x + 6 + 3y - 15 = 0.$$

Отже, шукане рівняння прямої має вигляд:

$$2x+3y-9=0.$$

Приклад 4. Скласти канонічне та параметричні рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(-2;\ 3)$ і $M_2(4;\ 2)$.

Розв'язання. З рівняння (5) маємо:

$$\frac{x+2}{4+2}=\frac{y-3}{2-3}\Rightarrow\frac{x+2}{6}+\frac{y-3}{-1}$$ – канонічне рівняння прямої.

З рівняння (7) маємо:

$$\begin{cases} x=-2+6t; \\ y=3-t. \end{cases}$$ – параметричні рівняння прямої.

Приклад 5. Знайти відстань від точки $M(2;4)$ до прямої $3x-4y+4=0.$

Розв'язання. Відстань від точки $M_1(x_1;y_1)$ до прямої *l* обчислюється за формулою:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Отже, отримаємо: $d=\left|\dfrac{3\cdot 2-4\cdot 4+4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|=\dfrac{4}{5}.$

Кут між двома прямими на площині

I. Нехай прямі L_1 та L_2 задано канонічними рівняннями:

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1};\quad L_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

і кут φ – кут між цими прямими, $\varphi=\in(0,\pi)$ (рис. 17).

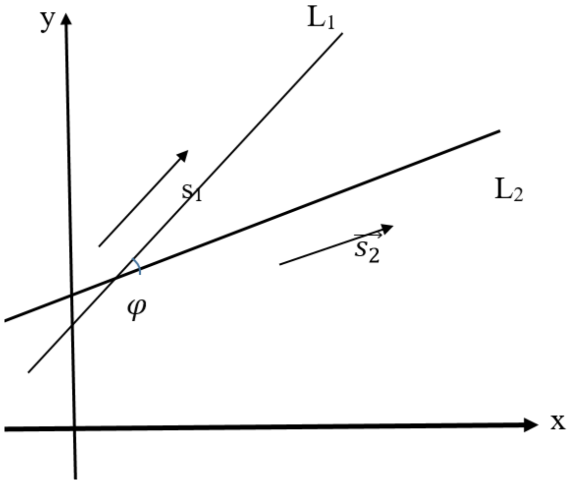

Рис. 17

Оскільки напрямні вектори даних прямих є $\vec{s}_1 = (m_1; n_1)$ та $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Наслідки:

Якщо пряма L_1 паралельна прямій L_2, то напрямний вектор $\vec{s}_1$ паралельний напрямному вектору $\vec{s}_2$, отже, для того щоб прямі були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ були колінеарні [7]:

$$L_1 \parallel L_2 \to \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Отже,

$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ – ***умова паралельності двох прямих.***

Якщо пряма L_1 перпендикулярна прямій L_2, то напрямний вектор $\vec{s}_1$ перпендикулярний напрямному вектору $\vec{s}_2$, отже, для того щоб прямі були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб були перпендикулярні напрямні вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$:

$$L_1 \perp L_2 \to \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Отже,

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0$$ – ***умова перпендикулярності двох прямих.***

II. Нехай прямі L_1 та L_2 задано загальними рівняннями: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тоді кут φ – кут між ними дорівнює куту між їх векторами нормалі: $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ (рис. 18).

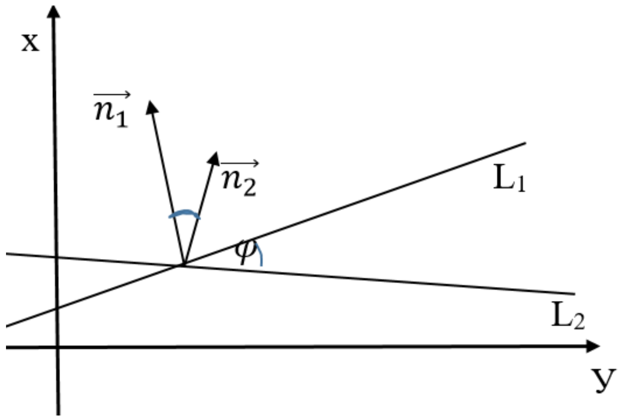

Рис. 18

Тому кут φ між прямими L_1 та L_2:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Наслідки:

Якщо пряма L_1 паралельна прямій L_2, то їх вектори нормалі також паралельні, отже, для того щоб прямі були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектори $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ були колінеарні:

$$L_1 \parallel L_2 \to \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Отже,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$ – ***умова паралельності двох прямих.***

Якщо пряма L_1 перпендикулярна прямій L_2, то вектор нормалі $\vec{n}_1$ перпендикулярний вектору нормалі $\vec{n}_2$, отже, для того щоб прямі були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб були перпендикулярні їх вектори нормалі $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$:

$$L_1 \perp L_2 \to \ \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Отже,

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$ – ***умова перпендикулярності двох прямих.***

III. Нехай прямі L_1 та L_2 задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = tg\alpha_1$ та $k_2 = tg\alpha_2$ – кутові коефіцієнти прямих, тоді кут між ними визначається за формулою:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|.$$

Дійсно [8]:

Задані прямі L_1 та L_2, тож нам відомі кутові коефіцієнти прямих $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$. Потрібно знайти кут φ між прямими L_1 та L_2.

Очевидно, що $\alpha_1 + \varphi = \alpha_2$ (рис. 19):

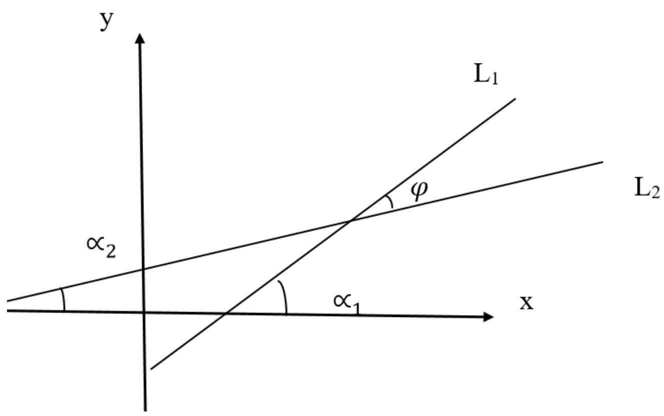

Рис. 19

Отже, маємо:

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1 \to tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}.$$

$tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$ – ***формула для знаходження тангенса кута між двома прямими***.

Наслідки:

$k_1=k_2$ – ***умова паралельності двох прямих;***

$k_1\cdot k_2=-1$ – ***умова перпендикулярності двох прямих.***

Приклад 6. Знайти кут між прямими: $y=2x+5$ і $y=-3x+1$.

Розв'язання. Тангенс кута між прямими знаходимо за формулою $tg\varphi=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$. Беремо $k_1=2$ і $k_2=-3$, тоді $tg\varphi=\left|\dfrac{-3-2}{1-6}\right|=1$, тобто $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

3.2. Криві на площині

Кажуть, що крива L у системі координат xOy має рівняння $F(x;y)=0$, якщо виконується умова: точка $M(x;y)$ належить кривій L тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють відношення $F(x;y)=0$.

Приклад 7. Написати рівняння кривої, кожна точка якої перебуває на однаковій віддалі від точок $M_1(3;2)$ та $M_2(2;3)$.

Розв'язання. Нехай L – шукана крива. $M(x;y)\in L$ тоді і тільки тоді, коли

$$\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \left|\overrightarrow{M_2M}\right|;\ \overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1) = (x-3, y-2);\ \ \overrightarrow{M_2M} = (x-2; y-3),$$

тоді

$$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|^2 = \left|\overrightarrow{M_2M}\right|^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9;$$

$$2x = 2y \Rightarrow y = x.$$

Відповідь. Шукана крива є прямою лінією $y = x$.

3.3. Алгебраїчні криві другого порядку

Алгебраїчною кривою другого порядку називають криву L, рівняння якої в декартовій системі координат має вигляд [8]:

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, де не всі A, B, C одночасно дорівнюють нулю.

У загальному випадку може статися, що рівняння визначає вироджену криву (порожню множину, точку, пряму, пару прямих). Якщо крива невироджена, то для неї знайдеться така система координат, що рівняння матиме один із видів:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$ – *еліпс*;

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0;\ b > 0$ – *гіпербола*;

$y^2 = 2px$, $p > 0$ – *парабола*.

Еліпс із канонічним рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > b > 0$ має форму, зображену на рис. 20. Точки $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$, $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ -b)$ – *вершини* еліпса, осі симетрії Ox та Oy – *головні* осі еліпса, $O(0;\ 0)$ – *центр* еліпса (рис. 20).

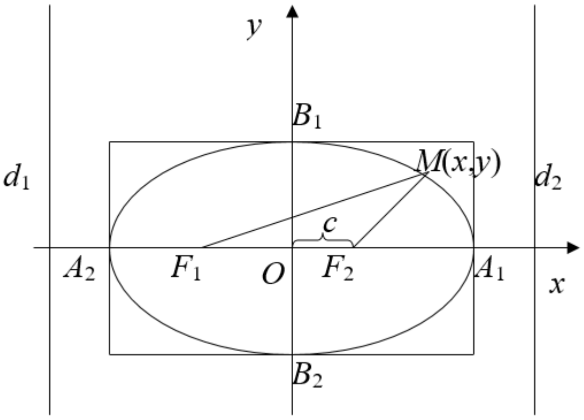

Рис. 20

Точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$ називають *фокусами* еліпса, а числа $r_1=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ та $r_2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальними радіусами* точки M, якщо $r_1=r_2$, фокуси збігаються із центром $x^2+y^2=a^2$ – рівняння кола радіуса a із центром у точці $O(0;\,0)$.

Число $e=\dfrac{c}{a}$ $(0\le e<1)$ називається ексцентриситетом еліпса.

Прямі d_1 та d_2: $x=-\dfrac{a}{e}$; $x=\dfrac{a}{e}$ називаються *директрисами* еліпса.

Гіпербола з канонічним рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; $a>0$; $b>0$ має форму, зображену на рис. 21.

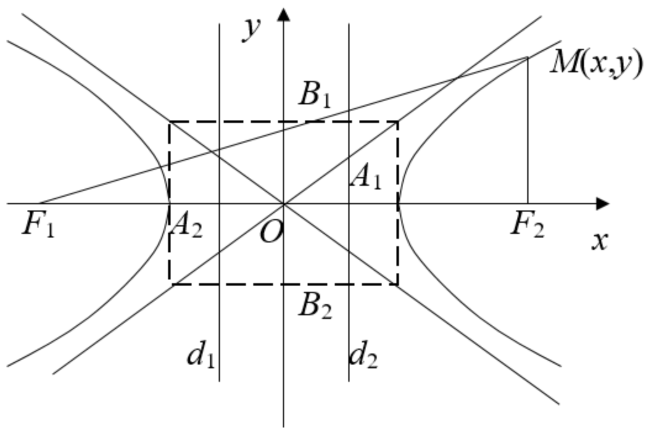

Рис. 21

Параметри a та b називають *півосями* гіперболи, точки $A_1(a;\,0)$ та $A_2(a;\,0)$ – її *вершинами*, осі симетрії Ox та Oy – *дійсними* та *уявними* осями, а центр симетрії O – *центром* гіперболи.

Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ – *асимптоти* гіперболи, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ називають фокусами гіперболи, $r_1 = \left|\overrightarrow{F_1M}\right|$ та $r_2 = \left|\overrightarrow{F_2M}\right|$ – *фокальними радіусами* точки M, що належить гіперболі.

Число $e = \frac{c}{a}$ $(1 < e < +\infty)$ – ексцентриситет гіперболи. Якщо $a = b$, гіперболу називають *рівносторонньою*.

Прямі d_1 та d_2: $x = -\frac{a}{e}$; $x = \frac{a}{e}$ називаються *директрисами* гіперболи.

Парабола з канонічним рівнянням $y^2 = 2px$; $p > 0$ зображена на рис. 22.

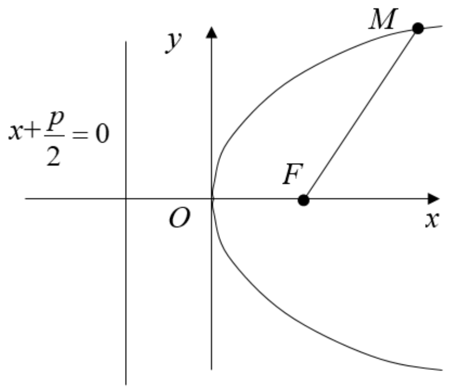

Рис. 22

Пряма $x = -\frac{p}{2}$ називається директрисою параболи, p – параметр параболи, $O(0,0)$ – її *вершина*, Ox – вісь параболи. Точка $F = \left(\frac{p}{2};0\right)$ – *фокус* параболи, а $r = \left|\overrightarrow{FM}\right|$ – *фокальний радіус* точки M параболи.

Приклад 1. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо $e = \frac{1}{2}$, а віддаль між директрисами становить 32.

Розв'язання. Рівняння директрис $x = -\frac{a}{e}$ та $x = \frac{a}{e}$, тоді $32 = \frac{2a}{e}$; $2a = 32e$; $a = 8$; $e = \frac{c}{a}$, тобто $c = 4$,

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4\sqrt{3}$.

Рівняння еліпса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$

Приклад 2. Написати канонічне рівняння гіперболи, у якої $c = 10$, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Розв'язання. З рівняння випливає, що $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, тобто $b = \frac{4}{3}a.$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $10 = \frac{5}{3}a$; $a = 6$, $b = 8$. Отже,

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ – рівняння гіперболи.

Приклад 3. Знайти фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 12x$, якщо $y(M) = 6.$

Розв'язання. Фокус параболи $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, $P = 6$, тобто $F(3;0).$ Координати точки $M(x;6)$, що лежить на параболі. З рівняння параболи знайдемо x.

$36 = 12x \Rightarrow x = 3$, $M(3;6)$, тоді

$r = \sqrt{(3-3)^2 + (6-0)^2} = 6.$

3.4. Площина в просторі

Площина в декартовій прямокутній системі координат може бути задана одним із таких рівнянь:

1. *Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}(A;B;C)$.*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (1)$$

Вектор $\vec{n}(A;B;C)$ називається ***нормальним вектором площини.*** Площина має безліч нормальних векторів. Усі вони паралельні між собою, отже, їхні відповідні координати пропорційні.

2. *Загальне рівняння площини*

З рівняння (1) маємо лінійне рівняння

$$Ax+By+Cz+D=0. \quad (2)$$

Рівняння (2) називається ***загальним рівнянням площини***. Коефіцієнти A, B, C за невідомих x, y, z загального рівняння є координатами її нормального вектора.

3. *Рівняння площини у відрізках на осях*

Нехай площина відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a, b, c, тобто проходить через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ і $C(0;0;c)$. Підставляючи координати цих точок у формулу рівняння площини, що проходить через три задані точки, і розкриваючи визначник, дістанемо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1. \quad (3)$$

Рівняння (3) називається ***рівнянням площини у відрізках на осях***.

4. *Нормальне рівняння прямої*

Загальне рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини називається ***нормальним,*** якщо:

1) $A^2+B^2+C^2=1$, тобто $\left|\vec{N}\right|=1$;

2) $D\le 0$.

$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0$ – ***нормальне рівняння площини***, де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси нормального вектора $\vec{p}$, спрямованого з початку координат у сторону площини, p – відстань від початку координат до площини.

Будь-яке рівняння площини можна привести до нормального введенням нормуючого множника

$\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+D^2}}$ (знак береться протилежний знаку *D*).

5. *Рівняння прямої, що проходить через три задані точки*

Нехай три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ належать площині Π і не лежать на одній прямій (рис. 23).

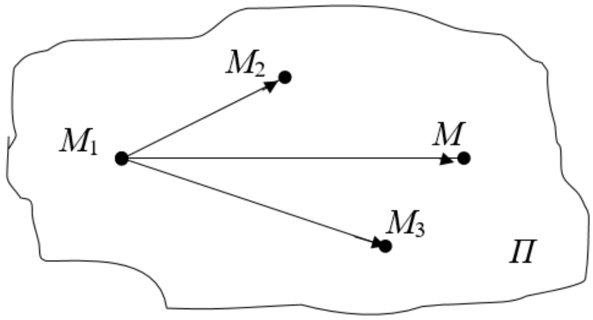

Рис. 23

Візьмемо довільну точку цієї площини $M(x;y;z)$. Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$, що належать площині Π. Тоді їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$$

– ***векторне рівняння*** площини, що проходить через три точки.

Розкриваючи добуток, одержуємо ***рівняння площини, що проходить через три точки***

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Кут між двома площинами

Нехай дві площини задані своїми рівняннями:

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Нормальні вектори площин $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ та $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між векторами нормалі $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ цих площин. Отже, кут між двома площинами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Наслідки:

Умова паралельності площин

Якщо площина Π_1 паралельна площині Π_2, то вектор нормалі $\vec{n}_1$ паралельний вектору нормалі $\vec{n}_2$, отже, для того щоб площини були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектори $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ були колінеарні:

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \to \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності площин

Якщо площина Π_1 перпендикулярна площині Π_2, то вектор нормалі $\vec{n}_1$ перпендикулярний вектору нормалі $\vec{n}_2$, отже, для того щоб площини були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб їх вектори нормалі були перпендикулярні:

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \to \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Приклад 1. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(0; 1; 0)$ паралельно до векторів $\vec{a}(0;1;2)$ та $\vec{b}(1;1;0)$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x;y;z)$ належить шуканій площині Π, тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ та $\vec{b}$ компланарні, тобто $\left(\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=0$, або

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \quad 2x-2y+z+2=0.$$

Отже, $2x-2y+z+2=0$ – рівняння шуканої площини.

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;3;-4)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=\{-1;2;3\}$.

Розв'язання. Шукане рівняння знаходимо за формулою (1):

$$-(x-2)+2(y-3)+3(z+4)=0$$

або

$$x-2y-3z-8=0.$$

Приклад 3. Записати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;1;2), M_2(-1;0;3), M_3(-2;-1;1)$.

Розв'язання. Підставимо координати точок у рівняння площини, яка проходить через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \text{ отримаємо}$$

$$\begin{vmatrix} (x-1) & (y-1) & (z-2) \\ -1-1 & 0-1 & 3-2 \\ -2-1 & -1-1 & 1-2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Розкладаємо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}-(y-1)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}+(z-2)\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Обчислюючи визначники другого порядку, знаходимо шукане рівняння:

$$(x-1)\cdot 3-(y-1)\cdot 5+(z-2)\cdot 1=0$$

або

$$3x-5y+z=0$$ – рівняння шуканої площини.

Відстань від точки до площини

Задано загальне рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини і точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$, що не лежить на цій площині.

Для того щоб визначити відстань від точки до площини, потрібно в нормальне рівняння площини підставити координати точки M_1. Отримане число дорівнює шуканій відстані, якщо точка M_1 і початок координат лежать по різні сторони від площини. Якщо початок координат і точка лежать по одну сторону від площини, то отримане число дорівнює шуканій відстані з точністю до знаку.

Відстань d від точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ ***до площини*** обчислюється за формулою

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \qquad (4)$$

Приклад 1. Знайти відстань від точки $A(1;\ 2;\ -1)$ до площини $3x+6y+z-5=0$.

За формулою (4) маємо:

$$d=\left|\frac{3\cdot 1+6\cdot 2+1\cdot(-1)-5}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}}\right|=\frac{9}{\sqrt{46}}.$$

3.5. *Пряма в просторі*

Нехай у просторі у прямокутній системі координат задано пряму точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і напрямленим вектором $\vec{s} = \{m; n; p\}$. Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ цієї прямої l (рис. 24).

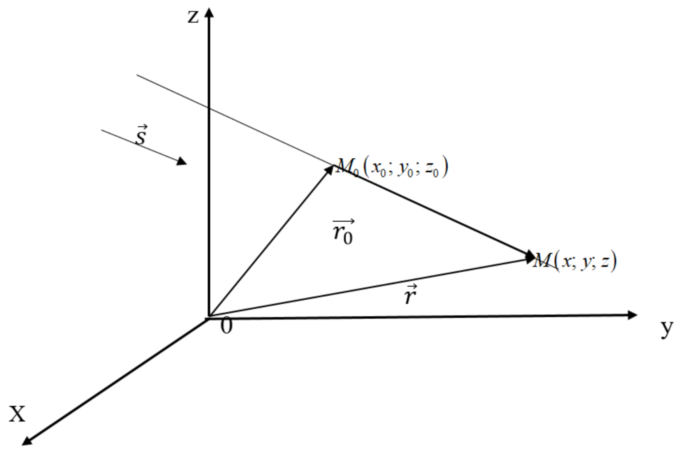

Рис. 24

З'єднаємо точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і $M(x; y; z)$ з початком координат, отримані вектори $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ мають координати:

$$\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}; \vec{r} = \{x; y; z\}.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежить на прямій, то він паралельний напрямленому вектору $\vec{s} = \{m; n; p\} \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0$ паралельний вектору $\vec{s} = \{m; n; p\} \Rightarrow$ їх координати пропорційні:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s} \Rightarrow \begin{cases} x - x_o = tm; \\ y - y_o = tn; \\ z - z_o = tp. \end{cases}$$

Знаходимо параметр t:

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x - x_o}{m}; \\ t = \dfrac{y - y_o}{n}; \\ t = \dfrac{z - z_o}{p}. \end{cases}$$

Отже, пряма в просторі може бути задана так:

1. *Параметричні рівняння прямої в просторі*

$$\begin{cases} x = x_0 + tm; \\ y = y_0 + tn; \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \qquad (1)$$

2. *Канонічне рівняння прямої в просторі*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \ M_0(x_0; y_0; z_0) \in l; \ \ \vec{s}(m; n; p). \qquad (2)$$

Якщо $m = 0, n \neq 0, p \neq 0,$ то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

визначає пряму, яка є перпендикулярною до осі Ox. Аналогічно рівняння, у яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, які є перпендикулярними до осі Oy або Oz відповідно. Якщо $m = n = 0, p \neq 0$, або $m = p = 0, n \neq 0$, або $n = p = 0, m \neq 0$, то рівняння (2) визначають прямі, які є паралельними осям Ox, Oy, Oz відповідно.

3. *Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ *і* $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3)$$

4. *Векторне рівняння прямої*

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t\,. \tag{4}$$

5. *Загальні рівняння прямої в просторі*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, система рівнянь двох площин, нормальні вектори яких $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Рівняння (5) називаються ***загальними рівняннями прямої в просторі***.

Щоб від загальних рівнянь (5) перейти до канонічних рівнянь (2), потрібно знайти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s}(m; n; p)$.

Для знаходження точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ одну з її координат, наприклад $x = x_0$, беруть довільно, а дві інші визначають із системи:

$$\begin{cases} B_1y + C_1z = -D_1 - A_1x; \\ B_2y + C_2z = -D_2 - A_2x. \end{cases}$$

Ця система матиме розв’язок за умови, що $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$. Якщо ця умова порушується, то в системі довільне значення надають змінній y або змінній z. Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ врахуємо, що вектори нормалі $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ цих площин перпендикулярні до прямої. Тому за вектор $\vec{s}$ можна взяти векторний добуток векторів нормалі:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Кут між двома прямими

Нехай прямі l_1 та l_2 задано рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Позначимо через $\varphi, 0<\varphi<\pi$ – кут між цими прямими.

Оскільки напрямні вектори даних прямих є $\vec{s}_1(m_1;n_1;p_1)$ і $\vec{s}_2(m_2;n_2;p_2)$, то косінус кута між двома прямими знаходимо за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (6)$$

Наслідки:

Якщо пряма l_1 паралельна прямій l_2, то напрямний вектор $\vec{s}_1$ паралельний напрямному вектору $\vec{s}_2$, отже, для того щоб прямі були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ були колінеарні:

$$l_1 \parallel l_2 \to \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \quad \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Отже,

$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ – ***умова паралельності прямих.***

Якщо пряма l_1 перпендикулярна прямій l_2, то напрямний вектор $\vec{s}_1$ перпендикулярний напрямному вектору $\vec{s}_2$, отже, для того щоб прямі були
Перпедикулярні, необхідно і достатньо, щоб вектори $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ були перпендикулярні:

$$l_1 \perp l_2 \to \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Отже,

$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ – ***умова перпендикулярності прямих.***

Приклад 1. Пряма l задана загальним рівнянням

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0; \\ x + 3y - 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

Написати канонічне рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Знайдемо точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що належить цій прямій.

Нехай $x_0 = 0$, тоді $\begin{cases} -y + 2z = 7; \\ 3y - 2z = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5; \\ z = 6; \end{cases}$ $M_0(0; 5; 6)$.

Аналогічно можна вважати, що y_0 або z_0 дорівнюють нулю.

За напрямний вектор прямої $\vec{s}(m; n; p)$ візьмемо вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$, $\vec{n}_2(1; 3; -2)$. е

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k}.$$

Канонічне рівняння прямої:

$$l: \ \frac{x}{-4} = \frac{y-5}{8} = \frac{z-6}{10}.$$

Приклад 2. Написати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(1; -2; 1)$ та $M_2(3; 1; -1)$.

Розв'язання. Нехай шукана пряма $M(x; y; z) \in l$. Тоді $\overrightarrow{M_1M}$ та $\overrightarrow{M_1M_2} \in l$, тобто

$$\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}; \ \overrightarrow{M_1M}(x-1; y+2; \ z-1); \ \overrightarrow{M_1M_2}(2; 3; -2).$$

Канонічне рівняння прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2} = t$$

або в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = 2t + 1; \\ y = 3t - 2; \qquad t \in (-\infty; +\infty). \\ z = -2t + 1. \end{cases}$$

Приклад 3. Знайти гострий кут між прямими заданими канонічними рівняннями

$$l_1 : \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad l_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

Розв'язання. Напрямні вектори прямих $\vec{s}_1 = (1;-1;\sqrt{2})$ та $\vec{s}_2 = (1;\,1;\sqrt{2})$. За формулою (6) знаходимо:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

3.6. Взаємне розташування прямої та площини

Кут між прямою і площиною

Кут між прямою l і площиною Π є кутом між прямою l і її проєкцію на площину Π.

Нехай пряма l і площина Π задані рівняннями

$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p};$$

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Позначимо гострий кут між прямою l (рис. 25) і її проєкцією l_1 на площину Π через φ, а кут між нормальним вектором $\vec{n}(A;B;C)$

площини Π і напрямним вектором $\vec{s}(m;n;p)$ прямої l – через θ [7, 8] (рис. 25).

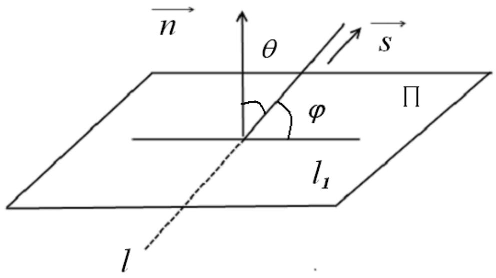

Рис. 25

Як бачимо, $\sin\varphi = \cos\theta$. Але $\cos\theta = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}$, і кут між прямою і площиною визначається за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Наслідки:

Якщо пряма l перпендикулярна площині Π, то напрямний вектор прямої $\vec{s}$ паралельний вектору нормалі площини $\vec{n}$, отже, для того щоб пряма була перпедикулярна площині, необхідно і достатньо, щоб вектори $\vec{n}$ та $\vec{s}$ були колінеарні:

$$l \perp \Pi \rightarrow \text{то } \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Отже,

$\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$ – ***умова перпендикулярності прямої та площини.***

Якщо пряма l паралельна площині Π, то напрямний вектор прямої $\vec{s}$ перпендикулярний вектору нормалі площини $\vec{n}$, отже, для того щоб пряма була паралельна площині, необхідно і достатньо, щоб вектори $\vec{n}$ та $\vec{s}$ були перпендикулярні:

$$l \parallel \Pi \rightarrow \text{то } \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$$

Отже,

$Am+Bn+Cp=0$ – ***умова паралельності прямої та площини.***

Точка перетину прямої та площини

Нехай пряма l і площина Π задані рівняннями

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p};$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини потрібно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}; \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Для цього запишемо параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + tm; \\ y = y_0 + tn; \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$$

Знайдені x, y, z підставляємо в загальне рівняння площини:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0;$$

отримане лінійне рівняння розв'яжемо відносно t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Знайдене значення t підставляємо в систему, звідки знаходимо x, y, z – координати точки перетину прямої l та площини Π.

Наслідки:

1. Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, то пряма l паралельна площині Π:

   $$l \parallel \Pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0.$$

2. Якщо $Am + Bn + Cp = 0$ та $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то пряма l лежить в площині Π:

   $$l \in \Pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0 \cap Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

Приклад 1. Знайти точку перетину прямої l з площиною Π та кут між ними, якщо

$$\Pi: x+y-z+1=0;$$

$$l: \frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

Розв'язання. Кут між прямою та площиною $\varphi=90^\circ-\alpha$, де α – кут між нормальним вектором площини $\vec{n}(A;B;C)$ та напрямним вектором прямої $\vec{s}(m;n;p)$. Розглянемо вектори $\vec{n}(1;1;-1)$; $\vec{s}(0;2;1)$ та скористаємося формулою для знаходження кута між прямою та площиною:

$$\sin\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Отримаємо:

$$\sin\alpha=\frac{2-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}};\quad \alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Щоб знайти точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перетину площини Π та прямої l, треба розв'язати систему рівнянь, записавши рівняння прямої l в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x=1+0t; \\ y=0+2t; \\ z=-1+t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1; \\ y=2t; \\ z=t-1; \end{cases} \Rightarrow 1+2t-t+1+1=0.$$

$$t=-3;\quad x_0=1;\quad y_0=-6;\quad z_0=-4;\quad M_0(1;-6;-4).$$

Відповідь: точка перетину прямої та площини $M_0(1;-6;-4)$.

Приклад 2. Через задану точку $M_0(1;-2;3)$ провести пряму L перпендикулярно площині Π, яка задана рівнянням $2x+3y-4z+5=0$ (рис. 26).

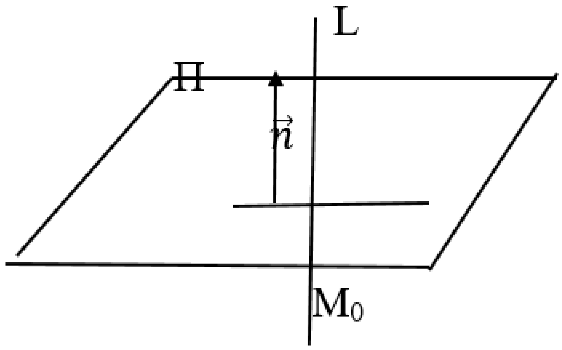

Рис. 26

Розв'язання. Оскільки пряма L перпендикулярна до площини Π, то за напрямний вектор прямої L можна взяти нормальний вектор площини $\Pi: \vec{s} = \vec{n} = (2;\,3;-4)$.

Тому згідно з формулою (2) рівняння прямої L має вигляд:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

Приклад 3. Складати рівняння площини, що проходить через прямі

$$l_1:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4};$$

$$l_2:\ \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

Розв'язання. Впевнимося, що прямі належать одній площині. Розглянемо вектори:

$\vec{s}_1(2;\,-3;4);\ \vec{s}_2(3;\,2;\,-2)$.

$M_1(1;-2;5) \in l_1; M_2(7;2;-3) \in l_2$.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (7-1;2+2;-3-5) = (6;4;-8).$$

Доведемо, що вектори $\vec{s}_1,\ \vec{s}_2,\ \overrightarrow{M_1M_2}$ компланарні, тобто виконується умова компланарності векторів: $(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

Обчислюємо визначник:

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -52 \neq 0.$$

Умова компланарності векторів не виконується, отже, прямі не належать одній площині, тобто є мимобіжними.

Знаходження координат точки $M_2(x_2;\ y_2; z_2)$, яка симетрична точці $M_1(x_1;\ y_1; z_1)$ відносно площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

Нехай площина задана загальним рівнянням:

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Відомі координати точки $M_1(x_1;\ y_1; z_1)$ (рис. 27).

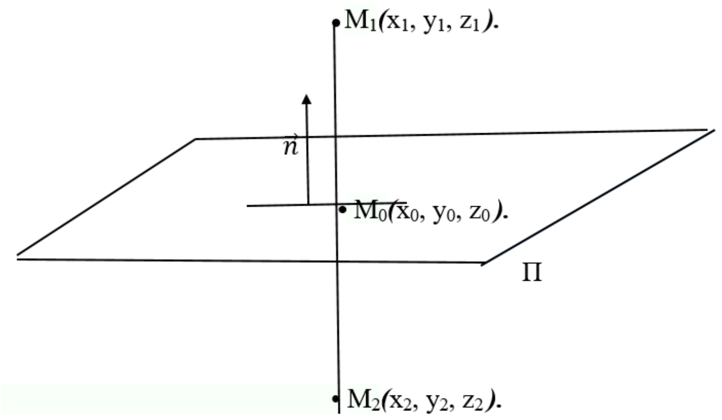

Рис. 27

Розв'язання. Вектор $\vec{n} = (A;\ B; C)$ перпендикулярний площині *П*, отже, він паралельний прямій M_1M_2 і його можно взяти за напрямний вектор $\vec{s}$, тобто $\vec{s} = \vec{n} = (A;\ B; C)$. Канонічне рівняння прямої M_1M_2 має вигляд:

$$M_1M_2:\ \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

Знаходимо точку $M_0(x_0;\ y_0; z_0)$ як точку перетину прямої M_1M_2 та площини Π, для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{A} = \dfrac{y-y_1}{B} = \dfrac{z-z_1}{C}; \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Точка $M_0(x_0;\ y_0; z_0)$ – середина відрізка M_1M_2, отже,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = y_0; \quad \frac{z_1 + z_2}{2} = z_0.$$

Знаходимо координати точки $M_2(x_2;\ y_2; z_2)$:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_0 - x_1; \\ y_2 = 2y_0 - y_1; \\ z_2 = 2z_0 - z_1. \end{cases}$$

Приклад 4. Знайти координати точки $M_2(x_2;\ y_2; z_2)$, яка симетрична точці $M_1(2;\ 1; 3)$ відносно площини $\Pi : x - 2y + 3z - 5 = 0.$

Розв'язання. Вектор $\vec{n} = (1;\ -2; 3)$ перпендикулярний площині Π, отже, він паралельний прямій M_1M_2 і його можна взяти за напрямний вектор: $\vec{s} = \vec{n} = (1;\ -2; 3)$. Канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$M_1M_2: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{3}.$$

Знаходимо точку $M_0(x_0;\ y_0; z_0)$ як точку перетину прямої M_1M_2 та площини Π, для цього розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{3}; \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$$

Записуємо рівняння прямої M_1M_2 в параметричному вигляді та знаходимо параметр t:

$$\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = 1 - 2t; \\ z = 3 + 3t. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2 + t - 2(1 - 2t) + 3(3 + 3t) - 5 = 0.$$

$14t = -4 \Rightarrow t = -\frac{2}{7}$. Координати точки $M_0(x_0;\ y_0; z_0)$:

$$\begin{cases} x_0 = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}; \\ y_0 = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}; \\ z_0 = 3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7}. \end{cases}$$

Враховуючи, що координати точки $M_1(2;\ 1; 3)$, координати точки $M_0(\frac{12}{7};\ \frac{11}{7}; \frac{15}{7})$, знаходимо координати точки $M_2(x_2;\ y_2; z_2)$:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_0 - x_1 = \frac{24}{7} - 2 = \frac{10}{7}; \\ y_2 = 2y_0 - y_1 = \frac{22}{7} - 1 = \frac{15}{7}; \\ z_2 = 2z_0 - z_1 = \frac{30}{7} - 3 = \frac{9}{7}. \end{cases}$$

Отже, $M_2(\frac{10}{7};\ \frac{15}{7}; \frac{9}{7})$.

3.7. Запитання для самоконтролю

1. Види рівнянь прямої на площині.
2. Як знайти кут між двома прямими на площині?
3. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих, заданих різними рівняннями.
4. Як знайти відстань від точки до прямої?
5. Що називається кривою другого порядку?
6. Канонічне рівняння еліпса.
7. Канонічне рівняння параболи.
8. Канонічне рівняння гіперболи.
9. Види рівнянь площини в просторі.

10. Як знайти кут між двома площинами?
11. Умови перпендикулярності і паралельності двох площин, заданих різними рівняннями.
12. Як знайти відстань від точки до площини?
13. Якими рівняннями задається пряма в просторі?

Розділ 4. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. Функції

Змінні величини. Поняття функції

У різних сферах знань, під час вивчення тих чи інших явищ ми спіткаємося з постійними величинами, що не змінюють свого числового значення (число місяців у році), і зі змінними, які можуть набувати тих чи інших значень (ціна товару, величина закупівель, попит, прибуток від реалізації товару, національний прибуток) [1, 2].

Змінна – математична величина, значення якої може змінюватися в межах певної задачі. Цим змінна відрізняється від константи.

Змінна може не тільки набувати певних значень, а й визначати сенс символічних конструкцій.

Деякі постійні не змінюють свого значення в довільній задачі. Їх називають абсолютними постійними (сума кутів трикутника дорівнює 180°).

Параметрами називають ті постійні, які зберігають своє числове значення в умовах деякої задачі. Наприклад, курс долара на деякий період часу.

Та сама величина в кожному конкретному випадку може бути як змінною, так і постійною. Національний прибуток, наприклад, для кількох років є змінною величиною, для поточного року – постійною.

Інколи постійну розглядають як окремий випадок змінної величини, що набуває того самого значення.

Множина всіх значень змінної утворює деяку числову множину значень змінної.

Розглянемо функцію однієї змінної.

Інтуїтивно ***функція*** – це певне «правило», або «перетворення», яке зіставляє унікальне вихідне значення з кожним вхідним значенням. Наприклад, час, потрібний камінцю, кинутому з певної висоти, щоб досягнути землі, залежить від цієї висоти, яка тут виступає як вхідне значення, а час перебування камінця в польоті – як вихідне значення.

«Правило», яке визначає функцію, може бути задане формулою, певним співвідношенням або просто таблицею, у якій перелічені всі можливі комбінації вхідних і вихідних значень. Найважливішою ознакою звичайної функції є те, що вона завжди продукує однаковий результат на подане вхідне значення. Вхідне значення часто називають аргументом функції, вихідне – значенням функції.

У загальному випадку функція може бути залежною від декількох аргументів.

Утім у сучасній математиці і природничих науках розглядаються функції, які не можуть бути явно задані формулами, тому сучасна інтерпретація поняття «функція» визначає її як певне відображення, відповідність між деякими множинами A (множиною або областю визначення) та B (яку іноді називають областю значень, хоча це й не зовсім правильно), отже, таке відображення, яке зіставляє з кожним елементом із множини A єдиний елемент з множини B. У теорії множин такі функції зручно визначати за допомогою відповідностей між множинами. У такій узагальненій інтерпретації функція стає фундаментальним поняттям практично в кожній галузі математичних знань [4].

Нехай задано дві непорожні підмножини D та E множини R, причому $x \in D, y \in E$. Якщо кожному елементу $x \in D$ відповідає лише один елемент множини $y \in E$, то y називають ***функцією*** f (відображенням) аргументу x і записують:

$$y = f(x); \forall x \in D, \text{ або } y = f(x); x \in D.$$

Інакши кажучи, за допомогою функції $y = f(x)$ підмножина D відображається на підмножину E, $x \to f(x); x \in D$.

$D(f)$ називають областю визначення функції, $E(f)$ – множиною її значень, x – незалежною змінною, або ***аргументом***, y – залежною змінною, або ***функцією*** [5].

Способи задання функції.

1. *Аналітичний*. У загальному випадку $y = f(x)$.

Наприклад, прибуток від продажу товару x за ціною a можна задати аналітично або формулою $y = ax$.

2. *Графічний.*

Можна задати функцію однієї змінної її графіком (рис. 28).

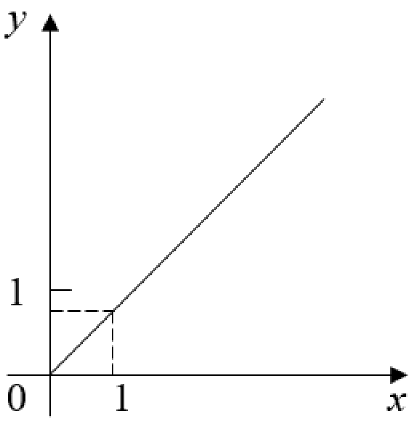

Рис. 28. Графічний спосіб задання функції

Проте не всяку функцію можна задати графічно. Так, графічно не можна задати функцію Діріхле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \text{ раціональне;} \\ 0, \text{ якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

3. *Табличний.*

Наприклад: x_i – затрати часу деякого робітника на одиницю продукції; y_i – оплата праці цього робітника;

x	x_1	x_2	…
y	y_1	y_2	…

4. *Алгоритмічний.* Так задають функцію для роботи на ЕОМ.

Означення 1. Основні елементарні функції, або ті, які утворено з них за допомогою скінченного числа арифметичних дій, називають *елементарними* функціями.

Наприклад:

$f(x)=F_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}...+a_1x^1+a_0$ – алгебраїчна функція (її називають поліномом).

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – елементарна функція (алгебраїчний дріб).

$f(x)=\cos x+\cos 2x+...+\cos nx$ – неелементарна функція.

Основні елементарні функції

До основних елементарних функцій належать константи, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні й обернені тригонометричні.

1. ***Константа*** $y=const$ (рис. 29).

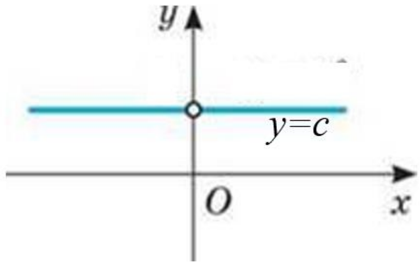

Рис. 29

Область визначення $D(y)=R$, область значень $E(y)=\{c\}$, функція парна. Графік функції – це пряма, паралельна осі абсцис.

2. ***Степенева*** $y=x^a, a\in R$ (рис. 30).

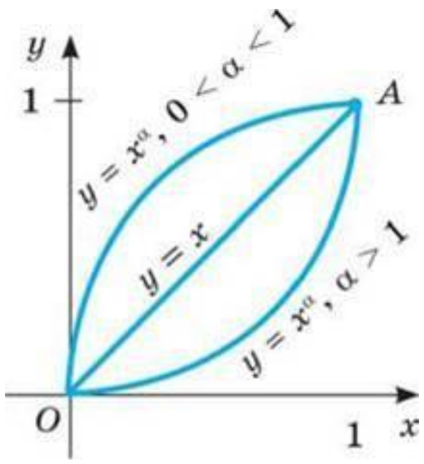

Рис. 30

Область визначення $D(y)$ та область значень $E(y)$ залежать від α, $\forall\alpha:(0;+\infty)\subset D(y)$. Парність-непарність степеневої функції залежить від показника α.

3. ***Показникова*** $a^x, (a \neq 1, a > 0)$ (рис. 31).

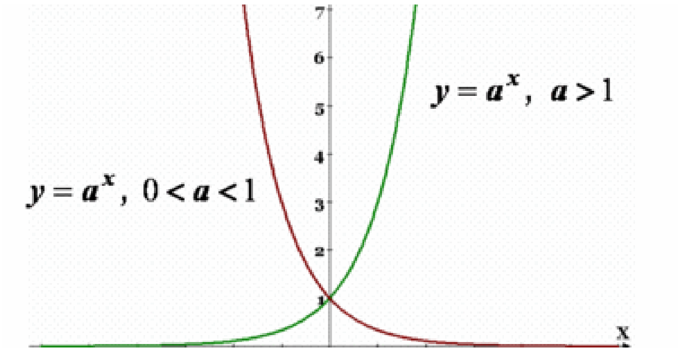

Рис. 31

Область визначення $D(y) = R$, область значень $E(y) = (0;+\infty)$. Функція загального вигляду. Ось абсцис $y = 0$ – асимптота.

4. ***Логарифмічна*** $\log_a x, (a \neq 1, a > 0, x > 0)$ (рис. 32).

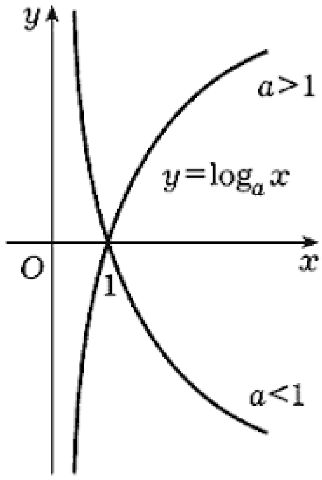

Рис. 32

Область визначення $D(y) = (0;+\infty)$, область значень $E(y) = R$. Функція загального виду. Ось ординат $x = 0$ – асимптота.

У математичному аналізі в основному використовують натуральні логарифми $\ln x$, тобто логарифми з основою $a = e \approx 2{,}71...$

Показникова і логарифмічна функції є взаємнооберненими, отже, графіки цих функцій, які мають однакові основи, симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 33).

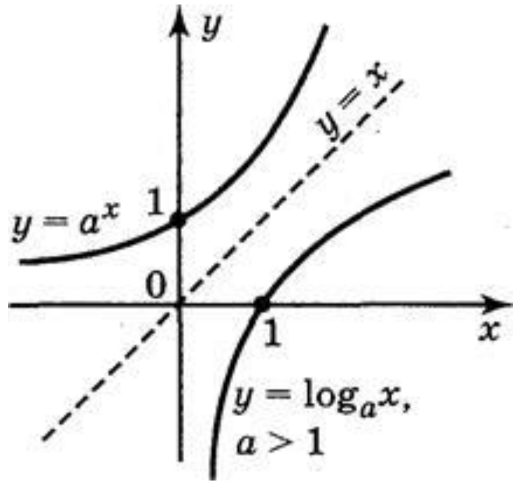

Рис. 33

5. ***Тригонометричні функції***

а) $y = \sin x$ (рис. 34).

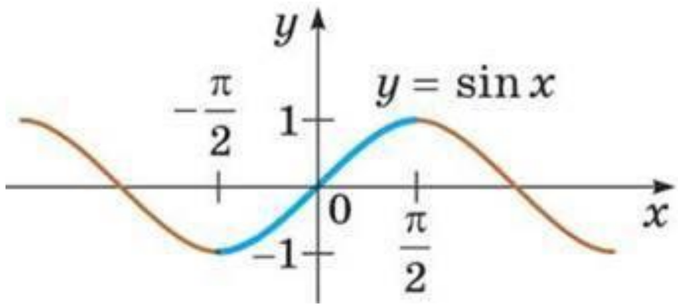

Рис. 34

Область визначення $D(y) = R$, область значень $E(y) = [-1;1]$. Функція непарна, періодична з періодом $T = 2\pi$. Графік функції перетинає вісь Oy у точці (0;0), а вісь Ox – у точках $(\pi k;0)$, $k \in Z$. Функція зростає, якщо $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ і спадає, якщо

$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. Функція набуває найбільшого значення $y_{max} = 1$ у точках $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ і найменшого значення $y_{min} = -1$ – у точках $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

б) $y = \cos x$ (рис. 35).

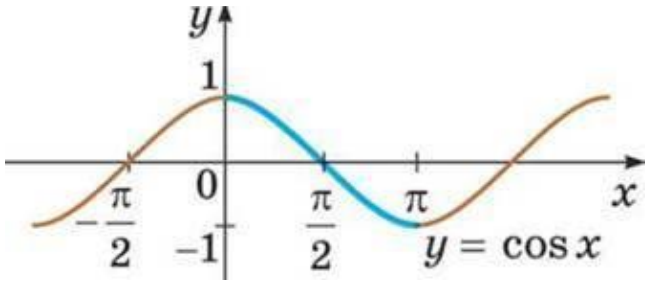

Рис. 35

Область визначення $D(y) = R$, область значень $E(y) = [-1;1]$. Функція парна, періодична з періодом $T = 2\pi$. Графік функції перетинає вісь Oy у точці (0;1), а вісь Ox – у точках $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$, $k \in Z$. Функція зростає на проміжках $x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in Z$ і спадає на проміжках $[x \in 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$. Функція набуває найбільшого значення $y_{max} = 1$ у точках $x_{max} = 2\pi k, k \in Z$ і найменшого значення $y_{min} = -1$ – у точках $x_{min} = \pi + 2\pi k, k \in Z$;

в) $y = tgx$ (рис. 36).

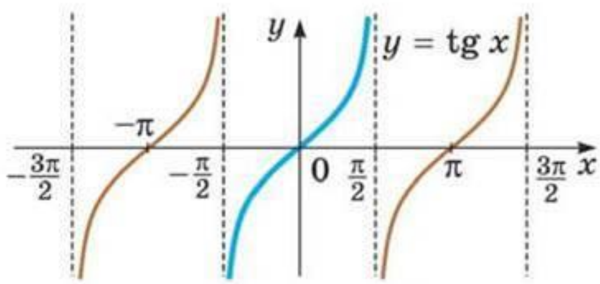

Рис. 36

Область визначення $D(y)=R\setminus\left\{\frac{\pi k}{2},k\in R\right\}$, область значень $E(y)=R$. Функція непарна, періодична з періодом $T=\pi$. Прямі $x=\frac{\pi k}{2}$ – асимптоти функції. Графік функції перетинає вісь Oy у точці (0;0), а вісь Ox – у точках $(\pi k;0)$, $k\in Z$. Функція зростає, якщо $x\in\left[\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right]$, $k\in Z$ і спадає, якщо $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right]$, $k\in Z$. Найменших і найбільших значень функція не має;

г) $y=ctgx$ (рис. 37).

Область визначення $D(y)=R\setminus\{\pi k,k\in R\}$, область значень $E(y)=R$. Функція непарна, періодична з періодом $T=\pi$. Прямі $x=\pi k$ – асимптоти функції.

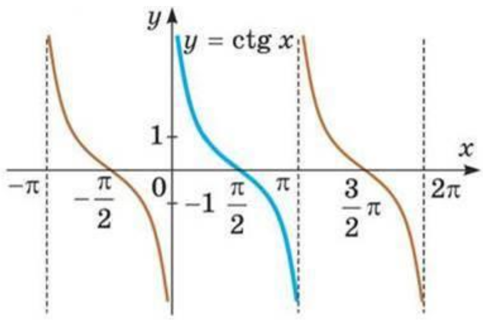

Рис. 37

6. ***Обернені тригонометричні функції***

Для визначеня цих функцій вибираються такі проміжки монотонності: для синуса – $[-0{,}5\pi;0{,}5\pi]$, для косинуса – $[0;\pi]$, для тангенса – $(-0{,}5\pi;0{,}5\pi)$, для котангенса – $(0,\pi)$;

а) $y=\arcsin x$ (рис. 38)

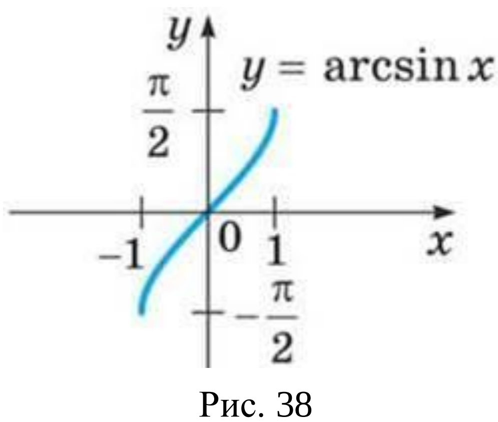

Рис. 38

Визначення арксинуса: $\arcsin a$ – це кут $\alpha \in [-0{,}5\pi;0{,}5\pi]$, такий, що $\sin a = \alpha$.

Область визначення $D(y) = [-1{,}1]$, область значень $E(y) = [-0{,}5\pi;0{,}5\pi]$. Функція непарна. Графік функції перетинає вісь ординат у точці (0;0). Функція зростає, якщо $x \in [-1{,}1]$. Функція набуває найбільшого значення $y_{\max}(1) = \dfrac{\pi}{2}$ і найменшого значення $y_{\max}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$;

б) $y = \arccos x$ (рис. 39).

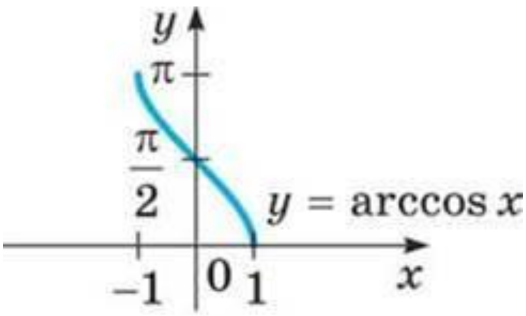

Рис. 39

Визначення арккосинуса: $\arccos a$ – це кут $\alpha \in [0;\pi]$, такий, що $\cos a = \alpha$.

Область визначення $D(y) = [-1{,}1]$, область значень $E(y) = [0;\pi]$. Справедлива рівність:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Функції $y = \arccos x$ та $y = \arcsin x$ зв'язані співвідношенням:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

в) $y = arctgx$ (рис. 40).

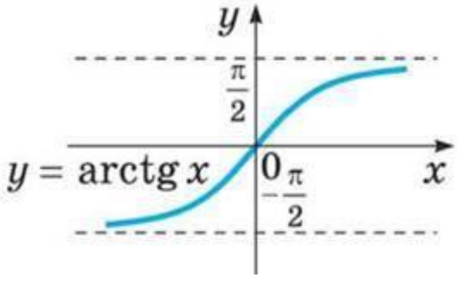

Рис. 40

Визначення арктангенса: $arctga$ – це кут $\alpha \in \left(-0{,}5\pi; 0{,}5\pi\right)$, такий, що $tga = \alpha$.

Область визначення $D(y) = R$, область значень $E(y) \in \left(-0{,}5\pi; 0{,}5\pi\right)$. Функція непарна. Прямі – $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ асимптоти;

г) $y = arcctgx$ (рис. 41).

Визначення арккотангенса: $arcctga$ – це кут $\alpha \in (0, \pi)$, такий, що $ctga = \alpha$.

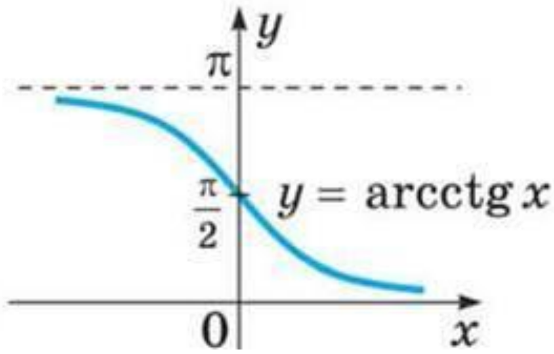

Рис. 41

Область визначення $D(y) = R$, область значень $E(y) \in (0; \pi)$. Прямі $y = 0$ та $y = \pi$ – асимптоти. Справедлива рівність:

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx.$$

Зауваження. Іноді до основних елементарних функцій відносять ще й так звані гіперболічні функції та обернені до них. Усі ці функції досить просто виражаються через показникову і логарифмічну функції.

Гіперболічні функції

а) *синус гіперболічний* $y = shx = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Область визначення $D(y) = R$, область значень $E(y) = R$. Функція непарна.

Обернена функція має вигляд: $y = Arshx = Ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

б) *косинус гіперболічний* $y = chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Область визначення $D(y) = R$, область значень $E(y) = [1;+\infty)$. Функція парна. Обернена функція має вигляд:

$$y = Archx = Ln(x + \sqrt{x^2 - 1});$$

в) тангенс і котангенс гіперболічний визначаються так само, як і в тригонометрії:

$$thx = \frac{shx}{chx}; ctgx = \frac{chx}{shx}.$$

Обернена функція для thx має вигляд: $Arthx = \frac{1}{2} Ln \frac{1+x}{1-x}$. Графіки гіперболічних функцій (рис. 42).

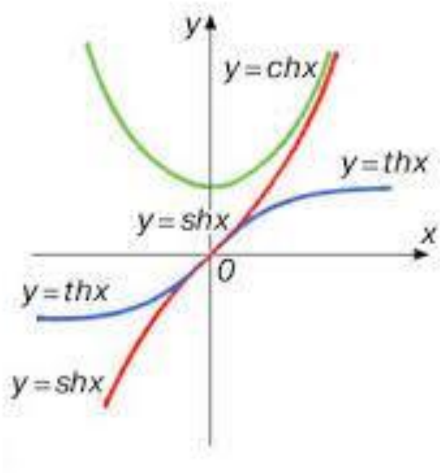

Рис. 42

Отже, елементарною називають функцію, що може бути задана ***явно однією формулою***, яка містить ***скінчене*** число арифметичних операцій, застосованих до основних елементарних функцій.

Слід зазначити, що деякі функції, задані декількома формулами (тобто, загалом кажучи, неелементарні), іноді вдається записати однією формулою. Прикладом слугує функція $y = |x|$. За означенням:

$$|x| = \begin{cases} x, x > 0; \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

Водночас маємо: $|x| = \sqrt{x^2}$. Таким чином, функція $y = |x|$ є елементарною. Її графік (рис. 43):

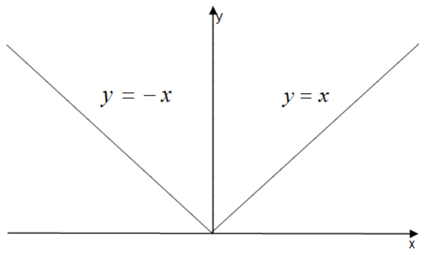

Рис. 43

Елементи поведінки функцій

1. Функцію $y = f(x)$ називають парною, якщо $f(-x) = f(x)$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, непарної – відносно початку координат.

2. Функцію $y = f(x)$ називають зростаючою на інтервалі, якщо з $x_1 > x_2$ випливає, що $f(x_1) > f(x_2)$. Для позначення зростаючої функції використовують символ – $\uparrow$.

3. Функцію $y = f(x)$ називають спадною на інтервалі, якщо з $x_1 > x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Для позначення спадної функції використовують символи – $\downarrow$.

4. Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом T, якщо $f(x+T) = f(x)$.

5. Функцію $y = f(x)$ називають обмеженою на множині A, якщо $\exists M > 0, \forall x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$ |.

Якщо $f(x) \leq M$ для всіх $x \in A$, тоді функція називається обмеженою зверху M.

Якщо $f(x) \geq m$ для всіх $x \in A$, то функція називається обмеженою знизу m.

Дійсна функція обмежена тоді і лише тоді, коли вона обмежена зверху та знизу.

Інтуїтивно зрозуміло, що графік обмеженої функції (лінія 1) залишається в межах горизонтальної смуги, тоді як графік необмеженої функції (лінія 2) – ні (рис. 44).

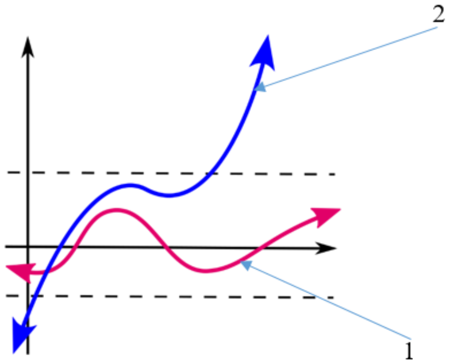

Рис. 44

Приклад 1. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. Знайти область визначення функції

$$y = \frac{3}{4 - x^2} + \lg(x^3 - x).$$

Розв'язання. Для знаходження області визначення необхідно і достатньо знайти x, для яких виконуються такі співвідношення:

$4 - x^2 \neq 0$, знаменник дробу не повинен дорівнювати 0;

$x^3 - x > 0$, логарифм існує лише для додатних чисел.

Розв'язуючи рівняння і нерівність, знаходимо:

$$x \neq 2;\ \ x \neq -2,\ x(x-1)(x+1) > 0.$$

Одержимо $D[f] = (-1;0) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.

Ця функція являє собою суму парної функції $y_1 = \dfrac{3}{4 - x^2}$

(y_1 не змінює знака зі зміною x на $-x$) і функції загального вигляду $y_2 = \lg(x^3 - x)$ (зі зміною x на $-x$ вираз під знаком логарифма змінює знак на протилежний і логарифм втрачає зміст). Отже, функція $y = y_1 + y_2$ є функцією загального вигляду.

Функція неперіодична, бо в неї не входять тригонометричні функції, а з елементарних функцій лише вони є періодичними.

Приклад 2. Дано $\lg(\sin x)$. Знайти область визначення функції та дослідити на періодичність.

Розв'язання. Область визначення знаходимо із співвідношення $\sin x > 0.$

Звідси

$D[f]$ є об'єднанням всіх проміжків вигляду $\left]2\pi k,\ \pi + 2\pi k\right[$, де k – ціле число. Ця функція загального вигляду, бо зі зміною x на $-x$ логарифм втрачає зміст. Функція періодична, бо $\sin x$ є періодичною з періодом 2π.

$$\lg(\sin(x + 2\pi k)) = \lg(\sin x), \text{ при умові, що } x \in D[y].$$

Приклад 3. $y = \sqrt{\operatorname{arctg}(\lg x)}$. Знайти область визначення та дослідити на парність, непарність, періодичність.

Розв'язання. Область визначення знаходимо із системи

$$\begin{cases} x > 0; \\ \operatorname{arctg}(\lg x) \geq 0, \end{cases}$$

але $arctg(\lg x)$ невід'ємний за невід'ємних $\lg x$, тому $D[y] = [1; +\infty]$. Функція неперіодична, бо в неї не входять тригонометричні функції, а з елементарних функцій лише вони є періодичними. Функція загального вигляду.

Приклад 4. $y = \lg\left(x^2 - 6x + 8\right)$. Знайти область визначення та дослідити на парність, непарність, періодичність.

Розв'язання. Область визначення знаходимо, пам'ятаючи, що під логарифмом функція повинна приймати додатні значення. Звідси маємо умову для визначення ОДЗ: $x^2 - 6x + 8 > 0$. Застосуємо метод інтервалів:

$$(x - 2)(x - 4) > 0;$$

$$(x-2)(x-4)=0.$$

Два знайдені нулі $x=2, x=4$ наносимо на числову вісь і встановлюємо знаки на проміжках (рис. 45).

Рис. 45.

Областю визначення заданого логарифма є $x \in (-\infty;2) \cup (4;+\infty)$. Функція неперіодична, загального вигляду.

Приклад 5. $y=\sqrt{5^{2x-3}-1}$. Знайти область визначення та дослідити на парність, непарність, періодичність.

Розв'язання. Область визначення знаходимо, пам'ятаючи, що підкоренева функція повинна приймати значення, більші або дорівнюють нулю. Це і є умова на встановлення області визначення:

$$5^{2x-3}-1 \geq 0 \Rightarrow 5^{2x-3} \geq 1;$$

$$5^{2x-3} \geq 5^0 \Rightarrow 2x-3 \geq 0.$$

Отже, область визначення цієї функції $x \geq 1{,}5$. Функція неперіодична, загального вигляду.

Приклад 6. З'ясувати, чи дана функція парна, непарна, загального виду:

а) $f(x)=3x^5-8x^3;$

б) $f(x)=4x^6-3x^4+5;$

в) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+x^2}.$

Розв'язання.

а) $f(-x)=3(-x)^5-8(-x)^3=-3x^5+8x^3=-(3x^5-8x^3)=-f(x) \Rightarrow$ функція $f(x)=3x^5-8x^3$ – непарна.

б) $f(-x)=4(-x)^6-3(-x)^4+5=4x^6-3x^4+5=f(x)\Rightarrow$

функція $f(x)=4x^6-3x^4+5$ – парна.

в) $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)+(-x)^2}=\dfrac{-\sin x}{\cos x+x^2}=-f(x)\Rightarrow$

функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+x^2}$ – непарна.

4.2. Границя послідовності. Границя функції

Границею послідовності елементів метричного простору або топологічного простору називають елемент того самого простору, який має властивість «притягувати» елементи заданої послідовності. Границею послідовності елементів топологічного простору є така точка, кожен окіл якої містить всі елементи послідовності, починаючи з деякого номера. У метричному просторі окіл визначається через функцію відстані, тому поняття границі формулюється на мові відстаней. Історично першим було поняття ***границі числової послідовності***, що виникає в математичному аналізі, де воно слугує підставою для системи наближень і широко використовується для побудови диференціального й інтегрального числення.

Поняття числової послідовності

Нехай кожному натуральному числу n відповідає за деяким правилом число a_n. Говорять, що задана числова послідовність

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

де числа a_i називаються членами послідовності; $a_n - n$-й або загальний член послідовності. Саму послідовність позначають так: $\{a_n\}$.

Наприклад, якщо відомо, що $a_n=n^2$, за будь якого n, то $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=9$.

Означення 1. Числовою послідовністю називається функція, визначена на множині натуральних чисел. Позначається числова послідовність зазвичай через $\{x_n\}$, де $n \in N, x_n = f(n)$ – n-й член послідовності.

Приклади числових послідовностей

Приклад 1. Нехай числова послідовність задана загальним членом $x_n = \dfrac{1}{2n}$. Це означає, що кожному натуральному числу n відповідає певний член послідовності $\{x_n\}$. Надаючи n значення 1, 2, 3..., дістанемо послідовність $\{x_n\}$: $\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{8};...;\dfrac{1}{2n}....$

Приклад 2. Нехай послідовність задана формулою $x_n = (-1)^n$. Усі члени послідовності з парними номерами дорівнюють 1, а з непарними номерами дорівнюють 1. Надаючи n значення 1, 2, 3… дістанемо послідовність $\{x_n\}$: $-1;\ 1;-1;1\ldots$

Приклад 3. Для числової послідовності $\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{5}$...формула загального члена має вигляд: $x_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Монотонні послідовності

Означення 2. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***зростаючою***, якщо кожен її член, починаючи з другого, більший за попередній, тобто якщо для будь-якого натурального n виконується нерівність

$$a_{n+1} > a_n.$$

Послідовність $\{a_n\}$ називається ***спадною***, якщо кожен її член, починаючи з другого, менший за попередній, тобто якщо для будь-якого натурального n виконується нерівність

$$a_{n+1} < a_n.$$

Послідовність $\{a_n\}$ називається ***неспадною***, якщо кожен її член, починаючи з другого, не менший за попередній, тобто якщо для-будь-якого натурального n виконується нерівність

$$a_{n+1} \geq a_n.$$

Послідовність $\{a_n\}$ називається ***незростаючою***, якщо кожен її член, починаючи з другого, не більший за попередній, тобто якщо для будь якого натурального n виконується нерівність

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Зростаючі, спадні, неспадні та незростаючі послідовності називаються ***монотонними*** послідовностями.

Зростаючі та спадаючі послідовності називають ***строго монотонними***.

Нижня та верхня межа

Означення 3. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***обмеженою знизу,*** якщо існує таке число m, що для кожного члена послідовності справджується нерівність $|a_n| > m$. Число m називається нижньою межею послідовності $\{a_n\}$.

Послідовність $\{a_n\}$ називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число M, що для кожного члена послідовності справджується нерівність $|a_n| < M$. Число M називається верхньою межею послідовності $\{a_n\}$.

Означення 4. Число a називається ***границею послідовності*** $\{a_n\}$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число $N(\varepsilon)$, що для будь-якого $n \geq N$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Якщо a границя послідовності $\{a_n\}$, то це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Якщо послідовність $\{a_n\}$ має скінчену границю, то вона називається ***збіжною***. Якщо границя нескінченна або не існує, то послідовність $\{a_n\}$ називається ***розбіжною.***

Властивості границь

Нехай послідовність $\{a_n\}$ збіжна та її границя дорівнює a: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a;$ послідовність $\{b_n\}$ збіжна та її границя дорівнює b:

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$ Тоді:

1. Границя суми двох послідовностей дорівнює сумі границь цих послідовностей:
$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b.$$
2. Границя добутку двох послідовностей дорівнює добутку границь цих послідовностей:
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = a \times b.$$
3. Границя частки двох послідовностей дорівнює частці границь цих послідовностей:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b},\ b \neq 0.$$
4. Стала виноситься з-під знака границі:
$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = ca.$$
5. Границя сталої є стала:
$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

Теорема Вейерштрасса

З будь-якої обмеженої послідовності можна витягти збіжну підпослідовність.

Приклад 4. Розглянемо послідовність: $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{n} \ldots.$

Ця послідовність обмежена зверху, $M=1$. Розглянемо послідовність $\left\{\frac{1}{2n}\right\}=\frac{1}{2};\frac{1}{4};...;\frac{1}{2n}....$ яка є підпослідовністю послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

$\left\{\frac{1}{2n}\right\}<\left\{\frac{1}{n}\right\}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$, тобто вона є збіжною.

Приклади послідовностей

1. $\left\{\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n}\right\}=0;-\frac{1}{2};0;\frac{1}{4};0;-\frac{1}{6}...$ – немонотонна, обмежена ($M=\frac{1}{2}$), збіжна.

2. $\left\{\frac{1}{n}\right\}=1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};...;\frac{1}{n};...$ – монотонно спадна, обмежена ($M=1$), збіжна.

3. $\left\{n^2\right\}=1;4;9;16;...;n^2...$ – зростаюча, обмежена знизу ($m=1$), розбіжна.

4. $\left\{\cos\pi n\right\}=-1;1;-1;1;...;(-1)^n...$ – обмежена ($M=1$), немонотонна, розбіжна.

5. $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}=1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};...;\frac{1}{2^{n-1}}...$ – монотонно спадна, обмежена ($m=0;\ M=1$), збіжна ($a=0$).

6. $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}=0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};...;\frac{n-1}{n}...$ – монотонно зростаюча, обмежена ($m=0;\ M=1$), збіжна ($a=1$).

Границя функції. Поняття границі функції в точці

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, тоді:

Означення 5. Число A називається ***границею функції в точці*** x_0 якщо $x\to x_0$, якщо для довільного додатного числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta(\varepsilon)$, що як тільки $0<|x-a|<\delta$, то виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$, тобто:

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon), 0<|x-a|<\delta : |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Це записується так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

Геометричний зміст означення границі функції в точці (рис. 46).

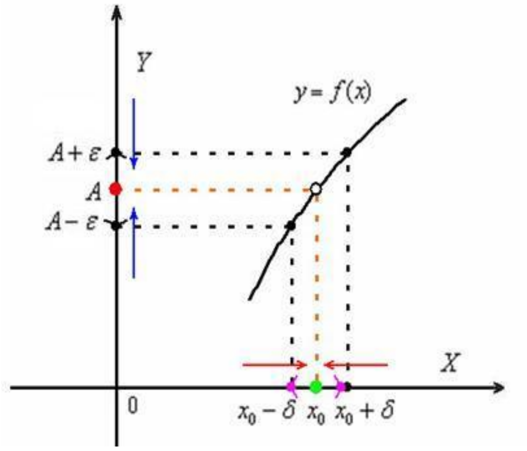

Рис. 46

Число A є границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного ε околу точки A знайдеться δ окіл точки x_0 такий, що коли значення аргументу x взяті з δ околу точці x_0 з виколотою точкою x_0 (тобто з множини $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$), то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε околі точки A.

Односторонні границі функції

В означенні границі функції в точці вважали, що змінна x прямує до x_0 довільним способом: залишаючись меншою від x_0 (тобто зліва від x_0), більшою від x_0 (тобто справа від x_0). Проте є випадки, коли спосіб наближення аргументу x до x_0 суттєво впливає на значення границі функції. У таких випадках доцільно ввести поняття односторонніх границь.

Означення 6. Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Число A називається ***границею*** функції $f(x)$ ***зліва*** (або лівою границею) в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in \left(x_0 - \delta; x_0\right)$ виконується нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$, тобто:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) : \left| f(x) - A \right| < \varepsilon .$$

Означення 7. Число B називається ***границею*** функції $f(x)$ справа (або правою границею) в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in \left(x_0; x_0 + \delta\right)$ виконується нерівність $\left| f(x) - B \right| < \varepsilon$, тобто:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f\left(x\right) = \lim_{x \to x_0 + 0} f\left(x\right) = f(x_0 + 0) = B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$$

$$\forall x \in \left(x_0; x_0 + \delta\right) : \left| f(x) - B \right| < \varepsilon .$$

Зауваження. Ліву і праву границю називають ***односторонніми*** (рис. 47).

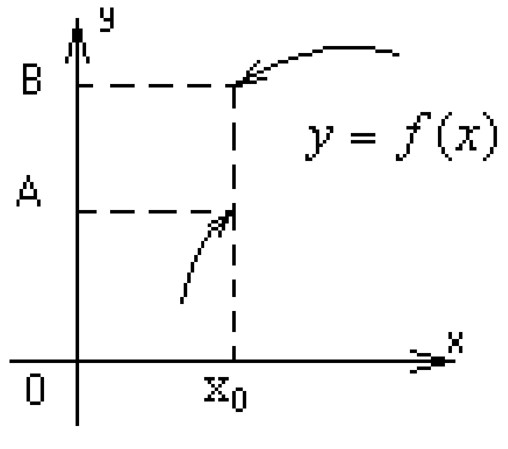

Рис. 47

Якщо $x_0 = 0$, то записують

$$\lim_{x \to +0} f\left(x\right) = f(+0) = A; \quad \lim_{x \to -0} f\left(x\right) = f(-0) = B .$$

Теорема (необхідна і достатня умова існування границі функції в точці).

Для того щоб існувала границя функції $f(x)$ в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб в цій же точці існували і дорівнювали одна одній односторонні границі.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A.$$

Границя функції на нескінченності

Означення 8. Число A називається границею $f(x)$ за умови $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке число N, що для всіх $|x| > N$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто:

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x : |x| > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це записується так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Розглянемо границю функції на нескінченності у випадках, коли $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

I. $$A = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x : x > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

II. $$A = \lim_{x \to -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x : -x > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Нескінченна границя функції

Означення 9. Границя функції $y = f(x)$ за умови $x \to a$ називається нескінченною, якщо для будь-якого $M > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що як тільки $0 < |x - a| < \delta$, то $|f(x)| > M$, тобто:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Це записується так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Наприклад:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx = \infty$.

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$.

3. Розглянемо графік функції $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 48).

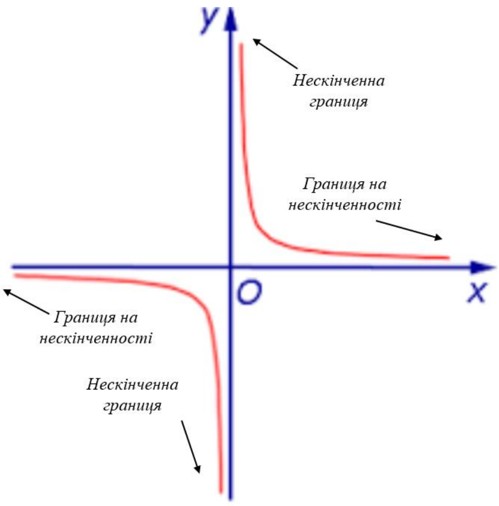

Рис. 48

Границі функції на нескінченності:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Нескінченні границі функції:

Правостороння границя функції $y = \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \infty$;

Лівостороння границя функції $y = \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\infty$.

Арифметичні дії над границями функцій

1. Границя суми двох функцій дорівнює сумі границь цих функцій:

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

2. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x).$$

3. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\, g(x)\neq 0.$$

Властивості границь функцій

Теорема 1. Якщо існує границя функції $y=f(x)$, то знайдеться такий δ окіл точки a, у якому функція $y=f(x)$ обмежена.

Теорема 2. Якщо існує границя функції $y=f(x)$ за умови $x\to a$ і вона відмінна від нуля, то знайдеться такий δ окіл точки a, що для всіх x із цього δ околу виконується нерівність $|f(x)|>\frac{|A|}{2}$.

Теорема 3. Нехай у деякому δ околі точки a $f(x)>g(x)$, тоді $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (якщо ці границі існують).

Лема про три границі. Нехай у деякому δ околі точки a $f(x)>\varphi(x)>g(x)$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq \lim\limits_{x\to a} g(x)=A$ тоді $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A.$

4.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення 1. Функція називається нескінченно малою за умови $x\to x_0$ або $x\to\infty$, $x\to-\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0.$

Означення 2. Функція $y=f(x)$ називається нескінченно великою за умови $x\to x_0$, якщо для будь-якого $M>0$, що може бути як завгодно велике, в околі точки x_0 $|f(x_0)|>M$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Теорема 1 (зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими функціями).

Якщо $f(x)$ нескінченно мала, якщо $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно велика за умови $x \to x_0$, і навпаки.

Властивості границь

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(C_1 f(x) + C_2 g(x)) = C_1 \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + C_2 \lim\limits_{x\to x_0} g(x),$

де C_1, C_2 – сталі.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x).$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n,\ n \in N.$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$

Розглянемо границю відношення $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Очевидно, що $A = 2$, якщо $f(x) = 2x$, а $g(x) = x$. Якщо $f(x) = x^3$, а $g(x) = x^2$, то $A = 0$. Якщо $f(x) = x^2$, а $g(x) = x^3$, то $A = \infty$. Підставляючи замість x нуль у відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, ми отримували $\dfrac{0}{0}$. Таку ситуацію називають невизначеною, або невизначеністю,
оскільки після певних перетворень можна мати в підсумку як конкретне число, так і нескінченність. Є ще й інші види невизначеностей $\dfrac{\infty}{\infty};\ \infty - \infty;\ 1^{\infty};\ 0\cdot\infty;\ 0^0$ та ін.

Нескінченно малі і нескінченно великі величини

Змінна величина x_n називається ***нескінченно малою***, якщо її границя дорівнює нулю:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Змінна величина x_n називається ***нескінченно великою,*** якщо для будь-якого $M > 0$ знайдеться такий номер N, що для всіх номерів $n > N$ виконуватиметься нерівність: $|x_n| > M$, тобто $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N, n > N : |x_n| > M.$$

Властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин

1. Сумма скінченного числа нескінченно малих величин є величиною нескінченно малою.

2. Нехай $\{x_n\}$ – нескінченно мала величина, а $\{y_n\}$ – обмежена величина, тоді:

$\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$ – нескінченно велика величина.

Наслідок: величина обернена до нескінченно малої є нескінченно великою величиною.

3. Нехай $\{x_n\}$ – нескінченно мала величина, а $\{y_n\}$ – обмежена величина, тоді:

$\{x_n \cdot y_n\}$ – нескінченно мала величина.

4. Нехай $\{x_n\}$ – нескінченно велика величина, а $\{y_n\}$ – обмежена величина, тоді: $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}$ – нескінченно мала величина.

Наслідок: величина обернена до нескінченно великої є нескінченно малою величиною.

Співвідношення невизначеностей

Нехай $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = a$; $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} = b.$

Розглянемо відношення $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$. Залежно від того, які значення мають числа a і b, можливі такі варіанти:

1. $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \frac{a}{b}$.

2. $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = 0$.

3. $a \neq 0, b = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \infty$.

4. $a = 0, b = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$ – невизначеність.

Наступні приклади проілюструють, чому $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$ – невизначенність.

Приклад 1. Нехай $x_n = \frac{1}{n}$ а $y_n = \frac{1}{n^2}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Розв'язання. Знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Приклад 2. Нехай $x_n = \frac{1}{n^2}$ а $y_n = \frac{1}{n}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Розв'язання. Знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Приклад 3. Нехай $x_n = \frac{1}{n}$ а $y_n = \frac{1}{n}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$.

Розв'язання. Знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Приклад 4. Нехай $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ а $y_n = \dfrac{1}{n}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$.

Розв'язання. Знаходимо $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n = (-1)^n \Rightarrow \overline{\exists} \text{ границі.}$$

Отже, залежно від того, який конкретний вигляд мають нескінченно малі величини $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ може мати значення $\infty, 0$, число або не існувати. Тому $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ – це невизначенність.

Можна на прикладах проілюструвати, що $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}; \infty-\infty; 1^{\infty}; 0\cdot\infty; 0^0$ також невизначенності. Отже,

$\left\{\dfrac{0}{0}\right\}; \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}; \infty-\infty; 1^{\infty}; 0\cdot\infty; 0^0$ – ***співвідношення невизначеностей***.

4.4. Розкриття невизначеностей

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6+3n^4+n^3}{n^6+n-2}$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, для розкриття цієї невизначеності поділимо чисельник і знаменник на n у старшій степені, тобто на n^6, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+3n^4+n^3}{n^6+n-2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^5}-\frac{2}{n^6}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^6}}=\frac{1}{1}=1,$$

тому що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n^\alpha}=0;\quad \alpha>0.$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^6+3n^4+n^3}{n^6+n-2}=1.$

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+2x^3-1}{2x+5x^3}.$

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, для розкриття цієї невизначеності поділимо чисельник і знаменник на на x^3, дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2x^3-1}{2x+5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x^3}+\frac{2x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{2x}{x^3}+\frac{5x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}+2-\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^2}+5}=\frac{2}{5}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+2x^3-1}{2x+5x^3}=\frac{2}{5}.$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5x^3+3}{x+8x^2}.$

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, для розкриття цієї невизначеності поділимо чисельник і знаменник на x у старшій степені, тобто на x^3, дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5x^3+3}{x+8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^3}+\frac{5x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x}{x^3}+\frac{8x^2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+5+\frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x}}=\left(\frac{5}{0}\right)=\infty.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5x^3+3}{x+8x^2}=\infty$.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4x^3-1}{2x+6x^5}$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, для розкриття цієї невизначеності поділимо чисельник і знаменник на x у старшій степені, тобто на x^5, дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4x^3-1}{2x+6x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^5}+\frac{4x^3}{x^5}-\frac{1}{x^5}}{\frac{2x}{x^5}+\frac{6x^5}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^5}}{\frac{2}{x^4}+6}=\frac{0}{6}=0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4x^3-1}{2x+6x^5}=0$.

Правило розкриття невизначеності типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

Якщо в чисельнику і в знаменнику многочлени степені n, тоді:

1. Якщо степінь чисельника дорівнює степені знаменника, то границя їх відношення дорівнює відношенню коефіцієнтів за старших степенів (приклади 5, 6).

2. Якщо степінь чисельника більше за степінь знаменника, то границя їх відношення дорівнює ∞ (приклад 7).

3. Якщо степінь чисельника менше за степінь знаменника, то границя їх відношення дорівнює 0 (приклад 8).

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, являє собою невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Для її розкриття помножимо й поділимо різницю радикалів на їхню суму:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\times\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^2+1-n^2+1\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=1.$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=1.$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, для розкриття цієї невизначеності помножимо й поділимо на спряжене до чисельника і до знаменника:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{8}{2}=4.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=4.$

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

Розв'язання. Якщо $x=1$, чисельник та знаменник обертаються в нуль

і вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, для розкриття цієї невизначеності помножимо й поділимо на спряжене до знаменника, тобто на $(\sqrt{2-x}+1)$.

Отримаємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{2-x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x-2\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)}\left(\sqrt{2-x}+1\right).$$

Розкладемо квадратний тричлен на множники

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2),$$

отримаємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)}\left(\sqrt{2-x}+1\right)=-\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}\left(\sqrt{2-x}+1\right)=-2\lim_{x\to 1}(x+2)=-6.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{2-x}-1}=-6.$

Перша стандартна границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1, \text{ або } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Доведення: Нехай $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Розглянемо коло (R = 1) (рис. 49), на якому позначено $R=OA=1, \quad \angle AOC=x, \quad tgx=AB.$

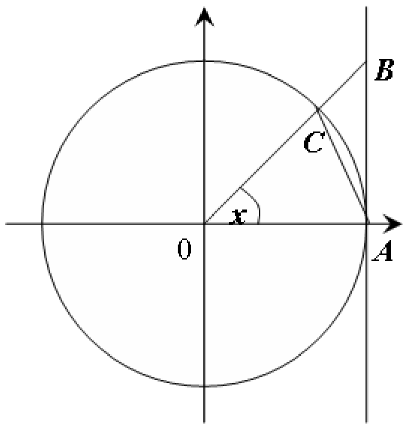

Рис. 49

Виходячи з геометричних міркувань, матимемо:

$$S_{\Delta AOC}<S_{\text{сектору}AOC}<S_{\Delta AOB};$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}\sin x;$$

$$S_{\text{секторуAOC}} = \frac{R}{2}x = \frac{1}{2}x;$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}tgx.$$

Отримали: $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$. Оскільки $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то, поділивши останню нерівність на $\sin x > 0$, отримаємо:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ або } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{x \to +0} \cos x = 1$, за лемою про три границі маємо: $\frac{\sin x}{x} \to 1 \ \ x \to 0$.

Отже, $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

У випадку $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ доведення проводиться аналогічно. Тут маємо:

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Поєднаємо отримані результати:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Графік функції $\frac{\sin x}{x}$ має вигляд (рис. 50).

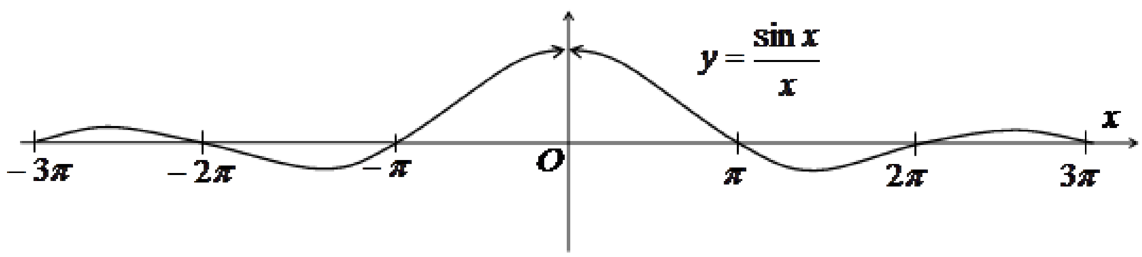

Рис. 50

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$.

Розв'язання. Вираз, що стоїть під знаком границі, є невизначеністю виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, для розкриття цієї невизначеності скористаємося формулою пониження степені $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$.

Друга стандартна границя

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Доведемо, що має місце твердження: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $x\to\infty$. Нехай

$$n<x<n+1\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n}\Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{n}.$$

Піднесемо члени отриманої нерівності до степенів, показники яких є частинами нерівності $n<x<n+1$. Дістанемо

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Перейдемо до границі з $n\to\infty$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\cdot 1^{-1} = e,$$

тоді за лемою про три границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Аналогічно доводиться справедливість рівності $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Зауваження. Якщо $x\to\infty$, то $\frac{1}{x}\to 0$.

Поклавши $\frac{1}{x}=t\,(x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x}=t\to 0)$, матимемо іншу форму запису другої важливої границі

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

В усіх випадках маємо невизначеність виду 1^{∞}, $e\approx 2{,}71828...$

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n} = \left\{1^{\infty}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-1}{2n+3}-1\right)^{n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2n+3}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{(-4)}{2n+3}\right]^{\frac{2n+3}{-4}}\right\}^{\frac{-4n}{2n+3}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+3}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{2+3/n}} = e^{-2}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n} = e^{-2}.$

Приклад 14. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+1}\right)^{x}=\dfrac{1}{e}.$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}=\dfrac{1}{e}.$

Приклад 15. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}-1+x+2}{x^{2}-1}\right)^{x}$.

Розв'язання. Виділяємо цілу частину і скористаємося другою стандартною границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2}-1+x+2}{x^{2}-1}\right)^{x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{x^{2}-1}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x+2}{x^{2}-1}\right)^{\frac{x^{2}-1}{x+2}}\right\}^{\frac{(x+2)x}{x^{2}-1}}=e.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{2}-1+x+2}{x^{2}-1}\right)^{x}=e.$

4.5. Порівняння нескінченно малих

Означення 1. Функції $f(x)$ та $g(x)$ мають той самий порядок малості за $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0.$$

Означення 2. Функції $f(x)$ та $g(x)$ еквівалентні за $x\to x_0$ (позначається $f\approx g$), якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1.$

Означення 3. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку, ніж $g(x)$ за $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Одне із застосувань еквівалентності нескінченно малих випливає з такої теореми.

Теорема. Границя відношення нескінченно малих функцій дорівнює границі відношення еквівалентних їм нескінченно малих, тобто, якщо $f \sim f_1$ а $g \sim g_1$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Приклад 1. Визначити порядок малості $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ відносно $g(x) = x$, якщо $x \to 0$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} 2\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $f(x)$ та $g(x)$ мають один порядок малості.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

Якщо $\alpha(x) \to 0$:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$.
2. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$.
3. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$.
4. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$.
5. $1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$.

6. $e^{\alpha(x)}$-1~$\alpha(x)$.

7. $a^{\alpha(x)}-1$~$\alpha(x)\ln(a)$.

8. $\left(1+\alpha(x)\right)^{\beta}-1$~$\beta\cdot\alpha(x)$.

9. $\ln(1+\alpha(x))$~$\alpha(x)$.

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\left(1+\sin^2 t\right)^3-1}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 t\sim t^2;\ (1+\sin^2 t)^3-1\sim 3\sin^2 t$,

то $$\lim_{t\to0}\frac{\left(1+\sin^2 t\right)^3-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\left(\left(1+\sin^2 t\right)^3-1\right)}{\sin^2 t}\cdot\frac{\sin^2 t}{t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{3\sin^2 t\cdot t^2}{\sin^2 t\cdot t}=\lim_{t\to0}3t=0.$$

Приклад 3. Обчислити $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+7x)}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sim\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};\ \ln(1+7x)\sim7x$,

то $$\lim_{x\to0}\frac{\sin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+7x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{7\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{7}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1+7x)}=\dfrac{1}{7}$.

4.6. Неперервність функцій. Класифікація точок розриву

Різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ називається приростом незалежної змінної x; $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$ – приростом функції $f(x)$ у точці x, що відповідає приросту x.

Означення 1. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0:

- якщо вона визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;
- якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Припустимо, що

$$\lim_{\Delta x \to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0).$$

Введемо позначення:

$$x_0 + \Delta x = x;\ \Delta x = x - x_0;\ \Rightarrow \Delta x \to 0;\ x \to x_0;$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Маємо ще одне означення неперервної функції в точці.

Означення 2. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в точці x_0 і в деякому її околі, має границю з $x \to x_0$ і вона збігається із значенням функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функція, неперервна в кожній точці проміжку, називається неперервною на цьому проміжку.

Якщо в точці x_0 порушується хоча б одна умова неперервності функції, функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 називається точкою розриву.

При цьому розрізняють такі випадки:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, але функція не визначена в точці x_0, або порушена умова $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; x_0 називають усувною точкою розриву 1-го роду;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не існує. Якщо при цьому існують обидві односторонні границі, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не рівні між собою, то x_0 називають точкою розриву 1-го роду, а

$\delta(f,x)=\left|\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\right|$ – стрибком функції у точці x_0;

3) в інших випадках x_0 називають точкою розриву 2-го роду.

Приклад 1. Задана функція $y=2^{1/(x-3)}$. Дослідити її на неперервність у точці $x_1=4$, $x_2=3$ та побудувати схематичний графік функції.

Розв'язання. Ця функція не є елементарною. У точці $x_1=4$ вона визначена. Тому в точці $x_1=4$ вона неперервна. У точці $x_2=3$ функція має розрив, вона не існує в цій точці. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа в точці $x_2=3$.

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}}=0.$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}}=+\infty.$$

Таким чином, точка $x=3$ є точкою розриву другого роду.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x-3}}=1.$$

Побудуємо схематичний графік (рис. 51).

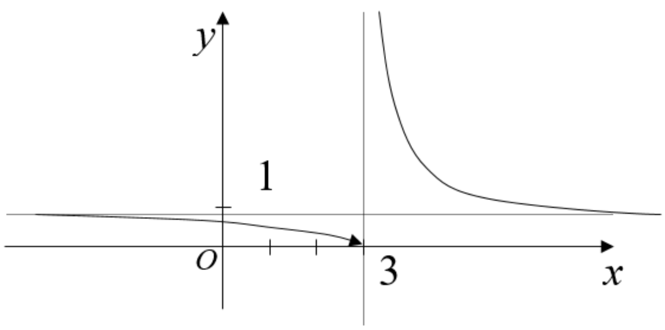

Рис. 51

Приклад 2. Знайти точки розриву функції

$$f(x)=\begin{cases} x^3, \ \ x\le 0; \\ \sin x, \ \ 0<x<\dfrac{3}{2}\pi; \\ 2, \ \ \ \ x\ge \dfrac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій осі й неперервна на проміжках $\left]-\infty,0\right[$; $\left]0;\dfrac{3}{2}\pi\right[$; $\left]\dfrac{3}{2}\pi;+\infty\right[$, тому що на кожному з них задана елементарна функція. Досліджуватимемо її на неперервність у точках $x=0$; $x=\dfrac{3}{2}\pi$.

1. У точці $x=0$ матимемо:

$$f(0)=0;$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x^3=0;$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} \sin x=0.$$

Отже, у точці $x=0$ функція $y=f(x)$ неперервна.

2. У точці $x=\dfrac{3}{2}\pi$ матимемо:

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2;$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi-0\right)=\lim_{x\to \frac{3}{2}\pi-0} \sin x=-1;$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi+0\right)=\lim_{x\to \frac{3}{2}\pi+0} 2=2.$$

Очевидно, границі не рівні між собою, але не дорівнюють $\pm\infty$. Тому в точці $x=\dfrac{3}{2}\pi$ $\delta(f,x)=3$ функція має розрив 1-го роду.

Побудуємо схематичний графік функції (рис. 52).

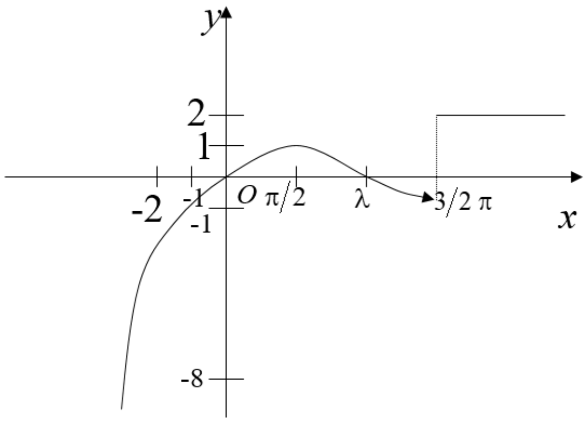

Рис. 52

Приклад 3. Дослідити характер точок розриву функції

$$f(x) = 1 - x\sin\frac{1}{x}.$$

Якщо вони усувні, то довизначити функцію до «неперервності».

Розв'язання. $X = 0$ точка розриву функції.

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{\alpha\to 0}\left(1 - \alpha\sin\frac{1}{\alpha}\right) = 1;$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{\alpha\to 0}\left(1 - \alpha\sin\frac{1}{\alpha}\right) = 1.$$

$x_0 = 0$ – усувна точка розриву. Довизначена функція $f(0) = 1$.

Властивості функцій неперервних в точці

1. Сума, частка, добуток функцій неперервних у точці є функція неперервна:

Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервні функції

$$f_1(x) \pm f_2(x),\ f_1(x) f_2(x),\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \text{ (за умови } f_2(x) \neq 0).$$

2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(u))$ неперервна в точці x_0.

3. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці a, то знайдеться δ окіл точки a, у якому функція обмежена.

4. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці a і $f(a)\neq 0$, то знайдеться δ окіл точки a, у якому виконуватиметься нерівність $f(x)>\dfrac{|f(a)|}{2}$.

Наслідок: будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці, у якій вона визначена.

Властивості функцій неперервних на відрізку

Означення 1. Функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Приклад: $y=\dfrac{1}{x}$ неперервна функція на інтервалі $(0,1)$.

Означення 2. Функція $f(x)$ називається неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b) і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва точці b, тобто:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$$

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b).$$

Приклад 4. Функція $f(x)=\begin{cases}4-x^2, x<2;\\ -1, x\geq 2.\end{cases}$ неперервна на проміжках $(-\infty,2)\cup[2,+\infty)$.

У точці $x=2$ вона неперервна справа (рис. 53).

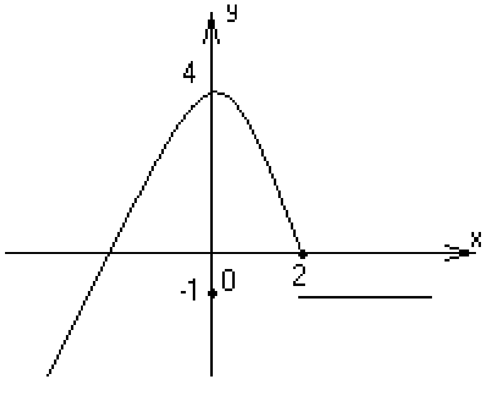

Рис. 53

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона на ньому обмежена, тобто (рис. 54):

$$\forall K>0, \forall x\in[a,b]: |f(x)|\le K.$$

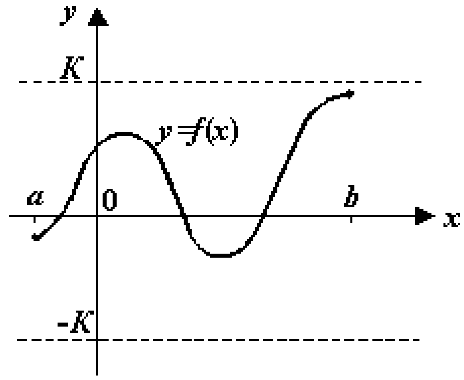

Рис. 54

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на ньому свого найменшого m та найбільшего значення M (рис. 55).

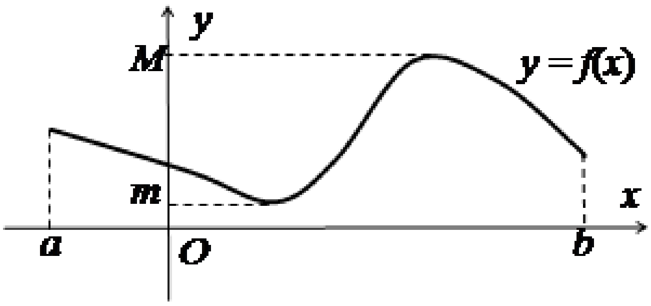

Рис. 55

Теорема 3. Больцано – Коші. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $f(a)<C<f(b)$, то всередині відрізка існує принаймі одна точка c, у якій функція $f(x)$ набуває значення, рівного C (рис. 56).

$$f(a)<C<f(b)\Rightarrow \exists c\in[a,b],\ f(c)=C.$$

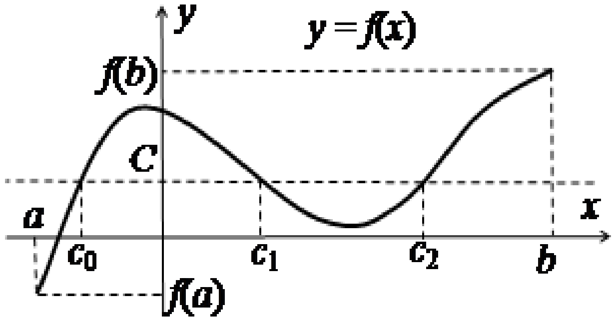

Рис. 56

Як наслідок, із теореми ***Больцано – Коші*** можна сформулювати таку теорему:

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на кінцях відрізку має значення різних знаків, то знайдеться така точка $x_1 \in [a,b]$, у якій значення функції дорівнює нулю (рис. 57).

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in [a,b],\ f(x_1) = 0.$$

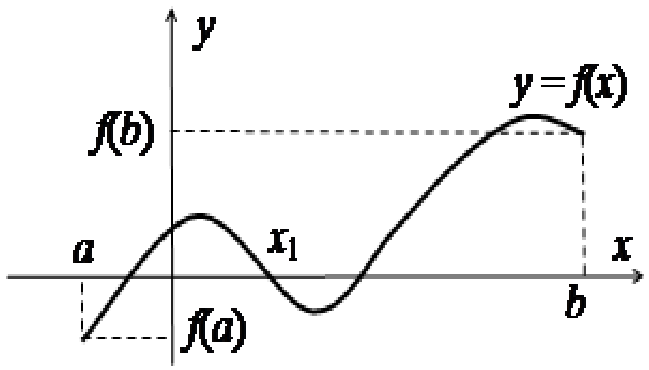

Рис. 57

4.7. *Запитання для самоконтролю*

1. Означення функції, способи задання функції.
2. Елементарні функції.
3. Означення границі функції, властивості границь.
4. Види невизначеностей і способи їх розкриття.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про першу стандартну границю.
6. Сформулюйте теорему про другу стандартну границю.
7. Класифікація точок розриву функції.
8. Сформулюйте означення границі функції на нескінченності.
9. Дайте означення односторонніх границь функції в точці.
10. Сформулюйте основні теореми про границю.
11. Дайте означення нескінченно малої функції в точці. Наведіть приклад.
12. Дайте означення нескінченно великої функції в точці. Наведіть приклад.
13. Теорема про зв’язок між нескінченно малими і нескінченно великими функціями.
14. Які нескінченно малі функції називаються функціями одного порядку? Як це записують?

Розділ 5. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

Число виду $z = x + iy$, де $i^2 = -1$ називається *комплексним* (i – уявна одиниця).

$x = \operatorname{Re} z$ – *дійсна* частина комплексного числа;

$y = \operatorname{Im} z$ – *уявна* частина комплексного числа;

$z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа.

Число $z_1 = x_1 - iy_1$ називають *комплексно спряженим* до числа $z_1 = x_1 + iy_1$, вісь *Ox* називають *дійсною віссю*, вісь *Oy* – *уявною віссю*.

Комплексне число $z = x + yi$ в декартовій системі координат зображається точкою M (рис. 58) з координатами (x, y) [8, 13].

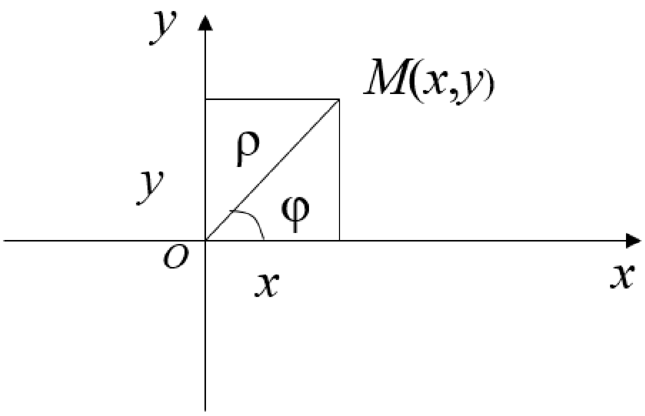

Рис. 58

Із геометричного змісту комплексного числа легко бачити, що

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де *OM*= $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – ***модуль комплексного числа*** z***;***

$\varphi = \operatorname{Arg} z$ – ***аргумент комплексного числа*** z, де $Arg z = \arg z + 2\pi k$, $0 < \varphi < 2\pi$;

або $-\pi \le \varphi \le \pi$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$; $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$, $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – *тригонометрична форма* комплексного числа.

Комплексне число можна записати в *експоненціальному вигляді* або у *формі Ейлера* $z = \rho e^{i\varphi}$.

5.1. Дії над комплексними числами

1. В алгебраїчній формі:

$$z_1 = x_1 + iy_1; \quad z_2 = x_2 + iy_2;$$

$$z_1 + z_1 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 \cdot z_1 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

2. У тригонометричній формі:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1); \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2);$$

$$z_1 : z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – перша формула Муавра;

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ – друга формула Муавра.

3. У показниковій формі:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi}; \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi};$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$z_1 / z_2 = \rho_1 / \rho_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right); \; k = \overline{0,.n-1}.$$

$z_1 = z_2$, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, або $\rho_1 = \rho_2$; $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Приклад 1. Записати число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ в тригонометричній формі.

Розв'язання. Маємо $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4;$

$$\cos\varphi=-\frac{1}{2};\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \Rightarrow\ \arg z=\frac{2}{3}\pi.$$

Тоді $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Приклад 2. Числа $z_1=2\sqrt{3}-2i$ і $z_2=3-\sqrt{3}i$ записати в експоненціальній формі, виконати дії $z_1\cdot z_2$; z_1/z_2.

Розв'язання. Представимо z_1 в експоненціальній формі:

$$|z_1|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=4;\quad \operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3}.$$

Тому $z_1=4e^{\frac{-i\pi}{3}}$. Для z_2 маємо $|z_2|=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3};$

$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Тому $z_2=2\sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{6}}$. Знайдемо

$$z_1\cdot z_2=4e^{\frac{-i\pi}{3}}\cdot 2\sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{6}}=8\sqrt{3}\cdot e^{\frac{-i\pi}{2}}=8\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))=-8\sqrt{3}i.$$

Визначимо

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4e^{\frac{-i\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{\frac{-i\pi}{6}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{-i\pi}{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

Приклад 3. Знайти $\sqrt[3]{z}$, де $z=-2+2\sqrt{3}i$.

Розв'язання. Запишемо число у тригонометричній формі

$$\rho=\sqrt{4+12}=4;\ \operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3};\ \varphi=\frac{2\pi}{3}.\ z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

тоді

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}\right),\ \text{де } k=0,1,2.$$

Тоді

$$k=0,\ z_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right);$$

$$k=1,\ z_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right);$$

$$k=2,\ z_3=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

5.2. Многочлени

Як відомо, многочлен степеня n має вигляд

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \quad (a_n\neq 0).$$

Основна теорема алгебри. Будь-яке рівняння $P_n(x)=0$ має рівно n коренів (дійсних або комплексних).

Нехай многочлен $P_n(x)$ має корені $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ($m\leq n$) кратностей, відповідно $k_1, k_2, .., k_m$ $\left(k+k+\ldots+k_m=n\right)_{1\ 2}$.

Тоді його можна розкласти в добуток

$$P_n(x)=a_n(x-z_1)^{k_1}\cdot(x-z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-z_m)^{k_m}.$$

Приклад 4. Розкласти на множники многочлен z^6-2z^3+1.

Розв'язання. $z^6-2z^3+1=(z^3-1)^2$. Знайдемо корені:

$$z^3=1;\quad z=\sqrt[3]{1};\ 1=\cos 0+i\sin 0;$$

$$z=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3};\ k=0,1,2.$$

$$k=0,\ z_1=1;$$

$$k=1,\ z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k=2,\ z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z^6-2z^3+1=(z-1)^2\cdot\left(z-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\cdot\left(z+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2$$

$$=(z-1)^2\cdot\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\left(z-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

5.3. Запитання для самоконтролю

1. Що називається комплексним числом?
2. Форми комплексного числа.
3. Дії над комплексними числами в різних формах задання.
4. Розкладання многочлена на множники.

Розділ 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Означення похідної та її практичний зміст

Означення 1. Похідною функції $y=f(x)$ в даній точці називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля довільним чином (рис. 59):

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

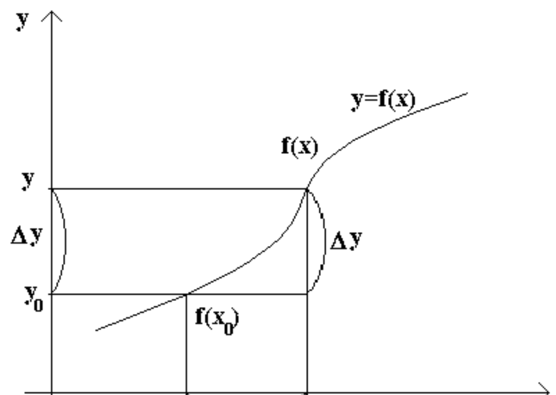

Рис. 59

Якщо ця границя існує, то її позначають $f'(x)$, або y', або y'_x, або $\frac{dy}{dx}$, або $\frac{df(x)}{dx}$.

Теорема. Якщо існує похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0, то в цій точці функція неперервна.

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ – \textit{лівостороння похідна};}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ – \textit{правостороння похідна}.}$$

Для існування похідної $f'(x_0)$ функції $f(x)$ у точці x_0 необхідно і достатньо, щоб $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо графік функції $y = \frac{1}{x}$ (рис. 60):

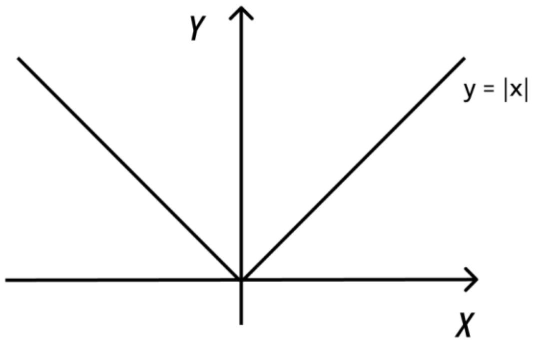

Рис. 60

Знайдемо лівосторонню і правосторонню границі функції $f(x)$ у точці $x_0 = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = +1.$$

Отже, лівостороння границя не дорівнює правосторонній границі, а тому похідна в точці $x_0 = 0$ не існує.

$$f'_{-}(0) \neq f'_{+0}(x) \Rightarrow f'(0) - \bar{\exists}.$$

Похідна функції $f(x)$ розглядається на множині тих точок, де вона існує, сама будучи функцією.

Зауважимо, що похідну $f'(x)$ визначають за допомогою граничного переходу за постійного x, тому якщо $x = a$, похідна має конкретне значення, яке позначають

$$f'(a) \text{ або } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій:

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'; \quad \alpha \neq 0.$
2. $\left(a^{u}\right)' = \alpha^{u} \ln a \cdot u'; \ \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'.$
3. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} u'; \ \left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}.$
4. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'.$
5. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'.$
6. $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$
7. $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$
8. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
9. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'.$
10. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$
11. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$

Механічний зміст похідної. Якщо тіло рухається за законом $s = f(t)$, де s – шлях, а t – час, то похідна $f'(t)$ є величиною ***миттєвої швидкості*** руху.

Геометричний зміст похідної. Похідна функції у точці x_0 дорівнює ***кутовому коефіцієнту дотичної*** до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$.

Доведення. Дотична графіка функції в точці M_0 описується як пряма, до якої спрямована пряма MM_0, якщо точка M переміщається за графіком функції, прямуючи до точки M_0. Позначимо точку M_0 як $(x_0; f(x_0))$ (рис. 61).

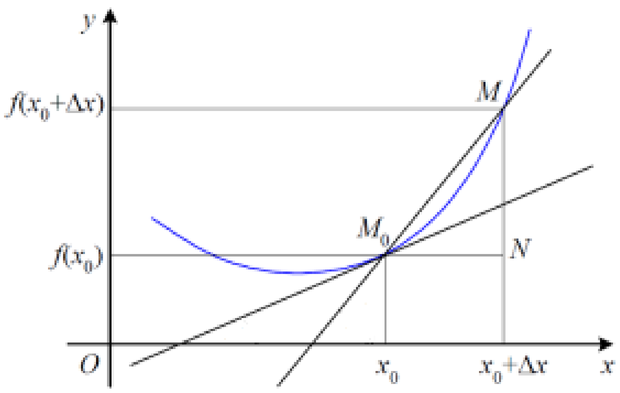

Рис. 61

Коефіцієнт напрямку прямої MM_0 дорівнює тангенсу кута $\angle MM_0N$:

$$k_{MM_0} = tg\angle MM_0N = \frac{MN}{M_0N} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Наближення точки M до точки M_0 – те ж саме, що наближення приросту аргументу Δx до нуля.

Нарешті, використовуючи визначення похідної, отримуємо, що коефіцієнт напрямку дотичної дорівнює похідній функції у відповідній точці.

$$k=\lim_{M\to M_0}k_{MM_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ у точці дотику $(x_0; f(x_0))$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Рівняння нормалі до кривої $y=f(x)$ у точці дотику $(x_0; f(x_0))$

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Піддотична AM_1 та піднормаль M_1B (рис. 62).

$$S_N=M_1B=|y\cdot\operatorname{tg}\alpha|=|f(x)\cdot f'(x)|,\ S_T=\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|.$$

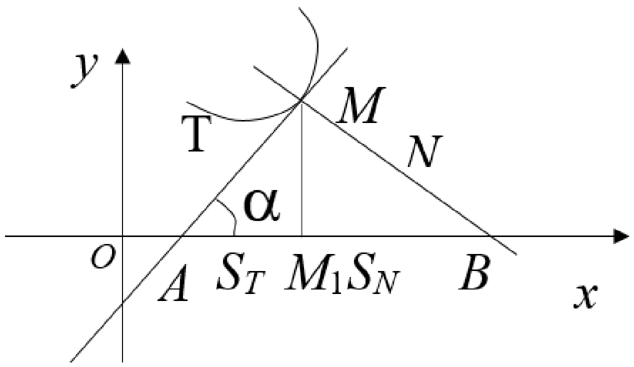

Рис. 62

Під кутом γ між двома лініями $y=f(x)$ та $y=g(x)$ розуміють кут між дотичними до них у точці їх перетину $tg\gamma=\dfrac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)\cdot g'(x_0)}$, де x_0 – абсциса точки перетину кривих.

Приклад 1. Написати рівняння дотичної та нормалі, знайти піддотичну та піднормаль функції $y=e^{1-x^2}$ в точці $x_0=-1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної та нормалі мають вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),\ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ x_0 = -1;$$

$$y_0 = e^{1-1} = e^0 = 1;\ y' = -2x \cdot e^{1-x^2};\ y'_0 = 2.$$

$y - 1 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x + 3$ – рівняння дотичної. А рівняння нормалі має вигляд

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow 2y - 2 = -x - 1;\ 2y + x - 1 = 0.$$

$$S_T = |f(x_0) / f'(x_0)| = |1:2| = \frac{1}{2};$$

$$S_N = |f(x_0) \cdot f'(x_0)| = |1 \cdot 2| = 2.$$

6.2. *Диференціювання функцій*

Правила диференціювання функцій

Нехай *C* – константа, а $f(x)$ та $g(x)$ – диференційовані функції, тоді:

1) похідна постійної величини С дорівнює нулю, тобто $C' = 0$;
2) постійний множник С виноситься за знак похідної:

$$(Cf(x))' = Cf'(x); \tag{1}$$

3) якщо кожна із функцій $f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x)$ (n – скінчене число) має похідну в деякій точці x, то їх алгебраїчна сума також має похідну в цій точці, причому похідна алгебраїчної суми цих функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх похідних:

$$(f_1(x) \pm f_2(x) \pm, \ldots, \pm f_n(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x); \tag{2}$$

4) якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має похідні в точці x, то їх добуток також має похідну в точці x, яку знаходять за формулою:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)' \cdot g(x) + g(x)' \cdot f(x); \tag{3}$$

5) якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має похідні в точці x і $g(x) \neq 0$, то частка цих функцій також має похідну в точці x, яку знаходять за формулою:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0 \qquad (4)$$

Похідна складеної функції

Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ і функції f та φ диференційовані функції своїх аргументів, то існує похідна за аргументом x ***складеної функції*** y, причому вона дорівнює добутку похідної функції y за проміжним аргументом u та похідної функції φ за аргументом x, тобто:

$$y_x{}' = y'_u \cdot u'_x.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції:

$$y = 3 \cdot x^{\frac{5}{3}} - 2arctgx + x \cdot e^x - 2\log_5 x.$$

Розв'язання. За правилом диференціювання алгебраїчної суми функцій за формулою (2) одержимо :

$$y' = (3 \cdot x^{\frac{5}{3}})' - (2arctgx)' + (x \cdot e^x)' - (2\log_5 x)'.$$

Оскільки постійний множник виноситься за знак похідної, за формулою (1) одержимо:

$$y' = 3(x^{\frac{5}{3}})' - 2(arctgx)' + (x \cdot e^x)' - 2(\log_5 x)'.$$

До третього доданку застосуємо правило диференціювання добутку функцій за формулою (3), а похідні інших доданків знайдемо в таблиці похідних основних елементарних функцій:

$$y' = 3 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} - 2\frac{1}{1+x^2} + x' \cdot e^x + x(e^x)' - 2\frac{1}{x\ln 5} \Rightarrow$$

$$y' = 5x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{1+x^2} + e^x + xe^x - \frac{2}{x\ln 5}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції

$$y = \frac{2\sin x}{x + 3^x}.$$

Розв'язання. За правилом диференціювання дробу за формулою (4) одержимо:

$$y' = \frac{2(\sin x)'(x + 3^x) - 2\sin x(x + 3^x)'}{(x + 3^x)^2}.$$

Використовуючи табличні значення похідних елементарних функцій, одержимо:

$$y' = \frac{2\cos x \cdot (x + 3^x) - 2\sin x(1 + 3^x \cdot \ln 3)}{(x + 3^x)^2}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції

$$y = x \cdot arc\sin x.$$

Розв'язання. За правилом диференціювання добутку за формулою (3) одержимо:

$$y' = x' \cdot arc\sin x + x \cdot (arc\sin x)'.$$

Використовуючи табличні значення похідних елементарних функцій, одержимо:

$$y' = arc\sin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \frac{1}{3} tg^3 x + \ln\sin x$.

Розв'язання. Використовуючи формули диференціювання, отримаємо:

$$y' = \frac{3}{3} tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = tg^2 x \cdot \sec^2 x + \mathrm{ctg}\, x.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = e^{x^2 + \mathrm{arctg}\, x}$.

Розв'язання. Використовуючи формули диференціювання, отримаємо:

$$y' = e^{x^2+\operatorname{arctg}x}(x^2+\operatorname{arctg}x)' = \left(2x+\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot e^{x^2+\operatorname{arctg}x} = \frac{2x+2x^3+1}{1+x^2}\cdot e^{x^2+\operatorname{arctg}x}.$$

Логарифмічне диференціювання

Логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ називають похідну від логарифма цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Для знаходження похідної першого порядку функції вигляду

$$y = [u(x)]^{v(x)}$$

використовують спосіб логарифмічного диференціювання.

Спочатку задану функцію логарифмують: $\ln y = v(x)\ln u(x)$. Шляхом диференціювання цієї рівності одержимо:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x).$$

Розв'язуючи це рівняння відносно похідної y', одержимо:

$$y' = y(v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}).$$

Підставимо в праву частину замість y степенево-показникову функцію $y = [u(x)]^{v(x)}$ і отримаємо остаточно формулу для знаходження першої похідної степенево-показникової функції:

$$y' = [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^{\cos x}$.

Розв'язання. Застосуємо метод логарифмічного диференціювання та прологарифмуємо задану функцію:

$$\ln y = \cos x \cdot \ln\sin x.$$

Диференціюванням цієї рівності одержимо:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x}{\sin x}.$$

Отримане рівняння розв'яжемо відносно y', отримаємо:

$$y' = (\ln y)' \cdot y = (\sin x)^{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x}{\sin x} =$$

$$= (\sin x)^{\cos x - 1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x\right).$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = x^{arc\sin x}$.

Розв'язання. Застосуємо метод логарифмічного диференціювання та прологарифмуємо задану функцію:

$$\ln y = arc\sin x \cdot \ln x.$$

Диференціюванням цієї рівності одержимо:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}.$$

Отримане рівняння розв'яжемо відносно y', отримаємо:

$$y' = x^{\arcsin x} \cdot \left[\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right].$$

Зауваження. Похідну степенево-показникової функції $[u(x)]^{v(x)}$ можна знаходити за формулою:

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = (u(x))^{v(x)} \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x),$$

тобто як суму похідних показникової та степеневої функцій.

Диференціювання неявно заданої функції

Вважають, що функція $y = f(x);\ x \in (a;b)$ задана неявно рівнянням $F(x;\ f(x)) = 0$.

Для обчислення похідної функції $y = f(x)$ потрібно тотожність $F(x; f(x)) = 0$ продиференціювати за x (розглядаючи ліву частину як складену функцію), а потім розв'язати отриману рівність відносно y'.

Приклад 1. Знайти y'_x функції $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

Розв'язання. Диференціюємо $x^4 + y^4 = x^2 y^2$ за x, отримаємо $4x^3 + 4y^3 \cdot y' = 2x \cdot y^2 + 2y \cdot y' \cdot x^2$. Звідси:

$y'\left(2y^3 - y \cdot x^2\right) = x \cdot y^2 - 2x^3$, розв'язуємо відносно y' і отримаємо:

$$y' = \frac{x \cdot y^2 - 2x^3}{2y^3 - yx^2}.$$

Приклад 2. Знайти y'_x, якщо функціональна залежність задана рівністю $y^5 - y - x^3 = 0$.

Розв'язання. Диференціюванням за змінною x одержимо:

$$5y^4 \cdot y' - y' - 3x^2 = 0 \Rightarrow y'(5y^4 - 1) = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{5y^4 - 1}.$$

Приклад 3. Знайти y'_x, якщо функціональна залежність задана рівністю $x \sin y - y \cdot \cos x = 0$.

Розв'язання. Функціональна залежність y від x задана неявно. Використовуючи правило диференціювання неявно заданої функції, одержимо:

$$x' \sin y + x(\sin y)' - (y' \cdot \cos x + y(\cos x)') = 0 \Rightarrow$$

$$\sin y + x \cos y \cdot y' - y' \cdot \cos x + y \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$y'(x \cos y - \cos x) = -(y \sin x + \sin y) \Rightarrow$$

розв'язуючи рівняння відносно y', отримаємо:

$$y' = -\frac{y \sin x + \sin y}{x \cos y - \cos x}.$$

Диференціювання параметрично заданої функції

Нехай функціональна залежність y від x задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} \quad t\epsilon[\alpha, \beta].$$

Тоді похідна функції y за змінною x для кожного $t\epsilon[\alpha, \beta]$ знаходиться за формулою:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

за умови, що функція $x = x(t)$ на $t \in [\alpha; \beta]$ має обернену функцію.

Приклад 1. Знайти y'_x, якщо

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2); \\ y = t - arctgt; \end{cases} \quad t\epsilon(0, \infty).$$

Розв'язання. Функціональна залежність y від x задана параметрично. Використовуючи правило диференціювання функції, що задана параметрично, за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ одержимо:

$y'_t = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$; $x'_t = \dfrac{1}{1+t^2} \cdot 2t$, тоді:

$y'_x = \dfrac{t^2}{2t} = \dfrac{t}{2}$.

Приклад 2. Знайти y'_x, якщо

$$\begin{cases} x = t + \frac{1}{2}\sin 2t; \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$$

Розв’язання. Функціональна залежність y від x задана параметрично. Використовуючи правило диференціювання функції, що задана параметрично, за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ одержимо:

$$y'_x = \frac{(\cos^3 t)'}{\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)'} = \frac{3\cos^2 t \cdot (\cos t)'}{\left(1 + \frac{1}{2}\cos 2t \cdot (2t)'\right)} = \frac{-3\cos^2 t \cdot \sin t}{1 + \cos 2t}.$$

6.3. *Диференціал функції та його застосування до наближених обчислень*

Означення 1. Операцію знаходження похідної функції називають ***диференціюванням*** цієї функції. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x, називають диференційованою в точці x. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційованою на цьому проміжку.

Означення 2. Диференціалом функції $y = f(x)$ називають головну лінійну частину приросту функції і позначають dy або $df(x)$.

Диференціал функції $y = f(x)$ знаходять за формулою:

$$dy = f'(x)dx \text{ або } dy = f'(x)\Delta x \qquad (1)$$

Приріст функції в точці x_0

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

відрізняється від диференціала $f'(x_0)\Delta x$ на нескінченно малу величину більшого порядку малості відносно приросту аргументу Δx .

Геометричний зміст диференціала

Нехай задана функція $y = f(x)$, $x_0 \in X$ та існує $f'(x_0)$. За означенням диференціала $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Скористаємося геометричним змістом похідної: $f'(x_0) = tg\alpha$. З трикутника M_0AB маємо: $|AM_0| \cdot tg\alpha = |AB|$ або $|AB| = f'(x_0) \cdot \Delta x$. Але

$f'(x_0)\Delta x = dy$, тому $dy = |AB|$.

Отже, диференціал функції $y = f(x)$ у точці x_0 визначає приріст ординати дотичної до кривої в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ з переходом від абсциси x_0 до абсциси $x_0 + \Delta x$ (рис. 63).

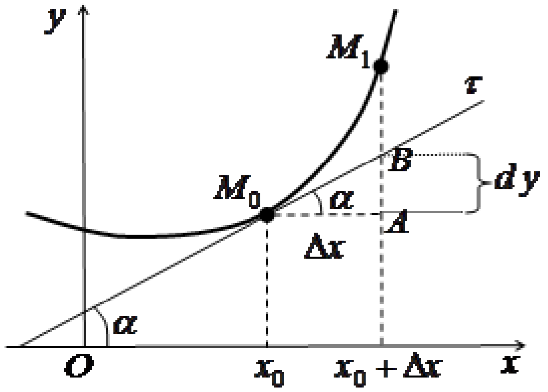

Рис. 63

Властивості диференціала першого порядку

1. $d(cy) = cdy$.
2. $d(y \pm z) = dy \pm dz$.
3. $d(y \cdot z) = zdy + ydz$.
4. $d\left(\dfrac{y}{z}\right) = \dfrac{zdy - ydz}{z^2}, z \neq 0$.

Інваріантність форми диференціала

Теорема. Якщо маємо складену функцію $y = f(u)$, де $u = u(x)$, причому $f(u)$ та $u(x)$ диференційовані функції, то

$$dy = f'_u du.$$

Дійсно, $dy = f'(u(x)) \cdot \Delta x = f'_u \cdot u'_x \cdot \Delta x = f'_u du$, де $u'_x \cdot \Delta x = du$.

Зауваження. Форма диференціала не залежить від того, є аргумент функції незалежною змінною чи функцією цієї змінної.

Диференціали функцій часто використовуються в інтегральному численні, для розв'язування диференціальних рівнянь і в наближених обчисленнях значень функції за формулою:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (2)$$

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = x^3 + e^{3x}$.

Розв'язання. За формулою (1) знаходимо:

$$dy = (x^3 + e^{3x})' dx = (3x^2 + 3e^{3x}) dx.$$

Приклад 2. Знайти диференціал функції $y = tgx$ в точці $x = \pi/3$ якщо $\Delta x = 0{,}01$.

Розв'язання. За формулою (1) знайдемо диференціал функції в довільній точці x за довільного приросту $\Delta x = dx$:

$$dy = (tgx)' \cdot \Delta x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \Delta x.$$

Для того щоб обчислити диференціал функції $y = tgx$, у точці $x = \frac{\pi}{3}$ підставимо замість x число $\frac{\pi}{3}$, замість Δx – число 0,01 і використаємо значення $\cos 60^0 = 1/2$. Одержимо:

$$dy\Big|_{\substack{x=\pi/3 \\ \Delta x = 0{,}01}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot 0{,}01 = 0{,}04.$$

Приклад 3. Знайти наближено значення $\sin 29^\circ$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sin x$, тоді $f'(x) = \cos x$.

За формулою (2) маємо з $x_0 = 30^\circ, \Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180} \approx -0{,}017$. Отже,

$$\sin 29^0 = \sin(30^0 - 1^0) \approx \sin 30^0 + \cos 30^0 \cdot (-0{,}017).$$

Враховуючи, що $\sin 20^0 = 0{,}5; \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}856$, отримаємо:

$$\sin 29^0 = 0{,}5 - 0{,}856 \cdot 0{,}017 = 0{,}48555.$$

Похідні та диференціали вищих порядків

Означення. Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають похідну першого порядку від похідної $(n-1)$-го порядку і позначають

y'', $f''(x)$, y''', $f'''(x)$, ..., y^{IV}, $f^{IV}(x)$, ..., $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Згідно із цим означенням:

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'.$$

Механічний зміст похідної другого порядку: якщо тіло рухається за законом $S = S(t),$ то похідна другого порядку $S''(t)$ є величиною прискорення в момент t.

Похідна другого порядку функції, що ***задана параметрично,*** знаходиться за формулою:

$$y''_x = \frac{x'_t \cdot y''_t - y'_t \cdot x''_t}{\left(x'_t\right)^3}\ . \qquad (1)$$

Для знаходження похідних порядку $n > 2$ використовують формули:

1. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$

2. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$

3. $(y \pm u \pm v)^{(n)} = y^{(n)} \pm u^{(n)} \pm v^{(n)}.$

4. $(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-2)} \cdot v'' + \ldots + u \cdot v^n,$ (2)

де $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\quad k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k.$

Диференціал n-го порядку визначається як диференціал першого порядку від диференціала $(n-1)$-го порядку, тобто:

$$d^n f(x) = d[d^{n-1} f(x)].$$

Приклад 1. Знайти похідні другого порядку функції $y = x^3 \cdot \cos x.$

Розв'язання. Використовуючи формулу (2), одержимо:

$$y'' = (x^3)'' \cdot \cos x + 2(x^3)' \cdot (\cos x)' + x^3 \cdot (\cos x)'' =$$

$$= 6x \cdot \cos x - 6x^2 \cdot \sin x - x^3 \cos x.$$

Приклад 2. Знайти похідні другого порядку параметрично заданої функції $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

Розв'язання. Використовуючи формулу (1), одержимо:

$$y''_x = \frac{(3\cos t)' \cdot (3\sin t)'' - (3\sin t)' \cdot (3\cos t)''}{\left[(3\cos t)'\right]^3} =$$

$$= \frac{-3\sin t \cdot 3(-\sin t) - 3\cos t \cdot 3(-\cos t)}{(-3\sin t)^3} =$$

$$= \frac{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}{-27\sin^3 t} = \frac{9}{-27\sin^3 t} = \frac{-1}{3\sin^3 t}.$$

Приклад 3. Знайти прискорення руху тіла, що рухається за законом $S = 3e^{2t} - 2t^3$, у момент $t = 3$.

Розв'язання. У довільний момент часу t прискорення руху тіла буде $a = S''(t)$.

Знайдемо спочатку похідну першого порядку функції $S(t)$:

$$S'(t) = 3e^{2t} \cdot 2 - 6t^2 = 6(e^{2t} - t^2);$$

диференціюванням $S'(t)$ одержимо:

$$S''(t) = a(t) = 6(2e^{2t} - 2t) = 12(e^{2t} - t).$$

Отже, прискорення в заданий момент $t = 3$:

$a(3) = 12(e^6 - 3)$ – одиниць виміру прискорення.

6.4. Застосування похідної

Означення 1. Точка с називається точкою ***локального максимуму*** функції $y = f(x)$, якщо існує такий ε – окіл точки c, що для всіх $(x \in c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ виконується нерівність: $f(x) \le f(c)$.

Зауваження. Якщо $f(x) < f(c)$, то точка c є точкою ***строгого локального максимуму.***

Означення 2. Точка c називається точкою ***локального мінімуму*** функції $y = f(x)$, якщо існує такий $\varepsilon -$окіл точки c, що для всіх $x \in (c-\varepsilon; c+\varepsilon)$ виконується нерівність: $f(x) \geq f(c)$.

Зауваження. Якщо $f(x) > f(c)$, то точка c точка ***строгого локального мінімуму.***

Означення 3. Точка c називається точкою ***екстремуму***, якщо вона є точкою локального максимуму або точкою локального мінімуму.

На (рис. 64) точки c_1, c_3 – точки строгого локального максимуму, c_2, c_4 – точки строгого локального мінімуму.

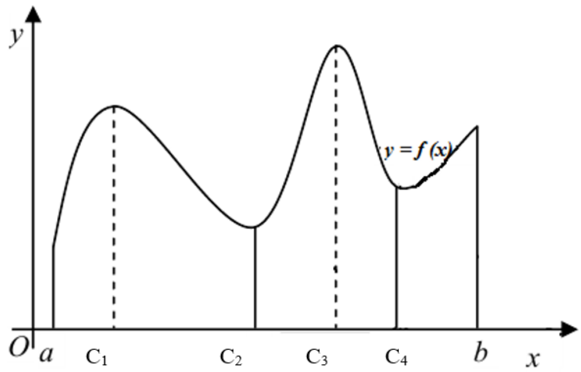

Рис. 64

Теореми про середнє

Теорема Ферма. Нехай точка c – екстремальна точка функції $y = f(x)$ і існує похідна функції в точці c $(\exists f'(c))$, тоді $f'(c) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ферма .
В екстремальних точках дотична до функції паралельна до осі OX .

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована для всіх $x \in (a;b)$ та $f(a) = f(b)$, то існує хоча б одна точка $c \in (a,b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ролля (рис. 65).

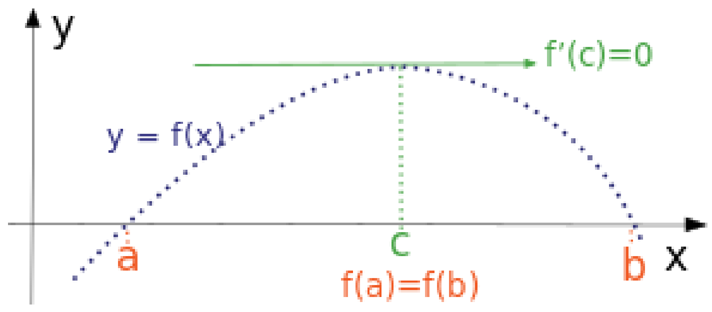

Рис. 65

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована для всіх $x \in (a;b)$ і має на кінцях відрізку однакові значення, то існує хоча б одна точка $c \in (a,b)$, у якій дотична до кривої паралельна до осі OX.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована для всіх $x \in (a;b)$, то існує хоча б одна точка $c \in (a,b)$ така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ – формула Лагранжа.

Геометричний зміст теореми Лагранжа (рис. 66).

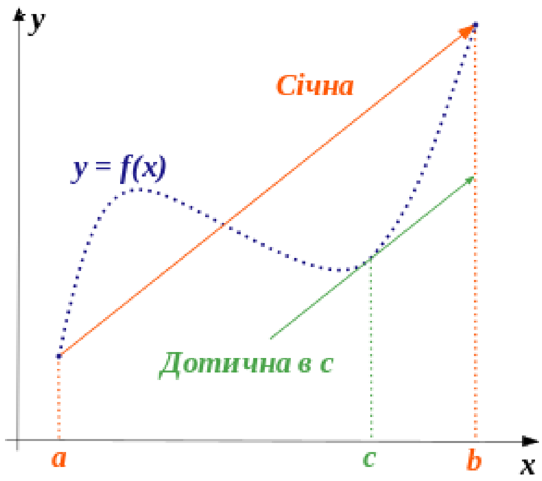

Рис. 66

Для будь-якої функції $f(x)$ неперервної на відрізку $[a;b]$ і диференційованої на $(a;b)$ існує точка $c \in (a,b)$ така, що січна, що поєднує кінцеві точки проміжку $[a;b]$ є паралельною до дотичної в точці c.

Наслідки:

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована для всіх $x \in (a;b)$,

а $f'(x) > 0 \left(f'(x) < 0 \right)$, тоді $f(x)$ зростає (спадає).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційована для всіх $x \in (a;b)$,

а $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) - const$.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовані для всіх $x \in (a;b)$ та $g(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a,b)$, то існує хоча б одна точка $c \in (a,b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ – формула Коші.

Геометричний зміст теореми Коші.

Для будь-якої параметрично заданої функції неперервної на відрізку $[a;b]$ і диференційованої на $(a;b)$ знайдеться така точка $c \in (a,b)$, у якій дотична буде паралельною січній, що поєднує кінцеві точки проміжку $[a;b]$.

Формула Тейлора

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 похідні до n-го порядку включно, то її можна представити у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \quad (1)$$

де функція $R_n(x)$ (залишковий член розкладання) та її похідні до n-го порядку включно обертаються в нуль у точці $x = x_0$:

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \ldots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Формула (1) називається формулою Тейлора з остаточним членом $R_n(x)$, а її частковий випадок для $x = 0$ називається формулою Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Диференційованість функції $f(x)$ у точці x_0 тягне за собою її неперервність у деякому околі цієї точки, а обернення в нуль точці x_0

залишкового члена $R_n(x)$ та його похідної означає, що $R_n(x)$ має малі значення принаймні в безпосередній близькості від точки x_0. Тому формула Тейлора може застосовуватися для апроксимації функцій многочленами. При цьому остаточний член $R_n(x)$ розглядається як похибка апроксимації і відкідається:

$$f(x) \neq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Приклад 1. Знайти лінійну апроксимацію функції $f(x) = e^x$ в околі точки $x = x_0$.

Розв'язання. Враховуючи, що $f(0) = f'(0) = 1$, та підставляючи у формулу (1) ці значення, отримаємо:

$$e^x = 1 + x.$$

Область застосування цієї формули обмежується достатньо малими (за абсолютної величини) значеннями x і залежить від заданої точності апроксимації. Наприклад, за $x = \frac{1}{3}$ різниця між наближеним значенням і точним результатом становить менше за 4,5 %. Зі зменшенням абсолютної величини x точність обчислення суттєво зростає. Так, якщо $x = \frac{1}{4}$, похибка становить приблизно 2,65 %. Як наслідок, маємо

$$e^x - 1 \approx x.$$

Приклад 2. Розкласти в ряд Маклорена $f(x) = \ln(1 + x)$.

Розв'язання. Очевидно, що

$$f(0) = \ln 1 = 0,\ f'(0) = \left.\frac{1}{1 + x}\right|_{x = 0} = 1;$$

$$f''(0) = \left.\frac{-1}{(1 + x)^2}\right|_{x = 0} = -1.$$

Отже, розвинення функції $f(x) = \ln(1 + x)$ в ряд Маклорена має вигляд:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}. \qquad (2)$$

Ця формула дає більш точне уявлення про поведінку функції $\ln(1+x)$ за малих (за абсолютною величиною) значень x порівняно зі співвідношенням

$$\ln(1+x)\approx x.$$

Зауваження. Формула (2), якщо $x=\frac{1}{5}$, дає для $\ln\frac{6}{5}$ число 0,18, тоді як його точним значенням є 0,18232.

Правило Лопіталя – Бернуллі

Розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ *та* $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2. Нехай у деякому околі точки $x=a$ функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовані всюди, крім, можливо, точки $x=a$, та $g'(x)\neq 0$ в околі цієї точки. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ є одночасно нескінченно малими або нескінченно великими за $x\to a$ і при цьому існує границя відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ за $x\to a$, то існує границя відношення $f(x)/g(x)$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження. У деяких випадках невизначеності $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ можуть потребувати неоднократного повторення правила Лопіталя.

Приклад 1. Знайти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3} \quad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Розв'язання. Застосуємо формулу Лопіталя.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-8x+5}{3x^2-10x+7}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{6x-8}{6x-10}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}.$$

Розкриття невизначеностей типу $0\cdot\infty$ *та* $\infty-\infty$.

Для обчислення $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, де $f(x)$ – нескінченно мала, а $g(x)$ – нескінченно велика, якщо $x\to a$, треба перетворити добуток в $\dfrac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$ або $\dfrac{g(x)}{(f(x))^{-1}}$, тобто в невизначеність $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{a}{x}$ $\quad(\infty\cdot 0)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{a}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{x^{-1}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{x}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=a\cdot\lim_{x\to\infty}\cos\frac{a}{x}=a.$$

Розкриття невизначеностей 0^0, ∞^0 *та* 1^∞.

У всіх випадках обчислюється границя функції $y=(f(x))^{g(x)}$. Прологарифмуємо функцію $y=(f(x))^{g(x)}$. Отримаємо $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$ і знайдемо границю $\ln y$. Після чого знайдемо границю y.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$ $\quad\left(0^0\right)$.

Розв'язання. Прологарифмуємо функцію $y=x^{\sin x}$, отримаємо:

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x.$$

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\ln y$:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x}=-\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

Знаходимо $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$:

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0} x^{\sin x}=e^0=1.$$

6.5. Дослідження функцій і побудова графіків функцій

Монотонність функцій

Функція $y = f(x)$ називається монотонно зростаючою (спадною) на інтервалі $[a;b]$ області визначення, якщо з нерівності $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [a;b]$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогічно $f(x_1) > f(x_2)$.

Якщо функція диференційована на інтервалі $(a;b)$, а $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то $f(x)$ зростає на $(a;b)$. Якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то $f(x)$ спадає на $(a;b)$.

Область визначення функції $f(x)$ можна розбити на скінченне число інтервалів монотонності, кожний з яких обмежений критичними точками, у яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

Розв'язання. Функція $y = x^2 \cdot e^{-x}$ визначена на всій числовій осі. Знаходимо її похідну:

$$y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} \quad .$$

Знаходимо критичні точки:

$y' = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = x(2-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$. Ці точки ділять числову вісь на три інтервали: $(-\infty;0), (0;2), (2;\infty)$. Визначимо знак похідної на кожному з проміжків:

$$y'(-1) < 0, y'(1) > 0, y'(3) < 0.$$

Тому $y'(x) < 0$ для $\forall x \in (-\infty;0) \cup (2;\infty)$ та $y'(x) > 0$ для $\forall x \in (0;2)$.

Отже, функція $y = x^2 \cdot e^{-x}$ монотонно спадає в інтервалах $(-\infty;0), (2;\infty)$ і монотонно зростає в інтервалі $(0;2)$.

Приклад 2. Показати, що функція $y = arctgx - x$ всюди спадає.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі. Оскільки її похідна

$y' = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \le 0$, для $\forall x \in (-\infty; \infty)$, то функція спадає у всій області визначення.

Екстремуми функцій

Якщо існує деякий окіл точки x_0, що для довільного $x \ne x_0$ виконується нерівність $f(x) > f(x_0)(f(x) < f(x_0))$, то точка x_0 називається ***точкою максимуму (мінімуму)***. Точки максимуму та мінімуму називаються точками екстремуму функції.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ або $f'(x)$ не існує, x_0 називається ***критичною,*** або ***стаціонарною точкою*** функції $f(x)$; $x_0 \in D(x)$.

Дослідження на екстремум за допомогою похідної першого порядку

Теорема 3. Достатня умова існування екстремуму функції. Нехай функція $f(x)$ диференційована в околі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ критичної точки x_0, за винятком, можливо, самої точки. Якщо при цьому в інтервалах $(x_0 - \varepsilon; \varepsilon)$ та $(x_0; x_0 + \varepsilon)$ похідна має різні знаки, то x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$ і якщо $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$ з $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ та $f'(x) < 0$ $(f'(x_0) > 0)$ $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$, то x_0 – точка максимуму (мінімуму). Якщо $f'(x)$ на $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ не змінює знака, то x_0 не буде точкою екстремуму функції.

Алгоритм дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної

1. Знайти область визначення функції.

1. Знайти похідну $f'(x)$ функції.

2. Знайти критичні точки x_0 функції $f(x)$, тобто знайти точки, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.

3. Розбити область визначення функції критичними точками на проміжки та дослідити знаки похідної $f'(x)$ з переходом через критичні точки. При цьому критична точка x_0 є точкою мінімуму, якщо з переходом через неї зліва направо $f'(x)$ змінює знак з від'ємного « – » на додатній « + », у протилежному випадку x_0 є точкою максимуму.

4. Виписати проміжки монотонності функції і точки екстремуму.

5. Обчислити значення функції $f(x)$ у кожній екстремальній точці.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі. Знаходимо похідну фукції і критичні точки:

$$y' = 6x^5 - 12x^3 + 6x = 6x\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = 6x\left(x^2 - 1\right)^2 = 0;$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1.$$

Ці точки ділять числову вісь на чотири інтервали: $(-\infty;-1), (-1;0), (0;1), (1;+\infty)$. Визначимо знак похідної на кожному з проміжків:

$$y'(-2) < 0,\ y'(-0{,}5) < 0,\ y'(0{,}5) > 0,\ y'(2) > 0.$$

Тому $y'(x) < 0$ для $\forall x \in (-\infty;-1) \cup (-1;0)$ та $y'(x) > 0$ для $\forall x \in (0;1) \cup (1;2)$. З переходом через точки $x_2 = 1$; $x_3 = -1$ $f'(x)$ не змінює знак, отже, у цих точках екстремуму нема. З переходом через точку $x_1 = 0$ похідна змінює знак з « – » на « + », отже, $x = 0$ є точкою мінімуму. Значення функції в точці мінімуму $y(0) = -5$.

Дослідження на екстремум за допомогою похідної другого порядку

Теорема 4. Достатня умова існування екстремуму функції. Нехай функція $f(x)$ два рази неперервно диференційована в околі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ критичної точки x_0, за винятком, можливо, самої точки. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$, то в точці x_0 – мінімум. Якщо $f''(x_0) < 0$, то в точці x_0 – максимум. Якщо $f''(x_0) = 0$, то потрібне додаткове дослідження.

Алгоритм дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної

1. Знайти область визначення функції.

2. Знайти першу похідну функції і точки, у яких вона перетворюється в нуль.

3. Знайти другу похідну функції і дослідити її знак у кожній із критичних точок.

4. Визначити точки екстремуму й обчислити (якщо потрібно) значення функції.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $y = x^2$.

Розв'язання. Функція $y = x^2$ визначена на всій числовій осі. Знаходимо її похідну:

$$y' = 2x.$$

Знаходимо критичні точки:

$y' = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Значення другої похідної $y'' = 2 > 0$ в усіх точках області визначення, отже, у точці $x = 0$ функція має мінімум. Дійсно (рис. 67).

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $y = -x^2$.

Розв'язання. Функція $y = -x^2$ $\cdot$визначена на всій числовій осі. Знаходимо її похідну та критичні точки:

$$y' = -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Значення другої похідної: $y'' = -2 < 0$ в усіх точках області визначення, отже, у точці $x = 0$ функція має максимум. Дійсно (рис. 67).

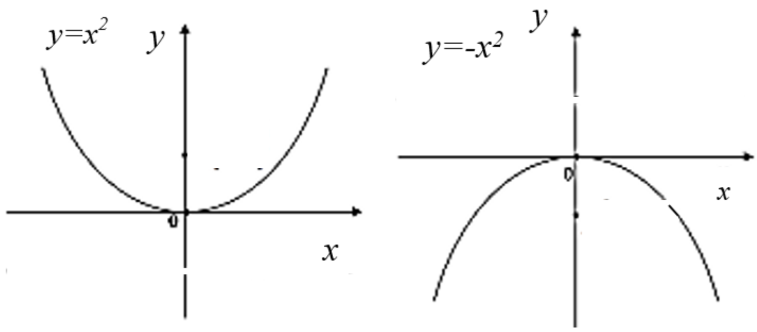

Рис. 67. Графікі функцій $y = x^2$і $y = -x^2$

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ $(n+1)$ раз диференційована в околі $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ критичної точки x_0, за винятком, можливо, самої точки і

$$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0,$$

тоді якщо:

1. $\begin{cases} n+1-парне; \\ f^{(n+1)}(x_0)>0, \end{cases}$ то в точці x_0 – мінімум.

2. $\begin{cases} n+1-парне; \\ f^{(n+1)}(x_0)<0, \end{cases}$ то в точці x_0 – максимум.

3. $(n+1)$ – *непарне*, то в точці x_0 екстремуму немає.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $y=x^5$.

Розв'язання. Функція $y=x^5\cdot$визначена на всій числовій осі. Знаходимо її похідну:

$$y'=5x^4.$$

Знаходимо критичні точки:

$$y'=5x^4=0 \Rightarrow x=0.$$

Значення другої похідної в критичній точці $x=0$:

$$y''=20x^3;\ y''(0)=0$$

Значення третьої, четвертої, п'ятої похідних у критичній точці $x=0$:

$$y'''=60x^2;\ y'''(0)=0;\ y^{IV}=120x;\ y^{IV}(0)=0;$$

$y^{V}=120$, екстремуму в точці $x=0$ немає, оскільки $(n+1)=5$, тобто степінь похідної непарна.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $y=x^4$.

Розв'язання. Функція $y=x^4\cdot$визначена на всій числовій осі. Знаходимо її похідну та критичні точки:

$$y'=4x^3.$$

$$y'=4x^3=0 \Rightarrow x=0.$$

Значення другої похідної в критичній точці $x=0$:

$$y''=12x^2;\; y''(0)=0.$$

Значення третьої, четвертої похідних у критичній точці $x=0$:

$$y'''=24x;\; y'''(0)=0;\; y^{IV}=24>0.$$

Отже, у точці $x=0$ функція має мінімум.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $y=-2x^2-5x+6$.

Розв'язання. Функція $y=-2x^2-5x+6$ визначена на всій числовій осі. Знаходимо її похідну:

$$y'=-4x-5.$$

Знаходимо критичні точки:

$$y'=-4x-5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{4}.$$

$$y'=-4x-5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{4}.$$

Значення другої похідної:

$y''=-4;\; y''<0$, отже, у точці $x=-\frac{5}{4}$ функція має максимум.

Точки перегину функції

Графік диференційованої функції $y=f(x)$ називають ***опуклим*** (угнутим) ***вниз*** на інтервалі $(a;b)$, якщо дуга кривої на цьому проміжку розташована вище за дотичну, проведену до графіка функції $y=f(x)$ в довільній точці $x\in(a;b)$ (рис. 68).

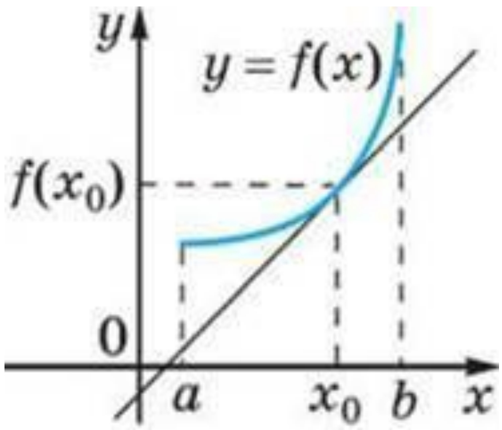

Рис. 68

Якщо на інтервалі $(a;b)$ дотична до довільної точки розташована вище, ніж дуга кривої, то графік диференційованої функції на цьому інтервалі називають ***опуклим угору*** (рис. 69).

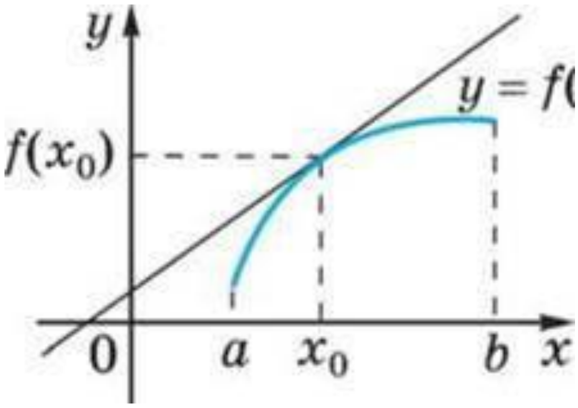

Рис. 69

Користуються позначенням $\cup \cap$ для вгнутості та опуклості відповідно.

Теорема 1. Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована на $(a;b)$. Тоді, якщо $f''(x) > 0,\ x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ опукла вниз.

Теорема 2. Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована на $(a;b)$. Тоді, якщо $f''(x) < 0,\ x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ опукла угору.

Точка, у якій функція змінює вид опуклості, називається ***точкою перегину*** функції.

Точка A графіка неперервної функції $f(x)$, у якій існує дотична до до цього графіка з переходом через яку крива, що є графіком функції, змінює вид опуклості, є точкою перегину функції (рис. 70).

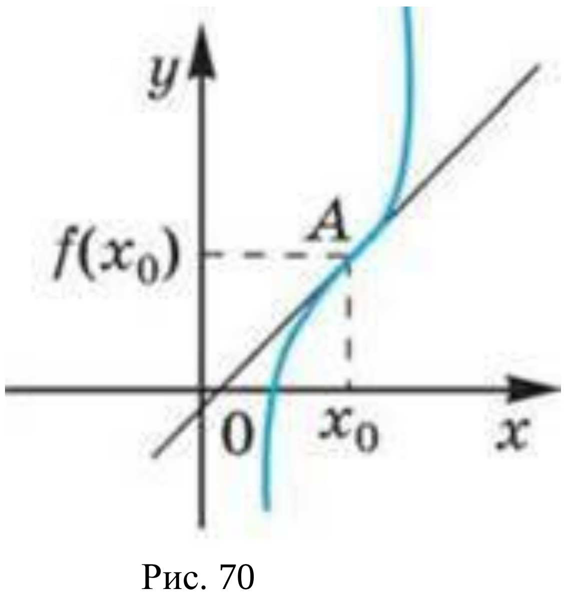

Рис. 70

Теорема 3. (***Достатня умова перегину.***) Якщо $f''(x_0)=0$ або не існує в точці x_0 і $f''(x)$ змінює знак з переходом через точку x_0, то x_0 є точкою перегину.

Алгоритм дослідження функції $y=f(x)$ ***на опуклість та точки перегину:***

– знайти область визначення функції $y=f(x)$;

– знайти другу похідну $f''(x)$;

– знайти внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує;

– позначити знайдені точки на області визначення функції $y=f(x)$ та з'ясувати знак другої похідної $f''(x)$ на кожному з отриманих проміжків.

– за отриманими знаками $f''(x)$ дійти висновку про опуклість функції та абсциси точок перегину і записати відповідь.

Приклад 1. Знайти точки перегину функції $y=1-x^2$.

Розв'язання. Функція $y=1-x^2$ визначена на всій числовій осі. Знаходимо її похідні:

$y'=-2x; y''=-2, \forall x\in(-\infty;\infty)$,

Отже, функція опукла вгору для $\forall x\in(-\infty;\infty)$.

Приклад 2. Знайти точки перегину функції $y=e^x$.

Розв'язання. Функція $y=e^x$ визначена на всій числовій осі. Знаходимо похідні функції:

$y'=y''=e^x>0, \forall x\in(-\infty;\infty)$, отже, функція опукла вниз.

Відповідь. Функція $y=e^x$ опукла вниз для $\forall x\in(-\infty;\infty)$.

Приклад 3. Знайти точки перегину й дослідити на опуклість функцію $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. Функція $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ визначена на всій числовій осі. Знаходимо її похідну і критичну точку:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{-2}{3}},\ x = 1 \text{ – критична точка.}$$

Знаходимо другу похідну функції та перевіряємо її знак зліва і справа від критичної точки:

$$y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{\frac{-5}{3}}, y''(0) > 0, y''(2) < 0.$$

З переходом через критичну точку друга похідна змінює знак, отже, $x = 1$ є точкою перегину функції.

Відповідь. Функція $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ опукла вниз для $\forall x \in (-\infty;1)$ та опукла вгору для $\forall x \in (1;\infty)$.

Приклад 4. Знайти точки перегину й дослідити на опуклість функцію $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 24$.

Розв'язання. Функція $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 24$ визначена на всій числовій осі.

Знаходимо похідні функції:

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 24x, \forall x \in (-\infty;\infty)$.

$y'' = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2), \forall x \in (-\infty;\infty)$.

Друга похідна y'' існує в усіх точках. Для знаходження критичних точок розв'яжемо рівняння $y'' = 0$.

$x^2 + x - 2 = 0$, звідки знаходимо критичні точки $x_1 = 1, x_2 = -2$.

Позначимо числа $x_1 = 1, x_2 = -2$ на області визначення функції та з'ясуємо знак другої похідної y'' на кожному з проміжків (рис. 71).

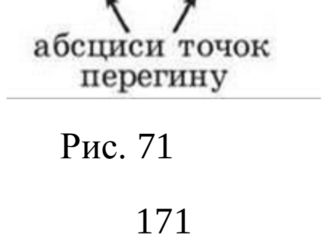

Рис. 71

$$y'' = 12(x-1)(x+2),\ y''(-3) > 0,\ y''(0) < 0,\ y''(2) > 0.$$

Отже, на проміжках $(-\infty; -2)$ та $(1; \infty)$ графік функції опуклий униз, а на $(-2; 1)$– угору, тому $x_1 = 1, x_2 = -2$ – абсциси точок перегину. Маємо: $y(-2) = -50, y(1) = -8$.

Отже, $(-2; -50)$ та $(1; -8)$ – точки перегину.

Відповідь. Функція $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 24$ опукла вниз для $(\forall x \in -\infty; -2) \cup (1; \infty)$ та опукла вгору для $\forall x \in (-2; 1)$; $(-2; -50)$ та $(1; -8)$ – точки перегину функції.

Асимптоти функції

Цей пункт не пов’язаний із диференціальним численням, але доповнює попередню інформацію про елементи поведінки функції.

Асимптота кривої – це така пряма, відстань до якої від змінної точки кривої прямує до нуля в міру віддалення точки кривої у нескінченність.

Для довільних функцій розрізняють *вертикальні*, *похилі*, *горизонтальні* асимптоти.

Означення 1. Пряма $x = a$ називається ***вертикальною*** асимптотою функції $y = f(x)$, якщо справедлива хоча б одна рівність:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty \text{ або } \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty.$$

Зауважимо, що пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою для функції $y = f(x)$ тоді і тільки тоді, коли точка $x = a$ є точкою розриву другого роду (випадок, коли хоча б одна з односторонніх границь нескінченна) для функції $y = f(x)$.

Отже, задача знаходження вертикальних асимптот еквівалентна задачі відшукання точок розриву другого роду.

Означення 2. Пряма $y = kx + b$ називається ***похилою*** асимптотою функції $y = f(x)$, якщо з $x \to \infty (x \to -\infty)$ справедлива рівність

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - kx - b \big) = 0. \tag{1}$$

Геометрично рівність (1) означає, що графік функції $y = f(x)$ наближається до графіка $y = kx + b$, якщо $x \to \infty$ (рис. 72).

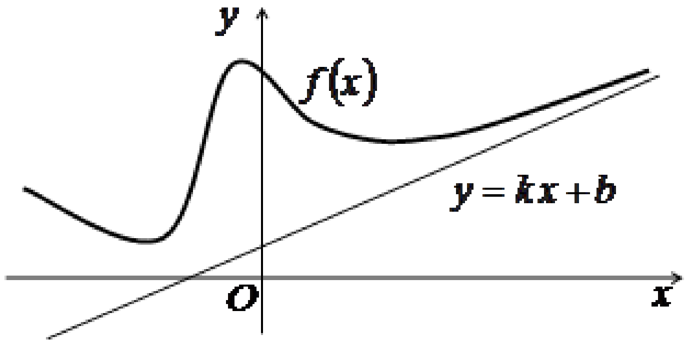

Рис. 72

З означення похилої асимптоти випливає, що невідомі коефіцієнти k і b можна знайти так (розглянемо випадок $x \to \infty$):

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Аналогічні формули мають місце і у випадку $x \to -\infty$.

Означення 3. Пряма $y = b$ називається ***горизонтальною*** асимптотою функції $y = f(x)$, якщо з $x \to \infty (x \to -\infty)$ справедлива рівність

$$y = b, \text{ де } b = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Приклад 1. Знайти асимптоти графіка функції $f(x) = \dfrac{4x}{2x+3}$.

Розв'язання. Шукаємо вертикальні асимптоти. Знаменник обертається в нуль, якщо $x = -\dfrac{3}{2}$, знайдемо односторонні границі в цій точці:

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to -\frac{3}{2}-0}\frac{4x}{2x+3} = \frac{4\left(-\frac{3}{2}-0\right)}{2\left(-\frac{3}{2}-0\right)+3} = \frac{-6}{-3-0+3} = \infty;$$

$$\lim_{x\to -\frac{3}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to -\frac{3}{2}+0} \frac{4x}{2x+3} = \frac{4\left(-\frac{3}{2}+0\right)}{2\left(-\frac{3}{2}+0\right)+3} = \frac{-6}{-3+0+3} = -\infty .$$

Отже, у точці $x = -\frac{3}{2}$ функція $f(x) = \frac{4x}{2x+3}$ має нескінчений розрив, а пряма, задана рівнянням $x = -\frac{3}{2}$, – вертикальна асимптота графіка функції.

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4x}{2x+3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2x+3} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x}{2x+3} - 0\cdot x\right) = 2.$$

Таким чином, $y = kx + b = 0\cdot x + 2 = 2, y = 2$ – горизонтальна асимптота.

Відповідь. $x = -\frac{3}{2}$ є вертикальною асимптотою, $y = 2$ – горизонтальною асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{4x}{2x+3}$.

Приклад 2. Знайти асимптоти графіка функції $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+3}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{x^3}{2x^2+3}$ визначена на всій числовій осі, отже, вертикальних асимптот нема. Шукаємо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2+3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2x^3+3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2+3}-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}.\frac{2x^3-2x^3-3x}{2x^2+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x}{2x^2+3}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x^2}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{0}{2}=0.$$

Отже, похила асимптота $y=kx+b=\frac{1}{2}\cdot x+0=\frac{1}{2}x.$

Відповідь. $y=\frac{1}{2}x$ є похилою асимптотою графіка функції $f(x)=\frac{x^3}{2x^2+3}$.

Загальна схема дослідження функції. Побудова графіка функції

Диференціальне числення дає змогу об’єктивно відтворити графік функції із зображенням його характерних особливостей.

Схема дослідження функції

1. Знаходимо область визначення $D(x)$ функції.
2. Перевіряємо функцію на періодичність, парність, непарність.

У разі потреби знаходимо характерні точки графіка, точки перетину з осями координат.

3. Знаходимо $f'(x)$ і критичні точки, $f'(x)=0$ або не існує.
4. Знаходимо $f''(x)$ і критичні точки, $f''(x)=0$ або не існує.
5. Знайдені дані заносимо в таблицю, з якої дістаємо інтервали монотонності, опуклості чи вгнутості, точки екстремуму, перегину (заповнивши клітинки знаками похідних).
6. Знаходимо асимптоти функції.
7. Будуємо графік функції.

Приклад 1. Дослідити функцію $y=\frac{x}{x^2-4}$ і побудувати її графік.

Розв’язання.

1. $D(x):\ x\neq\pm2;\ \ x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

2. $f(x)$ – неперіодична.

Оскільки $f(-x) = -\dfrac{x}{x^2-4}$; $f(-x) = -f(x)$ – функція непарна.

Перетин із віссю *OX*: $x = 0; y = 0;$ з віссю *OY*: $y = 0;$ $x = 0$; точка *O*(0;0) – точка перетину графіка функції з осями координат.

3. $$f'(x) = \frac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{\left(x^2-4\right)^2}; \qquad f'(x) < 0.$$

Критичних точок немає. Функція всюди спадає.

4. $$f''(x) = -\frac{2x(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x(x^2+4)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= -\frac{2x^3 - 8x - 4x^3 - 16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = \frac{x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3},$$

$x(2x^2+24) = 0;$ $x = 0$ – критична точка.

5. Складаємо таблицю (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

x	$(-\infty;-2)$	-2	(-2;0)	0	(0;2)	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	–	∞	–	–	–	∞	–
$f''(x)$	–	∞	+	0	–	∞	+
$f(x)$	$\searrow\ \cap$	∞	$\searrow\ \cup$	0 перегин	$\searrow\ \cap$	∞	$\searrow\ \cup$

6. Знайдемо асимптоти.

Вертикальні асимптоти: $x = -2$ та $x = 2$.

Похила асимптота $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(x^2-4)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0.$$

Отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

7. Будуємо графік функції (рис. 73).

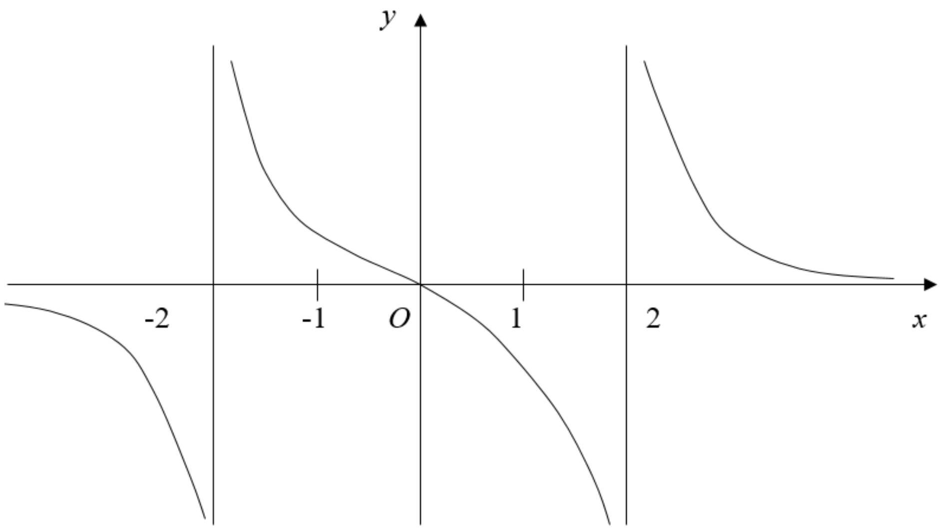

Рис. 73

Приклад 2. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$ і побудувати графік.

Розв'язання.

1. Функція визначена всюди, крім точки, у якій знаменник перетворюється в нуль $x=1$. Отже, область визначення: $D(x):\ x\neq 1;\ x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Функція неперіодична.Точки перетину з осями:

$OX:y=0\Rightarrow x=0;$

$OY:x=0\Rightarrow y=0.$ Отже, точка – $(0,0)$точка перетину з осями.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{2(x-1)}=-\dfrac{x^2}{2(x+1)}$, отже, функція загального вигляду.

Маємо одну точку розриву $x=1$. Знайдемо лівосторонню та правосторонню границі:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2(x-1)}=-\infty;$$

$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{2(x-1)}=+\infty$, отже, точка $x=1$ – точка розриву другого роду.

3. Для знаходження інтервалів монотонності обчислимо похідні функції

4. $$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{2(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}; \quad y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2,$$

ці точки розбивають область визначення на інтервали монотонності $(-\infty;\, 0) \cup (0;\, 1) \cup (1;\, 2) \cup (2;\, +\infty)$.

Досліджуємо поведінку похідної на кожному інтервалі:

$$y'(-1) = \frac{1}{4} > 0; \quad y'(0{,}5) = -1{,}5 < 0;$$

$$y'(1{,}5) = -1{,}5 < 0; \quad y'(3) = \frac{3}{8} > 0.$$

Графічно інтервали монотонності мають вигляд (рис. 74):

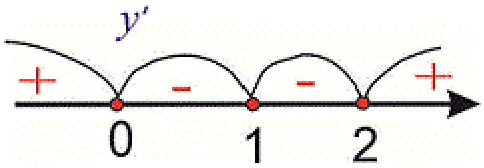

Рис. 74

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;\, 0) \cup (2;\, +\infty)$ і спадає на $(0;\, 1)$ $\cup (1;\, 2)$. Точка $x = 0$ – точка локального максимуму, точка $x = 2$ – точка локального мінімуму. Знаходимо значення функції в екстремальних точках:

$$y_{\max} = 0, \quad y_{\min} = 2.$$

5. Для відшукання інтервалів опуклості знайдемо другу похідну

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2x(x-2)\cdot(x-1)}{2(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Друга похідна не перетворюється в нуль, а це означає, що функція немає точки перегину. Проте це не означає, що функція не є опуклою та вгнутою. На інтервалі $(-\infty;\, 1)$ друга похідна менше за нуль, отже, функція опукла. На інтервалі $(1;\, \infty)$ друга похідна більше за нуль, отже, функція вгнута.

6. Складаємо таблицю (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	∞	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗ $\cap$	$y_{\max}$	↘ $\cup$	∞	↘ $\cap$	$y_{\min}$	↗ $\cup$

7. Знайдемо асимптоти.

Вертикальна асимптота $x=1$.

Похила асимптота $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

8. Будуємо графік функції (рис. 75).

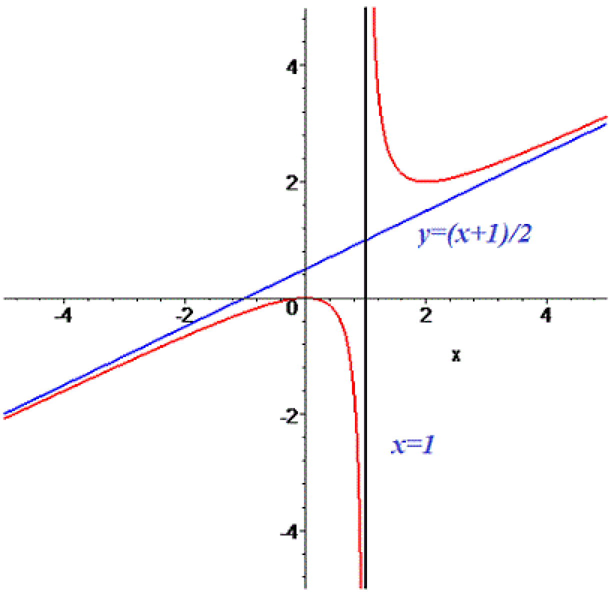

Рис. 75

6.6. Задача про найбільше та найменше значення функції на відрізку

Найбільше та найменше значення неперервної функції $y = f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$ досягається або в критичних точках, що належать заданому відрізку, або на кінцях цього відрізка.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, що є визначеною і неперервною на відрізку $[a;b]$. До цього часу ми займалися відшуканням лише локальних максимумів і мінімумів. Поставимо тепер задачу про відшукання глобального максимуму і глобального мінімуму або, інакши кажучи, відшуканню найбільшого і найменшого значень $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Зазначимо, що неперервна функція в силу другої теореми Веєрштрасса обов'язково досягне в деякій точці відрізка $[a;b]$ свого найбільшого (найменшого) значення.

Найбільше (найменше) значення функція $f(x)$ може мати або у внутрішній точці відрізка $[a;b]$ (тоді воно збігається з одним із локальних екстремумів функції $f(x)$), або на одному з кінців цього відрізка.

Звідси зрозуміло, що для знаходження найбільшого M і найменшого mзначень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ потрібно:

1) знайти критичні точки, які належать відрізку $[a;b]$;

2) обчислити значення функції в цих критичних точках і в точках a і b;

3) з усіх отриманих значень вибрати найбільше M і найменше m і відмітити точки, у яких ці значення досягаються.

Скорочено записують так:

$$M = \max_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_1).$$

Читають – найбільше значення (глобальний максимум) функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ дорівнює M і досягається в точці x_1. Аналогічно записують $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(x_2)$.

Читають – найменше значення (глобальний мінімум) функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ дорівнює m і досягається в точці x_2.

Відшукання найбільшого (найменшого) значення функції неперервної на інтервалі, півпрямій, прямій проводиться подібним до вищенаведеного способом.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^5+5x^4+5x^3-1$ на відрізку $[-2;\ 1]$

Розв'язання. Знаходимо похідну:

$$f'(x)=5x^4+20x^3+15x^2.$$

Прирівнюємо її до нуля:

$$f'(x)=5x^4+20x^3+15x^2=0.$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо критичні точки: $x_1=-3,\ x_2=-1,\ x_3=0$, причому $x_1=-3\notin[-2;\ 1]$. Обчислимо значення функції в критичних точках $x_2=-1,\ x_3=0$, а також на кінцях відрізка $a=-2,\ b=1$.

$$f(x_2)=f(-1)=-2;\ f(x_3)=f(0)=-1;$$

$$f(a)=f(-2)=7;\ f(b)=f(1)=10.$$

Отже,

$$M=\max_{x\in[-2;1]} f(x)=f(1)=10;$$

$$m=\min_{x\in[-2;1]} f(x)=f(-1)=-2.$$

Відмітимо, що у випадку, коли неперервна функція має на відрізку лише одну точку локального максимуму (мінімуму), то можна стверджувати, що це і є точка глобального максимуму (мінімуму).

Приклад 2. Знайти найбільше *M* та найменше *m* значення функції

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1},\quad x\in[-4;\ 4].$$

Розв'язання. Визначимо критичні точки:

$$y' = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-4;4].$$

Обчислимо значення функції, відповідно

$$f(-4) = \frac{16-1}{16+1} = \frac{15}{17}; \quad f(0) = -1; \quad f(4) = \frac{16-1}{16+1} = \frac{15}{17}.$$

Отже, $M = \frac{15}{17}; \quad m = -1.$

6.7. *Наближене розв'язування скінченних рівнянь*

Скінченним рівнянням називають рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$– довільна функція.

Коренем (нулем) рівняння $f(x) = 0$ називають число $x = x_0$ таке, що $f(x_0) = 0$.

В інженерній практиці часто постає питання про наближений розв'язок рівнянь. Усі методи наближеного розв'язання поділяються на дві групи. До першої належать ті, що дають змогу відділити корінь, до другої – ті, які дають змогу уточнити його, тобто знайти з деякою точністю.

Метод проб (метод належить до першої групи)

Розглянемо рівняння $f(x) = 0$. Нехай $f(x)$ неперервна на $[a;\ b]$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$, тобто на $[a;\ b]$ існує $x = x_0$ таке, що $f(x_0) = 0$. Розіб'ємо $[a;\ b]$ на $[a; c]$ та $[c;\ b]$ і вважатимемо, що $f(a) \cdot f(c) < 0$, тому $x[a;\ c]_0 \in$ і т. д. Процес проходить доти, доки це можливо. Ізолювавши корінь на інтервалі, перейдемо до інших методів.

Метод хорд

Ідея методу полягає в тому, що замість точки перетину графіка з віссю Ox (точки x_0) беруть точку перетину із цією віссю хорди, яка стягує крайні точки графіка функції на інтервалі ізоляції кореня (рис. 76).

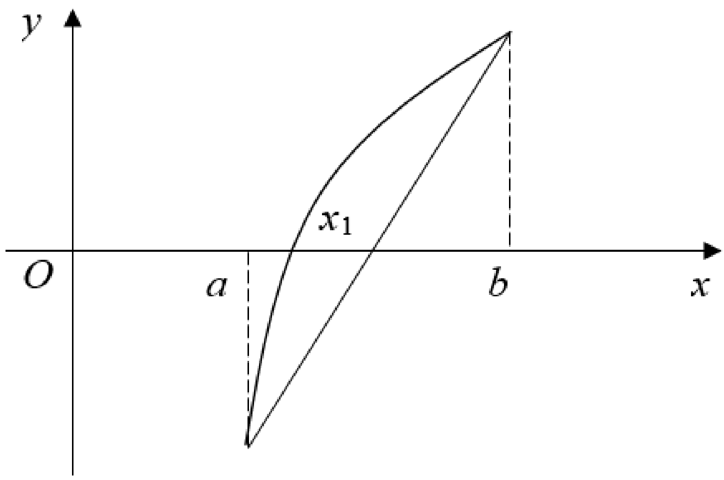

Рис. 76

Складемо рівняння *AB*.

$$y = f(a_0) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Оскільки точка $(x_1;0)$ належить хорді, то

$$x_1 = a - \frac{f(a_0)\cdot(c_0 - a_0)}{f(b) - f(a)}.$$

Далі замість a беремо x_1 і т. д.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})\cdot f(b - x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}.$$

Це формула методу хорд.

Алгоритм методу хорд

Нехай на $[a;b]$ $f(x_0) = 0$, при цьому

а) функції $f(x)$; $f'(x)$; $f''(x)$ неперервні;

б) $f(a)\cdot f(b) < 0$;

в) $f'(x)$ та $f''(x)$ не змінюють знака.

Тоді $x(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)_n$ визначимо рівностями

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1}-a)\cdot f(x_{n-1})}{f(x_{n-1})-f(a)}; & x_0 = b, \text{ якщо } f(a)\cdot f(x_1) < 0; \\ x_{n-1} - \dfrac{(b-x_{n-1})\cdot f(x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}; & x_0 = a, \text{ якщо } f(a)\cdot f(x_1) > 0. \end{cases}$$

Тоді послідовність $\{x_n\}$ $n \in N$ збігається до кореня χ з $n \to \infty$, причому

$$|x_n - \chi| \le \frac{|f(x_n)|}{m};$$

$$|x_n - \chi| \le \frac{M-m}{m}|x_n - x_{n-1}|,$$

де $m = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|;$ $\quad M = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|.$

Приклад 1. Знайти додатні корені рівняння $x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$ методом проб із точністю $\delta = 0{,}0001$.

Розв'язання. Методом проб виділимо відрізок $[a;b]$, на якому знаходиться корінь рівняння:

$$f(0) = -1 < 0; \quad f(1) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0; \quad f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}\,\frac{\pi}{4} - 1 > 0,$$

тобто $x \in [1;\sqrt{3}]$.

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}; \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

$$f(1)\cdot f(\sqrt{3}) = \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right) = 0{,}2146 \cdot 0{,}8138 < 0.$$

Умови а) і б) виконуються, якщо $f''(x) > 0$, то $\chi \in [1;\sqrt{3}]$; $m \le f'(x) \le M$,

де $m = f'(1) = 1{,}2853981,$ $M = f'(\sqrt{3}) = 1{,}4802102,$

$$\frac{M-m}{m} = 0{,}1515547.$$

Визначимо:

$$x_1 = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1)\cdot f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}1527608;$$

$$f(1)\cdot f(1{,}1527608) > 0, \quad f(\sqrt{3})\cdot f(1{,}1527608) < 0,$$

$$x_2 \in [x_1; \sqrt{3}).$$

Зведемо обчислення в таблицю (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$-(x_n, x_{n-1})$	x_n	$\frac{M-m}{m}(x_n - x_{n-1})$
1	1	-0,2146019	-0,1527608	1,1527068	0,023152
2	1,527608	-0,0129601	0,0090807	1,1618415	0,0013762
3	1,618415	-0,0006758	-0,000473	1,1623145	0,0000716

Остання графа таблиці характеризує граничну абсолютну похибку, тому

$$x = 1{,}1623 \pm 0{,}0001.$$

Метод дотичних

Ідея методу полягає в тому, що замість точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox знаходиться точка перетину із цією віссю дотичної до графіка в одній із точок ізоляції кореня. Якщо виконується умова (для методу хорд), то

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$ причому

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{якщо } f(a)\cdot f(c) < 0; \\ b, & \text{якщо } f(a)\cdot f(c) > 0; \\ c, & \text{якщо } f(c) = 0, \end{cases}$$

де $c = a - \dfrac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$.

Послідовність $x_n,\ n \in N \to \chi$, якщо $|x_n - \chi| \le \frac{|f(x_n)|}{m}$ та $|x_n - \chi| \le \frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$, де $m = \min\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|,\ M_1 = \min\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

Приклад 2. Знайти методом дотичних додатний корінь рівняння $x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$ з точністю до $\delta = 0{,}0001$.

Розв'язання. Відрізок ізоляції $\left[1; \sqrt{3}\right]$ (див. приклад 1).

$$c = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1) f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}15227608 > 0,$$

то $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad x_0 = \sqrt{3}$;

$f'(x)$ та $f''(x)$, $m = 1{,}283981$ знайдені (див. приклад 1);

$$M_1 = f''(1) = 0{,}25,\quad \frac{M_1}{2m} = 0{,}0972461.$$

Обчислення заносимо в таблицю (табл. 6.4).

Таблиця 6.4

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$
1	1,73210508	0,8137992	1,4802102	-0,5497862	1,822646	0,0534645
1	1,822646	0,0270628	1,3617976	0,0198728	1,1623918	0,0000384

Тобто $x = 1{,}16239 \pm 0{,}00004$.

Метод ітерації

Запишемо рівняння $f(x) = 0$ у вигляді $x = \varphi(x)$. За наближене число візьмемо довільне $x = x_0$.

Дістанемо $x_1 = \varphi(x_0)$, … , $x_n = \varphi(x_{n-1})$.

Якщо $|\varphi'(x)| < 1$, то отримаємо послідовність $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}...$ Метод побудови такої послідовності називається методом ітерації.

Приклад 3. Знайти корінь рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ з точністю до 0,01.

Розв'язання. Запишемо рівняння $x = \sqrt[3]{3x-1}$.

Візьмемо

$x_1 = 2;\ \ x_2 = 1{,}71;\ \ x_3 = 1{,}60;\ \ x_4 = 1{,}56;\ \ x_5 = 1{,}54;\ \ x_6 = 1{,}95.$

Оскільки $|x_6 - x_5| \le 0{,}01$, то $x = 1{,}54$.

Якщо рівняння записати у вигляді $x = \dfrac{1}{3}(1 + x^3)$, то процес розбіжний.

6.8. Запитання для самоконтролю

1. Означення похідної.
2. Таблиця похідних елементарних функцій.
3. Правила диференціювання функцій.
4. Диференціювання параметрично заданої функції.
5. Диференціювання неявно заданої функції.
6. Сформулюйте теореми Ролля, Лагранжа і Коші.
7. Сформулюйте правило Лопіталя для розкриття невизначеностей.
8. Необхідна умова існування екстремуму.
9. Достатня умова існування екстремуму.
10. Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.
11. Як знайти точки перегину функції?
12. Формули для знаходження асимптот функції.
13. Загальна схема дослідження функції.
14. Методи наближеного розв'язування скінчених рівнянь.

Розділ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ N-ЗМІННИХ

7.1. Основні поняття

Визначимо функцію n-змінних ($n \geq 2$) як відображення множини $X \subset R^n$ на множину $Y \subset R$ $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $Y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Зупинимося на функції двох змінних, властивості якої можна розширити на функцію n-змінних.

Кожній парі $(x; y)$ значень двох незалежних однієї від одної величин x і y з деякої області D відповідає значення z, позначається $z = f(x, y)$.

Сукупність пар (x, y) значень x і y, за яких визначається функція $z = f(x, y)$, називається *областю визначення*.

Приклад 1. Знайти і зобразити графічно область визначення функції

$$z = (\ln(1 - x^2 - y^2)) / \sqrt{x - y}.$$

Розв'язання. Область визначення D складається з усіх тих точок площини, для яких заданий аналітичний вираз набуває дійсних значень. Для цього потрібно, щоб виконувалися такі умови:

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 > 0; \\ x - y > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < 1; \\ y < x. \end{cases}$$

Геометричним місцем точок для першої умови будуть внутрішні точки круга, радіус якого 1, із центром у точці з координатами $O(0; 0)$.

Рівнянням границі області для другої умови буде бісектриса $y = x$.

Таким чином, область визначення D (рис. 77) складається з усіх точок, які одночасно належать і кругу $x^2 + y^2 < 1$, і частині площини $y < x$ (під бісектрисою $y = x$).

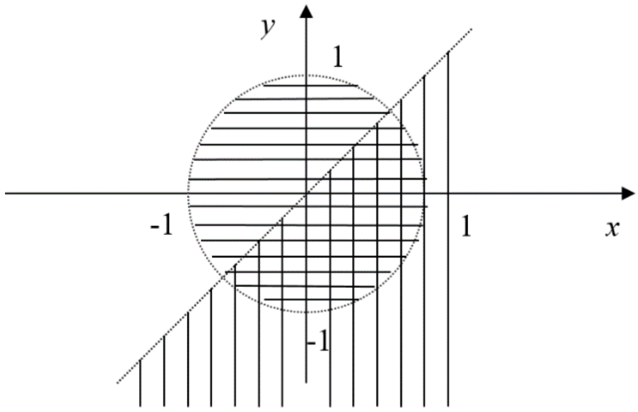

Рис. 77

У подальшому розглядатимемо переважно функції двох змінних.

Означення 1. *Околом точки* називається довільна відкрита область без своєї межі, яка містить цю точку.

У двовимірному випадку під околом розуміють круг, квадрат та ін.

Означення 2. Стала A називається *подвійною границею* функції $z = f(x,y)$ з $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл точки (x_0, y_0), що для всіх (x,y), які належать околу, виконується нерівність $|f(x,y) - A| < \varepsilon$. Указаний факт коротко записується так: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$.

Означення 3. Функція $z = f(x,y)$ називається *неперервною* в точці (x_0, y_0), якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Основні властивості границь справедливі і в кратному вигляді.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{y}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ не існує, тому функція границі не має.

Приклад 3. Знайти точки розриву функції

$$U = \frac{1 - xyz}{2x + 3y - z + 4}.$$

Розв'язання.

Функція не визначена в точках, у яких знаменник перетворюється на нуль. Тому вона має поверхню розриву – площину

$2x + 3y - z + 4 = 0$.

7.2. Приріст функції, частинні похідні

Для функцій двох змінних $z = f(x, y)$ частинні похідні та повний приріст визначаються так:

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\Delta z_y = f(x, y + \Delta y) - f(x, y);$$

$$\Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y.$$

Частинні похідні $z = f(x, y)$ визначаються як і похідні для функції однієї змінної:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x}; \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y},$$

тобто *частинною похідною* за x від функції $z = f(x, y)$ називається похідна за x і обчислюється в разі припущення, що y – стала, а частинною похідною за y від функції $z = f(x, y)$ називається похідна за y, обчислюється в разі припущення, що x – стала.

Приклад 3. Знайти частинні похідні функції

$$z = \ln(x^2 + y^2).$$

Розв'язання. Вважаючи y постійною, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Вважаючи x постійною, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Оскільки для $z=f(x;y)$ $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(x;y)$, а $\frac{\partial z}{\partial y}=\psi(x;y)$, то їх можна теж диференціювати за x та за y.

Тоді дістанемо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Аналогічно визначаються та позначаються частинні похідні вищого від другого порядку, причому $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Результат многократного диференціювання за різними змінними не залежить від черговості диференціювання за умови, що при цьому «змішані» частинні похідні є неперервними.

Приклад 4. Для функції $z=\ln(x^2+y^2)$ знайти частинні похідні другого порядку.

Розв'язання. Маємо (приклад 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

Продиференціюємо повторно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)=2\frac{x^2+y^2-x2x}{(x^2+y^2)^2}=2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=2\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=-2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(Упевнилися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$).

7.3. Диференціал функції та його застосування

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, що відповідає відповідним приростам аргументів Δx та Δy, називають різницю

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x, y).$$

Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційованою* в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо всюди в деякому околі цієї точки повний приріст може бути представлений у вигляді

$$\Delta z = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \theta(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, A_1 та A_2 – числа, що не залежать від Δx і Δy.

Диференціалом ∂z 1*-го порядку* функції $z = f(x, y)$ називається головна частина повного приросту функції в точці, лінійна відносно Δx та Δy.

$$dz = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y;\ \Delta x = dx;\ \ \Delta y = dy.$$

Справедлива формула:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Приклад 5. Знайти диференціал функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

Розв'язання. Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy = \frac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}.$$

За досить малого $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ має місце наближена формула

$\Delta z \approx dz$.

Формула для наближеного обчислення функції $z = f(x, y)$ у точці $x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y$ за відомими значеннями функції $z = f(x, y)$ та її частинними похідними $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$ у точці $(x_0; y_0)$ має вигляд

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \cong f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

Приклад 6. Обчислити наближено $(0{,}98)^{2{,}01}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z = x^y$. Значення функції в точці $(1;\ 2)$ дорівнює $z(1;\ 2) = 1$.

У нашому випадку $\Delta x = -0{,}02;\ \Delta y = 0{,}01$. Частинні похідні в точці $(1;\ 2)$ дорівнюватимуть:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \left.\left(y \cdot x^{y-1}\right)\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = \left.\left(x^y \ln x\right)\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 0.$$

Отже,

$$(0{,}98)^{2{,}01} \cong z(1;2) + \frac{\partial z(1;2)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(1;2)}{\partial y}\Delta y = 1 + 2\cdot(-0{,}02) + 0\cdot 0{,}01 = 0{,}96.$$

Диференціалом другого порядку $d^2 z$ функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від її диференціала 1-го порядку за фіксованих значень $dx,\ dy,\ d(dz) = d^2 z$, аналогічно $d^3 z = d(d^2 z)$. Взагалі $d^n z = d(d^{n-1} z)$.

Надамо повному диференціалу операторного вигляду, де оператор

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy, \quad dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right).$$

Тоді

$$d^2 y = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Взагалі $d^n y = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} z.$

Приклад 7. Знайти $d^2 z$ функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right).$

Розв'язання.

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{2(y^2 - x^2)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}dx^2 - \frac{8xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}dxdy + \frac{2(x^2 - y^2)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}dy^2$$

(див. приклад 4).

7.4. Диференціювання складних функцій

Якщо $z = f(x, y)$ – диференційована функція, а $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, то похідна складної функції

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Приклад 8. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 + y^2$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$.

Розв'язання. $\frac{dz}{dt} = 2x\cos t - 2y\sin t.$

Нехай $z = f(x, y)$, $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$.

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 9. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ та $\frac{\partial z}{\partial v}$ для функції $z=x^2+y^2$, де $x=u^2+v^3$; $y=u^3-v^2$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\cdot 2u+2y\cdot 3u^2=4xu+6yu^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=2x\cdot 3v^2-2y\cdot 2v=6xv^2-4yv.$$

7.5. Екстремум функції двох змінних

Означення екстремуму функції двох змінних аналогічне означенню екстремуму функції однієї змінної.

Нехай функція $z=f(x,y)$ диференційована в точці $M_0(x_0,y_0)$ і має в ній екстремум. Перетнемо поверхню $z=f(x,y)$ площиною $y=y_0$, і тоді функція $z=f(x,y)$ матиме екстремум у точці x_0. Враховуючи необхідну умову екстремуму функції однієї змінної, дістанемо:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=0, \text{ аналогічно } \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=0.$$

Отже, ***необхідні умови екстремуму функції двох змінних***

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0 \text{ та } \frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Достатні умови екстремуму функції двох змінних

Нехай

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_0}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}.$$

Якщо в деякій точці $M_0(x_0; y_0)$ виконується необхідна умова екстремуму, то в цій точці функція $z = f(x, y)$:

1) має екстремум, якщо $AC - B^2 > 0$, причому максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) не має екстремуму, якщо $AC - B^2 < 0$;

3) за умови $AC - B^2 = 0$ ознака не є чинною, можливі випадки, коли в цій точці на деяких лініях функція набуває максимуму, мінімуму.

Приклад 10. Знайти екстремум функції

$$z = f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 18.$$

Визначимо точки, у яких виконуються необхідні умови:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0; \\ 6xy - 18 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 16; \\ xy = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4; \\ xy = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -4; \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3; \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3; \\ y_3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1; \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

Тобто маємо чотири критичні точки $M_1(1; 3)$; $M_2(3; 1)$; $M_3(-3; -1)$; $M_4(-1; -3)$. Для перевірки достатньої умови існування екстремуму обчислимо вираз $\Delta = AC - B^2$ в кожній отриманій точці, де $\quad A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x; \qquad B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y; \qquad C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x,$

$\Delta=36x^2-36y^2=36(x^2-y^2).$

Тоді в точці $M_1(1;3)$ $\Delta=36(1-9)<0$, екстремум функції в цій точці відсутній.

У точці $M_2(3;1)$ $\Delta=36(9-1)>0$, $A=18>0$. $M_2(3;1)$ – точка мінімуму функції.

У точці $M_3(-3;-1)$ $\Delta=36(9-1)>0$, $A=-18<0$. $M_3(-3;-1)$ – точка максимуму функції.

У точці $M_4(-1;-3)$ $\Delta=36(1-9)<0$ екстремум відсутній.

$f_n(M_3)_{\max}=72;\;\; f(M_2)_{\min}=-72.$

Для знаходження найбільшого M і найменшого m значень функції, неперервної в обмеженій замкнутій області, потрібно:

1) знати критичні точки, що лежать як у середині області, так і на її границі. Обчислити значення функції у цих точках;
2) вибрати серед одержаних значень найменше і найбільше. У разі потреби дослідити на екстремум за значеннями інших похідних.

Приклад 11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2-y^2$ в області $x^2+y^2\le 4$.

Розв'язання. Знаходимо перші частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$.

Прирівнюємо їх до нуля: $\begin{cases} 2x=0; \\ -2y=0. \end{cases}$

Одержали критичну точку $z(0;\,0)$. Далі знайдемо найбільше і найменше значення функції на границі області $x^2+y^2=4$.

Функція $z = x^2 - y^2$ на границі матиме вигляд $z = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$, де $x \in [-2;\ 2]$.

Знаходимо критичні точки функції $z = 2x^2 - 4$; $z' = 4x$; $4x = 0$; $x = 0$. Потім знаходимо значення функції в критичній точці і на кінцях інтервалу: $z\big|_{x=0} = -4$; $z\big|_{x=-2} = 4$; $z\big|_{x=2} = 4$. Отже, найбільше значення функції $z = x^2 - y^2$ в області $x^2 + y^2 \le 4$ буде в точці $M_1(-2;\ 0)$; $M_2(2;\ 0)$ кола $x^2 + y^2 = 4$; а найменше – у точках $M_3(0;\ 2)$ і $M_4(0;\ -2)$ кола.

7.6. Умовний екстремум

Функція $z = f(x, y)$ має *умовний екстремум* в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо існує окіл точки M_0 для всіх точок $M(x; y)$ $(M \ne M_0)$, що задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$.

Задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на екстремум функції Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

λ – множник Лагранжа.

Необхідні умови існування умовного екстремуму виражаються системою рівнянь

$$\frac{\partial L(M)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L(M)}{\partial y} = 0; \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Нехай точка $M_0(x_0; y_0)$, λ_0 – довільний розв'язок систем і

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0, \lambda_0) & L''_{xy}(M_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0, \lambda_0) & L''_{yy}(M_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 умовний максимум, якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 12. Знайти умовний екстремум функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ за умови $x + y + 3 = 0$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \lambda(x + y + 3).$$

Маємо $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - y + 1 + \lambda$; $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - x + 1 + \lambda$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda = -1; \\ -x + 2y + \lambda = -1; \\ x + y = -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0; \\ x + y = -3; \end{cases} \quad x = y = -\frac{3}{2};$$

$$\varphi'_x = 1; \quad \varphi'_y = 1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 2 - 2 = -6 < 0,$$

Тобто, якщо $x = -\dfrac{3}{2}$; $y = -\dfrac{3}{2}$, функція має умовний екстремум $z_{\min} = -\dfrac{19}{4}$.

7.7. Метод найменших квадратів

Під час математичної обробки кількісних експериментальних результатів часто користуються методом найменших квадратів. Найпростіша задача такого типу зустрічається у вимірюванні деякої величини x в однакових умовах n разів. Через похибки, яких неможливо уникнути, щоразу дістають різні величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Якщо істинне значення цієї величини вважати за x, то величина $\left(x - x_1\right)$ називається похибкою за i-го вимірювання. Метод найменших квадратів ґрунтується на тому, що за істинне значення величини x вважають таке значення, для якого сума квадратів похибок $f(x)$ мінімальна:

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + ... + (x - x_n)^2.$$

Тут важливо, що береться не сама сума похибок, бо тоді окремі (навіть великі) похибки з різними знаками будуть взаємно компенсуватися.

З умов екстремуму функції $f(x)$ знаходимо

$$f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + ... + 2(x - x_n) = 0,$$

звідси $\quad x = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$

У цій точці досягається мінімум, бо $f'(x) = 2x > 0.$

Розглянемо тепер складнішу задачу, коли треба встановити емпіричну формулу $y = f(x)$ за результатами вимірювання, яка б давала значення за $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$ якщо змога, мало відмінні від експериментальних даних y_1, y_2, ..., y_n. Задача полягає в побудові такої кривої, яка б найближче проходила біля точок з координатами $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$, $(x_n; y_n)$. Припустимо, наприклад, що точки з такими координатами лежать майже на прямій, рівняння якої запишемо у вигляді: $y = ax + b_0$.

Позначимо далі $E_i = ax_i + b - y_i$ і називатимемо їх *нев'язками*. Метод найменших квадратів полягає в тому, щоб за експериментальними даними знайти коефіцієнти a та b, щоб сума квадратів нев'язок була мінімальною:

$$u(a,b) = (ax_1 + b - y_i)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + ... + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Сума квадратів нев'язок є функція від двох змінних a та b і необхідна умова екстремуму:

$\dfrac{\partial u}{\partial a} = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial b} = 0,$ або в розгорнутому вигляді:

$$2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + ... + (ax_n + b - y_n) = 0;$$

$$2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + ... + (ax_n + b - y_n) = 0.$$

У скороченому вигляді цю систему рівнянь відносно a та b можна записати так:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Аналогічно, якщо точки (x_i, y_i) лежать майже на параболі, рівняння якої запишемо у вигляді $y = ax^2 + bx + c$, то після перетворень отримаємо систему рівнянь відносно $a,\ b,\ c$:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = a\sum_{i=1}^{n} y_i;$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i.$$

Схема методу найменших квадратів

Таблиця 7.1

x^0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	$x^2 y$
1	x_p	${x_0}^2$	${x_0}^3$	${x_0}^4$	y_0	$x_0 y_0$	${x_0}^2 y_0$
1	x_1	${x_1}^2$	${x_1}^3$	${x_1}^4$	y_1	$x_1 y_1$	${x_1}^2 y_1$
1	x_2	${x_2}^2$	${x_2}^3$	${x_2}^4$	y_2	$x_2 y_2$	${x_2}^2 y_2$
1	x_3	${x_3}^2$	${x_3}^3$	${x_3}^4$	y_3	$x_3 y_3$	${x_3}^2 y_3$
S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	t_0	t_1	t^2

Приклад 13. Підібрати пряму $y = ax + b$ та $y = ax^2 + bx + c$ за даними точками (x_i, y_i).

Розв'язання наведено в табл. 7.2.

Таблиця7.2

x_i	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y_i	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Обчислити похибки для параболи $y = ax^2 + bx + c$.

Розв'язання. Складемо табл. 7.3.

Таблиця 7.3

x^0	x	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
1	0,78	0,608	0,475	0,370	2,50	1,950	1,520
1	1,56	2,434	3,796	5,922	1,20	1,872	2,921
1	2,34	5,476	12,813	29,982	1,12	2,621	6,133
1	3,12	9,734	30,371	94,759	2,25	7,020	21,902

1) $y = ax + b$.

$$\begin{cases} 32{,}768a + 11{,}61 = 29{,}770; \\ 11{,}61a + 5b = 11{,}35. \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, отримаємо

$$a = 0{,}592; \quad b = 0{,}896,$$

тобто

$$y = 0{,}592x + 0{,}896.$$

2) $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 23{,}768a + 11{,}6b + 5c = 11{,}350; \\ 102{,}761a + 32{,}768b + 11{,}61c = 29{,}770; \\ 341{,}750a + 102{,}761b + 32{,}768c = 94{,}604. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо:

$$a = 1{,}009; \quad b = -4{,}043; \quad c = 5{,}045.$$

Тобто

$$y = 1{,}009x^2 - 4{,}043x + 5{,}045.$$

Порівняємо вихідні значення y з відповідними значеннями

$$\bar{y} = ax^2 + bx + c.$$

Дані занесемо в табл. 7.4.

Таблиця 7.4

x_i	y_i	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i - y_i$
0,78	2,50	2,505	0,005
1,56	1,20	1,194	-0,006
2,34	1,12	1,110	-0,010
3,12	2,25	2,252	0,002
3,81	4,28	4,288	0,008

7.8. Запитання для самоконтролю

1. Основні поняття функції двох змінних, частинні похідні.

2. Диференціал функції двох змінних та його застосування.

3. Екстремум функції двох змінних, умовний екстремум.

4. Ідея методу найменших квадратів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

І. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії

1–10. Дано матриці A, B, C:

1) знайти $A + B$; AC; $2A + 4B$;
2) обчислити $\det A$, $\det B$;
3) розв'язати матричне рівняння $A \times B = C$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 18 & 5 & 10 \\ 17 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 18 & 5 & 10 \\ 17 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 1\\ 8 & -1 & 4\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 3 & -4 & 0\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 0\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

11–20. Дано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_{44}. \end{cases}$$

Довести її сумісність та розв’язати трьома способами:

1) методом Гаусса;
2) методом Крамера;
3) матричним методом.

11. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 10; \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20; \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11; \\ 2x_1+10x_2+9x_3+9x_4=40; \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3; \\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-8; \\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8; \\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+3x_4=-1; \\ x_1+x_2-x_3-4x_4=6; \\ 3x_1-x_2+x_3+x_4=4; \\ x_1-3x_2+3x_4=-5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1-4x_2-x_4=6; \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=-1; \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-1; \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1-x_3-2x_4=-8; \\ x_2+2x_3-x_4=-1; \\ x_1-x_2-x_4=-6; \\ -x_1+3x_2-2x_3=7. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=3; \\ 5x_1+3x_2+5x_3+3x_4=6; \\ 8x_1+6x_2+5x_3+x_4=8; \\ 5x_1+3x_2+7x_3+3x_4=8. \end{cases}$

21. $|\vec{a}|=3;\ |\vec{b}|=4;\ \widehat{\vec{a},\vec{b}}=60^0$ Обчислити $\vec{a}\cdot\vec{b},\ \left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2$.

22. $|\vec{a}|=3;\ |\vec{b}|=5$. За якого α вектори $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ та $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ будуть перпендикулярними?

23. Відомо, що $|\vec{a}|=3;\ |\vec{b}|=1;\ |\vec{c}|=4;$ та $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Знайти $\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

24. $\vec{a}(\alpha;3;4);\ \vec{b}(1;5;6)$. Знайти $\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{b}$.

25. Довести, що чотирикутник з вершинами $A(-3;5;6);\ B(1;-5;7);\ C(8;-3;-1);\ D(4;7;-2)$ – квадрат.

26. Знайти вектор $\vec{x}$, який перпендикулярний векторам $\vec{a}(1;2);$ та $\vec{b}(2;1)$.

27. Знайти кут між векторами l_1 та l_2 $\left(|\vec{l}_1|=|\vec{l}_2|=1\right)$, якщо відомо, що вектори $\vec{a}=\vec{l}_1+2\vec{l}_2$ та $\vec{b}=5\vec{l}_1-4\vec{l}_2$ перпендикулярні.

28. $|\vec{a}|=2;\ |\vec{b}|=8;\ |\vec{a}-\vec{b}|=6$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$.

29. $|\vec{a}|=2;\ |\vec{b}|=4;\ \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=60^0$. Знати $|\vec{a}-\vec{b}|$.

30. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо $\vec{x}\perp\vec{a}(2;3;4);\ |\vec{x}|=25;\ \vec{x}\perp\vec{b}(1;0;2)$.

31. Обчислити площу трикутника з вершинами *A* (1; 1; 1); *B* (2; 3; 4); *C* (4;3; 2).

32. Знайти об’єм тетраедра $ABCD$ з вершинами в точках A (2; –3; 5); B (–2; –2; 3); C (0; 2; 1); D (3; 2; 4).

33. $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{a}_2| = 2$; $|\vec{a}_3| = 6$. Знайти $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\vec{a}_3$.

34. Дано тетраедр з вершинами $A(1;\ 1;\ 1)$; $B(2;0;2)$; $C(2;2;2)$; $D(3;4;-3)$. Обчислити висоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

35. $\vec{a}_1(1;0;3)$; $\vec{a}_2(2;4;6)$; $\vec{a}_3(-1;\ 0;-3)$. Знайти $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\vec{a}_3$.

36. $\vec{a}(3;-1;2)$; $\vec{b}(1;2;-1)$. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$.

37. $\vec{a}(4;2;1)$; $\vec{b}(0;2;3)$. Знайти $\vec{a} \times \vec{b}$.

38. Чи належать точки $A_1(0;0;1)$; $A_2(1;0;1)$; $A_3(4;1;0)$; $A_4(0;0;0)$ одній площині?

39. Чи належать точки $A_1(1;2;1)$; $A_2(1;0;5)$; $A_3(0;1;4)$; $A_4(0;0;0)$ одній площині?

40. $\vec{a}(3;4;5)$; $\vec{b}(2;3;8)$. Знайти $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

41–50. Дано вектори $\vec{x}(x,y,z)$, $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}(c_1,c_2,c_3)$ в деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис і знайти координати $\vec{x}$ в цьому базисі.

41. $\vec{x}(6;12;-1)$; $\vec{a}(1;3;0)$; $\vec{b}(2;-1;1)$; $\vec{c}(0;-1;2)$.

42. $\vec{x}(1;-4;4)$; $\vec{a}(2;1;3)$; $\vec{b}(0;3;2)$; $\vec{c}(1;1;4)$.

43. $\vec{x}(-9;5;5)$; $\vec{a}(1;2;3)$; $\vec{b}(1;0;2)$; $\vec{c}(1;2;3)$.

44. $\vec{x}(-5;-5;3)$; $\vec{a}(5;1;6)$; $\vec{b}(1;2;4)$; $\vec{c}(1;8;11)$.

45. $\vec{x}(13;2;1)$; $\vec{a}(1;3;8)$; $\vec{b}(11;0;7)$; $\vec{c}(2;3;4)$.

46. $\vec{x}(-8;4;2)$; $\vec{a}(1;1;4)$; $\vec{b}(4;3;0)$; $\vec{c}(11;12;13)$.

47. $\vec{x}(0;2;3)$; $\vec{a}(5;2;9)$; $\vec{b}(1;7;2)$; $\vec{c}(0;13;1)$.

48. $\vec{x}(3;2;1)$; $\vec{a}(3;4;7)$; $\vec{b}(1;0;1)$; $\vec{c}(2;3;1)$.

49. $\vec{x}(5;8;9)$; $\vec{a}(0;2;3)$; $\vec{b}(1;2;3)$; $\vec{c}(11;3;7)$.

50. $\vec{x}(1;7;0)$; $\vec{a}(0;1;0)$; $\vec{b}(4;1;0)$; $\vec{c}(13;19;1)$.

51–60. Дано загальне рівняння прямої $Ax + By + C=0$. Записати для прямої рівняння:

а) з кутовим коефіцієнтом;

б) у відрізках на осях;

в) у нормальному вигляді;

д) у параметричному вигляді.

51. $A = 9$; $B = 0$; $C = –1$.
52. $A = 7$; $B = –5$; $C = 1$.
53. $A = 2$; $B = 0$; $C = 5$.
54. $A = 5$; $B = 2$; $C = 3$.
55. $A = 0$; $B = 1$; $C = 0$.
56. $A = 4$; $B = 3$; $C = 4$.
57. $A = 3$; $B = 5$; $C = 6$.
58. $A = 5$; $B = 7$; $C = 1$.
59. $A = 2$; $B = 3$; $C = 5$.
60. $A = 0$; $B = 6$; $C = 7$.

61–70. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(x_1;x_2)$ та $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Скласти рівняння висоти та медіани цього трикутника, проведені з вершини В.

61. $x_1 = 5;\ y_1 = 6;\ x_2 = -1;\ y_2 = 12;\ x_3 = 1;\ \ y_3 = 0.$
62. $x_1 = 2;\ y_1 = 3;\ x_2 = 3;\ y_2 = 5;\ x_3 = 4;\ \ y_3 = 5.$
63. $x_1 = 1;\ y_1 = 16;\ x_2 = 7;\ y_2 = 9;\ x_3 = 3;\ \ y_3 = 7.$
64. $x_1 = 2;\ y_1 = 15;\ x_2 = 6;\ y_2 = 8;\ x_3 = 4;\ \ y_3 = 1.$
65. $x_1 = 3;\ y_1 = 14;\ x_2 = 4;\ y_2 = 7;\ x_3 = 1;\ \ y_3 = 4.$
66. $x_1 = 4;\ y_1 = 13;\ x_2 = 3;\ y_2 = 6;\ x_3 = 2;\ \ y_3 = 4.$
67. $x_1 = 5;\ y_1 = 12;\ x_2 = 2;\ y_2 = 5;\ x_3 = 5;\ \ y_3 = 6.$
68. $x_1 = 6;\ y_1 = 11;\ x_2 = 1;\ y_2 = 4;\ x_3 = 11;\ \ y_3 = 0.$
69. $x_1 = 7;\ y_1 = 10;\ x_2 = 0;\ y_2 = 3;\ x_3 = 12;\ \ y_3 = 7.$
70. $x_1 = 8;\ y_1 = 9;\ x_2 = 1;\ y_2 = 2;\ x_3 = 7;\ \ y_3 = 9.$

71. Написати рівняння кривої, сума квадратів віддалей від кожної точки якої до точок $M_1(-3;0)$ та $M_2(3;0)$ дорівнює 50.
72. Написати рівняння параболи, фокус якої перебуває в точці $F(0;3)$.
73. Написати рівняння кривої, у якої віддаль від кожної точки до точки $M_1(-1;1)$ вдвічі менша від віддалі до точки $M_2(-4;4)$.

74. Написати рівняння кривої, кожна точка якої перебуває на однаковій віддалі від точки $F(2;2)$ та осі Ox.

75. Написати рівняння еліпса, у якого c = 2, а віддалі між директрисами дорівнюють 6.

76. Написати рівняння гіперболи, у якої $\varepsilon = 1{,}5$, а віддаль між директрисами дорівнює 8/3.

77. Написати рівняння кривої, віддаль від кожної точки якої до точки $M_1(1,1)$ вдвічі більша за віддаль до точки $M_2(-4;0)$.

78. Написати рівняння кривої, сума квадратів віддалей від кожної точки до точок $A(-4;0)$, $B(0;4)$ дорівнює 48.

79. Написати рівняння кривої, віддаль від кожної точки якої до точки $F(3;0)$ дорівнює віддалі до прямої $x + 3 = 0$.

80. Написати рівняння кривої, сума віддалей від кожної точки якої до точок $F_1(-3;0)$ та $F_2(3;0)$ є величина стала і дорівнює 10.

81–90. Дано координати вершин піраміди *ABCD*. Знайти:

1) довжину ребра *AB*;
2) кут між ребрами *AB* та *AC*;
3) рівняння ребер піраміди;
4) рівняння грані *ABC*;
5) рівняння висоти, опущеної з вершини *D* на грань *ABC*, довжину висоти;
6) площу грані *ABC*;
7) рівняння площини, що проходить через точку *D* паралельно до грані *ABC*;
8) кут між ребром *AD* та гранню *ABC*;
9) об’єм піраміди;
10) зробити рисунок.

81. $A(-4;2;6)$; $B(2;-3;0)$; $C(-10;5;8)$; $D(-5;2;-4)$.

82. $A(7;2;4)$; $B(7;-1;-2)$; $C(3;3;1)$; $D(-4;2;1)$.

83. $A(2;1;4)$; $B(-1;5;-2)$; $C(-7;-3;2)$; $D(-6;-3;6)$.

84. $A(-1;-5;2)$; $B(-6;0;-3)$; $C(3;5;-3)$; $D(-10;6;7)$.

85. $A(0;-1;-1)$; $B(-2;3;5)$; $C(1;-5;9)$; $D(-1;-6;3)$.

86. $A(5;2;0)$; $B(2;5;0)$; $C(1;2;4)$; $D(-1;1;1)$.

87. $A(2;-1;-2)$; $B(1;\ 2;\ 1)$; $C(5;0;-6)$; $D(-10;9;7)$.

88. $A(-2;0;-4)$; $B(-1;7;1)$; $C(4;8;-4)$; $D(1;-4;6)$.

89. $A(14;4;5)$; $B(-6;-3;2)$; $C(-2;-6;-3)$; $D(-2;2;1)$.

90. $A(1;2;0)$; $B(3;0;-3)$; $C(5;2;6)$; $D(8;4;-9)$.

91–100. Знайти власні значення та власні вектори лінійного перетворення, заданого в деякому базисі матрицею A.

91. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$. 92. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$.

93. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$. 94. $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

95. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 4\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$. 96. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

97. $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$. 98. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$.

99. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$. 100. $A=\begin{pmatrix}0 & 7 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 13 & 0\end{pmatrix}$.

II. Вступ до математичного аналізу.

101–110. Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність функцій.

101. $a)$ $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2}}$; 102. $a)$ $y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$;

б) $y=\lg(1-\sin x)$;

в) $y=\arccos(1-x^2)$.

б) $y=\operatorname{arctg}(\lg x)$;

в) $y=\arccos(2\sin)$.

103. *а*) $y=\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$;

б) $y=\operatorname{arctg}(\lg(\cos x))$;

в) $y=\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{2}\right)$.

104. *а*) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}$;

б) $y=\sqrt{\sin x}$;

в) $y=\arcsin(\lg(\operatorname{tg} x))$.

105. *а*) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-6x+8}{x^4}}$;

б) $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}(\ln x)$.

106. *а*) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-5x+8}{3x-4}}$;

б) $y=\lg(1-2\cos x)$;

в) $y=\sqrt{1-0{,}2^{\cos x}}$.

107. *а*) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}$;

б) $y=\sqrt{1-\operatorname{tg} x}$;

в) $y=\lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.

108. *а*) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}}$;

б) $y=\lg(\sin(\lg x))$;

в) $y=\arcsin 2^x$.

109. *а*) $y=\lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{8}\right)$;

б) $y=\sqrt[4]{5-x-\dfrac{4}{x}}$;

в) $y=\sqrt{\cos x-\sin 2x}$.

110. *а*) $y=\sqrt{\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}}$;

б) $y=\sqrt{\cos x-\dfrac{1}{2}}$;

в) $y=\sin(\lg x)$.

111–120. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Потрібно:

1) встановити неперервність функції для кожного значення аргументу;
2) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
3) зробити схематичний рисунок.

111. $y = 5^{\frac{1}{x-2}}$; $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

112. $y = 3^{\frac{1}{x+3}}$; $x_1 = -1$; $x_2 = -2$.

113. $y = 4^{\frac{1}{2-x}}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

114. $y = 6^{\frac{1}{x+3}}$; $x_1 = -1$; $x_2 = -3$.

115. $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

120. $y = 11^{\frac{1}{5+x}}$; $x_1 = -4$; $x_2 = -5$.

116. $y = 7^{\frac{1}{4-x}}$; $x_1 = 3$; $x_2 = 4$.

117. $y = 8^{\frac{1}{x-3}}$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

118. $y = 9^{\frac{1}{x-4}}$; $x_1 = 5$; $x_2 = 4$.

119. $y = 10^{\frac{1}{x-5}}$; $x_1 = 6$; $x_2 = 5$.

121–130. Задано функцію *y* = *f*(*x*). Знайти точки розриву, якщо вони існують, зробити рисунок.

121. $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ якщо } x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } 0 \le x \le 4; \\ 5, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

122. $f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x^2, \text{ якщо } 0 < x < 2; \\ 4, \text{ якщо } x \ge 2. \end{cases}$

123. $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x^3 + 1, \text{ якщо } 0 < x < 2; \\ 5, \text{ якщо } x \ge 2. \end{cases}$

124. $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x < 0; \\ x^2, \text{ якщо } 0 \le x \le 3; \\ 4, \text{ якщо } x > 3. \end{cases}$

125. $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ якщо } x \le 0; \\ \operatorname{tg} x, \text{ якщо } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 3, \text{ якщо } x > \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

126. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \le 0; \\ \sin x, \text{ якщо } 0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}; \\ 3, \text{ якщо } x > \dfrac{3\pi}{2}; \end{cases}$

127. $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ якщо } x < 0; \\ \cos x, \text{ якщо } 0 \le x \le 2\pi; \\ 1, \text{ якщо } x > 2\pi. \end{cases}$

128. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ якщо } x \le 0; \\ \sin x, \text{ якщо } 0 < x \le \pi; \\ 3, \text{ якщо } x > \pi. \end{cases}$

129. $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x < 0; \\ 2x, \text{ якщо } 0 \le x \le 2; \\ 1, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$

130. $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x + 1, \text{ якщо } 0 \le x \le 4; \\ 2, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

131–140. Знайти границі послідовностей і функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

131. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n}{\sqrt{n^6+5n^3+1}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\pi\frac{x}{2}}$.

132. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2-2n+3}-n}{5n+3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

133. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^2}}$.

134. *а*) $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

135. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 4x)}$.

136. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x}{x^2-3x+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

137. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot \operatorname{ctg} 5x$; *г*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$.

138. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

139. *а*) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$; $\alpha\neq\beta$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

140. *а*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{5(n+2)!}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-5x+1}{2x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; *г*) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{2x-1}{x+1}}$.

141–150.

1. Дано комплексне число z. Записати його в тригонометричній і показниковій формах (1-ша колонка таблиці).
2. Дано комплексні числа z_1 та z_2. Виконати дії: $z_1\cdot z_2$; $z_1 : z_2$; z_1^3; z_2^4 (2-га колонка таблиці).
3. Виконати дію (3-тя колонка таблиці).

Номер завдання	Дані для варіанта		
	1	2	3
141	$-i$	$z_1=1-\sqrt{3}i$; $z_2=-1+i$	$\sqrt{i}$
142	$1-i\sqrt{3}$	$z_1=5+5\sqrt{3}i$; $z_2=1-\sqrt{3}i$	$\sqrt[4]{-1}$
143	$-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$z_1=1+\sqrt{3}i$; $z_2=-i$	$\sqrt[8]{-9}$
144	$\dfrac{1-i}{1+i}$	$z_1=2i$; $z_2=-1-i$	$\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$
145	$\sqrt{3}i$	$z_1=-3\sqrt{3}i$; $z_2=\sqrt{3}-i$	$\sqrt[5]{-1-i}$
146	$\sqrt{3}-3i$	$z_1=1-i\sqrt{3}$; $z_2=\sqrt{3}+i$	$\sqrt[5]{(2-2i)^4}$

147	$\sqrt{3}-i$	$z_1=-\sqrt{3}-i;\ \ z_2=3-i$	$(1+i)^{10}$
148	$3-i$	$z_1=\sqrt{3}i;\quad z_2=\sqrt{3}+3i$	$\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^2}$
149	$-\sqrt{3}+i$	$z_1=-\sqrt{3}-3i;\ \ z_2=1+i$	$\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
150	$2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}i;$	$z_1=-2+\sqrt{2}i;\ \ z_2=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$	$(1+i)^5(1-i\sqrt{3})^{-6}$

III. Похідна та її застосування

151–160. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t)$.

151. а) $y=x+\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x^2}};$ б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}};$

в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\log_5(x^2-3x);$ г) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\sin 2x};$

д) $\sin(x+y)-x^3y^2=0;$ е) $y=x^5\ln x;$

ж) $\begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=1-\cos t. \end{cases}$

152. а) $y=5\cdot\sqrt[5]{x^3+3x^2-\dfrac{2}{x}};$

б) $y=x(\sin\ln x+\cos\ln x);$

в) $y=\dfrac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}};$ г) $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}};$

д) $x\operatorname{tg} y-y\sin x+x^3=0;$ е) $y=e^{-x}\cos x;$

ж) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\sqrt{t}; \\ y=\ln(1+t). \end{cases}$

153. а) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

в) $y = 3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} - \log_1(x^3 - 5x)$; г) $y = (\cos 2x)^{\operatorname{tg} x}$;

д) $e^{xy} + 2x^2 + y^3 = 0$; е) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

ж) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

154. а) $y = x + \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{2}$;

в) $y = x\arcsin\sqrt{x} + \log_3\sqrt{1+x^2}$; г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

д) $\operatorname{tg}(x-y) - x^2y^3 = 0$; е) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

ж) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t; \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

155. а) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;

в) $y = \operatorname{arctg}(\sin x) - 5^{\ln x}$; г) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x}$;

д) $x^2y^2 = \arcsin\dfrac{x}{y}$; е) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

ж) $\begin{cases} x = 3\sin^2 t; \\ y = 2\cos^3 t. \end{cases}$

156. а) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}$; б) $y - 3^{\operatorname{tg}^2 5x} - \log_3(x^2 - 7x)$;

в) $y = \arcsin\sqrt{x^2-1}$; г) $y = (x-2)^{\sin^2 x}$;

д) $x^2 - y^3 + e^y \operatorname{arctg} x = 0$; е) $y = \sqrt{1+x^2} \cdot \arcsin x$;

ж) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}; \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

157. а) $y=3\cdot\sqrt[3]{x^5+3x^4-\frac{2}{x}}$; б) $y=\sin^2 3x\cdot\cos^3 2x$;

в) $y=5^{\arcsin 2x}-\log_5(x^2-7x)$; г) $y=(x^2-x)^{\sqrt{x}}$;

д) $\ln(x+y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; е) $y=x^2\operatorname{arctg}x$;

ж) $\begin{cases} x=e^t\cos t; \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

158. а) $y=\log_3\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$; б) $y=3^{\operatorname{ctg}x}-\arcsin\sqrt{x}$;

в) $y=e^{a\,\mathrm{rctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; г) $y=(\operatorname{tg}3x)^{\sin x}$;

д) $y\sin x+\cos(x-y)=x^2$; е) $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$;

ж) $\begin{cases} x=2t^3+t; \\ y=\ln t. \end{cases}$

159. а) $y=x\cdot\sqrt[5]{\frac{1+x^2}{5x-3}}$; б) $y=e^{\sin x}\cdot\operatorname{tg}^3 2x$;

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{x}-\cos^3 5x$; г) $y=(x^2+3x)^{\operatorname{arctg}x}$;

д) $2^{x-y}=x^2y^2$; е) $y=x\cdot e^{-x^2}$;

ж) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}t; \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$

160. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; б) $y=3^{\operatorname{ctg}x}\cdot\cos\sqrt[8]{x}$;

в) $y=\ln\arccos 2x+\operatorname{tg}\sqrt[3]{1+x^3}$; г) $y=(x^2+1)^{\arcsin x}$;

д) $x\sin y-y\operatorname{tg}x+y^2=0$; е) $y=\frac{x^3}{1-x}$;

ж) $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\ln(1-t^2). \end{cases}$

161–170. Використовуючи правило Лопіталя, знайти зазначені границі.

161. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

162. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

163. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - e^{-x} - 2)\operatorname{ctg} x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

164. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

165. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$; $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

166. $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

167. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(1-x)$; $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

168. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\sin^6 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

169. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{2}{x^2}}$.

170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{\ln(e^x-1)}}$.

171–180. Дослідити функції методами диференціального числення та побудувати їх графіки.

171. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; $y=\ln(1+x^2)$.

172. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; $y=\ln(1-x^2)$;

173. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

174. $y=\dfrac{x^3}{x^3+1}$;

$y = xe^{-x}$. $\qquad y = \dfrac{x}{\ln x}$.

175. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

176. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$;

$y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

177. $y = \dfrac{x}{9 - x^2}$;

$y = \dfrac{1}{x \ln x}$.

178. $y = \dfrac{x - 1}{(x + 1)^2}$;

$y = e^{2x - x^2}$.

179. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$;

$y = xe^{\frac{4}{x}}$.

180. $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x - 1}$;

$y = (x - 2)e^{-\frac{1}{x}}$.

181–190. 1) Методом хорд і дотичних розв’язати рівняння (виділення кореня провести за методом проб) з точністю до 0,00001.

2) Роз’язати рівняння методом ітерації з точністю до 0,01.

181. $x^3 + 2x - 8 = 0$.

182. $x^3 + x + 1 = 0$.

183. $x^3 + 4x - 1 = 0$.

184. $x^3 + 2x - 3 = 0$.

185. $x^3 - 2x - 5 = 0$.

186. $x^3 - 5x + 1 = 0$.

187. $(x + 1)^3 - x = 0$.

188. $x^3 + 60x - 80 = 0$.

189. $x^5 + x + 1 = 0$.

190. $x^5 - 5x + 2 = 0$.

191–200. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$.

191. $f(x) = x^3 - 18x + 7$; $[0;\ 4]$.

192. $f(x) = x^5 - 6x^4$; $[-1;\ 1]$.

193. $f(x) = x^3 - 3x^2$; $[-2;\ 2]$.

194. $f(x) = x^4 - 81x$; $[-4;\ 1]$.

195. $f(x) = x^5 - 4x^4$; $[-2;\ 2]$.

196. $f(x) = x^4 + 4x$; $[-2;\ 2]$.

197. $f(x) = x^4 + 12x$; $[-3;\ 1]$.

198. $f(x) = x^5 + 12x$; $[-2;\ 2]$.

199. $f(x) = x^6 + x^7$; $[-3;\ 3]$.

200. $f(x) = x^4 + 20x$; $[-4;\ 1]$.

IV. Диференціальні числення функцій багатьох змінних

201–210. Знайти область визначення функції $z = f(x; y)$. Зобразити цю область графічно.

201. $z = \ln(x^2 + y)$.

202. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

203. $z = \sqrt{1 + x - y^2} + \sqrt{1 - x - y^2}$.

204. $z = \sqrt{y \sin x}$.

205. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x - \sqrt{y}}}$.

206. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.

207. $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

208. $z = \arcsin x \cdot \dfrac{y-1}{x}$.

209. $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

210. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

211–220. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції $z = f(x; y)$ в точці M_0 за заданих Δx і Δy.

211. $z = x^2 + xy^2 - 17$; $M_0(1; 1)$; $\Delta x = -0{,}03$; $\Delta y = 0{,}02$.

212. $z = x^2 + xy + y^2 - 9$; $M_0(1; 2)$; $\Delta x = 0{,}02$; $\Delta y = -0{,}04$.

213. $z = x^2 + 2xy - 2$; $M_0(2; 3)$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}02$.

214. $z = 3x^2 - xy + y + x + 1$; $M_0(1; 3)$; $\Delta x = 0{,}06$; $\Delta y = 0{,}02$.

215. $z = 2xy - y^2 + 2x$; $M_0(3; 1)$; $\Delta x = 0{,}04$; $\Delta y = 0{,}06$.

216. $z = xy^2 + 2x^2 - 4$; $M_0(-3; 2)$; $\Delta x = -0{,}07$; $\Delta y = -0{,}01$.

217. $z = 3x^2 + xy^3 - 4x$; $M_0(3;4)$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}03$.

218. $z = xy + 2y^2 - 2$; $M_0(-1; -1)$; $\Delta x = 0{,}02$; $\Delta y = -0{,}04$.

219. $z = x^3 - 2xy + 2y^2 + 1$; $M_0(1; -1)$; $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = -0{,}01$.

220. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy + \dfrac{1}{3}y^3$; $M_0(-1; 1)$; $\Delta x = -0{,}02$; $\Delta y = 0{,}01$.

221–230. Обчислити наближено.

221. $(2(\sqrt{0{,}97}))^{3{,}02}$.

222. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}97}{1{,}02}-1\right)$.

223. $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$.

224. $\sin 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 59^\circ$.

225. $(4{,}03)^{0{,}98}$.

226. $\ln(\sqrt{4{,}02}-\sqrt[3]{0{,}97})$.

227. $\sqrt{(8{,}04)^3+(6{,}03)^2}$.

228. $\operatorname{arctg}\dfrac{(1{,}04)^2}{0{,}98}$.

229. $\sqrt{(6{,}02)^3+(7{,}97)^2}$.

230. $(2-\sqrt{1{,}03})^{2{,}98}$.

231–240. Дослідити функцію $z = f(x;y)$ на екстремум.

231. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

232. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

233. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

234. $z = x^3y^2(6 - x - y)$.

235. $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; $x > 0$; $y > 0$.

236. $z = e^{-x^2-y}(2x^2 + y^2)$.

237. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$; $x > 0$; $y > 0$.

238. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$; $x > 0$; $y > 0$.

239. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

240. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

241–250. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = f(x;y)$ у замкнутій області D заданою системою нерівностей.

241. $z = x - 2y + 5$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$.

242. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 3$.

243. $z = x^2y(2 - x - y)$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

244. $z = x + y$; $x^2 + y^2 \le 1$.

245. $z = x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 \le 1.$

246. $z = xy^2;\ x^2 + y^2 \le 1.$

247. $z = xy;\ x^2 + y^2 \le 4.$

248. $z = x^3 + y^3 - 3xy;\ 0 \le x \le 3;\ -1 \le y \le 2.$

249. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3.$

250. $z = x^2 + 2xy - 4x - 8y;\ 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2.$

251–260. Експериментально отримати шість значень функції $y = f(x)$ за шести значень аргументу, які записано в таблицю. Методом найменших квадратів знайти функції виду $y = ax + b$ та $y = ax^2 + bx + c$. Зробити рисунок у декартовій системі координат.

251.

x	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	0,75
y	1,636	1,732	1,877	2,034	2,292	2,340

252.

x	0,02	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30
y	1,023	1,096	1,1472	1,301	1,409	1,501

253.

x	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	0,64
y	2,2739	2,0301	1,9686	1,788	1,595	1,343

254.

x	0,41	0,46	0,52	0,60	0,65	0,72
y	2,574	2,325	2,094	1,862	1,749	1,621

255.

x	0,68	0,73	0,80	0,88	0,93	0,99
y	0,809	0,895	1,027	1,341	1,524	1,642

256.

x	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	0,40
y	9,05	6,616	4,692	3,351	2,739	2,365

257.

x	1,375	1,380	1,385	1,4	1,6	1,72
y	5,04	5,121	4,321	0,412	3,111	4,001

258.

x	1,2	1,21	1,41	1,45	1,6	2
y	4,842	6,399	5,656	5,823	6,001	6,197

259.

x	0,21	0,215	0,41	0,51	0,6	1
y	4,83	4,722	4,619	4,512	4,42	4,333

260.

x	0,05	0,101	0,106	0,111	0,121	0,126
y	1,262	1,276	1,291	1,301	1,321	1,326

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Овчінніков Ф. П.* Вища математика : підручник у 2 ч. – Ч. 1. / Ф. П. Овчінніков, В. М. Яремчук. – Київ : Техніка, 2000. – 590 с.
2. *Овчінніков Ф. П.* Вища математика : підручник у 2 ч. – Ч. 2. / Ф. П. Овчінніков, В. М. Яремчук. – Київ : Техніка, 2000. – 790 с.
3. *Міхайленко В. М.* Математичний аналіз для економістів : навчальний посібник / В. М. Михайленко, Н. Д. Федоренко. – Київ : Європейський університет, 2002. – 297 с.
4. *Журавель О. О.* Вища математика : збірник завдань для курсових і самостійних робіт / О. О. Журавель. – Київ : КДТУБА, 1997. – 267 с.
5. *Федоренко Н. Д.* Вища математика : навчальний посібник / Федоренко Н. Д., Баліна О. І., Безклубенко І. С. – Київ : КНУБА, 2003. – 165 с.
6. *Безклубенко І. С.* Математичний аналіз. Модуль 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, елементи математичного аналізу : конспект лекцій / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, Ю. П. Буценко. – Київ : КНУБА, 2021. – 63 с.
7. *Безклубенко І. С.* Вища математика. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : методичні вказівки / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 2019. – 39 с.
8. *Безклубенко І. С.* Лінійна алгебра і аналітична геометрія : методичні вказівки і контрольні завдання для спеціальності АТП заочної форми навчання / Безклубенко І. С, Баліна О. І., Буценко Ю. П. – Київ : КДТУБА, 1999. – 18 с.
9. *Безклубенко І. С.* Теорія функцій комплексної змінної : методичні вказівки / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 1999. – 35 с.
10. *Баліна О. І.* Вища математика. Модуль 3. Інтегральне числення : методичні вказівки / О. І. Баліна, І. С. Безклубенко, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 2020. – 31 с.
11. *Баліна О. І.* Вища математика. Модуль 4. Диференціальні рівняння : методичні вказівки / О. І. Баліна, І. С. Безклубенко, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 2021. – 31 с.
12. *Максименко Д. В.* Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії : практичний посібник / Д. В. Максименко, В. Ф. Мельничук, Л. В. Соколова. – Київ : КНУБА, 2013. – 48 с.
13. *Федоренко Н. Д.* Вища математика (Ряди та їх застосування. Теорія функції комплексної змінної) : конспект лекцій / Н. Д. Федоренко, І. С. Безклубенко, О. І. Баліна. – Київ : КНУБА, 2015. – 60 с.
14. *Дубовик В. П.* Вища математика : навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А. С. К., 2006. – 647 с.

Навчальне видання

БЕЗКЛУБЕНКО Ірина Сергіївна,
БАЛІНА Олена Іванівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Підручник

У двох частинах

Частина 1

Редагування та коректура *Т. В. Івченко*
Комп'ютерне верстання *Л. В. Лабунець*

Підписано до друку 30.04.2024. Формат 60 × 84 1/16
Ум. друк. арк. 13,02. Обл.-вид. арк. 14,0.
Тираж 25 прим. Вид. № 10/1-24. Зам. № 24/1-24

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002