МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Практичний посібник з вищої математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
та 193 «Геодезія та землеустрій»

Київ 2024

УДК 517.95
І-73

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
О.В. Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
В.В. Отрашевська, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Л.В. Соколова, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
А.О. Краснєєва, старший викладач

Рецензент Ю.П. Філонов, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 11 від 25 березня 2024 р.

В авторській редакції.

Інтеграли та їх застосування : практичний посібник з вищої
І-73 математики для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / Н.В. Бондаренко та ін. – Київ : КНУБА, 2024. – 88 с.

Містить основні теоретичні відомості, приклади розв’язання задач та тридцять варіантів навчальних завдань з теми «Інтегральне числення функції однієї змінної».

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія» та 193 «Геодезія та землеустрій».

Зміст

Вступ

Інтегральне числення є однією з найважливіших частин курсу вищої математики і основою багатьох технічних дисциплін, що входять в програму підготовки студентів інженерних спеціальностей.

У даному посібнику наведені основні теоретичні відомості, методи обчислення невизначених і визначених інтегралів, а також приклади. Багато уваги приділяється застосуванням визначеного інтеграла для розв'язання геометричних та фізичних задач, що є особливо важливим під час підготовки інженерів-будівельників.

Методична розробка також містить 30 варіантів індивідуальних завдань, виконання яких має сприяти опануванню викладених методів інтегрування і практичного застосування інтегрального числення для розв'язування різноманітних задач. Підбір завдань відповідає вимогам навчальної робочої програми з курсу «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія» та 193 «Геодезія та землеустрій», досить повно її відображає і методично обґрунтований. Завдання для конкретних груп студентів викладач може підбирати індивідуально з урахуванням програми, часу, виділеного для відповідного виду роботи, і можливостей аудиторії. Наведені завдання можуть бути використані також для аудиторних робіт, самостійної роботи та для контролю і самоконтролю рівня знань студентів.

Мета навчального видання – надати студентам основні фундаментальні математичні знання з теорії інтегрального числення та здобути навички обчислення інтегралів та застосування інтегралів, необхідні для успішного засвоєння загальних теоретичних та спеціальних дисциплін, передбачених навчальними програмами будівельних спеціальностей.

Розділ 1. Невизначений інтеграл

Літерою I позначимо один із числових проміжків дійсної прямої **R**: $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(-\infty;b)$, $(-\infty;b]$, $(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на числовому проміжку I, якщо $F(x)$ диференційована на I і $F'(x)=f(x)$ для всіх $x\in I$.

Наприклад, для функції $y=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$ первісною є функція $F(x)=-\cos x$. Дійсно, $F'(x)=(-\cos x)'=\sin x$. Очевидно, що первісними будуть також функції $F(x)=-\cos x+C$, де C – довільна стала.

Отже, первісна для функції $y=f(x)$, якщо вона існує, визначається не єдиним чином.

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку *I*, то функція $F(x)+C$, де C – довільна стала, також буде первісною даної функції на *I*.

Правильним є й обернене твердження: кожну функцію, що є первісною функції $f(x)$ на проміжку *I*, можна подати у вигляді $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Означення. Вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку I і C – довільна стала, називається *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)\,dx$, тобто

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Вираз $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом*, а функція $f(x)$ – *підінтегральною функцією,* x – змінною інтегрування.

Операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається *інтегруванням* функції і є оберненою операцією відносно операції диференціювання.

Отже, для того, щоб знайти невизначений інтеграл від заданої функції $f(x)$, потрібно знайти одну з первісних даної функції та додати до неї довільну сталу. Правильність інтегрування перевіряють диференціюванням:

$$\left(F(x)+C\right)' = f(x).$$

Твердження. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на I, то для цієї функції існує первісна (а отже і невизначений інтеграл).

Надалі вважатимемо, що підінтегральні функції розглядаються лише на тих інтервалах, де вони є неперервними.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$,

2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$,

3. $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx$,

4. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, де $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$,

5. $\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$,

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $u = \varphi(x)$ −довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u)+C.$$

Зокрема,

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \tag{1}$$

де a, b – довільні сталі, $a \neq 0$, $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на I.

Властивість 6 називають *інваріантністю формули інтегрування*. Вона означає, що значення невизначеного інтеграла не залежить від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ \alpha\neq-1.$	**2.** $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C.$
3. $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C, a>0, a\neq1.$	**4.** $\int e^{x}dx=e^{x}+C.$
5. $\int\sin xdx=-\cos x+C.$	**6.** $\int\cos xdx=\sin x+C.$
7. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C.$	**8.** $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C.$
9. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$	**10.** $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C.$
11. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$	**12.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C.$
13. $\int shxdx=chx+C.$	**14.** $\int chxdx=shx+C.$
15. $\int\frac{1}{ch^2x}dx=thx+C.$	**16.** $\int\frac{1}{sh^2x}dx=-cthx+C.$
17. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}+C.$	
18. $\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2\pm x^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\rvert+C.$	

1.1. Основні методи інтегрування

1. Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування застосовують до інтегралів, які за допомогою алгебраїчних перетворень підінтегральної функції можна звести до інтегралів з таблиці основних інтегралів або до їхньої суми.

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx.$$

Розв'язання. Подамо інтеграл у вигляді суми табличних інтегралів:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3 e^x}{x^3} dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3 e^x}{x^3} \right) dx =$$

$$= \int (x^{-\frac{8}{3}} - \frac{1}{x} + e^x)\, dx = \int x^{-\frac{8}{3}} dx - \int \frac{dx}{x} + \int e^x dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} - \ln|x| + e^x + C = -\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^5}} - \ln|x| + e^x + C.$$

Відповідь: $-\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^5}} - \ln|x| + e^x + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx = \int \frac{x^2+1+3-3}{x^2+4} dx = \int \frac{(x^2+4)-3}{x^2+4} dx =$$

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x^2+4} = x - \frac{3}{2} arctg \frac{x}{2} + C.$$

Відповідь: $x - \frac{3}{2} arctg \frac{x}{2} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

2. Метод внесення функції під знак диференціала

Метод внесення функції під знак диференціала доцільно застосовувати, якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді добутку деякої функції від нової змінної та диференціала цієї змінної, тобто

$$\int f(x)\,dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x) = \int g(u)du\,,$$

де $u = \varphi\left(x\right)$ – довільна функція, що має неперервну похідну.

Цей метод ґрунтується на властивості інваріантності формул інтегрування.

Наведемо деякі корисні співвідношення (таблиця диференціалів):

$x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}d(x^{\alpha+1}),\ \alpha \neq -1;$	$\frac{1}{x}dx = d(\ln\lvert x\rvert);$
$\sin x dx = -d(\cos x);$	$\cos x dx = d(\sin x);$
$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx);$	$\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(ctgx);$
$a^x dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x);$	$e^x dx = d(e^x);$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d\left(\arcsin x\right) = -d\left(\arccos x\right);$	
$\frac{1}{1+x^2}dx = d(arctgx) = -d(arcctgx).$	

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\left(5x-1\right)^4}.$$

Розв’язання.

$$\int \frac{dx}{\left(5x-1\right)^4} = \frac{1}{5}\int \left(5x-1\right)^{-4} 5dx = \frac{1}{5}\int \left(5x-1\right)^{-4} d\left(5x-1\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\int u^{-4}du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{15(5x-1)^3} + C\,.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{15(5x-1)^3} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (x^{12} - 2\sin 5x + \frac{3}{x^2+4} - \frac{1}{x-2} + 3^{9x})dx.$$

Розв’язання. Цей інтеграл є сумою табличних інтегралів.

$$\int (x^{12} - 2\sin 5x + \frac{3}{x^2+4} - \frac{1}{x-2} + 3^{9x})dx =$$

$$= \int x^{12}dx - 2\int \sin 5x dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x-2}dx + \int 3^{9x}dx =$$

$$= \int x^{12}dx - \frac{2}{5}\int \sin 5x d(5x) + 3\int \frac{1}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x-2}d(x-2) +$$

$$+ \frac{1}{9}\int 3^{9x}d(9x) = \frac{x^{13}}{13} + \frac{2}{5}\cos 5x + \frac{3}{2}arctg\frac{x}{2} - \ln(x-2) + \frac{3^x}{9\ln 3} + C.$$

Відповідь: $\dfrac{x^{13}}{13} + \dfrac{2}{5}\cos 5x + \dfrac{3}{2}arctg\dfrac{x}{2} - \ln(x-2) + \dfrac{3^x}{9\ln 3} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}.$$

Розв’язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегрального виразу:

$$x^2+6x+10 = x^2+6x+9+1 = (x+3)^2+1.$$

Враховуючи, що $d(x+3) = (x+3)'dx = dx$, знаходимо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{d\left(x+3\right)}{\left(x+3\right)^2+1} = arctg\left(x+3\right)+C.$$

Відповідь: $arctg\left(x+3\right)+C$, $C \in \mathbf{R}$.

3. Метод заміни змінної

Нехай в інтегралі $\int f(x)dx$ зроблено заміну змінної $x = \varphi(t)$. Якщо функція $f(x)$ неперервна, функція $\varphi(t)$ оборотна і має неперервну похідну, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt + C. \qquad (2)$$

Формула (2) називається формулою заміни змінної у невизначеному інтегралі. Можлива також обернена заміна $t = \psi\left(x\right)$.

Заміну змінної слід підбирати так, щоб отримати простіший інтеграл або звести інтеграл до табличного.

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної $x = t^2$, тоді $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = 2\int \frac{tdt}{t+1} = 2\int \frac{\left(t+1\right)-1}{t+1}dt = 2\int dt - 2\int \frac{d\left(t+1\right)}{t+1} =$$

$$= 2t - 2\ln\left|t+1\right| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C.$$

Відповідь: $2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sqrt{\cos 5x+1} \cdot \sin 5x dx.$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної $t = \cos 5x + 1$, тоді $dt = -5\sin 5x dx$, а $\sin 5x dx = -\frac{1}{5}dt$.

$$\int \sqrt{\cos 5x + 1} \cdot \sin 5x dx = \int t^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{5} \right) dt = -\frac{1}{5} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{5} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -\frac{2}{15} t\sqrt{t} + C = -\frac{2}{15} (\cos 5x + 1)\sqrt{\cos 5x + 1} + C.$$

Запропоновані перетворення рівносильні введенню під знак диференціала функції $\cos 5x + 1$:

$$\int \sqrt{\cos 5x + 1} \cdot \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \int \sqrt{\cos 5x + 1} d(\cos 5x + 1) =$$

$$= -\frac{1}{5} \frac{(\cos 5x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{15} (\cos 5x + 1)\sqrt{\cos 5x + 1} + C.$$

Відповідь: $-\frac{2}{15} (\cos 5x + 1)\sqrt{\cos 5x + 1} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

4. Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами ґрунтується на використанні формули диференціала добутку двох диференційованих функцій $u = u(x), v = v(x)$

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

звідки випливає

$$u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du.$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності, дістанемо

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du,$$

або

$$\int u dv = uv + C - \int v du.$$

Оскільки невизначений інтеграл містить довільну сталу, то до неї можна приєднати і доданок *C*.

Отже, одержуємо *формулу інтегрування частинами*:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du . \qquad (3)$$

Метод інтегрування частинами має більш обмежену область застосування, ніж метод заміни змінної. Але деякі інтеграли обчислюються саме методом інтегрування частинами. Цим методом знаходяться, зокрема, інтеграли від добутку многочлена на трансцендентну функцію (1,2):

$$1.\ \int P_n(x)\begin{bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ a^x\end{bmatrix}dx, \qquad 2.\ \int P_n(x)\begin{bmatrix}\arcsin bx\\ \arccos bx\\ \log_a bx\end{bmatrix}dx,$$

інтеграли виду

$$3.\int e^{ax}\begin{bmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{bmatrix}dx$$

та інші.

В інтегралах першого типу у формулі (3) за u слід обирати многочлен, а за dv − ту частину підінтегрального виразу, що залишилась. У результаті інтеграл $\int v du$ має стати простішим порівняно з вихідним. В інтегралах другого типу навпаки за u приймаємо логарифмічну чи обернену тригонометричну функцію. В інтегралах третього типу після двократного застосування формули інтегрування частинами дістанемо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла.

Приклад 8. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (2x+3)\sin 3x dx .$$

Розв’язання. Покладаємо $u = 2x+3, dv = \sin 3x dx$, тоді

$$du = 2dx, \quad v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x .$$

За формулою інтегрування частинами (3) маємо:

$$\int (2x+3)\sin 3x dx = -\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{3}\int \cos 3x dx =$$

$$=-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x+\frac{2}{9}\sin 3xdx+C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x+\frac{2}{9}\sin 3xdx+C$, $C\in\mathbf{R}$.

Приклад 9. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x\ln^2 xdx.$$

Розв'язання. Покладаємо $u=\ln^2 x$, $dv=xdx$, тоді

$$du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx,\ v=\int xdx=\frac{x^2}{2}.$$

Застосувавши формулу інтегрування частинами, дістанемо:

$$\int x\ln^2 xdx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x^2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln xdx.$$

Інтеграл $\int x\ln xdx$ також знаходимо методом інтегрування частинами.

$$\int x\ln xdx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx,\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int x\ln^2 xdx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C$, $C\in\mathbf{R}$.

1.2. Інтегрування раціональних дробів

Функція виду

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n},$$

де $Q_m(x), P_n(x)$ – многочлени відповідно ступеня m і n з дійсними коефіцієнтами називається *раціональним дробом*. Якщо раціональний дріб неправильний $(m \geq n)$, то для інтегрування необхідно виділити цілу частину цього дробу, тобто подати його у вигляді суми цілої раціональної функції та правильного раціонального дробу $(m < n)$.

Елементарними раціональними дробами називають правильні раціональні дроби чотирьох типів:

$$1.\ \frac{A}{x-\alpha};\qquad 2.\ \frac{A}{(x-\alpha)^k};$$

$$3.\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\qquad 4.\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \tag{4}$$

де $k=2,3,...,$ $A,B,\alpha,p,q\in \mathbf{R}$, а тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $p^2-4q<0$.

Дроби першого та другого типів інтегруються досить просто:

$$\int\frac{A}{x-\alpha}dx=A\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+C;$$

$$\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}dx=A\int(x-\alpha)^{-k}d(x-\alpha)=\frac{A(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Під час знаходження інтегралів від дробу третього типу виділяють повний квадрат у знаменнику і виконують заміну $x+\frac{p}{2}=t$, в результаті отримують два простих інтеграли. Розглянемо приклад.

Приклад 10. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{3x+5}{(x+2)^2+9}dx = \begin{vmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{3t-1}{t^2+9}dt = 3\int \frac{t}{t^2+9}dt - \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} - \int \frac{dt}{t^2+3^3} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) - \frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+13) - \frac{1}{3}arctg\frac{x+2}{3} + C.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+13) - \frac{1}{3}arctg\frac{x+2}{3} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Інтеграл від дробу четвертого типу

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

після виділення повного квадрата в знаменнику та заміни $x+\frac{p}{2}=t$ зводиться до двох інтегралів. Один з них легко береться методом введення функції під знак диференціала, а другий інтеграл виду

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \text{ де } a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

можна знайти за допомогою рекурентної формули

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n+2}I_{n-1} + \frac{t}{(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}}\right),$$

або за допомогою тригонометричної підстановки $t = a \cdot tgx$.

Інтегрування правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування елементарних раціональних дробів (4). Для цього рекомендується дотримуватись наступного *алгоритму розкладання правильного раціонального дробу в суму елементарних дробів* (4).

1. Розкласти знаменник дробу на множники виду

$$(x-\alpha)^k,\ (x^2+px+q)^l,\ p^2-4q<0,\ k,l\in\mathbf{N}.$$

2. Розкласти дріб на суму дробів виду (4) з невизначеними коефіцієнтами, причому кожному множнику виду $(x-\alpha)^k$ відповідає сума k доданків $\sum\limits_{s=1}^{k}\frac{A_s}{\left(x-\alpha\right)^s}$, а кожному множнику виду $(x^2+px+q)^l$ – сума l доданків виду $\sum\limits_{s=1}^{l}\frac{B_s x+C_s}{(x^2+px+q)^s}$, де A_s, B_s, C_s – невідомі коефіцієнти.

3. Привести обидві частини рівності до спільного знаменника та прирівняти чисельники.

4. Для знаходження невідомих $A_{s,} B_s, C_s$ скористатись *методом порівняння коефіцієнтів*. В отриманій тотожності необхідно прирівняти коефіцієнти за однакових степенів змінної x і скласти систему лінійних рівнянь з невідомими $A_{s,} B_s, C_s$.

5. Розв’язати отриману систему лінійних рівнянь та підставити знайдені значення коефіцієнтів у формулу розкладання.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів $A_{s,} B_s, C_s$ під час розкладання правильного дробу в суму елементарних раціональних дробів можна також використовувати *метод надання окремих значень*. Можлива також комбінація методу порівняння коефіцієнтів та методу надання окремих значень.

Приклад 11. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx.$$

Розв'язання. Маємо інтеграл від правильного раціонального дробу. Подамо підінтегральний вираз у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приведемо дроби у правій частині рівності до спільного знаменника та прирівняємо чисельники:

$$3x^2+2x+1=A(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2;$$

$$3x^2+2x+1=(B+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+$$
$$+\left(B+C+2D\right)x+\left(A+B+D\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти за відповідних степенів x в лівій та правій частинах рівності:

$$\begin{array}{l|c} x^3 & B+C=0 \\ x^2 & A+B+2C+D=3 \\ x & B+C+2D=2 \\ x^0 & A+B+D=1 \end{array}$$

Розв'язавши систему відносно A,B,C,D, дістанемо: $A=1,\ B=-1,\ C=1,\ D=1.$

Таким чином,

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=$$

$$=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}-\int\frac{d(x+1)}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-arctgx+C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-arctgx+C$, $C\in\mathbf{R}$.

Зауважимо, що метод надання окремих значень є особливо зручним, якщо знаменник дробу має дійсні корені, оскільки система рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів значно спрощується, якщо змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника.

Приклад 12. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$$

Розв'язання. Заданий інтеграл є інтегралом від правильного раціонального дробу. Подамо підінтегральний вираз у вигляді суми елементарних дробів:

$$\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3}.$$

Зведемо дроби у правій частині рівності до спільного знаменника, а потім прирівняємо чисельники лівої і правої частин рівних дробів:

$$x^2+4=A(x-2)^3+B(x+2)(x-2)^2+C(x-2)(x+2)+D(x+2).$$

Дістали два тотожно рівних многочлени, один з яких – відомий, а другий з невідомими коефіцієнтами. Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C, D методом надання окремих значень змінній x. Надаючи змінній x стільки різних значень, скільки є невідомих коефіцієнтів, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої визначаємо шукані коефіцієнти.

$x=2,\quad 8=4D,\quad D=2;$

$x=-2,\ 8=-64A,\ \ A=-\frac{1}{8};$

$x=0,\ 4=-8\cdot(-\frac{1}{8})+8B+4C+4;\ 8B+4C=-1,\ 2B+C=-\frac{1}{4};$

$$x=1,\ 5=\frac{1}{8}+3B-3C+6,\ 3B-3C=-\frac{9}{8},\ B-C=-\frac{3}{8}$$

$$\begin{cases} 2B+C=-\frac{1}{4}; \\ B-C=-\frac{3}{8}, \end{cases} \begin{cases} 3B=-\frac{5}{8}; \\ B-C=-\frac{3}{8}, \end{cases} \begin{cases} B=-\frac{5}{24}; \\ C=B+\frac{3}{8}, \end{cases} \begin{cases} B=-\frac{5}{24}; \\ C=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Отже,

$$\int\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)^3}dx=$$

$$=\int\left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^3}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{8}\ln|x+2|+\frac{5}{24}\ln|x-2|+$$

$$+\frac{1}{6}\int(x-2)^{-2}d(x-2)+2\int(x-2)^{-3}d(x-2)=$$

$$=-\frac{1}{8}\ln|x+2|+\frac{5}{24}\ln|x-2|-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{8}\ln|x+2|+\frac{5}{24}\ln|x-2|-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C$, $C\in\mathbf{R}$.

1.3. Інтегрування деяких функцій з ірраціональностями

Інтеграл виду

$$\int R(x,x^{\frac{p_1}{q_1}},\ldots,x^{\frac{p_k}{q_k}})\,dx,$$

де R – раціональна функція, p_i,q_i $(i=1,2,\ldots,k)$ – натуральні числа, підстановкою $x=t^s$, де s – найменше спільне кратне чисел $q_1,q_2,\ldots,q_k$, зводиться до інтеграла від раціональної функції аргумента t.

Інтеграли виду

$$\int R\left(x,(ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}},(ax+b)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,(ax+b)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx,$$

раціоналізуються підстановкою $ax+b=t^s$, де s – найменше спільне кратне чисел $q_{1,}q_{2,\ldots,}q_k$.

Інтеграли виду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx$$

раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, де s – найменше спільне кратне чисел $q_{1,}q_{2,\ldots,}q_k$.

Приклад 13. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\int R((x+1)^{\frac{1}{2}},(x+1)^{\frac{1}{3}})\,dx.$$

Оскільки $\text{НСК}(2;3)=6$, то підстановкою $x+1=t^6$, $dx=6t^5dt$ раціоналізуємо підінтегральну функцію:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=6\int\frac{t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int\frac{(t^3-1)+1}{t+1}dt=$$

$$=6\int(t^2+t+1)dt+6\int\frac{d(t+1)}{t+1}=6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right)+6\ln|t+1|+C.$$

Оскільки $t=\sqrt[6]{x+1}$, то

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C.$$

Відповідь: $2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1)+C$, $C\in\mathbf{R}$.

1.4. Інтегрування диференціальних біномів

Інтеграл виду

$$\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx, \text{ де } a, b \in \mathbf{R},\ m, n, p \in \mathbf{Q}$$

називають *інтегралом від диференціального бінома*. Цей інтеграл можна подати у вигляді інтеграла від раціональної функції тільки в трьох випадках залежно від чисел *p, m, n.*

1.	p – ціле число	заміна $x = t^s$, s – найменше спільне кратне знаменників дробів m, n
2.	$\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число	заміна $ax^n + b = t^s$, s – знаменник p
3.	$\dfrac{m+1}{n} + p$ – ціле число	заміна $\dfrac{ax^n + b}{x^n} = t^s$, s – знаменник p

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається.

Приклад 14. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx.$$

Розв'язання. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int x^3 \left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$.

Маємо інтеграл від диференціального бінома. Тут $p = -\frac{1}{2}, m = 3,\ n = 2$. Тоді $\frac{m+1}{n} = 2$ – ціле число, що відповідає випадку 2, тому скористаємося заміною

$$x^2 + 2 = t^2,\ x^2 = t^2 - 2,\quad 2xdx = 2tdt,\ xdx = tdt.$$

Маємо

$$\int \frac{x^2 \cdot xdx}{\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{(t^2-2)tdt}{t} = \int (t^2-2)dt = \frac{t^3}{3} - 2t + C.$$

Враховуючи, що $t = \sqrt{x^2+2}$, отримуємо відповідь.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}}{3} - 2\sqrt{x^2+2} + C,\ C \in \mathbf{R}.$

Інтегрування інтегралів виду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$

Заміною $x = t - \dfrac{b}{2a}$ зазначений інтеграл зводиться до одного з видів 1, 2, 3, наведених у таблиці, кожен з яких інтегрується за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

		Можливі підстановки:
1.	$\int R(t, \sqrt{t^2+\alpha^2})\, dt$	$t = \alpha \cdot tg\ z,\ t = \alpha \cdot ctg\ z,\ t = \alpha \cdot shz$
2.	$\int R(t, \sqrt{t^2-\alpha^2})\, dt$	$t = \dfrac{\alpha}{\cos z},\ t = \dfrac{\alpha}{\sin z},\ t = \alpha \cdot chz$
3.	$\int R(t, \sqrt{\alpha^2-t^2})\, dt$	$t = \alpha \cdot \sin z, t = \alpha \cdot \cos z, t = \alpha \cdot thz$

Приклад 15. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$$

Розв'язання. Використаємо заміну $x = \sin t$, тоді

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \begin{vmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\ dt \end{vmatrix} = \int \frac{\sin^3 t \cdot \cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{\sin^2 t \cdot \sin t dt}{\cos^2 t} =$$

$$= -\int \frac{\left(1-\cos^2 t\right) d\cos t}{\cos^2 t} = -\int \frac{d\cos t}{\cos^2 t} + \int d\cos t = \frac{1}{\cos t} + \cos t + C.$$

Враховуючи, що $x = \sin t,\ \cos t = \sqrt{1 - x^2}$, маємо відповідь.

Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} + C,\ C \in \mathbf{R}$.

Інтеграли виду

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx,\ \ A, B, p, q \in \mathbf{R}$$

інтегруються способом, аналогічним способу інтегрування елементарних раціональних дробів третього типу.

Приклад 16. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}} dx .$$

Розв’язання.

$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}} dx = \left| \begin{array}{l} x + 2 = t \\ x = t - 2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt =$$

$$= \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx = \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt + \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{\sqrt{t^2 + 1}} + \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \sqrt{t^2 + 1} + \ln | t + \sqrt{t^2 + 1} | + C =$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x + 5} + \ln | x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5} | + C .$$

Відповідь: $\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \ln \left| x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5} \right| + C,\ C \in \mathbf{R}$.

1.5. Інтегрування раціональних функцій від тригонометричних функцій

Означення. *Раціональною функцією двох змінних* $R(u,v)$ називається функція, що залежить від двох змінних u, v, над якими виконується скінченна кількість чотирьох арифметичних дій: додавання, віднімання, множення і ділення.

Інтеграли виду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

де $R(u,v)$ – раціональна функція двох змінних, $u = \sin x, v = \cos x$, можна привести до інтегралів від раціональної функції нового аргументу *універсальною тригонометричною підстановкою*

$$t = tg\frac{x}{2}.$$

Користуючись відомими формулами тригонометрії

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \ n \in \mathbf{Z},$$

маємо

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад 17. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}.$$

Розв'язання. Покладаємо $t = tg\frac{x}{2}$, тоді

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = 2\int \frac{dt}{\left(4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+6t+9} = \int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2} = -\frac{2}{(t+3)} + C = -\frac{2}{tg\frac{x}{2}+3} + C.$$

Відповідь: $-\dfrac{2}{tg\frac{x}{2}+3} + C,\ C \in \mathbf{R}$.

За допомогою універсальної тригонометричної підстановки $t = tg\dfrac{x}{2}$ інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ завжди можна раціоналізувати. Однак, використання цієї підстановки інколи призводить до надто громіздких раціональних дробів. Для інтегралів від раціональних функцій певного виду, що залежать від тригонометричних функцій, інколи ефективнішими є інші прийоми інтегрування з використанням інших підстановок.

1.	Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\sin x$, $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	підстановка $\cos x = t$
2.	Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно $\cos x$, $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	підстановка $\sin x = t$
3.	Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно обох функцій, $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	підстановка $tgx = t$

Приклад 18. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, то можна застосувати підстановку $\cos x = t,\ -\sin x dx = dt$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= t - 2arctgt + C = \cos x - 2arctg(\cos x) + C.$$

Відповідь: $\cos x - 2arctg(\cos x) + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Інтеграл виду $\int R(\sin^m x, \cos^n x)\, dx$, $m, n \in \mathbf{N}$ є окремим випадком інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Для знаходження таких інтегралів рекомендується:

1.	Якщо m – ціле додатне непарне число	підстановка $\cos x = t$
2.	Якщо n – ціле додатне непарне число	підстановка $\sin x = t$
3.	Якщо m, n – цілі додатні парні числа	застосовуються формули пониження ступеня $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

Часто для перетворення підінтегрального виразу застосовуються співвідношення:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad ctg^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Для гіперболічних функцій застосовуються співвідношення:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1, \qquad 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}, \qquad cth^2 x - 1 = \frac{1}{sh^2 x}.$$

Приклад 19. Знайти невизначений інтеграл $\int \sin^3 x\, dx$.

Розв'язання.

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cos x dx = -\int (1 - \cos^2 x)\, d(\cos x) =$$

$$= -\int d(\cos x) + \int \cos^2 x \cdot d(\cos x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

Відповідь: $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад 20. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

Розв'язання.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\sin x \cos x\right)^2 \cos^2 x dx =$$

$$= \int \frac{\left(2\sin x \cos x\right)^2}{4} \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$\frac{1}{16}\int \left(1-\cos 4x\right) dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d \sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16x} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{16x} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Інтеграли виду

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

зводяться до алгебраїчної суми табличних інтегралів за допомогою формул:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)x + \sin\left(\alpha-\beta\right)x\right),$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)x - \cos\left(\alpha+\beta\right)x\right),$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)x + \cos\left(\alpha-\beta\right)x\right).$$

Приклад 21. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin 5x \cos 3x dx.$$

Розв'язання.

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 8x + \sin 2x\right) dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад 22. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{1 - \sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$$

Відповідь: $tgx + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад 23. Знайти невизначений інтеграл

$$\int th^4 x\, dx.$$

Розв'язання.

$$\int th^4 x dx = \int th^2 x (1 - \frac{1}{ch^2 x}) dx = \int th^2 x dx - \int th^2 x \cdot \frac{1}{ch^2 x} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} thx = t \\ \frac{1}{ch^2 x} dx = dt \end{matrix} \right| = \int (1 - \frac{1}{ch^2 x}) dx - \int t^2 dt = x - thx - \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= x - thx - \frac{th^3 x}{3} + C.$$

Відповідь: $x - thx - \frac{th^3 x}{3} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

Розділ 2. Визначені інтеграли

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ – довільне розбиття відрізка на n частин, то інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається сума

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

де $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка Δx_k.

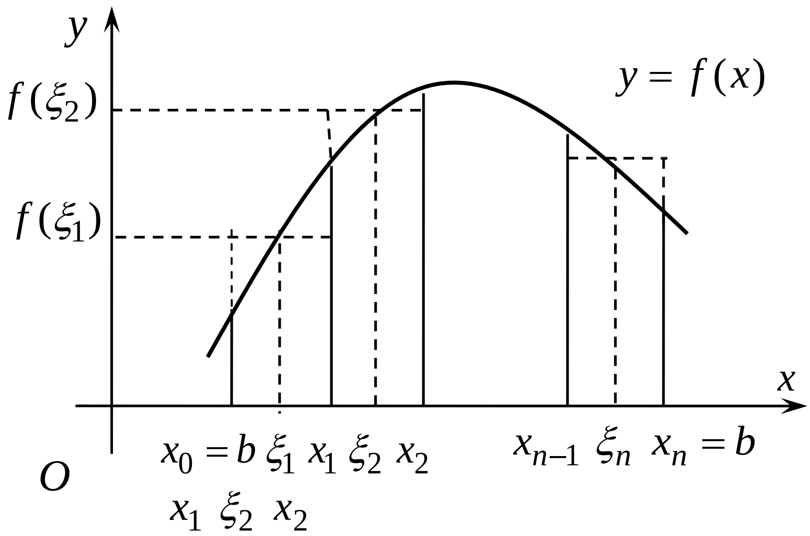

Рис. 1

Означення. Якщо для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ існує скінченна границя послідовності інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить від способів розбиття відрізка $[a;b]$ та вибору точок ξ_k, то така границя називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Числа a і b називаються відповідно нижньою та верхньою *межами інтегрування.*

Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a;b]$, називається *інтегрованою* на цьому відрізку, якщо існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx.$

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ одна з її первісних, то визначений інтеграл обчислюється за *формулою Ньютона-Лейбніца:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад 24. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}.$$

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln 3$.

Умови існування визначеного інтеграла

1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

2. Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a;b]$ і неперервна на ньому скрізь, крім скінченного числа точок (кусково-неперервна), то вона інтегровна на цьому відрізку.

3. Якщо функція $f(x)$ обмежена і монотонна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Основні властивості визначеного інтеграла

Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ – інтегровані на відрізку $[a;b]$.

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_b^a f(x)dx \pm \int\limits_b^a g(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$, $C \in \mathbf{R}$.

5. За будь-якого розміщення точок a, b, c на числовій осі, якщо функція $f(x)$ інтегровна на максимальному з відрізків $[a;b], [a;c], [b;c]$, то справедлива рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Ця властивість називається *адитивністю визначеного інтеграла*.

5. Якщо $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Якщо $f(x) \leq g(x)$ для всіх $x \in [a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

7. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

8. Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

9. *Теорема про середнє значення визначеного інтеграла*. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

10. Якщо парна функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[-a;a]$, симетричному відносно початку координат, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Якщо непарна функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[-a;a]$, симетричному відносно початку координат, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Методи обчислення визначеного інтеграла

1. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$ і в інтегралі $\int_a^b f(x)\,dx$ зроблено заміну змінної $x = \varphi(t)$, де функція $\varphi(t)$ задовольняє такі умови:

1) функція $\varphi(t)$ визначена і неперервна на $[\alpha;\beta]$, множиною значень функції $x = \varphi(t)$ є відрізок $[a;b]$, якщо t змінюється в межах $[\alpha;\beta]$, тобто $a \le \varphi(t) \le b$, та $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$;

2) $\varphi(t)$ диференційована на відрізку $[\alpha;\beta]$ та її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервна на цьому відрізку.

Тоді справедлива *формула заміни змінної у визначеному інтегралі:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Під час застосування цієї формули слід пам’ятати про необхідність зміни меж інтегрування.

Можлива також обернена заміна $t = \psi(x)$, тоді $\psi(a) = \alpha$, $\psi(b) = \beta$. У цьому випадку функція $x = x(t)$, обернена до функції $t = \psi(x)$, має задовольняти умови (1) − (2) теореми.

Найзручніше використовувати заміну монотонно диференційованими функціями. Такі функції гарантують однозначність як прямої, так і оберненої функцій.

Приклад 25. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx.$$

Розв’язання. Застосуємо підстановку $x = 2\sin t$. Межі інтегрування знаходимо із співвідношень $2\sin t = 0,\ t_1 = 0$ і $2\sin t = 1,\ t_2 = \pi/6$. Функції $x = 2\sin t$ та її похідна $x' = 2\cos t$ неперервні на відрізку $[0;\pi/6]$, що підтверджує законність даної підстановки.

Отже, маємо

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \\ 2\sin t = 0,\ t_1 = 0 \\ 2\sin t = 1,\ t_2 = \dfrac{\pi}{6} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} 2\cos t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)dt = 2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 26. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$$

Розв'язання.

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \\ x = \ln 2, t = 2 \\ x = \ln 3, t = 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Bigg|_2^3 = \frac{1}{2} (\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

2. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема. *Якщо* функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a;b]$ і мають на цьому відрізку неперервні похідні, то

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад 27. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

Розв'язання. Використаємо формулу інтегрування частинами.

$$\int_0^1 x e^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{vmatrix} = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 =$$

$$= e - e + 1 = 1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 28. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx.$$

Розв'язання. Використаємо формулу інтегрування частинами.

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^5}, & v = -\dfrac{dx}{4x^4} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{4x^4}\Bigg|_1^2 + \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dx}{x^5} =$$

$$= -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Bigg|_1^2 = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}.$$

Відповідь: $-\dfrac{\ln 2}{64} + \dfrac{15}{256}$.

Приклад 29. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^e x\ln^2 x dx.$$

Розв'язання. Використаємо формулу інтегрування частинами.

$$\int_1^e x\ln^2 x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x, du = 2\ln x\dfrac{1}{x}dx \\ dv = x, \quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}2\ln x\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x, \quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^e + \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 - 1).$$

Відповідь: $\dfrac{1}{4}(e^2 - 1)$.

Розділ 3. Невласні інтеграли

3.1. Невласні інтеграли першого роду

Означення. *Невласним інтегралом I роду* від неперервної функції $f(x)$ на інтервалі $[a,+\infty)$ називається границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (5)$$

Якщо ця границя скінченна, то кажуть, що *невласний інтеграл збігається*, якщо ж границя (5) не існує або нескінченна, то інтеграл *розбігається*.

Аналогічно, за означенням

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Для визначення інтеграла на інтервалі $(-\infty,+\infty)$ розіб'ємо заданий інтервал довільною точкою *c* на два інтервали: $(-\infty,c]$, $[c,+\infty)$. Тоді, якщо кожен із невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ і $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ збігається, збігається і інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, і цей інтеграл дорівнює їхній сумі:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Якщо ж хоча б один із невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ або $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Зауваження. Можливе також дослідження невласних інтегралів на збіжність без безпосереднього їх обчислення.

Приклад 30. Обчислити невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$$

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл першого роду, у якого обидві межі інтегрування нескінченні, тому розбиваємо заданий інтеграл на два інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2+2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)^2+2}.$$

Далі за означенням маємо

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2+2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)^2+2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2+2} + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{(x+3)^2+2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+3}{\sqrt{2}}\Bigg|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+3}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0}^{b} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{3}{\sqrt{2}} - \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{a+3}{\sqrt{2}} +$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{b+3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 31. Обчислити невласний інтеграл

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

Розв'язання.

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{\ln^2 x}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \ln^2 x \, d(\ln x) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{\ln^3 x}{3}\bigg|_2^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\ln^3 b}{3} - \frac{\ln^3 2}{3}\right) = +\infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

3.2. Невласні інтеграли другого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a;b)$ і необмежена поблизу точки b, тобто $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. Крім того, функція $f(x)$ інтегровна на кожному з інтервалів $[a, b-\varepsilon]$, де $\varepsilon > 0$, тобто існує інтеграл

$$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Означення. Границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ називається *невласним інтегралом II роду,* або *інтегралом від розривної функції* $f(x)$ на інтервалі $[a;b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{6}$$

Якщо існує скінченна границя в правій частині формули (6), то невласний інтеграл називається *збіжним*, якщо ця границя не існує або є нескінченною, то *розбіжним*.

Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив в деякій точці $x = c$ всередині відрізка $[a,b]$, то покладемо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

якщо обидва інтеграли в правій частині збігаються.

Зауваження. Точку b називають особливою, якщо або $b=\infty$, або $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$. Тоді, якщо первісна функції $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;c]$, де c – скінченне число і $c<b$, для невласних інтегралів має місце узагальнена формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

де $F(b)=\lim\limits_{x\to b} F(x)$.

Приклад 32. Обчислити невласний інтеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

Розв'язання. Перетворимо даний інтеграл:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int\limits_{-1}^{1} x^{\frac{4}{3}}dx + 2\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3I_1 + 2I_2.$$

Інтеграл I_1 через неперервність підінтегральної функції обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{6}{7}.$$

Інтеграл I_2 є невласним інтегралом другого роду, оскільки підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ в точці $x=0$ має нескінченний розрив. Тому

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}} = \int\limits_{-1}^{0} x^{-\frac{2}{3}}dx + \int\limits_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1} x^{-\frac{2}{3}}dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon_2}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} (3\varepsilon_1^{\frac{1}{3}} + 3) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} (3 - 3\varepsilon_2^{\frac{1}{3}}) = 6.$$

Остаточно $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3 \cdot \frac{6}{7} + 2 \cdot 6 = 14\frac{4}{7}$.

Відповідь: $14\frac{4}{7}$.

Приклад 33. Обчислити невласний інтеграл

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ має нескінченний розрив у точці $x = 1$, але її первісна $F(x) = 3\sqrt[3]{x-1}$ неперервна на проміжку $[1;2]$. Тому тут можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3\sqrt[3]{x-1}\,\Big|_{1}^{2} = 3.$$

Відповідь: 3.

Розділ 4. Застосування визначеного інтеграла

4.1. Обчислення площі плоскої фігури

Площа фігури у прямокутних декартових координатах

Площа фігури, обмеженої знизу відрізком $[a;b]$ на осі *OX*, зверху – графіком неперервної функції $y = f(x)$, зліва і справа – вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 2) знаходиться за допомогою визначеного інтеграла:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Площа фігури, обмеженої знизу графіком неперервної функції $y = f_1(x)$, зверху – графіком неперервної функції $y = f_2(x)$ (рис. 3) обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \tag{6}$$

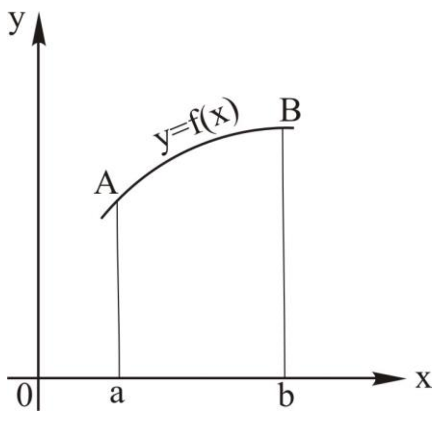

Рис. 2

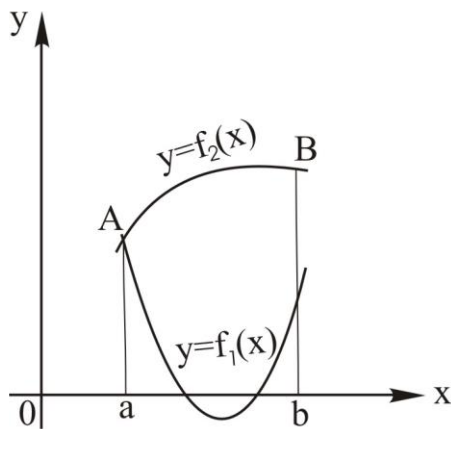

Рис. 3

Інтервал інтегрування $[a,b]$ являє собою проекцію фігури на вісь *OX*.

Нехай неперервна лінія, що обмежує фігуру зверху, задана декількома аналітичними виразами (рис. 4):

$$f_2(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), \ a \le x \le c, \\ \varphi_2(x), \ c \le x \le d, \\ \varphi_3(x), \ d \le x \le b. \end{cases} \tag{8}$$

У цьому разі фігура розбивається на стільки частин, скількома аналітичними виразами задана функція $f_2(x)$, а площа обчислюється як сума площ побудованих фігур.

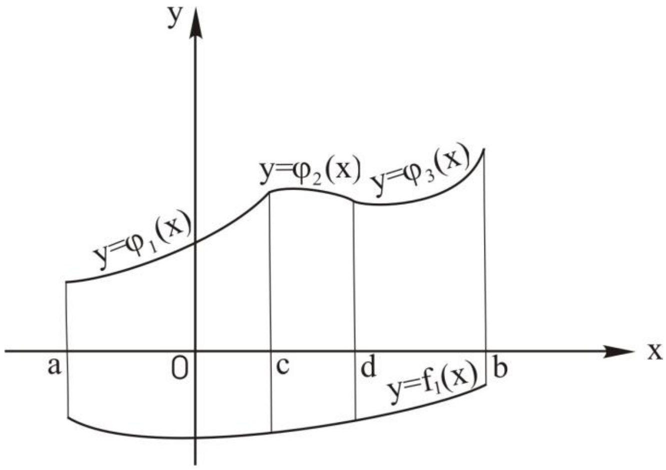

Рис. 4

Таким чином, під час обчислення площ фігур, заданих у прямокутній декартовій системі координат, потрібно:

– зробити схематичний рисунок фігури;

– знайти границі інтегрування. Для цього слід спроєктувати фігуру на вісь *OX* і визначити, який відрізок осі *OX* займає ця проекція чи проекції частин фігури;

– скласти, а потім обчислити визначений інтеграл.

Зауваження. Фігура може бути розміщена так, як на рис. 5 та рис. 6. У такому разі під час визначення меж інтегрування зручніше спроєктувати фігуру на вісь *OY*.

У цьому разі формули для обчислення площ мають вигляд

$$S=\int_c^d f(y)dy, \qquad S=\int_c^d (f_2(y)-f_1(y))dy. \tag{9}$$

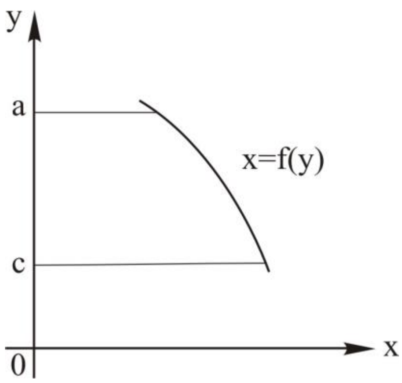

Рис. 5

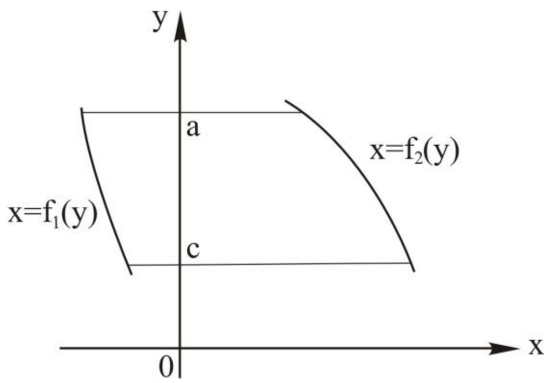

Рис. 6

Приклад 34. Знайти площу фігури, обмеженої параболою, яка задана рівнянням $x = y^2$ і прямою $x + y = 2$.

Розв'язання 1. Побудуємо схематичний рисунок заданої фігури (рис. 7), де видно, що фігура знизу обмежена дугою параболи *OC,* зверху – дугою параболи *OA* і відрізком прямої *AC*. Через точку *A* проведемо пряму, паралельну осі *OY,* і розділимо фігуру на дві частини. Тоді $S = S_I + S_{II}$.

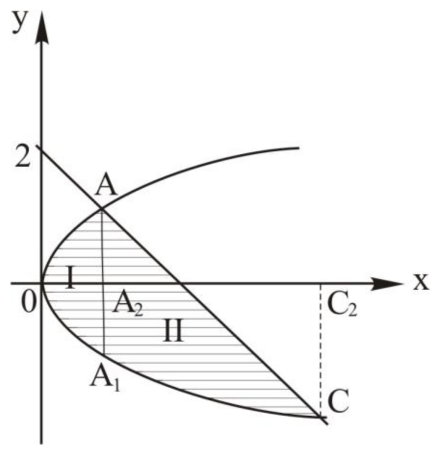

Рис. 7

Проекція фігури I на вісь *OX* – це відрізок OA_2, проекція фігури II – відрізок A_2C_2.

Абсциса точки *O* $x = 0$. Для знаходження абсцис точок перетину параболи і прямої необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо два значення змінної x: $x_1 = 1$ і $x_2 = 4$, що відповідають двом точкам перетину прямої і параболи *A* і *C*, тобто є абсцисами точок A_2 і C_2. Отже, інтервали інтегрування для обчислення площ: для S_I – це $[0;1]$ і для S_{II} – це $[1;4]$. Фігура I знизу обмежена півпараболою $y = -\sqrt{x}$, зверху – півпараболою $y = \sqrt{x}$. Отже,

$$S_I = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))dx = \int_0^1 2\sqrt{x}dx = 2\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Фігура II знизу обмежена півпараболою $y=-\sqrt{x}$, зверху прямою $x+y=2$ або $y=2-x$, тому

$$S_{II}=\int_1^4(2-x-(-\sqrt{x}))dx=\int_1^4(2-x+\sqrt{x})dx=$$

$$=(2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}})\Bigg|_1^4=8-8+\frac{16}{3}-(2-\frac{1}{2}+\frac{2}{3})=\frac{21}{6}=\frac{19}{6}.$$

$$S=S_I+S_{II}=\frac{4}{3}+\frac{19}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.$$

Відповідь: $S=\dfrac{9}{2}$ кв. од.

Розв'язання 2. Задану фігуру можна проєктувати на вісь OY (рис. 8) і використовувати формули (9). Проекцією фігури на вісь OY є відрізок C_1A_1.

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} y^2=x, \\ x+y=2, \end{cases}$$

знаходимо ординати точок A_1 і C_1: $y_1=1,\ y_2=-2$.

Зліва фігура обмежена параболою $x=y^2$, справа – прямою $x+y=2$ або $x=2-y$. Маємо

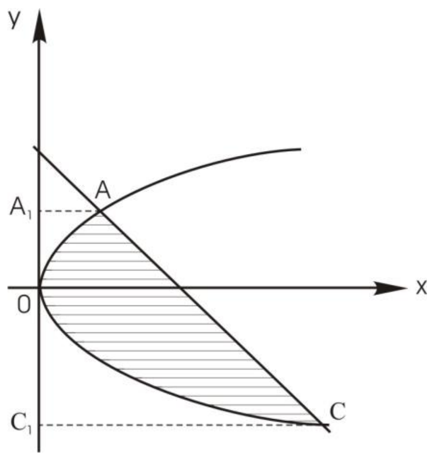

Рис. 8

$$S=\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy=(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3})\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}\text{ кв. од.}$$

Відповідь: $\dfrac{9}{2}$ кв. од.

Зауваження. Для розв'язання задачі запропоновані два способи. Оскільки розв'язання 2 потребує обчислення одного інтеграла, а розв'язання 1 – двох інтегралів, то, очевидно, розв'язання 2 є раціональнішим. Під час розв’язання аналогічних задач доцільно обирати шлях, який приводить до меншої кількості інтегралів або до простіших інтегралів.

Площа фігури, обмеженої кривою, заданою параметрично

Якщо крива, що обмежує криволінійну трапецію (див. рис. 1), задана параметрично $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ і $x=a$ при $t=t_0$ і $x=b$ при $t=T$, то площу криволінійної трапеції можна обчислити за формулою (7), зробивши у визначеному інтегралі заміну змінної: $y=f(x)=\psi(t)$, $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$,

$$S=\int_{t_0}^{T}\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Приклад 35. Обчислити площу фігури, яка обмежена еліпсом

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t.$$

Розв’язання. Побудуємо схематичний рисунок. Фігура симетрична відносно осей *OX* та *OY* і розбита ними на чотири рівні за площею частини (рис. 9), тому можна знайти площу однієї з частин і помножити її на 4:

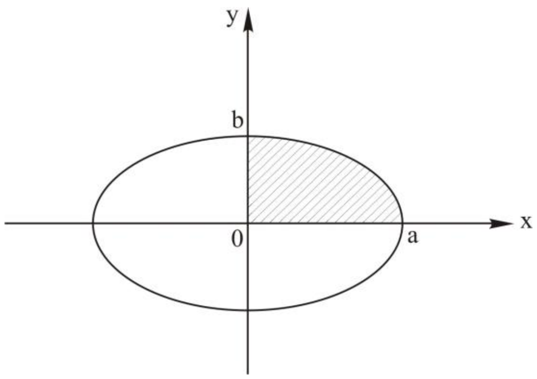

Рис. 9

$$S=4S_1 \text{ або } S=4\int_0^a ydx,$$

де за умовою задачі $y=b\sin t$, $dx=-a\sin t dt$. Знайдемо границі інтегрування. Складемо таблицю (значення в табл. отримані за формулою $x=a\cos\varphi$):

x	t
0	$\frac{\pi}{2}$
a	0

Зробивши заміну у визначеному інтегралі, дістанемо

$$S = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= 2ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

Відповідь: $S = \pi ab$.

Площа криволінійного сектора у полярних координатах

Якщо фігура являє собою криволінійний сектор (рис. 10), що обмежений двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ та неперервною кривою, заданою рівнянням в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, то площа фігури обчислюється за формулою:

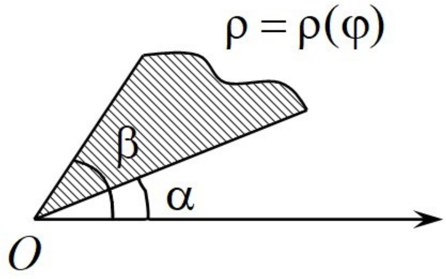

Рис. 10

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (10)$$

Приклад 36. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою

$$\rho = a\sin 3\varphi.$$

Розв'язання. Побудуємо схематичний рисунок. Знайдемо період функції $\rho = a\sin 3\varphi$. За означенням період T − це найменше число, для якого має місце тотожність

$$a\sin 3(\varphi + T) = a\sin 3\varphi,\ \sin 3(\varphi + T) = \sin 3\varphi \Rightarrow$$

$$\sin 3\varphi \cdot \cos 3T + \cos 3\varphi \cdot \sin 3T = \sin 3\varphi.$$

Звідси випливає, що $\cos 3T = 1$, $\sin 3T = 0$. Отже, $3T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{3}$.

Таким чином, криву достатньо розглядати лише в секторі $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$.

Отже, $3T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{3}$. Таким чином, криву достатньо розглядати лише в секторі $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$. Оскільки полярний радіус ρ за означенням має бути додатним, то межі зміни кута φ слід обмежити інтервалом $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. На інтервалі, що залишився $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$, $\rho < 0$ точок даної кривої не буде.

У разі зміни кута φ від 0 до $\frac{\pi}{6}$ функція $\sin 3\varphi$ зростає від 0 до 1, а у разі зміни кута φ від $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{9}$ – спадає від 1 до 0.

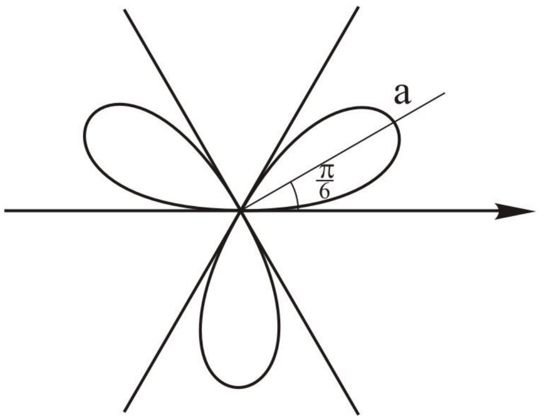

Рис. 11

Будуємо графік функції $\rho = a\sin 3\varphi$ для $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ в полярній системі координат. Оскільки період функції $\rho = a\sin 3\varphi$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, то в повному куті 2π будуть міститися три аналогічні петлі: друга петля буде на проміжку $\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le \pi$ і третя петля – на проміжку $\frac{4\pi}{3} \le \varphi \le \frac{5\pi}{3}$ (рис. 11).

За формулою (9) знаходимо площу фігури, обмеженої однією петлею

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}a^2\sin^2 3\varphi d\varphi=\frac{1}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}a^2(\varphi-\frac{1}{6}\sin 6\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{4}a^2\frac{\pi}{3}=\frac{\pi a^2}{12}.$$

Тоді загальна площа $S=3S_1=\dfrac{1}{4}a^2\pi$ кв. од.

4.2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Довжина дуги гладкої плоскої кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$ на відрізку $a\le x\le b$, обчислюється за формулою:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \qquad (11)$$

Якщо крива задана параметрично:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t_0\le t\le T,$$

то

$$L=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt. \qquad (12)$$

Якщо крива задана в полярній системі координат:

$$\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta,$$

то

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi. \qquad (13)$$

Приклад 37. Знайти довжину дуги кардіоїди, що задана рівнянням

$$\rho=a(1+\cos\varphi),\ a>0.$$

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок кардіоїди (рис. 12), де видно, що крива складається з двох симетричних частин, одна з яких *(AmO)* відповідає зміні кута φ від 0 до π, друга – (*O n A*) – від π

до 2π. Тому достатньо обчислити довжину половини дуги і подвоїти результат.

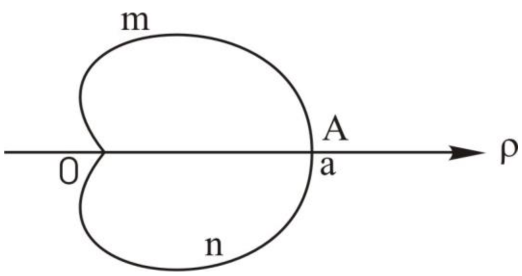

Рис. 12

Крива задана в полярній системі координат. Для розв'язання задачі використаємо формулу (13).

Спочатку знаходимо довжину дуги *(AmO)*, що описується у разі зміни кута φ від 0 до π:

$$L_{(AmO)}=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(a(1+\cos\varphi)\right)^2+(-a\sin\varphi)^2}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi.$$

Оскільки $\cos\frac{\varphi}{2}\ge 0$, коли $\varphi\in[0,\pi]$, то $\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\cos\frac{\varphi}{2}$ і

$$L_{(AmO)}=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=4a,$$

$$L=2L_{(AmO)}=8a.$$

Відповідь: $8a$ лін. од.

Приклад 38. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y^2=(x-p)^3$, що вирізана параболою $y^2=\frac{1}{2}p^2x$.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис. 13), де видно, що в задачі потрібно знайти довжину дуги BAB', що складається з двох симетричних частин, тому достатньо обчислити довжину дуги *AB* і подвоїти результат. Для знаходження меж інтегрування достатньо знайти абсцису точки *B*, оскільки абсциса точки *A* уже відома і рівна *p*. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = (x-p)^3 \\ y^2 = \frac{1}{2} p^2 x \end{cases} \Rightarrow (x-p)^3 = \frac{1}{2} p^2 x.$$

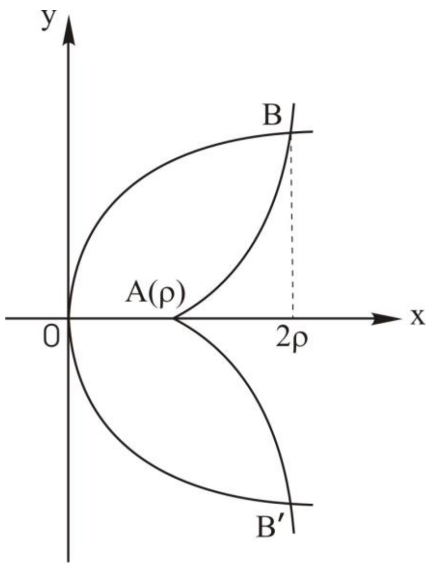

Рис. 13

Отримали кубічне рівняння, розв’язок якого знаходимо підбором: $x = 2p$.

Оскільки функцію можна записати рівнянням $y = f(x)$, то для розв’язання задачі використовується формула (11), де

$$a = p, \quad b = 2p, \quad f(x) = \sqrt{(x-p)^3},$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}}.$$

$$L = 2\int_p^{2p} \sqrt{1 + (\frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}})^2}\, dx = 2\int_p^{2p} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x - \frac{9}{4}p}\, dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}(1 - \frac{9}{4}p + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_p^{2p} = \frac{16}{27}(\sqrt{(1+\frac{9}{4}p)^3} - 1).$$

Відповідь: $\frac{16}{27}(\sqrt{(1+\frac{9}{4}p)^3} - 1)$ лін. од.

Зауваження 1. Якщо під час обчислення довжини дуги межі інтегрування відомі, будувати рисунок необов’язково.

Зауваження 2. У деяких випадках під час використання формули (11) доцільно як значення функції розглядати змінну *x*, і формула (11) матиме вигляд

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\, dy,$$

де дуга кривої задана рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$.

4.3. Знаходження об’єму тіла обертання та площі поверхні тіла обертання

Нехай задана криволінійна трапеція (рис. 14), що спирається на вісь OX і обмежена неперервною кривою $y = f(x)$. Обертаючи таку трапецію навколо осі OX, отримаємо тіло обертання, об’єм якого обчислюється за формулою

$$V_{OX} = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx. \qquad (14)$$

Якщо ж трапеція спирається на вісь OY (рис. 15) і обертається навколо осі OY, то об’єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_{OY} = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy \qquad (15)$$

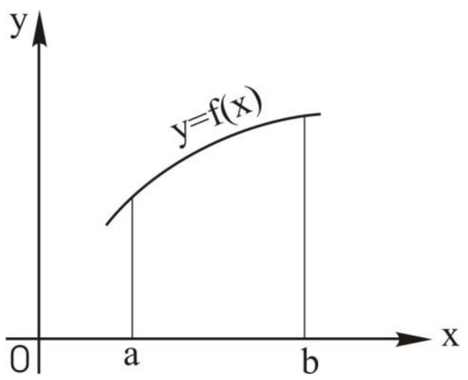

Рис. 14

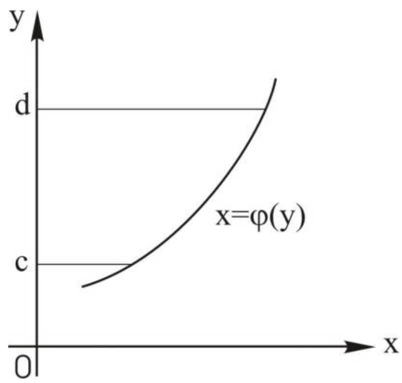

Рис. 15

Зауваження 1. Якщо крива, що обмежує трапецію, задається n аналітичними виразами, то задана трапеція розбивається на n трапецій. Тоді обчислюють об’єм тіл, отриманих обертанням кожної з n трапецій, і результати сумують.

Зауваження 2. Якщо тіло утворюється обертанням навколо осі Ox фігури $AmBn$, що не є криволінійною трапецією (рис. 16), то фігуру розбивають на дві криволінійні трапеції A_1AmBB_1 та A_1AnBB_1 і знаходять об’єми тіл обертання кожної з побудованих трапецій. Тоді об’єм тіла обертання фігури $AmBn$ навколо осі Ox.

$$V = V_{об.A_1AmBB_1} - V_{об.A_1AnBB_1}.$$

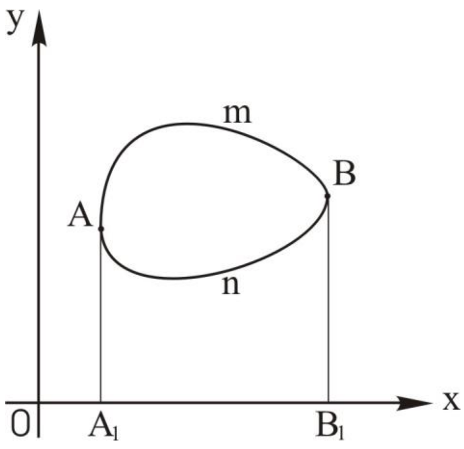

Рис. 16

У випадку параметрично заданої кривої

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

слід у формулах (14), (15) покласти

$$y = y(t),\ dx = x'(t)dt,\ x = x(t),\ dy = y'(t)dt$$

і знайти відповідні межі зміни змінної t, що відповідають кінцям дуги кривої.

$$V_{OX} = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt, \qquad V_{OY} = \pi\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)y'(t)dt.$$

Схема розв'язання задачі обчислення об'єму тіла обертання така:

1) зробити схематичний рисунок фігури, об'єм тіла обертання якої потрібно знайти;

2) знайти межі інтегрування;

3) записати, а потім і обчислити визначений інтеграл.

Приклад 39. Визначити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої півеліпсом $y = 3\sqrt{1-x^2}$, півпараболою $x = \sqrt{1-y}$ і віссю OY.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис. 17).

Рівняння $y = 3\sqrt{1-x^2}$ задає верхню половину еліпса $\frac{y^2}{9} + x^2 = 1$ з вершинами $B(0;3)$ та $C(1;0)$.

Рівняння $x = \sqrt{1-y}$ задає праву вітку параболи $x^2 = 1-y$ з вершиною в точці $A(0;1)$, що перетинає вісь OX у точках з координатами $(1;0)$, $(-1;0)$.

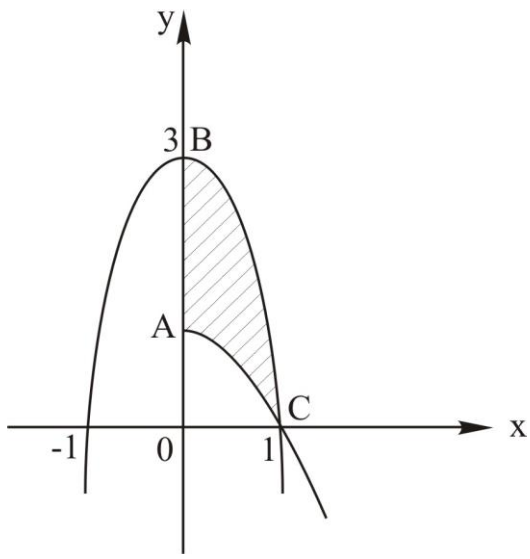

Рис. 17

Навколо осі OX обертається заштрихована фігура ABC. Об'єм тіла обертання знайдемо як різницю об'ємів, отриманих від обертання трапецій OBC та OAC. Використаємо формулу (14):

$$V = \pi\int_0^1 9(1-x^2)dx - \pi\int_0^1 (1-x^2)^2 dx =$$

$$= \pi(9x - 3x^3)\Big|_0^1 - (x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5})\Big|_0^1 = 5\frac{7}{15}\pi$$

$$= \pi(9-3) - \pi(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = 5\frac{7}{15} \text{ куб. од.}$$

Відповідь: $5\frac{7}{15}\pi$ куб. од.

Якщо навколо осі прямокутної декартової системи координат обертається дуга кривої *AB* (рис. 18, 19), то утворюється поверхня обертання, площа *P* якої обчислюється за такими формулами:

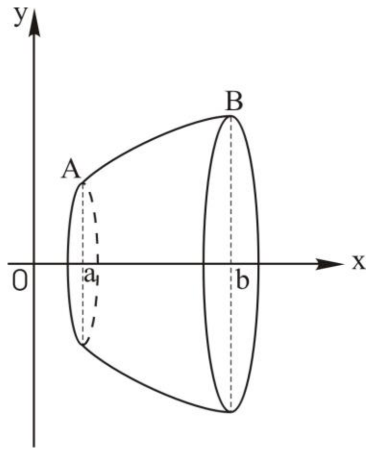

Рис. 18

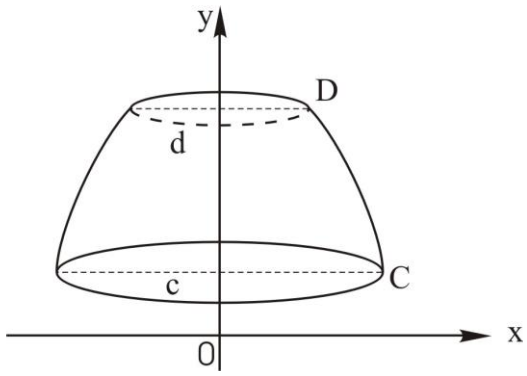

Рис. 19

а) якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$ і обертається навколо осі *OX*, $a \le x \le b$:

$$P_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx; \tag{16}$$

б) якщо крива задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le T$ і обертається навколо осі OX:

$$P_{OX} = 2\pi \int_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt; \tag{17}$$

в) якщо крива задана рівнянням $x = \varphi(y)$ і обертається навколо осі *OY* (рис. 19):

$$P_{Oy} = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy; \tag{18}$$

г) якщо крива задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le T$ і обертається навколо осі *OY*:

$$P_{OY} = 2\pi \int_{t_0}^{T} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \qquad (19)$$

Приклад 40. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі *OX*. Параметричні рівняння астроїди:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

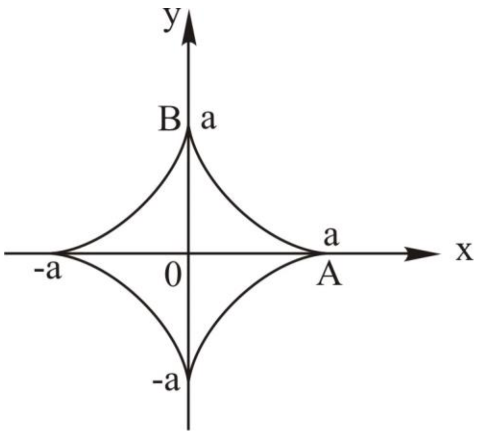

Рис. 20

Розв'язання. Астроїда зображена на рис. 20. Фігура симетрична відносно осей координат, тому для розв'язання задачі достатньо обчислити площу поверхні, отриманої обертанням дуги *AB*, розміщеної в першій четверті, і результат помножити на 2.

Розв'язання 1. Для обчислення площі поверхні обертання астроїди навколо осі *OX* використаємо параметричне задання кривої, а отже, формулу (17). Оскільки дуга *AB* описується при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \sqrt{(-3a\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3a\sin^3 t \cdot \cos t)^2}\, dt =$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\cos t \cdot \sin t dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, d(\sin t) =$$

$$= 12\pi a^2 \left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

Отже, шукана площа $P = \dfrac{12}{5}\pi a^2$ кв. од.

Розв'язання 2. Для обчислення площі використаємо рівняння астроїди у декартових координатах, а отже, формулу (16). З рівняння астроїди.

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

За формулою (16)

$$P_{OX}=2\cdot 2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4\pi\int_0^a \frac{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=$$

$$=-\frac{4\pi a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}\frac{5}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a=\frac{12}{5}\pi a^2 \quad \text{(кв. од.)}$$

Відповідь: $\frac{12}{5}\pi a^2$ кв. од.

Зауваження. Порівнюючи два наведені розв'язання, бачимо, що перший спосіб приводить до простіших обчислень. У деяких випадках перехід до параметричної форми задання кривої може значно спростити розв'язання задачі.

Розділ 5. Застосування інтегралів для розв'язування задач механіки

Приклад 41. Обчислити силу тиску рідини на вертикально опущену в неї пластину (див. рис. 20), якщо рівняння бокових ліній пластини $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, густина рідини ρ, прискорення вільного падіння $g = 10$ м/с^2.

Розв'язання. Відомо, що тиск рідини на глибині x рівний $\rho g x$. На глибині x виділяємо елемент площі

$$ds = (|\, f_1(x)\,| + |\, f_2(x)\,|)dx\,.$$

Сила тиску рідини на виділену смугу

$$dF = \rho g x \cdot ds = \rho g x(|\, f_1(x)\,| + |\, f_2(x)\,|)dx\,.$$

Сила тиску рідини на всю пластину

$$F = \int_0^h \rho g x(|\, f_1(x)\,| + |\, f_2(x)\,|)dx. \qquad (20)$$

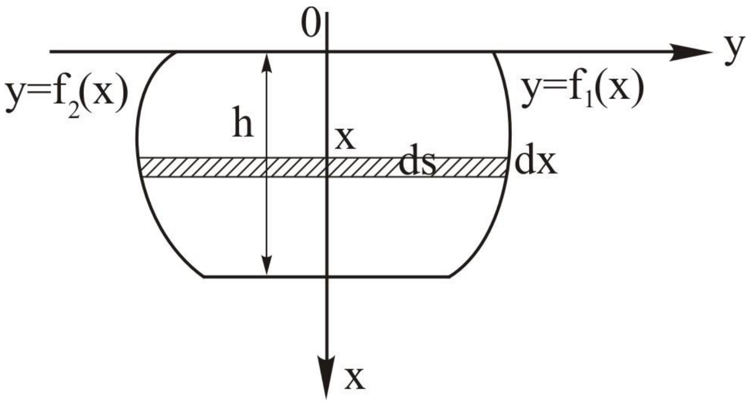

Рис. 21

Приклад 42. Обчислити силу, з якою вода тисне на пластину; переріз пластини являє собою рівнобедрений трикутник, висота якого рівна h, а основа – a, причому основа трикутника співпадає з поверхнею води.

Розв’язання. Обираємо систему координат так, щоб вісь OX збігалася з висотою трикутника, а вісь OY – з основою (рис. 22). Оскільки ΔABC симетричний відносно осі OX, то достатньо знайти силу тиску води на ΔCOB і результат подвоїти. Щоб використати формулу (20), потрібно знайти рівняння бокових сторін трикутника. Точка B має координати $B(0;\frac{a}{2})$, точка $C(h;0)$. Рівняння прямої BC:

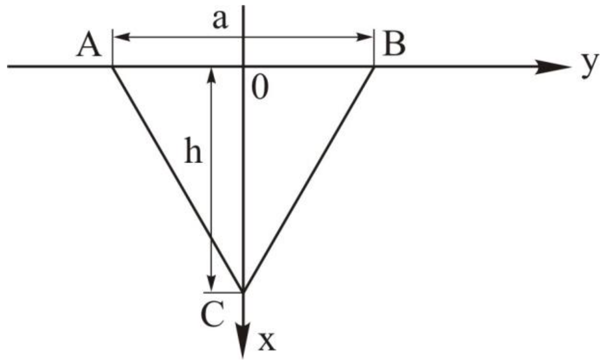

Рис. 22

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{a/2}=1 \text{ або } y=\frac{a(h-x)}{2h}.$$

За формулою (19):

$$F=2\int_0^h \rho g x\frac{a(h-x)}{2h}dx=\frac{\rho g a}{2h}\cdot 2\int_0^h x(h-x)dx=$$

$$=\frac{\rho g a}{h}\left(\frac{hx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h=\frac{\rho g a}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{\rho g a h^2}{6}.$$

Відповідь: $F=\dfrac{\rho g a h^2}{6}$ од. сили.

Приклад 43. Обчислити роботу, яку потрібно витратити для побудови піраміди з квадратною основою, якщо висота піраміди h, сторона основи a, питома вага будівельного матеріалу γ.

Розв'язання. Розмістимо осі координат як показано на рис. 23. Для підйому на висоту x будівельного матеріалу об'ємом dv – витрачається робота $dA = xd\rho$, де $d\rho$ − вага об'єму dv, рівна γdv. Отже, $dA = x\gamma dv$.

Оскільки об'єм dv (рис. 23) має малу товщину dx, то можна вважати, що він являє собою прямокутний паралелепіпед з квадратною основою і висотою dx. Звідси $dv = Sdx$.

Знайдемо площу S основи прямокутного паралелепіпеда. З геометрії відомо, що

$$\frac{S}{S_{OCH}} = \frac{h_x^2}{h^2}.$$

Звідси

$$S = S_{OCH} \cdot \frac{h_x^2}{h^2} = a^2 \frac{(h-x)^2}{h^2}$$ і

$$dv = \frac{a^2}{h^2}(h-x)^2 dx;$$

$$dA = x\gamma \frac{a^2}{h^2}(h-x)^2 dx.$$

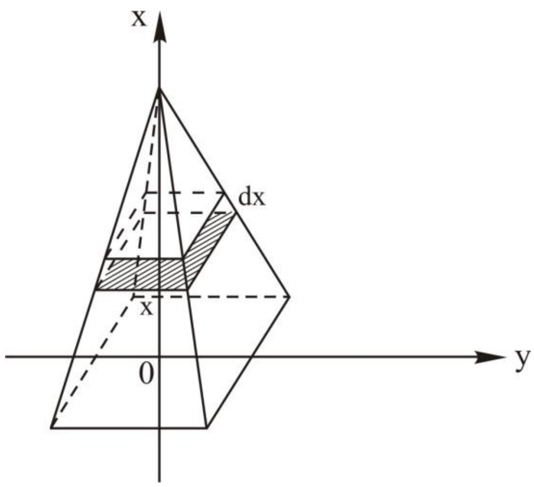

Рис. 23

Повна робота

$$A = \int_0^h x\gamma \frac{a^2}{h^2}(h-x)^2 dx = \gamma \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x(h-x)^2 dx =$$

$$= \gamma \frac{a^2}{h^2}\int_0^h (h^2 x - 2hx^2 + x^3)dx = \gamma \frac{a^2}{h^2}\left(h^2 \frac{x^2}{2} - 2h\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^h =$$

$$= \gamma \frac{a^2}{h^2}\left(\frac{h^4}{3} - 2\frac{h^4}{4} + \frac{h^4}{4}\right) = \gamma \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{h^4}{12} = \frac{1}{12}\gamma a^2 h^2.$$

Відповідь: $A = \frac{1}{12}\gamma a^2 h^2$ од. роб.

Індивідуальні завдання

Задача 1. Знайти інтеграл безпосереднім інтегруванням.

1. $\int \frac{x^2-2}{x^2-1}dx$.	2. $\int \frac{x^3-8}{x-2}dx$.	3. $\int \frac{x^2+2x-7}{\sqrt{x}}dx$.
4. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-x}dx$.	5. $\int \frac{x^2-2^x x^3+x}{x^3}dx$.	6. $\int \frac{x^2+2x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.
7. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$.	8. $\int \frac{x-3^x x^3+x^2}{x^3}dx$.	9. $\int \frac{x^2-3x+1}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.
10. $\int \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$.	11. $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}dx$.	12. $\int \frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{5x}}dx$.
13. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.	14. $\int \frac{x-3e^x\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.	15. $\int \frac{x^3-5x+4}{\sqrt[5]{x}}dx$.
16. $\int \frac{x^3-3\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}}dx$.	17. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$.	18. $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{1+\sqrt{x}}dx$.
19. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.	20. $\int \frac{x^2\sqrt{x}+3}{\sqrt[3]{x}}dx$.	21. $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$.
22. $\int \sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+x\right)dx$.	23. $\int \frac{\sqrt{x}+x^3e^x+x^2}{x^3}dx$.	24. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$.
25. $\int \frac{3x^2+x^4}{x^3}dx$.	26. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$.	27. $\int \frac{\sqrt{x}5^x-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$.
28. $\int \frac{4x^2}{4x^2+x^4}dx$.	29. $\int \frac{(1+x)^2}{x^3+x^2}dx$.	30. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$.

Задача 2. Знайти невизначений інтеграл за допомогою методу введення функції під знак диференціала.

1. $\int (3x+5)^7 dx$.	2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^5}}$.	3. $\int \sqrt[3]{2x-1}dx$.
4. $\int \frac{dx}{4+3x}$.	5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+5x)^2}}$.	6. $\int e^{-x^2} xdx$.
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$.	8. $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$.	9. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$.
10. $\int \sin\left(\frac{x}{3}\right)dx$.	11. $\int \cos(2x+1)\, dx$	12. $\int tg(2-3x)\, dx$.
13. $\int ctg\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$.	14. $\int e^{\frac{x}{2}+5} dx$.	15. $\int e^{\cos x} \sin xdx$.
16. $\int e^{2x+3}dx$.	17. $\int 3^{\frac{x}{4}} dx$.	18. $\int 5^{1-2x} dx$.
19. $\int e^{-3x+1}dx$.	20. $\int \frac{dx}{\sin^2(4x+1)}$.	21. $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-1\right)}$.
22. $\int \frac{dx}{\sin^2(4x-1)}$.	23. $\int \sin(4x+5)dx$.	24. $\int \cos\,(1-\frac{x}{3})\, dx$.
25. $\int \sin^2 x \cos xdx$.	26. $\int \frac{x}{x^2+2}dx$.	27. $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$.
28. $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$.	29. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$.	30. $\int \sqrt{\cos x+5}\sin xdx$.

Задача 3. Знайти невизначений інтеграл безпосереднім інтегруванням та за допомогою введення функції під знак диференціала.

1. $\int (x^{12} - \cos 6x - 3^{4x} + \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x^2+16})\, dx$.
2. $\int (x^{4} - \sin 5x + 2^{-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{5}{x^2+16})\, dx$.
3. $\int (x^{7} - \sin 3x - 5^{6x} + \frac{1}{x-1} + \sqrt[4]{x})\, dx$.
4. $\int (x^{15} + 3\sin 9x + 4^{2x} + \frac{1}{x+4} + \frac{2}{x^2+25})\, dx$.
5. $\int (x^{6} + 4\cos 4x - 7^{2x} + \frac{1}{x-9} + \sqrt[5]{x})\, dx$.
6. $\int (x^{9} + 3\sin 2x - 3^{4x} + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}})\, dx$.
7. $\int (x^{10} + 3\sin 9x - 4^{8x} + \frac{1}{x-5} + \frac{3}{\sqrt{9-x^2}})\, dx$.
8. $\int (x^{5} - \cos 8x + 3^{4x} + \frac{1}{x+5} + \frac{8}{x^2+4})\, dx$.
9. $\int (x^{15} - \sin 4x + 5^{3x} + \frac{1}{x+3} + \frac{2}{\sqrt{16-x^2}})\, dx$.
10. $\int (x^{7} + 3\sin 7x - 6^{3x} + \frac{1}{x-2} + \sqrt[3]{x})\, dx$.
11. $\int (x^{8} - \cos 3x + 8^{3x} + \frac{1}{x+10} - \frac{4}{x^2+26})\, dx$.
12. $\int (x^{11} - 2\sin 5x - 2^{-x} + \frac{1}{x+1} + \sqrt[5]{x+2})\, dx$.
13. $\int (x^{8} - \cos 3x + 8^{3x} + \frac{1}{x+10} - \frac{4}{x^2+36})\, dx$.
14. $\int (x^{9} + \sin 4x - 5^{2x} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x^2+9})\, dx$.

15. $\int (x^{16} - 22\cos 11x - 5^{2x} + \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2+25})\, dx$.
16. $\int (x^{10} + \sin 4x - 5^{2x} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{\cos^2 9x})\, dx$.
17. $\int (x^{11} + \cos 5x - 3^{10x} + \frac{1}{x-10} - \frac{3}{x^2+64})\, dx$.
18. $\int (x^{7} - \sin 8x - 2^{12x} + \frac{1}{x-14} - \frac{2}{\sqrt{9-x^2}})\, dx$.
19. $\int (x^{4} + \sin 7x - 4^{-3x} + \frac{2}{x+7} - \frac{1}{\cos^2 3x})\, dx$.
20. $\int (x^{8} - 4\cos 4x + 3^{10x} + \frac{1}{x-9} - \frac{2}{\sqrt{4-x^2}})\, dx$.
21. $\int (x^{12} + \cos 9x - 7^{2x} + \frac{1}{x-12} - \frac{1}{\cos^2 5x})\, dx$.
22. $\int (x^{14} + \sin 4x - 3^{-6x} - \frac{6}{x-16} + \frac{3}{x^2+100})\, dx$.
23. $\int (x^{9} + 3\sin 6x - 2^{5x} + \frac{1}{x-8} + \sqrt[8]{x})\, dx$.
24. $\int (x^{10} - 10\sin 5x - 2^{-5x} - \frac{7}{x-7} + \frac{1}{x^2+16})\, dx$.
25. $\int (x^{15} - 5\sin 9x + 5^{9x} + \frac{1}{x-6} - \frac{2}{\sqrt{36-x^2}})\, dx$.
26. $\int (x^{9} + 3\sin 6x - 2^{5x} + \frac{1}{x+5} + \sqrt[6]{x+1})\, dx$.
27. $\int (x^{10} + \cos 7x - 4^{-5x} + \frac{1}{x-8} - \frac{1}{\cos^2 8x})\, dx$.
28. $\int (x^{10} - 5\sin 5x + 4^{8x} + \frac{2}{x+7} + \frac{1}{x^2+25})\, dx$.
29. $\int (x^{12} + 3\sin 12x - 3^{6x} + \frac{1}{x+15} + \sqrt[3]{x+3})\, dx$.
30. $\int (x^{9} - 3\cos 8x + 4^{8x} + \frac{1}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{25-x^2}})\, dx$.

Задача 4. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної.

1. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$.	2. $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$.
3. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.	4. $\int \frac{\cos\left(3\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}dx$.
5. $\int \sqrt{x}\sin(\sqrt[3]{x}-3)\,dx$.	6. $\int \frac{xdx}{\cos^2(3x^2+\frac{1}{2})}$.
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$.	8. $\int \frac{e^{\sqrt{\sin x}}}{\sqrt{\sin x}}\cos x dx$.
9. $\int x^3\sin^2(x^4)\cos(x^4)\,dx$.	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}\arcsin\frac{x}{5}}$.
11. $\int \frac{dx}{(1+4x^2)\,arctg^2 x}$.	12. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3+\cos^2 x}}dx$.
13. $\int \frac{1-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.	14. $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}(tg^2\frac{x}{2}-9)}$.
15. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+4}dx$.	16. $\int \frac{3^{3x}}{3^{6x}-16}dx$.
17. $\int \frac{\sin 2xdx}{\cos^2 2x-5}$.	18. $\int \frac{x^2}{\sqrt{7+2x^3}}dx$.
19. $\int (3-2^{\frac{1}{x}})\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx$.	20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin^2 x+4}}$.
21. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(1+x\right)}dx$.	22. $\int \sqrt[3]{\cos 5x}\sin 5x\,dx$.

23. $\int \frac{2+tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$	24. $\int \frac{\cos\frac{1}{x}+4}{x^2}dx.$
25. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{(1+2\cos x)^5}}.$	26. $\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx.$
27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^6}}dx.$	28. $\int \frac{2x-x^3}{\sqrt{25+x4}}dx.$
29. $\int \frac{2arctg2x}{1+4x^2}dx.$	30. $\int \frac{\sqrt{tg2x}}{\cos^2 2x}dx.$

Задача 5. Знайти невизначений інтеграл за допомогою методу інтегрування частинами.

1. $\int x\ln(1+x^2)\,dx.$	2. $\int (x^2-2x+2)e^{-x}dx.$	3. $\int (2x+3)\,2^x dx.$
4. $\int (x^2+32)\sin 3xdx.$	5. $\int (x+1)\cos 5xdx.$	6. $\int (3x+5)\,e^{4x}dx.$
7. $\int (x^2-2x+2)\,e^{-x}dx$	8. $\int arctgxdx.$	9. $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx.$
10. $\int (x^2+1)\ln xdx.$	11. $\int (4x-3)e^{5x}dx.$	12. $\int x^2\sin 2x\,dx.$
13. $\int (2x-3)\cos x\,dx.$	14. $\int (x^2+3x)\sin 2xdx.$	15. $\int (x^2+2)\,3^x dx.$
16. $\int (2x-1)5^x dx.$	17. $\int x^2\cos 2x\,dx.$	18. $\int x\arcsin x\,dx.$
19. $\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx.$	20. $\int x\arccos 3x\,dx.$	21. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$
22. $\int x\cos^2 x\,dx.$	23. $\int x\sin^2 x\,dx.$	24. $\int e^{2x}(3x^2+1)dx.$
25. $\int (x^2+x)e^{-x}\,dx$	26. $\int (x+2)3^x\,dx.$	27. $\int (4-x)e^{-5x}\,dx.$
28. $\int \frac{xdx}{\sin^2 3x}.$	29. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$	30. $\int e^{-x}\sin xdx.$

Задача 6. Знайти невизначений інтеграл від раціонального дробу.

1. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx$.	2. $\int \frac{dx}{x^3-8}dx$.	3. $\int \frac{xdx}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}$.
4. $\int \frac{5-4x}{x^2-x-2}dx$.	5. $\int \frac{x^2-72}{x(x+4)(x-3)}dx$.	6. $\int \frac{dx}{x(x^2+16)}dx$.
7. $\int \frac{6+8x-x^2}{x(x^2+3x+2)}dx$.	8. $\int \frac{x^2-7x-6}{(x^2+4)(x-3)}dx$.	9. $\int \frac{x^2+6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx$.
10. $\int \frac{x}{x^3+8}dx$.	11. $\int \frac{x^3-7x^2-3}{(x^2+4)x^2}dx$.	12. $\int \frac{8x-15}{x(x^2-4x+5)}dx$.
13. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$.	14. $\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)(x^2+1)}$.	15. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$.
16. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}dx$.	17. $\int \frac{(x^3+4x^2+6)dx}{(x+1)^2(x^2+2)}$.	18. $\int \frac{(x^2-5x+9)dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.
19. $\int \frac{xdx}{(x+1)^2(x+2)}$.	20. $\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx$.	21. $\int \frac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.
22. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.	23. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$.	24. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)}$.
25. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.	26. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.	27. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$.
28. $\int \frac{dx}{(x-2)(x^2+1)}$.	29. $\int \frac{2x^2dx}{x^2-16}$.	30. $\int \frac{x-3}{x^4+4x^2}dx$.

Задача 7. Знайти невизначений інтеграл від ірраціональної функції.

1. $\int\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx.$	2. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$	3. $\int\frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}}dx.$
4. $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx.$	5. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}.$	6. $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+13}}dx.$
7. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1+4x^2}}dx.$	8. $\int\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx.$	9. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx.$
10. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}dx.$	11. $\int\frac{x^3}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}dx.$	12. $\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx.$
13. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx.$	14. $\int\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx.$	15. $\int\frac{x+4}{\sqrt{9-x^2+2x}}dx.$
16. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx.$	17. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$	18. $\int\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx.$
19. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx.$	20. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx.$	21. $\int\frac{dx}{x\sqrt{(1+x^2)^3}}.$
22. $\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$	23. $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}.$	24. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$
25. $\int\frac{2-5x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx.$	26. $\int\frac{dx}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x})}.$	27. $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x+1}}.$
28. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$	29. $\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}dx.$	30. $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx.$

Задача 8. Знайти невизначений інтеграл від раціональної функції від тригонометричних функцій.

1. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx.$	2. $\int \frac{dx}{5-\cos x}.$	3. $\int \sin^4 x \, dx.$
4. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$	5. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}.$	6. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}.$
7. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$	8. $\int \frac{\cos^3 x}{(\sin x + 1)^5} dx.$	9. $\int \frac{dx}{2\sin^3 x \cos x}.$
10. $\int \sin 3x \cos 4x \, dx.$	11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$	12. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$
13. $\int \sin 8x \cos 2x \, dx.$	14. $\int \sin^5 x \, dx.$	15. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$
16. $\int \sin 5x \cos 3x \, dx.$	17. $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}.$	18. $\int \cos^4 x \, dx.$
19. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$	20. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$	21. $\int \frac{\sin^3 x}{(1+\cos x)^3} dx.$
22. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$	23. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}.$	24. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$
25. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx.$	26. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$	27. $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x} dx.$
28. $\int \cos^4 2x \, dx.$	29. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$	30. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx.$

Задача 9. Обчислити визначений інтеграл за допомогою методу заміни змінної.

1. $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$.	2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.	3. $\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.
4. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+e^{-x}}dx$.	5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x+1}}$.	6. $\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.
7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x}$.	8. $\int\limits_0^{64} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx$.	9. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.
10. $\int\limits_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$.	11. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.	12. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+2}dx$.
13. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$.	14. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.	15. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.
16. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(9-x^2)^2}$.	17. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$.	18. $\int\limits_0^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$.
19. $\int\limits_{15}^{99} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+3}$.	20. $\int\limits_0^2 \sqrt{\left(4-x^2\right)^3}dx$.	21. $\int\limits_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.
22. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^3}}$.	23. $\int\limits_{27}^{125} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-2}$.	24. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^4}dx$.
25. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.	26. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.	27. $\int\limits_4^9 \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}+1}$.
28. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.	29. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{5\cos^2 x-1}$.	30. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Задача 10. Обчислити визначений інтеграл за допомогою методу інтегрування частинами.

1. $\int\limits_{0}^{1/2} x\arcsin 2x\,dx$.	2. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} arctg 3x\,dx$.	3. $\int\limits_{0}^{0{,}5} \arcsin x\,dx$.
4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 3x\,dx$.	5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos\frac{x}{2}\,dx$.	6. $\int\limits_{1}^{2} (3x+2)\ln(x+3)\,dx$.
7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x\,dx$.	8. $\int\limits_{-1}^{1} \arccos\frac{x}{2}\,dx$.	9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\sin 3x\,dx$.
10. $\int\limits_{1}^{e^4} \sqrt{x}\ln\frac{x}{16}\,dx$.	11. $\int\limits_{1}^{e} \sin(\ln x)\,dx$.	12. $\int\limits_{0}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.
13. $\int\limits_{-1}^{0} (2x+3)e^{-x}\,dx$.	14. $\int\limits_{1}^{\pi} (\pi-x)\sin x\,dx$.	15. $\int\limits_{-2}^{2} (1-x)\sin \pi x\,dx$.
16. $\int\limits_{0}^{1} \ln(x+1)\,dx$.	17. $\int\limits_{2}^{3} \ln(x-1)\,dx$.	18. $\int\limits_{1}^{2} x\log_2 x\,dx$.
19. $\int\limits_{0}^{2\pi} x\sin 2x\,dx$.	20. $\int\limits_{0}^{1} (x+1)e^{-x}\,dx$.	21. $\int\limits_{0}^{\ln 2} xe^{-2x}\,dx$.
22. $\int\limits_{1}^{2} x\ln(5x+1)\,dx$.	23. $\int\limits_{0}^{\pi} e^{2x}\cos^2 x\,dx$.	24. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos\frac{x}{3}\,dx$.
25. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\,arctg\frac{x}{3}\,dx$.	26. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\cos 2x\,dx$.	27. $\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.
28. $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx$.	29. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^2}\,dx$.	30. $\int\limits_{0}^{2} \ln(\sqrt{1+x^2}-x)\,dx$.

Задача 11. Обчислити невласний інтеграл першого роду з нескінченними границями інтегрування.

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.	2. $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.	3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2-3x+4}$.
4. $\int\limits_{\frac{5}{8}}^{\infty} \frac{dx}{4x^2-5x+2}$.	5. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x}}$.	6. $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(1+x)^3}}$.
7. $\int\limits_1^{\infty} \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.	8. $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$.	9. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^3}$.
10. $\int\limits_2^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{\frac{x}{2}}}$.	11. $\int\limits_5^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.	12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{2dx}{2x^2+17}$.
13. $\int\limits_{-\infty}^{2} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}dx$.	14. $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}}$.	15. $\int\limits_1^{\infty} \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx$.
16. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln^8 x}}$.	17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{5+2x+x^2}dx$.	18. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{4dx}{x^2-7x+12}$.
19. $\int\limits_1^{\infty} \frac{3dx}{x+x^3}$.	20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$.	21. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.
22. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.	23. $\int\limits_0^{\infty} x\sin 3x dx$.	24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$.
25. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx$.	26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{1+2x}}$.	27. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$.
28. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.	29. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.	30. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$.

Задача 12. Обчислити невласний інтеграл 2-го роду від розривної функції.

1. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^4}$.	2. $\int\limits_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$.	3. $\int\limits_1^3 \frac{2xdx}{(x-3)^5}$.
4. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}}$.	5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$.	6. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$.
7. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.	8. $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.	9. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.
10. $\int\limits_{\frac{3}{2}}^3 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.	11. $\int\limits_1^3 \frac{3dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.	12. $\int\limits_0^4 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$.
13. $\int\limits_0^2 \frac{x^5dx}{\sqrt{4-x^2}}$.	14. $\int\limits_{-1}^0 \frac{5dx}{x^3-x^2}$.	15. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$.
16. $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{4-x^2}$.	17. $\int\limits_2^3 \frac{4xdx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$.	18. $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.
19. $\int\limits_0^3 \sqrt{\frac{x^2}{9-x^2}}dx$.	20. $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.	21. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$.
22. $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$.	23. $\int\limits_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{3-e^{2x}}}$.	24. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$.
25. $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.	26. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{2x\sqrt{1-x}}$.	27. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.
28. $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$.	29. $\int\limits_5^6 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-25}}$.	30. $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

Задача 13. Обчислити площі фігур, обмежених вказаними кривими.

1.	а) $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$;	б) $\rho=4\cos 3\varphi$, $\rho=2\ (\rho\geq 2)$;	в) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t. \end{cases}$
2.	а) $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$;	б) $\rho=4\cos 4\varphi$;	в) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \\ x=1\ (x\geq 1). \end{cases}$
3.	а) $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$;	б) $\rho=\cos 2\varphi$;	в) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ y=0. \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{3\pi}{2}$.
4.	а) $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0,\ x=0$, $x=1$;	б) $\rho=\sin 6\varphi$;	в) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \\ y=4\ (y\geq 4). \end{cases}$
5.	а) $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$;	б) $\rho=\sin\varphi$, $\varphi=\frac{\pi}{4}\ \left(\varphi\geq\frac{\pi}{4}\right)$;	в) $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t. \end{cases}$
6.	а) $x=\sqrt{e^y-1}$, $x=0$, $y=\ln 2$;	б) $\rho=2\cos\varphi$, $\rho=3\cos\varphi$;	в) $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \\ y=1\ (y\geq 1), \end{cases}$ $0<x<2\pi$.
7.	а) $x=(y-2)^3$, $x=4y-8$;	б) $\rho=\cos\varphi$, $\rho=2\cos\varphi$;	в) $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \\ x=1\ (x\geq 1). \end{cases}$

8.	а) $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, $y=0,\ x=1;$	б) $\rho=5\sin\varphi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}\ \left(\varphi\geq\dfrac{\pi}{3}\right).$	в) $\begin{cases} x=32\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \\ x=4\ \ (x\geq 4). \end{cases}$
9.	а) $x=4-y^2$, $x=y^2-2y;$	б) $\rho=1+\sqrt{2}\cos\varphi$, $\rho=2\ \ (\rho\geq 2);$	в) $\begin{cases} x=3\cos\ t, \\ y=8\sin\ t, \end{cases}$ $y=4\ (y\geq 4).$
10.	а) $y^2=x-1$, $y=(x-1)^2;$	б) $\rho=2\sin 4\varphi;$	в) $\begin{cases} x=9\cos t, \\ y=4\sin t, \\ y=2\ \ (y\geq 2). \end{cases}$
11.	а) $x=\sqrt{4-y^2}$, $x=0,\ \ y=0,$ $y=1;$	б) $\rho=2\cos 6\varphi;$	в) $\begin{cases} x=6\,(t-\sin t), \\ y=6\,(1-\cos t), \\ y=0,\ 2\pi\leq t\leq 5\pi. \end{cases}$
12.	а) $y=\dfrac{2a^3}{a^3+x^2}$, $y=1;$	б) $\rho=1+\sqrt{2}\sin\varphi;$	в) $\begin{cases} x=8\,(t-\sin t), \\ y=8\,(1-\cos t), \\ y=12,\ y\geq 12, \end{cases}$ $0\leq t\leq 16\pi.$
13.	а) $y=\lvert\ln x\rvert$, $y=10;$	б) $\rho=3\sin\varphi$, $\rho=5\sin\varphi;$	в) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3. \end{cases}$
14.	а) $y=5x^3+x$, $y=8,\ \ x=\pm 1;$	б) $\rho=\dfrac{5}{2}\sin\varphi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}\ \left(\varphi\leq\dfrac{\pi}{4}\right);$	в) $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \\ x=3\sqrt{3},(x\geq 3\sqrt{3}). \end{cases}$
15.	а) $x=x^2+y^2$, $x+2y=1;$	б) $\rho=4\cos 4\varphi;$	в) $\begin{cases} x=2\cos\ t, \\ y=3\sin\ t, \\ x=-1,\ \ x=1, \\ -1\leq x\leq 1. \end{cases}$

16.	а) $x^2+y^2=8x$, $y=2$;	б) $\rho=1+\cos\varphi$, $\rho=1(\rho\ge 1)$.	в) $\begin{cases} x=10(t-\sin t), \\ y=10(1-\cos t), \\ y=15, \\ 0\le x\le 6\pi\ \ y\ge 15. \end{cases}$
17.	а) $y^2=ax^3$, $y=0,\ x=a$, $a>0$;	б) $\rho=1-\cos\varphi$, $\rho=1\,(\rho\ge 1)$;	в) $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \\ x=2\ \ (x\ge 2). \end{cases}$
18.	а) $y=x^2e^{-x}$, $y=e^{-x}$;	б) $\rho=1+\sin\varphi$, $\rho=1(\rho\ge 1)$;	в) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=3\sqrt{2}\sin t, \\ y=3\ \ (y\ge 3). \end{cases}$
19.	а) $a^2y=8x^2$, $x=a,\ \ y=0$;	б) $\rho=1+\sin\varphi$, $\rho=\frac{1}{2}\left(\rho\ge\frac{1}{2}\right)$;	в) $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \\ x=3\sqrt{3}\ (x\ge 3\sqrt{3}). \end{cases}$
20.	а) $2y=3\sqrt{4-x^2}$, $2y=4-x^2$;	б) $\rho=1+\cos\varphi$, $\rho=\frac{3}{2}\left(\rho\le\frac{3}{2}\right)$;	в) $\begin{cases} x=3\,(t-\sin t), \\ y=3\,(1-\cos t), \\ y=3,\ 0\le x\le 6\pi, \\ y\ge 3. \end{cases}$
21.	а) $y=3\sqrt{1-x^2}$, $x=\sqrt{1-y},\ x=0$;	б) $\rho=1+\cos\varphi$, $\rho=1(\rho\ge 1)$;	в) $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \\ y=0, y=6, \\ 0\le x\le 2\pi, \\ 0\le y\le 6. \end{cases}$
22.	а) $2y=-3\sqrt{4-x^2}$, $4y=4-x^2$;	б) $\rho=2\cos 2\varphi$, $\rho=1(\rho\ge 1)$;	в) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \\ x=2\ \ (x\ge 2). \end{cases}$

23.	а) $y=\dfrac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$;	б) $\rho=4\sin 2\varphi$, $\rho=2\left(\rho\ge 2\right)$;	в) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \\ y=2,\ y=3, \\ 0\le x\le 4\pi, \\ 2\le y\le 3. \end{cases}$
24.	а) $y=\sqrt{(x-2)^3}$, $y=0,\ x=6$;	б) $\rho=\sqrt{3}\cos\varphi$, $\rho=\sin\varphi$;	в) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=5\sqrt{2}\sin t, \\ y=-5\ (y\ge -5). \end{cases}$
25.	а) $y^2=x(1-x)$, $y^2=\dfrac{1}{2}-x$;	б) $\rho=\cos\varphi+\sin\varphi$;	в) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}(6-t); \\ y=\dfrac{t^2}{8}(6-t). \end{cases}$
26.	а) $y=-\sqrt{4-x^2}$, $x=0,\ y=0$, $x=1$;	б) $\rho=\cos^2\varphi$;	в) $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \\ y=6, \\ 0\le x\le 4\pi,\ y\ge 6. \end{cases}$
27.	а) $y=(x+2)^2$, $y=x+2$;	б) $\rho=\sin^2\varphi$;	в) $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \\ y=1, y=3\sqrt{3}, \\ 1\le y\le 3\sqrt{3}. \end{cases}$
28.	а) $x=4-(y+1)^2$, $x=y^2+2y-3$;	б) $\rho=4\sin 2\varphi$, $\rho=2\left(\rho\ge 2\right)$.	в) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \\ y=-4\ (y\le -4). \end{cases}$

29.	а) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$;	б) $\rho=2-\cos 2\varphi$;	в) $\begin{cases} x=8(t-\sin t), \\ y=8(1-\cos t), \\ y=4, y=12, \\ 0\le x\le 2\pi, \\ 4\le y\le 12. \end{cases}$
30.	а) $x=4-(y-1)^2$, $x=y^2-4y+3$;	б) $\rho=1-\cos\varphi$, $\rho=1(\rho\le 1)$;	в) $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \\ x=-1\ (x\le -1). \end{cases}$

Задача 14. Обчислити довжину дуги заданої плоскої кривої.

1. а) $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$;	б) $\rho=2\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$;
в) $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases}\quad 0\le t\le\pi.$	
2. а) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 2$;	б) $\rho=3e^{\frac{\varphi}{3}},\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;
в) $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \end{cases}\quad \frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{4}.$	
3. а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$;	б) $\rho=4(1+\sin\varphi),\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$;
в) $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$	

<table>
<tr><td>4 а) $y=\ln\frac{5}{2x}$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$;</td><td>б) $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">в) $\begin{cases} x=8(\cos t+t\sin t),\\ y=8(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{4}$.</td></tr>
<tr><td>5. а) $y=-\ln\cos x$,
$0\le x\le\frac{\pi}{6}$;</td><td>б) $\rho=5(1-\cos\varphi)$, $-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le 0$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">в) $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t),\\ y=4(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{4}$.</td></tr>
<tr><td>6. а) $y=2+\sqrt{x-x^2}$,
$\frac{3}{4}\ge x\ge\frac{1}{4}$;</td><td>б) $\rho=1-\sin\varphi$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">в) $\begin{cases} x=e^{2t}\sin t,\\ y=e^{2t}\cos t,\end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{4}$.</td></tr>
<tr><td>7. а) $y=e^{x}+6$,
$\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$;</td><td>б) $\rho=5e^{\frac{5\varphi}{12}}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">в) $\begin{cases} x=2\cos t,\\ y=6\sin t,\end{cases}$ $0\le t\le\frac{2\pi}{3}$.</td></tr>
<tr><td>8. а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$;</td><td>б) $\rho=5(1-\cos\varphi)$;</td></tr>
<tr><td colspan="2">в) $\begin{cases} x=e^{t}\cos t,\\ y=e^{t}\sin t,\end{cases}$ $\frac{\pi}{4}\le t\le\pi$.</td></tr>
<tr><td>9. а) $y=\ln(x^2-1)$,
$2\le x\le 3$;</td><td>б) $\rho=8\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$;</td></tr>
</table>

в) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$	
10. а) $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le \dfrac{1}{4}$;	б) $\rho = 3(1 + \sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$;
в) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 2\sin^2 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$	
11. а) $y = 2 + chx$, $0 \le x \le 1$;	б) $\rho = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.
в) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$	
12. а) $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$;	б) $\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$;
в) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}.$	
13.а) $y = e^x + 13$, $\ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}$;	б) $\rho = 3\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.
в) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi.$	
14.а) $y = 2 - \sqrt{x - x^2}$, $\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{4}$;	б) $\rho = 4(1 - \sin\varphi)$;

в) $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.	
15.а) $y = 2 - e^x$, $\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$;	б) $\rho = a\sin^2\dfrac{\varphi}{3}$;
в) $\begin{cases} x = 2arctgt, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.	
16. а) $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$;	б) $\rho = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{5}{12}$;
в) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$.	
17.а) $y = 21 - \ln\cos x$, $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;	б) $\rho = 3\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$;
в) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.	
18. а) $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \le x \le 4$;	б) $\rho = 6(1 + \sin\varphi)$;
в) $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ (y \ge 2)$.	
19.а) $y = 5 + \ln\sin x$, $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{4}$;	б) $\rho = 5(1 - \cos\varphi)$;
в) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t. \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$.	

20. а) $y=\sqrt{1-x^2}-\arccos x+1$;	б) $\rho=8\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.
в) $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases},\ 0\le t\le\pi.$	
21. а) $y=\ln\sin x,\ \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.	б) $\rho=4\cos\varphi$;
в) $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}\ \frac{\pi}{2}\le t\le\pi.$	
22.а) $y=\ln 7-\ln x$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$.	б) $\rho=3\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{4}{3}$.
в) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}\ \pi\le t\le 2\pi$	
23. а) $y=chx+3,\ 0\le x\le 1.$	б) $\rho=\cos\varphi+\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$
в) $\begin{cases} x=2{,}5(t-\sin t), \\ y=2{,}5(1-\cos t), \end{cases}\ \frac{\pi}{2}\le t\le\pi.$	
24. а) $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$.	б) $\rho=4(1-\sin\varphi),\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$.
в) $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}\ 0\le t\le\frac{\pi}{3}.$	
25. а) $y=\ln\cos x+2$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$;	б) $\rho=1+tg\varphi,\ \varphi=\frac{\pi}{4}$.

в) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}.$	
26.а) $y = e^x + 26$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}$;	б) $\rho = 8\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$;
в) $\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$	
27.а) $y = -\sqrt{x - x^2} + 4$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$;	б) $\rho = 1 - \sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}$.
в) $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{3}.$	
28.а) $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 3)$, $0 \le x \le 2$;	б) $\rho = 12e^{\frac{12\varphi}{5}}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$;
в) $\begin{cases} x = ch^3 t, \\ y = sh^3 t, \end{cases} 0 \le t \le 2.$	
29.а) $y = e^x + e$, $\ln\sqrt{x} \le x \le \ln\sqrt{15}$;	б) $\rho = 6\cos 3\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$;
в) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}.$	
30. а) $y = \frac{1}{2}(1 - e^x - e^{-x})$, $0 \le x \le 3$;	б) $\rho = 8(1 - \cos\varphi)$.
в) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$	

Задача 15. Знайти б'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої графіками функцій.

14.1. $y = 3\sin x$, $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

14.2. $2x - x^2 - y = 0$, $2x^2 - 4x + y = 0$.

14.3. $x = \sqrt[3]{y-2}$, $x = 1$, $y = 1$.

14.4. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

14.5. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$.

14.6. $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

14.7. $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

14.8. $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = \sqrt{y-2}$, $x = 1$.

14.9. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

14.10. $y = \sin(\dfrac{\pi x}{2})$, $y = x^2$.

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OY фігури, обмеженої графіками функцій.

14.11. $y = \arccos\left(\dfrac{x}{3}\right)$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

14.12. $y = \arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right)$, $y = \arcsin x$, $y = \dfrac{\pi}{2}$

14.13. $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$.

14.14. $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0{,}5$.

14.15. $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$

14.16. $y = (x-1)^2$, $y = 1$

14.17. $y = \arccos\left(\dfrac{x}{5}\right)$, $y = \arccos\left(\dfrac{x}{3}\right)$, $y = 0$

14.18. $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$

14.19. $y = \arccos\left(\dfrac{x}{5}\right)$, $y = \arccos(x)$, $y = 0$

14.20. $y=(x-1)^2,\ x=0,\ x=2,\ \ y=0.$

Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі OX графіків функцій.

14.21. $y=\frac{1}{3}ch3x,\ 0\le x\le 1.$

14.22 $y=\frac{1}{3}x^3,\ -1\le x\le 1.$

14.23. $y=e^{-\frac{x}{2}},\ 0\le x\le 2.$

14.24. $\begin{cases} x=a(3\cos t-\cos 3t), \\ y=a(3\sin t-\sin 3t), \end{cases}\quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$

14.25. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}\quad 0\le t\le \pi.$

Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі OY графіків функцій.

14.26. $9y^2=4x^3,\ 0\le x\le 1.$

14.27. $\begin{cases} x=3\cos t-\cos 3t, \\ y=3\sin t-\sin 3t, \end{cases}\quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$

14.28. $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t), \end{cases}\quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$

14.29. $x=\frac{1}{3}y^3,\ \ 0\le y\le 2.$

14.30. $4x^2+y^2=4.$

Задача 16. Знайти силу, з якою вода тисне на пластину, переріз якої має форму рівнобічної трапеції (рис. 24).

15.1. $a = 4{,}5$ м; $b = 6{,}6$ м; $h = 3$ м.
15.2. a = 4,8 м; b = 7,2 м; h = 3,0 м.
15.3. a = 5,1 м; b = 7,8 м; h = 3,0 м.
15.4. a = 5,4 м; b = 8,4 м; h = 3,0 м.
15.5. a = 5,7 м; b = 9,0 м; h = 4,0 м.
15.6. a = 6,0 м; b = 9,6 м; h = 4,0 м.
15.7. a = 6,3 м; b = 10,8 м; h = 4,0 м.
15.8. a = 6,6 м; b = 10,8 м; h = 5,0 м.
15.9. a = 6,9 м; b = 11,4 м; h = 5,0 м.
15.10. a = 7,2 м; b = 12,0 м; h = 5,0 м.
15.11. a = 7,5 м; b = 12,5 м; h = 5,0 м.
15.12. a = 7,8 м; b = 13 м; h = 6,0 м.
15.13. a = 8 м; b = 13,2 м; h = 6,0 м.
15.14. a = 8,1 м; b = 13,4 м; h = 6,0 м.
15.15. a = 8,3 м; b = 13,5 м; h = 7,0 м.

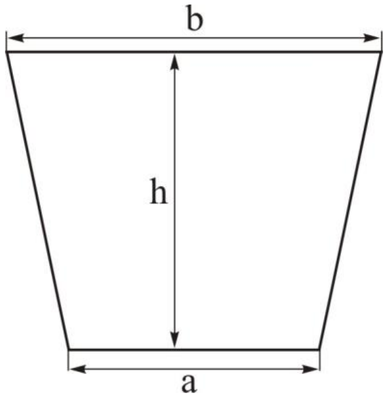

Рис. 24

Знайти роботу, яку потрібно витратити, щоб викопати котлован циліндричної форми з радіусом R і висотою H, якщо питома вага породи γ.

15.16. R=10 м, H=5,4 м.
15.17. R=8,2 м, H=6 м.
15.18. R=8,4 м, H=6,3 м.
15.19. R=8,9 м, H=4,5 м.
15.20. R=12 м, H=4,8 м.
15.21. R=10,5 м, H=7,8 м.
15.22. R=15,2 м, H=6,2 м.
15.23. R=15,8 м, H=5,8 м.
15.24. R=14,5 м, H=3,3 м.
15.25. R=12,8 м, H=7,4 м.
15.26. R=12,4 м, H=10 м.
15.27. R=10,3 м, H=8,5 м.
15.28. R=10,6 м, H=12,3 м.
15.29. R=15,4 м, H=5,7 м.
15.30. R=25,1 м, H=10,4 м.

Список літератури

1. *Денисюк В.П.* Вища математика : навчальний посібник : у 4 ч. / В.П. Денисюк, В.К. Репета, К.А. Гаєва, Н.О. Клешня. – Ч. 2. – Київ : Книжкове видавництво НАУ, 2005. – 276 с.

2. *Дубовик В.П.* Вища математика : навчальний посібник / В.П. Дубовик , І.І. Юрик. – Київ : Вища школа,1993. – 648 с.

3. *Дубовик В.П.* Вища математика : збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2005. – 480 с.

4. *Дороговцев А.Я* Математичний аналіз : підручник. У 2 ч. – Ч. 1. – Київ : Либідь, 1994. – 304 с.

5. *Овчинніков П.П.* Вища математика : підручник. У 2 ч. – Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинніков, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленок. – Київ : Техніка, 2003. – 600 с.

6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление : учебное пособие для вузов. – М. : Наука, 1985. – 560 с.

Навчальне видання

БОНДАРЕНКО Наталія В'ячеславівна
ЗАБАРИЛО Олексій Віталійович
ОТРАШЕВСЬКА Валентина Володимирівна
СОКОЛОВА Людмила Віталіївна
КРАСНЄЄВА Анна Олександрівна

ІНТЕГРАЛИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Практичний посібник з вищої математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
та 193 «Геодезія та землеустрій»

Випусковий редактор *Л.С. Тавлуй*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвой*

Підписано до друку 11.10.2024. Формат 60 × 84 $_{1/16}$
Ум. друк. арк. 5,11. Обл.-вид. арк. 5,5.
Електронний документ. Вид. № 117/III–24.

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.