

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

В. С. Старовєров

Р. А. Дем'яненко

# ВИЩА ГЕОДЕЗІЯ

## Конспект лекцій

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня  
вищої освіти спеціальності 193 «Геоземлеробство»

Київ 2025

УДК 528.23  
С77

Рецензент О. П. Ісаєв, канд. техн. наук, доцент

*Затверджено на засіданні кафедри інженерної геодезії, протокол № 12 від 27 січня 2025 року.*

В авторській редакції

**В. С. Старовєров,**

С77 Вища геодезія [Електронний ресурс]: конспект лекцій /  
**В. С. Старовєров,** Р.А. Дем'яненко. – Київ : КНУБА, 2025. – 141 с.

Викладено основні питання: теорія поверхонь, земний еліпсоїд, розв'язання задач на поверхні еліпсоїда, теорія та практика застосування плоских координат в конформній картографічній проєкції Гаусса Крюгера. Також розглянуто питання характеристик гравітаційного поля землі та способів виведення відхилень прямовисних ліній, системи висот та вирішення редуційних задач.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій».

УДК 681.5, 681.5.01

© **В. С. Старовєров,**  
Р. А. Дем'яненко, 2025

© КНУБА, 2025

## **ПЕРЕДМОВА**

Видання конспекту лекцій з дисципліни Вища геодезія присвячено пам'яті професора Володимира Сергійовича Староверова, який протягом десятків років був ведучим викладачем дисципліни Вища геодезія. Викладав її на високому професійному рівні та мав беззаперечний авторитет, безмежну любов та повагу серед колег та студентів.

Яскравий, харизматичний, дуже вимогливий але справедливий викладач, якого любили та поважали всі студенти. Темперамент та акторська майстерність робили з його лекцій цілі вистави, які сприймалися студентами із захопленням. Він не тільки навчав студентів і вимагав найвищої якості підготовки, а й виховував з них порядних і добрих людей.

Серед колег мав беззаперечний авторитет та повагу. Він був один з тих, хто формував політику та авторитет кафедри серед академічної спільноти України. Професор Володимир Староверов був одним з учнів великого вченого доктора технічних наук, професора Миколи Відуєва, який був засновником кафедри інженерної геодезії в Київському національному університеті будівництва і архітектури.

## ВСТУП

Освітня професійна програма «Геодезія» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» передбачає вивчення дисципліни «Вища геодезія». В робоча програму включено вивчення основних розділів, а саме: сфероїдичної геодезії та фізичної геодезії.

**Мета освітньої компоненти:** Забезпечити фундаментальну наукову підготовку студентів щодо вибору поверхні відносності та розв'язання задач на цій поверхні; теоретична і практична підготовка студентів для цілісного розуміння загальних завдань геодезії як науки та можливостей використання наукових основ дисципліни для розвитку геодезичної галузі.

**Завдання освітньої компоненти:**

- Вивчити поверхні відносності, які застосовуються в геодезії та вміти розв'язувати задачі по визначенню взаємного положення точок на ній.
- Вивчити параметри які характеризують реальне гравітаційне поле землі та вміти їх застосовувати для визначення та підбору параметрів поверхні відносності та вирішенні редуційних задач.

Геодезія – це наука, яка вивчає форму і розміри всієї Землі та окремих частин її поверхні. У ній розглядаються способи визначення взаємного положення точок, розташованих на земній поверхні, під нею та над нею. Це положення точок характеризується в чисельному вигляді координатами, а в графічному – позначається на планах, картах, профілях та інших кресленнях.

Вища геодезія є розділом геодезії, що займається визначенням фігури та розмірів Землі, її гравітаційного поля, а також методами точного визначення координат на земній поверхні. Ця дисципліна відіграє важливу роль у геодезичних вимірюваннях, картографії, навігації, супутникових технологіях, інженерних розрахунках та геоінформаційних системах.

На відміну від плоскої геодезії, що розглядає Землю як площину на малих ділянках, вища геодезія враховує кривизну Землі та використовує математичні моделі її поверхні. Основними об'єктами вивчення є сферична та еліпсоїдальна моделі Землі, а також її реальна фігура – геоїд.

Курс «Вища геодезія» складається з трьох основних модулів:

У першому модулі «Сфероїдична геодезія» вивчаються теоретичні основи теорії поверхонь, моделювання фігури Землі та методи розв'язання задач на поверхні еліпсоїда та в просторі.

Знання з цього розділу дозволяють розраховувати координати об'єктів на великій території, враховуючи кривизну як особливість фізичної поверхні Землі.

Другий модуль «Координати Гаусса-Крюгера» присвячений принципам картографічного відображення поверхні Землі на площині. У геодезії широко використовується проекція Гаусса-Крюгера, яка базується на поперечній циліндричній проекції. Розуміння цієї системи дозволяє виконувати точні топографічні зйомки та обробляти дані з великомасштабних карт.

Третій модуль «Фізична геодезія» займається вивченням та дослідженнями гравітаційного поля Землі та його впливу на геодезичні вимірювання. Фізична геодезія дозволяє враховувати вплив гравітаційного поля при високоточних геодезичних дослідженнях, що важливо підвищення точності геопросторових даних які використовуються при вирішенні наукових та прикладних задач.

Опанування курсу «Вища геодезія» забезпечить студентам фундаментальні знання про форму та розміри Землі, методи визначення координат, картографічні проекції та гравітаційне поле. Ці знання є основою для розробки геодезичних мереж, навігаційних систем, картографічних матеріалів та багатьох інших напрямів сучасної геодезії.

# Частина I. СФЕРОЇДНА ГЕОДЕЗІЯ

## Лекція 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

### Питання

1. Геодезія та вища геодезія
2. Із історії вищої геодезії
3. Складові частини вищої геодезії

#### 1. Геодезія та вища геодезія

Геодезія – це наука, яка вивчає вигляд і розміри всієї Землі та окремих частин її поверхні. У ній розглядаються способи визначення взаємного положення точок, розташованих на земній поверхні, під нею та над нею. Це положення точок характеризується в чисельному вигляді координатами, а в графічному – позначається на планах, картах, профілях та інших кресленнях. Для визначення взаємного положення точок виконують різні вимірювання, головним чином вимірювання відстаней і кутів. У геодезії вивчають методи виконання таких вимірювань і прийоми математичного та графічного їх опрацювання.

Геодезію умовно поділяють на дві частини. Був час, коли перша частина мала назву «нижча геодезія». Вона полягала у вивченні форми та розмірів окремих частин земної поверхні. Зараз її називають геодезією, і вона включає в себе вивчення різних способів виконання топографічної зйомки та створення необхідної знімальної (робочої) геодезичної основи (планової та висотної). Досить часто називали цю частину «топографія», підкреслюючи цим основну задачу, яка зводиться до вивчення топографічних умов місцевості, створення топографічних карт. Однак, у сучасному уявленні, геодезія охоплює не лише топографію, в якій провідне місце відводилось графічним методам зйомки (топографічній мензульній зйомці), але й топометрію, що займається аналітичними методами зйомки та числовими характеристиками топографічних умов місцевості. Крім того, поява нових технічних засобів виконання знімальних робіт і, насамперед фотографування, привело до утворення фототопографії та широкого розвитку аерофототопографії. Все це значно розширило зміст першої частини геодезії, а обмежувальні умови щодо її вивчення ґрунтуються на дидактичних міркуваннях.

Друга частина має назву «вища геодезія». Вона вивчає способи визначення форми та розміру всієї Землі та великих частин земної поверхні. У ній також розв'язуються задачі, пов'язані з пошуком взаємного положення точок, розташованих на земній поверхні, під нею та над нею, але в умовах, коли відстані між цими точками великі. Такі умови вимагають використання потужніших технічних засобів вимірювань,

урахування різних фізичних факторів і спеціальних прийомів математичного опрацювання.

За Ф.М. Красовським задачі вищої геодезії поділяють на наукові та науково-технічні. Головна наукова задача, яка полягає у визначенні форми та розмірів Землі, розв'язується в два етапи. Спочатку визначають деяку типову фігуру, що описує Землю в загальному вигляді, а потім вивчають відступи від цієї типової фігури дійсної фігури Землі. Однією з наукових задач вищої геодезії є також вивчення структури земної кори, вертикальних і горизонтальних рухів материкової частини, зміщень берегових ліній морів і океанів та зміни їх рівнів, рухів земних полюсів тощо. У процесі розв'язання таких задач вища геодезія взаємодіє з геологією, геофізикою, географією та астрономією.

Науково-технічні або практичні задачі вищої геодезії полягають у розробці методів вимірювань, що застосовуються для створення астрономо-геодезичної та нівелірної мережі на території держави, методів наукової організації цих основних геодезичних робіт, методів математичного опрацювання державних геодезичних мереж.

Наукові та науково-технічні задачі вищої геодезії взаємно обумовлені. Для розв'язання наукових задач потрібне створення геодезичних мереж. Водночас, опрацювання геодезичних мереж нероздільно пов'язане з розв'язанням наукових задач. Окрім того, розв'язання наукових і науково-технічних задач є вельми необхідним для картографування території країни, виконання топографічних зйомок і складання топографічних карт, вивчення виробничих сил країни, виконання інженерних вишукувань та інженерно-геодезичних робіт, які передують і супроводжують проектування, будівництво та експлуатацію інженерних споруд. У цьому сенсі вища геодезія розв'язує низку прикладних задач і безпосередньо пов'язана з інженерною геодезією.

## **2. Із історії вищої геодезії**

Припущення про загальний кулеподібний вигляд Землі були висунуті відомими вченими давнього світу – Піфагором, Аристотелем, Архімедом – ще за 600 – 400 років до н.е. Доказами кулеподібності Землі були: колоподібний вигляд горизонту на морях, океанах і відкритих рівнинах, поступове зникнення високих предметів знизу при віддаленні від них і поява їх зверху при наближенні, колова тінь від Землі на поверхні Місяця під час місячних затемнень. Опуклість вздовж меридіанів підтверджувалась послідовною і правильною зміною висоти зірок при переміщенні з півночі на південь. Опуклість вздовж паралелей впливала з різного часу сходу та заходу Сонця й зірок для різних довгот точок спостережень. У подальшому кулеподібність Землі була підтверджена навколосвітніми мандрівками, під час яких втрачалась або додавалась

одна доба, а також схожістю Землі з іншими планетами кулеподібної форми, які люди навчились спостерігати.

Уже в IV ст. до н.е. Аристотель визначив розміри Землі по окружності величиною 400000 стадій (одна стадія дорівнює 158 – 185 м), хоча дотепер невідомо, яким шляхом була ним винайдена така величина.

Якщо Землю уявити кулею, то для визначення її радіуса  $R$  потрібно знайти довжину дуги  $S$  великого кола та відповідний цій дузі центральний кут  $\sigma$  (рис. 1).

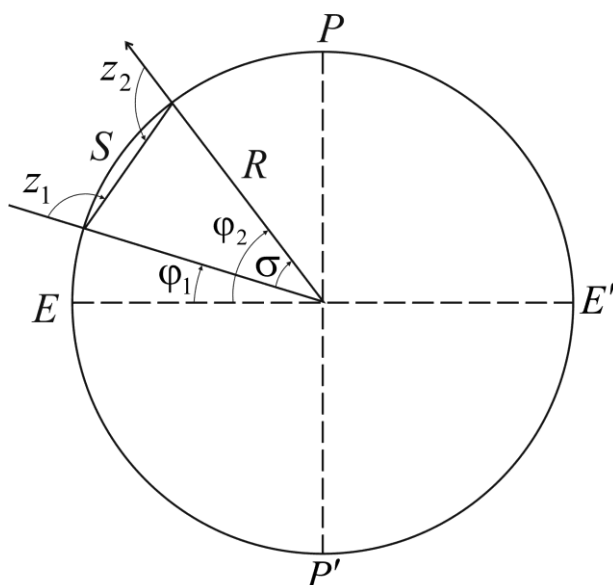


Рис. 1. Визначення радіуса кулеподібної Землі

Тоді

$$R = \frac{S}{\sigma'} \rho'. \quad (1.1)$$

У таких градусних вимірюваннях дуга  $S$  спочатку вимірювалась безпосередньо, а потім непрямым шляхом – методом триангуляції, запропонованим у 1619 р. голландським вченим В. Снелліусом (Вілеброрд Снел ван Росен).

Перше історично відоме градусне вимірювання виконане в III ст. до н.е. грецьким вченим Ератосфеном. Уявлення про кулеподібний вигляд Землі зберігалось 2000 років. У XVII ст. французький вчений Жан Пікар виконав найточніше для свого часу визначення радіуса земної кулі.

Згідно теорії І. Ньютона геометрична фігура Землі визначається результатом дії сили земного притягання, а також дії відцентрової сили, що впливає на фігуру Землі внаслідок її обертання навколо своєї осі протягом доби. Сумарна дія цих сил утворює поле сили ваги або гравітаційне поле Землі. Величина та напрямок сили ваги в точці на земній поверхні залежить від розподілу мас всередині Землі. Значить, фігура Землі визначається густиною речовини, з якої вона складається. І. Ньютон, розглядаючи Землю як однорідне тіло, в якому всі частки



взаємно притягуються, та приймаючи відношення відцентрової сили до сили ваги на екваторі  $\frac{1}{289}$ , одержав стиснення Землі  $\frac{1}{230}$  (1686 р.). Він покладав, що стиснення повинно зменшуватись, якщо густина речовини збільшується до центра Землі.

До того часу Ж. Роше винайшов підтвердження сфероїдності Землі у вигляді зростання сили ваги від екватора до полюсів. Здійснюючи мандрівку з Парижу до Каєни (Південна Америка, поблизу екватора) з метою визначення паралаксу Марса, він установив, що маятниковий годинник почав відставати на 2,5 хвилини на добу, і для поновлення його правильного ходу довелося вкоротити маятник на 3 мм.

У 1699 р. за завданням Французької академії наук були здійснені градусні вимірювання під керівництвом Ж. Кассіні, які нібито показали, що довжина градусної дуги вздовж меридіана зменшується від екватора до півночі. Це свідчило про витягнутість Землі до полюсів і суперечило висновкам І.Ньютона та Х. Гюйгенса.

Щоб покласти край суперечкам щодо стиснення чи витягнутості Землі в напрямку полюсів у 1735 – 1743 р. р. були виконані нові градусні вимірювання дуг меридіанів: поблизу екватора в Перу (Південна Америка) та на півночі Норвегії (Лапландія). Дуги мали довжини  $3^{\circ}07'$  і  $1^{\circ}00'$ . За першою з них було одержане стиснення  $\frac{1}{314}$ , за другою –  $\frac{1}{214}$ . Це остаточно підтвердило положення про сфероїдність Землі.

Наступний розвиток астрономо-геодезичних робіт, необхідних для виконання топографічних зйомок і складання топографічних карт, призвів до наукового становлення геодезичних знань. У XVIII ст. почала формуватись вища геодезія. При цьому суто геодезичні методи визначення фігури Землі одразу ж почали поєднувати з іншими методами: К. Маклорен навів доведення того, що фігура рівноваги рідини, яка обертається, має вигляд сфероїда малого стиснення; Якобі встановив, що фігурою рівноваги може бути тривісний еліпсоїд; для відшукування фігури Землі А. Клеро притягнув результати вимірювання сили ваги; Ж.-Б. Делаамбр досліджував залежність між фігурою Землі та силою притягання Місяця і Сонця; П.-С. Лаплас використав закони небесної механіки та одержав стиснення Землі, що дорівнює  $\frac{1}{300}$ . Він вказав на те, що дійсна фігура Землі не може збігатись з еліпсоїдом обертання.

### **3. Складові частини вищої геодезії**

Вищу геодезію поділяють на три частини. У першій частині розглядаються основні геодезичні роботи, які мають на меті визначення взаємного положення точок, розташованих на земній поверхні на великих

відстанях одна від одної. До основних геодезичних робіт відносять створення державних геодезичних мереж як планових, так і висотних. Поряд із традиційними методами створення планових мереж, таких як триангуляція, трилатерація, лінійно-кутові та полігонометричні мережі сьогодні широко застосовуються супутникові методи визначення координат. Першу частину іноді називають практичною геодезією. Ця частина вищої геодезії здебільшого розглядається в загальному курсі геодезії, де основну увагу приділяють методам створення планової та висотної основи для картографування території. При цьому розглядаються питання проектування геодезичних мереж і точності їх розрахунку, геодезичні знаки та центри, виконання геодезичних вимірювань і вирівнювальні обчислення.

Друга частина присвячена сфероїдній геодезії, де розглядаються способи визначення взаємного положення точок на координатній поверхні, за яку приймають поверхню сфероїда – геометричного тіла, близького за формою до кулі (сфери). У сфероїдній геодезії сфероїд ототожнюють із еліпсоїдом обертання з малим полярним стисненням, утвореним у результаті обертання еліпсу навколо малої осі

Третя частина вищої геодезії охоплює фізичну геодезію, в якій розглядаються способи вивчення фігури Землі як фізичного та геометричного тіла, які ґрунтуються на законах механіки, геодезичних, гравіметричних і астрономічних вимірюваннях. Якщо у сфероїдній геодезії параметри земного еліпсоїда вважають відомими, то у фізичній геодезії вирішуються фундаментальні питання вищої геодезії, які стосуються визначення розмірів земного еліпсоїда, його орієнтування в тілі Землі, дослідження дійсної фігури Землі та зовнішнього гравітаційного поля. У фізичній геодезії розглядають редуційну проблему, що охоплює методи встановлення зв'язку між виміряними геодезичними величинами та відповідними їм величинами на поверхні земного еліпсоїда. До завдань теоретичної геодезії належать методи вирівнювання великої астрономо-геодезичної мережі, що є вихідною державною геодезичною мережею. Фізична геодезія визначає положення геодезії у складі наук про Землю.

### **Запитання для самоперевірки**

1. З яких розділів складається Вища геодезія?
2. Які задачі Вищої геодезії?
3. Приведіть історичні відомості про форму Землі.
4. Які існують теорії про форму земної поверхні та докази її еліпсоїдальності?

## Лекція 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОВЕРХОНЬ У СФЕРОЇДНІЙ ГЕОДЕЗІЇ

### Питання

1. Рівняння поверхні
2. Просторова крива. Крива на поверхні. Плоска крива
3. Рівняння Серре-Френе та Кноблауха
4. Параметричні рівняння кривої на площині та кривих на поверхні
5. Основні диференціальні форми поверхні
6. Нормальна кривина, геодезична кривина та геодезичне крутіння довільної лінії на поверхні. Диференціальне рівняння геодезичної лінії

### 1. Рівняння поверхні

Теорія поверхонь є частиною диференціальної геометрії. Вона розроблялась К. Гауссом стосовно розв'язання геодезичних задач. У сфероїдній геодезії широко використовуються положення цієї галузі знань, присвячені відображенню однієї поверхні на іншій і дослідженню кривих на поверхні, що набувають властивостей цієї поверхні. Нині теорія поверхонь наводиться у векторному викладенні. У курсі сфероїдної геодезії зазвичай теорія поверхонь наводиться лише тою мірою, якою вона є необхідною для вивчення геометрії земного еліпсоїда.

У системі просторових прямокутних координат  $(x, y, z)$  рівняння поверхні у неявній формі буде:

$$F(x, y, z) = 0. \quad (2.1)$$

Розв'язуючи його відносно координати  $z$ , одержимо рівняння поверхні в явній формі:

$$z = f(x, y). \quad (2.2)$$

Наприклад, для сфери з центром у початку координат рівняння набуває канонічного вигляду:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (2.3)$$

де  $R$  – радіус кулі.

Для тривісного еліпсоїда з центром у початку координат і розмірами півосей  $a, b, c$  одержують:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.4)$$

Рівняння поверхні двовісного еліпсоїда обертання відносно осі  $Oz$  із центром у початку координат буде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.5)$$

де  $a$  – велика або екваторіальна піввісь;  $b$  – мала або полярна піввісь.

Рівняння поверхні (рис. 2) у векторній формі будується на використанні одиничних векторів (*ортів*) по осях координат –  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ . Для радіус-вектора  $\bar{r}$  воно має вигляд вектора-функції:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (2.6)$$

У цьому випадку  $x, y, z$  є координатами вектора  $\bar{r}$  відносно базису  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .

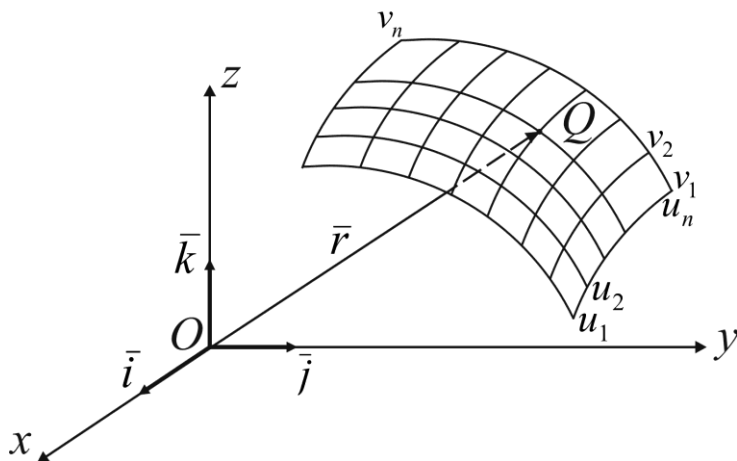


Рис. 2. Поверхня

За Гауссом вводять дві незалежні змінні  $u$  та  $v$ , що відповідають певній точці  $Q$  на поверхні, та одержують параметричні рівняння поверхні:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v). \quad (2.7)$$

Побудова таких рівнянь можлива, якщо поверхня аналітична, тобто  $x, y, z$  є регулярними функціями – такими, що припускають  $K$  разів диференціювання. Якщо  $K=1$ , то поверхня є гладкою. У сфероїдній геодезії розглядають регулярні поверхні, які не мають зламів і здатні безперервно вигинатись. Вони мають частинні похідні щонайменше другого порядку. Функції координат розвиваються в ряд Тейлора. Вираз (2.6) з'єднується в одне векторне рівняння:

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v). \quad (2.8)$$

Використання параметрів  $u$  та  $v$  є вигіднішим, ніж  $x, y, z$ . При вигині поверхні, тобто такій її деформації, за якої не змінюються довжини ліній, відбуваються зміни координат  $x, y, z$ . Параметри  $u$  та  $v$  пов'язані з поверхнею. Однак є поверхні, які не піддаються вигину. Наприклад, не припускають вигину всі замкнені опуклі поверхні.

Змінні  $u$  та  $v$  визначають на поверхні систему ліній, у загальному випадку кривих. Ці координатні лінії утворюють координатну сітку. Незалежні змінні  $u$  та  $v$  у сфероїдній геодезії приймають як криволінійні або *гауссові* координати. Вони можуть бути кутовими, лінійними та лінійно-кутовими (полярними). Координатами можуть бути інші

величини, що є неперервними та однозначними функціями відповідно  $u$  та  $v$ , тобто  $\tilde{u} = \tilde{u}(u, v)$  і  $\tilde{v} = \tilde{v}(u, v)$ . Якщо координатні лінії взаємно перпендикулярні, то створюється система ортогональних криволінійних координат. У такій системі параметричне рівняння раніше згаданого тривісного еліпсоїда буде:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \cos v \\ y &= b \cos u \sin v \\ z &= c \sin u \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

У кожній точці поверхні може бути побудована дотична площина. З переходом від однієї точки поверхні до іншої положення дотичної площини, в загальному випадку, зміниться. Якщо ці зміни відбуваються неперервно, то поверхня є гладкою. У сфероїдній геодезії обговорюються гладкі поверхні. Поблизу точки дотику відбувається злиття дотичної площини з поверхнею. Таку малу ділянку поверхні називають *елементом поверхні*.

## 2. Просторова крива. Крива на поверхні. Плоска крива

Досліджуючи просторову криву, в загальному випадку – криву двоякої кривини або криву на поверхні – в кожній її точці будують рухомий тригранник (основний трієдр, трієдр Дарбу, трієдр Френе, природний натуральний або супроводжувальний тригранник) (рис. 3).

Ребрами цього тригранника є одиничні вектори  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ , спрямовані відповідно по дотичній, головній нормалі та бінормалі.

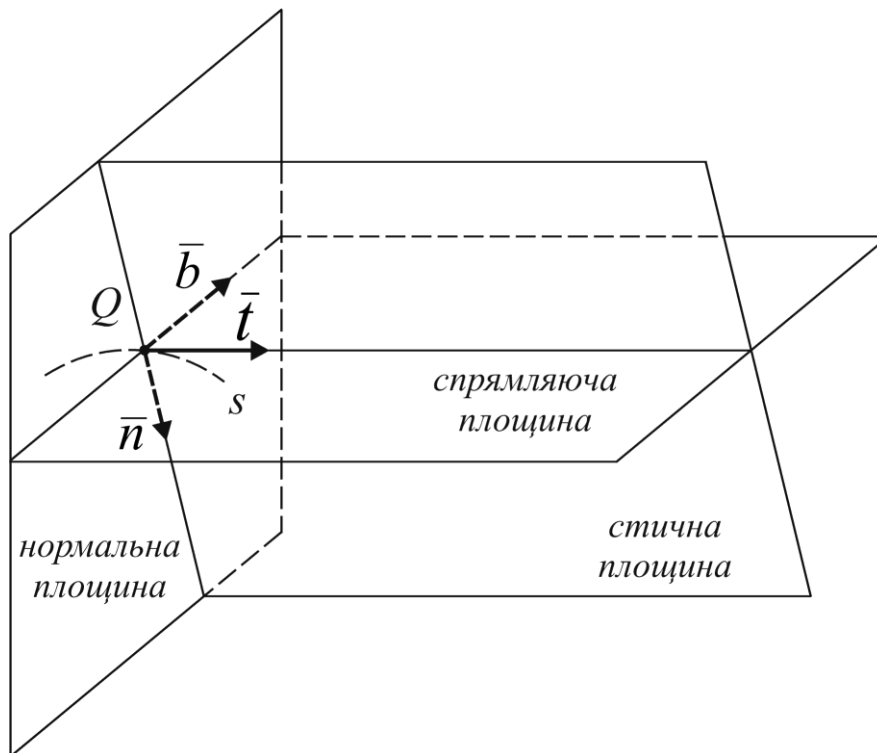


Рис. 3. Рухомий тригранник

Площина, перпендикулярна до дотичної, називається нормальною площиною. Розрізняють точки просторової кривої: звичайні та особливі. У звичайній точці крива припускає  $K$ -раз диференціювання. Для цієї точки нормальна площина є єдиною. Якщо на кривій поблизу точки  $Q$  праворуч і ліворуч від неї обрати точки  $Q_1$  і  $Q_2$  так, щоб точки  $Q$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  не знаходились на одній прямій, то ці три точки визначають одну площину. Необмежено наближаючи точки  $Q_1$  і  $Q_2$  до точки  $Q$ , одержимо стичну площину. Вона перпендикулярна до нормальної площини.

У точці  $Q$  досліджуваної кривої можна побудувати нескінченну кількість перпендикулярів до дотичної. Вони називаються нормальними. Перпендикуляр, що лежить у стичній площині, є *головною нормаллю*. Таким чином, одиничний головний нормальний вектор  $\bar{n}$  визначається перетином нормальної площини зі стичною площиною. Вочевидь, стична площина задається дотичною та головною нормаллю. Перпендикулярно до нормальної та стичної площин розташовується спрямляюча площина. Перетин з нормальною площиною визначає другу нормаль або *бінормаль*. Одиничний бінормальний вектор  $\bar{b}$ , спрямований по бінормалі, є перпендикулярним до головної нормалі. Як наслідок, гранями рухомого тригранника є взаємно перпендикулярні площини: нормальна, стична та спрямляюча.

Плоска крива лежить у стичній площині та має одну нормаль. У стичній площині розташовані дотичні, побудовані у різних точках цієї кривої. Бінормалі перпендикулярні до цієї площини та паралельні одна одній. Плоска крива характеризується *довжиною, дотичною та кривиною*.

Довжину плоскої кривої, що має рівняння  $y = f(x)$ , у межах від  $x_1 = a$  до  $x_2 = b$  визначають за формулою:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (2.10)$$

На малому відрізку дотична замінює криву. Кривина кривої визначається порівнянням із найкращим чином прилеглим до кривої колом, яке служить зразком або еталоном кривини. Таке стичне коло лежить у стичній площині. Кривина  $\chi$  характеризується швидкістю відходу кривої від дотичної.

Кривиною плоскої кривої  $\chi$  в даній точці  $Q$  називають границю відношення кута суміжності  $\Delta\alpha$  (кут між додатними напрямками дотичних у точках  $Q_1$  і  $Q_2$ ) до довжини дуги  $\overset{\cup}{Q_1Q_2}$ , коли  $\overset{\cup}{Q_1Q_2} \rightarrow 0$ :

$$\chi = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (2.12)$$

Радіусом кривини  $\rho$  в даній точці  $Q$  є величина, обернена до кривини, тобто:

$$\rho = \frac{1}{\chi}. \quad (2.13)$$

Точка на головній нормалі, що віддалена від досліджуваної точки у додатному напрямку на відстань  $\rho$ , називається центром кривини. Для плоскої кривої, заданої рівнянням  $y = f(x)$ , кривина обчислюється за формулою:

$$\chi = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (2.14)$$

Радіус кривини буде:

$$\rho = \frac{1}{\chi} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \quad (2.15)$$

де  $s$  – довжина дуги кривої, кривина обчислюється за формулою:

$$\chi^2 = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^2}.$$

У випадку просторової кривої в нормальній площині, побудованій у точці  $Q$ , лежить множина нормалей. Головна нормаль лежить на перетині стичної площини з нормальною площиною, а бінормаль – на перетині спрямляючої площини з нормальною площиною. При переході від точки до точки бінормалі змінюють свої напрямки. За характером цих змін виносять судження, наскільки крива відступає від стичної площини, тобто має *крутіння*. Вимірюють крутіння  $\sigma$  швидкістю повороту вектора бінормалі та визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{d\bar{b}}{ds}. \quad (2.19)$$

Радіус крутіння буде:

$$\tau = \frac{1}{\sigma}. \quad (2.20)$$

Напрямок крутіння (праве, ліве) визначають відносно дотичного вектора  $\bar{t}$ . Просторова крива задається вектором  $\bar{r}$  і характеризується стичною площиною, кривиною та крутінням.

Довжина  $s$  просторової кривої вважається натуральним або *лонгальним* її параметром. Якщо крива задана рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , то в межах від  $t_1$  до  $t_2$  її довжина визначається:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (2.21)$$

Для точки  $Q$  кривої на поверхні, окрім вказаних раніше одиничних векторів  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ , вводимо одиничні вектори  $\bar{m}$ , спрямований по нормалі, та  $\bar{k}$  – спрямований перпендикулярно до неї в спрямляючій площині, що є дотичною до поверхні (рис. 4).

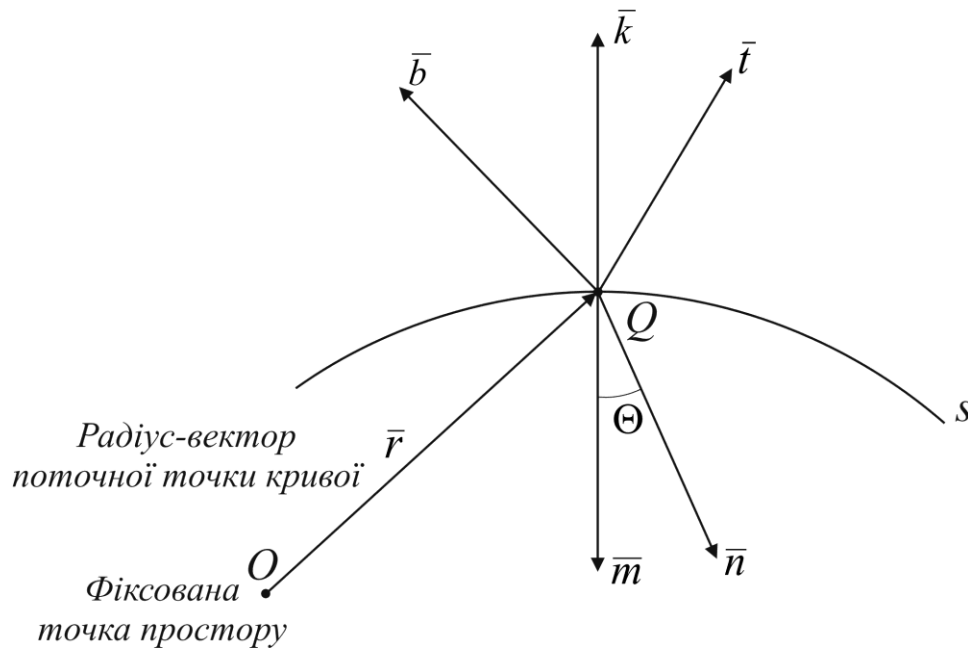


Рис. 4. Вектори, що характеризують положення точки кривої на поверхні

Вектор  $\bar{k}$  називають *дотичною нормаллю*. Вектор  $\bar{n}$  спрямований у бік ввігнутості кривої. Всі ці вектори пов'язані з поверхнею та кривою. Ортогональний триєдр тепер набуває іншого вигляду (рис. 5).



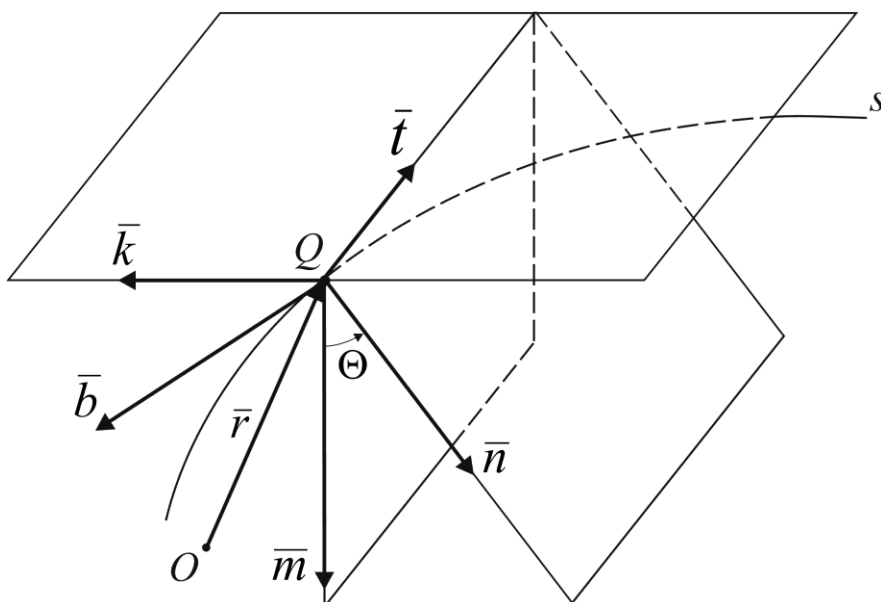


Рис. 5. Ортогональний триєдр кривої на поверхні

Ребрами цього триєдра є тангенціальний вектор  $\bar{t}$ , вектор нормалі до поверхні  $\bar{m}$  і вектор тангенціальної нормалі до кривої  $\bar{k}$ . Для них дотримується співвідношення  $\bar{t}^2 = \bar{m}^2 = \bar{k}^2 = 1$ .

Скалярні добутки цих векторів дорівнюють:

$$(\bar{t}\bar{m}) = (\bar{m}\bar{k}) = (\bar{k}\bar{t}) = 0. \quad (2.25)$$

Векторні добутки для правого орієнтування мають такий вигляд:

$$[\bar{t}\bar{m}] = \bar{k}, \quad [\bar{m}\bar{k}] = \bar{t}, \quad [\bar{k}\bar{t}] = \bar{m}. \quad (2.26)$$

Вони показують, що вектори  $\bar{k}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{m}$  взаємно перпендикулярні. Легко впевнитись у взаємній перпендикулярності векторів  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ . Крім того:

$$(\bar{t} \cdot \bar{m} \cdot \bar{k}) = 1. \quad (2.27)$$

Наведений ортогональний триєдр схожий на триєдр Дарбу. Він збігається з ним, якщо нормальний вектор поверхні  $\bar{m}$  збігається з головним нормальним вектором  $\bar{n}$ . Відмітимо, що:

$$(\bar{m} \cdot \bar{n}) = \cos \Theta. \quad (2.28)$$

Точка кривої на поверхні, в якій головна нормаль збігається з нормаллю до поверхні, є *геодезичною* точкою. Кожний нормальний переріз має хоча б одну геодезичну точку. Однак, є нормальні перерізи з більшою кількістю геодезичних точок. Геодезичні точки мають плоскі криві та криві двоякої кривини. Крива на поверхні, всі точки якої є геодезичними, має назву *геодезичної лінії*. В межах деякої обмеженої частини поверхні геодезична лінія – найкоротша лінія між двома точками на цій поверхні. На площині геодезичною лінією є пряма, на сфері – дуга великого кола або *ортодромія*, на круговому циліндрі – гвинтова лінія. У загальному випадку геодезична лінія є кривою двоякої кривини.

### 3. Рівняння Серре-Френе та Кноблауха

Рівняння Серре-Френе показують зміни взаємно перпендикулярних одиничних векторів основної трійки  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$  залежно від кривини  $\chi$  та кручення  $\sigma$  кривої. Вони мають такий вигляд:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \chi\bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\chi\bar{t} + \sigma\bar{b}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\sigma\bar{n}. \quad (2.51)$$

Кривина кривої або звичайна кривина кривої  $\chi$  характеризує швидкість відходу кривої від дотичної. У першому рівнянні (2.51) одиничний вектор  $\bar{n}$  визначає напрямок похідної  $\frac{d\bar{t}}{ds}$ . Кривина кривої є

модулем цієї похідної  $\left| \frac{d\bar{t}}{ds} \right|$ . Для плоскої кривої вона визначається за формулою (2.14) і має знак. У випадку просторової кривої кривина є додатною величиною. Якщо всюди прийняти  $\chi = 0$ , то одержують пряму. Іноді кривину кривої називають *вигином*.

Із першого рівняння (2.49) видно, що бінормальний вектор перпендикулярний до векторів  $\bar{t}$  і  $\bar{n}$ . Диференціюючи це рівняння за змінною  $s$ , одержують:

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \left[ \frac{d\bar{t}}{ds} \bar{n} \right] + \left[ \bar{t} \frac{d\bar{n}}{ds} \right] = \chi[\bar{n}\bar{n}] + \left[ \bar{t} \frac{d\bar{n}}{ds} \right]. \quad (2.52)$$

Знов повернемося до формул (2.47) – (2.49). Якщо продиференціювати за  $s$  рівняння  $\bar{n} = [\bar{b} \cdot \bar{t}]$ , то одержимо:

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \left[ \frac{d\bar{b}}{ds} \bar{t} \right] + \left[ \bar{b} \frac{d\bar{t}}{ds} \right]. \quad (2.53)$$

Цим визначається друге рівняння (2.51). Відмітимо, що при  $\sigma = 0$  крива є плоскою. До рівняння Серре-Френе включені дві скалярні величини: кривина  $\chi$  та крутіння  $\sigma$ . Вони є інваріантами кривої, оскільки змінюються при зміні системи координат. Рівняння (2.51) наведені для правої трійки одиничних векторів  $\bar{t}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{b}$ .

Крива однозначно визначається натуральними рівняннями:

$$\chi = \chi(s), \quad \sigma = \sigma(s). \quad (2.54)$$

Криві з однаковою кривиною та однаковим крученням вважаються рівними. Вони суміщаються, здійснюючи рух. Кут  $\varphi$  між суміжними дотичними дорівнює куту між нормальними площинами, побудованими в точках дотику. Лінію перетину нормальних площин називають *полярною віссю*. Точка перетину полярної осі з головною нормаллю є *центром кривини*. Відстань від нього до кривої є радіусом кривини  $\rho = \frac{1}{\chi}$ . Стична

площина перпендикулярна полярній осі. Бінормаль є паралельною до полярної осі.

Рівняння Кноблауха відносяться до кривої на поверхні. Це – дериваційні рівняння. Такі лінійні векторні диференціальні рівняння показують зміни векторів  $\bar{t}$ ,  $\bar{m}$ ,  $\bar{k}$  залежно від нормальної кривини  $\nu$ , геодезичної кривини  $\gamma$  та геодезичного крутіння  $\delta$ . Вони мають для правого орієнтування такий вигляд:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \nu\bar{m} - \gamma\bar{k}; \quad \frac{d\bar{m}}{ds} = -\nu\bar{t} + \delta\bar{k}; \quad \frac{d\bar{k}}{ds} = \gamma\bar{t} - \delta\bar{m}. \quad (2.55)$$

Геодезична кривина  $\gamma$  характеризує ступінь відхилення кривої від геодезичної лінії. За рівнянням Каталіна вона є проекцією звичайної кривини на дотичну площину. Формулу для обчислення геодезичної кривини  $\gamma$  одержимо, якщо помножимо рівняння (2.56) скалярно на одиничний вектор  $\bar{k}$ . Тоді:

$$\gamma = \chi \sin \Theta. \quad (2.58)$$

Нормальна кривина  $\nu$  однакова для всіх кривих, що мають спільну дотичну в даній точці. Геодезична кривина  $\gamma$  у цих кривих різна. При вигинанні поверхні геодезична кривина не змінюється. Цю обставину розглядають у розділі теорії поверхонь, що має назву *внутрішня* або *абсолютна геометрія поверхонь*.

У нормального перерізу в геодезичній точці  $\gamma = 0$ . У решті точок геодезична кривина обчислюється за формулами (2.58) і (2.59). Для геодезичної лінії  $\frac{d\Theta}{ds} = 0$  і  $\gamma = 0$ .

Геодезичне крутіння  $\delta$  характеризує обертання дотичної площини при переході від однієї точки кривої до іншої. Це обертання обумовлене обертанням стичної площини та зміною кута  $\Theta$ . Вочевидь:

$$(\bar{m}, \bar{n}) = \cos \Theta. \quad (2.60)$$

#### 4. Параметричні рівняння кривої на площині та кривих на поверхні

##### *Довжина хорди кривої*

Хорда  $d$  кривої  $s$  є модулем радіус-вектора  $\bar{r}$ . Її довжина визначається формулою:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.76)$$

Після заміни координат їх значеннями за формулою (2.75) і алгебраїчних перетворень з точністю до членів п'ятого порядку одержимо:

$$d = s - \chi_0^2 \frac{s^3}{24} - \chi_0 \chi_0' \frac{s^4}{24} + (3\chi_0^4 - 64\chi_0'^2 - 72\chi_0 \chi_0'') \frac{s^5}{5760} + \dots \quad (2.77)$$

### **Кут між дотичною та хордою кривої**

Шуканий кут  $\beta_0$  між дотичною та хордою у початковій точці кривої  $O$ , відлічуваний від дотичної до хорди за ходом годинникової стрілки, визначається так:

$$\beta_0 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (2.78)$$

$$\beta = \chi_0 \frac{s}{2} + \chi'_0 \frac{s^2}{3} + \chi''_0 \frac{s^3}{8} + \dots \quad (2.82)$$

### **Рівняння геодезичної лінії**

Якщо ряди (2.88) продовжити до членів п'ятого порядку відносно  $s$ , а потім у коефіцієнтах покласти  $\gamma_0 = \gamma'_0 = \gamma''_0 = \dots = 0$ , то одержують такі рівняння геодезичної лінії:

$$\left. \begin{aligned} x &= s - v_0^2 \frac{s^3}{6} - v_0 v'_0 \frac{s^4}{8} + (v_0^4 + v_0^2 \delta_0^2 - 3v_0'^2 - 4v'_0 v''_0) \frac{s^5}{120} + \dots \\ y &= v_0 \frac{s^2}{2} + v'_0 \frac{s^3}{6} + (v''_0 - v_0^3 - v_0 \delta_0^2) \frac{s^4}{24} + \dots \\ z &= v_0 \delta_0 \frac{s^3}{6} + (v_0 \delta'_0 + 2v'_0 \delta_0) \frac{s^4}{24} + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (2.95)$$

де  $s$  – довжина геодезичної лінії.

### **Рівняння нормального перерізу**

Нехай початковій точці нормального перерізу відповідає його геодезична точка, в якій  $\Theta_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 0$  та  $\chi_0 = v_0$ . Крім того, на основі формули Бонне (2.63) будемо мати  $\Theta'_0 = \delta_0$  та  $\Theta''_0 = \delta'_0$ . Тому для нормального перерізу вираз (2.93) набуде вигляду:

$$\Theta = \delta_0 s + \delta'_0 \frac{s^2}{2} + \dots \quad (2.96)$$

За теоремою Меньє (2.57) одержимо:

$$\chi = v \sec \Theta = v \left( 1 + \frac{\Theta^2}{2} + \dots \right). \quad (2.97)$$

## **5. Основні диференціальні форми поверхні**

Для визначення параметрів дериваційних рівнянь і рівнянь кривих на поверхні користуються основними диференціальними формами поверхні, інакше – *квадратичними формами*. У сфероїдній геодезії суттєву роль відіграють чотири основні квадратичні форми.

*Перша квадратична форма* для рівняння поверхні  $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$  буде:

$$I = d\bar{r}^2. \quad (2.104)$$

Вона задає метрику поверхні, тобто спосіб вимірювання відстаней на ній.

Друга квадратична форма має такий вигляд:

$$II = (-d\bar{r}, d\bar{m}). \quad (2.105)$$

Вона характеризує відхилення поверхні від дотичної площини. Така квадратична форма не інваріантна відносно вигину та відноситься лише до заданої поверхні.

Третя квадратична форма буде:

$$III = d\bar{m}^2. \quad (2.106)$$

Вона пов'язана зі сферичним відображенням поверхні, тобто зображенням поверхні на сфері одиничного радіуса.

Четверта квадратична форма подається в такому вигляді:

$$IV = (d\bar{m}, d\bar{r}, \bar{m}). \quad (2.107)$$

Вона пов'язана з попередніми квадратичними формами співвідношенням:

$$(IV)^2 = I \cdot III - (II)^2. \quad (2.108)$$

Нехай деяка крива  $s$  на поверхні в точці утворює з координатною лінією  $v = \text{const}$  кут  $\alpha$ . Такий кут називають *направляючим кутом*.

**6. Нормальна кривина, геодезична кривина та геодезичне крутіння довільної лінії на поверхні. Диференціальне рівняння геодезичної лінії**

Скористаємось рівнянням Кноблауха:

$$\frac{d\bar{m}}{ds} = -v\bar{t} + \delta\bar{k}. \quad (2.148)$$

Тоді нормальна кривина у довільному напрямку, що визначається направляючим кутом  $\alpha$ , буде:

$$v = v_1 \cos^2 \alpha + v_2 \sin^2 \alpha + \delta \sin 2\alpha. \quad (2.153)$$

Звідси нормальна кривина визначається за допомогою першої та другої квадратичних форм:

$$v = \frac{II}{I} = \frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}. \quad (2.157)$$

В результаті одержимо таку формулу для обчислення геодезичного крутіння у довільному напрямку:

$$\delta = (v_2 - v_1) \sin \alpha \cos \alpha + \delta_1 \cos 2\alpha. \quad (2.159)$$

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds} + \gamma_1 \cos \alpha + \gamma_2 \sin \alpha. \quad (2.167)$$

Це є формула для обчислення геодезичної кривини будь-якої лінії на поверхні. Вона має назву формули Гаусса-Ліувілля.

Для геодезичної лінії  $\gamma = 0$  в усіх її точках. Тому з рівняння (2.167) будемо мати таке диференціальне рівняння геодезичної лінії:

$$\frac{d\alpha}{ds_g} = -\gamma_1 \cos \alpha - \gamma_2 \sin \alpha. \quad (2.168)$$

### Запитання до самоперевірки

1. Рівняння основних поверхонь (сфера, еліпсоїд)
2. В чому різниця між плоскими та просторовими кривими?
3. Які характеристики мають плоска та просторова криві?
4. Яке значення мають основні квадратичні форми поверхні, що вони визначають?

## Лекція 3. ЗЕМНИЙ ЕЛІПСОЇД

### Питання

1. Земний еліпсоїд
2. Системи координат, які застосовують у вищій геодезії
3. Зв'язок між деякими системами координат
4. Міжнародні та референц-еліпсоїди. Світові та референсні системи координат
5. Українська перманентна мережа глобальних навігаційних супутникових спостережень (УПМ ГНСС)
6. Трансформування координатних систем
7. Головні радіуси кривини
8. Довжини дуг меридіанів і паралелей

### 1. Земний еліпсоїд

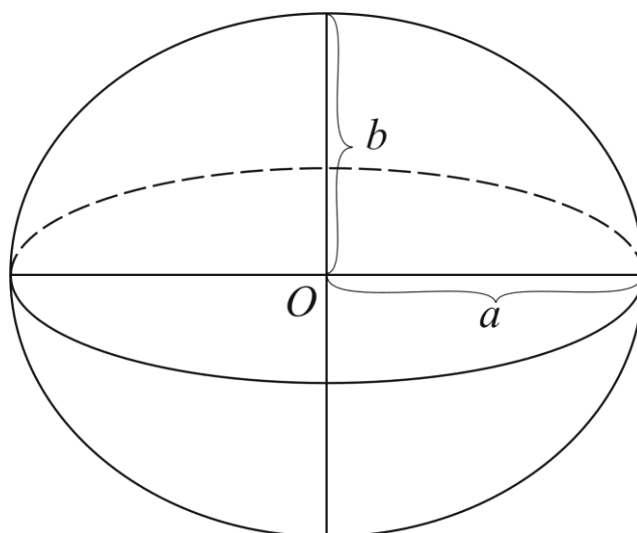


Рис. 6. Еліпсоїд обертання

Параметрами еліпсоїда є:  $a$  – велика або *екваторіальна піввісь*;  $b$  – мала або *полярна піввісь* ( $a > b$ ). Параметри також представляють у вигляді великої півосі та стиснення або *першого стиснення*:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} . \quad (1.2)$$

Застосовують також *друге стиснення*:

$$\alpha' = \frac{a - b}{b} , \quad (1.3)$$

та *третьє стиснення*:

$$\alpha'' = \frac{a-b}{a+b} = n. \quad (1.4)$$

Окрім того, користуються іншими елементами еліпсоїда, наприклад, ексцентриситетами – *першим ексцентриситетом*:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad (1.5)$$

– *другим ексцентриситетом*:

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad (1.6)$$

– *третім ексцентриситетом*:

$$e'' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{m}. \quad (1.7)$$

Радіус кривини в полюсах еліпсоїда або *полярний радіус* кривини еліпсоїда дорівнює:

$$c = \frac{a^2}{b}. \quad (1.8)$$

Усі ці елементи пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\frac{b}{a} = 1 - \alpha = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{a}{c} = \frac{e}{e'}. \quad (1.9)$$

Звідси будь-який елемент еліпсоїда можна виразити через інші його елементи. Наведемо основні співвідношення між елементами еліпсоїда:

$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2} = c(1 - e^2) = \frac{a(1 - n)}{1 + n} = \frac{a^2}{c}, \quad (1.10)$$

$$c = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{b}{1 - e^2} = \frac{a}{1 - \alpha} = \frac{a(1 + n)}{1 - n}, \quad (1.11)$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = \frac{2n}{1 + n} = \frac{\alpha'}{1 + \alpha'}, \quad (1.12)$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 2\alpha - \alpha^2 = \frac{4n}{(1 + n)^2} = \frac{2e''^2}{1 + e''^2}, \quad (1.13)$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} = \frac{4n}{(1 - n)^2} = \frac{2e''^2}{1 - e''^2}, \quad (1.14)$$

$$n = \frac{\alpha}{2 - \alpha} = \frac{a^2}{e^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}, \quad (1.15)$$

$$\frac{a + b}{2} = \frac{a}{1 + n} = \frac{b}{1 - n} = \frac{c(1 - n)}{(1 + n)^2} = a \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (1.16)$$

Поверхня еліпсоїда цілком визначається двома його елементами. До числа заданих елементів обов'язково повинна належати одна лінійна



величина. Всі інші елементи будуть похідними від двох заданих елементів і можуть бути обчислені з будь-якою точністю за формулами (1.10) – (1.16).

В Україні для всіх геодезичних і картографічних робіт взято елементи референц-еліпсоїда Красовського, вихідними величинами якого є:

$$a = 6378245,00000 \text{ м};$$
$$\alpha = 1:298,3.$$

Інші параметри референц-еліпсоїда Красовського мають такі значення:

$$b = 6356863,01877 \text{ м};$$
$$c = 6399698,90178 \text{ м};$$
$$\alpha = 0,003352329869;$$
$$n = 0,001678979181;$$
$$e^2 = 0,006693421623;$$
$$e'^2 = 0,006738525415.$$

Для наближених розрахунків корисно запам'ятати наближені значення елементів земного еліпсоїда:

## 2. Системи координат, які застосовують у вищій геодезії

Для визначення взаємного положення точок на поверхні еліпсоїда будемо завжди користуватись такими системами координат, які пов'язані безпосередньо із самою поверхнею. Це означає, що як би не змінювалось положення еліпсоїда в просторі, координати точок еліпсоїда будуть залишатись незмінними. Такій умові задовольняють різні системи криволінійних координат. Перед тим, як обрати ту чи іншу систему криволінійних координат, попередньо визначимо найпростішу та найзручнішу для практичного використання сітку координатних ліній, а потім для цих ліній підберемо відповідні криволінійні координати.

Сітка координатних ліній повинна бути такою, щоб кожна лінія однієї родини на перетині з лінією другої родини давала єдину точку на поверхні, а лінії однієї родини не повинні перетинатись.

Перетинаючи поверхню еліпсоїда обертання площинами, що проходять через вісь обертання, одержимо абсолютно однакові плоскі криві – еліпси. Половина кожного еліпсу, розташована між кінцями малої осі еліпсоїда – полюсами, називається *меридіаном*. Меридіани приймають як першу родину координатних ліній.

Перетинаючи еліпсоїд обертання площинами, що проходять перпендикулярно до осі обертання, одержують кола різного радіусу. Всі вони паралельні одна одній і мають назву *паралелей*. Радіус паралелі позначається через  $r$ . Паралель із найбільшим радіусом  $r = a$  є *екватором*.

**Системи координат із геодезичною широтою  $B$ , геодезичною довготою  $L$ , геодезичною висотою  $H$**

Нехай на рис. 7:  $P_n E_1 P_S E$  – меридіанний еліпс, що проходить через точку початку відліку довгот;  $P_n Q R P_S$  – меридіан, що проходить через дану точку  $Q$ .

Геодезичною широтою точки  $Q$  називають гострий кут  $B$ , утворений площиною екватора  $E R E_1$  та нормаллю  $Qn$  до поверхні еліпсоїда в заданій точці; геодезичною довготою  $L$  точки  $Q$  будемо називати двограний кут  $P_n Q P_S E$ , утворений площиною початкового меридіана  $P_n E P_S$  і площиною меридіана даної точки.

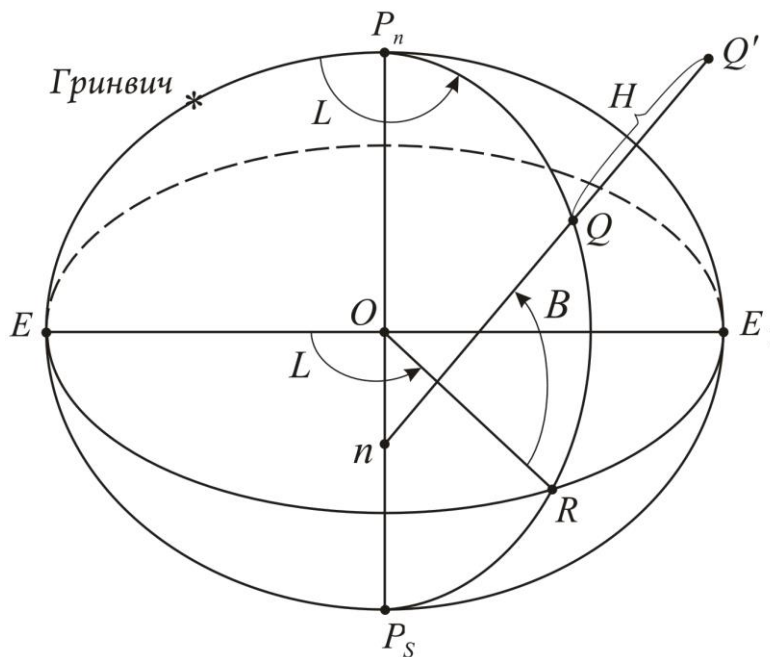


Рис. 7. Геодезична система координат

Якщо точка  $Q'$  лежить поза поверхнею еліпсоїда, визначають третю координату – геодезичну висоту  $H$ , яку визначають у вигляді відрізка нормалі  $QQ'$ , відліченого від поверхні еліпсоїда до точки  $Q'$ .

**Система прямокутних просторових координат  $X, Y, Z$**

За початок координат беруть центр еліпсоїда  $O$  (рис. 18).

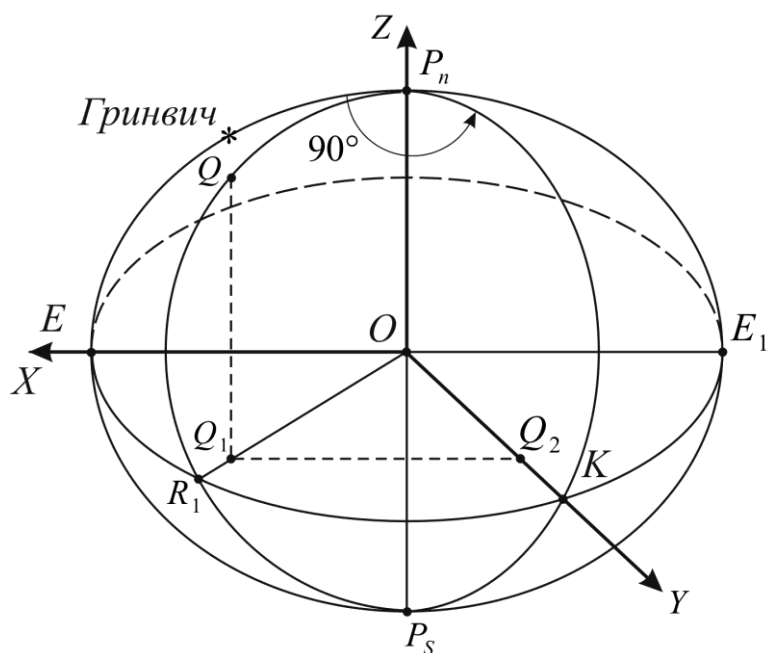


Рис. 8. Система прямокутних просторових координат

Вісь  $OZ$  розташована вздовж полярної осі еліпсоїда  $P_nOP_s$ ; вісь  $OX$  – у площині екватора в меридіані  $P_nEP_s$ , якій беруть за початковий; вісь  $OY$  – в площині екватора, але в меридіані  $P_nKP_s$ , площина якого становить із площиною початкового кут у  $90^\circ$ . Вісь  $Y$  доповнює систему координат до правосторонньої.

### ***Система геоцентричних координат***

Однією з координат у цій системі є геодезична довгота  $L$ , яка визначає меридіанний еліпс, що проходить через точку  $Q$  (рис. 9).

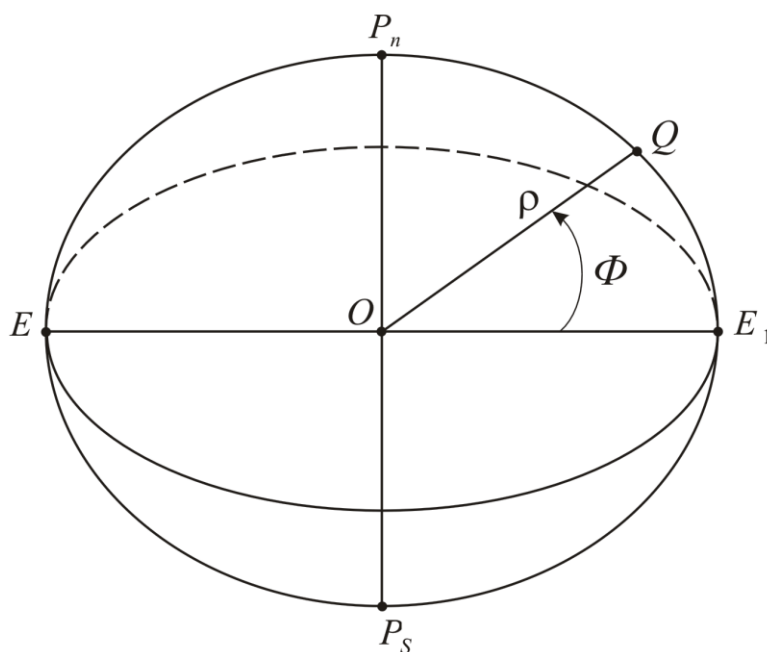


Рис. 9. Геоцентрична система координат

Положення точки  $Q$  на цьому еліпсі в системі координат, що розглядається, визначається *геоцентричною широтою*  $\Phi$ . Геоцентрична широта визначається як кут між площиною екватора або, що те саме, великою піввіссю меридіанного еліпса та радіусом-вектором  $\rho$  точки  $Q$ . На рис. 9:  $OQ$  – радіус-вектор  $\rho$  меридіанного еліпса, що проходить через точку  $Q$ ; кут  $QOE_1$  – геоцентрична широта  $\Phi$  точки  $Q$ .

***Система координат із зведеною широтою та геодезичною довготою. Рівняння еліпса в параметричній формі***

Однією з координат у цій системі є *геодезична довгота*  $L$ . Положення точки  $Q$  на меридіанному еліпсі, що має довготу  $L$ , визначається *зведеною широтою*  $u$ , яку одержують із такої допоміжної побудови.

Окреслимо в площині меридіанного еліпса  $P_nE_1P_sE$  з точки  $O$  (рис. 10), як із центра, коло радіусом  $OE_1$ , що дорівнює великій півосі  $a$ ; продовжимо ординату  $QQ_1$  до перетину з побудованим допоміжним колом. Нехай вони перетинаються в точці  $q$ . З'єднаємо точку  $q$  з центром еліпса  $O$ . Кут  $qOE_1$  і буде зведеною широтою  $u$  точки  $Q$ .

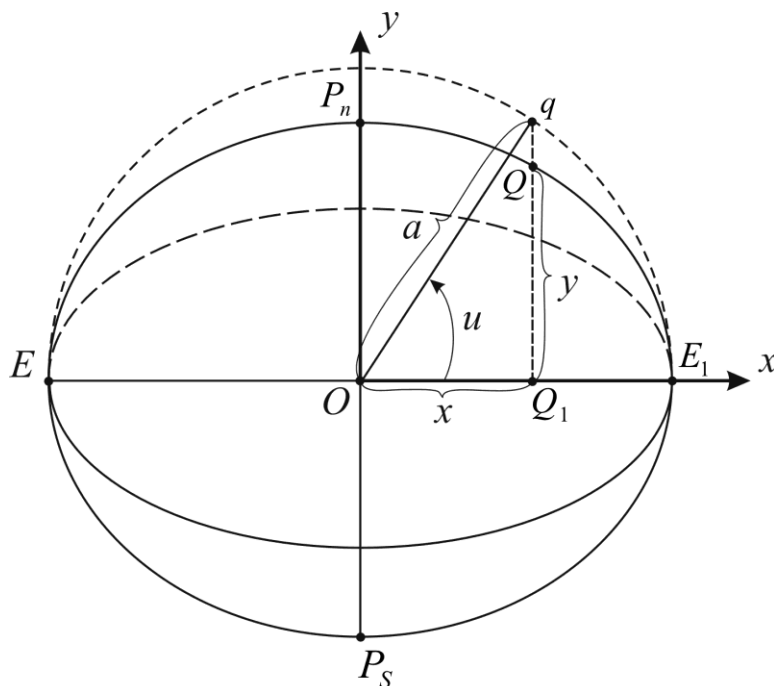


Рис. 10. Система координат із зведеною широтою та геодезичною довготою

На рис. 10 також показана система прямокутних плоских координат  $x, y$ , віднесена до площини меридіанного еліпса, на якому розташована точка  $Q$ . У цій системі координат положення точки  $Q$  визначають координатами:

$$\begin{aligned} x &= OQ_1; & y &= QQ_1. \\ x &= a \cos u, \end{aligned} \quad (3.13)$$

і на основі (3.12):

$$y = qQ_1 \frac{b}{a},$$

але

$$qQ_1 = a \sin u,$$

тому

$$y = a \sin u \frac{b}{a} = b \sin u. \quad (3.14)$$

(3.13) та (3.14) є рівняннями еліпсу в параметричній формі.

### **Система прямокутних сфероїдних координат $p, q$**

Осі сфероїдних прямокутних координат розташовують на поверхні еліпсоїда. Залежно від положення координатних осей будемо мати різні системи координат, які, залишаючись сфероїдними, будуть мати власні особливості. Дамо описання найпростішої системи прямокутних сфероїдних координат.

Меридіан, якій проходить через точку  $A$ , приймемо за першу координатну вісь – вісь абсцис. Абсциси будемо вважати додатними для точок, що лежать на північ від точки  $A$ , і від'ємними для точок, що лежать на південь від точки  $A$ . Для визначення положення точки  $Q$  проведемо через точку  $Q$  нормальний переріз таким чином, щоб він перетинав меридіан початкової точки  $A$  під кутом  $90^\circ$ .

$$AQ_1 = p; \quad QQ_1 = q.$$

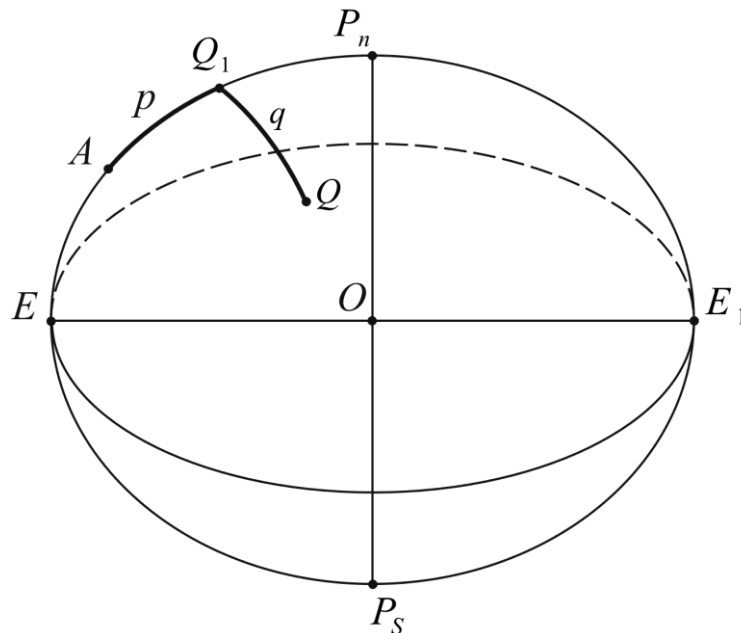


Рис. 11. Система прямокутних сфероїдних координат  $p, q$

### 3. Зв'язок між деякими системами координат

#### *Зв'язок між геодезичною та зведеною широтами*

У разі елементарного зміщення вздовж меридіана з точки  $Q$  (рис. 12) з широтою  $B$  у точку  $Q_1$  широта збільшиться на  $dB$ , координата  $Z$  збільшиться на  $dZ$ , а радіус паралелі зменшиться на  $dr$ .

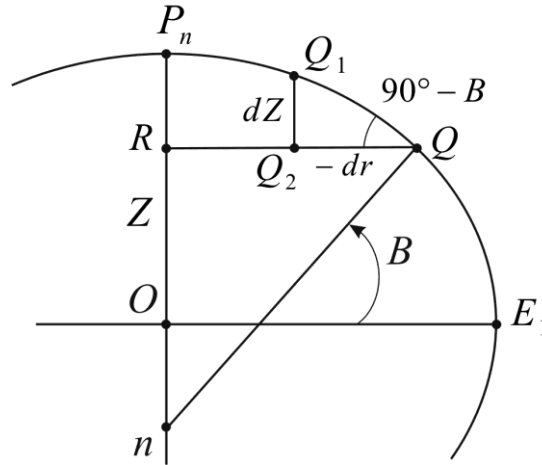


Рис. 12. Встановлення зв'язку між геодезичною та зведеною широтами

Як наслідок:

$$\operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tg} u. \quad (3.15)$$

Це основна формула, що встановлює залежність між геодезичною та зведеною широтами. Якщо скористатись співвідношеннями:

$$\frac{b}{a} = 1 - \alpha = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{a}{c} = \frac{e}{e'}, \quad (3.16)$$

то з формули (3.15) можна одержати:

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg} u, \quad (3.17)$$

$$\operatorname{tg} u = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B, \quad (3.18)$$

$$\operatorname{tg} u = (1 - \alpha) \operatorname{tg} B, \quad (3.19)$$

$$\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u = n(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} u). \quad (3.20)$$

***Зв'язок між геодезичною широтою  $B$ , зведеною широтою  $u$  та геоцентричною широтою  $\Phi$***

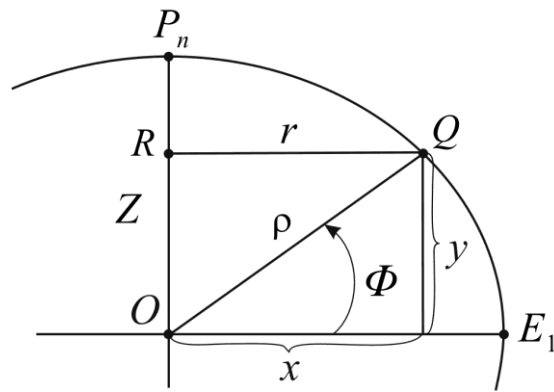


Рис. 13. Встановлення зв'язку між геодезичною широтою  $B$ , зведеною широтою  $u$  та геоцентричною широтою  $\Phi$

Із рис. 13 знаходимо:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{Z}{r}.$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} u. \quad (3.24)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} B. \quad (3.25)$$

**Зв'язок між системою прямокутних просторових координат  $X, Y, Z$  та іншими системами**

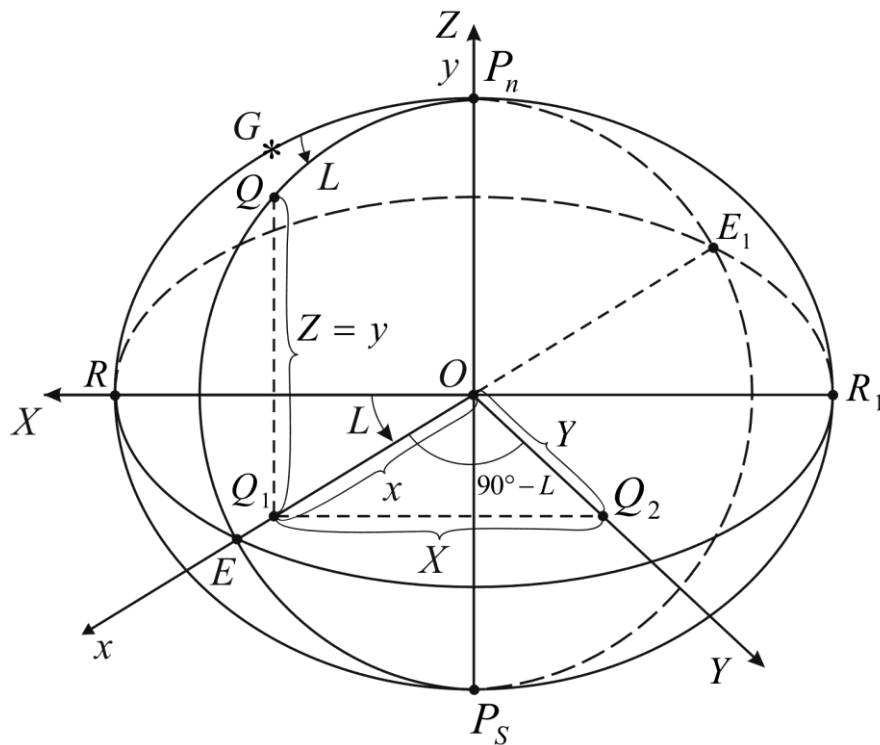


Рис. 14. Встановлення зв'язку між системою прямокутних просторових координат  $X, Y, Z$  та іншими системами координат

$$\left. \begin{aligned} X &= a \cos u \cos L \\ Y &= a \cos u \sin L \\ Z &= b \sin u = a \sqrt{1-e^2} \sin u \end{aligned} \right\}. \quad (3.49)$$

На основі (3.47), (3.39) і (3.40) напишемо:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a \cos B \cos L}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \\ Y &= \frac{a \cos B \sin L}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \\ Z &= \frac{a(1-e^2) \sin B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \end{aligned} \right\}. \quad (3.50)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a^2 \cos B \cos L}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \\ Y &= \frac{a^2 \cos B \sin L}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \\ Z &= \frac{b^2 \sin B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}} \end{aligned} \right\}. \quad (3.51)$$

#### 4. Міжнародні та референц-еліпсоїди. Світові та референсні системи координат

**Референц-еліпсоїд Ф.М. Красовського. Система координат 1942 року (СК-42). Система координат 1963 року (СК-63)**

У тридцятих роках минулого століття в Центральному науково-дослідному інституті геодезії, аерозйомки та картографії (ЦНДІГАіК) була розпочата систематична обробка матеріалів радянських і закордонних тріангуляцій з метою одержати нові розміри земного еліпсоїда. Ця робота проводилась у ЦНДІГАіК спочатку під безпосереднім керівництвом проф. Ф.М. Красовського, а дещо пізніше – під керівництвом проф. О.О. Ізотова за загальним керівництвом Ф.М. Красовського.

Нові значення розмірів земного еліпсоїда одержані в ЦНДІГАіК у 1940 році. При цьому виведенні еліпсоїда були використані результати великих астрономо-геодезичних вимірювань, виконаних у СРСР, сумісно з даними визначень сили ваги, а також результати астрономо-геодезичних робіт, виконаних у США та Західній Європі.

Постановою Ради Міністрів СРСР від 7 квітня 1946 року за №760 ці розміри еліпсоїда затверджені для геодезичних робіт, а еліпсоїду дано назву еліпсоїда Красовського.



Поверхня еліпсоїда Красовського (референц-еліпсоїда) була прийнята як координатна для встановлення системи координат стосовно території Радянського Союзу – системи координат 1942 року. Система координат 1942 року є референчною системою прямокутних координат на площині, яка базується на використанні конформної проекції Гаусса-Крюгера, з вихідними даними:

- референц-еліпсоїд Красовського – велика піввісь  $a = 6378245$  м, полярне стиснення  $\alpha = 1:298,3$ ;

- орієнтування референц-еліпсоїда Красовського в тілі геоїда виконане по Пулково (Пулковська астрономічна обсерваторія Академії наук СРСР);

- висота геоїда в Пулково над референц-еліпсоїдом дорівнює нулю;

- геодезичні координати Пулковської обсерваторії (центр сигналу  $A$ ):

широта  $59^{\circ} 46' 15,359''$ ,

довгота від Грінвіча  $30^{\circ} 19' 28,318''$ ;

- геодезичний азимут із Пулково на пункт Бугри  $121^{\circ} 06' 42,305''$ .

Прямокутні координати Державної геодезичної мережі обчислюються на площині в конформній проекції Гаусса-Крюгера в шестиградусних зонах, осьовими меридіанами яких є меридіани з довготами  $21^{\circ}, 27^{\circ}, 33^{\circ}, 39^{\circ}$ .

Початком координат у кожній зоні є точка перетину осьового меридіана з екватором. Значення ординати на осьовому меридіані беруть таким, що дорівнює 500 км.

При топографічних зйомках у масштабах 1:5000 і більше, крім прямокутних координат у шестиградусних зонах обчислюються прямокутні координати у триградусних зонах. Осьовими меридіанами цих зон у системі координат 1942 року є меридіани з довготами  $21^{\circ}, 24^{\circ}, 27^{\circ}, 33^{\circ} \dots 39^{\circ}$ .

Система координат 1942 року використовувалась у Радянському Союзі. У незалежній Україні ця система координат використовувалась до 31 грудня 2006 року.

Система координат 1963 року – система прямокутних координат на площині у триградусних зонах, яка має зв'язок із системою координат 1942 року. Умовна система СК-63 була розроблена згідно з постановою ЦК КПРС та Ради Міністрів СРСР від 14 лютого 1963 року за № 208-76 і відмінена постановою ЦК КПРС та Ради Міністрів СРСР від 25 березня 1987 року за № 373-85.

Проекція топографічних карт масштабу 1:10000 у СК-63 використовує триградусні зони замість стандартних шестиградусних у СК-42. Відповідно штучний зсув початку координат на захід має величину 250000 м. Номер зони визначається за другим числом номенклатури, зони відлічуються локально зліва направо у межах літерної області, осьові меридіани зон зсунуті на захід на півградуса. Крім них у кожній області є індивідуальні спотворення: осьовий меридіан зсунутий відносно базового зсуву на декілька кутових мінут на захід або схід, такий же випадковий зсув на декілька мінут є і за широтою, і, нарешті, початок відліку координат зсунутий відносно екватора ще на декілька кілометрів (зазвичай понад 10 км, також змінна величина).

Для приведення вимірних напрямків на площину триградусних зон системи координат 1963 року користуються формулою:

$$\delta_{12} = (x_1 - x_2)[0,0008444(2y_1 + y_2) - 0,7599],$$

де  $\delta_{12}$  – поправка за приведення виміряного напрямку на площину триградусної зони СК-63;  $x_1, x_2, y_1, y_2$  – координати пунктів у системі 1963 року в кілометрах.

***Міжнародний геоцентричний еквіпотенціальний еліпсоїд обертання GRS 1980 і Геодезична Референцна Система 1980 року (Geodetic Reference System). Міжнародна земна референцна система координат ITRS/ITRF. Європейська земна референцна система координат ETRS/ETRF.***

GRS 1980 була прийнята XVII Генеральною асамблеєю міжнародного союзу геодезії та геофізики (IUGG) у Канбері (Австралія) в грудні 1979 року Резолюцією №7. По суті, ця резолюція, яка призначає, що Геодезична Система Відліку 1967 року, прийнята на XIV Генеральній асамблеї IUGG у Люцерні (Швейцарія) в 1967 році, більше не представляє розмір, форму та гравітаційне поле Землі з точністю, що відповідає багатьом геодезичним, геофізичним, астрономічним і гідрографічним додаткам, і вважає, що тепер досягнуті більш придатні значення, рекомендує замінити Геодезичну Систему Відліку 1967 року новою Геодезичною системою відліку 1980 року, яка також базується на теорії геоцентричного еквіпотенціального еліпсоїда. Чотири параметри, що визначають GRS 1980 наведені в табл. 1.

Зазначимо, що наведені у табл. 1 значення визначаються як точні. Зверніть увагу на те, що  $fM$  «геоцентрична гравітаційна стала Землі», визначається як «добуток (ньютонівський) гравітаційної сталої та маси Землі».

## Параметри, що визначають GRS 1980

| Параметр і його значення                                          | Опис                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a = 6378137$ м                                                   | Велика піввісь еліпсоїда                                                                     |
| $fM = 3986005 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$         | Геоцентрична гравітаційна стала Землі (включаючи атмосферу)                                  |
| $J_2 = 108263 \cdot 10^{-8}$                                      | Коефіцієнт динамічного стиснення Землі (виключаючи остаточну деформацію внаслідок припливів) |
| $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ | Кутова швидкість обертання Землі                                                             |

На основі цих визначальних параметрів і з використанням формул зв'язку можна знайти значення геометричних і фізичних параметрів, вказаних у табл. 2 (на епоху 2005 року).

Поверхня еліпсоїда GRS 1980 прийнята як основна координатна поверхня для системи координат ITRS (International Terrestrial Reference System – Міжнародна земна референсна система) та її відповідна реалізація ITRF (International Terrestrial Reference Frame). Система ITRF реалізована відповідним числом земних пунктів, в яких беруть до уваги **часові зміни** (тектоніка плит, припливний ефект). З цієї причини система ITRF регулярно оновлюється (майже кожен рік) та доповнюється даними, які використані у формуванні систем ITRF 89, ITRF 90, ITRF 91, ITRF 92, ITRF 93, ITRF 94, ITRF 95, ITRF 96, ITRF 97, ITRF 2000 і так далі. Тому система ITRS/ITRF прийнята за стандартну (еталонну) систему координат.

ITRS/ITRF – це права, жорстко пов'язана з Землею, ортогональна система координат. Її початок та осі визначені так:

- початок збігається з центром мас Землі;
- вісь  $Z$  спрямована на IERS (International Earth Rotation Service – Міжнародна служба обертання Землі) відліковий полюс (IRP), що відповідає напрямку ВІН (Bureau International d'Heure – Міжнародне бюро часу) на земний полюс (СТР – Conventional Terrestrial Pole), визначений на відповідну епоху;
- вісь  $X$  являє собою перетин IERS відлікового меридіана (IERS Reference Meridian – IRM) з площиною, що проходить через початок координат перпендикулярно осі  $Z$  (площина екватора); міжнародний відліковий меридіан IRM збігається з нульовим меридіаном ВІН, визначеного на відповідну епоху;
- вісь  $Y$  ортогонально доповнює зцентровану із Землею та жорстко пов'язану з нею («earth – centred – earth – fixed» - ECEF) систему координат до правої.

Оновлення ITRF на відповідну епоху виконують за даними різних, згаданих раніше, міжнародних служб. До них належать:

1. IERS (International Earth Rotation Service) – Міжнародна служба обертання Землі;
2. BIH (Bureau International d'Heure) – Міжнародне бюро часу;
3. ICET (International Center for Earth Tides) – Міжнародний центр земних припливів;
4. IPMS (International Polar Motion Service) – Міжнародна служба руху полюса Землі.

Система ITRF побудована та розвивається з використанням вимірювань, виконаних декількома космічними геодезичними технологіями: VLBI (Very Long Baseline Interferometry) – Міжнародна служба радіоінтерферометрії з наддовгими базами; SLR (Satellite Laser Ranging) – Міжнародна служба лазерної локації ІІСЗ і Місяця; DORIS (Doppler Orbitography and Radio positioning Integrated by Satellite) – Міжнародна служба DORIS; GPS (Global Positioning System) – Глобальна система визначення місцеположення.

Отже, основною проблемою при вирішенні питання введення нової геодезичної референцної системи координат, яка б базувалася на сучасних геодезичних технологіях, є збереження наявного картографічного матеріалу й оптимізація редуційної задачі. Під оптимізацією розуміють наближення геодезичної референцної системи  $B, L, H$  до системи координат, що зв'язана з гравітаційним полем  $\varphi, \lambda, H^{\gamma}$  ( $\varphi, \lambda$  – астрономічні координати;  $H^{\gamma}$  – нормальна висота).

***Геоцентричний еквіпотенціальний еліпсоїд обертання WGS 1984. Світова геодезична референцна система координат WGS 1984 (World Geodetic System 1984 – Світова система координат 1984 року)***

WGS 1984 може розглядатись як свого роду спадкоємець GRS 1980. Важливість WGS 1984 продовжує зростати, тому доцільно описати її детальніше.

Успадковуючи National Imagery and Mapping Agency (2000) США, WGS 1984 являє собою деяку загальноприйнятту наземну систему відліку (Conventional Terrestrial Reference System (CTRS)), побудовану за такими критеріями Міжнародної служби обертання Землі (International Earth Rotation Service (IERS)):

- система геоцентрична, при цьому центр мас визначається для всієї Землі, враховуючи океани й атмосферу;
- масштаб системи відповідає шкалі наземної системи відліку з точки зору релятивістської теорії гравітації;
- вихідна орієнтація системи 1984.0 визначена Міжнародним бюро часу (Bureau International d'Heure (BIH));

- часова еволюція системи в орієнтуванні не створює ніякого залишкового глобального обертання відносно земної кори.

WGS 1984 – це права, жорстко пов’язана з Землею, ортогональна система координат. Її початок та осі визначені так:

- початок збігається з центром мас Землі;
- вісь  $Z$  спрямована на IERS відліковий полюс (IRP), що відповідає напрямку ВІН на земний полюс (Conventional Terrestrial Pole (СТР)) епохи 1984.0; іншими словами, вісь  $Z$ , за домовленістю, ідентична середньому положенню осі обертання Землі;

- вісь  $X$  являє собою перетин IERS відлікового меридіана (IERS Reference Meridian (IRM)) з площиною, що проходить через початок координат перпендикулярно осі  $Z$  (площина екватора); міжнародний відліковий меридіан IRM збігається з нульовим меридіаном ВІН епохи 1984.0; іншими словами, вісь  $X$  пов’язана з середнім грінвіцьким меридіаном;

- вісь  $Y$  ортогонально доповнює зцентровану із Землею та жорстко пов’язану з нею («earth – centred – earth – fixed» (ECEF)) систему координат до правої.

Початок відліку WGS 1984 є також геометричним центром WGS 1984 еліпсоїда, а вісь  $Z$  служить віссю обертання цього еліпсоїда.

На цьому закінчується опис WGS 1984 відповідно до National Imagery and Mapping Agency (2000). Зазначимо, що визначення WGS 1984 CTRS істотно не змінилось.

#### *Відлікові системи WGS 1984; ITRF*

Згідно National Imagery and Mapping Agency (2000) прикладом наземної відлікової конструкції є – на базі попереднього визначення – відлікова конструкція WGS 1984 (часто позначається просто як WGS-84, що ми також зробимо). Відповідний цій конструкції еліпсоїд обертання з початку визначений чотирма параметрами: 1) великою піввіссю  $a$ ; 2) нормованим зональним коефіцієнтом  $\bar{C}_{20}$ ; 3) заокругленою кутовою швидкістю обертання Землі  $\omega$ ; 4) гравітаційною сталою Землі  $f$ . Ця конструкція використовується для GRS з 1987 року.

Інший приклад відлікової конструкції побудованої IERS називається, як було відмічено раніше, Міжнародною землею відліковою конструкцією (International Terrestrial Reference Frame (ITRF)). Порівняння початків WGS-84 та ITRF виявляє примітні відмінності:

1. WGS-84 встановлена шляхом доплерівських спостережень супутниковою системою TRANSIT, а ITRF заснована на супутникових лазерних віддалях (SLR) і довгобазисній інтерферометрії (VLBI). Точність станцій TRANSIT оцінюється величиною порядку 1 – 2 м, а точність ITRF станцій має сантиметровий рівень.

2. Числові значення початково визначених параметрів системи WGS відрізняються від параметрів ITRF. Однак, єдина істотна відмінність наявна в параметрі гравітаційної сталої Землі  $f_{WGS-84} - f_{ITRF} = 0,582 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$  за рахунок невеликої різниці супутникових орбіт.

У зв'язку з викладеним, колишнє Військове картографічне агентство США (U.S. Defence Mapping Agency (DMA)) запропонувало замінити значення  $f$  у WGS-84 стандартним IERS значенням і уточнити координати GPS-станцій стеження. виправлена WGS-84, починаючи з 2 січня 1994 року, почала називатись WGS-84 (G 730), де «G» вказує на те, що відповідні координати одержані за допомогою GPS, а «730» є номером GPS тижня, коли DMA здійснило корегування системи. У 1996 році Національне картографічне агентство США (U.S. National Imagery and Mapping Agency (NIMA)) – спадкоємець DMA – виконало нове уточнення, і з 29 вересня 1996 року конструкція почала називатись WGS-84 (G 873). Вона реалізується станціями спостережень з уточненими координатами. Відповідний еліпсоїд і його гравітаційне поле тепер визначаються чотирма параметрами  $a$ ,  $\alpha$ ,  $fM$ ,  $\omega$ , які дуже мало відрізняються від відповідних ITRF значень (наприклад, сучасна WGS-84 конструкція та ITRF мають незначні систематичні відмінності (менше 2 см)). На практиці обидві конструкції вважаються ідентичними.

Зазначимо, що виправлення відлікової конструкції WGS-84 зменшили невизначеності в її координатах, гравітаційному полі та висотах геоїда, але *ніяк не змінили визначення WGS-84 у розумінні координатної системи!*

Загалом, співвідношення між WGS-84 та ITRF характеризується двома положеннями:

1. WGS-84 та ITRF не мають протиріч;
2. відмінності між WGS-84 та ITRF для всієї Землі мають сантиметровий рівень.

#### *Чисельні значення для відлікової конструкції WGS-84*

Відліковий еліпсоїд і його гравітаційне поле повністю визначаються чотирма константами. Їх значення для WGS-84 наведені в табл. 3.

*Таблиця 3*

#### **Параметри, що визначають WGS-84**

| Параметр і його значення                                          | Опис                                                        |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| $a = 6378137 \text{ м}$                                           | Велика піввісь еліпсоїда                                    |
| $\alpha = 1/298,257223563$                                        | Обернене стиснення еліпсоїда                                |
| $fM = 3986004,418 \cdot 10^8 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2}$     | Геоцентрична гравітаційна стала Землі (включаючи атмосферу) |
| $\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ | Кутова швидкість обертання Землі                            |

## ***Українська система координат УСК – 2000***

Застосування сучасних супутникових технологій в практиці геодезичного та картографічного забезпечення доводить, що ефективне використання глобальних навігаційних супутникових систем типу GPS, ГЛОНАСС у діючій на той час системі координат 1942 року в багатьох випадках було неможливе. Це пояснюється такими причинами:

- система координат 1942 року не забезпечувала на необхідному рівні точності однозначного переходу до геоцентричної системи координат, в якій функціонують глобальні супутникові навігаційні системи GPS і ГЛОНАСС. Середня квадратична похибка переходу із системи координат 1942 року до геоцентричної становить близько 4 – 5 м;
- відсутність однозначних параметрів зв'язку з іншими референцними системами, поширеними в світі, зокрема для забезпечення загальнодержавного картографування;
- похибки взаємного положення пунктів Державної геодезичної мережі (ДГМ) у системі координат 1942 року на відстанях 50 – 100 км можуть досягати 1 м і більше, що не дозволяє в багатьох випадках з необхідною точністю виконувати геодезичну прив'язку до пунктів ДГМ чи інших спеціальних мереж, які будуються з використанням супутникових приймачів GPS і ГЛОНАСС;
- деформація ДГМ у системі координат 1942 року в межах зон використання місцевих систем координат у багатьох випадках не забезпечує з необхідною точністю визначення параметрів переходу до місцевих систем координат.

Починаючи з 2002 року, в Укргеодезкартографії за участі НУ «Львівська політехніка» та Київського національного університету будівництва і архітектури розпочато наукові дослідження щодо вибору оптимального шляху побудови державної геодезичної системи відліку.

Результати наукових досліджень служили обґрунтуванням для прийняття Кабінетом Міністрів України Постанови щодо впровадження на території України державної референцної системи координат УСК – 2000.

### ***Державна геодезична референцна система координат УСК – 2000***

#### **Визначення**

Система координат УСК – 2000 встановлена за умови паралельності її осей просторовим осям Міжнародної загальноземної референцної системи координат ITRS. За поверхню відліку в системі координат УСК – 2000 взято референц-еліпсоїд Красовського.

Система координат УСК – 2000 чітко узгоджена з Міжнародною загальноземною референчною системою координат ITRS на епоху 2000 року – ITRF 2000, яка закріплена пунктами космічної геодезичної мережі.

#### Реалізація

Державна геодезична референцна система координат УСК – 2000 встановлена для виконання топографо-геодезичних та картографічних робіт на території України (Постанова Кабінету Міністрів України «Деякі питання застосування геодезичної системи координат» від 22 вересня 2004 року за №1259). З моменту введення системи координат УСК – 2000 (1 січня 2007 року) у процесі виконання нових робіт замінила систему координат 1942 року.

Отримана в результаті сумісного вирівнювання пунктів Української перманентної мережі спостережень Глобальних супутникових систем і ДГМ 1 – 4 класів на епоху 2005 року, система координат 2000 року закріплена пунктами ДГМ. У 2005 році були виконані супутникові радіонавігаційні спостереження на 740 пунктах Державної геодезичної мережі 1-го класу. В цілому планова геодезична мережа включає 15085 пунктів 1, 2, 3-го класів та 7664 пункти 4-го класу.

УСК – 2000 змодельована відповідно до системи ITRS/ITRF 2000 за умовами:

- масштаб референцної системи дорівнює масштабу системи ITRS/ITRF 2000;
- осі координат референцної системи паралельні осям координат системи ITRS/ITRF 2000;
- розміщення центра референцної системи координат (суміщене з центром референц-еліпсоїда) забезпечує оптимальне відхилення поверхні референц-еліпсоїда від реальної поверхні Землі на регіон України, тобто мінімізація поправок за висоти геоїда та відхилення прямовисних ліній.

#### *Параметри системи УСК – 2000*

За поверхню відліку в системі координат УСК – 2000 прийнятий референц-еліпсоїд Красовського з параметрами:

- велика піввісь  $a = 6378245$  м;
- обернене стиснення  $\frac{1}{298,3}$ .

Положення пунктів у прийнятій системі координат визначається координатами:



- просторовими прямокутними  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (вісь  $Z$  збігається з віссю обертання еліпсоїда, вісь  $X$  лежить у площині екватора та в площині нульового меридіана, а вісь  $Y$  доповнює систему як праву; початком системи координат є геометричний центр еліпсоїда);
- геодезичними (еліпсоїдальними): широтою  $B$ , довготою  $L$ , висотою  $H$ ;
- плоскими прямокутними  $x$  та  $y$ , які обчислюються в проекції Гаусса-Крюгера.

Геодезична висота  $H$  утворюється як сума нормальної висоти та висоти квазігеоїда над еліпсоїдом Красовського. Нормальні висоти геодезичних пунктів визначаються в Балтійській системі висот 1977 року, вихідним початком якої є нуль Кронштадтського футштока, а висоти квазігеоїда обчислюються над еліпсоїдом Красовського.

### ***Місцеві системи координат***

У процесі виконання топографо-геодезичних робіт у населених пунктах та на об'єктах промислового виробництва, які розташовані на великих територіях, виникає необхідність встановлення (у разі відсутності) місцевої системи координат. Місцеві системи координат встановлюються з метою мінімального спотворення проекції Гаусса-Крюгера, зручності у використанні та застосовуються під час виконання геодезичних робіт та створенні топографічних планів у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500 на території міст та інших населених пунктів, промислових комплексів усіх галузей народного господарства, підприємств гірничодобувної та нафтодобувної промисловості. Усі нові топографо-геодезичні роботи на цих територіях виконуються в раніше прийнятих місцевих системах координат. Встановлення нової або внесення змін до наявної місцевої системи координат проводиться у випадках:

- якщо на об'єктах не виконувались топографо-геодезичні роботи та відповідно не були встановлені місцеві системи координат;
- якщо місцеві системи були не зв'язані з державними системами;
- якщо об'єкти примикають один до одного і для кожного з них була встановлена своя місцева система координат.

Місцева система координат – система координат, яка була утворена від державної системи координат 1942 року шляхом введення відповідних «ключів» переходу. Однією з різновидів місцевих систем координат є геологічна система координат.

Система координат Місцева – II – система координат, яка була утворена від системи координат 1963 року шляхом введення відповідних «ключів» переходу.

Відсутність місцевої системи координат або необхідність внесення змін до неї підтверджується даними органів місцевого самоврядування та Державного картографо-геодезичного фонду України (далі – Укркартгеофонд), що офіційно засвідчується довідкою.

Матеріали топографо-геодезичних і картографічних робіт у місцевих системах координат використовуються згідно з вимогами Інструкції СТГМ – 90. «Ключі» переходу до місцевих систем координат зберігаються в Укркартгеофонді. Матеріали топографо-геодезичних і картографічних робіт підлягають передачі на зберігання до Укркартгеофонду згідно з «Положенням про порядок надходження, зберігання, використання та обліку матеріалів Державного картографо-геодезичного фонду України», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України за № 1344 від 22 липня 1999 року.

## **5. Українська перманентна мережа глобальних навігаційних супутникових спостережень (УПМ ГНСС)**

У 1995 році в Україні в ході реалізації проекту Технічної робочої групи підкомісії EUREF було зроблено перші кроки, спрямовані на побудову Української постійно діючої мережі спостережень ГНСС. Пункти Української перманентної мережі (УПМ) рівномірно розміщені по всій території країни з середніми відстанями між ними 200 – 300 км. Основні функції мережі:

- задавання та оперативне відтворення загальноземної геоцентричної системи координат;
- усунення можливих спотворень ДГМ та мереж згущення в регіональному та глобальному масштабах;
- експериментальне виявлення та облік деформуючого впливу геодинамічних процесів на стабільність координатної основи (так зване зведення до єдиної епохи);
- метрологічне забезпечення перспективної виробничої діяльності (еталонування й атестація майбутніх високоточних космічних та інших систем).

За станом на листопад 2012 року в Україні існує 12 перманентних станцій, відомості про які наведено в табл. 6.

**Перманентні станції, розташовані на території України,  
станом на 1 листопада 2012 року**

| Номер станції | Ідентифікатор станції | Назва станції         | Місцеположення пункту                                                        | Організація, яка встановила перманентну станцію |
|---------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1             | GLSV                  | м. Київ –<br>Голосіїв | На даху головного корпусу ГАО НАНУ                                           | ГАО НАНУ                                        |
| 2             | POLV                  | м. Полтава            | На даху головного корпусу Полтавської гравіметричної обсерваторії ПГО        | НКАУ, НДІГК, УкрДАГП                            |
| 3             | SULP                  | м. Львів              | На даху головного корпусу НУ «ЛП»                                            | НКАУ, НДІГК, УкрДАГП                            |
| 4             | UZHL                  | м. Ужгород            | На даху астрономічної обсерваторії Ужгородського державного університету     | ГАО НАНУ                                        |
| 5             | MIKL                  | м. Миколаїв           | На даху головного корпусу Миколаївської астрономічної обсерваторії           | НКАУ, НДІГК, УкрДАГП                            |
| 6             | EVPA                  | м. Євпаторія          | На стовпі неподалік станції лазерної локації супутників                      | ГАО НАНУ                                        |
| 7             | KNAR                  | м. Харків             | На даху корпусу Державного науково-дослідного інституту «Метрологія»         | ГАО НАНУ                                        |
| 8             | CRAO                  | м. Сімеїз             | На стовпі неподалік станції лазерної локації супутників КраО                 | Массачусетський технологічний інститут (США)    |
| 9             | DNMU                  | м. Дніпропетровськ    | На даху Національного гірничого університету                                 | Національний гірничий університет               |
| 10            | ALCI                  | м. Алчевськ           | На даху обсерваторії ДМЦ «Оріон» (Донбаський гірничо-металургійний інститут) | НКАУ, НДІГК, УкрДАГП                            |

|    |      |             |                                                                               |          |
|----|------|-------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 11 | SHAZ | м. Шацьк    | На даху<br>радіотехнічного<br>корпусу бази НУ «ЛП»                            | НУ «ЛП»  |
| 12 | CNIV | м. Чернігів | На даху Чернігів-<br>ського державного<br>інституту економіки і<br>управління | ГАО НАНУ |

#### Примітка

- ГАО НАНУ – Головна астрономічна обсерваторія Національної академії наук України;
- НКАУ – Національне космічне агентство України;
- НДІГК – Науково-дослідний інститут геодезії і картографії;
- УкрДАГП – Українське Державне аерогеодезичне підприємство;
- КрАО – Кримська астрономічна обсерваторія;
- НУ «ЛП» – Національний університет «Львівська політехніка».

Перші 7 станцій входять до складу мереж EPN (European Permanent Network – Європейська перманентна мережа) та IGS (International GPS Service); CRAO (м. Сімеїз) входить до складу Середземноморської GPS-мережі (Mediterranean GPS Network); ALCI (м. Алчевськ) та SHAZ (м. Шацьк) також входять до складу мереж EPN та IGS. Окрім того, працює перманентна станція, встановлена працівниками Дніпропетровської національної гірничої академії та Чернігівського державного інституту економіки і управління.

Головною метою встановлення мережі перманентних станцій є підтримка координатних систем ITRS та ETRS 89, а також забезпечення високоточними даними геодинамічних досліджень моніторингу рівня морів, метеорологічні дослідження тощо. Близько 50% перманентних станцій EPN входять до мережі Міжнародної Геодинамічної Служби (IGS). Результати спостереження на перманентних станціях раз на добу або щогодини передаються для обробки в обчислювальні центри системи обробки даних. Близько 36 перманентних станцій передають дані спостережень для обробки погодинно. Координація діяльності мережі перманентних станцій здійснюється Бельгійською Королівською Обсерваторією, де знаходиться Центральне Бюро Перманентної мережі.

## **6. Трансформування координатних систем**

Для визначення *геодезичних дат* або *геодезичної системи відліку (референц-системи)* необхідно задати:

- розміри референц-еліпсоїда (велика піввісь  $a$  та стиснення  $\alpha$ );
- його положення відносно Землі або геоїда.

Це взаємне положення найпростіше визначити за допомогою координат  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  центра еліпсоїда відносно геоцентра, тобто так звані

абсолютні лінійні елементи орієнтування. Оскільки геоцентр не був у доступі для класичних геодезичних вимірів до настання супутникової ери, то *фундаментальна* або *початкова точка*  $P_1$  на земній поверхні просто обиралась, як, наприклад, Потсдам для центральної Європи або Пулково для СРСР. З'ясовується, що зручний, але умовний вибір геодезичних координат  $B_0, L_0, H_0$  фундаментальної точки  $P_1$  еквівалентний вибору координат  $x_0, y_0, z_0$  цього геоцентра. Таким чином, маємо п'ять визначальних параметрів:

- два параметри (велика піввісь  $a$  та стиснення  $\alpha$ ) визначають **форму**;
- три параметри  $x_0, y_0, z_0$  (або  $B_0, L_0, H_0$ ) визначають **положення**.

Перетворення (геодезичної) референц-системи визначає залежність між глобальною (геоцентричною) та локальною (в загальному випадку – негеоцентричною) тривимірними системами прямокутних просторових координат, і, як наслідок, переводить одну систему координат деякого типу в іншу того ж типу. Це – одна з основних задач при комбінуванні даних GPS із наземними даними, оскільки доводиться перетворювати геоцентричну систему координат WGS-84 до локальної земної системи координат. Земна система зазвичай ґрунтується на спеціально підібраному еліпсоїді, локально оптимальної апроксимації, наприклад на еліпсоїді Кларка або еліпсоїді GRS-80 у США; еліпсоїді Бесселя в багатьох частинах Європи; еліпсоїді Красовського в Україні. Локальний еліпсоїд пов'язаний з негеоцентричною системою прямокутних просторових координат, початок якої збігається з центром еліпсоїда.

Розглянемо дві системи прямокутних просторових координат – спочатку в загальному вигляді – утворюючих два вектори  $X$  і  $X_T$  (рис. 15).

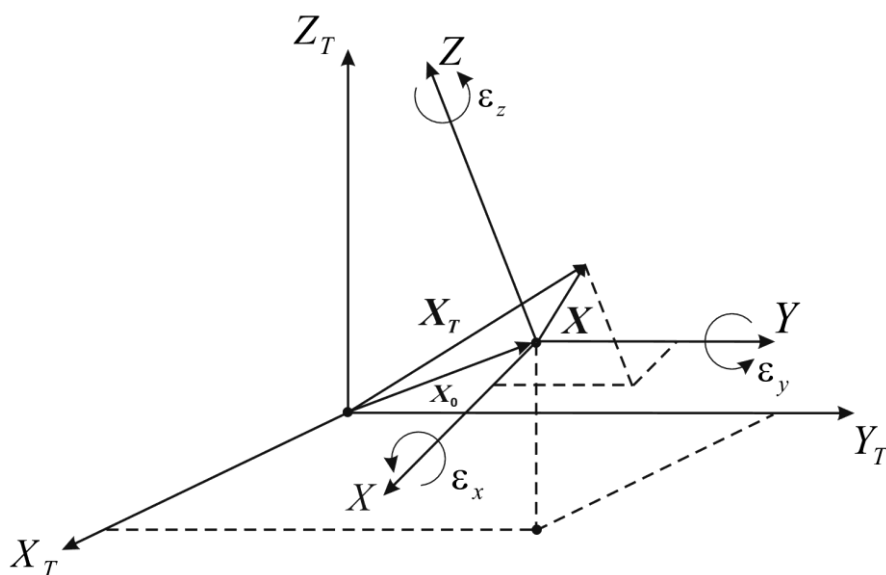


Рис. 15. Тривимірне перетворення

Семипараметричне перетворення між цими двома наборами в просторі, яке часто називають *перетворенням Гельмерта* або *перетворенням подібності*, визначається співвідношенням:

$$X_T = x_0 + \mu \cdot R \cdot X, \quad (3.54)$$

де  $x_0$  – вектор зсуву;  $\mu$  – масштабний коефіцієнт;  $R$  – матриця повороту.

Компоненти вектора зсуву:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

являють собою координати початку системи  $X$  у системі  $X_T$ . При цьому використовується єдиний масштабний коефіцієнт. У загальному випадку виникають три масштабні коефіцієнти – по одному для кожної осі (але при використанні GPS у цьому немає необхідності).

Матриця повороту – ортогональна матриця, яка складається з трьох почергових обертів:

$$R = R_z\{\varepsilon_z\}R_y\{\varepsilon_y\}R_x\{\varepsilon_x\}. \quad (3.56)$$

У явному вигляді маємо:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y \cos \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_z & \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_z \\ & + \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z & - \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z \\ - \cos \varepsilon_y \sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_z & \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_z \\ & - \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z & + \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z \\ \sin \varepsilon_y & - \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y & \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Якщо параметри перетворення  $x_0$ ,  $\mu$ ,  $R$  відомі, то координати будь-якої точки, які задані в системі  $X$ , можуть бути перетворені в систему  $X_T$  за формулою (3.54).

Якщо параметри перетворення невідомі, то вони можуть бути визначені за допомогою вузлових (ідентичних) точок, які називають також *контрольними точками*. Це означає, що координати однієї і тієї ж точки задані в обох системах. Оскільки кожна вузлова точка (яка задана в  $X_T$  і  $X$ ) призводить до трьох рівнянь, то для знаходження семи незалежних параметрів достатньо двох вузлових точок і одного додаткового спільного компонента (наприклад, висоти). На практиці зазвичай використовується надлишкова вузлова точка, і шукані параметри оцінюються методом найменших квадратів.

Оскільки параметри входять до рівняння (3.54) нелінійно, то доводиться виконувати лінеаризацію, для чого необхідні наближені значення  $x_{0набл}$ ,  $\mu_{набл}$ ,  $R_{набл}$  параметрів.

У випадку перетворення між WGS-84 та локальною системами координат виникають деякі спрощення. Так, при визначенні необхідних наближених значень можна покласти  $\mu_{набл} = 1$ , що дає співвідношення:

$$\mu = \mu_{набл} + \delta\mu = 1 + \delta\mu. \quad (3.58)$$

Крім того, кути повороту  $\varepsilon_i$  у виразі (3.57) – малі величини і можуть розглядатись як диференціали. Приймаючи у виразі (3.57)  $\cos \varepsilon_i = 1$  та  $\sin \varepsilon_i = \varepsilon_i$  та розглядаючи лише члени першого степеню, одержують:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} = I + \delta R, \quad (3.59)$$

де  $I$  – одинична матриця;  $\delta R$  – (кососиметрична) диференціальна матриця повороту.

Таким чином, допустимо наближення  $R_{набл} = I$ . Нарешті, вектор зсуву можна представити у вигляді:

$$x_0 = x_{0набл} + \delta x_0, \quad (3.60)$$

де наближений вектор зсуву:

$$x_{0набл} = X_T - X \quad (3.61)$$

одержаний підстановкою наближеного масштабного коефіцієнта і наближеної матриці повороту у формулу (3.54).

Використовуючи наближення (3.58), (3.59), (3.60) у формулі (3.54), одержують модель лінеаризації для однієї точки  $i$ . Ця модель може бути записана у вигляді:

$$X_{T_i} - X_i - x_{0набл} = A_i \delta p, \quad (3.62)$$

де ліва частина рівняння відома і формально може розглядатись як результат наближень.

Матриця коефіцієнтів  $A_i$  і вектор  $\delta p$ , що містить невідомі параметри, мають вигляд:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.63)$$

$$\delta p = [\delta x_0 \quad \delta y_0 \quad \delta z_0 \quad \delta \mu \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z]$$

Застосування методу найменших квадратів дає змогу знайти вектор параметрів  $\delta p$  і поліпшені значення величин (3.58), (3.59), (3.60). Після

визначення семи параметрів перетворення подібності формула (3.54) може використовуватись для перетворення координат інших точок (крім вузлових).

## 7. Головні радіуси кривини

Через кожну точку на поверхні еліпсоїда можна провести незчисленну множину площин, що проходять через нормаль до поверхні в даній точці. Ці площини називають *нормальними*. Плоскі криві, утворені як слід перетину цих площин із поверхнею, називають *нормальними перерізами*. Із нормальних перерізів істотне значення в геодезії мають два головні взаємно перпендикулярні перерізи, кривини яких набувають максимальне та мінімальне значення. Ці нормальні перерізи називають *головними нормальними перерізами*.

У деякій точці  $M$  поверхні еліпсоїда обертання головними нормальними перерізами, як відомо з диференціальної геометрії, є:

1) *меридіанний переріз*, що проходить через дану точку  $M$  та обидва полюси еліпсоїда  $P$  і  $P_1$  (рис. 31);

2) *переріз першого вертикала*, що проходить через точку  $M$  і перпендикулярно до меридіанного перерізу т.  $M$ .

На рис. 16: еліпс  $PME_1P_1E$  – меридіанний переріз, крива  $WMK$  – еліпс перерізу першого вертикала.

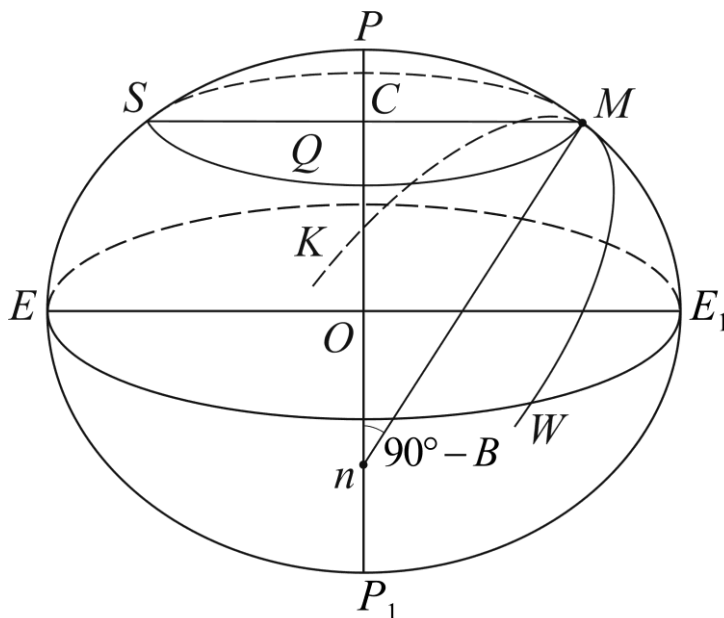


Рис. 16. Головні нормальні перерізи

Остаточно:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}. \quad (3.97)$$



Із рис. 31 випливає, що кут між площинами паралелі та першого вертикала вимірюється кутом  $CMn = B$ . Тому радіус  $r$  паралелі визначиться через радіус кривини першого вертикала  $N$  за формулою:

$$r = MC = N \cos B. \quad (3.103)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}, \quad (3.104)$$

де  $R$  – середній радіус кривини, що визначається як середнє геометричне з головних радіусів кривини в даній точці, тобто:

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2} = \frac{b}{W^2} = \frac{c}{V^2} \\ K &= \frac{1}{MN} = \frac{1}{R^2} = \frac{W^4}{a^2(1-e^2)} = \frac{W^4}{b^2} = \frac{V^4}{c^2} \end{aligned} \right\}. \quad (3.111)$$

Середній радіус кривини застосовується при зображенні частин поверхні еліпсоїда на кулі, при обчисленні площі і сферичних надлишків фігур на поверхні еліпсоїда.

### 8. Довжини дуг меридіанів і паралелей

$$X = \int_0^B M dB. \quad (3.140)$$

Це – еліптичний інтеграл. Він не виражається в елементарних функціях. Для практичного застосування достатньо знайти його наближено у вигляді ряду. З цією метою підінтегральну функцію  $M$  слід розвинути в ряд за степенями ексцентриситету еліпса, а потім цей ряд проінтегрувати почленно. Для розв’язання задачі можна взяти такий ряд:

#### *Довжина дуги паралелі*

Паралель є окружністю, радіус якої дорівнює  $N \cos B$ . Тому довжину паралелі  $\Delta Y$  між меридіанами з довготами  $L_1 = \text{const}$  і  $L_2 = \text{const}$  знайдемо як добуток радіуса паралелі на відповідний центральний кут  $\Delta L = L_2 - L_1$ , а саме:

$$\Delta Y = \frac{N \cos B}{\rho''} \Delta L''. \quad (3.146)$$

### Запитання для самоперевірки

1. Що таке Земний та референц еліпсоїд?
2. Що відноситься до основні математичних параметрів еліпсоїда?
3. Що таке параметричні лінії еліпсоїда?
4. Що таке меридіани та паралелі?

5. Які системи координат, застосовують у вищій геодезії?
6. Як встановлюється зв'язок між деякими системами координат?
7. Що таке Міжнародні та референц-еліпсоїди? Які особливості Світової та референсної системи координат?
8. Які параметри трансформації систем координат?
9. Що таке головні радіуси кривини?
10. Як пов'язані радіус кривини та кривина у даній точці поверхні?
11. Від чого залежить довжина дуги меридіанів і паралелей?

## Лекція 4. ДОСЛІДЖЕННЯ КРИВИХ НА ЗЕМНОМУ ЕЛІПСОЇДІ

### Питання

1. Геодезична лінія. Нормальні перерізи
2. Поправка у виміряний напрямок за висоту пункту спостереження

#### 1. Геодезична лінія. Нормальні перерізи

Геодезичною лінією називають таку лінію на поверхні, в кожній точці якої головна нормаль кривої збігається з нормаллю до поверхні ( $\bar{n} = \bar{m}$ ). Геодезична лінія є найкоротшою відстанню на будь-якій математичній поверхні. Прямі на площині, великі кола на сфері, гвинтові лінії на циліндрі та ін. – геодезичні лінії, оскільки вони є найкоротшими відстанями на цих поверхнях.

Через нормаль до поверхні еліпсоїда в деякій точці  $Q$  цієї поверхні проведемо під різними азимутами множину нормальних площин, які дають у перетині з поверхнею стільки ж нормальних перерізів. У спільній точці  $Q$  головна нормаль кожного нормального перерізу збігається з нормаллю до поверхні за побудовою. Кожен нормальний переріз у точці  $Q$  має свій радіус кривини, який можна знайти як величину, обернену нормальній кривині:

$$R_A = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A}. \quad (4.30)$$

$$R_{\text{сер}} = \sqrt{MN} = \frac{c}{V^2}.$$

Розглянемо взаємне положення двох нормальних перерізів, що проходять через дві точки  $Q_1$  і  $Q_2$  на еліпсоїді. Точки  $Q_1$  і  $Q_2$  мають різні широти та довготи. Між цими точками на поверхні еліпсоїда проведемо хорду  $d$  (рис. 17).

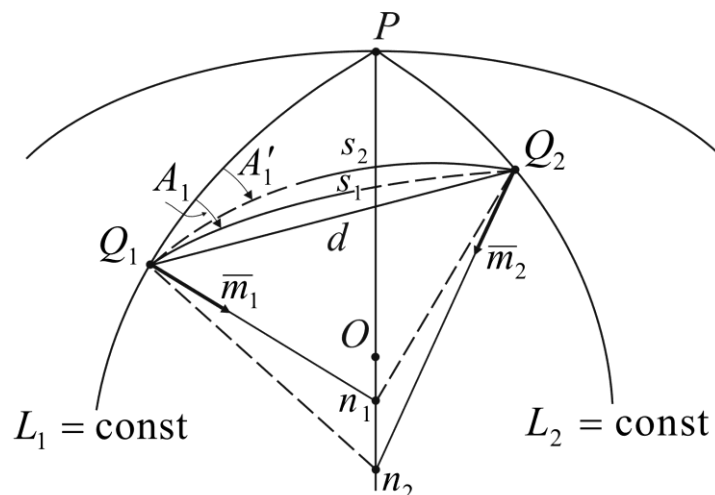


Рис. 17. Взаємні нормальні перерізи

Площина, що проходить через цю хорду та одну з нормалей до поверхні, є нормальною площиною. Через хорду  $d$  проходить нескінченна множина нормальних перерізів, які в перетині з поверхнею дають таку ж множину нормальних перерізів. У подальшому цікавими є лише два нормальні перерізи між точками  $Q_1$  і  $Q_2$ : один з них має геодезичну точку  $Q_1$ , а другий – геодезичну точку  $Q_2$ .

Переходячи з теодолітом на пункт  $Q_2$  і виконуючи такі ж побудови, як і на пункті  $Q_1$ , одержимо нормальний переріз – криву  $s_2$ . Криві  $s_1$  і  $s_2$  є взаємними нормальними перерізами, причому криву  $s_1$  називають прямим нормальним перерізом у пункті  $Q_1$ , криву  $s_2$  – зворотним, а в пункті  $Q_2$  прямим є  $s_2$ , зворотним –  $s_1$ .

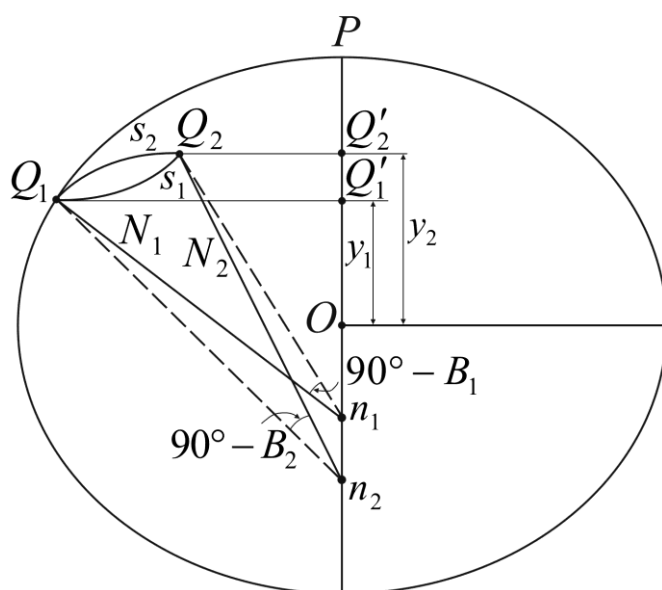


Рис. 18. Незбіг взаємних нормальних перерізів

У загальному випадку площина  $n_1Q_1Q_2$ , нормальна в пункті  $Q_1$ , не збігається з площиною  $n_2Q_2Q_1$ , що є нормальною в пункті  $Q_2$ . Значить, між двома пунктами на сфері проходять два нормальні перерізи. Якщо пункт  $Q_1$  лежить південніше пункту  $Q_2$ , то взаємні нормальні перерізи (криві  $s_1$  і  $s_2$ ) розташовуються так, як показано на рис. 18, тобто крива  $s_2$  північніше кривої  $s_1$ .

На поверхні еліпсоїда обертання лише у двох випадках взаємні нормальні перерізи збігаються:

- 1) якщо обидві точки лежать на одному меридіані;
- 2) якщо обидві точки лежать на одній паралелі.

На кожному пункті триангуляції вимірюють кути між прямими нормальними перерізами. Тому, якщо на місцевості є трикутник, у вершинах якого виміряні кути, то, внаслідок двоїстості взаємних

нормальних перерізів, одержана із вимірювань фігура буде мати шість сторін (рис. 19).

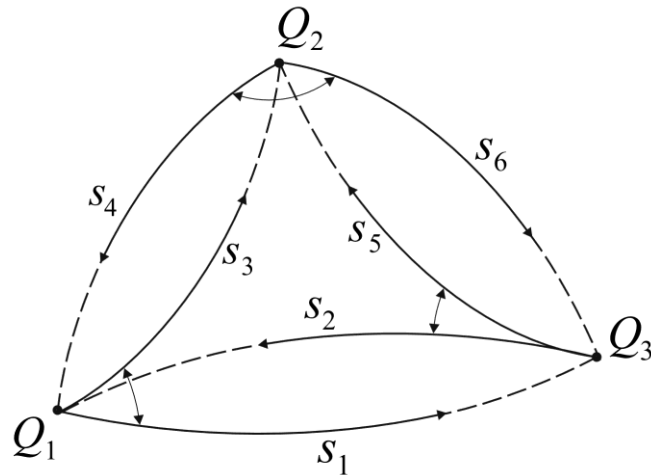


Рис. 19. Геометрична фігура зі сторонами у вигляді прямих і зворотних нормальних перерізів

Таким чином, незбіг прямих і зворотних нормальних перерізів внаслідок їх двоїстості призводить до того, що виміряні горизонтальні кути не утворюють на поверхні еліпсоїда замкненого трикутника; фігура є незамкненою або «розірваною». Щоб уникнути невизначеності при утворенні трикутників, необхідно використати криві лінії, що проходять між взаємними нормальними перерізами, побудова яких на поверхні еліпсоїда виконувалася би однозначно.

Знайдемо різницю азимутів взаємних нормальних перерізів у точці  $Q$

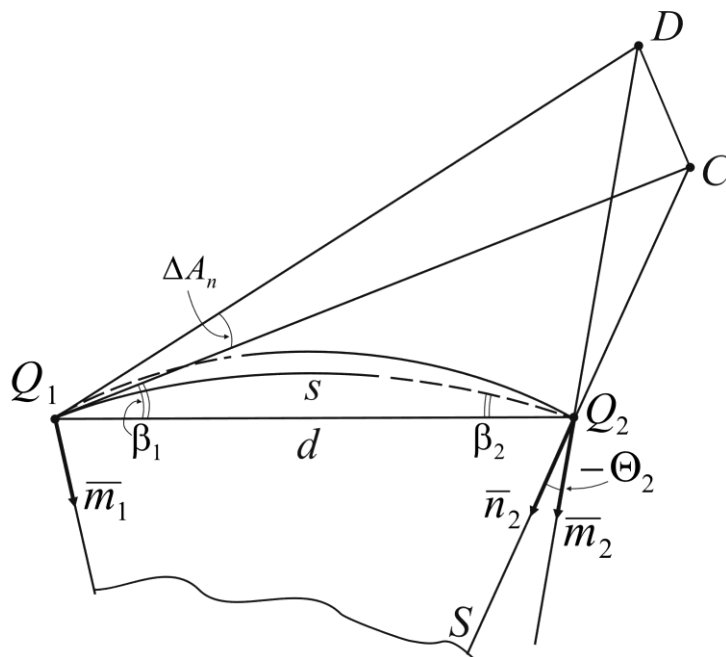


Рис. 20. Визначення різниці азимутів взаємних нормальних перерізів у т.  $Q_1$

Якщо ж  $v_1$  і  $\delta_1$  замінимо їх виразами з (4.14) і (4.15), то знайдемо:

$$\Delta A_n = \frac{\eta_1^2 s^2}{2N_1^2} \sin A_1 \cos A_1 (1 + \eta_1^2 \cos A_1) + \dots,$$

звідки з похибкою на члени порядку  $e^4$  остаточно одержимо:

$$\Delta A_n'' = \rho'' \frac{e^2}{4a^2} s^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_1, \quad (4.50)$$

або:

$$\Delta A_n'' = 0,0000085s^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_1, \quad (4.51)$$

де  $B_1$  – широта початкової точки  $Q_1$  прямого нормального перерізу;  $A_1$  – азимут цього перерізу;  $s$  – відстань у км.

Розглянемо тепер положення геодезичної лінії відносно до взаємних нормальних перерізів (рис. 21).

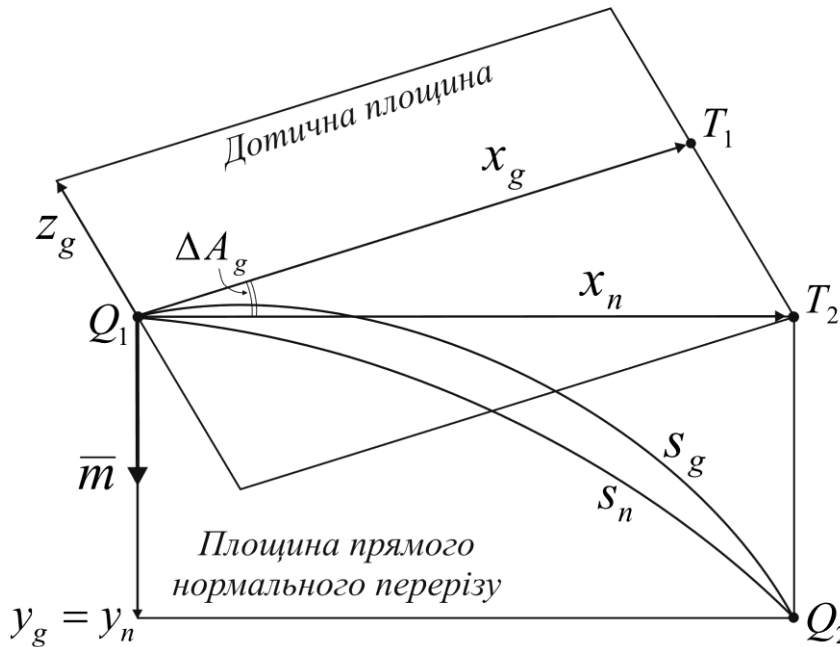


Рис. 21. Різниця азимутів геодезичної лінії та нормального перерізу

Вважаючи, що відстань між точками  $Q_1$  і  $Q_2$  – величина мала порівняно з радіусами кривини еліпсоїда, для визначення шуканого кута  $\Delta A_g$  скористаємось параметричними рівняннями геодезичної лінії (2.95). На рис. 21 видно, що:

$$\operatorname{tg} \Delta A_g = \frac{-z_g}{x_g}. \quad (4.53)$$

Для сторін у геодезичних мережах першого класу точності в формулі (4.56) можна відкинути члени порядку  $e^4$ . У цьому випадку одержуємо:

$$\Delta A_g'' = \rho'' \frac{e^2}{12a^2} \cos^2 B_1 \sin 2A_1, \quad (4.57)$$

або

$$\Delta A_g'' = 0,0000028 \cos^2 B_1 \sin 2A_1, \quad (4.58)$$

де  $s$  – відстань у км.

Таким чином, при малих відстанях у загальному випадку геодезична лінія розташовується між взаємними нормальними перерізами так, як показано на рис. 22.

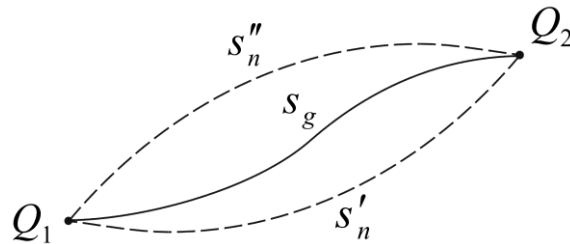


Рис. 22. Геодезична лінія та взаємні нормальні перерізи

## 2. Поправка у вимірний напрямок за висоту пункту спостереження

Нехай у пункті  $Q'_1$  (рис. 23) на висоті  $H_1 = Q_1Q'_1$  над поверхнею еліпсоїда вимірний напрямок на пункт  $Q'_2$ , розташований на висоті  $H_2 = Q_2Q'_2$  над поверхнею еліпсоїда.

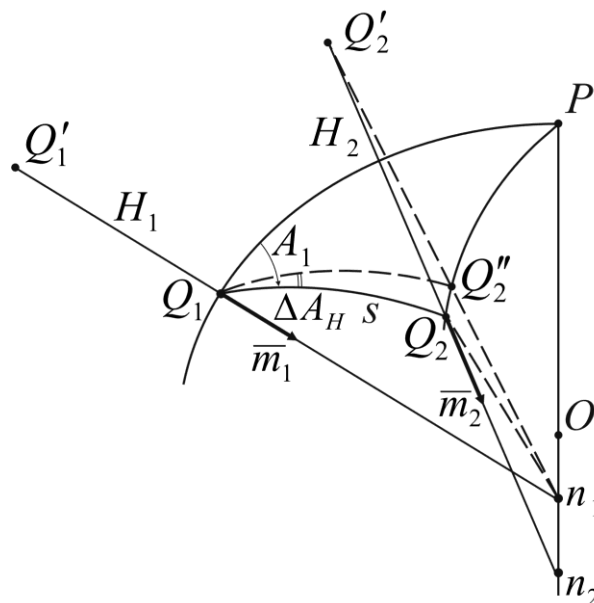


Рис. 23. Поправка у вимірний напрямок за висоту пункту спостереження

Будемо вважати, що вертикальна вісь обертання кутомірною приладу збігається з нормаллю  $Q'_1n_1$ . Тоді вимірний напрямок буде

лежати в нормальній площині  $Q'_1Q'_2n_1$ , яка перетинає поверхню еліпсоїда по нормальному перерізу  $Q_1Q_2''$ .

Геодезичні пункти  $Q'_1$  і  $Q'_2$  спроектуємо на поверхню еліпсоїда нормальними до неї. Тоді напрямок між проєкціями  $Q_1$  і  $Q_2$  на поверхні еліпсоїда буде визначатись азимутом  $A_1$  нормального перерізу  $Q_1Q_2$ . Щоб привести вимірний напрямок на поверхню еліпсоїда, необхідно виправити його на кут  $\Delta A_H$  між прямими нормальними перерізами  $Q_1Q_2''$  та  $Q_1Q_2$ .

### Запитання для самоперевірки

1. Що таке нормальний переріз?
2. Чому виникає двоїстість нормальних перерізів?
3. Що таке геодезична лінія?
4. Що таке поправка у вимірний напрямок за висоту пункту спостереження?



## Лекція 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ СФЕРОЇДНИХ ТРИКУТНИКІВ

### Питання

1. Сфероїдні трикутники та умови їх заміни сферичними трикутниками
2. Розв'язання малих сферичних трикутників із використанням сферичного надлишку. Теорема Лежандра
3. Розв'язання малих сферичних трикутників способом аддитаментів

#### **1. Сфероїдні трикутники та умови їх заміни сферичними трикутниками**

Основною геометричною фігурою при побудові геодезичних мереж є трикутник. Залежно від складу вимірювань у трикутниках можуть бути виміряні всі кути, всі сторони або в різному поєднанні деякі кути та деякі сторони. Розв'язання трикутників полягає у послідовному обчисленні довжин сторін трикутників у геодезичній мережі, причому відомі одна або декілька сторін і кути в кожному трикутнику. Трикутники на поверхні еліпсоїда, утворені геодезичними лініями, називають *геодезичними* або *сфероїдними*. Їх одержують у результаті редукування на поверхню еліпсоїда виміряних на фізичній поверхні Землі напрямків і довжин сторін.

Внаслідок двоїстості взаємних нормальних перерізів при розв'язанні трикутників виникає невизначеність у використанні кутів, утворених нормальними перерізами. Цієї невизначеності немає у трикутнику, в якому пункти з'єднуються геодезичними лініями, оскільки між двома точками на поверхні еліпсоїда можна провести лише одну геодезичну лінію. Щоб замінити трикутник, утворений нормальними перерізами, сфероїдним трикутником необхідно у кожний виміряний напрямок ввести поправку, що дорівнює куту між нормальним перерізом і геодезичною лінією.

На відміну від розв'язання сферичних трикутників при розв'язанні сфероїдних трикутників виникають складнощі, пов'язані з тим, що кривина поверхні еліпсоїда безперервно змінюється разом із широтою, що призводить до неможливості для розв'язання таких трикутників використовувати теорему синусів. Однак, враховуючи, що форма земного еліпсоїда мало відрізняється від кулі, можна очікувати, що кути та сторони сфероїдного трикутника невеликого розміру будуть мало відрізнятися від відповідних кутів і сторін сферичного трикутника за умови належним чином підбраного радіуса кулі. Чим менші розміри

сфероїдного трикутника, тим він менше буде відрізнятися від сферичного трикутника.

Тому поставимо задачу: знайти такі найбільші розміри сфероїдного трикутника, для яких заміна його сферичним трикутником викликає похибку в кутах і сторонах не більше заданих похибок обчислень.

Відносне лінійне спотворення  $v$  вздовж геодезичного кола визначається формулою:

$$v = \frac{dp - dp_c}{dp}, \quad (5.1)$$

де  $dp$  – диференціал дуги геодезичного кола на еліпсоїді;  $dp_c$  – диференціал дуги геодезичної окружності на кулі (зображення дуги  $dp$ ).

На поверхні еліпсоїда для обчислення зведеної довжини геодезичної лінії використовують формулу:

$$m = m_c = \frac{ae^2}{6} \sin 2B_0 \cos A_0 \left( \frac{s}{a} \right)^4 + \dots, \quad (5.2)$$

де  $m_c = R_0 \sin \frac{s}{R_0}$  – зведена довжина геодезичної лінії (дуги великого кола) на кулі радіуса  $R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$ , обчисленого для початкової точки геодезичної лінії еліпсоїда.

Як наслідок, на поверхні кулі, на якій зображується поверхня еліпсоїда, буде  $dp_c = m_c dA$ . Тепер рівняння (5.1) можна записати так:

$$v = \frac{mdA - m_c dA}{mdA} = \frac{m - m_c}{m}.$$

Замінімо  $m - m_c$  за формулою (5.2), а у знаменнику з достатньою точністю візьмемо  $m = s$ . Тоді:

$$v = \frac{e^2}{6} \sin 2B_0 \cos A_0 \left( \frac{s}{a} \right)^3. \quad (5.3)$$

Як видно з цієї формули, величина відносного спотворення  $v$  залежить не лише від розташування довільної точки  $Q$  відносно центра  $O$  зображуваної області (тобто від координат  $s$  і  $A_0$ ), але і від розташування центра  $O$  за широтою.

Спотворення  $v$  буде максимальним тоді, коли центр розташований на широті  $B_0 = 45^\circ$ , а всередині ділянки – коли точка  $Q$  розташована на меридіані точки  $O$ :

$$v_{\max} = \frac{e^2}{6a^3} s^3. \quad (5.4)$$

Задаючись допустимою величиною  $v_{\max}$ , можна знайти граничну відстань  $s$ , тобто встановити розміри ділянки поверхні еліпсоїда, в межах якої можна знехтувати лінійними спотвореннями при розв'язанні сфероїдного трикутника як сферичного. Візьмемо  $v_{\max} = 1 \cdot 10^{-8}$ , що відповідає 0,5 одиниці 8-го знаку логарифма сторони або похибці кута трикутника, що дорівнює 0,002" (яка відповідає точності обчислення трикутника в мережах першого класу точності). Розв'язавши рівняння (5.4) за прийнятим значенням  $v_{\max}$  та за наближеними значеннями

$$e^2 = \frac{1}{150} \text{ і } a = 6400 \text{ км, одержимо } s = 133 \text{ км.}$$

Таким чином, із відносною похибкою  $1 \cdot 10^{-8}$  сфероїдний трикутник можна розв'язувати як сферичний, якщо довжини його сторін не перевищують 270 км, а будь-яка вершина трикутника (або групи трикутників) віддалена від паралелі з широтою  $B_0$ , для якої обчислюється радіус кулі  $R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$ , не більше ніж на 133 км.

У разі знижених вимог до точності розв'язання сфероїдного трикутника його допустимі розміри відповідно збільшуються. Нехай, наприклад, допустима відносна похибка довжини сторони дорівнює  $1 \cdot 10^{-7}$ , що відповідає кутовій похибці 0,02". Тоді, вочевидь, гранична величина довжини сторони сфероїдного трикутника збільшується в  $\sqrt[3]{10}$  разів порівняно з довжиною сторони в попередньому випадку і становить 600 км.

## **2. Розв'язання малих сферичних трикутників із використанням сферичного надлишку. Теорема Лежандра**

Таким чином, як розглянуто раніше, розв'язання сфероїдних трикутників може бути замінено розв'язанням сферичних трикутників. Однак, безпосереднє застосування формул сферичної тригонометрії для розв'язання малих трикутників супроводжується значними незручностями. Формули сферичної тригонометрії насамперед пристосовані для обчислення сторін трикутників у кутовому вимірі, тоді як у геодезичних мережах сторони необхідно одержувати в лінійному вимірі. Крім того, при розв'язанні малих трикутників за формулами сферичної тригонометрії неминуче доведеться оперувати значеннями тригонометричних функцій малих кутів, що ускладнює обчислення.

Ці незручності повністю усуваються, якщо розв'язання малих сферичних трикутників здійснювати за допомогою теореми Лежандра або способу аддитаментів.

Лежандр у 1787р. довів, що сферичні трикутники з малими відносно радіуса кулі сторонами можна цілковито з достатнім наближенням обчислювати як плоскі, необхідно лише кути даного сферичного трикутника зменшити на одну третину величини його сферичного надлишку.

Сферичний надлишок  $\varepsilon$  обчислюється у геодезичних мережах для виявлення нев'язок  $\omega$  у вимірних кутах трикутника за формулою:

$$\omega = A + B + C - (180^\circ + \varepsilon).$$

Для обчислення сферичного надлишку в трикутнику будь-якого розміру наведемо одну з формул сферичної тригонометрії:

Якщо ж у цих рівняннях відкинути також члени четвертого порядку, то для обчислення сферичного надлишку одержимо такі вельми прості формули:

$$\varepsilon'' = fs_a s_b \sin C = fs_b s_c \sin A = fs_a s_c \sin B, \quad (5.14)$$

де

$$f = \frac{\rho''}{2R^2}, \quad (5.15)$$

$R$  – радіус кулі, що дорівнює середньому радіусу кривини еліпсоїда в центрі трикутника.

У геодезичних мережах першого класу точності сферичний надлишок обчислюється з точністю до 0,001".

### **3. Розв'язання малих сферичних трикутників способом аддитаментів**

Спосіб аддитаментів був запропонований німецьким вченим Зольднером у 1820 р. Суть його полягає у розв'язанні сферичного трикутника за формулами прямолінійної тригонометрії за сферичними кутами та сторонами, виправленими спеціальними поправками, що називають *аддитаменти*.

Розглянемо сферичний трикутник  $\triangle ABC$  (рис. 48), сторони якого, що є дугами великого кола, повинні бути виражені у частинах радіуса сфери. Для розв'язання сферичного трикутника довільного розміру застосовуються такі формули сферичної тригонометрії:

$$\left. \begin{aligned} \sin b &= \sin a \frac{\sin B}{\sin A} \\ \sin c &= \sin a \frac{\sin C}{\sin A} \end{aligned} \right\}. \quad (5.36)$$

У цих формулах:

$$a = \frac{s_a}{R}; \quad b = \frac{s_b}{R}; \quad c = \frac{s_c}{R}, \quad (5.37)$$

де  $s_a, s_b, s_c$  – довжини сторін трикутника в лінійному вимірі;  $R$  – радіус сфери, що дорівнює середньому радіусу кривини еліпсоїда в центрі трикутника.

Оскільки сторони трикутника в геодезії виражають у лінійному вимірі, то при використанні формул (5.36) доводиться виконувати додаткові обчислення: переходити від лінійних величин до сферичних дуг, знаходити синуси цих дуг, а після обчислень за формулами (5.36) виконувати зворотний перехід від синусів дуг до лінійних величин.

У геодезичних мережах довжини сторін трикутників зазвичай менше радіуса сфери. Внаслідок цього є можливість замінити формули (5.36) простішими виразами. Формули будуть найпростішими тоді, коли сторони трикутника настільки малі, що кривиною кулі можна знехтувати. Тоді трикутник розв’язується як плоский за формулами:

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin B}{\sin A} \\ s_c &= s_a \frac{\sin C}{\sin A} \end{aligned} \right\}. \quad (5.38)$$

У геодезичних мережах першого класу, хоч сторони є малими, все ж таки нехтувати кривиною кулі неможливо. Поправки за кривину кулі при розв’язанні малих сферичних трикутників за способом аддитаментів вводять у сторони зі збереженням величин кутів.

Замінивши сферичні дуги лінійними величинами за формулами (5.38), одержимо:

$$\left. \begin{aligned} s_b &= s_a \frac{\sin B}{\sin A} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{s_b}{R} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{s_a}{R} \right)^2 \right] \\ s_c &= s_a \frac{\sin C}{\sin A} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{s_c}{R} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{s_a}{R} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\}. \quad (5.39)$$

Із цих формул видно, що головні члени, що стоять перед квадратними дужками, є розв’язанням сферичного трикутника як

плоского за формулами (5.38), причому кути в них є сферичними. Обчисливши лише головні члени, одержали б довжини сторін  $s_b$  і  $s_c$  із недостатньою точністю. Другий і третій члени у квадратних дужках покращують значення  $s_b$  і  $s_c$ . Поправкові члени у квадратних дужках називають *аддитаментами*. Тому розв'язання малого сферичного трикутника за формулами (5.39) називають *способом аддитаментів*.

### Запитання для самоперевірки

1. В чому полягає різниця між сферичними та сфероїдичними трикутниками?
2. За яких умов сфероїдні трикутники замінюються сферичними трикутниками?
3. Що таке сферичний надлишок?
4. Поясніть суть теореми Лежандра при розв'язанні сферичних трикутників.
5. Що таке аддитаменти?
6. У чому полягає принципова відмінність двох способів розв'язання сферичних трикутників: а) за теоремою Лежандра; б) способом аддитаментів?

## Лекція 6. РОЗВ'ЯЗАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОВЕРХНІ ЗЕМНОГО ЕЛІПСОЇДА

### Питання

1. Геодезичні задачі та точність їх розв'язання
2. Розв'язання геодезичних задач на кулі
3. Загальні умови розв'язання геодезичних задач на поверхні земного еліпсоїда
4. Розв'язання геодезичних задач у просторі

### 1. Геодезичні задачі та точність їх розв'язання

*Пряма геодезична задача.*

Дано геодезичні координати  $B_1$  і  $L_1$  точки  $Q_1$ , а також довжина геодезичної лінії  $s$  та її початковий азимут  $A_1$ . За цими даними необхідно знайти координати  $B_2$  та  $L_2$ , а також зворотний азимут  $A_2$  в точці  $Q_2$ .

*Обернена геодезична задача.*

Дано геодезичні координати  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $B_2$ ,  $L_2$  двох точок  $Q_1$  і  $Q_2$ . Потрібно знайти найкоротшу відстань  $s$  (довжину геодезичної лінії) між заданими точками, а також прямий  $A_1$  і зворотний  $A_2$  азимути цієї лінії в точках  $Q_1$  і  $Q_2$ .

Як видно, в оберненій геодезичній задачі координати не визначаються, а задаються, тому її розв'язок використовують для контролювання розв'язання прямої геодезичної задачі. Прямую та обернену геодезичні задачі називають *головними геодезичними задачами*.

Пряма геодезична задача застосовується при обчисленні геодезичних координат пунктів у мережах першого класу точності. У результаті розв'язання трикутників у кожному з них будуть відомі всі кути та всі довжини сторін. Для одного з пунктів, який взято за початковий, повинні бути відомі геодезичні координати  $B_0$  та  $L_0$  й азимут  $A_0$  з початкового пункту на один із сусідніх. Знаючи координати початкового пункту, а також відстані й азимути на сусідні пункти, обчислюють геодезичні координати та зворотні азимути всіх інших пунктів, безпосередньо пов'язаних із початковим пунктом. Приймаючи потім кожний із цих пунктів за початковий, обчислюють геодезичні координати та зворотні азимути сусідніх із ними і т.д.

При розвитку державної мережі геодезичних пунктів пряма та обернена геодезичні задачі застосовуються для малих відстаней (20 – 60 км, іноді – 200 – 300 км). За для спеціальних завдань такі задачі доводиться розв'язувати на будь-які відстані, включно до 20000 км.

Розв'язання вказаних задач ускладнюється тим, що виконувати їх потрібно на поверхні, для якої не можна привести кінцевих формул, аналогічних формулам, що використовуються при розв'язанні потрібних задач на поверхні сфери або на площині. При розв'язанні головних геодезичних задач на поверхні еліпсоїда необхідно враховувати кривину цієї поверхні, що змінюється, та залежність її від широти, а також досить високі вимоги щодо точності результатів обчислень.

Математичні методи розв'язання геодезичних задач забезпечують виконання обчислень із будь-якою практично необхідною точністю. Однак, чим вище точність, що вимагається, тим складніші обчислення. Тому при будь-яких обчисленнях слід завчасно встановити практично необхідну точність, щоб обчислення були економними, не вимагали зайвих витрат обчислювальної праці.

Виконуючи складні технічні розрахунки, необхідно враховувати, що на точність результату обчислень впливають три види похибок:

- 1) похибки вихідних даних, що зазвичай є функціями похибок вимірних величин;
- 2) похибки формул, що являють наближені математичні залежності (наприклад, відкинуті члени в рядах);
- 3) похибки обчислень, які виникають внаслідок заокруглень чисел як у процесі самих обчислень, так і при використанні наближених значень тригонометричних функцій і різних обчислювальних засобів.

Точність результату обчислень визначають головним чином похибки вихідних даних, які відображають сучасний рівень техніки та методів вимірювань.

Методична основа розрахунку необхідної точності обчислення остаточних значень геодезичних координат залишається такою ж, як і в інших геодезичних обчисленнях. Вона полягає у задоволенні умови, щоб сумарні похибки різних етапів обчислень шуканих величин були в 5 – 10 разів меншими за вплив вихідних даних. Ця вимога зрозуміла – точність координат пунктів повинна визначатись лише похибками використаних вихідних даних для обчислень, але ні в якому разі не повинна залежати від недостатньої строгості обчислювальних дій. Ця умова повинна дотримуватись і при розв'язанні оберненої геодезичної задачі.

Встановимо необхідну точність обчислення геодезичних координат пунктів державної опорної геодезичної мережі. Точність обчислення остаточних значень геодезичних координат повинна відповідати у вказаному раніше сенсі точності польових вимірювань. Висуваючи умову, щоб похибки обчислень були у 5 – 10 разів меншими за вплив похибок польових вимірювань, можемо вважати, що похибки в координатах будуть залежати лише від похибок польових вимірювань.



Оскільки обчислення координат пунктів геодезичної мережі поділяється на послідовне розподілення розв'язання задач між кожними двома суміжними пунктами мережі, то достатньо розглянути питання точності обчислень на прикладі розв'язання окремо взятої задачі. Як типовий випадок розглянемо рівносторонній трикутник тріангуляції. Положення третьої вершини такого трикутника відносно двох інших його вершин визначиться з лінійною похибкою  $m$ , яку для наших цілей достатньо обчислити за формулою:

$$m = \pm \frac{m''_B s}{\rho'' \sin 60^\circ},$$

де  $s$  – довжина сторони трикутника;  $m_B$  – середня квадратична похибка вимірюваного кута;  $\rho'' = 206265''$ .

Приймаючи похибку у взаємному положенні суміжних пунктів тріангуляції за осями координат 6 см, необхідно вимагати, щоб похибки обчислення різниці широт, довгот вихідного та визначуваного пунктів знаходились у межах 0,6 – 1,0 см:

$$m''_B = 0,0003'', \quad m''_L = 0,0003'' \sec B,$$

або для широти  $B = 56^\circ$ :  $m''_L = 0,0005''$ .

Як побачимо далі, різницю координат двох суміжних пунктів одержують як суму двох – трьох доданків. Тому робимо висновок, що обчислення широт і довгот пунктів тріангуляції слід виконувати з надійним утримуванням десятитисячної частки секунди; в цьому випадку геодезичні координати визначуваного пункту відносно вихідного будуть визначатись з похибкою порядку 0,0002 – 0,0003'' за широтою та 0,0002sec $B$  – 0,0003sec $B$  за довготою, що є наближенням до граничної межі точності обчислення, тобто до 1 см.

## 2. Розв'язання геодезичних задач на кулі

Перед тим, як вивчати методи розв'язання геодезичних задач на поверхні еліпсоїда, корисно ознайомитися з розв'язанням цих задач на кулі, оскільки еліпсоїд за формою є близьким до кулі, а головною складовою частиною розв'язання геодезичних задач на еліпсоїді є розв'язання сферичного трикутника, сторонами якого є дуги великих кіл.

Положення будь-якої дуги великого кола на кулі визначається: а) положенням точки  $P_0$  перетину дуги з екватором; б) азимутутом  $\alpha_0$  цієї дуги в точці  $P_0$ . Положення будь-якої точки  $Q$  на цій дузі визначається сферичною відстанню  $\sigma$ , що відлічується від точки  $P_0$ . Величини  $\alpha_0$  та  $\sigma$  є полярними координатами точки  $Q$ ,  $\varphi$  та  $\lambda$  – сферичними координатами цієї ж точки. Між полярними та сферичними координатами існує

залежність, яку неважко знайти з прямокутного сферичного трикутника  $\Delta P_0QC$ , для якого існують такі залежності:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha_0 &= \cos \varphi \sin \alpha = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{ctg} \sigma \\ \cos \sigma &= \cos \varphi \cos \lambda = \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha \\ \cos \alpha &= \cos \alpha_0 \cos \lambda = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} \sigma \\ \sin \varphi &= \sin \sigma \cos \alpha_0 = \operatorname{tg} \lambda \operatorname{ctg} \alpha \\ \sin \lambda &= \sin \sigma \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha_0 \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (6.1)$$

Із одержаних раніше диференціальних співвідношень (6.2), (6.3) та (6.6) виділимо такі три рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\sigma} &= \cos \alpha \\ \frac{d\lambda}{d\sigma} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} \\ \frac{d\alpha}{d\sigma} &= \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (6.8)$$

Ці рівняння є диференціальними рівняннями дуги великого кола. Вони показують характер зміни широти, довготи й азимута при елементарному переміщенні вздовж дуги великого кола на  $d\sigma$ .

Розв'язання прямої та оберненої геодезичних задач на кулі являє собою розв'язання полярного сферичного трикутника  $\Delta PQ_1Q_2$  (рис. 52), коли задані будь-які дві сторони та кут між ними й необхідно знайти третю сторону і прилеглі до неї кути.

На рис. 24 через  $\sigma$  позначена дуга великого кола між початковою  $Q_1$  і кінцевою  $Q_2$  точками дуги, через  $\lambda$  – різницю довгот цих точок.

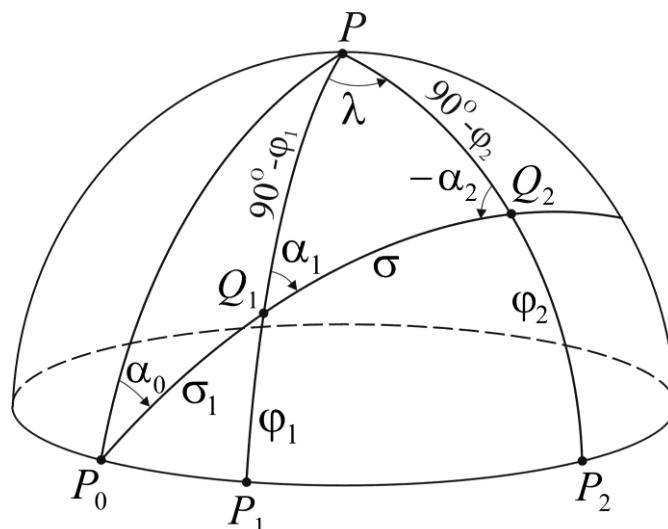


Рис. 24. До розв'язання прямої й оберненої геодезичних задач на кулі

Для розв'язування можна використати замкнуті формули сферичної тригонометрії для полярного трикутника  $\Delta Q_1 P Q_2$ :

$$\sin \sigma \sin \alpha_1 = \sin \lambda \cos \varphi_2, \quad (6.9)$$

$$\sin \sigma \sin \alpha_2 = -\sin \lambda \cos \varphi_1, \quad (6.10)$$

$$\cos \sigma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda, \quad (6.11)$$

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cos \sigma + \cos \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1, \quad (6.12)$$

$$\sin \sigma \cos \alpha_1 = \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda, \quad (6.13)$$

$$\sin \sigma \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \lambda, \quad (6.14)$$

$$\cos \varphi_2 \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \sin \sigma - \cos \varphi_1 \cos \sigma \cos \alpha_1, \quad (6.15)$$

$$\cos \lambda \cos \varphi_2 = \cos \sigma \cos \varphi_1 - \sin \sigma \sin \varphi_1 \cos \alpha_1, \quad (6.16)$$

$$\cos \varphi_2 \sin \alpha_2 = -\cos \varphi_1 \sin \alpha_1. \quad (6.17)$$

Застосуємо ці формули для розв'язання геодезичних задач.

#### *Пряма геодезична задача*

Вихідні дані:  $\varphi_1, \alpha_1, \sigma$ . Визначувані величини:  $\varphi_2, \alpha_2, \lambda$ .

Широта  $\varphi_2$  визначається за формулою (6.12). Обчислення арксинуса при цьому можна замінити обчисленням арктангенса, використав рівняння:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_2}}. \quad (6.18)$$

Формулу для визначення різниці довгот  $\lambda$  знаходять діленням рівняння (6.9) на рівняння (6.16):

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin \sigma \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma - \sin \varphi_1 \sin \sigma \cos \alpha_1}. \quad (6.19)$$

Формулу для визначення зворотного азимуту  $\alpha_2$  знаходять діленням рівняння (6.17) на рівняння (6.15):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\cos \varphi_1 \sin \alpha_1}{\cos \varphi_1 \cos \sigma \cos \alpha_1 - \sin \varphi_1 \sin \sigma}. \quad (6.20)$$

#### *Обернена геодезична задача*

Вихідні дані:  $\varphi_1, \varphi_2, \lambda$ . Визначувані величини:  $\sigma, \alpha_1, \alpha_2$ .

Формулу для визначення прямого азимуту  $\alpha_1$  знаходять діленням рівняння (6.9) на рівняння (6.13):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \lambda \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda} = \frac{p}{q}. \quad (6.21)$$

Формулу для визначення зворотного азимуту  $\alpha_2$  знаходять діленням рівняння (6.10) на рівняння (6.14):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \lambda \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \lambda - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}. \quad (6.22)$$

Для визначення сферичної відстані  $\sigma$  попередньо знаходять  $\sin \sigma$ , помноживши для цього рівняння (6.9) на  $\sin \alpha_1$ , рівняння (6.13) – на  $\cos \alpha_1$  і додавши їх. Одержаний результат ділять на рівняння (6.11). Тоді:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sigma &= \frac{\cos \varphi_2 \sin \lambda \sin \alpha_1 + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda) \cos \alpha_1}{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda} = \\ &= \frac{p \sin \alpha_1 + q \cos \alpha_1}{\cos \sigma}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

де  $p, q$  – чисельник і знаменник у формулі (6.21).

### 3. Загальні умови розв’язання геодезичних задач на поверхні земного еліпсоїда

У практиці розв’язування головних геодезичних задач на поверхні еліпсоїда між точками 1 і 2 використовуються різноманітні лінії, що дають однозначне положення точки 2 відносно точки 1. За такі лінії можна прийняти прямий нормальний переріз, геодезичну лінію, хорду тощо. Використання кожної з вказаних ліній вносить свої особливості в методи розв’язання головних геодезичних задач на поверхні еліпсоїда. Будемо розглядати лише ті методи, які ґрунтуються на використанні геодезичної лінії та найчастіше зустрічаються в практиці обчислень.

Для будь-якої кривої на поверхні еліпсоїда є два диференціальні рівняння, одержані з рівнянь (3.124) і (3.125):

$$\frac{dB}{ds} = \frac{\cos A}{M} = \frac{V^3}{c} \cos A, \quad (6.24)$$

$$\frac{dL}{ds} = \frac{\sin A}{N \cos B} = \frac{V}{c} \sec B \sin A. \quad (6.25)$$

Для геодезичної лінії до цих рівнянь приєднується третє рівняння (4.2):

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\operatorname{tg} B}{N} \sin A = \frac{V}{c} \operatorname{tg} B \sin A. \quad (6.26)$$

Ці три рівняння являють собою систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що пов’язують чотири змінних –  $B, L, A, s$ , з яких довжина геодезичної лінії  $s$  прийнята як незалежна змінна. Ці рівняння відображають зміни широти, довготи й азимута при переміщенні вздовж геодезичної лінії. Проінтегрувавши їх по дузі  $s$  між точками  $Q_1$  і  $Q_2$ , одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\cos A}{M} ds \\ L_2 &= L_1 + \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\sin A}{N \cos B} ds \\ A_2 &= A_1 \pm 180^\circ + \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N} ds \end{aligned} \right\}. \quad (6.27)$$

Значення  $B_1$ ,  $L_1$ ,  $A_1$  є початковими умовами, заданими для початкової точки  $Q_1$ , в якій незалежна змінна  $s$  дорівнює нулю. Таким чином, рівняння (6.27) служать для розв'язання прямої геодезичної задачі.

Розглядаючи інтеграли (6.27) відмічаємо, що підінтегральні функції залежать від аргументів  $B$  і  $A$ , тоді як змінною інтегрування є  $s$ . Виникає необхідність заміни змінних  $B$  і  $A$  через  $s$ . Але така заміна можлива лише в тому випадку, якщо вже відомі шукані перший і третій інтеграли з (6.27).

Для поверхні кулі залежність між змінними – довготою, широтою, азимутом і сферичною відстанню – легко знайти з формул сферичної тригонометрії. Для поверхні еліпсоїда розв'язання цієї задачі ускладнюється тим, що тут радіуси кривини є функціями не лише широти, але й ексцентриситету, внаслідок чого інтеграли (6.27) не виражаються в елементарних функціях. Тому змушені удатися до наближеного обчислення цих інтегралів шляхом розвинення в ряди. Такі інтеграли називають *еліптичними інтегралами*.

У зв'язку з широким впровадженням у практику геодезичних обчислень електронно-обчислювальних машин сьогодні з'явилась можливість вдалого використання чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь. Виконані дослідження щодо застосування, зокрема, методу Рунге-Кутта показали практичну ефективність цього методу при розв'язанні прямої геодезичної задачі на малі відстані на ЕОМ.

Перейдемо до другого методу обчислення інтегралів (6.27). Він є найзагальнішим і приводить до формул, що придатні для розв'язання геодезичних задач на поверхні земного еліпсоїда для будь-яких відстаней між двома точками до 20000 км і з будь-якою практично необхідною точністю.

Суть цього методу така. Форма земного еліпсоїда незначно відрізняється від кулі. Розв'язання геодезичних задач на кулі виконується абсолютно точно за простими формулами сферичної тригонометрії. Виходячи з цього, вважається доцільним геодезичну лінію еліпсоїда зобразити на кулі дугою великого кола так, що кожній точці геодезичної лінії відповідала б єдина точка дуги великого кола як її зображення. Таку

взаємно однозначну точкову відповідність між геодезичною лінією на еліпсоїді та дугою великого кола на кулі називають *геодезичним зображенням* або *геодезичною відповідністю*. Таку відповідність вважають установленою, якщо знайдені математичні залежності між величинами  $B, L, A, s$  у кожній точці геодезичної лінії на еліпсоїді та величинами  $\varphi, \lambda, \alpha, \sigma$  у відповідній точці дуги великого кола на кулі.

Ці залежності можна записати у вигляді таких чотирьох диференціальних рівнянь:

$$\frac{dB}{d\varphi} = f_1; \quad \frac{dL}{d\lambda} = f_2; \quad \frac{dA}{d\alpha} = f_3; \quad \frac{ds}{d\sigma} = f_4. \quad (6.32)$$

У правих частинах цих рівнянь через  $f_1, f_2, f_3$  та  $f_4$  позначені деякі функції, що залежать у загальному випадку від широти, азимуту та ексцентриситету еліпсоїда.

Проінтегрувавши диференціальні рівняння (6.32), одержують необхідні формули для взаємного переходу на кулю. Тоді послідовність розв'язання геодезичних задач буде такою:

- 1) обчислення за заданими на еліпсоїді величинами відповідних величин на кулі (перехід від еліпсоїда на кулю);
- 2) розв'язання геодезичної задачі на кулі;
- 3) обчислення за величинами, одержаними на кулі, відповідних величин на еліпсоїді (перехід з кулі на еліпсоїд).

Розглянемо ті умови, які повинні задовольняти диференціальні рівняння (6.32) при геодезичному зображенні.

Переміщення вздовж геодезичної лінії на елементарну відстань  $ds$  викликає зміни координат і азимуту на елементарні величини  $dB, dL$  і  $dA$ . Аналогічні переміщення вздовж дуги великого кола на  $d\sigma$  викликають зміни координат і азимуту на  $d\varphi, d\lambda$  та  $d\alpha$ . Залежності між цими змінами визначають диференціальними рівняннями (6.24) – (6.26) для геодезичної лінії та рівняннями (6.8) для дуги великого кола.

Запишемо ці рівняння так:

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\cos A}{M} ds, & d\varphi &= \cos \alpha d\sigma, \\ dL &= \frac{\sin A}{N \cos B} ds, & d\lambda &= \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} d\sigma, \\ dA &= \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N} ds, & d\alpha &= \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha d\sigma. \end{aligned}$$

Припустимо, що відома залежність між  $ds$  і  $d\sigma$  у вигляді відношення  $\frac{ds}{d\sigma} = f_4$ . Тоді, розділивши одне на одну ліві та праві частини наведених рівнянь, одержимо залежність між координатами й азимутами

геодезичної лінії на еліпсоїді та дуги великого кола на кулі в такому вигляді:

$$\frac{dB}{d\varphi} = \frac{\cos A}{M \cos \alpha} \cdot \frac{ds}{d\sigma}, \quad (6.33)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\cos \varphi \sin A}{N \cos B \sin \alpha} \cdot \frac{ds}{d\sigma}, \quad (6.34)$$

$$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{\operatorname{tg} B \sin A}{N \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha} \cdot \frac{ds}{d\sigma}. \quad (6.35)$$

Таким чином, якщо відома функція  $f_4$  або взагалі будь-яка з чотирьох функцій у рівняннях (6.32), то решту три функції можна знайти із розв'язання рівнянь (6.33) – (6.35).

Загальні інтеграли диференціальних рівнянь (6.32) містять довільні сталі. Для одержання частинних інтегралів призначають додаткові або початкові умови, що забезпечують однозначність розв'язання. Вільний вибір однієї з чотирьох функцій (6.32) і початкових умов інтегрування відкриває широкі можливості пошуку різних способів зображення геодезичної лінії дугою великого кола, а як наслідок, розробці різних способів розв'язання геодезичних задач на еліпсоїді.

Кожну з чотирьох функцій (6.32) слід вважати як довільну. Який їй надати вигляд і які прийняти початкові умови інтегрування – все це залежить від конкретних практичних умов застосування головної геодезичної задачі.

#### **4. Розв'язання геодезичних задач у просторі**

Для розв'язання геодезичних задач між точками в просторі використовують такі системи координат.

##### **1. Системи геоцентричних координат**

Початок координат розташований у центрі еліпсоїда;

##### **а) декартові прямокутні координати:**

- вісь  $z$  спрямована вздовж осі обертання еліпсоїда та спрямована на північний полюс;
- вісь  $x$  розташована в площині початкового меридіана  $L = 0^\circ$ ;
- вісь  $y$  розташована в площині меридіана з довготою  $L = 90^\circ$ ;

##### **б) полярні координати:**

- геоцентрична широта  $\Phi$  – кут між радіус-вектором і площиною екватора;
- геодезична довгота  $L$ ;
- геоцентричний радіус-вектор  $\rho$  – відстань по прямій, що з'єднує задану точку простору з центром еліпсоїда.

Зв'язок між двома системами геоцентричних координат (рис. 25) здійснюється за такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \Phi \cos L \\ y &= \rho \cos \Phi \sin L \\ z &= \rho \sin \Phi \end{aligned} \right\}. \quad (6.96)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} L &= \frac{y}{x} \\ \operatorname{tg} \Phi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{x \cos L + y \sin L} = \frac{z}{R} \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \cos \Phi + z \sin \Phi \end{aligned} \right\}. \quad (6.97)$$

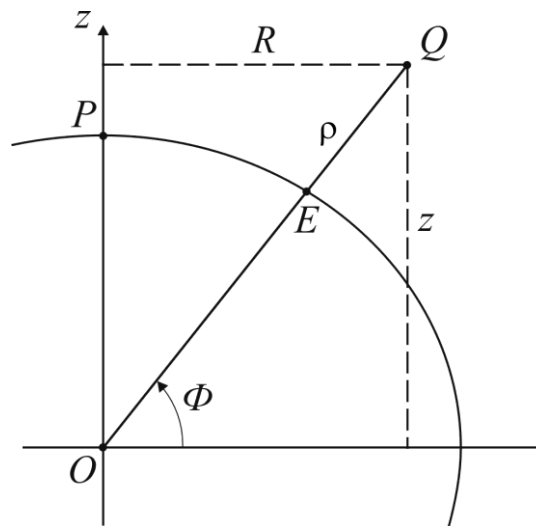


Рис. 25. До встановлення зв'язку між геоцентричними координатами

## 2. Системи топоцентричних координат

Початок координат знаходиться в деякій точці  $Q_1(B_1, L_1, H_1)$ , розташованій зазвичай на земній поверхні.

*а) декартові прямокутні координати:*

– вісь  $\zeta$  розташована на продовженні нормалі до поверхні еліпсоїда в точці  $Q_1$ ;

– вісь  $\xi$  розташована у площині меридіана точки  $Q_1$  перпендикулярно до осі  $\zeta$  та спрямована в бік осі обертання еліпсоїда;

– вісь  $\eta$  перпендикулярна до осей  $\xi$  та  $\zeta$  і спрямована в бік збільшення довготи;

*б) полярні координати:*



- геодезичний азимут  $A_{12}$  – двограний кут між площиною меридіана початкової точки та нормальною площиною, що проходить через нормаль у точці  $Q_1$  і задану точку  $Q_2$  простору;
- геодезична зенітна відстань  $Z_{12}$  – кут між віссю  $\zeta$  та прямолінійним напрямком із точки  $Q_1$  у точку  $Q_2$ ;
- відстань  $D$  між точками  $Q_1$  і  $Q_2$  по прямій.

Зв'язок між двома системами топоцентричних координат (рис. 26) здійснюється за такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= D \sin Z_{12} \cos A_{12} \\ \eta &= D \sin Z_{12} \sin A_{12} \\ \zeta &= D \cos Z_{12} \end{aligned} \right\}, \quad (6.98)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} A_0 &= \frac{\eta}{\xi} \\ \operatorname{ctg} Z_0 &= \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{\zeta}{\xi \cos A_{12} + \eta \sin A_{12}} \\ D &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = (\xi \cos A_{12} + \eta \sin A_{12}) \sin Z_{12} + \zeta \cos Z_{12} \end{aligned} \right\}. \quad (6.99)$$

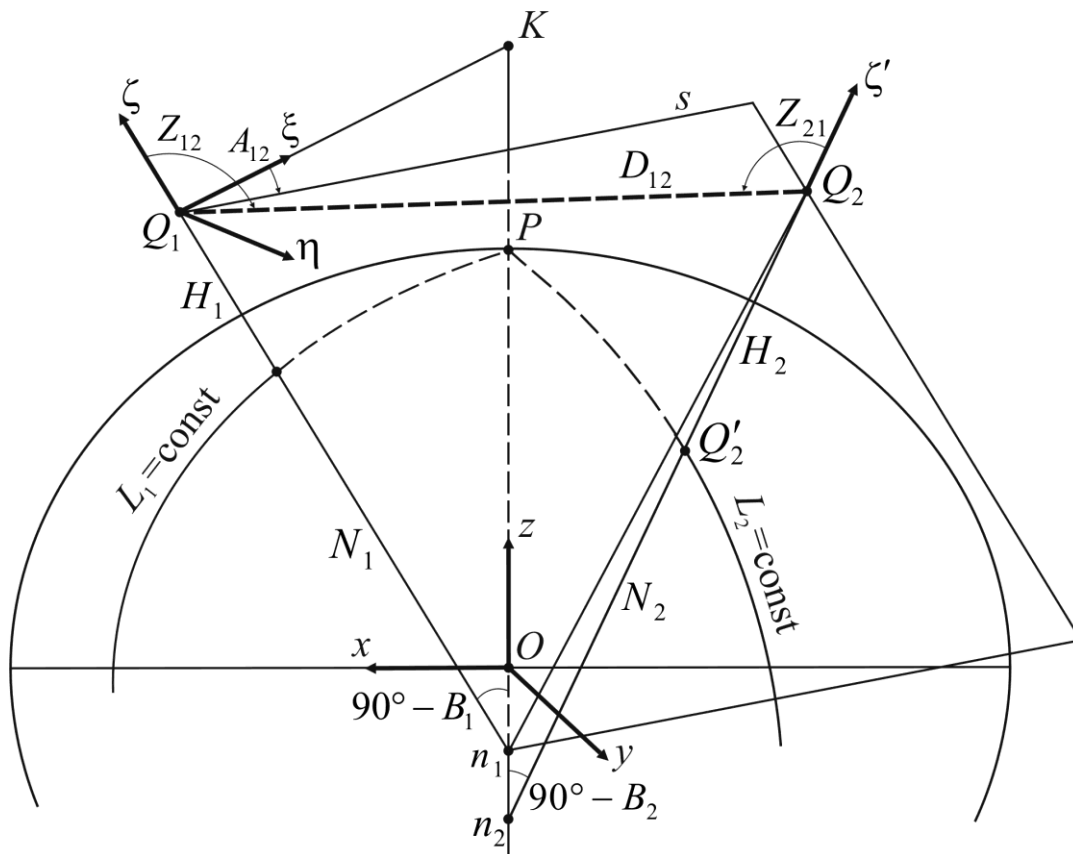


Рис. 26. До встановлення зв'язку між топоцентричними координатами

### 3. Система геодезичних координат:

- геодезична широта  $B$ ;
- геодезична довгота  $L$ ;
- геодезична висота  $H$  – найкоротша відстань від заданої точки простору до поверхні еліпсоїда (продовження нормалі до цієї поверхні).

$$\left. \begin{aligned} x &= (N + H) \cos B \cos L \\ y &= (N + H) \cos B \sin L \\ z &= (N + H) \sin B - e^2 N \sin B \end{aligned} \right\}. \quad (6.100)$$

Знайдемо формули зворотного переходу від  $x, y, z$  до  $B, L, H$ .

Вочевидь, довготу можна одразу ж знайти за формулою:

$$\operatorname{tg} L = \frac{y}{x}. \quad (6.101)$$

Оскільки:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = x \cos L + y \sin L = (N + H) \cos B, \quad (6.102)$$

то, на основі рівнянь (6.100), можна написати формулу для визначення широти  $B$ :

$$\operatorname{tg} B = \frac{z + e^2 N \sin B}{R}. \quad (6.103)$$

### Запитання для самоперевірки

1. Які є способи розв'язання головних геодезичних задач?
2. Від чого залежить вибір способу розв'язання головних геодезичних задач?
3. Які загальні умови розв'язання геодезичних задач на поверхні земного еліпсоїда?

## Лекція 7. КОНФОРМНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДА НА ПЛОЩИНІ

### Питання

1. Основні положення та визначення
2. Математичні основи проекції Гаусса-Крюгера
3. Зв'язок між полярними координатами на поверхні еліпсоїда та на площині
4. Переобчислення плоских координат Гаусса-Крюгера при переході від одного осового меридіана до іншого

### 1. Основні положення та визначення

Інженерно-геодезичні роботи, призначені для геодезичного забезпечення споруд, тунелів, зрошувальних систем, тепло- та гідроелектростанцій, аеродромів, залізничних і шосейних доріг, автомагістралей, мостів, промислових і сільськогосподарських об'єктів і т. ін., як правило, виконуються на порівняно невеликих територіях. Державні топографічні зйомки, особливо великомасштабні, на кожній стадії також охоплюють невеликі частини країни.

Система координат і математична обробка матеріалів обмежених державних мереж, які прокладаються для вказаних цілей, повинні бути найпростішими. Для інженерно-геодезичних робіт недоцільно застосовувати системи геодезичних координат, не дивлячись на те, що вони є загальними для всієї поверхні земного сфероїда, оскільки одержуються шляхом доволі складних обчислень і до того ж у дуговій розмірності, а лінійні значення дугових одиниць змінюються зі зміною широти місця.

Найпростішою є система прямокутних координат на площині, яка, однак, із поверхнею земного сфероїда безпосередньо не пов'язана. Дослідження кривини поверхні сфероїда показують, що лише доволі невеликі його ділянки можна взяти за площину. Так, наприклад, якщо визначати лінійні елементи геодезичних мереж з точністю до 0,4 мм, то лише ділянку земної поверхні радіусом 5 км можна взяти за площину. Тому застосування плоских прямокутних координат у геодезичних роботах можливе лише шляхом проектування частини референц-еліпсоїда на площину. Вибір проекції для перенесення геодезичних побудов з еліпсоїда на площину становить теоретичну та практичну важливу проблему сфероїдної геодезії.

Проекції референц-еліпсоїда на площині, які приймаються для перенесення та обробки геодезичних вимірів, називають *геодезичними*. На відміну від *картографічних* проекцій, для яких головна задача полягає в

зображенні значних ділянок земної поверхні на площині (картографічні матеріали), геодезичні проекції дають методи точного перенесення елементів поверхні еліпсоїда (ліній, кутів) на площину.

При виборі геодезичних проекцій вихідними умовами є: величина спотворень і простота їх врахування. Вочевидь зрозуміло, що чим менше спотворення в даній проекції, тим для більшої території її можна застосовувати. Спотворення в будь-якій проекції неминучі, тому головною вимогою у процесі вибору геодезичної проекції слід вважати легкість і зручність врахування спотворень.

Геодезичні побудови, як правило, створюються шляхом вимірювання кутів геометричних фігур, а лінійні вимірювання виконуються, наприклад, у тріангуляції, лише для задавання масштабу мережі. Таким чином, при виборі проекції слід поставити умову, щоб кути геодезичних мереж при перенесенні їх з еліпсоїда на площину в тій або іншій проекції зберігали свої величини. Такі проекції, в яких дотримується рівність кутів, називають *рівнокутними* або *конформними*.

Конформні проекції мають вельми важливу для складання топографічних карт і планів властивість – зберігають подібність у нескінченно малих частинах. Однак, конформних проекцій еліпсоїда на площині існує нескінченна множина. Задача полягає у виборі з них тієї, яка найкращим чином відповідає географічному розташуванню даної країни та зручна для практичних обчислень.

Вказані принципові міркування були покладені в основу вибору геодезичної проекції для території СРСР (у тому числі і для території України). Вибрали конформну проекцію Гаусса-Крюгера, яка була прийнята в 1928 – 1930 роках, а до того часу мала порівняно незначне застосування в геодезичних роботах у СРСР і за кордоном. Проекція Гаусса-Крюгера (поперечно-циліндрична для кулі) рис. 27.

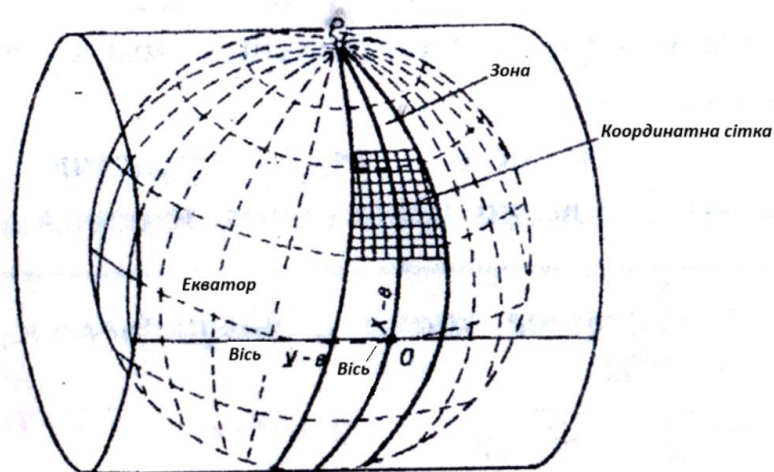


Рис. 27. Проекція Гаусса-Крюгера (поперечно-циліндрична)

застосовується для розподілу поверхні референц-еліпсоїда на координатні зони, обмежені меридіанами та простягаються від Північного до Південного полюсів.

Проекція Гаусса-Крюгера визначається такими умовами:

- проекція Гаусса-Крюгера конформна, тобто масштаб зображення є постійним у заданій точці та, як наслідок, не залежить від напрямку, а залежить лише від координат пункту;
- осьовий меридіан кожної зони зображується на площині прямою лінією, яку беруть за вісь абсцис; початок координат у кожній зоні обирається в точці перетину зображення осьового меридіана із зображенням екватора; вісь ординат збігається із зображенням екватора;
- масштаб зображення на осьовому меридіані дорівнює одиниці ( $m=1$ ), тобто осьовий меридіан зображується на площині без спотворень (у натуральну величину); для точок осьового меридіана абсциси дорівнюють дугам меридіанів, відлічених від екватора.

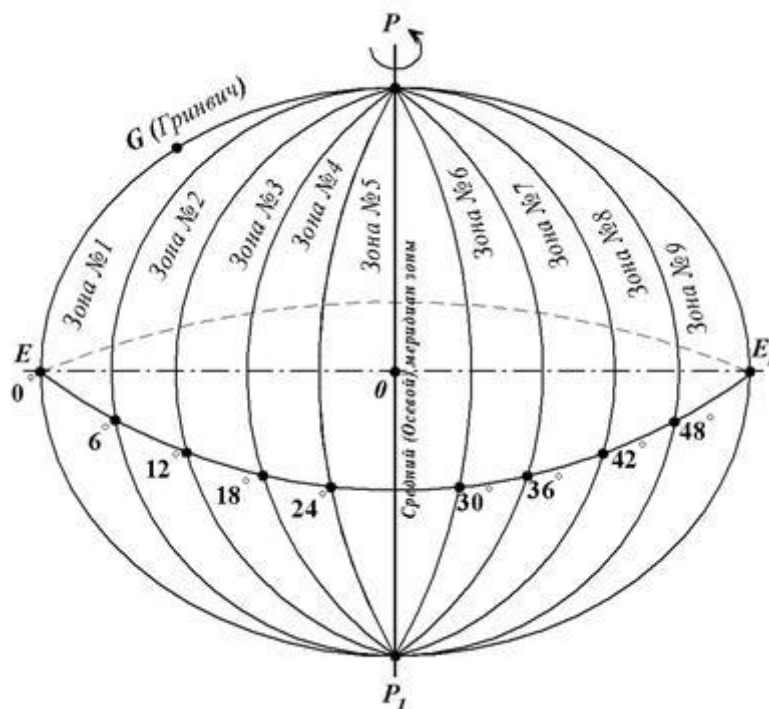


Рис. 28. Координатні зони в проекції Гаусса-Крюгера

Ширина координатних зон встановлюється, виходячи з величини лінійних спотворень і з урахуванням зручності практичного застосування формул. В Україні прийняті дві системи координатних зон — *шестиградусні* та *триградусні*. Осьові меридіани шестиградусних зон збігаються з центральними меридіанами аркушів карт масштабу 1:1000000. Порядковий номер зони визначається за формулою:

$$n = N - 30, \quad (7.1)$$

де  $N$  – номер колони аркушів карт масштабу 1:1000000.

Проекція Гаусса-Крюгера дозволяє встановити одноманітність в обчисленні плоских конформних координат для всієї території держави, але ці координати обчислюються в певній зоні, причому кожна зона має свою систему координат. Тому для практичного їх застосування необхідно переобчислювати координати з однієї зони в іншу, суміжну до неї. У зв'язку з цим, в Україні перекриття зон встановлено в  $1^\circ$  по довготі: західна та східна зони перекривають одна одну на  $30'$ . Це означає, що координати пунктів геодезичних мереж, розташованих у смузі вказаного перекриття зон, визначаються в системах двох суміжних зон.

У геодезичних роботах спеціального призначення, наприклад, для зйомки міст, спорудження тунелів, будівництва промислових і сільськогосподарських об'єктів і т. ін., з метою зменшення або виключення впливу спотворень проекції допускається відступ від загальноприйнятої схеми застосування проекції та координат Гаусса-Крюгера. У цих випадках початок координат і осьовий меридіан обирають у центрі об'єкта; однак координати пунктів основної геодезичної мережі повинні бути також обчислені у відповідній шести- або триградусній зоні. При виборі локального початку координат і локального осьового меридіана слід так розраховувати, щоб не враховувати спотворення проекції.

Порядок перенесення опорної геодезичної мережі з еліпсоїда на площину в проекції Гаусса-Крюгера такий:

- від геодезичних координат початкового пункту мережі переходять до плоских прямокутних координат Гаусса-Крюгера; одночасно обчислюють гауссове зближення меридіанів  $\gamma$ ;
- від довжини геодезичної лінії та її азимута в початковому пункті переходять до довжини та дирекційного кута хорди;
- від кутів між геодезичними лініями переходять до кутів між хордами їх зображень на площині.

Виконуючи ці дії, одержують геодезичну мережу прямолінійних трикутників на площині, а потім її вирівнюють і одержують плоскі прямокутні координати всіх вершин (пунктів) трикутників.

## **2. Математичні основи проекції Гаусса-Крюгера**

### ***Обчислення плоских координат за геодезичними***

Конформно зобразити поверхню земного сфероїда на площині – значить встановити закономірну відповідність між точками поверхні еліпсоїда та площини так, щоб відповідні кути малих геометричних фігур на сфероїді та на площині були рівними, а сторони – пропорційними.

Виведення формул визначення прямокутних координат деякої точки  $x, y$  за геодезичними  $B, L$  проведемо, виходячи із вказаних двох умов проекції Гаусса-Крюгера:

- осьовий меридіан зображується на площині прямою лінією;
- спотворення вздовж нього відсутні.

Із елементарних прямокутних трикутників  $\Delta QCK$  і  $\Delta Q'C'K'$  можна записати:

$$\left. \begin{aligned} dS^2 &= (MdB)^2 + (N \cos B dl)^2 \\ dD^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (7.5)$$

Тоді масштаб зображення буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} m &= \frac{dD}{dS} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(MdB)^2 + (N \cos B dl)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(N \cos B)^2 \left[ \left( \frac{MdB}{N \cos B} \right)^2 + (dl)^2 \right]}}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Позначимо

$$dq = \frac{MdB}{N \cos B}, \quad (7.7)$$

тоді:

$$q = \int_0^B \frac{MdB}{N \cos B}.$$

Величина  $q$  називається *ізометричною широтою*, оскільки залежить лише від широти. Тому  $dq$  і  $dl$  можуть розглядатись як диференціали незалежних змінних. Тоді:

$$m^2 = \frac{1}{(N \cos B)^2} \frac{[(dx)^2 + (dy)^2]}{[(dq)^2 + (dl)^2]} \quad (7.8)$$

або, вводячи комплексні числа, одержимо:

$$m^2 = \frac{1}{(N \cos B)^2} \frac{(dx + idy)(dx - idy)}{(dq + idl)(dq - idl)}, \quad (7.9)$$

або

$$m^2 = \frac{1}{(N \cos B)^2} \frac{d(x + iy)d(x - iy)}{d(q + il)d(q - il)}, \quad (7.10)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ .

Оскільки формула (7.10) виражає масштаб зображення у довільному напрямку, а у рівнокутних проекціях він не залежить від останніх, то не

повинен також залежати і від відношень диференціалів  $\frac{dy}{dx}$  або  $\frac{dq}{dl}$ , які визначають напрямки відрізків на площині та еліпсоїді.

У теорії функції комплексної змінної доводиться, що для того щоб відношення вигляду  $\frac{d(x+iy)}{d(q+il)}$  не залежало від  $\frac{dq}{dl}$ , тобто щоб масштаб зображення не залежав від напрямку відрізка, необхідно, щоб  $x \pm iy$  було деякою аналітичною функцією від  $q \pm il$ , тобто:

$$x \pm i \cdot y = f(q \pm i \cdot l). \quad (7.11)$$

Функція називається аналітичною, якщо вона має скінченні й неперервні похідні будь-якого порядку у всіх точках області її задавання.

Маючи на увазі, що  $l$  величина мала ( $l \leq 3^\circ$ ), розвинемо (7.11) у ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} x + iy = f(q) + il \frac{df(q)}{dq} + \frac{(il)^2}{2!} \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{(il)^3}{3!} \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \\ + \frac{(il)^4}{4!} \frac{d^4 f(q)}{dq^4} + \frac{(il)^5}{5!} \frac{d^5 f(q)}{dq^5} + \frac{(il)^6}{6!} \frac{d^6 f(q)}{dq^6} + \dots \end{aligned} \quad (7.12)$$

або, враховуючи  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$  і т.д., одержують:

$$\begin{aligned} x + iy = \left\{ f(q) - \frac{l^2}{2} \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{l^4}{24} \frac{d^4 f(q)}{dq^4} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6 f(q)}{dq^6} + \dots \right\} + \\ + i \left\{ l \frac{df(q)}{dq} - \frac{l^3}{6} \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \frac{l^5}{120} \frac{d^5 f(q)}{dq^5} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Прирівнявши окремо дійсні та неявні частини виразу (7.13), а також враховуючи, що масштаб вздовж осьового меридіана (при  $l = 0$ ,  $y = 0$ )  $m = 1$ , а рівняння зображення осьового меридіана  $x = f(q) = X$ , одержують основні рівняння, що визначають закон зображення точок еліпсоїда на площині в проекції Гаусса-Крюгера:

$$\left. \begin{aligned} x &= X - \frac{l^2}{2} \frac{d^2 X}{dq^2} + \frac{l^4}{24} \frac{d^4 X}{dq^4} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6 X}{dq^6} + \dots \\ y &= l \frac{dX}{dq} - \frac{l^3}{6} \frac{d^3 X}{dq^3} + \frac{l^5}{120} \frac{d^5 X}{dq^5} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (7.14)$$

Для того щоб знайти коефіцієнти цих рядів, необхідно продиференціювати довжину дуги меридіана  $X$  як складну функцію, що залежить від геодезичної широти, яка в свою чергу залежить від ізометричної широти  $q$ .

Підставивши вказані похідні у формулу (7.14), остаточно маємо:



$$\left. \begin{aligned} x &= X + \frac{l^2}{2\rho^2} N \sin B \cos B \cdot \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{12\rho^2} (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l^4 \cos^4 B}{360\rho^4} (61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \right\} \\ y &= \frac{l}{\rho} N \cos B \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{6\rho^2} (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l^4 \cos^4 B}{120\rho^4} (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B) \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (7.23)$$

У цих формулах збережено стільки членів розвинення, скільки необхідно для обчислення плоских прямокутних координат з точністю до 0,001 м при різниці довгот до  $3^\circ 30'$ .

Для розрахунків, що проводять з використанням обчислювальної техніки, зручніше користуватися такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= 6367558,4969 \frac{B}{\rho''} - \{a_0 - [0,5 + (a_4 + a_6 l^2) l^2] N\} \sin B \cos B \\ y &= [1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2] l N \cos B \end{aligned} \right\}, \quad (7.24)$$

де  $N$  – обчислюють за формулою:

$$N = 6399698,902 - [21562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B.$$

Коефіцієнти формули (7.24) визначають так:

$$a_0 = 32140,404 - [135,3302 - (0,7092 - 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B;$$

$$a_4 = (0,25 + 0,00252 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,04166;$$

$$a_6 = (0,166 \cos^2 B - 0,084) \cos^2 B;$$

$$a_3 = (0,3333333 + 0,001123 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,1666667;$$

$$a_5 = 0,0083 - [0,1667 - (0,1968 + 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B.$$

Величина  $l$  дорівнює:

$$l = \frac{(L - L_0)''}{\rho''}.$$

### **Обчислення геодезичних координат за плоскими координатами**

У проекції Гаусса-Крюгера ордината  $y$  – мала величина порівняно з абсцисою  $x$ , тому функцію (7.25) можна розвинути в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
q + il = q_x + iy \left( \frac{dq}{dX} \right)_x + \frac{(iy)^2}{2!} \left( \frac{d^2 q}{dX^2} \right)_x + \frac{(iy)^3}{3!} \left( \frac{d^3 q}{dX^3} \right)_x + \\
+ \frac{(iy)^4}{4!} \left( \frac{d^4 q}{dX^4} \right)_x + \frac{(iy)^5}{5!} \left( \frac{d^5 q}{dX^5} \right)_x + \frac{(iy)^6}{6!} \left( \frac{d^6 q}{dX^6} \right)_x + \dots,
\end{aligned} \quad (7.27)$$

в якій значення похідних і  $q_x$  беруть за широтою  $B_x$ .

Прирівнявши дійсні та неявні частини (7.27), будемо мати:

$$\left. \begin{aligned} q &= q_x - \frac{y^2}{2!} \left( \frac{d^2 q}{dX^2} \right)_x + \frac{y^4}{24} \left( \frac{d^4 q}{dX^4} \right)_x - \frac{y^6}{720} \left( \frac{d^6 q}{dX^6} \right)_x + \dots \\ l &= y \left( \frac{dq}{dX} \right)_x - \frac{y^3}{6} \left( \frac{d^3 q}{dX^3} \right)_x + \frac{y^5}{120} \left( \frac{d^5 q}{dX^5} \right)_x - \dots \end{aligned} \right\}. \quad (7.28)$$

Розглядаючи ізометричну широту  $q$  як складну функцію дуги меридіана  $X$ , послідовним диференціюванням знаходимо всі необхідні похідні:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dX} &= \frac{dq}{dB} \frac{dB}{dX} \\ \frac{d^2 q}{dX^2} &= \frac{d}{dB} \left( \frac{dq}{dX} \right) \frac{dB}{dX} \\ \frac{d^3 q}{dX^3} &= \frac{d}{dB} \left( \frac{d^2 q}{dX^2} \right) \frac{dB}{dX} \\ &\dots \end{aligned} \right\}. \quad (7.29)$$

Оскільки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dB} &= \frac{M}{N \cos B} \\ \frac{dB}{dX} &= \frac{1}{M} \end{aligned} \right\}, \quad (7.30)$$

то

$$\frac{dq}{dX} = \frac{1}{N \cos B} = \frac{1}{r}. \quad (7.31)$$

Знайдемо другу похідну. Оскільки:

$$\frac{d}{dB} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{M \sin B}{N^2 \cos^2 B}; \quad (7.32)$$

то

$$\frac{d^2 q}{dX^2} = \frac{\sin B}{N^2 \cos^2 B} = \frac{\operatorname{tg} B}{N^2 \cos B}. \quad (7.33)$$

Таким шляхом можна знайти всі наступні похідні.

У рядах (7.28) всі коефіцієнти повинні бути обчислені за широтою  $B_x$ , що відповідає довжині дуги меридіана  $X = x$ .

Тепер від ізометричної широти  $q$  необхідно перейти до геодезичної широти  $B$ . Різницю широт  $B - B_x$  представимо у вигляді ряду за степенями малої різниці  $q - q_x$ :

$$B - B_x = \left( \frac{dB}{dq} \right)_x (q - q_x) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 B}{dq^2} \right)_x (q - q_x)^2 + \dots \quad (7.35)$$

Похідні, що входять до складу коефіцієнтів цього ряду, визначаються так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dq} &= \frac{N \cos B}{M} = V^2 \cos B = \cos B + e'^2 \cos^3 B \\ \frac{d^2 B}{dq^2} &= \frac{d}{dB} \left( \frac{dB}{dq} \right) \frac{dB}{dq} = (-\sin B - 3e'^2 \cos^2 B \sin B) V^2 \cos B = \\ &= -V^2 \sin B \cos B (1 + 3\eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Таким же чином можна знайти і наступні похідні. Наведемо без виведення вирази для третьої похідної без сфероїдних членів:

$$\frac{d^3 B}{dq^3} = -\cos^3 B \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 B). \quad (7.37)$$

Підставивши ці похідні у рівняння (7.35), замінимо в ньому  $q - q_x$  за першою формулою рівнянь (7.28), в якій похідні замінимо їх виразами з (7.34). Таким чином, в остаточному вигляді формули для обчислення геодезичних координат за плоскими координатами Гаусса набудуть вигляду:

$$\left. \begin{aligned} B &= B_x - \frac{V_x^2 \operatorname{tg} B_x}{2N_x^2} y^2 \rho \left[ 1 - \frac{y^2}{12N_x^2} (5 + 3\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4}{360N_x^4} (61 + 90\operatorname{tg}^2 B_x + 45\operatorname{tg}^4 B_x) \right] \\ l &= \frac{y \cdot \rho}{N_x \cos B_x} \left[ 1 - \frac{y^2}{6N_x^2} (1 + 2\operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^4}{120N_x^4} (5 + 28\operatorname{tg}^2 B_x + 24\operatorname{tg}^4 B_x + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Точність обчислень за цими формулами відповідає точності формул (7.23); при  $l < 3^\circ 30'$  координати  $B$ ,  $l$  одержують з похибкою менше 0,0001".

Для розрахунків із застосуванням обчислювальної техніки формули (7.38) перетворюються на такі (з використанням елементів еліпсоїда Красовського):

$$\left. \begin{aligned} B &= B_x - [1 - (b_4 - 0,12z^2)z^2]z^2b_2 \\ l &= [1 - (b_3 - b_5z^2)z^2]z\rho'' \end{aligned} \right\}, \quad (7.39)$$

де

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + \\ &\quad + 22\cos^2 \beta)\cos^2 \beta]\cos^2 \beta\}10^{-10} \sin \beta \cos \beta \cdot \rho'' \\ \beta &= \frac{x}{6367558,4969} \rho'' \\ z &= \frac{y}{N_x \cos B_x} \\ N_x &= 6399698,902 - [21562,267 - (108,973 - \\ &\quad - 0,612\cos^2 B_x)\cos^2 B_x]\cos^2 B_x \\ b_2 &= (0,5 + 0,0033692\cos^2 B_x)\sin B_x \cos B_x \\ b_3 &= 0,333333 - (0,166667 - 0,001123\cos^2 B_x)\cos^2 B_x \\ b_4 &= 0,25 + (0,16161 + 0,00562\cos^2 B_x)\cos^2 B_x \\ b_5 &= 0,2 - (0,1667 - 0,0088\cos^2 B_x)\cos^2 B_x \end{aligned} \right\}. \quad (7.40)$$

### **Зближення меридіанів**

Для будь-якого зображення еліпсоїда на площині зближення меридіанів являє собою кут, що утворюється зображенням меридіана даної точки з координатною лінією  $u = \text{const}$ .

Зближення меридіанів на площині, яке необхідне для переходу від геодезичних азимутів до дирекційних кутів і навпаки, може бути виражено як через геодезичні, так і через плоскі прямокутні координати точок.

Підставляючи вирази (7.46), (7.48) і (7.49) у рівняння (7.47), одержуємо шукану формулу:

$$\gamma = \sin B \cdot l + \sin B \cos^2 B (1 + 3\eta^2) \frac{l^3}{3} + \sin B \cos^4 B (2 - \text{tg}^2 B) \frac{l^5}{15}. \quad (7.50)$$

Усі кутові величини формули (7.50) виражені у *радіанах*. Похибка обчислення  $\gamma$  за цією формулою менше  $0,001''$  при  $l$  менше  $3^\circ 30'$ .

Для розрахунків із застосуванням обчислювальної техніки використовують формулу, яку одержують з рівняння (7.50), з елементами еліпсоїда Красовського:

$$\gamma = \{1 + [(0,33333 + 0,00674 \cos^2 B) + (0,2 \cos^2 B - 0,0067) l^2] l^2 \cos^2 B\} l \sin B \cdot \rho''.$$
(7.51)

*Зближення меридіанів на площині у функції плоских координат*  
Будемо виходити з формули:

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{M}{r} \left( \frac{\partial B}{\partial y} \right) : \left( \frac{\partial L}{\partial y} \right) \equiv - \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right) : \left( \frac{\partial l}{\partial y} \right).$$
(7.52)

Для розрахунків із застосуванням обчислювальної техніки використовують формулу, одержану з рівнянь (7.54), з елементами еліпсоїда Красовського:

$$\gamma = \{1 - [(0,33333 - 0,00225 \cos^4 B_x) - (0,2 - 0,067 \cos^2 B_x) z^2] z^2\} z \sin B_x \rho''.$$
(7.55)

У формулі (7.55) значення  $B_x$  і  $z$  ті ж самі, що і у формулі (7.39). Зближення меридіанів за цими формулами одержують у *радіанах*.

### **Масштаб зображення**

Для обчислення масштабу у будь-якій конформній проекції використовується формула:

$$m = \frac{1}{N \cos B} \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)^2}.$$
(7.56)

$$m = \frac{1}{N \cos B} \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right) \sec \gamma.$$
(7.58)

Із прийнятою точністю одержуємо:

$$\sec \gamma = 1 + \sin^2 B \frac{l^2}{2} + \sin^2 B \cos^2 B \frac{2l^4}{3} + \sin^4 B \frac{5l^4}{24} + \dots$$
(7.60)

або

$$\sec \gamma = 1 + \cos^2 B \operatorname{tg}^2 B \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (16 \operatorname{tg}^2 B + 5 \operatorname{tg}^4 B) \frac{l^4}{24}.$$
(7.61)

Помножив цей вираз на рівняння (7.43), маємо:

$$m = 1 + \frac{1 + \eta^2}{2} \cos^2 B l^2 + \frac{5 - 4 \operatorname{tg}^2 B}{24} \cos^4 B l^4.$$
(7.62)

Одержана формула застосовується для обчислення масштабу зображення залежно від геодезичних координат. У ній відкинуті члени порядку  $l^6$ , а також сфероїдні члени при множнику  $l^4$ .

Формула масштабу набуде простішого вигляду, якщо виразимо її у функції плоских координат. Для цього візьмемо вираз для  $u$  із формул (7.23) із дещо меншою, але достатньою для нашого завдання точністю:

$$y = \frac{l}{\rho} N \cos B \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{6\rho^2} (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \dots \right\} \quad (7.63)$$

або

$$y = N \cos B \cdot l + N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{l^3}{6}.$$

Підставимо ці вирази у рівняння (7.62):

$$m = 1 + \frac{1 + \eta^2}{N^2} \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24N^4}. \quad (7.67)$$

У члені четвертого порядку відносно  $y$  можна взяти  $N = R$ . Таким чином остаточно одержимо:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \quad (7.69)$$

### 3. Зв'язок між полярними координатами на поверхні еліпсоїда та на площині

На поверхні еліпсоїда положення будь-якої точки  $Q_2$  відносно деякої точки  $Q_1$  визначається геодезичними полярними координатами – довжиною геодезичної лінії  $s_{12}$  та її геодезичним азимутом  $A_{12}$  в точці  $Q_1$ . Після того, як поверхня еліпсоїда зображується на площині, положення точки  $Q_2$  (тобто її зображення на площині) відносно точки  $Q_1$  (рис. 29) буде визначатись плоскими полярними координатами – довжиною прямолінійного відрізка  $d_{12}$  і його направляючим кутом  $\alpha_{12}$  в точці  $Q_1$ .

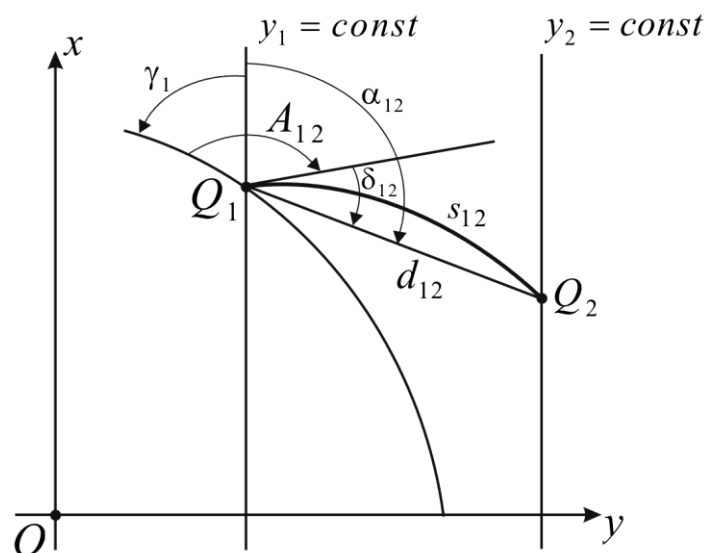


Рис. 29. Встановлення зв'язку між полярними координатами на поверхні еліпсоїда та на площині

Направляючий кут  $\alpha_{12}$ , що відлічується від напрямку осі абсцис за ходом годинникової стрілки до заданого напрямку, називається *дирекційним кутом*.

Необхідно встановити зв'язок між полярними координатами  $s_{12}$ ,  $A_{12}$  на поверхні еліпсоїда та  $d_{12}$ ,  $\alpha_{12}$  на площині. Встановлення такого зв'язку ускладнюється тією обставиною, що геодезична лінія еліпсоїда зображується на площині не прямою лінією, а кривою  $s$ , вигляд якої в загальному випадку невідомий. Вона має змінну кривину і при малій довжині близька за формою до дуги кола. Для практичного використання криву  $s_{12}$  замінюють її хордою  $d_{12}$ .

Для переходу від азимута  $A_{12}$  геодезичної лінії  $s_{12}$  до дирекційного кута  $\alpha_{12}$  хорди  $d_{12}$  можна записати, згідно рис. 64, таке співвідношення:

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}, \quad (7.70)$$

де  $\gamma_1$  – зближення меридіанів у точці  $Q_1$ ;  $\delta_{12}$  – поправка, що виникає внаслідок кривини зображення геодезичної лінії (скорочено – поправка за кривину). Вочевидь, ця поправка являє собою кут між дотичною і хордою кривої  $s_{12}$ . Домовимось цей кут відлічувати за ходом годинникової стрілки від дотичної до хорди.

Кривину конформного зображення геодезичної лінії  $\Gamma$  знаходять за формулою:

$$\Gamma = \frac{d \ln m}{dn}. \quad (7.76)$$

Це рівняння, винайдене у 1886 році голландським вченим Схольсом, читається так: *кривина конформного зображення геодезичної лінії дорівнює похідній логарифму масштабу за зовнішньою нормаллю* (тобто нормаллю до кривої, спрямованої в бік опуклості кривої).

#### **4. Переобчислення плоских координат Гаусса-Крюгера при переході від одного осьового меридіана до іншого**

Кожна координатна зона має самостійну систему координат. Тому, якщо геодезична мережа розташовується в межах території двох зон або на стику двох зон, то частина її пунктів буде мати координати однієї системи, а ще одна частина – другої системи. Математичне опрацювання такої мережі виконати сумісно в даному випадку неможливо. Для цього необхідно попередньо одержати координати всіх пунктів у єдиній системі координат. Виникає задача переобчислення (перетворення) координат із

однієї зони в іншу. Аналогічна задача переобчислень виникає при переході із 6-градусної зони в 3-градусну та навпаки.

Після остаточних обчислень координат у єдиній системі пункти геодезичної мережі повинні одержати координати в системі тих зон, у яких вони розташовані, тобто знов виникає задача переобчислень координат із зони в зону.

Задача переобчислення координат виникає при опрацюванні ходів знімальної основи аерофотозйомки на межі зон. При цьому необхідно координати опорних пунктів державної геодезичної мережі мати в одній системі координат. Якщо ці пункти розташовані в різних зонах і їх координати віднесені до різних осьових меридіанів, то виникає необхідність переобчислення координат з однієї зони в іншу.

До задачі переобчислення координат можна віднести такий випадок: якщо були виконані зйомочні роботи для складання спеціальних крупномасштабних планів і район робіт знаходиться на стику двох зон або на краю однієї зони, виникає необхідність переобчислення координат опорних пунктів відносно деякого осьового меридіана, що проходить через територію зйомки. Такі перетворення пов'язані з неприпустимими величинами спотворень, що мають місце на краях зон, при використанні зйомочних матеріалів у спеціальних цілях.

Розглянемо основні принципи задачі переобчислення плоских координат Гаусса-Крюгера. На рис. 30 показані дві системи плоских конформних координат у проекції Гаусса-Крюгера, в яких довготи осьових меридіанів відрізняються одна від одної на величину  $l_0$ .

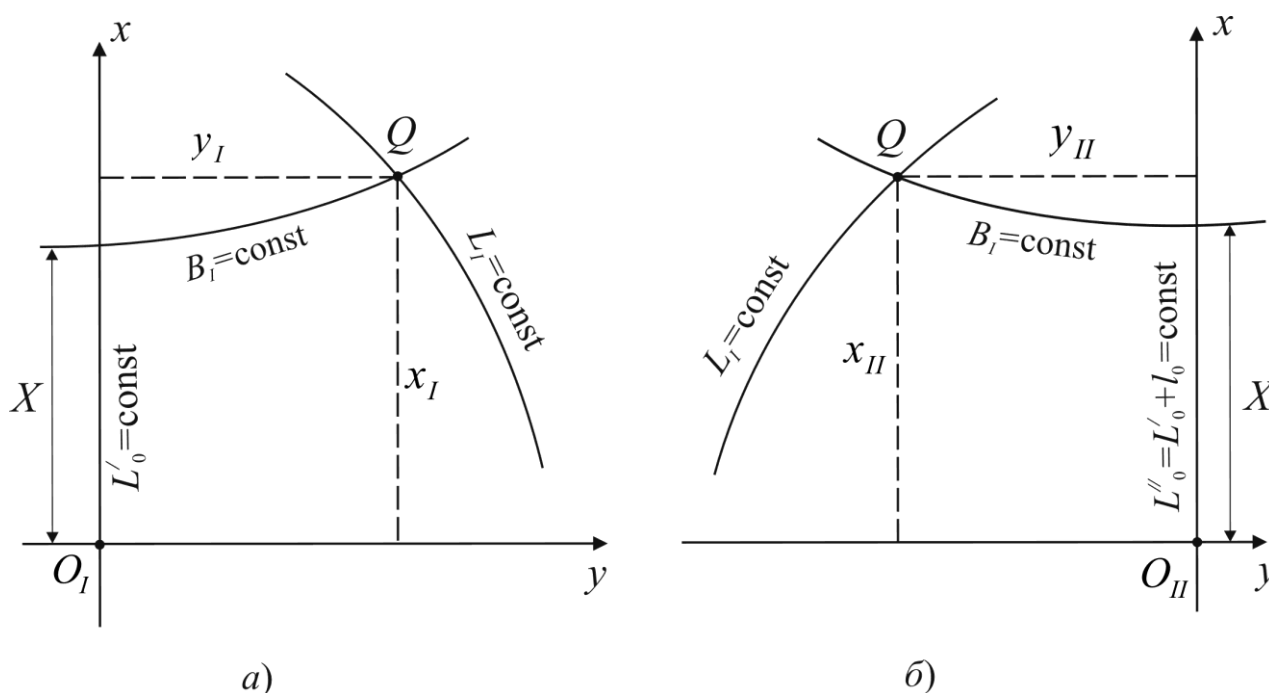




Рис. 30. Графічне представлення про перехід до іншого осьового меридіана

Деяка точка  $Q$  з координатами  $B_I$  і  $L_I$  на еліпсоїді після зображення її на площині в першій системі координат буде мати координати  $x_I$  і  $y_I$  (рис. 30, *а*). Ця ж сама точка в другій системі координат на площині буде мати координати  $x_{II}$  та  $y_{II}$  (рис. 30, *б*).

Перехід від системи координат з одним осьовим меридіаном  $L'_0 = \text{const}$  до системи координат з іншим осьовим меридіаном  $L''_0 = L'_0 \pm l_0 = \text{const}$  будемо називати коротко «перехід до іншого осьового меридіана». В геодезичній літературі такий перехід часто називають «перехід із зони в зону».

При переході до іншого осьового меридіана змінюються не лише плоскі координати, але і всі пов'язані з координатами величини: масштаб зображення, зближення меридіанів, редукції довжин і напрямків геодезичної лінії, дирекційні кути та довжини хорд. Будемо розглядати лише спосіб перетворення координат.

При переході від одного осьового меридіана до іншого різниця довгот осьових меридіанів найчастіше є сталою ( $6^\circ$  або  $3^\circ$ ). Але вона може відрізнятися від цих величин, якщо застосовується проекція, довгота осьового меридіана якої не збігається зі стандартними довготами осьових меридіанів у загальнодержавній системі плоских координат.

Задача перетворення координат розв'язується аналітичним методом:

– від відомих для заданої зони плоских прямокутних координат  $x_I$ ,  $y_I$  пункту  $Q$  переходять до його геодезичних координат  $B_I$ ,  $l_I$  (де  $B_I$  – геодезична широта пункту  $Q$ ;  $l_I = L_I - L'_0$  – різниця довгот пункту  $Q$  та осьового меридіана  $L'_0$  даної координатної зони), використовуючи рівняння (7.39) проекції Гаусса-Крюгера;

– за знайденими геодезичними координатами пункту  $Q$  обчислюють його плоскі прямокутні координати  $x_{II}$ ,  $y_{II}$ , використовуючи рівняння (7.24) проекції Гаусса-Крюгера, з іншим осьовим меридіаном і з іншою початковою точкою. При цьому широту  $B_I$  залишають без змін, а різниця довгот  $l_I$  змінюється на величину різниці довгот осьових меридіанів координатних зон:

$$\left. \begin{aligned} l_0 &= L''_{0(II)} - L'_{0(I)} \\ l_{II} &= l_I \pm l_0 \end{aligned} \right\}. \quad (7.77)$$

У цій формулі вибір знаку залежить від умов завдання: якщо переобчислення виконують із західної координатної зони до східної, то до значення довготи пункту  $l_1$  додається значення  $l_0$ , якщо ж із східної зони до західної, то від значення  $l_1$  віднімають величину  $l_0$ .

### **Запитання до самоперевірки**

1. Що таке картографічні проекції?
2. Що таке координатні зони?
3. Які математичні основи проекції Гаусса-Крюгера?
4. Що таке граничний та осьовий меридіан зони?
5. Як встановлюється зв'язок між полярними координатами на поверхні еліпсоїда та на площині?
6. Який порядок переобчислення плоских координат Гаусса-Крюгера при переході від одного осьового меридіана до іншого?

## **Частина II. ФІЗИЧНА ГЕОДЕЗІЯ**

### **Лекція 8. ГРАВІТАЦІЙНЕ ПОЛЕ ЗЕМЛІ**

#### **Питання**

1. Питання, що вивчаються в частині курсу «Фізична геодезія»
2. Гравітаційне поле Землі
3. Рівневі поверхні. Геоїд і квазігеоїд. Земний еліпсоїд
4. Нормальне гравітаційне поле Землі
5. Аномальне гравітаційне поле Землі

#### **1. Основні питання, що вивчаються в частині курсу «Фізична геодезія»**

Фізична геодезія – частина вищої геодезії, в якій розглядаються методи вивчення фігури Землі як фізичного та геометричного тіла на основі законів механіки та дослідних даних – результатів геодезичних, гравіметричних і астрономічних вимірювань. Якщо у сфероїдній геодезії встановлюються математичні залежності між елементами поверхні еліпсоїда, вважаючи його параметри відомими, то фізична геодезія розглядає методи визначення параметрів земного еліпсоїда та методи вивчення дійсної фігури Землі зазвичай відносно обраного еліпсоїда як поверхні відносності або порівняння.

Вивчення фігури Землі ґрунтується на визначенні дійсного зовнішнього гравітаційного поля Землі, тому у фізичній геодезії значна увага надається теорії потенціалу сили ваги Землі та його визначенню за результатами гравіметричних вимірювань. До фізичної геодезії належить також редуційна проблема вищої геодезії, під якою зазвичай розуміють сукупність задач з обчислення поправок у безпосередньо виміряні значення кутів, ліній та інших елементів за перехід до поверхні відносності. Розв'язання такої задачі пов'язане з необхідністю знання відхилень прямовисних ліній і висот. Методи виведення відхилень прямовисних ліній і теорія геопотенціальних висот розглядаються у фізичній геодезії.

До фізичної геодезії належать питання використання геодезичних даних для вивчення деформації земної поверхні та внутрішньої будови Землі як фізичного тіла. Насамперед завдяки фізичній геодезії геодезія в цілому входить до складу науки про Землю як сукупності знань, що даються геофізикою, геологією та іншими науками.

Сучасна постановка задачі з визначення фігури Землі полягає у встановленні параметрів земного еліпсоїда з малим полярним стисненням, який найкраще представляє Землю у планетарному масштабі. Такій еліпсоїд обертання вибирають як загальну фігуру Землі. Під дійсною

фігурою Землі будемо розуміти фізичну поверхню на суші та незбурену поверхню води океанів і морів.

Дійсна фігура Землі – фізична земна поверхня – визначається координатами кожної її точки в обраній системі. Однак, практично такого визначення положення всіх точок поверхні Землі методами вищої геодезії не потрібно. Достатньо визначати просторові координати  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  або геодезичні  $B$ ,  $L$ ,  $H$  окремих точок, рівномірно розташованих на земній поверхні. Такими точками на суші можуть бути пункти астрономо-геодезичної мережі 1 та 2 класів і репери нівелювання I та II класів. Координати інших точок можна одержати з необхідною точністю шляхом розвитку геодезичних мереж наступних за точністю класів, а також методами топографії. Вивчення дійсної фігури Землі на водній поверхні полягає у визначенні висот її точок відносно еліпсоїда. Вибір цих точок, їх густина впливають із вимог до точності та детальності вивчення форми даної водної поверхні.

## 2. Гравітаційне поле Землі

На матеріальну точку діє сила притягання та відцентрова сила, що виникає внаслідок добового обертання Землі. Якщо позначити через  $F$  силу земного притягання, а через  $P$  – відцентрову силу, що виникає внаслідок добового обертання матеріальної точки навколо осі обертання Землі, то рівнодійна цих двох сил  $g$  (рис. 70) становить *силу ваги* Землі. Вектор сили ваги  $g$  дорівнює сумі векторів сили притягання  $F$  та відцентрової сили  $P$ :

$$g = F + P. \quad (9.1)$$

Сила притягання  $F$  визначається розподілом мас у тілі Землі та її фігурою. Якщо в першому наближенні прийняти Землю за кулю, яка складається з концентричних шарів сталої густини, то сила притягання буде спрямована до центра Землі та, згідно законів всесвітнього тяжіння, виразиться формулою:

$$F = f \frac{M \cdot m}{r^2}, \quad (9.2)$$

де  $M$  – маса Землі;  $m$  – маса матеріальної точки;  $f$  – стала всесвітнього тяжіння;  $r$  – відстань між притягуваної точки до центра Землі.

Для реальної Землі сила притягання  $F$  відрізняється як за величиною (9.2), так і за напрямком (див. рис. 70).

Відцентрова сила  $P$  спрямована вздовж радіуса паралелі та виражається формулою:

$$P = m\omega^2\rho_0, \quad (9.3)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання Землі;  $\rho_0$  – радіус паралелі матеріальної точки.

Відцентрова сила  $P$ , яка досягає максимального свого значення на екваторі, становить менше 1/200 сили земного притягання. Тому сила ваги здебільшого визначається силою земного притягання.

У дійсності ж, якщо потенціал відцентрової сили:

$$u = \frac{\omega^2}{2} \rho_0^2, \quad (9.10)$$

$$\rho_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = r \cos \Phi,$$

то його частинні похідні по осях координат

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \omega^2 x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \omega^2 y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

взяті з протилежним знаком, точно збігаються зі складовими прискорення відцентрової сили (9.9).

Оскільки під гравітаційним полем Землі розуміють поле сили ваги або, точніше, прискорення сили ваги, яке складається з двох сил: сили притягання або тяжіння та відцентрової сили, викликаной добовим обертанням Землі навколо своєї осі, то можна записати:

$$W = V + u, \quad (9.11)$$

тобто потенціал сили ваги Землі  $W$  дорівнює сумі потенціалів притягання та відцентрової сили.

Із урахуванням формул (9.6) і (9.10):

$$W = f \int_M \frac{dm}{\rho} + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \Phi. \quad (9.12)$$

Потенціал притягання можна розвинути в ряд за сферичними гармоніками у вигляді:

$$V = \frac{fM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \Phi) \right], \quad (9.13)$$

де  $fM$  – геоцентрична гравітаційна стала;  $r$ ,  $\Phi$ ,  $\lambda$  – геоцентричні координати матеріальної точки;  $a_e$  – екваторіальний радіус Землі;  $J_{nm}$ ,  $K_{nm}$  – гармонічні коефіцієнти розвинення потенціалу притягання в ряд за сферичними гармоніками;  $P_{nm}(\sin \Phi)$  – сферичні функції Лежандра  $n$ -ї степені  $m$ -го порядку.

### 3. Рівневі поверхні. Геоїд і квазігеоїд. Земний еліпсоїд

Оскільки скалярні функції  $W$  і  $V$  залежать лише від координат точки простору (земної поверхні або навколосемного простору), то можна задати таку поверхню, для точок якої потенціал буде сталим. Таку поверхню називають *еквіпотенціальною* або *рівневою* поверхнею. Зрозуміло, що маса  $M$  створює навколо себе нескінченну множину рівневих поверхонь. При цьому слід зауважити, що сила ваги як похідна від потенціалу на

рівневій поверхні, в загальному випадку, залишається змінною за величиною та напрямком.

Рівневі поверхні Землі мають складну форму, бо Земля має складну фігуру, а розподіл мас, особливо в її зовнішніх шарах, нерівномірний. Тому рівневі поверхні Землі вивчають послідовними наближеннями, розділяючи їх на класи за ступенем точності.

Для визначення сили ваги достатньо взяти похідну потенціалу по зовнішній нормалі до рівневої поверхні:

$$g = -\frac{dW}{dn}. \quad (9.20)$$

Відрізок зовнішньої нормалі  $dh$  між двома нескінченно близькими рівневими поверхнями буде:

$$dh = -\frac{dW}{g}. \quad (9.21)$$

Звідси робимо висновок, що відстань між двома нескінченно близькими рівневими поверхнями не залишається сталою внаслідок зміни сили ваги при переході від однієї точки до другої точки рівневої поверхні. Отже, рівневі поверхні дійсного гравітаційного поля Землі не паралельні між собою. В окремих випадках ця відстань стала лише для двох сферичних рівневих поверхонь.

Криві, дотичні до яких в усіх точках збігаються з напрямками сили ваги, називають *силовими лініями*. Силкові (прямовисні) лінії, за визначенням, перетинають всі рівневі поверхні ортогонально. Силкові лінії гравітаційного поля Землі не паралельні між собою та мають подвійну кривину, тобто не є плоскими кривими, оскільки розподіл мас, особливо у зовнішніх шарах Землі, характеризується значною нерівномірністю. На рис. 31 показано, як змінюється напрямок силових ліній залежно від нерівномірного розподілу мас.

У 1873 р. німецький фізик Лістинг рівневу поверхню, що збігається із середньою поверхнею морів і океанів, незбурених припливами та відпливами, вітрами або змінами атмосферного тиску, та продовжену під материками всюди нормально прямовисним лініям, запропонував назвати основною поверхнею, а тіло, обмежене цією поверхнею, *геоїдом* (грец. γη – земля та εἶδος вигляд – «землеподібний»). Поверхня геоїда є основною рівневою поверхнею Землі, а сам геоїд у першому наближенні вважається за фігуру Землі.

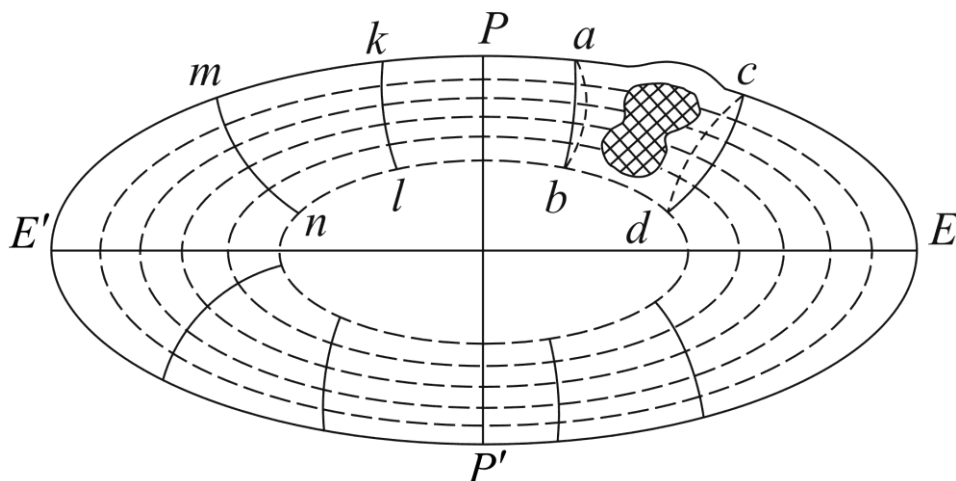


Рис. 31. Рівневі поверхні та силові лінії гравітаційного поля Землі

Сьогодні під поверхнею геоїда розуміють рівневу поверхню, що проходить через початкову точку відліку висот (початок відліку висот), яка визначена за багаторічними спостереженнями за рівнем морів і океанів на спеціальних водомірних станціях. В Україні за початок відліку висот взято нуль Кронштадтського футштоку (так звана спеціальна водомірна рейка, що встановлена в Кронштадті), який збігається з середнім рівнем Балтійського моря, встановленим за багаторічними спостереженнями. Від нуля Кронштадтського футштоку ведеться відлік висот точок земної поверхні в Балтійській системі висот.

Потенціал на поверхні геоїда прийнято позначати  $W_0$ .

Відрізок силової лінії між двома поверхнями  $W = C_1$  і  $W = C_2$  можна знайти, інтегруючи вираз (9.21):

$$C_2 - C_1 = - \int_0^h g dh. \quad (9.22)$$

Знаючи різницю потенціалів між двома рівневими поверхнями, можна визначити висоту однієї рівневої поверхні відносно другої. У окремому випадку висоту рівневої поверхні потенціалу  $W$  відносно геоїда можна визначити:

$$W_0 - W = \int_0^h g dh. \quad (9.23)$$

Поверхня геоїда вельми складна через нерівномірний розподіл мас всередині Землі, особливо у верхніх її шарах. Строге визначення геоїда пов'язане із знанням будови земної кори, яке на сьогодні досконало не вивчено. Радянський вчений М.С. Молоденський запропонував вивчати поверхню квазігеоїда (майже геоїд), яку можна строго визначити без залучення різних гіпотез про будову земної кори. Поверхня квазігеоїда з поверхнею геоїда збігається на морях і океанах і майже збігається на материковій частині Землі. Максимальні відступи квазігеоїда від геоїда

(2 м) спостерігаються в гірських районах. Поверхня квазігеоїда хоча і не є рівневою поверхнею, однак дозволяє строго розв'язати задачу вивчення дійсної фігури Землі.

У багатьох випадках практики геоїд замінюється еліпсоїдом обертання, поверхня якого вважається за рівневу поверхню. Рівнева поверхня еліпсоїда обертання використовується як перше наближення для вивчення поверхні геоїда. Такий еліпсоїд називають *рівневим*.

Еліпсоїд обертання, центр і екватор якого збігається з центром мас і екватором Землі та найкращим чином апроксимує поверхню геоїда в планетарному масштабі, називають *загальноземним еліпсоїдом*.

Земний еліпсоїд, що замінює геоїд при астрономо-геодезичних визначеннях і на поверхні якого відображаються матеріали астрономо-геодезичних робіт і топографічних зйомок на окремій території, називають *референц-еліпсоїдом*.

#### **4. Нормальне гравітаційне поле Землі**

Можливість принципово строгого визначення дійсного гравітаційного поля та фігури Землі з'явилася після того, як було встановлено, що потенціал дійсної сили ваги може бути визначений незалежно від густини. Це положення було доведено у 1849 р. англійським вченим Стоксом. В основі теоретичних досліджень Стокса лежить його теорема, яка може бути сформульована так: якщо відомі загальна маса  $M$  тіла, кутова швидкість  $\omega$  його обертання навколо незмінної осі та форма зовнішньої рівневої поверхні  $\sigma$ , що цілком охоплює всі притягуючі маси, то потенціал сили ваги  $W$  і сама сила ваги  $g$  визначаються однозначно як у всьому зовнішньому просторі, так і на самій рівневій поверхні.

Застосування теореми Стокса для еліпсоїда обертання дає змогу побудувати модель гравітаційного поля Землі, вельми близьку до її дійсного гравітаційного поля. Можна підібрати еліпсоїд, поверхня якого має мінімальні відхилення від поверхні середнього рівня моря та гравітаційне поле якого незначно відрізнятиметься від дійсного поля Землі. Модель гравітаційного поля прийнято називати *нормальним гравітаційним полем*. Нормальне гравітаційне поле значно простіше дійсного поля Землі; його рівневі поверхні та силові лінії можуть бути використані як координатні при визначенні положення точок фізичної поверхні Землі. Можна уявити нормальне гравітаційне поле як поле ідеального фізичного тіла, що замінює реальну Землю і називається *Нормальною Землею*.

Побудова нормального поля дає змогу виокремити із земного гравітаційного поля його основну частину та розглядати не повні елементи поля, а малі різниці відповідних елементів дійсного та



нормального гравітаційних полів. У цьому випадку задача визначення фігури Землі буде полягати у вивченні відступів її фізичної поверхні від поверхні «моделі» шляхом визначення геодезичних висот, а задача визначення потенціалу  $W$  зводиться до визначення невеликих величин  $T = W - U$ , де  $U$  – потенціал сили ваги еліпсоїда (як правило загальноземного), який інакше називають *нормальним потенціалом* Землі. Величина  $T$  одержала назву *збурюючого потенціалу* Землі. Збурюючий потенціал  $T$  є зручною характеристикою незбігу фізичної поверхні Землі та поверхні прийнятого еліпсоїда, а також характеристикою незбігу дійсного та нормального гравітаційних полів. У цьому випадку потенціал дійсної сили ваги може бути визначений як  $W = U + T$ .

За поверхню Нормальної Землі беруть еліпсоїд обертання, поверхня якого є рівневою. При підборі рівневого еліпсоїда необхідно, щоб задовольнялися такі умови:

1. Центр рівневого еліпсоїда збігається з центром мас Землі, а його головна вісь інерції збігається з віссю обертання Землі.

2. Рівневий еліпсоїд обертається з такою самою кутовою швидкістю  $\omega$ , що й реальна Земля.

3. Маса рівневого еліпсоїда дорівнює масі реальної Землі  $fM^E = fM^3$ .

4. Зональні гармонічні коефіцієнти другого порядку  $J_2$  для рівневого еліпсоїда і реальної Землі повинні збігатись  $J_2^E = J_2^3$ .

5. Нормальний потенціал  $U_0$  сили ваги на поверхні рівневого еліпсоїда повинен дорівнювати реальному потенціалу  $W_0$  сили ваги на рівневій поверхні, що проходить через початок відліку висот.

Отже, сталі  $\omega$ ,  $J_2$ ,  $fM$  і  $U_0$  є основними, які визначають Нормальну Землю. Їх називають *фундаментальними геодезичними сталими*, які характеризують Нормальну Землю. До них належать такі величини: велика піввісь рівневого еліпсоїда  $a$  (замість нормального потенціалу  $U_0$ ), геоцентрична гравітаційна стала  $fM$ , зональний коефіцієнт  $J_2$ , кутова швидкість обертання Землі  $\omega$ .

На XVII Генеральній асамблеї Міжнародного геодезичного та геофізичного союзу в Канберрі (Австралія, грудень 1979 р.) була прийнята геодезична референсна система 1980 р. (GRS 1980), яка визначає основні параметри глобального, найкращим чином апроксимуючого Землю еліпсоїда. В GRS 1980 були обрані такі чотири незалежні константи:

$$a = 6378137 \text{ м},$$

$$fM = 3986005 \cdot 10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2,$$

$$J_2 = 108263 \cdot 10^{-8},$$

$$\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ рад/с}.$$

На основі теорії еквіпотенціального (рівневого) еліпсоїда можуть бути знайдені всі інші сталі: стиснення  $\alpha$ , ексцентриситет  $e$ , значення нормальної сили ваги на екваторі  $\gamma_e$ , нормальний потенціал рівневого еліпсоїда  $U_0$ :

$$\alpha = 0,003352810681 = \frac{1}{298,257222101},$$

$$e^2 = 0,00669438002290,$$

$$\gamma_e = 9,7803267715 \text{ м/с}^2,$$

$$U_0 = 62636860,850 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Наведемо також допоміжні величини та їх значення:

$$q = \frac{\omega^2 a^2 b}{fM} = 0,00344978600308,$$

$$\beta = \frac{\gamma_P - \gamma_e}{\gamma_e} = 0,005302440,$$

де  $\gamma_P$  – значення нормальної сили ваги на полюсі;  $\gamma_e$  – значення нормальної сили ваги на екваторі.

Розглянемо метод одержання нормального потенціалу. Даний метод ґрунтується на представленні потенціалу сили ваги в зовнішньому просторі рядом сферичних функцій. У цьому випадку за нормальний потенціал береться наближене значення потенціалу сили ваги, одержане шляхом додавання обмеженої кількості перших сферичних функцій. Так робив Гельмерт, зберігаючи в потенціалі головні сферичні функції другого та четвертого степенів.

Нехтуючи величинами другого порядку малості, замінимо в (9.29)  $\gamma_e$  через  $\frac{fM}{a^2}$ , тобто через притягання кулі масою  $M$  на точку земного екватора. Тоді:

$$U = \frac{fM}{\rho} + \frac{f(A_m - C)}{\rho^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \Theta - \frac{1}{2} \right) + \frac{fMq}{2a^3} \rho^2 \sin^2 \Theta.$$

Після диференціювання знайдемо:

$$\gamma = -\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{fM}{\rho^2} + \frac{3f(A_m - C)}{\rho^4} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \Theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{fMq^2}{a^3} \rho \sin^2 \Theta. \quad (9.37)$$

Величина, що стоїть у лівій частині одержаного виразу, є відносним надлишком сили ваги на полюсі порівняно з екватором. Позначимо її через  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\gamma_P - \gamma_e}{\gamma_e}. \quad (9.42)$$

Вочевидь, що величина  $\beta$  та стиснення  $\alpha$  пов'язані співвідношенням:

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2} q. \quad (9.43)$$

Розділимо тепер (9.38) на (9.40):

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_e} = \frac{1 + \alpha - \frac{3}{2} q + \left( \frac{5}{2} q - \alpha \right) \cos^2 \Theta}{1 + \alpha - \frac{3}{2} q}.$$

Із точністю до малих величин першого порядку це дає

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \cos^2 \Theta)$$

або після заміни полярної відстані  $\Theta$  широтою  $\varphi$

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi). \quad (9.44)$$

Формула (9.44), яку називають першою формулою Клеро, дає закон розподілу нормальної сили ваги на рівневому еліпсоїді. Порівнюючи значення нормальної сили ваги ( $\gamma$ ) з дійсним значенням ( $g$ ), можна одержувати аномалії сили ваги ( $g - \gamma$ ), значення яких необхідні у теорії фігури Землі, геофізиці, розвідці корисних копалин.

Формула (9.43) є другою формулою Клеро. Ця формула також має велике значення, оскільки дозволяє визначити стиснення земного еліпсоїда:

$$\alpha = \frac{5}{2} q - \beta. \quad (9.45)$$

Перша та друга формули Клеро складають теорему Клеро.

Формула (9.46) у кінцевій формі виражає точний закон зміни сили ваги на поверхні рівневого еліпсоїда. Приведемо її до вигляду, аналогічному (9.44). Розвинемо праву частину (9.46) в ряд, утримуючи малі величини другого порядку малості. Введемо до розгляду величини  $\alpha$  та  $\beta$ . Після деяких перетворень із (9.46) одержимо:

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (9.47)$$

де

$$\beta_1 = \frac{\alpha^2}{8} + \frac{1}{4} \alpha \beta. \quad (9.48)$$

Нормальний потенціал на поверхні рівневого еліпсоїда визначається за формулою:

$$U_0 = \frac{fM}{a} \left( 1 + \frac{1}{3} \alpha + \frac{2}{15} \alpha^2 \right) + \frac{1}{3} \omega^2 a^2. \quad (9.51)$$

Параметри, що характеризують нормальне поле, називають фундаментальними геодезичними сталими.

Перелічимо всі параметри, що належать до нормального поля:  $fM$ ,  $U_0$ ,  $\gamma_e$ ,  $a$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\beta_1$ . Із цих восьми параметрів необхідно знати лише чотири, бо використовуючи формули (9.48), (9.49), (9.51), можна одержати інші.

Коефіцієнти  $\gamma_e$ ,  $\beta$  та  $\beta_1$  у формулі (9.47) визначають за експериментальними даними про гравітаційне поле Землі. Найбільш широке застосування має формула Гельмерта (1901 – 1909 р. р.). Гельмерт використав дані для 1603 гравіметричних пунктів, розташованих на материках у північній півкулі:

$$\gamma_0^{1909} = 9,78030(1 + 0,005302\sin^2 B - 0,0000070\sin^2 2B) \text{ м/с}^2. \quad (9.52)$$

Формула нормальної сили ваги для геодезичної референцної системи 1980 р. (GRS 1980) має вигляд:

$$\gamma_0 = 9,7803266(1 + 0,0053024\sin^2 B - 0,00000585\sin^2 2B) \text{ м/с}^2. \quad (9.53)$$

## 5. Аномальне гравітаційне поле Землі

*Аномалією сили ваги* називають різницю між вимірним (дійсним) значенням сили ваги  $g$  та її нормальним (теоретичним) значенням  $\gamma$ .

При обчисленні аномалій виникає необхідність вводити різні поправки (редукції) в значення як дійсної сили ваги, так і нормальної сили ваги. Залежно від того, які поправки вводяться, доводиться мати справу з різними видами аномалій сили ваги. Якщо значення  $g_M$  сили ваги виміряне в точці  $M$  (рис. 32), а значення  $\gamma_N$  нормальної сили ваги обчислене для точки  $N$ , то різниця  $g_M - \gamma_N$  називається *змішаною аномалією у вільному повітрі*.

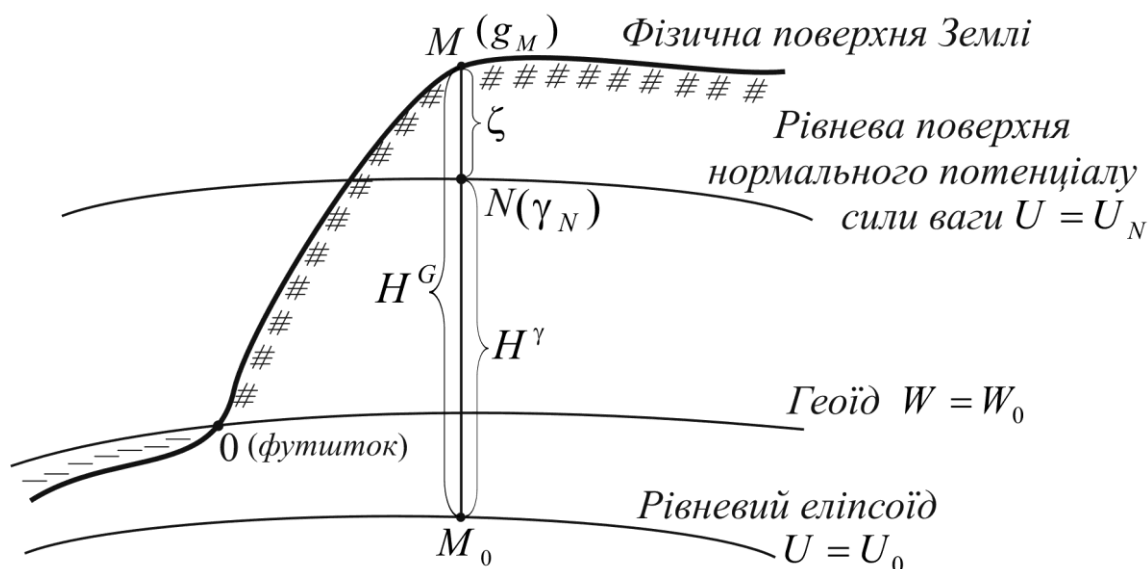


Рис. 32. До визначення змішаної або чистої аномалій

Відмітимо, що різниця  $g_M - \gamma_M$ , при обчисленні якої значення  $g$  та  $\gamma$  відносяться до однієї й тієї ж точки, називається *чистою аномалією*. Позначимо змішану аномалію  $(g - \gamma)_{\text{в.п.}}$ . Як наслідок  $(g - \gamma)_{\text{в.п.}} = g_M - \gamma_N$ . Для одержання значень нормальної сили ваги в точці  $N$  скористаємося формулами:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial n} H + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial n^2} \frac{1}{2} H^2, \quad (9.54)$$

де  $n$  – напрямок зовнішньої нормалі;

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{\partial \gamma}{\partial z} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = -0,30855(1 + 0,00071 \cos 2B) \text{ мГал/м.}$$

Тоді

$$\gamma_N = \gamma_0 - 0,30855(1 + 0,00071 \cos 2B) H^\gamma$$

або

$$\gamma_N = \gamma_0 + \Delta\gamma,$$

де

$$\Delta\gamma = -0,30855(1 + 0,00071 \cos 2B) H^\gamma + 0,0723 (H^\gamma)^2 \cdot 10^{-6}. \quad (9.55)$$

Величину  $\Delta\gamma$  називають *поправкою за висоту* в нормальне значення сили ваги або *редукцією у вільному повітрі*. Якщо нормальна висота  $H^\gamma$  задана в метрах, то поправка  $\Delta\gamma$  буде виражена в мілігалах. Змішана аномалія у вільному повітрі буде:

$$(g - \gamma)_{\text{в.п.}} = g_M - (\gamma_0 + \Delta\gamma). \quad (9.56)$$

Як видно, при обчисленні аномалій у вільному повітрі у виміряне значення сили ваги  $g$  поправки не вводяться. Аномалія у вільному повітрі може бути й чистою. В цьому випадку при обчисленні поправки  $\Delta\gamma$  замість нормальної висоти  $H^\gamma$  слід взяти геодезичну висоту  $H^G$ . Тоді нормальна сила ваги буде одержана в тій же точці  $M$ , де виміряна дійсна сила ваги  $g$ , отже одержимо:

$$(g - \gamma)_{\text{в.п.}} = g_M - \gamma_M.$$

### Запитання для самоперевірки

1. Що таке сила тяжіння, відцентрова сила та сила ваги на поверхні Землі?
2. Що таке гравітаційне поле Землі та чим воно характеризується?
3. Що таке рівневі поверхні, Геоїд, квазігеоїд, Земний еліпсоїд?
4. Що таке Нормальне гравітаційне поле Землі?
5. Що таке Аномальне гравітаційне поле Землі?
6. Що таке аномалія сили ваги та які способи її визначення?

## Лекція 9. ВІДХИЛЕННЯ ПРЯМОВИСНИХ ЛІНІЙ

### Питання

1. Загальні відомості
2. Гравіметричний метод виведення відхилень прямовисних ліній
3. Астрономо-геодезичний метод виведення відхилень прямовисних ліній
4. Астрономо-гравіметричний метод виведення відхилень прямовисних ліній

### 1. Загальні відомості

Відхилення прямовисної лінії у першому наближенні можна визначити як кут між напрямком прямовисної лінії та напрямком нормалі, проведеної у досліджуваній точці до поверхні еліпсоїда. Якщо відхилення прямовисної лінії визначається як кут між нормаллю до поверхні референц-еліпсоїда та напрямком прямовисної лінії, то таке відхилення називається *відносним*. Якщо ж відхилення прямовисної лінії визначається як кут між нормаллю до поверхні загальноземного еліпсоїда та напрямком прямовисної лінії, то воно називається *абсолютним*. На рис. 33 наведена графічна інтерпретація цих визначень.

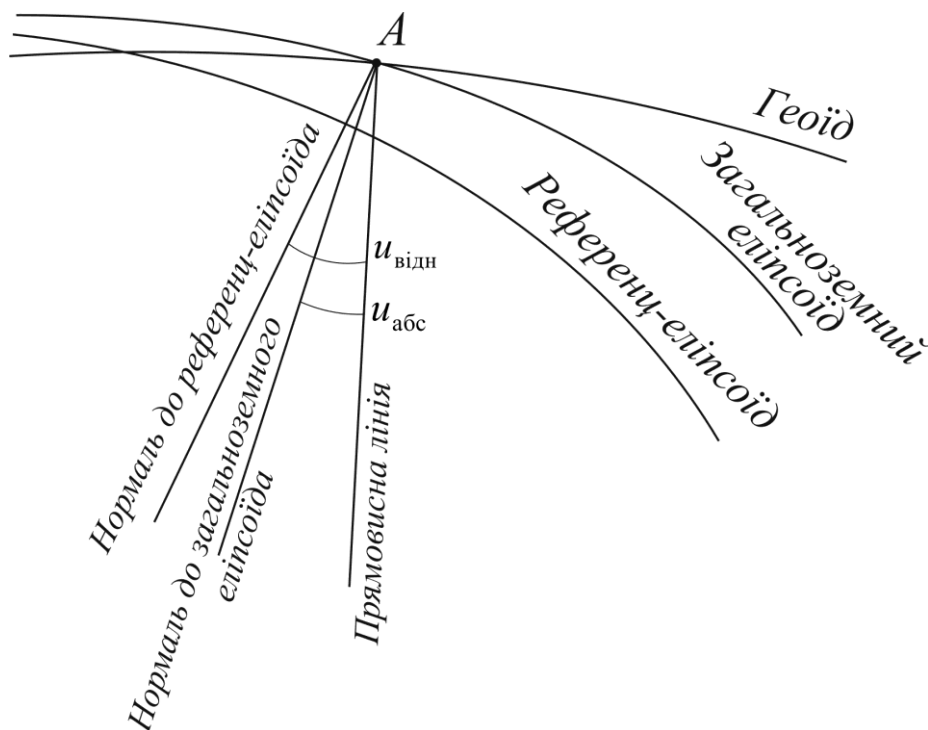


Рис. 33. Відхилення прямовисної лінії

Абсолютне відхилення прямовисної лінії залежить лише від розподілу мас Землі. Відносне відхилення прямовисної лінії залежить від розподілу мас Землі та прийнятих розмірів і орієнтування референц-

еліпсоїда. Чим значніше відступає референц-еліпсоїд від загальноземного еліпсоїда, тим більше в середньому відносі відхилення прямовисних ліній.

Напрямок прямовисної лінії визначається на земній поверхні із астрономічних спостережень шляхом виведення астрономічних координат  $\varphi$  та  $\lambda$ . Напрямок нормалі до поверхні референц-еліпсоїда визначається геодезичними координатами  $B$  та  $L$ . Звідси випливає, що відносі відхилення прямовисних ліній можуть практично визначатись із відповідного порівняння астрономічних і геодезичних координат. Тому відносі відхилення прямовисних ліній називають також *астрономо-геодезичними*.

Можна дати й дещо інше визначення відхилення прямовисної лінії. Оскільки напрямок прямовисної лінії збігається з напрямком вектора дійсної сили ваги  $g$ , а напрямок нормалі до еліпсоїда збігається з напрямком вектора нормальної сили ваги  $\gamma$ , то відхилення прямовисної лінії можна визначити як кут між напрямками векторів дійсного та нормального полів сили ваги. Якщо за рівневий еліпсоїд нормальної сили ваги взяти загальноземний еліпсоїд, то кут  $(g, \gamma)$  виразить абсолютне відхилення прямовисної лінії, а якщо референц-еліпсоїд – то відносне.

Звернемо увагу на значення відхилень прямовисних ліній:

1. Відхилення прямовисних ліній є зручними видами характеристик відступу дійсного гравітаційного поля Землі від деякого іншого, що називається нормальним. Відхилення прямовисних ліній, як і висоти геоїда (або квазігеоїда) над референц-еліпсоїдом, безпосередньо використовуються для вивчення фігури Землі.

2. Використовуючи відхилення прямовисних ліній, розв'язують численні редуційні задачі вищої геодезії. Це випливає з того, що безпосередні вимірювання в геодезії пов'язані з прямовисною лінією, тоді як математичне опрацювання результатів геодезичних вимірів виконується на еліпсоїді, для якого основною координатною лінією є нормаль до поверхні еліпсоїда. Наприклад, горизонтальні кути трикутників тріангуляції вимірюють двогранниками, ребрами яких є прямовисні лінії, оскільки вертикальну вісь вимірювального приладу встановлюють за допомогою рівнів, що фіксують положення рівневої поверхні та нормалі до неї – прямовисної лінії. Зрозуміло, що для строгого математичного опрацювання результатів вимірювань на поверхні еліпсоїда необхідно враховувати незбіг безпосередньо виміряних величин із відповідними їм геометричними елементами на поверхні еліпсоїда шляхом введення редуцій у виміряні величини. Ці редуції обчислюються порівняно просто, якщо відомі відхилення прямовисних ліній.

$$\left. \begin{aligned} B &= \varphi + \Delta\varphi \\ L &= \lambda + \Delta\lambda \end{aligned} \right\}, \quad (10.1)$$

4. За допомогою відхилень прямовисних ліній здійснюється точний перехід від виміряного астрономічного азимуту до геодезичного азимуту.

104



Фізична причина, що викликає відхилення прямовисних ліній, - одна, й вона полягає у відступі дійсного гравітаційного поля Землі від нормального.

## 2. Гравіметричний метод виведення відхилень прямовисних ліній

Відхилення прямовисних ліній і аномалії сили ваги – наслідок незбігу дійсного та нормального потенціалів Землі, тобто є функціями збурюючого потенціалу  $T$ .

У [9] знайдено вираз збурюючого потенціалу через аномалії сили ваги:

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g S(\psi) \sin \psi d\psi dA, \quad (10.2)$$

де  $R$  – радіус сфери, тобто радіус земної кулі, який слід вважати середнім радіусом Землі  $R = \sqrt{a^2 b}$ ;  $\psi$  – сферична відстань від досліджуваної точки до поточної точки;  $A$  – азимут напрямку, за яким взяті  $\psi$ ;  $\Delta g$  – аномалія сили ваги;  $S(\psi)$  – функція Стокса.

Подальша мета полягає в одержанні формул, що виражають компоненти відхилень прямовисних ліній як функції аномалій сили ваги. Вочевидь, це буде досягнуто, якщо одержимо вираз складових прямовисних ліній через збурюючий потенціал  $T$ . Підставивши у знайдений вираз його значення за (10.2), одержимо шукані формули визначення відхилень прямовисних ліній через аномалії сили ваги.

Переходячи до другої частини виведення, на основі (10.2) знайдемо похідні  $\frac{\partial T}{\partial B}$  і  $\frac{\partial T}{\partial L}$  та підставимо їх у (10.8). Не наводячи деталей виведення, запишемо його результат:

$$\left. \begin{aligned} \xi''_{zp} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g Q(\psi) \cos A dA d\psi \\ \eta''_{zp} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g Q(\psi) \sin A dA d\psi \end{aligned} \right\}, \quad (10.9)$$

де  $\psi$  – сферична відстань від досліджуваної точки до поточної точки;  $A$  – азимут напрямку, за яким взято  $\psi$ ;  $\Delta g$  – аномалія сили ваги;  $Q(\psi)$  – функція від  $\psi$ , визначувана виразом:

$$\begin{aligned} Q(\psi) = \frac{\rho''}{2\gamma} \cos^2 \frac{\psi}{2} &\left[ \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \right. \\ &\left. + \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Вирази (10.9) називають формулами Венінг-Мейнеса за ім'ям голландського вченого, який навів їх виведення у 1928 р. Величину  $Q(\psi)$  також називають функцією Венінг-Мейнеса.

### 3. Астрономо-геодезичний метод виведення відхилень прямовисних ліній

Розглянемо деяку точку  $A_0$  на земній поверхні (рис. 35), за яку спочатку візьмемо поверхню референц-еліпсоїда. Нехай ця точка – пункт тріангуляції, для якого обчислені геодезичні координати  $B$  та  $L$  і геодезичний азимут  $A_m$  на будь-який предмет  $M$ . Нехай на цьому пункті  $A_0$  виконані астрономічні спостереження, в результаті яких одержані астрономічні координати  $\varphi$  та  $\lambda$  й астрономічний азимут  $\alpha_m$  на той же предмет  $M$ .

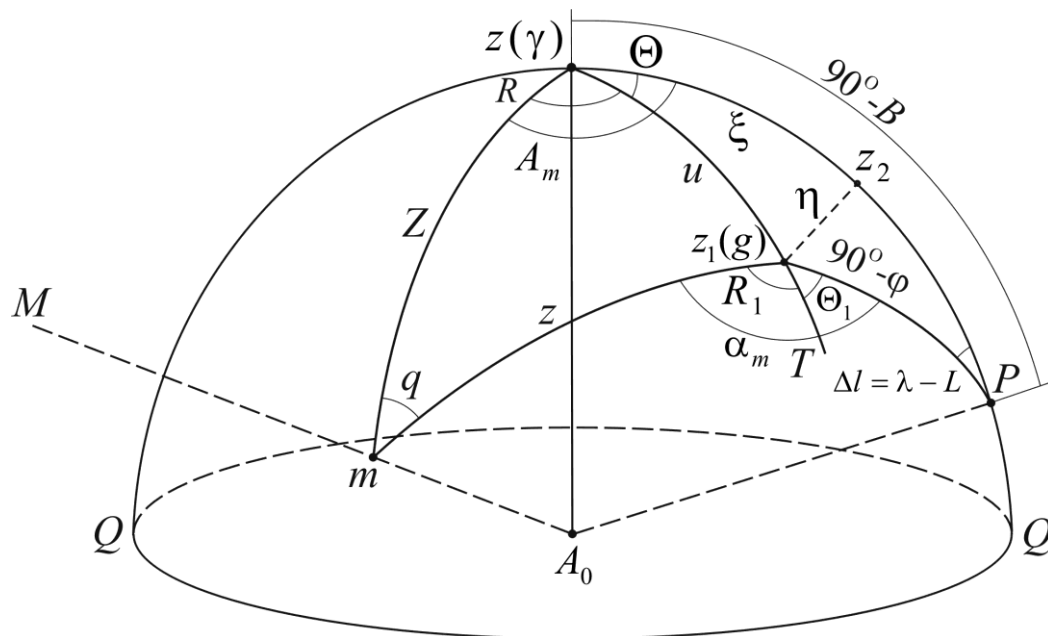


Рис. 35. Визначення астрономо-геодезичних складових відхилення прямовисної лінії

Далі візьмемо допоміжну сферу з центром в точці  $A_0$  і з радіусом, що дорівнює одиниці. Продовжимо напрямок нормалі до поверхні еліпсоїда в точці  $A_0$  до перетину з допоміжною сферою. Нехай нормаль перетинає сферу в точці  $z$ , яка є геодезичним zenітом у точці  $A_0$ . Оскільки раніше було прийнято, що земна поверхня збігається з поверхнею референц-еліпсоїда, то напрямок нормалі до неї збігається з напрямком дотичної до силової лінії нормального поля  $\gamma$ , що проходить через точку  $A_0$ .

Аналогічно продовжимо до перетину з допоміжною сферою напрямок прямовисної лінії. Вочевидь, цей напрямок збігається з

напрямком вектора сили ваги  $g$ . Точка  $z_1$  перетину цього напрямку з небесною сферою є астрономічним зенітом точки  $A_0$ .

Із сферичного прямокутного трикутника  $\Delta z_1 z_2 P$  (рис. 35) маємо:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\lambda - L) &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}(B + \xi) \\ \sin \eta &= \sin(\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Розвинемо  $\sin(\lambda - L)$ ,  $\cos(\lambda - L)$  і  $\sin \eta$  в ряди та, нехтуючи за малістю величинами  $(\lambda - L)^2$  і  $\eta^2$ , одержимо шукані вирази складових відхилення прямовисної лінії через астрономічні та геодезичні координати:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varphi - B \\ \eta &= (\lambda - L) \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Сьогодні прийнято за вершину кута, що вимірює відхилення прямовисної лінії, вважати відповідну точку фізичної поверхні Землі, а відхилення прямовисної лінії слід розуміти як кут між напрямком дійсної сили ваги та напрямком нормальної сили ваги в цій точці. При такому визначенні відхилення прямовисної лінії ніяких поправок в астрономічні координати вводити не потрібно, оскільки їх безпосередньо спостережувані значення дають напрямок вектора сили ваги в даній точці поверхні Землі. Однак другий вектор, утворюючий відхилення прямовисної лінії, який збігається з напрямком силової лінії нормального поля (плоска крива), відрізняється від напрямку нормалі на поверхні еліпсоїда. Ця відмінність враховується шляхом введення поправки за кривину силової лінії нормального гравітаційного поля в геодезичну широту. Ця поправка обчислюється за формулою:

$$0,171'' H^G \sin 2B, \quad (10.13)$$

де  $H^G$  – геодезична висота, яка визначає положення точки на фізичній поверхні Землі відносно поверхні еліпсоїда.

Остаточні формули для обчислення складових астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній такі:

$$\left. \begin{aligned} \xi''_{az} &= \varphi - B - 0,171'' H^G_{км} \sin 2B \\ \eta''_{az} &= (\lambda - L) \cos B \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

#### 4. Астрономо-гравіметричний метод виведення відхилень прямовисних ліній

Оберемо на території країни деяку точку  $C$  і висунемо задачу визначити в ній астрономо-геодезичне відхилення прямовисної лінії шляхом сумісного використання матеріалів астрономо-геодезичних і гравіметричних вимірювань. У загальному випадку для точки  $C$  невідомі

ні геодезичні, ні астрономічні координати. Її положення можна визначити на будь-якій топографічній карті (масштабу 1:100000 і крупніше).

Навколо досліджуваного пункту  $C$  візьмемо деяку область  $\sigma$ . Нехай вплив аномалій цієї області на величину повного відхилення прямовисної лінії дорівнює  $u_\sigma$ . Решту частину поверхні Землі позначимо через  $\Sigma$ . Вплив аномалій цієї області буде  $u_\Sigma$ . Із основного закону всесвітнього тяжіння випливає, що сила притягання зменшується пропорційно квадрату відстані, тому вплив аномальних мас, який характеризується аномаліями сили ваги, на величину відхилень прямовисних ліній із віддаленням від досліджуваного пункту  $C$  буде зменшуватись і набувати все більш плавний характер. Тому можна обрати таку область  $\sigma_0$  всередині  $\sigma$ , щоб вплив аномалій сили ваги області  $\Sigma$  на відхилення прямовисної лінії в цій області можна було вважати таким, що змінюється лінійно.

На величину астрономо-геодезичного відхилення прямовисної лінії буде впливати різниця в розмірах і орієнтуванні між референц-еліпсоїдом і загальноземним еліпсоїдом. Позначимо цей вплив через  $\delta_u$ . Цей вплив, навіть при значній його величині, буде також змінюватись лінійно.

Як наслідок, повне астрономо-геодезичне відхилення можна представити у вигляді трьох доданків:

$$u_{ag} = u_\sigma + u_\Sigma + \delta_u. \quad (10.15)$$

Оскільки останні доданки  $u_\Sigma$  та  $\delta_u$  в межах області  $\sigma_0$  змінюються лінійно, то доцільно поставити задачу їх сумісного визначення. Позначаючи  $u_\Sigma + \delta_u$  через  $\Delta u$ , можемо записати:

$$u_{ag} = u_\sigma + \Delta u, \quad (10.16)$$

а також

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ag} &= \xi_\sigma + \Delta\xi \\ \eta_{ag} &= \eta_\sigma + \Delta\eta \end{aligned} \right\}. \quad (10.17)$$

Розглянемо обчислення других доданків  $\Delta\xi$  та  $\Delta\eta$  у формулах (10.17). Для їх визначення в області  $\sigma_0$  має бути не менше трьох астрономо-геодезичних пунктів (пунктів Лапласа), розташованих за можливості рівномірно та не на великому віддаленні від межі області  $\sigma_0$ . Для кожного з таких пунктів відомі астрономічні  $\varphi, \lambda$  і геодезичні  $B, L$  координати й можна обчислити астрономо-геодезичні відхилення прямовисних ліній за формулами (10.14).

Користуючись формулами (10.18), обчислюємо для цих же пунктів гравіметричні відхилення прямовисних ліній  $\xi_{gp}, \eta_{gp}$ . Вочевидь, різниці  $(\xi_{ag} - \xi_{gp})$  та  $(\eta_{ag} - \eta_{gp})$  визначають поправки  $\Delta\xi$  та  $\Delta\eta$ . Між цими астрономо-геодезичними пунктами (за умовою) ці поправки в межах

області  $\sigma_0$  змінюються лінійно. Тому, застосовуючи лінійне інтерполювання, легко обчислити значення  $\Delta\xi$  та  $\Delta\eta$  для будь-якої точки області  $\sigma_0$ , розташованої між астрономо-геодезичними пунктами. Якщо астрономо-геодезичних пунктів більше трьох, то інтерполяційні коефіцієнти визначають способом найменших квадратів і здійснюють оцінку точності величин  $\Delta\xi$  та  $\Delta\eta$ .

Тоді астрономо-геодезичні відхилення в досліджуваній точці  $C$  можна визначити так:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ag}^C &= \xi_{gp}^C + \Delta\xi^{im} \\ \eta_{ag}^C &= \eta_{gp}^C + \Delta\eta^{im} \end{aligned} \right\}. \quad (10.19)$$

Описаний вище метод виявляє перевагу сумісного використання астрономо-геодезичних і гравіметричних вимірювань.

### Запитання для самоперевірки

1. Що таке відхилення прямовисних ліній?
2. Що таке складові відхилення прямовисних ліній?
3. Які є види відхилень прямовисних ліній?
4. В чому суть гравіметричного методу виведення відхилень прямовисних ліній?
5. В чому суть астрономо-геодезичний відхилень прямовисних ліній?
6. В чому суть астрономо-гравіметричного методу виведення відхилень прямовисних ліній?

## Лекція 10. ВИСОТИ

### Питання

1. Загальні відомості про висоти
2. Виміряні висоти
3. Геопотенціальні висоти
4. GPS-нівелювання
5. Астрономічне та астрономо-гравіметричне нівелювання
6. Системи відліку висот

#### 1. Загальні відомості про висоти

Висота точки земної поверхні  $H$  – одна з координат, що визначає фігуру Землі та окремі її точки відносно вихідної відлікової поверхні. Якщо геодезичні координати  $B_M$  і  $L_M$  визначають положення проекції точки  $M$  на референц-еліпсоїді, то висота  $H_M$  визначає відстань точки  $M$  від еліпсоїда по нормалі до нього. Тим самим висоти всіх точок Землі визначають фігуру фізичної поверхні Землі відносно прийнятого референц-еліпсоїда.

Крім того, висоти необхідні для визначення роботи, яка здійснюється під час руху в гравітаційному полі Землі.

Різниці висот точок земної поверхні, які одержують при нівелюванні, визначають різницю потенціалів сили ваги між цими точками. Якщо відомо значення потенціалу  $W_0$  у вихідному футштоці, то в результаті нівелювання легко обчислити значення потенціалів сили ваги у відповідних точках поверхні Землі за формулою:

$$W_M = W_0 - \int_0^M g dh. \quad (11.1)$$

Практична роль, яку відіграють висоти, полягає у такому:

Висоти точок земної поверхні визначають рельєф, який необхідно зобразити на топографічних картах. Точне значення різниць висот окремих точок поверхні Землі вельми необхідне для проектування та будівництва різних споруд, для різних розрахунків, у яких потрібно враховувати положення точок у просторі.

Значення висот є необхідним для обчислення редуцій у безпосередньо виміряні на земній поверхні величини (кути, довжини ліній) при переході до поверхні відносності, без чого не може здійснюватись строге математичне опрацювання геодезичних вимірів на еліпсоїді.

Вимоги, що висуваються до точності визначення висот у різних цілях, коливаються в дуже великих межах, але багато з них є підвищеними і можуть бути забезпечені лише при теоретично строгому розв'язанні обчислювальних задач, що виникають.

За результатами безпосередніх вимірів одержують різниці висот точок земної поверхні. Тому для обчислення висот необхідно знати висоту точки, яку беруть за початкову або вихідну.

*Геодезичні висоти*  $H^G$  зазвичай одержують з вимірів як суму двох доданків: відстані від референц-еліпсоїда до поверхні геоїда або квазігеоїда та відстані від однієї з цих поверхонь до відповідної точки поверхні Землі.

Обидва вищевказаних доданки мають бути відрізками нормалі до поверхні референц-еліпсоїда. Пояснимо це геометрично (рис. 36) і наведемо головні та заключні висновки, а детальний розгляд і доведення цих висновків дамо у наступних розділах розглядуваної теми.

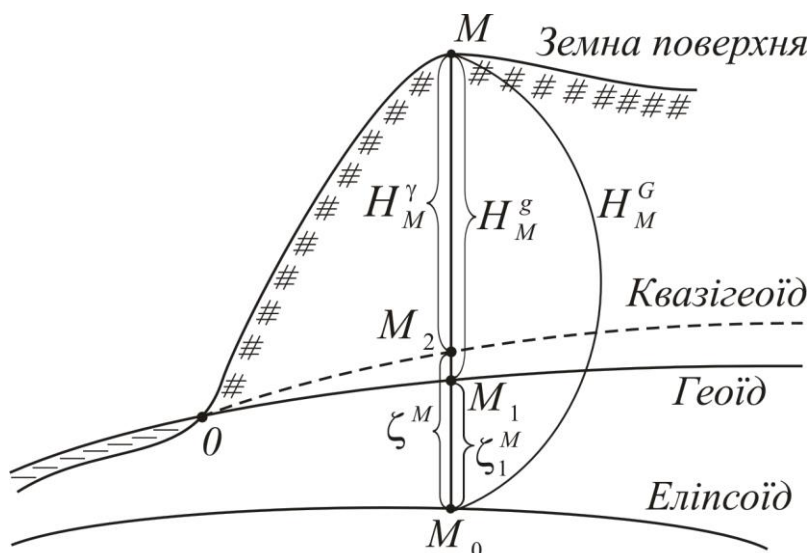


Рис. 36. Визначення геодезичної висоти

Із рис. 36 для геодезичної висоти точки  $M$  маємо:

$$H_M^G = H_M^g + \zeta_1^M, \quad (11.2)$$

$$H_M^G = H_M^\gamma + \zeta^M. \quad (11.3)$$

У формулі (11.2)  $H_M^g$  – ортометрична висота;  $\zeta_1^M$  – висота геоїда над поверхнею референц-еліпсоїда. Саме за допомогою цих величин ще нещодавно обчислювались геодезичні висоти. Дослідження Молоденського показали, що принципово суворо, без притягнення гіпотез щодо внутрішньої будови Землі, обидва доданки правої частини виразу (11.2) не можуть бути обчислені. Але можуть бути обчислені точно обидва доданки виразу (11.3):  $H_M^\gamma$  – нормальна висота та  $\zeta^M$  – аномалія висоти, яка є висотою квазігеоїда над поверхнею референц-еліпсоїда. Тому для

обчислення геодезичних висот  $H^G$  в Україні на сьогодні застосовують формулу (11.3), яка передбачає використання системи нормальних висот  $H^\gamma$  та аномалій висот  $\zeta$ .

У виразах (11.2) та (11.3)  $H_M^g$  і  $H_M^\gamma$  називають *гінсометричною* частиною геодезичної висоти, а  $\zeta^M$  і  $\zeta_1^M$  називають *геоїдальною* частиною геодезичної висоти.

Розчленування висоти  $H^G$  на два доданки обумовлено практичною необхідністю мати висоти від рівня моря. У системі ортометричних висот поверхнею моря є поверхня геоїда; у системі нормальних висот роль поверхні моря відіграє допоміжна поверхня квазігеоїда.

Із викладеного випливає, що у процесі обчислення висот практично доводиться мати справу з двома відліковими поверхнями:

1) референц-еліпсоїда – для обчислення геодезичних висот  $H^G$ , які визначають по висоті положення точки земної поверхні відносно цієї поверхні відносності;

2) квазігеоїда – для обчислення нормальних висот  $H^\gamma$ , які використовують у практичних розрахунках і позначають на картах для зображення топографічного рельєфу.

Для розв'язання наукових і практичних задач геодезії необхідно знати висоту  $H^G$  як суму двох доданків  $H^\gamma$  і  $\zeta$ , з неодмінним відокремленням кожного з них для будь-якої точки Землі.

## 2. Виміряні висоти

Точно висоту  $H^\gamma$  визначають методом геометричного нівелювання. Вплив непаралельності рівневих поверхонь щодо поверхні квазігеоїда враховується за гравіметричними даними. Дійсна схема геометричного нівелювання показана на рис. 37, на якому наведені позначення:  $U_0$  – відлікова поверхня, яку приймемо за еліпсоїд обертання;  $Mn$  – нормаль до цієї поверхні;  $Mk$  – пряма, паралельна дотичній до поверхні  $U_0$ .

Нехай  $U$  – рівнева поверхня нормального гравітаційного поля Землі, що проходить через точку нівелювання (горизонт приладу), і  $Mn_1$  – нормаль до цієї поверхні. Якщо б дійсне гравітаційне поле Землі збігалось з нормальним, то напрямок прямовисної лінії збігався б із нормаллю  $Mn_1$ , а візирний промінь являв би собою дотичну  $Mk_1$  до поверхні  $U$ ; у цьому випадку непаралельність рівневих поверхонь нормального гравітаційного поля  $U_0$  та  $U$  виразилась би у відліку по рейці впливом кута між  $Mk$  та  $Mk_1$ .



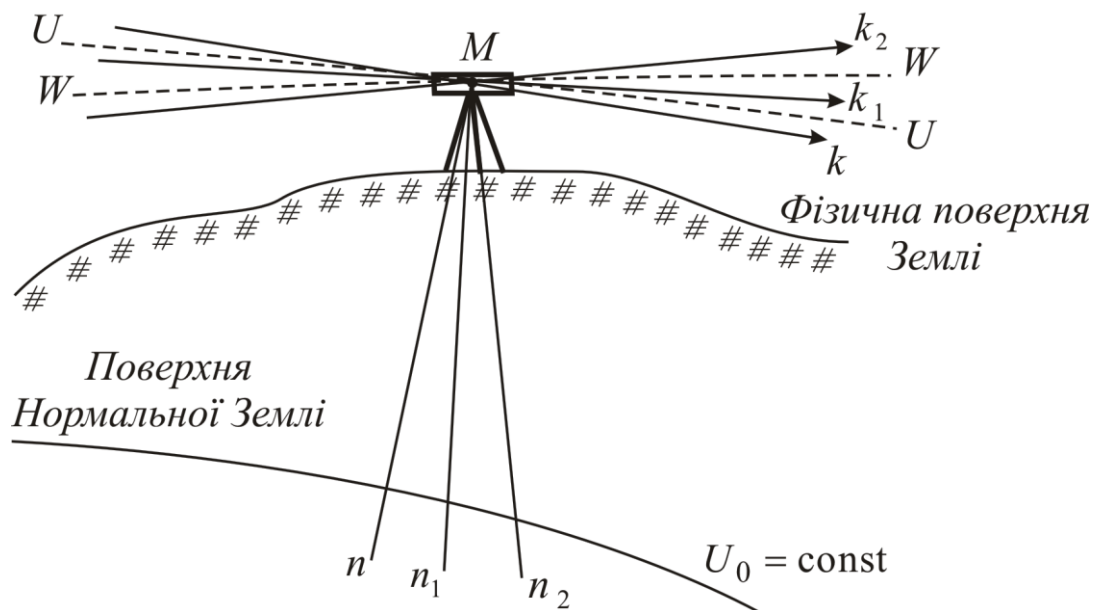


Рис. 37. Дійсна схема геометричного нівелювання

Однак, внаслідок впливу аномальних мас дійсний напрямок прямовисної лінії являє собою напрямок відрізка  $Mn_2$ , перпендикулярний до реальної (дійсної) рівневої поверхні  $W$ ; тоді дійсний напрямок візирного променя з нівелірної станції визначиться напрямком  $Mk_2$  як дотичної до поверхні  $W$ , що проходить через станцію спостереження. Якщо вплив непаралельності рівневих поверхонь  $U_0$  та  $U$ , тобто кут між нормаллями до них  $Mn$  і  $Mn_1$ , може бути врахований порівняно легко, то вплив відхилення рівневої поверхні дійсного потенціалу  $W$ , що виявляється у відхиленні дійсного напрямку прямовисної лінії  $Mn_2$  від нормалей  $Mn_1$  або  $Mn$ , простим способом врахований бути не може, оскільки він залежить від аномального розподілу мас всередині Землі. Природа цього відхилення вимагає додаткових вимірювань при кожному встановленні нівеліра для врахування дійсного напрямку візирного променя – вимірювань сили ваги.

Безпосередньо вимірювані перевищення нівелюванням за допомогою горизонтального візирного променя, перпендикулярного напрямку прямовисної лінії, являють собою перевищення відносно площини, дотичної до рівневої поверхні, що проходить через горизонт приладу. Для одержання перевищення відносно відлікової поверхні повинна бути введена поправка за непаралельність цієї рівневої поверхні та поверхні відносності, яка являє собою вплив кута між дотичними до цих поверхонь вздовж лінії нівелювання. Ця поправка визначається за даними гравіметричних вимірів. Таким чином, при визначенні різниці висот точок земної поверхні виконують виміри перевищень за допомогою горизонтального візирного променя та виміри сили ваги вздовж нівелірного ходу.

Нехай на рис. 38 зображений профіль земної поверхні, що перетинає точку  $O$ , яка є початком відліку висот. Із геометричного нівелювання необхідно визначити висоту точки  $M$ .

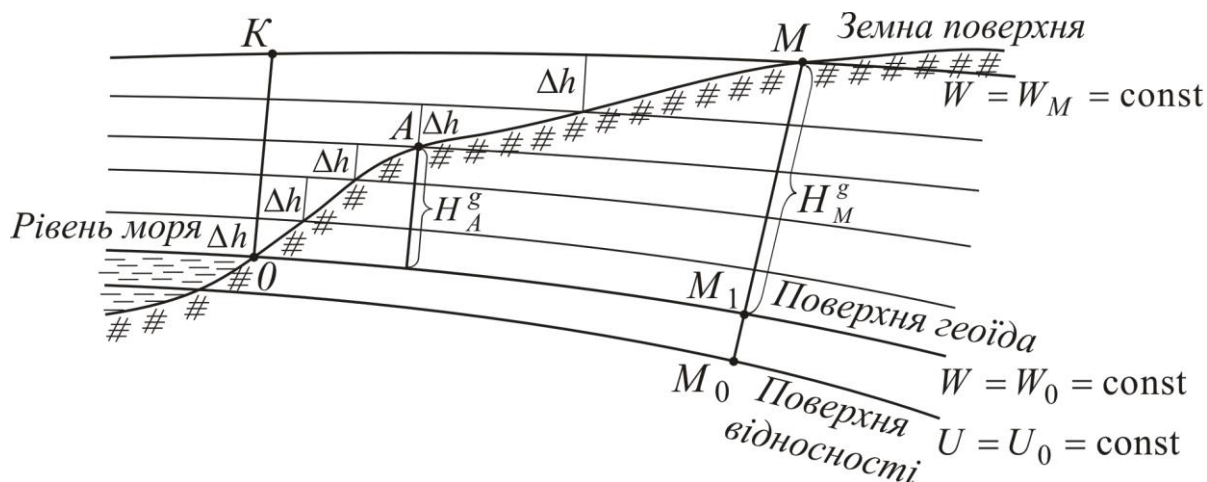


Рис. 38. Визначення висоти точки  $M$

Дійсно, нехай від  $O$  до  $M$  нівелювання виконується двома шляхами:

- 1) від точки  $O$  до  $K$ , потім від точки  $K$  по рівневій поверхні до точки  $M$ ;
- 2) від точки  $O$  вздовж поверхні геоїда до точки  $M_1$ , а потім від точки  $M_1$  до точки  $M$ .

Неважко побачити, що в першому шляху нівелювання величина  $H_M^{вим}$  визначається відрізком  $OK$ , а в другому – відрізком  $MM_1$ , причому, внаслідок непаралельності рівневих поверхонь  $OK \neq MM_1$ . Обираючи який-небудь інший шлях нівелірного ходу, одержують інші значення величини  $H_M^{вим}$ , яке не дорівнює двом попереднім.

Якщо б рівневі поверхні були паралельними, тобто являли собою концентричні сфери, то величина  $H_M^{вим} = \sum_0^M \Delta h$  являла б висоту точки  $M$  як відстань від  $M$  до геоїда по нормалі до нього, тобто до точки  $M_1$ . Таке припущення можливе лише в роботах малої точності (технічне нівелювання, нівелювання III та IV класів) або в точних нівелюваннях для дуже малої протяжності нівелірного ходу.

Указана вище невизначеність у виведенні висоти  $H_M^{вим}$ , тобто залежність значення вимірюваної висоти точки від шляху нівелювання, неприпустима в точних нівелірних роботах на значній території.

Розглянуті вище причини призводять до неоднозначності визначення висот. Тому необхідно сформулювати вимоги до систем висот, виконання яких дасть можливість однозначного визначення висот.

### ***Вимоги до систем висот***

Насамперед повинні виконуватись дві умови.

1. Висоти пунктів повинні бути визначені однозначно, незалежно від шляху нівелювання.

2. Висоти повинні визначатись лише за даними вимірювань на фізичній поверхні Землі без залучення яких-небудь гіпотетичних даних про її внутрішню будову.

Із практичної точки зору зручно, щоб дотримувалась також третя умова.

3. Поправки у виміряні перевищення за перехід до прийнятої системи висот повинні бути достатньо малими, щоб ними можна було б знехтувати при обробці нівелювання нищих класів.

Із розв'язання геометричної задачі визначення геодезичних висот  $H^G$ , як суми гіпсометричної та геоїдальної частин, випливає побажання:

4. Прийнятій системі висот має відповідати достатньо строгий і зручний спосіб визначення геоїдальної частини геодезичної висоти  $H^G$ .

У той же час не можна забувати, що дані геометричного нівелювання використовуються насамперед для розв'язання по суті фізичної задачі – визначення взаємного положення фізичної поверхні Землі та рівневих поверхонь реального поля сили ваги. Саме це необхідне у процесі будь-яких інженерно-геодезичних вишукувань для будівництва гідротехнічних споруд, доріг і т. ін. Із точки зору розв'язання цієї фізичної задачі доцільно виконання побажання:

5. Висоти повинні бути за можливості сталими для точок на одній рівневій поверхні.

Усім цим вимогам задовольняють системи *геопотенціальних висот*.

### **3. Геопотенціальні висоти**

Звідси маємо таку формулу для різниці потенціалів сили ваги в поточній точці нівелювання  $M$  та у нуль-пункті  $O$ :

$$W_M - W_0 = \int_0^M dW = - \int_0^M g dh. \quad (11.31)$$

Зазначимо, що цей результат не залежить від вибору траси нівелювання. При зміні знаку він відповідає роботі, яка повинна бути виконана для переміщення одиничної маси з точки  $O$  в точку  $M$  у полі дії сили ваги. Різниця

$$C_M = \int_0^M g dh = W_0 - W_M \quad (11.32)$$

одержала назву *геопотенціальної величини* (або *геопотенціальної функції*, або *геопотенціального числа*). Вона входить складовим членом у

визначення висоти в будь-якій системі, що дає однозначний результат. Ця величина визначена таким чином, що завжди є додатною.

Геопотенціальна величина  $C$  як різниця потенціалів не залежить від конкретного нівелірного ходу, якій використовують для поєднання точки з рівнем моря. Ця величина однакова для всіх точок однієї рівневої поверхні. Таким чином, геопотенціальну величину можна розглядати як природну міру висоти, хоча вона й не має відповідної розмірності.

Геопотенціальні величини були прийняті на зустрічі Підкомісії Міжнародної асоціації геодезії у Флоренції у 1955 р.

Безпосередньо приріст геопотенціальної величини використовують іноді при вирівнюванні полігонів геометричного нівелювання, оскільки теоретична сума цих приростів у замкненому полігоні дорівнює нулю. Однак для практичного застосування результатів нівелювання слід мати величини, що мають розмірність довжини та порівняно близькі до вимірюваних висот. Такими величинами є **динамічні висоти**, які одержують шляхом ділення геопотенціальних величин на деяке стає значення сили ваги  $\bar{\gamma}$ :

$$H^{\text{дин}} = \frac{C_M}{\bar{\gamma}} = \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^M g dh. \quad (11.35)$$

Для того щоб це показати, представимо формулу (11.35) у вигляді:

$$H^{\text{дин}} = \int_0^M dh + \frac{1}{\bar{\gamma}} \int_0^M (g - \bar{\gamma}) dh = h + \delta h^{\text{дин}}. \quad (11.36)$$

### **Наближені висоти**

Наближені висоти одержують, якщо не брати до уваги реальне гравітаційне поле сили ваги Землі.

До обчислення наближених висот доводиться звертатися в тому випадку, якщо вздовж лінії нівелювання не виконувались вимірювання сили ваги, які виявляють вплив дійсного поля сили ваги Землі; обчислення наближених висот використовується як проміжний етап для обчислення висот в інших системах.

Із визначення наближених висот випливає, що виміряні величини  $H^{\text{вим}}$  слід виправити лише за непаралельність рівневих поверхонь нормального гравітаційного поля.

$$H_M^{\text{набл}} = \frac{U_0 - U_M}{\gamma_m^M} = \frac{\Delta U}{\gamma_m^M} = \frac{\int_0^M \gamma dh}{\gamma_m^M}, \quad (11.44)$$

де  $\gamma_m^M$  – середнє значення нормальної сили ваги на прямовисній лінії

## **Ортометричні висоти та висоти геоїда**

Ортометричними висотами називають висоти точок фізичної поверхні Землі над поверхнею геоїда, відлічувані по прямовисних лініях, що проходять через ці точки. Для точки  $M$  (рис. 79) ортометрична висота виразиться відстанню  $MM_1$ .

Звідси одержуємо:

$$H_M^g = \frac{\int_0^M g dh}{g_m^M} = \frac{W_0 - W_M}{g_m^M} = \frac{C_M}{g_m^M}. \quad (11.47)$$

Отже, ортометрична висота точки  $M$  визначається через різницю потенціалів у точках земної поверхні  $O$  та  $M$  і середнє значення  $g_m^M$  на відріжку  $MM_1$ . Із формули (11.47) випливає, що ортометричні висоти не залежать від напрямку нівелювання й вони є різними для точок однієї і тієї ж рівневої поверхні, як і різні  $g_m$ . Строго отримати ортометричну висоту неможливо, оскільки неможливо визначити точно величину  $g_m$ .

Величину  $g_m$  можна було б знайти, якщо б по прямовисній лінії  $MM_1$  пробурити свердловину, а опісля виміряти прискорення сили ваги на різних глибинах до поверхні геоїда, щоб визначити його середнє значення  $g_m$ . Але цей шлях неможливий у реальних умовах.

Величина  $g_m$  може бути розрахована при деяких, переважно довільних, припущеннях про розподіл сили ваги або густини мас у тілі Землі (саме до пошуку таких правдоподібних припущень і зводились у минулому пошуки геодезистів). Однак через це геометрично чітке поняття ортометричної висоти насправді стає строго нереалізованим (інакше кажучи, не виконується умова 2 у розділі 11.2).

Фігура геоїда всередині притягуючих мас не може бути точно визначена без знання розподілу густини земної кори. Вочевидь, необхідно відмовитись від геоїда як відлікової поверхні та від ортометричних висот. Але замість геоїда можна використати поверхню, яка близька до неї і яку називають *квазігеоїдом*.

## **Нормальні висоти**

Введемо поняття *нормальної висоти* точки  $M$ , назвавши так відрізок силової лінії, що проходить через точку  $M$  у полі нормального потенціалу сили ваги, між рівневими поверхнями  $U = U_0$  та  $U = U_0 - C_M$ .

Фактично жодне із зроблених припущень не дотримується, отже  $H^y \neq H^G$ . Однак і в цьому випадку, при розподілі геодезичної висоти  $H^G$  на гіпсометричну та геоїдальну частини, нормальну висоту вигідно вважати за першу з них:

$$H^G = H^\gamma + \zeta, \quad (11.63)$$

де  $\zeta$  – аномалія висоти.

Нормальна висота дорівнює відстані  $M_0 m_0$  між точками цієї лінії, що лежать на рівневих поверхнях  $U = U_0$  та  $U = U_0 - C_M$ . Аномалія висоти  $\zeta$  дорівнює відрізку  $M_0 M$ . Із врахуванням формули (11.32) формулу для нормальної висоти в реальному гравітаційному полі запишемо так:

$$H_M^\gamma = \frac{C_M}{\gamma_m^M} = \frac{1}{\gamma_m^M} \int_0^M g dh. \quad (11.64)$$

#### 4. GPS-нівелювання

Геометричне нівелювання (рис. 39) – операція, яка потребує великих витрат часу. GPS здійснила революцію і в цьому.

Основне рівняння має вигляд:

$$H^g = H^G - \zeta. \quad (11.152)$$

Воно пов'язує ортометричну висоту  $H^g$  (над геоїдом), геодезичну висоту  $H^G$  (над еліпсоїдом) і висоту геоїда  $\zeta$ . Якщо будь-які дві з цих величин виміряні, то третя може бути обчислена.

Якщо геодезична висота  $H^G$  виміряна за допомогою GPS, і є достовірна цифрова карта висот геоїда  $\zeta$ , то одразу ж може бути одержана ортометрична висота  $H^g$ .

Рівняння (11.152) можна використати також для визначення геоїда: якщо геодезична висота  $H^G$  виміряна за допомогою GPS, а ортометрична висота  $H^g$  одержана шляхом нівелювання, то висота геоїда  $\zeta$  визначається так  $\zeta = H^G - H^g$ . Той же принцип може бути застосований і на океанах у вигляді супутникової альтиметрії.

GPS-нівелювання «розуміє», певною мірою, заміну класичного нівелювання нівелюванням за допомогою GPS. З рис. 39 застосування формули (11.152) до точок  $A$  та  $B$  дає:

$$\left. \begin{aligned} H_A^g &= H_A^G - \zeta_A \\ H_B^g &= H_B^G - \zeta_B \end{aligned} \right\}, \quad (11.153)$$

та, як наслідок, перевищення:

$$H_B^g - H_A^g = H_B^G - H_A^G - \zeta_B - \zeta_A. \quad (11.154)$$

Використання позначень  $\delta H_{AB}^g = H_B^g - H_A^g$ ,  $\delta H_{AB}^G = H_B^G - H_A^G$  та  $\delta \zeta_{AB} = \zeta_B - \zeta_A$  спрощує запис останнього співвідношення:

$$\delta H_{AB}^g = \delta H_{AB}^G - \delta \zeta_{AB}. \quad (11.155)$$

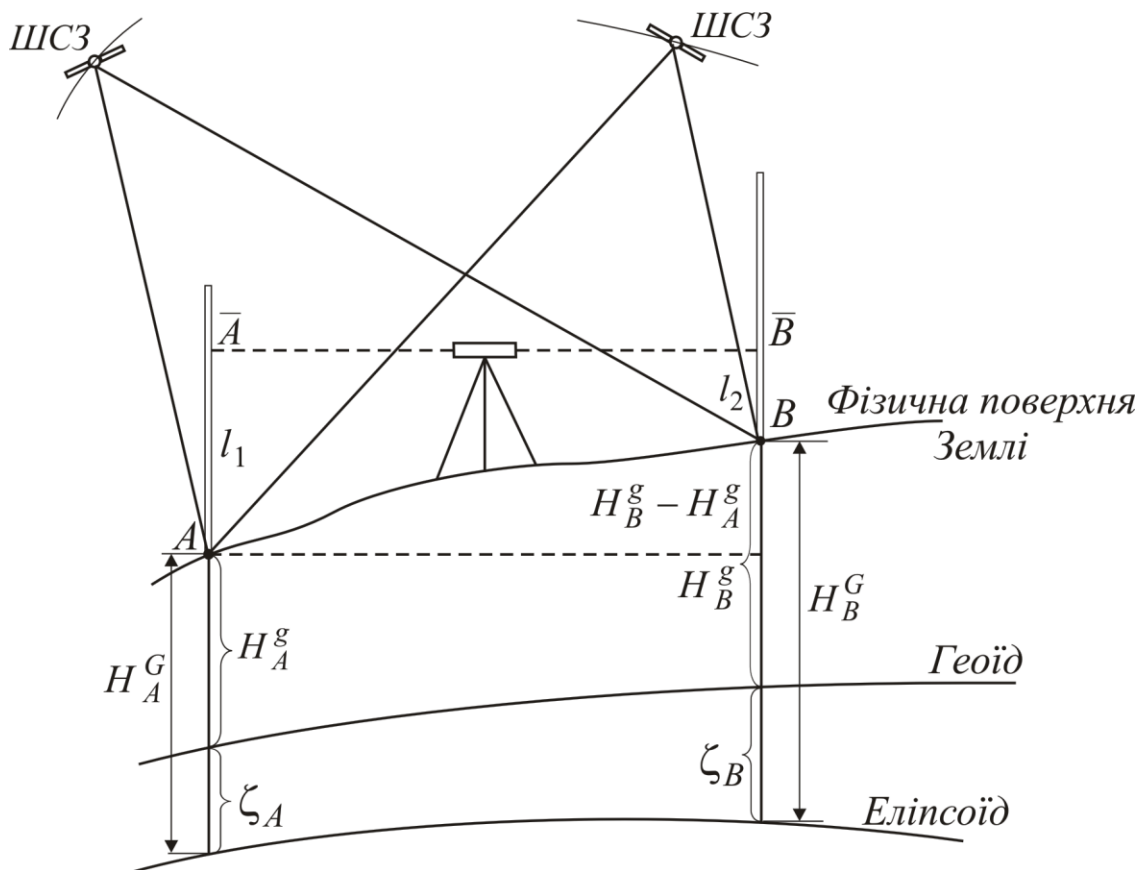


Рис. 39. GPS-нівелювання

За допомогою GPS-нівелювання можна знайти  $\delta H_{AB}^G$ ; тоді, при відомому геоїді, тобто при відомій величині  $\delta \zeta_{AB}$ , ортометричне перевищення  $\delta H_{AB}^g$  визначається за формулою (11.155). Це є значною перевагою, оскільки в іншому випадку для визначення ортометричного перевищення слід провести класичне нівелювання в поєднанні з гравіметричними вимірюваннями.

Як відомо, в Україні використовується система нормальних висот. Практичне використання GPS-методу при нівелірних роботах вимагає вирішення проблеми переходу від системи геодезичних (глобальних) висот (із системи WGS-84) до нормальних висот (редукції до Балтійської системи висот 1977 р.). Позначимо ці висоти відповідно  $H^G$  і  $H^\gamma$ , а редукційну поправку до першої висоти через  $V$ . Тоді рівняння редукції геодезичних висот до нормальних матиме вигляд:

$$H_i^G + V_i = H_i^\gamma. \quad (11.156)$$

Оскільки поверхні світового еліпсоїда (WGS-84) та квазігеоїда не паралельні і зміщені по висоті, то для визначення параметрів редукції геодезичних висот земної поверхні необхідно мати в районі робіт систему опорних реперів, висоти яких визначені в обох системах.

## 5. Астрономічне та астрономо-гравіметричне нівелювання

Для дослідження фігури Землі необхідно знати висоти квазігеоїда (геоїда) від еліпсоїда  $\zeta$ , які можна визначити шляхом опрацювання результатів астрономічних, гравіметричних або супутникових вимірювань. Визначення перевищення квазігеоїда над еліпсоїдом називають *астрономічним*, *астрономо-гравіметричним* або *астрономо-гравіметрично-супутниковим* нівелюванням.

Для з'ясування суті вказаних методів нівелювання розглянемо найпростіший випадок, на якому поряд із висвітленням основної ідеї даного виду нівелювання покажемо також відмінності між методами. Нехай т.  $A$  (рис. 40) – початкова точка триангуляції, для якої  $\zeta_0 = 0$ . Для одержання наближеної формули припустимо, що профіль земної поверхні збігається з деякою рівневою поверхнею  $W_A = C$ , тобто  $H^\gamma \cong \text{const}$ .

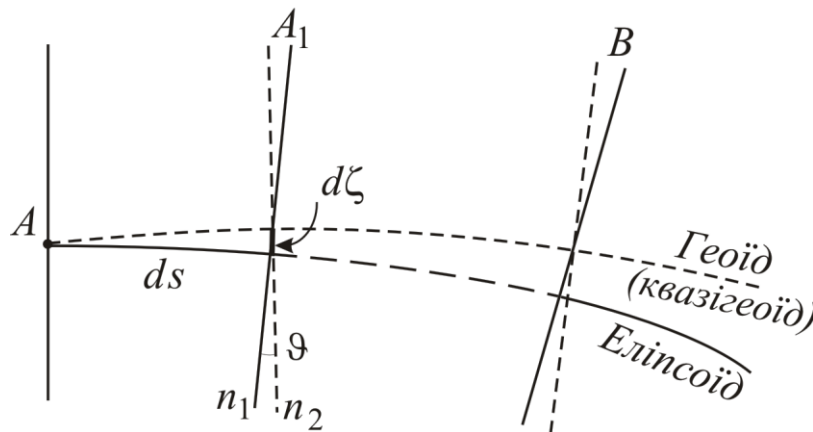


Рис. 40. До визначення астрономічного й астрономо-гравіметричного нівелювання

Геодезична висота рівневої поверхні  $W_A = C$  над еліпсоїдом у точці  $B$ , що знаходиться на кінцевій відстані  $s$  від точки  $A$ , зміниться на величину:

$$\zeta_B - \zeta_A = - \int_A^B \vartheta ds. \quad (11.171)$$

### Астрономічне нівелювання

Метод астрономічного нівелювання дозволяє шляхом інтегрування складових астрономо-геодезичних відхилень прямовисних ліній вздовж обраної траси нівелювання визначати прирости висот квазігеоїда вздовж цієї траси. Строгу диференціальну формулу астрономічного нівелювання можна одержати з формули узагальненого астрономічного нівелювання (11.9), якщо представити приріст геодезичної висоти  $dH^G$  як суму приростів нормальної висоти  $dH^\gamma$  та висоти квазігеоїда  $d\zeta$ . Тоді будемо мати:



$$d\zeta = -\frac{\vartheta}{\rho''} ds - (dH^\gamma - dh). \quad (11.176)$$

Член у дужках формули (11.169) являє собою поправку за перехід від приросту виміряної висоти до приросту нормальної висоти, взяту з протилежним знаком. Використовуючи диференціальну формулу для приросту  $dH^\gamma$  нормальної висоти, одержуємо:

$$d\zeta = -\frac{\vartheta}{\rho''} ds + \frac{h}{\gamma_m} d\gamma_0 - \frac{g-\gamma}{\gamma_m} dh. \quad (11.177)$$

Виразивши  $\Delta B$  і  $\Delta L$  у *мінутах* дуги, знаходимо:

$$\zeta_B - \zeta_A = -\frac{R}{2\rho'\rho''} [(\xi'_A + \xi'_B)\Delta B + (\eta_A + \eta_B)\Delta L \cos B_m]. \quad (11.183)$$

### ***Астрономо-гравіметричне нівелювання***

Метод астрономо-гравіметричного нівелювання (АГН) був запропонований М.С. Молоденським у 1937 році. Щоб викласти основні принципи цього методу повернемося до формули (11.181). Аналогічну формулу можна також записати для гравіметричних висот квазігеоїда  $\bar{\zeta}$  та складових відхилень прямовисних ліній  $\bar{\vartheta}$ , при обчисленні яких використовується обмежена область інтегрування  $\Sigma$  (рис. 91):

$$\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A = -\frac{1}{\rho''_A} \int_A^B \bar{\vartheta} ds. \quad (11.188)$$

Віднімаючи вираз (11.188) із (11.181), одержуємо:

$$\zeta_B - \zeta_A = \bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A - \frac{1}{\rho''_A} \int_A^B (\vartheta' - \bar{\vartheta}) ds. \quad (11.189)$$

Тоді, підставивши цей вираз у формулу (11.189), будемо мати:

$$\zeta_B - \zeta_A = -\frac{\vartheta'_A + \vartheta'_B}{2\rho''} s_{AB} + \left( \bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A + \frac{\bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_B}{2\rho''} s_{AB} \right). \quad (11.190)$$

Це і є основна формула астрономо-гравіметричного нівелювання.

Можна стверджувати, що геодезична висота  $H^G$  буде одержана однозначно, оскільки при цьому буде однозначно визначена нормальна висота  $H^\gamma$  і також однозначно буде визначена висота квазігеоїда  $\zeta$  над референц-еліпсоїдом. Однозначність визначення висоти квазігеоїда  $\zeta$  над референц-еліпсоїдом, одержаної методом астрономо-гравіметричного нівелювання, дає можливість однозначної побудови квазігеоїда. Поверхню квазігеоїда можна представити як геометричне місце кінців відрізків, які являють собою висоти квазігеоїда  $\zeta$ , відкладених від поверхні референц-еліпсоїда по нормалі до останнього. Однозначність побудови поверхні

квазігеоїда дає можливість використання цієї поверхні як основної відлікової поверхні для визначення нормальних висот.

Роботи з астрономо-гравіметричного нівелювання на території колишнього СРСР були розпочаті в тридцятих роках минулого століття, одразу після того, як цей метод був запропонований М.С. Молоденським. Одержані методом АГН висоти квазігеоїда з використанням загальної маятникової гравіметричної зйомки СРСР були застосовані для визначення найбільш придатних вихідних геодезичних дат для еліпсоїда Красовського, а потім для редукування вимірів в астрономо-геодезичній мережі колишнього СРСР при її загальному вирівнюванні.

Роботи з астрономо-гравіметричного нівелювання набули нового розвитку після Великої Вітчизняної війни. М.С. Молоденський довів необхідність підвищення його точності для задоволення вимог до висот квазігеоїда над еліпсоїдом Красовського, які повинні бути відомі з середньою квадратичною похибкою не більше  $\pm 3$  м. За його пропозицією розпочалось прокладання ряду ліній АГН підвищеної точності, які стали каркасом для наступних передач висот квазігеоїда на всі базисні мережі в АГМ. По цих лініях визначались астрономічні пункти через 70 – 100 км, навколо яких у радіусі порядку 50 км виконувались за спеціальною програмою гравіметричні зйомки згущення. Залежно від характеру рельєфу та складності гравіметричного поля зйомки згущення виконувались із різною деталізацією та забезпечували можливість обчислення складових гравіметричних відхилень прямовисних ліній із середніми квадратичними похибками порядку 0,4–0,5".

## **6. Системи відліку висот**

### ***Балтійська система висот***

За початок відліку висот у нівелірній мережі колишнього СРСР і зокрема в Україні беруть середній рівень Балтійського моря. Перші спостереження в Росії за коливаннями рівня Балтійського моря були розпочаті в 1703 р. за наказом Петра I; регулярні ж спостереження були організовані у Військовій гавані Кронштадта на о. Котлін у 1804 р. Однак, у подальшому футшток (рейка з поділками, за якою визначається висота рівня води) було зруйновано і результати вимірювань втратили. У 1825 р. спостереження за рівнем Балтійського моря були поновлені й здійснюються дотепер.

Футшток (рис. 94) був установлений на одній із опор Синього мосту через Обвідний канал у Кронштадті (у каналі немає таких сильних вертикальних коливань поверхні води, як біля берегу відкритої затоки).

Таким чином, відлік нівелірних висот у дореволюційний час, час існування СРСР і до нашого часу ведеться від середнього рівня

Балтійського моря, виведеного М.Ф. Рейнеке за період спостережень 1825 – 1840 р. р.

Перший зв'язок вихідного пункту в Кронштадті з береговими марками на ст. Оранієнбаум (нині м. Ломоносов) був здійснений відомим російським геодезистом і астрономом М.Я. Цингером узимку 1871 – 1872 р. р.

7 квітня 1946 р. було прийнято постанову Ради Міністрів СРСР № 760 «О введении единой системы геодезических координат и высот на территории СССР». Згідно цієї постанови висоти на всій території колишнього СРСР повинні відлічуватися від рівня Балтійського моря, точніше, від нуля Кронштадтського футштока, за який взята горизонтальна риска на пластині, встановленій на устої Синього мосту через Обвідний канал у м. Кронштадті.

У 1977 р. було виконано чергове, четверте, сумісне вирівнювання нівелірної мережі I та II класів колишнього СРСР. На основі висот каталогу опорної нівелірної мережі I та II класів 1977 р. було завершено вирівнювання окремих нівелірних ліній II класу, які не ввійшли в каталог 1977 р., а також всіх ліній нівелювання III та IV класів. Таким чином, єдина система висот була поширена на всю територію колишнього СРСР, у тому числі й на територію України.

Нормальні висоти реперів і марок Державної нівелірної мережі України обчислюють у Балтійській системі висот 1977 р.

### ***Європейська система висот***

У 1997 р. вперше була запропонована концепція Європейської вертикальної системи, а у 2000 р. затверджено основні її принципи. Така система мала базуватися на вертикальних датах (за основу вибрані «головні» нуль-пункти висот та геопотенціальні числа), вирівняній кінематичній моделі, високій надійності даних, виключенні систематичних похибок та зв'язку із загальноземними вертикальними датами через вдосконалення глобального геоїда.

Головна ідея Європейської вертикальної референцної системи EVRS корелюється з процедурою просторових 3D систем, а саме, зрозумілий поділ між визначенням вертикальної референцної системи та її реалізацією і використанням глобальних розв'язків зі строгими трансформуваннями. Основна умова визначення Європейської системи EVRS така: вертикальні дати відповідають нульовому рівню (нуль-пункту відліку висот), для якого потенціал гравітаційного поля Землі дорівнює нормальному потенціалу загальноземного еліпсоїда  $U_0$ , тобто  $W_0 = U_0$ .

Найкращою базою для безперервного покращення EVRS є використання світової системи висот WHS, відліковою поверхнею якої є еквіпотенціальна поверхня з потенціалом, що дорівнює нормальному

потенціалу  $U_0$ . Потенціал  $U_0$  є фундаментальною сталою. Якщо з деяких причин надається перевага регіональній системі (збереження незмінними висот, які вже широко використовуються в практичних роботах, є важливою умовою національних систем), то тоді вона повинна визначатись через числове зміщення до світової системи висот  $\Delta H^y$ , а не через «середній» рівень моря або геопотенціал, традиційно зв'язаний з фізичними реперами.

У подальшому можливі зміни у висотах, які очікуються у разі переходу від традиційної системи до її нової версії. У тому випадку, коли стандартизована регіональна висотна система Європи і далі буде базуватися на NAP, всі висоти (за виключенням висоти вихідної точки) зміняться вже у наступній версії UELN XX і відповідно у EVRF 20XX (зміни, у порівнянні з EVRF 2000, будуть складати до 0,1 м, за виключенням північного регіону континенту, де ця величина може сягати 0,5 м). Це буде відбуватися оскільки:

1) будуть включені нові дані нівелювання з багатьох східноєвропейських країн, а не тільки з північно-західної та центральної частини Європи;

2) ставлення до постійних припливних ефектів буде узгоджено з нульовою моделлю;

3) для віднесення висот на певну епоху стане необхідним виключення з них поправок за вертикальні рухи, навіть поза межами північного регіону Європи, де це вже було зроблено ще від UELN 55;

4) буде накопичено достатньо даних (з EPN, ECGN та інших джерел) для створення високоякісної моделі поля вертикальних швидкостей на всю Європу.

За визначенням  $W_0^{NAP}$  дорівнює потенціалу нормального еліпсоїда GRS 80 з головною сталою  $fM_{GRS80}$ . Якщо відповідні числові характеристики  $W_0^{Балт}$  і  $fM_{Балт}$  і визначалися при встановленні системи «Балтійська 77», то вони, зрозуміло, не тільки відрізняються від параметрів GRS 80, але й, на жаль, невідомі – за рахунок чого і виникає невизначеність системи «Балтійська 77». Виконані у [18] дослідження переконують, що без точного знання фізичних сталих  $W_0^{Балт}$  і  $fM_{Балт}$  проблема редукції на відповідний цим параметрам референц-еліпсоїд не може бути розв'язана строго.

Різниці у висотах для різних висотних систем

| Нуль-пункт систем висот | Значення потенціалу $W_0$ , м/с | Різниця у висотах відносно EVRS, м |
|-------------------------|---------------------------------|------------------------------------|
| Амстердам               | 62636857,25                     | 0,36                               |
| Кронштадт               | 62636855,8                      | 0,51                               |

Як видно із табл. 9, розходження у висотах для різних вертикальних систем є істотним. Воно може, у деяких випадках, суттєво вплинути на використання висотних відміток у різних прикладних застосуваннях. Тому збереження у національній висотній системі базових засад формування висотної основи країни повинно стати пріоритетним.

Для оцінювання різниці між Амстердамською та Балтійською 1977 системами висот для регіону України розглянемо формулу [18]:

$$H_{NAP}^{\gamma} = H^G - \zeta_{EGG97}, \quad (11.200)$$

де  $\zeta_{EGG}$  – висоти квазігеоїда EGG 97 (Європейський гравіметричний квазігеоїд);  $H^G$  – геодезичні висоти пунктів GPS-нівелювання.

Нормальні висоти  $H_{NAP}^{\gamma}$ , що можуть бути обчислені за формулою (11.200), будуть відповідно у системі EVRF 2000, до якої віднесені висоти квазігеоїда EGG 97  $\zeta_{EGG97}$ . Оскільки значення нормальних висот  $H_{Балт}^{\gamma}$  у системі «Балтійська 77» відомі у тих же самих точках GPS-нівелювання саме за даними геометричного нівелювання, то проста різниця:

$$\Delta H^{\gamma} = H_{NAP}^{\gamma} - H_{Балт}^{\gamma}, \quad (11.201)$$

призводить до оцінки можливого систематичного розходження між двома висотними системами в регіоні України.

Результати такого оцінювання, що було виконане в роботі [18] на основі 52 пунктів GPS-нівелювання, розташованих у різних частинах України, показали, що середнє значення різниці  $\Delta H^{\gamma}$  на основі вказаних даних дорівнює 12,7 см. Проте слід зауважити достатньо великі розбіжності точкових значень  $\Delta H^{\gamma}$  із заходу на схід, які можуть бути пов'язані з похибками у висотах квазігеоїда та з похибками у мережі нівелювання.

### **Запитання для самоперевірки**

1. Що таке потенціал рівневої поверхні?
2. Як визначити перевищення між рівневими поверхнями?
3. Що таке геодезична, ортометрична та нормальні висоти?
4. Що таке висота геоїду та квазігеоїду?
5. Які вимоги до системи висот?
6. Що таке геопотенціальні висоти?
7. Що таке астрономічне та астрономо-гравіметричне нівелювання?
8. Яка системи відліку висот прийнята в Україні?

## Лекція 11. РЕДУКЦІЙНА ЗАДАЧА ГЕОДЕЗІЇ

### Питання

1. Поняття про редуційну задач
2. Редукування лінійних вимірів
3. Редукування виміряних горизонтальних напрямків
4. Особливості редукування місцевих геодезичних мереж

### 1. Поняття про редуційну задачу

У практиці побудови просторових геодезичних мереж склалася традиція роздільного визначення планових координат  $B, L$  і геодезичної висоти  $H^G$ . Це призвело до того, що нещодавно обидві задачі розглядались ізольовано одна від одної. Для розв'язання першої задачі переходять від пунктів астрономо-геодезичних мереж, фактично створених на фізичній поверхні, до їх проєкцій на поверхні деякого обраного референц-еліпсоїда, який є відліковим для геодезичних висот  $H^G$ . Відповідно редукують виміряні елементи геодезичної мережі, тобто переходять від довжин сторін між пунктами, виміряними на фізичній поверхні, до довжин дуг геодезичних ліній, розташованих між проєкціями цих пунктів на референц-еліпсоїд, а від спостережуваних горизонтальних напрямків і азимутів – до напрямків і азимутів указаних дуг.

*Редуційною задачею* геодезії будемо називати теорію переходу від безпосередньо виміряних величин на фізичній поверхні Землі до відповідних їм величин на поверхні відносності – референц-еліпсоїді.

Найбільш ясним і строгим методом розв'язання редуційної задачі є метод проєктування, розроблений Ф.М. Красовським. За цим методом проєктування пунктів АГМ з фізичної поверхні Землі на поверхню референц-еліпсоїда виконують по нормалях до референц-еліпсоїда, завдяки чому геодезичні координати  $B, L$  пунктів на фізичній поверхні та точок, які є їх проєкціями на еліпсоїді, збігаються. Після закінчення двовимірного опрацювання АГМ на референц-еліпсоїді стають відомими планові компоненти  $B, L$  просторових пунктів АГМ. Використовуючи додатково знайдені геодезичні висоти  $H^G$ , можна одержати положення пунктів фізичної поверхні у будь-якій іншій просторовій системі координат, у тому числі в системі просторових прямокутних координат  $X, Y, Z$ .

При розв'язанні редуційної задачі виникають редуції трьох видів:

- за відхилення прямовисної лінії, тобто за перехід від астрономічного зеніту, що відповідає напрямку прямовисної лінії, за яким орієнтується вертикальна вісь геодезичного або астрономічного приладу, до геодезичного зеніту – напрямку нормалі до референц-еліпсоїда;

- за висоту над поверхнею референц-еліпсоїда;
- за перехід від елементів, одержаних після введення редуцій перших двох видів і відповідних нормальних перерізів референц-еліпсоїда, до елементів, що відповідають геодезичним лініям.

Без сумніву, що застосування методу проектування виправдане лише в тому випадку, якщо необхідні для обчислення редуцій відхилення прямовисних ліній і геодезичні висоти відомі з такою точністю, щоб можна було б знехтувати пов'язаними з ними похибками редуцій. При цьому важливо, щоб навіть малі похибки при редукуванні окремих вимірювань не були джерелом систематичних спотворень великої геодезичної мережі.

Для застосування методу проектування вже повинна бути з достатньою точністю відома фігура Землі. А саме, потрібно знати:

- з похибкою декількох мінут геодезичні координати  $B$ ,  $L$  пунктів та геодезичні азимуту  $A$  напрямків;
- з похибкою 1 – 3 м, а у деяких випадках і точніше, геодезичні висоти пунктів  $H^G$ ;
- з похибкою 1 – 2" складові відхилення прямовисної лінії  $\xi$ ,  $\eta$ .

Наближені значення геодезичних координат  $B$ ,  $L$ , які необхідні для редукування триангуляції, можна зняти з топографічної карти або обчислити шляхом розв'язування прямих геодезичних задач на поверхні референц-еліпсоїда, використовуючи при цьому виміряні (не редуковані) горизонтальні напрямки.

Геодезичну висоту  $H^G$  представляють у вигляді суми  $H^G = H^\gamma + \xi$  (див. рис. 36), де  $H^\gamma$  – нормальна висота, що визначається з високою точністю із геометричного нівелювання,  $\xi$  – висота квазігеоїда над референц-еліпсоїдом, яку визначають із астрономічного чи астрономо-гравіметричного нівелювання.

Складові відхилення прямовисних ліній  $\xi$ ,  $\eta$  безпосередньо можуть бути обчислені тільки для тих пунктів, де виконані астрономічні визначення широт і довгот. Для решти пунктів їх отримують методом непрямої інтерполяції з використанням гравіметричних даних.

Розглянемо формули, за якими обчислюють поправки (редукції) в лінійні вимірювання (вимірювання відстаней між пунктами мережі світло-або радіовіддалемірами чи GPS-методами) та кутові вимірювання (горизонтальні напрямки) для редукування їх на референц-еліпсоїд методом проектування.

## 2. Редукування лінійних вимірів

Загальною особливістю розглядуваних лінійних вимірювань є те, що за їх допомогою безпосередньо одержують похилі відстані – відстані між



геодезичними пунктами. Крім того, відстані між заданими пунктами визначають безвідносно якої-небудь рівневої поверхні. Інакше кажучи, виміряні світло- чи радіовіддалемірами та GPS-методами відстані в процесі вимірювання не пов'язані з напрямком прямої лінії.

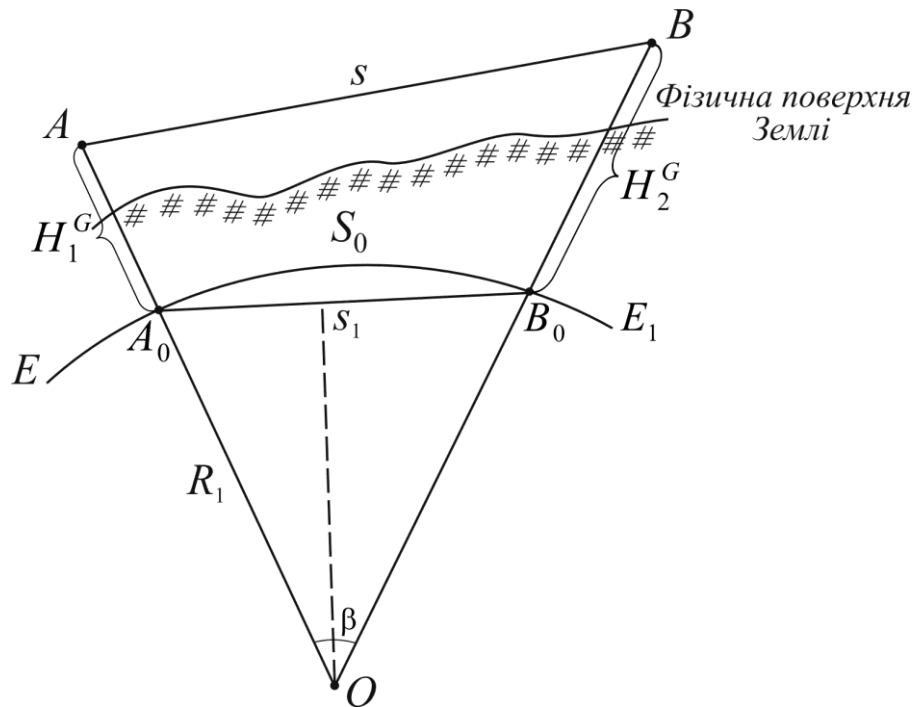


Рис. 41. Редукування похилих відстаней

Із простих геометричних міркувань випливає, що для переходу від виміряної похилої відстані  $s$  до геодезичної лінії  $S_0$  між точками  $A_0$  та  $B_0$  – проекціями точок  $A$  і  $B$  на еліпсоїді – необхідно додатково знати геодезичні висоти цих точок  $H_1^G$  і  $H_2^G$  та, крім того, наближено знати широту однієї точки й азимут  $A$  напрямку  $AB$ . Таким чином, редуційна задача зводиться до обчислення різниці  $(s - S_0)$ , яка

$$S_0 = s_1 + \frac{s_1^3}{24R_1^2} + \frac{3s_1^5}{640R_1^4}. \quad (12.6)$$

При редукуванні точно виміряних відстаней радіус кривини  $R_1$  можна обчислити за формулою:

$$R_1 = R \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 B \cos 2A \right), \quad (12.7)$$

де  $R$  – середній радіус кривини еліпсоїда.

При редукуванні безпосередньо виміряних сторін тріангуляції, коли довжина становить десятки кілометрів, формули (12.3) – (12.7) можна спростити та представити у вигляді:

$$S_0 = \sqrt{s^2 - (\Delta H^G)^2} \left( 1 - \frac{H_1^G + H_2^G}{2R_1} + \frac{3(H_1^G)^2 + 3(H_2^G)^2 + 2H_1^G H_2^G}{8R_1^2} \right) + \frac{s^3}{24R_1^2}, \quad (12.8)$$

Якщо висоти  $H_1^G$  і  $H_2^G$  кінців виміряної лінії не перевищують 2 км, останній член у дужках можна не враховувати через його малість та обчислювати довжину лінії  $S_0$  за формулою:

$$S_0 = \sqrt{s^2 - (\Delta H^G)^2} \left( 1 - \frac{H_1^G + H_2^G}{2R_1} \right) + \frac{s^3}{24R_1^2}. \quad (12.9)$$

### 3. Редукування виміряних горизонтальних напрямків

Безпосередньо виміряний кут у пункті фізичної поверхні Землі  $M$  є двограним кутом, ребром якого є лінія  $Mt$ , що збігається з вертикальною віссю кутомірного приладу, тобто прямовисна лінія. Після редукування потрібно визначити двограний кут, ребром якого є нормаль  $Mt_0$  до референц-еліпсоїда, що проходить через пункт  $M$ , а гранями – нормальні площини, яким належать проекції спостережуваних пунктів на референц-еліпсоїді (рис. 42).

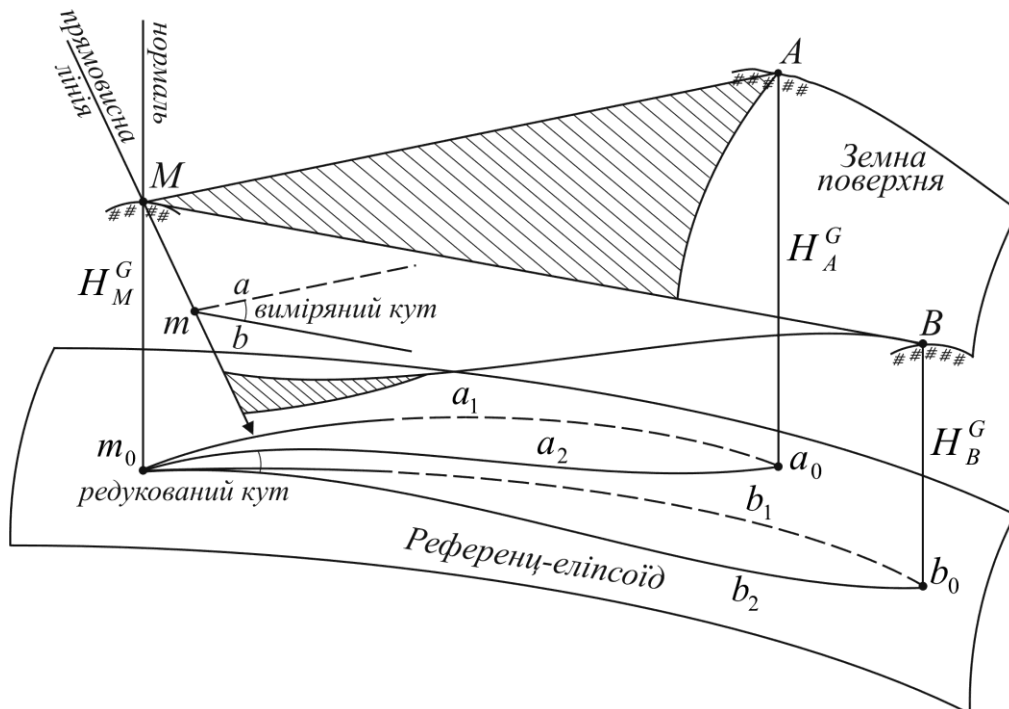


Рис. 42. Редукування виміряного горизонтального кута з фізичної поверхні на поверхню референц-еліпсоїда

Перехід від виміряного кута до редукованого досягається введенням у безпосередньо виміряні напрямки поправок:  $\delta_1$  – за відхилення прямовисної лінії,  $\delta_2$  – за висоту точки спостереження.

Поправка  $\delta_1$  відповідає суміщенню вертикальної осі приладу з нормаллю до поверхні референц-еліпсоїда. Після її введення одержують напрямок нормального перерізу, утвореного площиною, що проходить через візирну ціль.

Поправка  $\delta_2$  забезпечує перехід до прямого нормального перерізу, утвореного площиною, що проходить через проекцію (по нормалі) центра знаку візування на референц-еліпсоїд. Ця редукція зумовлена тим, що нормалі до еліпсоїда у загальному випадку є перехресними прямими, тому проекція пункту, що спостерігається, на референц-еліпсоїд по нормалі не лежить у площині, що включає нормаль до пункту спостереження та вимірний напрямок.

Отже, у кожний вимірний на земній поверхні горизонтальний напрямок, попередньо приведений до центрів знаків, повинні бути введені такі поправки:

- поправка за відхилення прямовисної лінії в пункті спостереження:  

$$\delta_1'' = (\eta_1^{az} \cos A_{12} - \xi_1^{az} \sin A_{12}) \operatorname{ctg} z_{12}; \quad (12.10)$$

- поправка за висоту візирної цілі над поверхнею референц-еліпсоїда:

$$\delta_2'' = \rho'' \frac{e^2}{2M_2} H_2^G \cos^2 B_2 \sin 2A_{12}, \quad (12.11)$$

Для еліпсоїда Красовського можна взяти  $\rho'' \frac{e^2}{2M_2} \approx 0,108''$ , тому одержимо:

$$\delta_2'' = 0,108'' H_2^G \cos^2 B_2 \sin 2A_{12}, \quad (12.12)$$

де  $H_2^G$  виражена в кілометрах.

- поправка за перехід від нормального перерізу до геодезичної лінії:

$$\delta_3'' = \rho'' \frac{e^2}{12N_1^2} s_{12}^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_{12}. \quad (12.13)$$

Для еліпсоїда Красовського:

$$\delta_3'' = 0,0282'' s_{12}^2 \cos^2 B_1 \sin 2A_{12}. \quad (12.14)$$

Поправку в горизонтальний кут дістаємо як різницю поправок відповідних напрямків.

#### 4. Особливості редукування місцевих геодезичних мереж

В останні роки набувають розвитку невеликі за розмірами високоточні геодезичні мережі, які створюються як основа топографо-геодезичних робіт у містах, забезпечення робіт щодо спорудження та експлуатації великих інженерно-технічних споруд, вивчення локальних рухів земної кори на геодинамічних полігонах, для проведення землепорядних і кадастрових робіт та інше. Часто такі мережі опрацьовують у місцевих системах координат, застосовуючи метод проектування. Для цього необхідно чітко визначити елементи орієнтування поверхні відносності – референц-еліпсоїда, який із достатньою точністю може бути замінений відліковою сферою. Радіус цієї сфери може бути таким, що дорівнює середньому радіусу кривини  $R_B$  прийнятого еліпсоїда для деякої широти в межах мережі.

Інженерно-геодезичні мережі порівняно з державними астрономо-геодезичними мережами мають такі особливості:

- займають порівняно невелику площу та мають довжини ліній порядку сотень метрів або декількох кілометрів;
- мають значну кількість надлишкових вимірювань і, внаслідок цього, велику кількість умов у мережі;
- характеризуються високою точністю визначення взаємного положення пунктів мережі;
- мають значні кути нахилу виміряних напрямків;
- можуть не мати зв'язку з державною астрономо-геодезичною мережею;
- можуть розташовуватись у передгірській і гірській місцевості, де є значні коливання відхилень прямовисних ліній.

Розглянемо особливості редуційних обчислень у місцевих геодезичних мережах.

Найпростішим є випадок, коли на вихідному пункті геодезичної мережі  $O$  виконані астрономічні визначення широти, довготи й азимуту та геодезичні координати є такими, що дорівнюють астрономічним:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \varphi_0 \\ L_0 &= \lambda_0 \end{aligned} \right\}. \quad (12.15)$$

У цьому випадку складові астрономо-геодезичного відхилення прямовисної лінії  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  на пункті  $O$  дорівнюють нулю, а геодезичний азимут початкового напрямку дорівнює астрономічному:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0^{az} &= 0 \\ \eta_0^{az} &= 0 \\ A_0 &= \alpha_0 \end{aligned} \right\}. \quad (12.16)$$

Для всіх пунктів мережі обчислюють гравіметричні або топографічні відхилення прямовисних ліній  $\xi^{zp}$ ,  $\eta^{zp}$  за гравіметричними або топографічними картами.

Астрономо-геодезичні відхилення прямовисних ліній у місцевій системі координат одержують як різниці відхилень у кожному пункті відносно вихідного:

$$\xi^{az} = \xi^{zp} - \xi_0^{zp}; \quad \eta^{az} = \eta^{zp} - \eta_0^{zp}. \quad (12.17)$$

Необхідно задати геодезичну висоту  $H_0^G$  вихідного пункту. Представимо її у вигляді суми нормальної висоти  $H_0^\gamma$ , за яку часто беруть виміряну висоту, та висоти квазігеоїда  $\zeta_0$ . Першу з величин знаходять шляхом передачі висоти від наявних у районі робіт реперів нівелювання або від умовного місцевого нуля. Висоту квазігеоїда  $\zeta_0$  доцільно взяти таку, що дорівнює нулю.

Для решти пунктів мережі астрономо-геодезичні аномалії висот у місцевій системі координат визначають за формулою астрономічного нівелювання:

$$\Delta\zeta = -(\xi^{az} \cos A + \eta^{az} \sin A)s - \frac{g - \gamma}{\gamma} \Delta h, \quad (12.18)$$

де  $\Delta\zeta$  – перевищення квазігеоїда вздовж лінії  $s$ ;  $A$  – азимут лінії;  $\Delta h$  – перевищення між пунктами.

У горизонтальні напрямки вводять поправку  $\delta_1$  за відхилення прямовисної лінії і поправку  $\delta_2$  за висоту пункту, що спостерігається, у якій множник  $\cos^2 B_2$  можна вважати сталим для всієї мережі. Поправку  $\delta_3$ , пропорційну квадрату відстані, для довжин ліній порядку декількох кілометрів не вводять внаслідок її малості.

Поправку у виміряну зенітну відстань  $z_{\text{вим}}$  обчислюють за формулою:

$$Z^{az} = z_{\text{вим}} + \vartheta^{az}, \quad (12.20)$$

де  $Z^{az}$  – редукована зенітна відстань;  $\vartheta^{az}$  – складова відхилення прямовисної лінії в азимуті виміряної лінії.

Практично в усіх випадках вплив відхилень прямовисних ліній і висот квазігеоїда викликає поправки у виміряні величини, які перевищують похибки вимірювань. Тому ці поправки необхідно враховувати для правильного опрацювання результатів вимірювань.

### **Запитання для самоперевірки**

1. Що таке редуційна задача?
2. Які види поправок використовують при вирішенні редуційної задачі?
2. Який порядок редукування лінійних вимірів?
3. Який порядок редукування виміряних горизонтальних напрямків?
4. В чому полягають особливості редукування місцевих геодезичних мереж?

## **Лекція 12. ВИВЧЕННЯ РУХІВ ЗЕМНОЇ КОРИ ГЕОДЕЗИЧНИМИ МЕТОДАМИ**

Прогрес геодезичних засобів, як класичних так і новітніх, особливо космічних, за останні роки привів до швидкого розвитку досліджень щодо вивчення змін у часі положення пунктів земної поверхні та елементів гравітаційного поля.

Найкраще вивчені класичними геодезичними методами локальні, насамперед вертикальні рухи земної кори. Відповідні дослідження ведуться у тектонічно активних районах, де вони пов'язані головним чином із проблемою прогнозу сейсмічної небезпеки, а також у районах помітних техногенних рухів. Для вказаних цілей створюють геодинамічні полігони, на яких із необхідною частотою повторюють комплекс геодезичних і геофізичних робіт, які дозволяють одержати зміни положень за всіма трьома координатами та дослідити напруження, що виникають у земній корі.

Розміщення пунктів планового та висотного геодезичних побудов на геодинамічних полігонах повинно забезпечити рішення різних геодезичних і геофізичних задач. Метою створення техногенних геодинамічних полігонів є проведення комплексу спостережень для встановлення та кількісної оцінки вертикальних і горизонтальних деформацій земної поверхні, дослідження небезпечних природних (ендогенних, екзогенних) і природно-техногенних геодинамічних процесів у геологічному середовищі, та запобігання виникненню надзвичайних ситуацій деформаційних процесів на будинках та інженерних спорудах населених пунктів і промислових об'єктах, розташованих на території з активними та пасивними, але потенційно небезпечними, геодинамічними процесами.

Геодезичні побудови підрозділяються: на локальні, коли побудова виконується в місцях тектонічних розломів; площові, коли геодезичні побудови виконуються в районах епіцентрів руйнівних землетрусів, та регіональні, коли побудови виконуються в крупних геологічних структурах.

Локальні та площові планові мережі створюються у вигляді кутових, лінійно-кутових, лінійних та GPS-побудов. Метод створення планових мереж визначається середньою відстанню між пунктами мережі. При середній довжині сторони від 1,5 км будуються кутові мережі; при середній довжині сторони від 1,5 км до 10 км – лінійно-кутові; при

середній довжині понад 10 км – лінійні мережі. GPS-побудови можуть бути розвинуті для різних довжин сторін.

Регіональні побудови розвиваються за спеціально розробленим проектом, переважно методом трилатерації з використанням наземних і літакових віддалемірів, а також методами GPS-побудов.

Висотні мережі локальних та площових побудов створюють залежно від наявності на об'єкті зручних для нівелювання трас у вигляді окремих нівелірних ліній I та II класів або у вигляді полігонів із периметрами до 40 км.

У разі регіональних побудов лінії I класу прокладають по всіх найзручніших трасах так, щоб на місцевості утворились полігони з периметром 400 – 1000 км, а лінії нівелювання II класу утворювали полігони периметром 300 – 600 км.

У разі локальних побудов пункти планових і висотних мереж можуть суміщатися. Висоти пунктів визначаються методами геометричного або тригонометричного нівелювання.

Висоти пунктів планових мереж площевої та регіональних побудов визначаються тригонометричним нівелюванням із пунктів висотних мереж локальної та площевої побудов або за допомогою спеціально прокладених нівелірних ліній більш низького класу.

Геодезичні побудови, що розвиваються на геодинамічних полігонах, з'єднуються з державною геодезичною мережею та мережею високоточного нівелювання лише з метою визначення положення пунктів у єдиній системі координат, тому незалежно від кількості суміщених пунктів їх слід розглядати як вільні.

Пункти планових та висотних мереж геодинамічних полігонів закріплюються на місцевості геодезичними знаками (центрами) тих типів, які передбачені чинними інструкціями в системі Державної геодезичної служби України для даного району та класу мережі. За наявності на полігоні або поблизу нього непрацюючих глибинних свердловин включення їх до нівелірної мережі обов'язково. Глибинні свердловини залучають і до планової мережі, якщо це не викликає значних додаткових витрат.

У первинний період створення геодинамічного полігону, протягом 3 – 5 років, виконують три цикли вимірювань всіх елементів локальних і площових геодезичних побудов (перший цикл вимірювань виконується не раніше, ніж через 1 рік після закладання центрів); періодичність та обсяги наступних вимірювань визначаються на основі даних про характер і



величину деформацій земної поверхні, одержаних за результатами повторних вимірювань у перших трьох циклах.

Технічний проект геодезичних робіт на геодинамічному полігоні складається на основі геофізичних, геодезичних і геоморфологічних вишукувань на даному полігоні.

Опрацювання всієї сукупності вимірних елементів з метою одержання остаточних даних має бути виконано в умовній системі планових координат і висот. Для цього вибирають умовну поверхню відносності, що забезпечує найпростіше редукування на неї вимірних елементів. Як вихідні обирають найбільш стабільні пункти.

При розв'язанні вищеозначених задач виникають проблеми вивчення геодинамічних явищ геодезичними методами. Можна сформулювати такі чотири групи проблем:

- 1) розвиток засобів для вимірювань дуже високої точності;
- 2) вивчення залежностей спостережуваних варіацій координат і елементів гравітаційного поля Землі від різних геодинамічних явищ;
- 3) розробка вимог до частоти та тривалості спостережень і до розміщення точок спостереження для визначення повного просторово-часового спектру геодинамічних явищ;
- 4) створення математичного апарату геодинамічних досліджень, включаючи вибір системи відліку для їх визначення.

Ці проблеми можуть бути вирішені шляхом розробки та вдосконалення наземних геодезичних методів, які забезпечать необхідну точність при локальних (області протяжністю менше  $10^2$  км) і в деякому степені регіональних (області протяжністю  $10^2 - 10^3$  км) дослідженнях. Однак, у дослідженнях планетарного масштабу (глобальні щодо всієї Землі загалом та крупномасштабні щодо областей протяжністю  $10^3 - 10^4$  км) суттєвий ефект буде досягнуто лише із залученням нових видів вимірювань – удосконалених абсолютних вимірювань сили ваги, високоточних спостережень спеціалізованих супутників або вимірювань з цих супутників, а також довгобазисної радіоінтерферометрії.

Необхідність застосування нових видів вимірювань при геодинамічних дослідженнях пов'язана не лише з підвищеними вимогами до точності, але й з тим, що результати вимірювань спотворюються складною сукупністю різних геодинамічних факторів, вплив яких іноді взагалі неможливо розділити, маючи вимірювання лише одного виду.

Зазначимо декілька прикладів, які належать до класичних наземних методів:

– зміни приростів висот, одержаних із повторного геометричного нівелювання, є результатом не лише радіальних зсувів точок земної поверхні, але й змін нахилів рівневих поверхонь;

– варіації астрономічних координат відображають не лише горизонтальні геометричні зсуви, але й зміни напрямків прямовисних ліній, тобто зміни нахилів рівневих поверхонь;

– варіації сили ваги відображають не лише зміни гравітаційного поля, але й переміщення станції вимірювання по вертикалі, а також полярний рух через варіації відцентрової сили.

Використання супутникових та інших космічних даних виключає вплив місцевих коливань положення прямовисних ліній. У деяких випадках космічні дані дозволяють позбавитися також від впливу зміни положення станції спостереження.

Із зазначеного випливає, що необхідно використовувати нові засоби спостережень, але потрібно зберегти й класичні методи, оскільки деякі геодинамічні явища, наприклад, зміни положення прямовисної лінії, можуть бути визначені лише за допомогою наземних методів.

Просторово-часовий спектр більшості геодинамічних явищ вельми широкий. Для ретельного їх дослідження необхідна достатньо широка мережа станцій, яка охоплює всю земну кулю. З іншого боку, потрібні довготривалі однорідні ряди вимірювань, щоб добре вивчити вікову та довгоперіодичну частину геодинамічних явищ, і в той же час достатньо щільні, щоб вивчити такі явища, як тижневі та добові варіації. З точки зору розподілу впливу різних геодинамічних факторів бажано, щоб на геодинамічних обсерваторіях був широкий комплекс різних засобів спостережень як класичних, та і новітніх космічних.

Опрацювання геодинамічних досліджень є складною задачею, однак при належному розв'язанні інших проблем, що виникають, завжди може бути розв'язана. Звернемо увагу на вибір систем відліку при геодинамічних дослідженнях.

Визнано, що для геодинамічних досліджень необхідні дві системи координат:

– інерціальна, яка реалізується з точністю в радіанному вимірі порядку  $10^{-9}$  шляхом визначення напрямків на віддалені позагалактичні джерела випромінювання;

– земна, що визначається з точністю порядку сантиметра та пов'язана з деякою ідеальною Нормальною Землею.

Перша із систем у перспективі найкраще буде реалізована методом довгобазисної радіоінтерферометрії. У зазначеній системі буде визначено рух Землі в космічному просторі, в тому числі й її обертання навколо своєї осі. Така система необхідна для геодезичного та геодинамічного використання спостережень природних і штучних небесних тіл.

При вивченні геодинамічних процесів з врахуванням впливу короткоперіодичних процесів можна умовно вважати незмінними положення системи точок на одній з літосферних плит. Однак більшість дослідників віддають перевагу геоцентричній системі, реалізованій за великою кількістю точок на різних плитах. Ця система стійкіша до змін у кількості та розподілі станцій спостереження, обсягу та точності спостережень на них і до «власних» їх рухів (приблизно так реалізується зараз початок відліку довгот).

### **Запитання для самоперевірки**

1. Що таке рухи земної кори та які види таких рухів?
2. Що таке геодинамічний полігон?
3. Які методи побудови мереж ви знаєте?
4. Від чого залежить метод побудови мереж?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баран П.І., Соловійов Ф.Ф., Чорнокінь В.Я. Тригонометричне нівелювання в інженерно-геодезичних роботах. – Київ: Укргеодезкартографія, 1996. – 130 с.
2. Барановський В.Д., Карпінський Ю.О., Кучер О.В., Лященко А.А. Топографо-геодезичне та картографічне забезпечення ведення державного земельного кадастру. Системи координат і картографічні проекції. – Київ : Державна служба геодезії, картографії та кадастру, НДІ геодезії і картографії, 2009. – 95 с.
3. Двуліт П.Д. Фізична геодезія. – Київ : ВПЦ «Експрес», 2008. – 256 с.
4. Двуліт П.Д. Гравіметрія. – Львів: Львівське астрономо-геодезичне товариство, 1998. – 196 с.
5. Савчук С.Г. Основи формування геодезичної референцної системи України: дисертація на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук. – Львів, 2005. – 260 с.
6. Савчук С.Г. Вища геодезія. – Житомир: Житомирський державний технологічний університет, 2006. – 315 с.
7. Староверов В.С. Вища геодезія. – К.: Київський державний університет будівництва і архітектури, 1996. – 224 с.
8. Староверов В.С., Ковальов М.В. Вища геодезія. Системи координат. Системи висот. – Київ : ЦП «Компринт», 2015. – 193 с.

Навчальне видання

**Старовєров Володимир Сергійович,**  
**Дем'яненко Роман Анатолійович**

# ВИЩА ГЕОДЕЗІЯ

## Конспект лекцій

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Ум. друк. арк. 8,14. Обл.-вид. арк. 8,75  
Електронний документ. Вид № 56/V-25.

Виконавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури  
Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03680

Свідectво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р