МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Змістовий модуль 1
Лінійна алгебра
Аналітична геометрія

Методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 «Будівництво і цивільна інженерія»

Київ 2024

УДК [511+512+514] (076)
В55

Укладачі: К. В. Божонок, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Н. В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент: О. В. Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск: Н. В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 10 від 01 березня 2024 року.

В авторській редакції.

Вища математика. Змістовий модуль 1. Лінійна алгебра.
В55 Аналітична геометрія : методичні вказівки та завдання до виконання розрахунково-графічної / уклад. К. В. Божонок, Н. В. Бондаренко. – Київ : КНУБА, 2024. – 60 с.

Містить 32 варіанти індивідуальних завдань і приклад розв'язання типового варіанту з детальними поясненнями та наведенням необхідних формул і стислих теоретичних відомостей.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 192 «Будівництво і цивільна інженерія».

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методична розробка є першою частиною комплекту збірників індивідуальних розрахунково-графічних робіт з вищої математики за темами «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія».

Мета навчального видання – надати студентам фундаментальні знання з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, які є основою для подальшого вивчення інших розділів вищої математики та її застосувань у технічних та спеціальних дисциплінах; формування математичної інтуїції та логічного мислення у вивченні та застосуванні математичних методів для вирішення професійних задач.

Завдання навчального видання – розвинути практичні навички розв'язання задач з використанням понять та методів лінійної алгебри (системи лінійних рівнянь, алгебра матриць, визначники, власні вектори тощо) та аналітичної геометрії (прямі на площині та в просторі, площини, криві другого порядку тощо); формування уявлення про геометричні об'єкти на площині та в просторі, а також навчання методам їхнього аналітичного опису.

Індивідуальна розрахункова робота охоплює такі розділи з курсу вищої математики: комплексні числа, елементи лінійної та векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії на площині та в просторі.

ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

1. Завдання до розділу «Лінійна алгебра»

Завдання 1. Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

1.1. $\dfrac{\left(1-2i^5\right)\cdot\left(2+i^{10}\right)}{3-2i}$;

1.2. $\dfrac{2+i^5}{1+i^{19}}-\dfrac{1-i^3}{1+i^3}$;

1.3. $\dfrac{\left(3+5i^7\right)\cdot(2+3i)}{1+2i}+\dfrac{1-2i}{5}$;

1.4. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2-\dfrac{3+4i^8}{3+4i^7}$;

1.5. $\dfrac{\left(1+2i^3\right)\cdot(2-3i)}{3+4i^9}-\dfrac{2i}{3}$;

1.6. $\dfrac{4+i^{12}}{4+i^5}-\dfrac{4-i}{1-4i^3}$;

1.7. $\dfrac{1+i^{40}}{2-i}+\dfrac{2-i^{20}}{2+i}$;

1.8. $\dfrac{2+i^3}{3-2i^5}+4\cdot\dfrac{3+2i}{2+i}$;

1.9. $\dfrac{2+3i^3}{3-4i^5}+\dfrac{3-4i}{2+3i}$;

1.10. $\dfrac{1+i^5}{2-3i}-\dfrac{i\cdot\left(2+3i^3\right)}{1-i}$;

1.11. $\dfrac{\left(3-2i^7\right)\cdot(3+2i)}{4-3i}-\dfrac{i^{10}}{5}$;

1.12. $\dfrac{1-2i^7}{2+i}+\dfrac{i^{13}\cdot(2-i)}{1+2i}$;

1.13. $\dfrac{4-i^{11}}{1+3i}+\dfrac{1+3i^7}{4-i}$;

1.14. $\dfrac{3-i}{2+3i}-\dfrac{i^{15}\cdot(-3+2i)}{2-i^{40}}$;

1.15. $\dfrac{2-i^{16}}{3-2i}+\dfrac{3-2i^7}{2+i}$;

1.16. $\dfrac{2-i^5}{1-i}-\dfrac{1-i^{19}}{1+i}$;

1.17. $\dfrac{5+i}{1-2i}-\dfrac{i^{31}\cdot(-1-i)}{5+i^6}$;

1.18. $\dfrac{4i^{20}}{3+4i^7}-\dfrac{5i^{21}}{3+4i^5}$;

1.19. $\dfrac{-2+i}{1-2i^3}-\dfrac{i^{15}}{-4+3i}$;

1.20. $\dfrac{8-i^3}{2+3i}-\dfrac{3\cdot\left(-1+i^{11}\right)}{1+i}$;

1.21. $\dfrac{3-5i^7}{1-2i}+\dfrac{i^{40}(-1-i)}{7-i^4}$;

1.22. $\dfrac{6i^{16}}{-2-3i}+\dfrac{2-3i}{3i^{14}}$;

1.23. $\dfrac{-2-3i^3}{3+4i}-\dfrac{3-4i^5}{-2+3i}$;

1.24. $\dfrac{2+5i^9}{5-2i}+\dfrac{5+2i}{2-5i^5}$;

1.25. $\dfrac{2-3i^8}{4-i}+\dfrac{4-i^5}{-2-3i}$;

1.26. $\dfrac{-2+5i^3}{5+2i}-\dfrac{5+2i^{15}}{2+5i}$;

1.27. $\dfrac{-4+i^9}{3-i}+\dfrac{-1+3i^7}{4-i}$;

1.28. $\dfrac{7i^{28}}{-2-i}-\dfrac{2+i}{2+i^7}$;

1.29. $\dfrac{i^{12}\cdot(1+i)}{2-i}+\dfrac{1-2i}{1+2i}$;

1.30. $\dfrac{i^7\cdot(1+i)}{2-i}-\dfrac{2-i^{10}}{3-2i}$;

1.31. $\dfrac{2-2i}{i^{17}}-\dfrac{i^{23}}{2+2i}$;

1.32. $\dfrac{i^{10}(1-i)}{1-4i}-\dfrac{1-4i^{11}}{i^{23}}$.

Завдання 2. Виконати дії над комплексними числами в тригонометричній формі.

2.1. $\dfrac{(1-i)^{12}\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)^5}{(1+i)^9}$;

2.2. $\dfrac{(-1+i)^9\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{\sqrt{2}\,(1+i)^{10}}$;

2.3. $\dfrac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{10}}{(1-i)^8\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}$;

2.4. $\dfrac{(-1-i)^{20}\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{17}}$;

2.5. $\dfrac{(1-i)^{12}\cdot(1+3i)^5}{32\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^5}$;

2.6. $\dfrac{(1+i)^{15}\cdot(-1+3i)^9}{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)^{16}}$;

2.7. $\dfrac{(1+i)^{20}\cdot\left(-1+\sqrt{3}i\right)^7}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{14}}$;

2.8. $\dfrac{(-1+i)^8\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}{8\left(-1-\sqrt{3}i\right)^4}$;

2.9. $\dfrac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^7}{(-1-i)^4\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)^7}$;

2.10. $\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^8}{(1+i)^4\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}$;

2.11. $\dfrac{(-1+i)^8\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{11}}$;

2.12. $\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6\cdot(1-i)^{11}}{(1+i)^9}$;

2.13. $\dfrac{2\left(-1-\sqrt{3}i\right)^5}{\left(-1+i\right)^4\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}$;

2.14. $\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^6\cdot\left(1+i\right)^{13}}{4\left(1-i\right)^{15}}$;

2.15. $\dfrac{4\left(\sqrt{3}+i\right)^7}{\left(1+i\right)^{12}\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)^4}$;

2.16. $\dfrac{4\left(\sqrt{3}+i\right)^7}{\left(2+i\right)^{12}\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)^4}$;

2.17. $\dfrac{\left(1+i\right)^{16}\cdot\left(-\sqrt{3}+i\right)^8}{8\left(1+\sqrt{3}i\right)^{10}}$;

2.18. $\dfrac{4\left(-1-i\right)^{11}}{\left(1+i\right)^3\cdot\left(-1-\sqrt{3}i\right)^6}$;

2.19. $\dfrac{\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{12}\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)^{10}}{16\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}$;

2.20. $\dfrac{\left(2i\right)^{10}\cdot\left(1-i\right)^7}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{12}\cdot\left(1+i\right)^3}$;

2.21. $\dfrac{4\left(\sqrt{3}+i\right)^4}{\left(1-i\right)^8\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)^4}$;

2.22. $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{11}\cdot\left(1-i\right)^{11}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^9\cdot\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4}$;

2.23. $\dfrac{4\left(\sqrt{3}-i\right)^5}{\left(1+i\right)^8\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^4}$;

2.24. $\dfrac{\left(2i\right)^{13}\cdot\left(1+i\right)^7}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{12}\cdot\left(-1+i\right)^6}$;

2.25. $\dfrac{\left(-1-i\right)^4\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^7}{\left(\sqrt{3}-i\right)^7}$;

2.26. $\dfrac{16\left(-1+\sqrt{3}i\right)^5}{\left(1-i\right)^4\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}$;

2.27. $\dfrac{\left(2i\right)^3\cdot\left(-\sqrt{3}-i\right)^5}{\left(-1+i\right)^4\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^7}$;

2.28. $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^7}{\left(-1-i\right)^8\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)^5}$;

2.29. $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{17}}{\left(1+i\right)^{20}\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^5}$;

2.30. $\dfrac{\left(1+i\right)^3\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^9}{\left(1-i\right)^{21}}$;

2.31. $\dfrac{\left(2i\right)^7\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)^{16}}{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{23}}$;

2.32. $\dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^6}{\left(-1+i\right)^5\cdot\left(-1-i\right)^3}$.

Завдання 3. Розв'язати рівняння.

3.1. $z^3 = -3\sqrt{3} - 3i$;

3.2. $z^4 + 7 - 7i = 0$;

3.3. $z^5 = 3\sqrt{3} - 3i$;

3.4. $\dfrac{z^4}{6} + 1 + i = 0$;

3.5. $z^3 - 3\sqrt{3} - 3i = 0$;

3.6. $z^5 = 2 - 2i$;

3.7. $z^4 - 3 + \sqrt{3}i = 0$;

3.8. $z^5 = 8 - 8i$;

3.9. $z^3 + 3\sqrt{3} - 3i = 0$;

3.10. $\dfrac{z^4}{8} + 1 + i = 0$;

3.11. $z^3 = 4 + 4\sqrt{3}i$;

3.12. $z^3 = -7\sqrt{3} + 7i$;

3.13. $z^3 - 4 + 4\sqrt{3}i = 0$;

3.14. $z^5 = 1 - \sqrt{3}i$;

3.15. $z^3 + 4 - 4\sqrt{3}i = 0$;

3.16. $\dfrac{z^4}{8} = -1 + \sqrt{3}i$;

3.17. $z^3 = -4 - 4\sqrt{3}i$;

3.18. $z^5 - 3 - 3i = 0$;

3.19. $\dfrac{z^3}{5} = 1 + \sqrt{3}i$;

3.20. $\sqrt{2}z^3 = 27 - 27i$;

3.21. $z^3 - 5 + 5\sqrt{3}i = 0$;

3.22. $\sqrt{2}z^4 = 8 + 8i$;

3.23. $z^3 = -5 + 5\sqrt{3}i$;

3.24. $\dfrac{z^5}{4} = 1 - i$;

3.25. $z^4 = -5 - 5\sqrt{3}i$;

3.26. $z^4 + 4 - 4i = 0$;

3.27. $\dfrac{z^3}{7} = \sqrt{3} + i$;

3.28. $z^5 = -4 - 4i$;

3.29. $z^3 - 7\sqrt{3} + 7i = 0$;

3.30. $z^4 = 4 + 4i$;

3.31. $z^3 = 6 - 6\sqrt{3}i$;

3.32. $z^3 - 6\sqrt{3} + 6i = 0$.

Завдання 4. Знайти значення параметра a, за якого визначник дорівнює нулю.

4.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ a & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

4.2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ a & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

4.3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & a & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

4.4. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & a & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

4.5. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

4.6. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & a & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

4.7. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ a & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

4.8. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ a & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

4.9. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 4 \end{vmatrix}$;

4.10. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & a & 4 \end{vmatrix}$;

4.11. $\begin{vmatrix} a & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$;

4.12. $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

4.13. $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

4.14. $\begin{vmatrix} -1 & a & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

4.15. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$;

4.16. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$;

4.17. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & a & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

4.18. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & a & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

4.19. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & a & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$;

4.20. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & a & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$;

4.21. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & a & 1 & -5 \end{vmatrix}$;

4.22. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & a & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

4.23. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ a & 1 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

4.24. $\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ a & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

4.25. $\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & a & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

4.26. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & a & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

4.27. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & a \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

4.28. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 & a \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

4.29. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & a \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$;

4.30. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & a \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$;

4.31. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & a \\ 4 & -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$; **4.32.** $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & a \\ 4 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Завдання 5. Розв’язати матричне рівняння.

5.1. $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

5.2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

5.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 10 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$;

5.4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

5.5. $X\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \end{pmatrix}$;

5.6. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

5.7. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

5.8. $X\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

5.9. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

5.10. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

5.11. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$

5.12. $X \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

5.13. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -3 & 8 \end{pmatrix};$

5.14. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$

5.15. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};$

5.16. $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$

5.17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$

5.18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix};$

5.19. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix};$

5.20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

5.21. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix};$

5.22. $X \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

5.23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix};$

5.24. $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix};$

5.25. $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

5.26. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix};$

5.27. $X \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

5.28. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$

5.29. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$

5.30. $X\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

5.31. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$;

5.32. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Завдання 6. Розв’язати систему лінійних рівнянь:
а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом.

6.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7; \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8; \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9; \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16; \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15; \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5; \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9; \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3; \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7; \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8; \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22; \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22; \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 8; \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12; \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2; \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19; \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10; \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6; \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -11; \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19; \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9; \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$

6.29. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \end{cases}$

6.30. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10; \end{cases}$

6.31. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$

6.32. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

Завдання 7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь.

7.1. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 16x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$

7.8. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0; \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.20. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

7.21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

7.23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.25. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 12x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

7.26. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

7.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

7.28. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

7.29. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

7.30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 12x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

7.31. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=0, \\ -2x_1+x_2+3x_3+x_4=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3-2x_4=0; \end{cases}$ **7.32.** $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4=0. \end{cases}$

Завдання 8. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

8.1. $\vec{a}=(3;-1;5), \vec{b}=(2;0;-1), \vec{c}=(-1;5;3)$, $\vec{d}=(-6;12;-5)$;

8.2. $\vec{a}=(1;5;1), \vec{b}=(2;-2;5), \vec{c}=(-3;-1;0)$, $\vec{d}=(0;2;6)$;

8.3. $\vec{a}=(-1;3;4), \vec{b}=(4;1;-2), \vec{c}=(2;-3;1)$, $\vec{d}=(11;-1;2)$;

8.4. $\vec{a}=(5;-2;1), \vec{b}=(-3;2;-3), \vec{c}=(0;1;4)$, $\vec{d}=(8;-3;8)$;

8.5. $\vec{a}=(2;1;3), \vec{b}=(-1;-3;1), \vec{c}=(1;-5;-7)$, $\vec{d}=(8;6;-4)$;

8.6. $\vec{a}=(3;1;2), \vec{b}=(2;1;2), \vec{c}=(-1;2;5)$, $\vec{d}=(1;2;3)$;

8.7. $\vec{a}=(1;1;3), \vec{b}=(-3;2;-1), \vec{c}=(-3;4;2)$, $\vec{d}=(-4;6;4)$;

8.8. $\vec{a}=(1;2;4), \vec{b}=(-4;-3;1), \vec{c}=(2;-1;2)$, $\vec{d}=(-2;-4;3)$;

8.9. $\vec{a}=(2;2;3), \vec{b}=(3;4;-1), \vec{c}=(-1;1;1)$, $\vec{d}=(7;8;5)$;

8.10. $\vec{a}=(1;3;3), \vec{b}=(-3;1;-2), \vec{c}=(-3;3;-1)$, $\vec{d}=(-6;4;-3)$;

8.11. $\vec{a}=(1;1;3), \vec{b}=(1;2;1), \vec{c}=(-4;1;1)$, $\vec{d}=(-2;11;14)$;

8.12. $\vec{a}=(2;1;8), \vec{b}=(2;-3;1), \vec{c}=(1;-1;2)$, $\vec{d}=(2;-6;-3)$;

8.13. $\vec{a}=(1;2;1), \vec{b}=(2;2;-3), \vec{c}=(-1;1;4)$, $\vec{d}=(-3;-2;2)$;

8.14. $\vec{a}=(1;2;1), \vec{b}=(2;-1;1), \vec{c}=(-1;1;-3)$, $\vec{d}=(4;5;-7)$;

8.15. $\vec{a}=(2;2;3), \vec{b}=(4;-3;-1), \vec{c}=(-6;1;-1)$, $\vec{d}=(0;0;2)$;

8.16. $\vec{a}=(1;3;2), \vec{b}=(-2;-1;3), \vec{c}=(3;2;-1)$, $\vec{d}=(-1;9;12)$;

8.17. $\vec{a}=(1;2;1), \vec{b}=(-4;1;-2), \vec{c}=(2;-3;1)$, $\vec{d}=(5;-6;2)$;

8.18. $\vec{a}=(2;1;3), \vec{b}=(2;-3;1), \vec{c}=(1;2;1)$, $\vec{d}=(-1;-1;2)$;

8.19. $\vec{a}=(1;2;3), \vec{b}=(1;-3;-1), \vec{c}=(-4;2;-1)$, $\vec{d}=(1;2;6)$;

8.20. $\vec{a}=(1;-2;1),\vec{b}=(0;3;2),\vec{c}=(1;1;2),\ \vec{d}=(3;-6;2)$;

8.21. $\vec{a}=(1;-2;2),\vec{b}=(2;1;-1),\vec{c}=(3;-1;3),\ \vec{d}=(7;1;3)$;

8.22. $\vec{a}=(2;-5;1),\vec{b}=(-1;1;2),\vec{c}=(3;-1;-2),\ \vec{d}=(6;-10;2)$;

8.23. $\vec{a}=(2;1;-3),\vec{b}=(1;-2;-3),\vec{c}=(-2;3;1),\ \vec{d}=(11;-5;-14)$;

8.24. $\vec{a}=(3;-1;1),\vec{b}=(5;3;1),\vec{c}=(0;-2;1),\ \vec{d}=(-4;2;0)$;

8.25. $\vec{a}=(1;2;-2),\vec{b}=(-2;1;-1),\vec{c}=(1;-3;-3),\ \vec{d}=(2;4;2)$;

8.26. $\vec{a}=(-1;2;1),\vec{b}=(1;3;1),\vec{c}=(3;-2;3),\ \vec{d}=(0;-1;4)$;

8.27. $\vec{a}=(3;-1;2),\vec{b}=(-2;2;-1),\vec{c}=(1;4;1),\ \vec{d}=(5;-13;2)$;

8.28. $\vec{a}=(1;1;2),\vec{b}=(2;-2;-1),\vec{c}=(2;-3;-2),\ \vec{d}=(1;2;4)$;

8.29. $\vec{a}=(3;-1;0),\vec{b}=(2;3;1),\vec{c}=(-1;4;3),\ \vec{d}=(2;3;7)$;

8.30. $\vec{a}=(2;-1;4),\vec{b}=(-1;3;2),\vec{c}=(1;-2;-1),\ \vec{d}=(2;-3;2)$;

8.31. $\vec{a}=(1;2;1),\vec{b}=(2;-1;3),\vec{c}=(0;3;-1),\ \vec{d}=(-2;12;-6)$;

8.32. $\vec{a}=(5;4;1),\vec{b}=(-3;5;2),\vec{c}=(2;-1;3),\ \vec{d}=(7;23;4)$.

Завдання 9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею:

9.1. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

9.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

9.3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

9.4. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

9.5. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9.6. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

9.7. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

9.8. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

9.9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

9.10. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

9.11. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

9.12. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9.13. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

9.14. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

9.15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

9.16. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

9.17. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

9.18. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

9.19. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

9.20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 6 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$;

9.21. $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$;

9.22. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

9.23. $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

9.24. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

9.25. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

9.26. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$;

9.27. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$;

9.28. $\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

9.29. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

9.30. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

9.31. $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

9.32. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Завдання до розділу «Аналітична геометрія»

Завдання 10. Визначити, за яких значень m, n прямі l_1 і l_2 а) паралельні; б) перпендикулярні; в) співпадають; г) знайти відстань між паралельними прямими.

10.1. $l_1: mx+6y+n=0;\quad l_2: 3x+my-2=0$;

10.2. $l_1: mx+7y+n=0;\quad l_2: 2x+my-5=0$;

10.3. $l_1: (m+1)x+5y+2n=0;\quad l_2: 3x+my-4=0$;

10.4. $l_1: (m-2)x+3y+n+2=0;\quad l_2: x-my-2=0$;

10.5. $l_1: (m+4)x+2y+n-1=0;\quad l_2: 2x+my-6=0$;

10.6. $l_1: (m-4)x-y+n-2=0;\quad l_2: 3x+my-5=0$;

10.7. $l_1: (m+2)x+4y+n-3=0;\quad l_2: 3x-my+4=0$;

10.8. $l_1: (m+5)x+4y+n+1=0;\quad l_2: x+2my-3=0$;

10.9. $l_1: mx+3y+n-3=0;\quad l_2: 3x+(m+1)y-n=0$;

10.10. $l_1: (m-2)x+5y+n-4=0;\quad l_2: x-(m+1)y-6n=0$;

10.11. $l_1: (m-3)x+y+n-4=0;\quad l_2: x-(m+1)y-6n=0$;

10.12. $l_1: (m+3)x+2y+n-5=0;\quad l_2: 2x-(m+2)y-4n=0$;

10.13. $l_1: (m-1)x+y+n+2=0;\quad l_2: 3x-(m-1)y-2n=0$;

10.14. $l_1: (m-2)x+3y+n-3=0;\quad l_2: x+(m+1)y+2n=0$;

10.15. $l_1: (m+3)x+2y+2n-1=0;\quad l_2: x-my-6+n=0$;

10.16. $l_1: (m-1)x+4y+3n-4=0;\quad l_2: x-(m+2)y-n=0$;

10.17. $l_1: (m-3)x+y+n-4=0;\quad l_2: x-(m+1)y-6n=0$;

10.18. $l_1: (m-5)x+2y+2n-3=0;\quad l_2: x-(m+2)y-n-1=0$;

10.19. $l_1: (m+2)x+y-n-4=0;\quad l_2: x+(m+1)y+2n=0$;

10.20. $l_1: (m+1)x-y+n-3=0;\quad l_2: x-(m-1)y-3n=0$;

10.21. $l_1: (m-6)x-y+n-2=0;\quad l_2: x+(m+2)y-n-1=0$;

10.22. $l_1: mx+2y+3n-2=0;\quad l_2: x-(m+4)y-2n=0$;

10.23. $l_1: mx-y+2n-5=0;\quad l_2: x+(m+2)y+n=0$;

10.24. $l_1:(m-1)x-y+2n-1=0;\quad l_2:2x-my-n+1=0$;

10.25. $l_1:(2m-1)x+y-n-3=0;\quad l_2:x-(m+1)y-n=0$;

10.26. $l_1:mx-y+3n-1=0;\quad l_2:x-(m-1)y-n-1=0$;

10.27. $l_1:(m-3)x-y+2n-4=0;\quad l_2:x+my-n+1=0$;

10.28. $l_1:mx+2y+n-2=0;\quad l_2:x+(m+2)y+2n-1=0$;

10.29. $l_1:(m-1)x+2y+n=0;\quad l_2:x-(m-1)y-n-2=0$;

10.30. $l_1:mx+3y+2n-1=0;\quad l_2:x+(m+3)y+n=0$;

10.31. $l_1:(m+3)x+2y+n-5=0;\quad l_2:2x-(m+2)y-4n=0$;

10.32. $l_1:(m+4)x+2y+n-1=0;\quad l_2:2x+my-6=0$.

Завдання 11. Нехай точки A, B, C – вершини трикутника ABC. Знайти:

а) загальне рівняння і довжину сторони AB;

б) канонічне рівняння і довжину висоти CH;

в) параметричні рівняння медіани AM;

г) точку перетину висоти CH та медіани AM;

д) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно до сторони AB;

е) кут A;

ж) площу трикутника ABC.

11.1. $A(-2;4), B(3;1), C(10;7)$;

11.2. $A(-3;-2), B(14;4), C(6;8)$;

11.3. $A(1;7), B(-3;-1), C(11;-3)$;

11.4. $A(1;0), B(-1;4), C(9;5)$;

11.5. $A(1;-2), B(7;1), C(3;7)$;

11.6. $A(-2;-3), B(1;6), C(6;1)$;

11.7. $A(-4;2), B(-6;6), C(6;2)$;

11.8. $A(4;-3), B(7;3), C(1;10)$;

11.9. $A(4;-4), B(8;2), C(3;8)$;

11.10. $A(-3;-3), B(5;-7), C(7;7)$;

11.11. $A(1;-6), B(3;4), C(-3;3)$;

11.12. $A(-4;2), B(8;-6), C(2;6)$;

11.13. $A(-5;2), B(0;-4), C(5;7)$;

11.14. $A(4;-4), B(6;2), C(-1;8)$;

11.15. $A(-3;8), B(-6;2), C(0;-5)$;

11.16. $A(6;-9), B(10;-1), C(-4;1)$;

11.17. $A(4;1), B(-3;-1), C(7;-3)$;

11.18. $A(-4;2), B(6;-4), C(4;10)$;

11.19. $A(3;-1), B(11;3), C(-6;2)$;

11.20. $A(-7;-2), B(-7;4), C(5;-5)$;

11.21. $A(-1;-4), B(9;6), C(-5;4)$;

11.22. $A(10;-2), B(4;-5), C(-3;1)$;

11.23. $A(-3;-1),\ B(-4;-5),\ C(8;1)$; **11.24.** $A(-2;-6),\ B(-3;5),\ C(4;0)$; **11.25.** $A(-7;-2),\ B(3;-8),\ C(-4;6)$; **11.26.** $A(0;2),\ B(-7;-4),\ C(3;2)$; **11.27.** $A(7;0),\ B(1;4),\ C(-8;-4)$;

11.28. $A(1;-3),\ B(0;7),\ C(-2;4)$; **11.29.** $A(-5;1),\ B(8;-2),\ C(1;4)$; **11.30.** $A(2;5),\ B(-3;1),\ C(1;3)$; **11.31.** $A(0;1),\ B(5;2),\ C(-1;0)$; **11.32.** $A(0;6),\ B(2;-1),\ C(-2;3)$.

Завдання 12. Дано координати вершин тетраедра $ABCD$. Знайти:

а) довжину ребра AB;

б) рівняння прямої AB;

в) рівняння площини ABC;

г) кут нахилу ребра AD до площини ABC;

д) площу грані ABC;

е) об'єм тетраедра $ABCD$;

ж) рівняння висоти DE, опущеної з вершини D на грань ABC;

з) довжину висоти DE;

и) проєкцію E вершини D на площину ABC;

к) точку D', симетричну точці D відносно грані ABC;

л) площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC.

12.1. $A(2;4;3),\ B(1;1;5),\ C(4;9;3),\ D(3;6;7)$;

12.2. $A(9;5;5),\ B(-3;7;1),\ C(5;7;8),\ D(6;9;2)$;

12.3. $A(0;-2;-6),\ B(3;6;0),\ C(1;-6;-9),\ D(0;-1;1)$;

12.4. $A(-2;-6;-2),\ B(1;0;6),\ C(-1;-9;-6),\ D(-2;1;-1)$;

12.5. $A(-3;-2;-4),\ B(3;6;-1),\ C(-6;-6;-3),\ D(4;-1;-4)$;

12.6. $A(0;7;1),\ B(2;-1;5),\ C(1;6;3),\ D(3;-9;-8)$;

12.7. $A(5;5;4),\ B(1;-1;4),\ C(3;5;1),\ D(5;8;-1)$;

12.8. $A(6;1;1),\ B(4;6;6),\ C(4;2;0),\ D(1;2;6)$;

12.9. $A(-3;-3;-1),\ B(0;3;7),\ C(-2;-6;-5),\ D(-3;4;0)$;

12.10. $A(-2;-1;-3),\ B(4;7;0),\ C(-5;-5;-2),\ D(5;0;-3)$;

12.11. $A(-5;-3;-1),\ B(1;0;7),\ C(-8;-2;-5),\ D(2;-3;0)$;

12.12. $A(-2;0;-2),\ B(6;3;4),\ C(-6;1;-5),\ D(-1;0;5)$;

12.13. $A(0;-2;0),\ B(8;4;3),\ C(-4;-5;1),\ D(1;5;0)$;

12.14. $A(2;2;-2),\ B(5;10;4),\ C(3;-2;-5),\ D(2;3;5)$;

12.15. $A(6;-2;2),\ B(9;4;10),\ C(7;-5;-2),\ D(6;5;3)$;

12.16. $A(-2;-2;0),\ B(4;6;3),\ C(-5;-6;-1),\ D(5;-1;0)$;
12.17. $A(-2;0;2),\ B(4;3;10),\ C(-5;1;-2),\ D(5;0;3)$;
12.18. $A(0;-3;-1),\ B(8;3;1),\ C(-4;-6;0),\ D(1;4;-1)$;
12.19. $A(1;1;-3),\ B(4;9;3),\ C(2;-3;-6),\ D(1;2;4)$;
12.20. $A(-3;-2;-1),\ B(3;7;2),\ C(-6;-5;0),\ D(4;-1;-1)$;
12.21. $A(1;-3;1),\ B(4;3;9),\ C(2;-6;-3),\ D(1;4;2)$;
12.22. $A(-3;-1;1),\ B(3;2;9),\ C(-6;0;-3),\ D(4;-1;2)$;
12.23. $A(2;-4;-2),\ B(10;2;1),\ C(-2;-7;-1),\ D(3;3;-2)$;
12.24. $A(-2;2;-4),\ B(1;10;2),\ C(-1;-2;-7),\ D(-2;3;3)$;
12.25. $A(-1;0;-2),\ B(5;8;1),\ C(-4;-4;-1),\ D(6;1;-2)$;
12.26. $A(0;-2;-3),\ B(8;1;3),\ C(-4;-1;-6),\ D(1;-2;4)$;
12.27. $A(-2;-2;0),\ B(1;4;8),\ C(-1;-5;-4),\ D(-2;5;1)$;
12.28. $A(-4;-2;0),\ B(2;1;8),\ C(-7;-1;-4),\ D(3;-2;1)$;
12.29. $A(3;1;4),\ B(-1;6;1),\ C(-1;1;6),\ D(0;4;-1)$;
12.30. $A(3;-1;2),\ B(-1;0;1),\ C(1;7;3),\ D(8;5;8)$;
12.31. $A(3;5;4),\ B(5;8;3),\ C(1;2;-2),\ D(-1;0;2)$;
12.32. $A(0;4;5),\ B(3;-2;1),\ C(4;5;6),\ D(3;3;2)$.

Завдання 13. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Результати проілюструвати графічно.

13.1. $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 + 2\sqrt{3}x - 10y = 3$;

13.2. $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$;

13.3. $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x + 4y + \frac{1}{2} = 0$;

13.4. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y = 1$;

13.5. $x^2 - 8xy + y^2 - 20x + 20y + 1 = 0$;

13.6. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 28x + 12\sqrt{3}y + 12 = 0$;

13.7. $-x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 4y + \frac{1}{4} = 0$;

13.8. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 12$;

13.9. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x + 8y + \frac{1}{2} = 0$;

13.10. $2x^2+5xy+2y^2-6x-3y-8=0$;

13.11. $x^2-xy+y^2-2x-2y-2=0$;

13.12. $2x^2+4xy+2y^2+8x+6y+1=0$;

13.13. $7x^2-2xy+7y^2-48x-48y+144=0$;

13.14. $x^2-4xy-y^2-4x-2y+2=0$;

13.15. $x^2+2xy+y^2-8x-4y+1=0$;

13.16. $2x^2-2xy+2y^2-2x-2y+1=0$;

13.17. $x^2+2xy+y^2-\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+4=0$;

13.18. $5x^2+8xy+5y^2-8x-10y-4=0$;

13.19. $2x^2-4\sqrt{3}xy-2y^2+12\sqrt{3}x+12y-54=0$;

13.20. $x^2-4xy+y^2-2x+4y=1$;

13.21. $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;

13.22. $3x^2+2xy+3y^2-12x-4y+1=0$;

13.23. $3x^2-4xy+3y^2+4x+4y+1=0$;

13.24. $3x^2-2xy+3y^2-6x+2y+1=0$;

13.25. $9x^2-24xy+16y^2+20x+110y=50$;

13.26. $2x^2-2xy+2y^2+6x-8y-3=0$;

13.27. $-2x^2+2xy-2y^2-6x+6y+3=0$;

13.28. $x^2+4xy+4y^2-20x+10y=50$;

13.29. $-4x^2+2xy-4y^2+10x-10y+1=0$;

13.30. $3x^2-2xy+3y^2+4x-4y=12$;

13.31. $-x^2-4xy-y^2-4x-2y+2=0$;

13.32. $-3x^2+4xy-3y^2+6x-4y+2=0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Задачі до розділу «Лінійна алгебра»

Задача 1. Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

$$\frac{i^8\cdot\left(3-2i\right)^2}{1+2i}+\left(i-1\right)^3.$$

Розв’язання. Виконаємо перетворення

$$\frac{i^8\cdot\left(3-2i\right)^2}{1+2i}+\left(i-1\right)^3=\left\{i^8=\left(i^2\right)^4=\left(-1\right)^4=1\right\}=\frac{\left(3-2i\right)^2}{1+2i}+\left(i-1\right)^3=$$

$$=\frac{9-12i+4i^2}{1+2i}+i^3-3i^2+3i-1^3=\frac{5-12i}{1+2i}-i+3+3i-1=$$

$$=\frac{\left(5-12i\right)\left(1-2i\right)}{\left(1+2i\right)\left(1-2i\right)}+2i+2=\frac{5-10i-12i+24i^2}{1^2-\left(2i\right)^2}+2i+2=$$

$$=\frac{-19-22i}{5}+2i+2=\frac{-19-22i+10i+10}{5}=\frac{-9-12i}{5}=-\frac{9}{5}-\frac{12}{5}i.$$

Задача 2. Виконати дії над комплексними числами в тригонометричній формі

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6\cdot\left(-\sqrt{3}+i\right)^4}{\left(1+i\right)^8}.$$

Розв’язання. Запишемо кожне з комплексних чисел $z_1=1-i\sqrt{3}$, $z_2=-\sqrt{3}+i$, $z_3=1+i$ у *тригонометричній формі*

$$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right),$$

де $r=\sqrt{a^2+b^2}$ – *модуль* комплексного числа $z=a+bi$, $\varphi=\arg z$ – *головне значення аргументу* комплексного числа, $-\pi<\arg z\le\pi$. Головне значення аргументу можна визначити за правилом:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{якщо } a>0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\pi, & \text{якщо } a<0, b\ge 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}-\pi, & \text{якщо } a<0, b<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a=0, b>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a=0, b<0. \end{cases}$$

Для $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ дістаємо

$$r_1 = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Для $z_2 = -\sqrt{3} + i$ дістаємо

$$r_2 = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{-\sqrt{3}} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6},$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Для $z_3 = 1 + i$ дістаємо

$$r_3 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4},$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

За *формулою Муавра*

$$z^n = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

дістанемо

$$z_1^6 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^6 = 2^6\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{3}\right)\right) =$$

$$=2^6\left(\cos\left(-2\pi\right)+i\sin\left(-2\pi\right)\right)=2^6\left(\cos 0+i\sin 0\right),$$

$$z_2^4=\left(-\sqrt{3}+i\right)^4=2^4\left(\cos\frac{4\cdot 5\pi}{6}+i\sin\frac{4\cdot 5\pi}{6}\right)=$$

$$=2^4\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)=2^4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$z_3^8=\left(1+i\right)^8=\left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\frac{8\pi}{4}+i\sin\frac{8\pi}{4}\right)=2^4\left(\cos 0+i\sin 0\right).$$

За *формулами добутку та частки* для комплексних чисел $z_1=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)$, $z_2=r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$, заданих у тригонометричній формі

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right),$$

знайдемо

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6\cdot\left(-\sqrt{3}+i\right)^4}{\left(1+i\right)^8}=\frac{2^6\cdot 2^4\left(\cos\left(0-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(0-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}{2^4\left(\cos 0+i\sin 0\right)}=$$

$$=2^6\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2^6\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=-2^5-2^5\sqrt{3}i=-32-32\sqrt{3}i\ .$$

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$z^3-1+i\sqrt{3}=0.$$

Розв’язання. Оскільки $z^3=1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, то

за *формулою обчислення коренів n-го степеня з комплексного числа*

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad \text{де } k=0,1,\ldots,n-1,$$

дістаємо

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\pi/3+2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\pi/3+2\pi k}{3}\right), \quad \text{де } k = 0,1,2.$$

Отже, коренями рівняння є:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)\right).$$

Задача 4. Знайти значення параметра a, за якого визначник дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник *методом зниження порядку*, що базується на застосуванні теореми про розклад визначника за елементами деякого рядка (стовпця). При цьому, заздалегідь накопичуємо нулі в деякому рядку (стовпцю), використовуючи властивості визначника при застосуванні елементарних перетворень до рядків (стовпців) визначника.

Виконаємо, наприклад, перетворення з третім рядком.

Додамо до першого стовпця останній стовпець, а до третього – останній стовпець, помножений на 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отримали в третьому рядку два ненульових елементи. Розкладемо визначник за третім рядком. Закресливши третій рядок і почергово другий стовпець і четвертий стовпець, отримаємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Тепер залишилось обчислити два визначники третього порядку. Перший обчислимо *зведенням до трикутного вигляду*, другий – за *правилом трикутників*.

Використовуючи основні властивості визначників, зводимо перший визначник до такого вигляду, коли всі елементи, які знаходяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю. Тоді визначник дорівнює добутку елементів цієї діагоналі.

Спочатку до другого рядка додамо перший, помножений на (-3), до третього рядка – перший, помножений на (-4). Далі до третього рядка додамо другий, помножений на (-2). Отримаємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-3) = -3.$$

Для другого визначника маємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot 6 + 3\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 4 - 4\cdot 4\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 6 = 0.$$

У результаті отримаємо

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -a\cdot(-3) - 0 = 3a.$$

Визначник дорівнює нулю, коли $3a = 0$. Отже, за значення параметра $a = 0$ визначник дорівнює нулю.

Задача 5. Розв’язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Для знаходження з рівняння невідомої матриці X потрібно домножити зліва обидві частини рівняння на матрицю, обернену до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Маємо

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}5 & 9\\ 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Обчислимо *обернену матрицю за формулою*

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix},$$

де Δ – *визначник* матриці A, A_{ij} – *алгебраїчні доповнення* до елементів a_{ij}, $i, j=1,2$, матриці A.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-3-10=-13,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-3)=-3,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 5=-5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2=-2,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1.$$

Тоді, обернена матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-13}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X=\frac{1}{-13}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 9\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\frac{1}{-13}\begin{pmatrix}-3\cdot 5+(-2)\cdot 4 & -3\cdot 9+(-2)\cdot 7\\ -5\cdot 5+1\cdot 4 & -5\cdot 9+1\cdot 7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-13}\begin{pmatrix}-23 & -41\\ -21 & -38\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{23}{13} & \frac{41}{13}\\ \frac{21}{13} & \frac{38}{13}\end{pmatrix}.$$

Задача 6. Розв’язати систему лінійних рівнянь:
а) методом Гаусса; б) за формулами Крамера; в) матричним методом

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3,\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2,\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

Розв’язання: а) метод Гаусса

Запишемо розширену матрицю системи і зведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень рядків матриці.

Для цього до другого рядка додаємо перший рядок, помножений на (-2), до третього – перший, помножений на (-3). Далі помножимо третій рядок на $\left(-\frac{1}{16}\right)$ і поміняємо місцями другий і третій рядки. Тепер до третього рядка додаємо другий, помножений на 6.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

В результаті система набуває вигляду

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ x_2 = 1, \\ -x_3 = 2, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x_1 = -5\cdot 1 + (-2) + 3 = -4, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

б) за формулами Крамера

За формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де Δ – визначник системи, визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ отримані з основного визначника Δ заміною, відповідно, першого, другого та третього стовпця на стовпець вільних членів системи.

Отже, маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32,$$

$$x_1 = \frac{64}{-16} = -4, \quad x_2 = \frac{-16}{-16} = 1, \quad x_3 = \frac{32}{-16} = -2.$$

в) матричний метод

Запишемо систему рівнянь у матричному вигляді

$$A \cdot X = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи в матричному вигляді шукаємо за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

де A^{-1} – обернена матриця, що знаходиться за формулою

$$\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

Δ – визначник основної матриці A системи, A_{ij} – алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, матриці A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + (-11) \cdot (-7) \\ -3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-7) \\ -14 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + (-6) \cdot (-7) \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 64 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2.$

Задача 7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знаходимо загальний розв'язок однорідної системи методом Гауса.

Випишемо матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення рядків матриці. До другого рядка додаємо перший, помножений на (-3), до третього – перший, помножений на (-4). Далі до третього рядка додаємо другий, помножений на (-3). Отримаємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо, що матриця має два ненульові рядки після прямого ходу методу Гаусса. Ранг матриці $r = 2 < n = 4$, де n – число невідомих. Тому система має 2 *базисні змінні* та $4 - 2 = 2$ *вільні змінні*. За базисні змінні виберемо x_1, x_2, а змінні, що залишились, x_3, x_4 є вільними.

Ставимо у відповідність матриці спрощену систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0, \end{cases}$$

де x_1, x_2 – базисні змінні, x_3, x_4 – вільні змінні.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -4x_3 + 3x_4 - 2\left(-6x_3 + 5x_4\right), \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Загальний розв'язок однорідної системи

$$x_1 = 8x_3 - 7x_4, \; x_2 = -6x_3 + 5x_4, \; x_3, \; x_4 \in \mathbf{R}.$$

Перепозначимо змінні $x_3 = c_1, \; x_4 = c_2$.

Загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8c_1 - 7c_2 \\ -6c_1 + 5c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, \; c_2 \in \mathbf{R}.$$

Поклавши $c_1 = 1, \; c_2 = 0$ та $c_1 = 0, \; c_2 = 1$, з загального розв'язку одержуємо *фундаментальну систему розв'язків* (ФСР) – базис простору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Довести, що вектори

$$\vec{a}=\left(2;1;3\right),\ \vec{b}=\left(2;-3;1\right),\ \vec{c}=\left(1;2;1\right)$$

утворюють базис векторного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{d}=\left(0;11;3\right)$ в цьому базисі.

Розв’язання. *Базисом в просторі* $\mathbf{R}^3$ буде трійка лінійно незалежних векторів. Розглянемо лінійну комбінацію $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$, і розв’яжемо рівняння $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0}$ відносно невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Маємо

$$\alpha_1\left(2;1;3\right)+\alpha_2\left(2;-3;1\right)+\alpha_3\left(1;2;1\right)=\left(0;0;0\right).$$

Враховуючи умову рівності двох векторів, отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0, \\ \alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ 3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0. \end{cases}$$

Оскільки визначник системи не дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=10\neq 0,$$

то система має єдиний розв’язок $\alpha_1=0,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=0$. Отже, задані *вектори лінійно незалежні*.

Вектор $\vec{d}=\left(0;11;3\right)$ розкладений за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{d}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$, де x_1, x_2, x_3 – невідомі числа (координати вектора $\vec{d}$ у даному базисі).

Запишемо рівняння

$$\left(0;11;3\right)=x_1\left(2;1;3\right)+x_2\left(2;-3;1\right)+x_3\left(1;2;1\right).$$

Дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1-3x_2+2x_3=11, \\ 3x_1+x_2+x_3=3. \end{cases}$$

Отриману систему лінійних рівнянь розвяжемо методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 8 & -3 & -22 \\ 0 & 10 & -5 & -30 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 10 & -5 & -30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Після перетворень маємо систему

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_2 - x_3 = 4, \\ x_3 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язок системи $x_1 = 1,\ \ x_2 = -2,\ \ x_3 = 2$.

Шуканий *розклад вектора*

$$\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}\,.$$

Задача 9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Запишемо характеристичне рівняння $\left|A - \lambda E\right| = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Розкладаємо визначник за другим стовпцем, отримаємо

$$(1-\lambda)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = 0;$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) = 0;$$

$$(1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 3.$$

Маємо *власні значення*: $\lambda_1 = 1$ – кратне, показник кратності $k = 2$, $\lambda_3 = 3$ – просте, $k = 1$.

Система рівнянь для визначення власних вектрів має вигляд

$$\left(A - \lambda E\right)\vec{e} = \vec{0},$$

або

$$\begin{cases} \left(2-\lambda\right)x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + \left(1-\lambda\right)x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + \left(2-\lambda\right)x_3 = 0. \end{cases}$$

Підставимо послідовно $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_3 = 3$ в записану систему.

1. $\lambda_1 = 1$, $k = 2$. Система приймає вигляд

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо, що ранг матриці системи $r = 1 < n = 3$, де n – число невідомих. При цьому буде 1 базисна змінна і $3 - 1 = 2$ вільні змінні. Отже, існує два лінійно незалежних власних вектори, що відповідають власному значенню $\lambda_1 = 1$.

Спрощена система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 = c_2 \in \mathbf{R}, \\ x_3 = c_3 \in \mathbf{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = c_2 \in \mathbf{R}, \\ x_3 = c_3 \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

де x_1 – базисна змінна, x_2, x_3 – вільні змінні. Якщо вільним змінним послідовно надати значення $x_2 = 1, \ x_3 = 0$; $x_2 = 0, \ x_3 = 1$, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1\,. \end{cases}$$

Отже, фундаментальна система розв’язків однорідної системи має вигляд:

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уся сукупність *власних векторів*, що *відповідають власному значенню* $\lambda_1 = 1$, має вигляд

$$X_{\lambda_1} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \quad |c_1| + |c_2| \neq 0.$$

2. $\lambda_3 = 3,\ k = 1$. Система приймає вигляд

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо, що ранг матриці системи $r = 2 < n = 3$, де n – число невідомих. При цьому буде 2 базисні змінні та $3 - 2 = 1$ вільна змінна. Отже, існує один власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_3 = 3$.

Спрощена система рівнянь приймає вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = c_3 \in \mathbf{R}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3, \\ x_3 = c_3 \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

де x_1, x_2 – базисні змінні, x_3 – вільна змінна.

Щоб отримати фундаментальну систему розв'язків однорідної системи, надамо вільній змінній значення $x_3 = 1$:

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уся сукупність *власних векторів*, що *відповідають власному значенню* $\lambda_3 = 3$, має вигляд

$$X_{\lambda_3} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbf{R}, \quad c \neq 0.$$

Задачі до розділу
«Аналітична геометрія»

Задача 10. Визначити, за яких значень m, n прямі

$$l_1 : (m+1)x + y + n = 0; \quad l_2 : 2x + my + 1 = 0:$$

а) паралельні;

б) перпендикулярні;

в) співпадають;

г) знайти відстань між паралельними прямими.

Розв'язання. Якщо прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то умова паралельності прямих –

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

а умова перпендикулярності –

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

а) прямі *паралельні,* коли $\frac{m+1}{2} = \frac{1}{m}$, звідки $m^2 + m - 2 = 0$, $m_1 = 1, m_2 = -2$.

б) відповідно, прямі l_1 і l_2 *перпендикулярні*, коли $(m+1)\cdot 2 + 1\cdot m = 0$, звідки $m = -\frac{2}{3}$.

в) прямі *збігаються* у разі виконання умови

$$\frac{m+1}{2} = \frac{1}{m} = \frac{n}{1}.$$

Звідси маємо систему:

$$\begin{cases} m+1 = 2n, \\ 1 = mn, \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2n-1, \\ (2n-1)\cdot n = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2n-1, \\ 2n^2 - n - 1 = 0, \end{cases}$$

і дістаємо дві пари значень $m = 1,\ n = 1$ або $m = -2,\ n = -\frac{1}{2}$.

г) із пункта а) маємо дві пари паралельних прямих

$$l_1 : 2x + y + n = 0; \quad l_2 : 2x + y + 1 = 0$$

та

$$l_1 : -x + y + n = 0; \quad l_2 : 2x - 2y + 1 = 0.$$

Знайдемо *відстані між прямими* з першої пари.

Оскільки задані прямі паралельні, то відстань між ними дорівнює, наприклад, відстані від довільної точки другої прямої до першої. Знаходимо довільну точку на прямій $2x + y + 1 = 0$: нехай $x = 0$, тоді $y = -1$. Відстань від точки $M_0(0;-1)$ до прямої $2x + y + n = 0$ обчислюємо за формулою

$$\rho(M_0, l_1) = \frac{|A_1 \cdot x_0 + B_1 \cdot y_0 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Отже, маємо

$$\rho(M_0, l_1) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + n|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|n-1|}{\sqrt{5}}.$$

Слід відзначити, що в данному випадку відстань залежить від параметра n.

Задача 11. Нехай точки $A(4;3), B(-3;-3), C(2;7)$ – вершини трикутника ABC. Знайти:

а) загальне рівняння і довжину сторони AB;

б) канонічне рівняння і довжину висоти CH;

в) параметричні рівняння медіани AM;

г) точку перетину висоти CH та медіани AM;

д) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно до сторони AB;

е) кут A;

ж) площу трикутника ABC.

Розв'язання. Позначимо координати точок A, B, C через $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, відповідно.

На Рис. 1 побудований трикутник ABC.

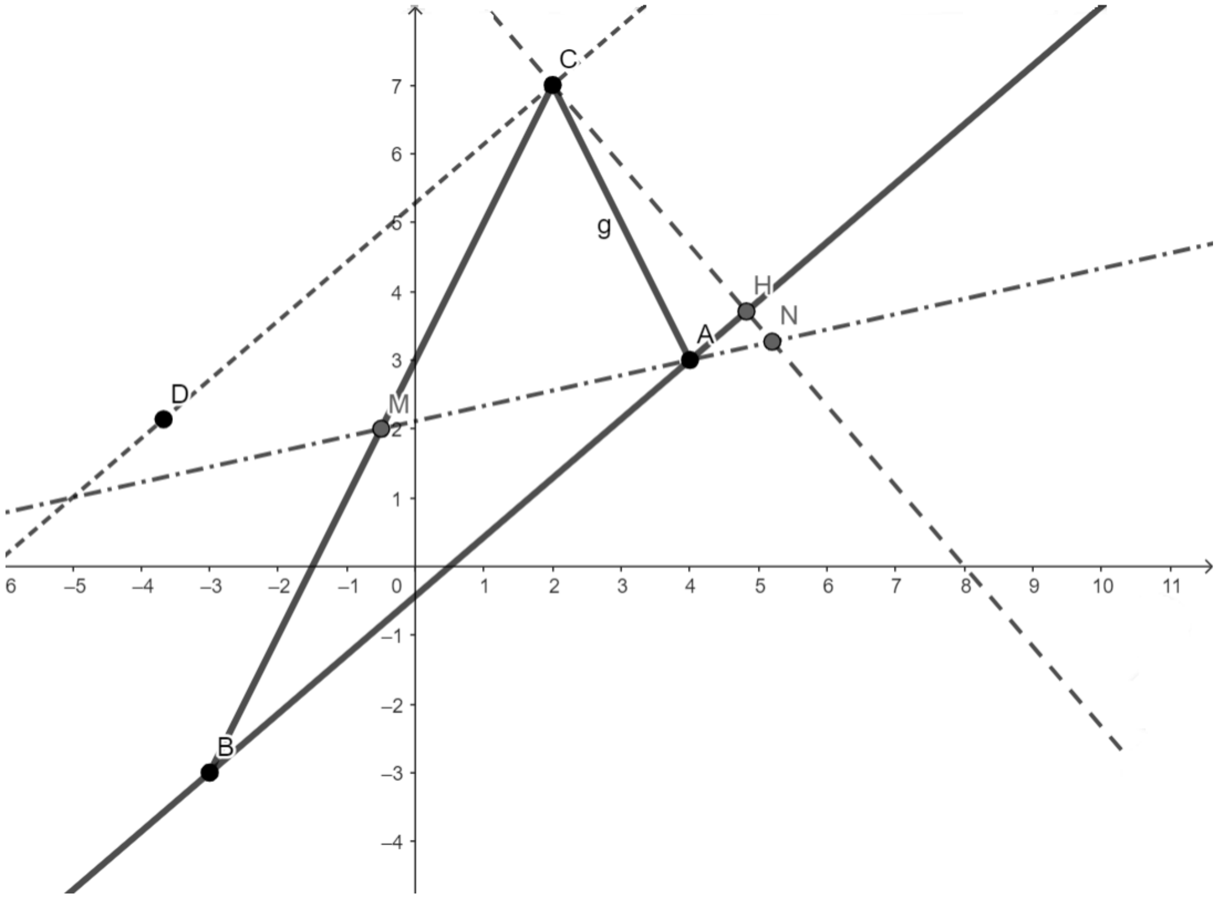

Рис. 1

а) оскільки відомі координати точок A і B, то використаємо формулу рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Отримаємо рівняння сторони AB

$$\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3},$$

звідки

$$-6(x-4)=-7(y-3) \quad \text{або} \quad 6x-7y-3=0$$

– *загальне рівняння сторони* AB.

Довжину сторони AB знайдемо за формулою відстані між точками

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-3-4)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{85}.$$

б) запишемо рівняння сторони AB у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$-7y = -6x + 30 \quad \text{або} \quad y = \frac{6}{7}x - \frac{30}{7} .$$

Маємо, що кутовий коефіцієнт прямої AB $k_1 = \frac{6}{7}$. З урахуванням умови перпендикулярності прямих AB і CH кутовий коефіцієнт висоти знаходимо за формулою

$$k_1 \cdot k_2 = -1,$$

тобто $k_2 = -\frac{7}{6}$.

Запишемо рівняння висоти CH за точкою $C(2;7)$ і кутовим коефіцієнтом $k_2 = -\frac{7}{6}$

$$y - 7 = -\frac{7}{6}(x-2) \quad \text{або} \quad \frac{y-7}{-7} = \frac{x-2}{6}$$

– *канонічне рівняння висоти* CH .

Довжину висоти CH знайдемо як відстань від точки до прямої за формулою

$$|CH| = \rho(C, AB) = \frac{|6 \cdot 2 + (-7) \cdot 7 + (-3)|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} .$$

в) За формулами середини відрізка знаходимо координати x_M, y_M середини M відрізка BC:

$$x_M = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y_M = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2.$$

Вектор $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_1; y_M - y_1) = \left(-\frac{1}{2} - 4;\ 2 - 3\right) = \left(-\frac{9}{2}; -1\right)$ – напрямний вектор прямої AM. За напрямний вектор можна взяти також вектор $\vec{s} = 2\overrightarrow{AM} = (-9;-2)$.

Отже, параметричні рівняння медіани AM, що проходить через точку $A(4;3)$ з напрямним вектором $\vec{s}_{AM} = \left(m_{AM}; n_{AM}\right) = \left(-9;-2\right)$, записуємо так

$$\begin{cases} x = x_1 + m_{AM} \cdot t, \\ y = y_1 + n_{AM} \cdot t, \end{cases} \quad t \in R; \qquad \begin{cases} x = 4 - 9t, \\ y = 3 - 2t, \end{cases} \quad t \in R$$

– *параметричні рівняння медіани* AM.

г) Для знаходження координат точки N перетину висоти CH та медіани AM складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{y-7}{-7} = \dfrac{x-2}{6}, \\ x = 4 - 9t, \\ y = 3 - 2t, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 4 - 9t, \\ y = 3 - 2t, \\ 7x + 6y - 56 = 0. \end{cases}$$

Підставляємо вирази для x і y з рівнянь медіани AM в останнє рівняння висоти CH та отримаємо

$$7\left(4 - 9t\right) + 6\left(3 - 2t\right) - 56 = 0,$$

$$-75t = 10,$$

звідки $t = -\dfrac{2}{15}$.

Маємо, що $x = 4 - 9 \cdot \left(-\dfrac{2}{15}\right) = \dfrac{26}{5}$, $y = 3 - 2 \cdot \left(-\dfrac{2}{15}\right) = \dfrac{49}{15}$, тобто $N\left(\dfrac{26}{5}; \dfrac{49}{15}\right)$ – шукана *точка перетину* CH *і* AM.

д) оскільки пряма, що проходить через точку $C\left(2;7\right)$, паралельна до сторони AB, то за нормальний вектор шуканої прямої беремо вектор $\vec{n}_{AB} = \left(A_{AB}; B_{AB}\right) = \left(6;-7\right)$ – нормальний вектор прямої AB. Тоді шукане рівняння має вигляд

$$A_{AB} \cdot \left(x - x_3\right) + B_{AB} \cdot \left(y - y_3\right) = 0 \quad \text{або} \quad 6\left(x - 2\right) - 7\left(y - 7\right) = 0.$$

Отже, *рівняння прямої* $CD \parallel AB$

$$6x-7y+37=0.$$

е) кут A трикутника ABC – кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Тоді кут A знаходимо за формулою

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|},$$

де $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ – скалярний добуток векторів

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1\right)=\left(-7;-6\right)$$

і

$$\overrightarrow{AC}=\left(x_3-x_1;y_3-y_1\right)=\left(-2;4\right).$$

Тоді

$$\cos A=\frac{-7\cdot\left(-2\right)+\left(-6\right)\cdot 4}{\sqrt{\left(-7\right)^2+6^2}\cdot\sqrt{\left(-2\right)^2+4^2}}=\frac{-10}{\sqrt{1700}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\approx-0,2425,$$

звідки *кут* $A\approx 104^{\circ}$.

ж) *Площу трикутника* ABC знайдемо за формулою

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{85}\cdot\frac{40}{\sqrt{85}}=20.$$

Задача 12. Дано координати вершин

$$A(4;7;8),\ B(-1;13;0),\ C(2;4;9),\ D(1;8;9)$$

тетраедра $ABCD$. Знайти:

а) довжину ребра AB;

б) рівняння прямої AB;

в) рівняння площини ABC;

г) кут нахилу ребра AD до площини ABC;

д) площу грані ABC;

е) об’єм тетраедра $ABCD$;

ж) рівняння висоти DE, опущеної з вершини D на грань ABC;

з) довжину висоти DE;

и) проєкцію E вершини D на площину ABC;

к) точку D', симетричну точці D відносно грані ABC;

л) площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC.

Розв'язання. Позначимо координати точок A, B, C, D через $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$, $(x_4; y_4; z_4)$, відповідно.

На Рис. 2 побудований тетраедр $ABCD$.

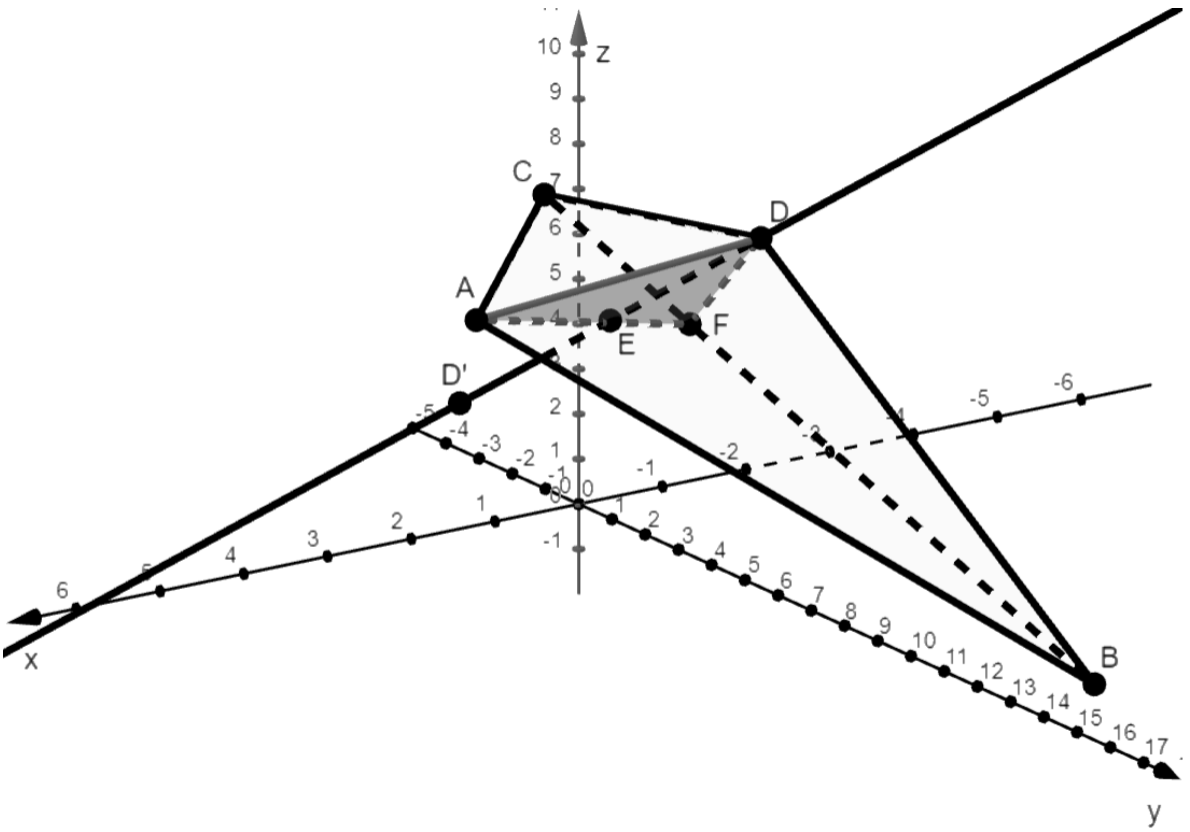

Рис. 2

а) *довжину ребра* AB знайдемо за формулою відстані між точками

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(-1-4)^2 + (13-7)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

б) враховуючи формулу рівнянь прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

рівняння прямої AB має вигляд:

$$\frac{x-4}{-5}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-8}{-8}.$$

в) рівняння площини ABC запишемо як рівняння площини, що проходить через три точки A, B, C

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Маємо

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-7 & 9-8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-(y-7)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+(z-8)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$$-18(x-4)+21(y-7)+27(z-8)=0,$$

звідки

$$6x-7y-9z+97=0$$

– загальне рівняння площини ABC.

г) кут нахилу ребра AD до площини ABC – це кут α між прямою AD та площиною ABC, який знаходиться за формулою

$$\sin\alpha=\frac{\left|\vec{n}_{ABC}\cdot\vec{s}_{AD}\right|}{\left|\vec{n}_{ABC}\right|\cdot\left|\vec{s}_{AD}\right|},$$

де $\left|\vec{n}_{ABC}\cdot\vec{s}_{AD}\right|$ – модуль скалярного добутку, $\vec{n}_{ABC}=(6;-7;-9)$ – вектор нормалі до площини ABC, $\vec{s}_{AD}$ – напрямний вектор прямої AD, $\vec{s}_{AD}=\overrightarrow{AD}=(1-4;8-7;9-8)=(-3;1;1)$.

Отже,

$$\sin\alpha=\frac{\left|6\cdot(-3)+(-7)\cdot1+(-9)\cdot1\right|}{\sqrt{6^2+(-7)^2+(-9)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}}=\frac{34}{\sqrt{166}\cdot\sqrt{11}}\approx0,7957,$$

$\alpha \approx 53^\circ$ – шуканий *кут нахилу ребра* AD *до площини* ABC.

д) площа грані ABC – це площа трикутника ΔABC. Площу ΔABC знайдемо за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|,$$

де $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ – векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Координати векторів $\overrightarrow{AB} = (-1-4; 13-7; 0-8) = (-5; 6; -8)$, $\overrightarrow{AC} = (2-4; 4-7; 9-8) = (-2; -3; 1)$.

Тоді векторний добуток обчислюється за формулою

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -18\vec{i} + 21\vec{j} + 27\vec{k}.$$

Звідси

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-18)^2 + 21^2 + 27^2} = \frac{\sqrt{1494}}{2} = \frac{3\sqrt{166}}{2}$$

– шукана *площа грані* ABC.

е) *об'єм тетраедра* $ABCD$ обчислимо з використанням мішаного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ за формулою

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) \right| = \begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \\ x_{AD} & y_{AD} & z_{AD} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| -5 \cdot (-3) \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot (-3) + (-8) \cdot (-2) \cdot 1 - (-5) \cdot (-3) \cdot (-3) - \right.$$

$$\left. -6 \cdot (-2) \cdot 1 - (-5) \cdot 1 \cdot 1 \right| = \frac{1}{6} \cdot 102 = 17.$$

ж) пряма, що містить висоту DE, опущену з вершини D на грань ABC, перпендикулярна площині ABC. Звідси випливає, що за напрямний вектор прямої $\vec{s}_{DE}$ можна взяти нормальний вектор $\vec{n}_{ABC} = (6;-7;-9)$ площини ABC.

Тоді *рівняння висоти* DE, що проходить через точку $D(1;8;9)$, запишемо у вигляді

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}.$$

з) *довжину висоти* DE знайдемо за формулою відстані від точки D до площини ABC

$$|DE| = \rho(D, ABC) = \frac{|A_{ABC} \cdot x_4 + B_{ABC} \cdot y_4 + C_{ABC} \cdot z_4 + D_{ABC}|}{\sqrt{A_{ABC}^2 + B_{ABC}^2 + C_{ABC}^2}} =$$

$$= \frac{|6 \cdot 1 + (-7) \cdot 8 + (-9) \cdot 9 + 97|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2}} = \frac{34}{\sqrt{166}}.$$

и) проєкцію E вершини D на площину ABC знайдемо як точку перетину висоти DE і грані ABC, тобто з системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-8}{-7} = \dfrac{z-9}{-9}, \\ 6x - 7y - 9z + 97 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6t + 1, \\ y = -7t + 8, \\ z = -9t + 9, \\ 6x - 7y - 9z + 97 = 0, \end{cases}$$

Підставляємо вирази для x, y і z в останнє рівняння, отримаємо

$$6(6t+1) - 7(8-7t) - 9(9-9t) + 97 = 0,$$

$$166t = 34,$$

звідки $t = \dfrac{17}{83}$.

Маємо, що

$$x = 6 \cdot \frac{17}{83} + 1 = \frac{185}{83},\ y = 8 - 7 \cdot \frac{17}{83} = \frac{545}{83},\ z = 9 - 9 \cdot \frac{17}{83} = \frac{594}{83},$$

тобто

$$E\left(\frac{185}{83};\frac{545}{83};\frac{594}{83}\right)$$

– шукана *проєкція вершини* D *на площину* ABC.

к) знайдемо точку D', симетричну точці D відносно грані ABC. Оскільки $DE = ED'$, то із формул знаходження координат середини E відрізка DD' маємо

$$x_E = \frac{x_D + x_{D'}}{2}, \quad y_E = \frac{y_D + y_{D'}}{2}, \quad z_E = \frac{z_D + z_{D'}}{2},$$

$$\frac{185}{83} = \frac{1 + x_{D'}}{2}, \quad \frac{545}{83} = \frac{8 + y_{D'}}{2}, \quad \frac{594}{83} = \frac{9 + z_{D'}}{2}.$$

Звідси $x_{D'} = \dfrac{287}{83}$, $y_{D'} = \dfrac{426}{83}$, $z_{D'} = \dfrac{441}{83}$.

Таким чином, *точка* $D'\left(\dfrac{287}{83};\dfrac{426}{83};\dfrac{441}{83}\right)$ *симетрична точці* D *відносно грані* ABC.

л) площина, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC – це площина ADE.

Використаємо формулу площини в координатній формі

$$A_{ADE}\left(x - x_1\right) + B_{ADE}\left(y - y_1\right) + C_{ADE}\left(z - z_1\right) = 0,$$

де $\vec{n}_{ADE} = \left(A_{ADE};B_{ADE};C_{ADE}\right)$ – вектор, що перпендикулярний до площини ADE (вектор нормалі), $A\left(x_1;y_1;z_1\right)$ – точка, що належить площині ADE.

Вектор $\overrightarrow{AD} = \left(-3;1;1\right)$ належить шуканій площині ADE і вектор нормалі $\vec{n}_{ABC} = \left(6;-7;-9\right)$ площини ABC паралельний площині ADE. Тоді вектор нормалі $\vec{n}_{ADE} = \left(A_{ADE};B_{ADE};C_{ADE}\right)$ будемо шукати як векторний добуток

$$\vec{n}_{ADE} = \vec{n}_{ABC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -7 & -9 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 21\vec{j} - 15\vec{k}.$$

Маємо

$$2(x-4)+21(y-7)-15(z-8)=0.$$

Тоді

$$2x+21y-15z-35=0$$

– рівняння площини, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC.

Задача 13. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

$$2x^2+6xy+2y^2+2x-2y=-3.$$

Результати проілюструвати графічно.

Розв'язання. Запишемо відповідну квадратичну форму

$$Q(x,y)=2x^2+6xy+2y^2+2x-2y+3.$$

Для кожної квадратичної форми

$$Q(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$$

можна розглянути два визначники

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{і} \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\delta>0$, то задана крива *еліптичного типу*, якщо $\delta<0$ – *гіперболічного типу*, якщо $\delta=0$ – *параболічного типу*. При цьому, за умови $\Delta\neq 0$ маємо *еліпс, гіперболу, параболу*, відповідно.

Для нашої кривої

$$\delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5<0 \quad \text{і} \quad \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-25\neq 0.$$

Отже, крива є гіперболою.

1. Спочатку перейдемо до нової системи координат $OX'Y'$, яка утворюється *поворотом* системи координат OXY *на деякий кут*. Для цього:

1.1. Знайдемо власні значення матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння матриці A має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0, \qquad \lambda^2-4\lambda-5=0,$$

звідки $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=5$ – власні значення.

1.2. Знаходимо відповідні власні вектори

для $\lambda_1=-1$ маємо систему $\begin{cases} 3x+3y=0, \\ 3x+3y=0, \end{cases}$ її розв'язок – власний вектор

$$\vec{e_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

для $\lambda_2=5$ маємо систему $\begin{cases} -x+y=0, \\ x-y=0, \end{cases}$ її розв'язок – власний вектор

$$\vec{e_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звернемо увагу на те, що $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$. Саме ці вектори і визначають напрямок нових координатних осей OX', OY'.

Нормовані власні вектори приймають вигляд:

$$\frac{\vec{e_1}}{\left|\vec{e_1}\right|}=\frac{\vec{e_1}}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{і} \qquad \frac{\vec{e_2}}{\left|\vec{e_2}\right|}=\frac{\vec{e_2}}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1.3. Запишемо матрицю переходу до нової системи координат

$$T=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Перетворюємо координати

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x' + y'\right). \end{cases}$$

Підставляємо вирази для x та y у рівняння кривої. Отримаємо рівняння в нових координатах $OX'Y'$.

$$\frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\left(x' + y'\right)^2 + \frac{6}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\left(x' + y'\right)\left(-x' + y'\right) + \frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\left(-x' + y'\right)^2 +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(-x' + y'\right) + 3 = 0,$$

$$\left(x'\right)^2 + 2\sqrt{2}x' - 5\left(y'\right)^2 - 3 = 0.$$

2. Залишилося зробити *паралельне перенесення* осей OX', OY':

$$\left(x'\right)^2 + 2\sqrt{2}x' + \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 - 5\left(y'\right)^2 - 3 = 0$$

або

$$\left(x' - \sqrt{2}\right)^2 - 5\left(y'\right)^2 = 5,$$

тобто

$$\begin{cases} x' - \sqrt{2} = x'', \\ y' = y'' \end{cases} \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} x' = x'' + \sqrt{2}, \\ y' = y''. \end{cases}$$

У системі координат $OX''Y''$ матимемо *канонічне рівняння гіперболи*

$$\left(x''\right)^2 - 5\left(y''\right)^2 = 5, \qquad \text{або} \qquad \frac{\left(x''\right)^2}{5} - \frac{\left(y''\right)^2}{1} = 1.$$

Отже, система координат OXY перетворюється на систему координат $OX''Y''$ за допомогою рівностей

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + y''\right) + 1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-x'' + y''\right) - 1, \end{cases}$$

які задають перенесення початку координат у точку $O\left(1;-1\right)$ і поворот осей на кут $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ (Рис. 3).

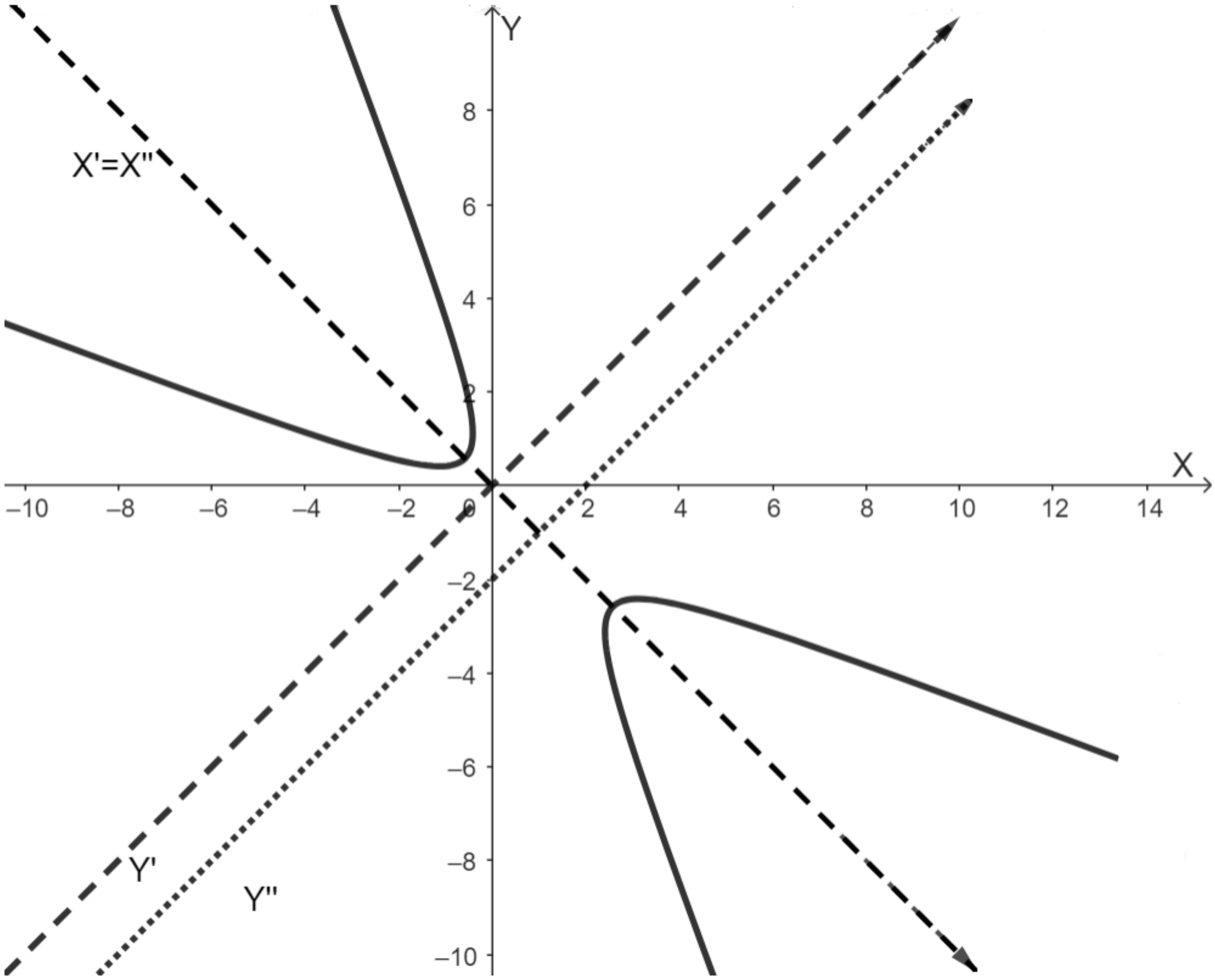

Рис. 3

Список літератури

1. *Бондаренко Н.В.* Лінійна алгебра: навчальний посібник / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2023. – 180 с.
2. *Бондаренко Н.В.* Аналітична геометрія: конспект лекцій/ Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2022. – 84 с.
3. *Вища* математика: збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. – К.: «А.С.К.», 2005. – 480 с.
4. *Денисюк В.П.* Вища математика: навчальний посібник: у 4 ч. / В.П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2006-2009. – Ч. 1. – 296 с.
5. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: «А.С.К.», 2006. – 648 с.
6. *Овчинников П.П.* Вища математика: підручник: у 2 ч. / Пер. з рос. П.М. Юрченка, 3-тє вид., випр. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко.– К.: Техніка, 2003. – Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – 600 с.
7. *Тевяшев А.Д.* Вища математика у прикладах та задачах: у 3 ч. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин.– Харків: ХТУРЕ, 2002. – Ч.1: Лінійна алгебра і аналітична геометрія Диференціальне числення функцій однієї змінної. – 552 с.

Додаток 1

Скалярний добуток векторів

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad \text{або} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z .$$

Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} .$$

Векторний добуток векторів

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} .$$

Мішаний добуток векторів

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} .$$

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| .$$

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$

$$S_{тр}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| .$$

Об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$V_{парал}=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| .$$

Об’єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$V_{пір}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| .$$

Рівняння прямої

	На площині	**У просторі**
Загальні рівняння	$Ax+By+C=0$, $\vec{n}=\left(A;B\right)$ – вектор нормалі.	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ як перетин двох площин.
Рівняння з кутомим коефіцієнтом	$y=kx+b$, $k=\operatorname{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт.	
Канонічні рівняння	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$, $\vec{s}=\left(m;n\right)$ – напрямний вектор, $M_0\left(x_0;y_0\right)$ – точка прямої.	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, $\vec{s}=\left(m;n;p\right)$ – напрямний вектор, $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ – точка прямої.
Параметричні рівняння	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases}$	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$
Рівняння через дві точки $M_1\left(x_1;y_1\right)$ **і** $M_2\left(x_2;y_2\right)$	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Рівняння площини

Загальне рівняння	$Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$ – вектор нормалі.
Рівняння через три точки $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$ **і** $M_3\left(x_3;y_3;z_3\right)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Змістовий модуль 1
Лінійна алгебра
Аналітична геометрія

Методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 «Будівництво і цивільна інженерія»

Укладачі: **Божонок** Катерина Валеріївна,
Бондаренко Наталія В'ячеславівна

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Підписано до друку 11. 10. 2024. Формат 60 × 84 $_{1/16}$.
Ум. друк. арк. 3,49. Обл.-вид. арк. 3,75.
Електронний документ. Вид. № 171/III-24

Видавець і виготовлювач:
Київський національний університет будівництва і архітектури
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002