

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ГЕОДЕЗІЇ НА ТОПОГРАФІЧНИХ КАРТАХ ТА ПЛАНАХ

Методичні вказівки
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія»



Київ 2025

УДК 528.4

P64

Укладачі: О. В. Адаменко, канд. техн. наук, доцент;
О. В. Циколенко, асистент;
С. А. Бондар, асистент

Рецензент О. Й. Кузьмич, канд. техн. наук, професор

Відповідальний за випуск Р. А. Дем'яненко, канд. техн. наук,
доцент

*Затверджено на засіданні кафедри інженерної геодезії, протокол
№ 6, від 29 жовтня 2024 року.*

В авторській редакції.

Розв'язання задач з геодезії на топографічних картах та планах :
P64 методичні вказівки / уклад. : О. В. Адаменко, О. В. Циколенко, С. А.
Бондар. – Київ : КНУБА, 2025. – 40 с.

Розглянуто задачі, які виконуються за даними, взятими на
топографічних картах та планах, а також приклади їх виконання.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна
інженерія».

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	4
1. Загальні відомості	5
1.1. Форма та розміри Землі	5
1.2. Основні лінії, кути та площини на Землі	5
1.3. Системи координат	6
2. Лабораторна робота № 1. Вивчення змісту топографічних карт та планів.....	8
2.1. Масштаби. Визначення довжин ліній	9
2.2. Сітка географічних та прямокутних координат на топографічних картах та планах	11
2.3. Міжнародне розграфлення та номенклатура. Визначення географічних координат кутів рамки карти.....	14
2.4. Рельєф та його зображення на топографічних картах та планах.....	19
2.5. Графік закладень.....	22
2.6. Умовні знаки та їх класифікація.....	24
3. Лабораторна робота №2. Розв’язання інженерних задач на топографічних картах і планах	24
3.1. Рішення задач на орієнтування	25
3.2. Розв’язання прямої та оберненої геодезичних задач	27
3.3. Визначення висот точок	29
3.4. Визначення ухилу лінії на карті	29
3.5. Побудова на карті лінії заданого ухилу	30
3.6. Визначення площ аналітичним способом	30
4. Лабораторна робота № 3. Похибки вимірів	32
4.1. Принцип арифметичної середини	33
4.2. Середня квадратична похибка	33
4.3. Вага. Загальне середнє арифметичне	34
4.4. Оцінка точності функцій вимірних величин	36
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	38

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Геодезія – наука, яка розглядає способи визначення форм та розмірів всієї земної поверхні або окремих її частин, а також способи зображення їх на папері у вигляді карт або планів. Ці основні задачі розв’язують в геодезії, вимірюючи на місцевості ліній та кутів спеціальними приладами з подальшою обробкою цих геометричних елементів. Геодезія складається з двох частин – вищої геодезії та інженерної геодезії. Інженерна геодезія тісно пов’язана з топографією (проста геодезія). Топографія вивчає способи вимірювання різних ділянок на земній поверхні, складання планів і карт та способи користування інструментами під час виконання цих робіт.

Методичні вказівки відіграють **важливу роль** до спонукання студентів теоретично вивчити зміст топографічних карт та правил роботи з ними, враховуючи специфіку майбутньої діяльності.

Мета методичних вказівок – надання студентам практичної допомоги для виконання індивідуальних завдань та самостійної роботи, набутті практичних навичок у процесі вивчення змісту топографічних карт і планів, у вирішенні інженерних задач, які виникають у практичній діяльності фахівців з будівельної справи.

Перед виконанням лабораторних робіт кожен студент повинен вивчити теоретичний матеріал певного розділу дисципліни «Інженерна геодезія».

Лабораторні роботи виконує кожен студент індивідуально під час проведення лабораторних занять в аудиторії та в процесі самостійної роботи. Кожен студент оформлює належним чином і захищає роботу.

Методичні вказівки містять окремі завдання, пояснення та приклади виконання лабораторних робіт: 1) з вивчення змісту топографічних карт і планів; 2) розв’язання інженерних задач за топографічними картами і планами; 3) визначення похибок вимірювання.

Основна мета лабораторних робіт – навчитися сприймати зміст топографічних планів і карт; засвоїти правила оформлення топографічних планів і карт та застосування умовних знаків під час їх складання; навчитися читати ситуацію та рельєф на топографічних картах та планах.

Виконання лабораторних робіт потребує попереднього повторення деяких питань з розділів фізики (сила тяжіння; прямовисна лінія; рівнева поверхня), геометрії (окружність, еліпс, сфера, еліпсоїд) та географії (меридіани, паралелі, широта, довгота).

1. Загальні відомості

1.1. Форма та розміри Землі

За першого наближення Землю вважають кулею з радіусом 6371 км. Таку форму приймають в географії та під час різних наближених обчислень в геодезії. Якщо точніше, Земля має форму еліпсоїда, тобто поверхню обертання еліпса навколо його малої осі. За останніми обчисленнями професора Ф. М. Красовського розміри півосей еліпсоїда такі: велика піввісь $a = 6\,378\,245$ м, мала піввісь $b = 6\,356\,863$ м. Таку форму називають референц-еліпсоїдом Красовського. В дійсності поверхня Землі значно складніша, бо 29% планети становить суша, яка лежить вище поверхні океану. *Поверхню океану у спокійному стані, уявно продовжену під сушею, називають основною рівневою поверхнею.* Вона у всіх своїх точках перпендикулярна до прямовисних ліній. Рівнева поверхня Землі не збігається з поверхнею жодної математичної фігури і являє собою неправильну форму, яка називається *геоїдом*. *Віддаль будь-якої точки Землі по прямовисній лінії від основної рівневої поверхні називають абсолютною висотою (H), а різницю висот двох точок називають перевищенням (h).*

1.2. Основні лінії, кути та площини на Землі

У кожній точці земної поверхні сила тяжіння спрямована до центра Землі. Цей напрямок можна уявити, підвісивши висок (грузило) до шнурка. Лінію, що її утворює висок, називають *прямовисною*. Площини, що проходять через цю лінію, вертикальні. Вертикальна лінія, уявно продовжена до перетину з небесною сферою, утворює *точку зеніту*. Площини, перпендикулярні до вертикальної лінії, називають горизонтальними площинами, або *рівневими поверхнями*, а лінії, що лежать на них, – теж горизонтальними.

Крім вертикальних і горизонтальних ліній та площин, в кожній точці земної поверхні є уявна лінія – справжній меридіан. Меридіанів на земній поверхні можна уявити безліч. За початковий меридіан, за міжнародною угодою, прийнято вважати Гринвіцький, який проходить через Гринвіцьку астрономічну обсерваторію поблизу Лондона. Від Гринвіцького меридіана відлічують довготи, тобто двогранні кути між Гринвіцьким меридіаном та меридіаном певної точки. Ці кути вимірюють по паралелі, або екватору на

схід від 0° до 180° – східна довгота і на захід теж від 0° до 180° – західна довгота.

Земля обертається навколо своєї осі, яка є малою віссю еліпсоїда. Вісь перетинає Землю в двох точках – полюсах : Північному (Пн) та Південному (Пд). Вісь Землі, продовжену безмежно, називають віссю світу. Полюс його в нашій півкулі знаходиться в сузір'ї Малої Ведмедиці близько до Полярної зірки. За цією зіркою визначають напрямок справжнього меридіану та широту будь-якого місця на північній кулі.

1.3. Системи координат

У геодезії застосовують чотири основні системи координат.

1. Географічна система координат на кулі (рис. 1).

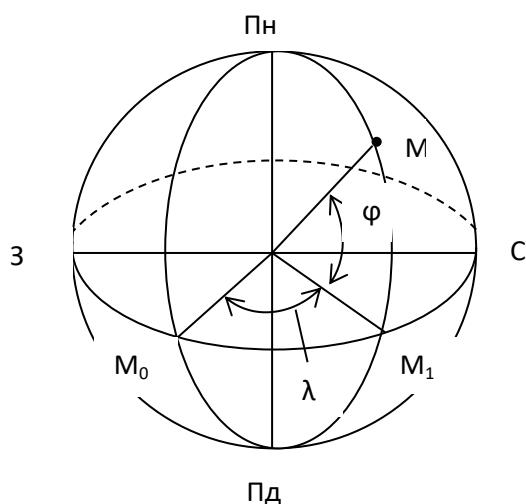


Рис.1. Географічні координати

У цій системі точки визначають за широтою і довготою. Широтою точки називають дугу меридіана у градусному вимірі від екватора до даної точки. Позначають її буквою φ . Довготою точки називають дугу паралелі від початкового Гринвіцького меридіана до меридіана цієї точки. Вона позначається буквою λ . Ця система координат застосовується переважно для карт та глобусів.

2. Полярна система координат полягає в тому (рис. 2), що на будь-якій відомій лінії PQ полярної осі вибирають точку P – полюс.

Виміряють полярні кути $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$, що утворюються напрямками на точки 1, 2, 3... і полярною віссю, та вимірюють віддаль від полюса до цих точок $r_1, r_2, r_3, \dots$ яку називають радіус-вектором. За цими даними можна побудувати точки 1, 2, 3... на плані.

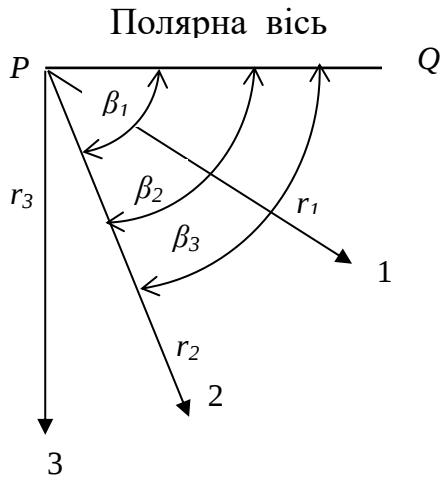


Рис. 2. Полярна система координат

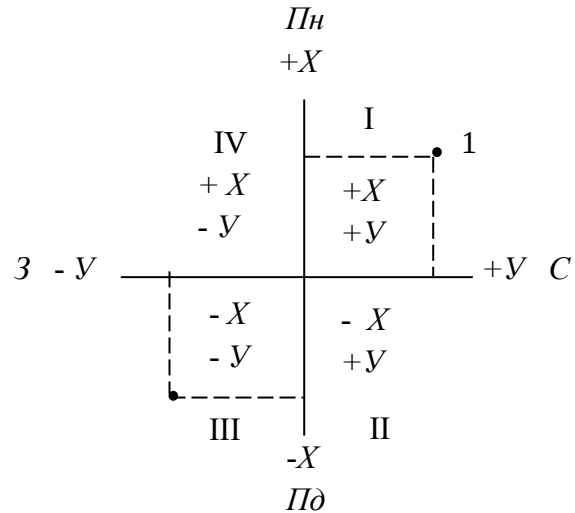


Рис. 3. Прямокутна система координат

3. Прямокутна система координат (рис. 3).

У геодезичній практиці місцезнаходження точок часто визначають за допомогою прямокутних координат. В цій системі площина координат збігається з площиною горизонту в даній точці O , яка є початком цих координат. Вісь X завжди напрямлена на північ, а вісь Y – на схід. Північний напрямок осі абсцис завжди вважають додатним ($+$), а південний – від’ємним ($-$); напрямок осі ординат вважають додатним на схід і від’ємним на захід. Осі координат поділяють площину карти (або рисунка) на чотири координатні чверті: I – ПнСх, II – ПдСх, III – ПдЗ, IV – ПнЗ.

4. Зональна система координат. Зона (рис. 4) – це частина земної поверхні, обмежена меридіанами з різницею довгот 6° . Поділ на зони та їх нумерацію починають від початкового – нульового Гринвіцького меридіана – і продовжують на схід від 1 до 60 ($360 : 6^\circ$). Кожну зону за певними правилами розгортають в площину без значних переколювань. Тоді середній – осьовий – меридіан та екватор в межах кожної зони зобразяться взаємно перпендикулярними прямими. Ці лінії приймають за осі координат: осьовий меридіан – за вісь X , а екватор – за вісь Y . Координати X та Y будуть такі, як у прямокутних координатах: додатня координата X – від екватора на північ, а від’ємна – на південь; додатня координата Y – на схід від осьового меридіана, а від’ємна – на захід від нього.

Треба зауважити, що ця система координат має міжнародний характер.

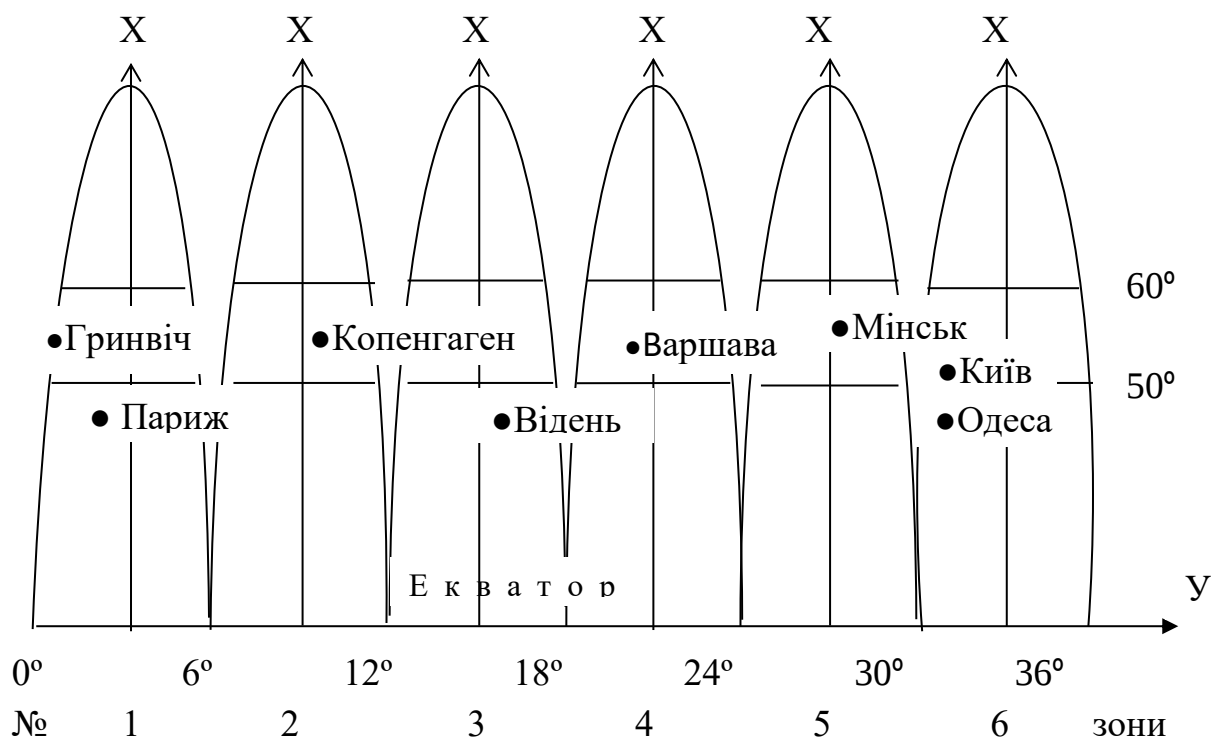


Рис. 4. Система зональних координат

2. Лабораторна робота № 1. Вивчення змісту топографічних карт та планів

Лабораторна робота охоплює такі теми:

1. Класифікація і призначення топографічних карт та планів.
2. Масштаби.
3. Сітка географічних та прямокутних координат на топографічних картах. Визначення географічних і прямокутних координат точок на карті.
4. Міжнародне розграфлення і номенклатура листів карт масштабу 1:1 000 000, 1:500 000, 1:100 000, 1:50 000, 1:25 000, 1:10 000.
5. Рельєф і його зображення на топографічній карті.
6. Графік закладань.
7. Умовні знаки та їх класифікація.

Перш ніж виконувати практичні завдання до лабораторної роботи, треба попередньо ознайомитись з теорією в підручнику [3, с.27 – 56], або у навчальному посібнику [6, с.24 – 70].

2.1. Масштаби. Визначення довжин ліній

Плани, карти та профілі місцевості складають на папері в зменшеному вигляді. Ступінь зменшення горизонтальних проєкцій ліній місцевості при зображенні їх на плані чи карті називається **масштабом**.

Масштаб відображає відношення довжини лінії на плані (карті) до відповідної горизонтальної довжини цього відрізка на місцевості.

В геодезії використовують числовий, лінійний та поперечний масштаби.

1. Числовий масштаб (рис. 5) – це дріб $\left(\frac{1}{M}\right)$, в чисельнику якого стоїть одиниця, а в знаменнику число M , що вказує на скільки разів зменшені розміри предмета та контуру місцевості на плані (карті). Так на планах масштабів 1:500, 1:1 000, 1:2 000, 1:5 000 горизонтальні проєкції ліній місцевості зменшені відповідно на 500, 1 000, 2 000, 5 000 раз. Чим більший знаменник масштабу, тим більше зменшення довжин ліній, тим дрібніше зображення реальних об'єктів на карті або плані, тобто тим дрібніший масштаб карти. Числовий масштаб завжди вказують внизу на карті. *Наприклад*, підпис внизу на карті 1 : 10000 (1 : M) означає, що 1мм на карті відповідає 10000 мм на місцевості.

Приклад 1. Визначити довжину лінії d на карті масштабу 1:10000, якщо її горизонтальна довжина на місцевості дорівнює $D = 275$ м.

Розв'язання: $\frac{1}{M} = \frac{d}{D}, d = \frac{D}{M} = 275000\text{мм} : 10000 = 27,5 \text{ мм}.$

Приклад 2. Визначити довжину лінії на місцевості, якщо на карті вона дорівнює $d = 31,2$ мм.

Розв'язання: $\frac{1}{M} = \frac{d}{D}, D = d \cdot M = 31,2 \text{ мм} \cdot 10000 = 312000 \text{ мм} = 312,0 \text{ м}.$

2. Лінійний масштаб (рис. 5)

Лінійний масштаб – це відрізок прямої, поділений на рівні частини з підписами значень відповідних їм відстаней на місцевості. Відрізок, який визначає величину поділки прямої лінії, називають **основою масштабу**.

Ліву крайню основу лінійного масштабу поділяють на 10 рівних частин. Ці частини називають **найменшою поділкою лінійного масштабу**. **Точністю або ціною лінійного масштабу** називають кількість метрів (кілометрів) на місцевості, яка відповідає найменшій поділці лінійного масштабу. На правому кінці першої основи пишуть нуль, а на лівому – число метрів або кілометрів.

Для визначення відстані за допомогою лінійного масштабу на плані чи карті беруть відрізок розхилом циркуля-вимірника. Потім циркуль-вимірник прикладають до лінійного масштабу так, щоб ліва голка вимірника знаходилась в межах крайньої лівої основи, а права – на одному зі штрихів лінійного масштабу, що відділяють цілі основи вправо від нуля. На рис. 5 заданий відрізок на плані відповідає горизонтальній проєкції лінії на місцевості, довжиною 320 м.

Фізіологічні можливості людського ока обмежені. На плані чи карті в найбільш сприятливому випадку можна зобразити лише такі горизонтальні проєкції ліній місцевості, яким у даному масштабі відповідає відрізок 0,1 мм і більше. Величину горизонтальної проєкції лінії на місцевості, яка відповідає 0,1 мм на карті (плані) заданого масштабу, називають **граничною точністю масштабу**.

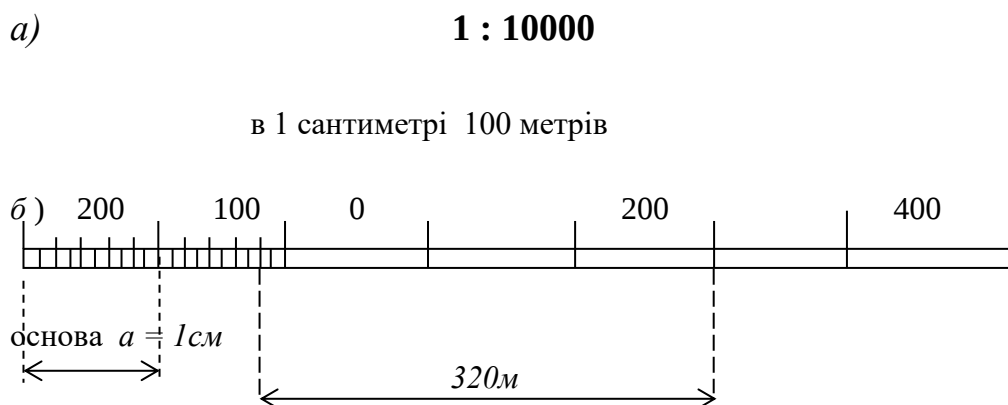


Рис. 5. Масштаби: а) числовий; б) лінійний

Лінійний масштаб – це графічне зображення числового масштабу. Його зображення завжди наносять внизу карти під числовим масштабом. Це свого роду лінійка, тільки нарисована на карті. На карті завжди є інформація, скільки в одному сантиметрі на карті міститься метрів на місцевості. Виходячи з цього, завжди можна обчислити відстань між точками, які нам потрібні.

Вимірювання довжини *хвилястої лінії* виконують, поділяючи її на прямолінійні відрізки (рис. 6). За допомогою вимірювача і лінійного масштабу визначають на карті довжину кожного відрізка. Довжину залишка ΔD визначають окремо. Тоді загальна довжина хвилястої лінії дорівнює сумі всіх відрізків разом з додатком.

$$\text{Тоді } D_{AB} = \Sigma D + \Delta D$$



Рис. 6. Вимірювання довжини хвилястої лінії

Завдання 1. На топографічній карті, яка видається викладачем, в довільному місці поставити дві точки *A* і *B*. Застосовуючи лінійний і числовий масштаби, визначити відстань між точками і обчислити відповідну їй відстань на місцевості.

2.2 Сітка географічних та прямокутних координат на топографічних картах та планах

Допомогою у вивченні цієї теми є навчальна карта У– 34 – В – в – 4, яка видається викладачем.

На рис. 7 показано оформлення рамок аркушів топографічних карт. Як видно з рисунка, в кутах рамки карти підписані довготи меридіанів і широти паралелей. Північна і південна сторони внутрішньої рамки є географічними паралелями, західна і східна сторони – географічні меридіани. Між внутрішньою і зовнішньою рамками карти нанесена шкала, яка поділена на хвилини широти (бокові сторони рамки) і довготи (верхня і нижня сторони рамки). Всередині хвилини знаходяться крапки, відстані між якими дорівнюють 10 секунд.

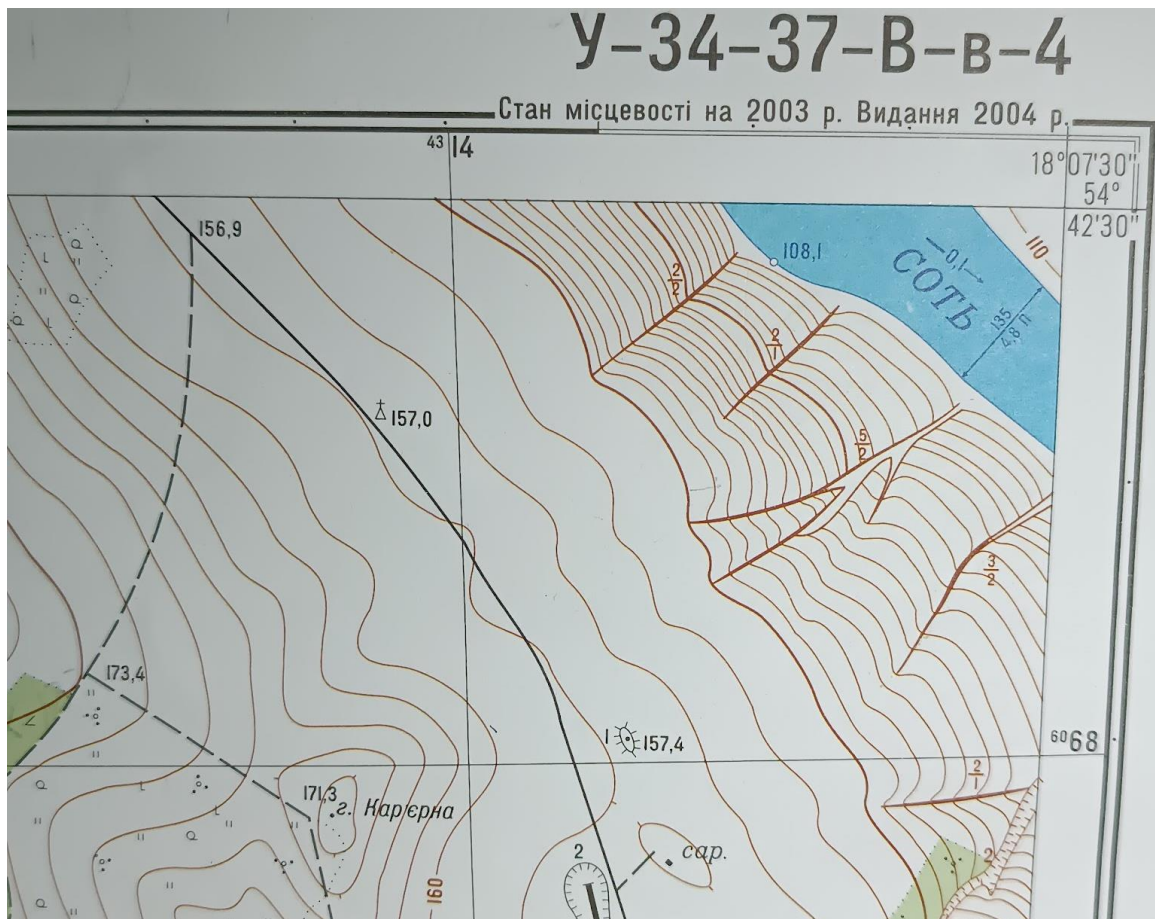


Рис. 7. Рамка топографічної карти: а) географічна широта північної рамки карти – $54^{\circ}42'30''$; б) географічна довгота східної рамки карти – $18^{\circ}07'30''$; в) 6068, 6067 – значення абсцис ліній сітки прямокутних координат в кілометрах; г) 4313, 4314 – значення ординат ліній сітки прямокутних координат в кілометрах

На території України і деяких інших держав перша цифра завжди вказує на номер зони від Гринвіча (4 – четверта зона).

Треба пам'ятати, що на кожному аркуші топографічної карти підписані широти і довготи кутів вершин трапеції і значення прямокутних координат у ліній координатної сітки. Так, наприклад, цифри $54^{\circ}42'30''$ і $18^{\circ}07'30''$ у північно-східного кутка карти означають, що дана карта обмежена з півночі паралеллю $54^{\circ}42'30''$ північної широти, а зі сходу меридіаном $18^{\circ}07'30''$ східної довготи. На тій же карті найвища горизонтальна лінія координатної сітки має підпис 6068. Цей підпис означає, що всі точки, які лежать на цій лінії, знаходяться від екватора на відстані 6068 км і значення абсцис яких дорівнює 6068. А наприклад, східна вертикальна лінія має підпис 4314, що означає: всі точки, які лежать на цій лінії, мають значення ординат 4314, тобто знаходяться (як і сама карта) в 4-ій зоні і віддалені від осьового меридіана на 189 км ($500 - 311 = 189$).

Для визначення географічних координат точки достатньо зробити таким чином: щоб визначити географічні координати, наприклад, точки з

відміткою 171.3 (г. Кар'єрна, квадрат 6713), по карті У – 34 – 37 – В – в – 4 треба провести перпендикуляри через цю точку до градусної рамки (до північної сторони і до східної). Перпендикуляри є ні чим іншим, як меридіаном і паралеллю, які проходять через цю точку. Враховуючи значення широт і довгот кутів рамки карти, підраховують остаточні координати точки. Для цього користуються поділками хвилин і секунд, які розташовані на градусній рамці. Значення географічних координат:

$$\begin{aligned}\text{г. Кар'єрна: } \varphi &= 54^{\circ} 42' 07'' \\ \lambda &= 18^{\circ} 06' 43''\end{aligned}$$

Для визначення прямокутних координат тієї ж точки треба провести перпендикуляри до координатних ліній з підписами 6067 і 4313 і за допомогою лінійного масштабу обчислити відстані від точки до координатних ліній. Обчислені відстані приплюсовують до значень абсцис і ординат ліній координатної сітки. У розгляданому випадку остаточне значення прямокутних координат точки є такими (рис. 8):

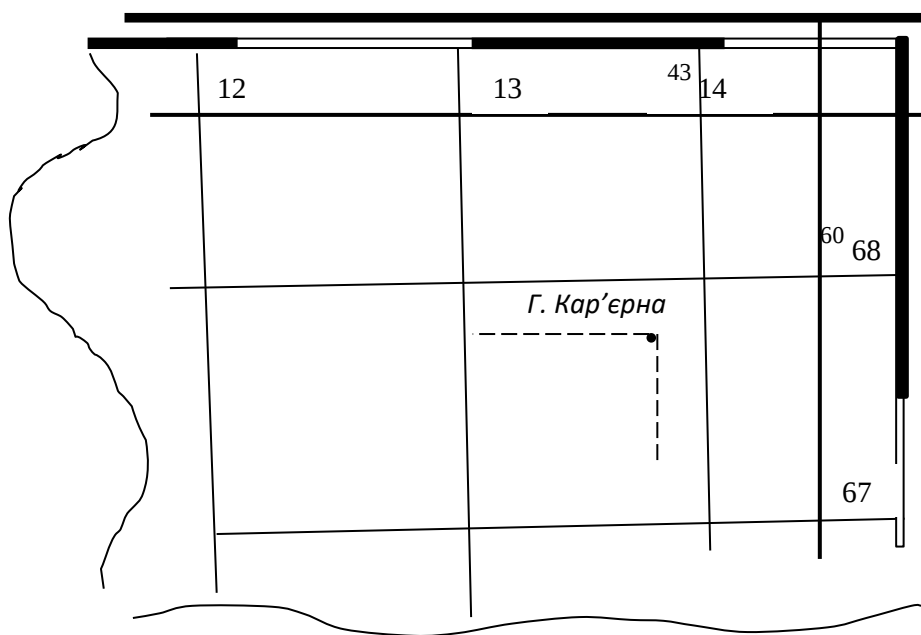


Рис. 8. Прямокутні координати:

$$\begin{aligned}\text{г. Кар'єрна: } X &= 6\,067\,940 \text{ м} \\ Y &= 4\,313\,830 \text{ м}\end{aligned}$$

Завдання 2. На карті масштабу 1:10000, яка видається викладачем, поставити дві точки *A* і *B*. Визначити прямокутні і географічні координати точок *A* і *B*.

2.3. Міжнародне розграфлення та номенклатура. Визначення географічних координат кутів рамки карти

Топографічні карти великих територій складаються з великої кількості аркушів. Систему поділу карт на окремі аркуші називають розграфленням. Кожен аркуш, обмежений відрізками паралелей і меридіанів, являє собою трапецію (оскільки меридіани сходяться до полюсів). Розміри аркуша по широті і довготі залежать від масштабу карти.

В основу розграфки і номенклатури топографічних карт України покладені розграфка і номенклатура, застосовувані для міжнародної карти світу масштабу 1:1000 000 (рис. 9).

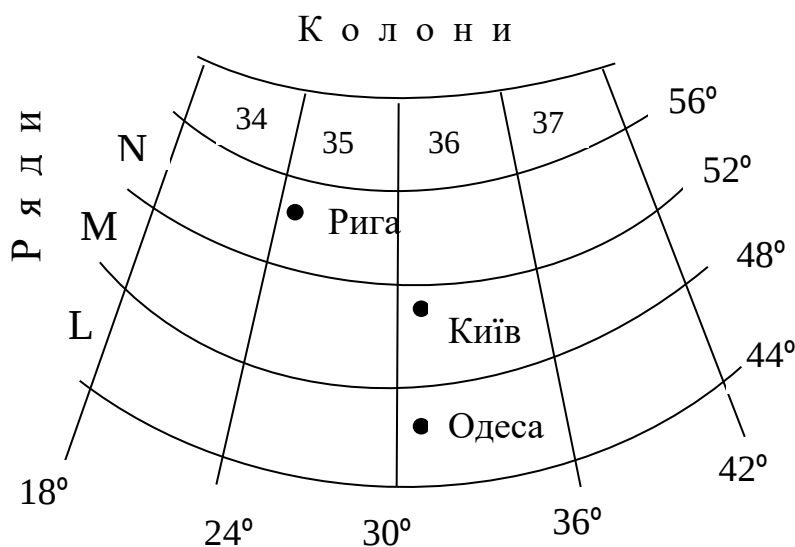


Рис. 9. Номенклатура карт

Розграфка земної кулі на аркуші карт масштабу 1:1000000 здійснюється по паралелях, що знаходяться одна від одной через 4°, і по меридіанах, проведених через 6°.

Чотириградусні смуги, укладені між двома сусідніми паралелями, називаються рядами і позначаються заголовними буквами латинського алфавіту (див. табл. 1), починаючи від екватора до півночі і півдня. Повних рядів у кожній півкулі 22, а на земній кулі 44.

Номер букви ряду в латинському алфавіті

№ букви	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Буква	K	L	M	N	O	P	Q	R	S

Шестиградусні смуги між двома сусідніми меридіанами називаються колонками і нумеруються арабськими цифрами з заходу на схід, починаючи від меридіана з довготою 180° .

Розграфку аркушів більших масштабів виконують так, що кожному аркушу карти масштабу 1:1000 000 відповідає ціле число аркушів карт більших масштабів. Їхнє позначення утворене номенклатурою відповідного аркуша мільйонної карти з додаванням українських букв і римських або арабських цифр. Знання номенклатури топографічних карт потрібне для розв'язання завдань переважно трьох типів:

- 1) визначення масштабу карти, географічних і прямокутних координат кутів рамок трапеції;
- 2) визначення номенклатури аркуша карти за заданими координатами точки;
- 3) визначення номенклатури суміжних аркушів карти.

Приклад 1. Визначити географічні координати кутів рамки карти масштабу 1:10 000 з номенклатурою М-36-54-Г-а-2

Спочатку треба визначити географічні координати вершин кутів трапеції масштабу 1:1000 000 з номенклатурою М-36. Для цього можна використати таблицю аркушів карти масштабу 1:1000 000 або виконати нескладні розрахунки. Порядковий номер букви М в латинському алфавіті – 13-й. Це число треба помножити на 4° , в результаті отримуємо число 52° , що відповідає північній широті аркушу карти М-36, південна сторона буде мати широту на 4° менше, тобто 48° . Потім від номера колони 36 віднімаємо число 30 і отриманий номер зони – 6 помножуємо на 6° . Отримане число 36° відповідає довготі східної рамки карти М-36, західна сторона рамки буде мати довготу $36^\circ - 6^\circ = 30^\circ$.

Один аркуш карти масштабу 1:1000 000 вміщує 144 аркуша карт масштабу 1:100 000, аркуші позначаються арабськими цифрами 1, 2, 3, 4,

5,.....144, які записуються після номенклатури масштабу 1:1000 000, розміри по широті 20', по довготі 30' (рис. 10).

30°00'						M – 36						36°00'					
52°													52°				
00'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	00'				
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24					
51°	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36					
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48					
50°	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60					
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72					
49°	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84					
	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96					
48°	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108					
	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120					
00'	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	00'				
	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144					
00'	31°00'			32°00'			33°00'			34°00'			35°00'			00'	
30°00'														36°00'			
M: 1:1000000																	

Рис. 10. Карта масштабу 1:1000000 розділена на аркуші карти масштабу 1:100000

Один аркуш карти масштабу 1:100 000 містить в собі 4 аркуша карти масштабу 1:50000, які позначаються заголовними буквами українського алфавіту: А, Б, В, Г. Записуються після номенклатури масштабу 1:100 000. Розміри по широті 10', по довготі 15' (рис. 11).

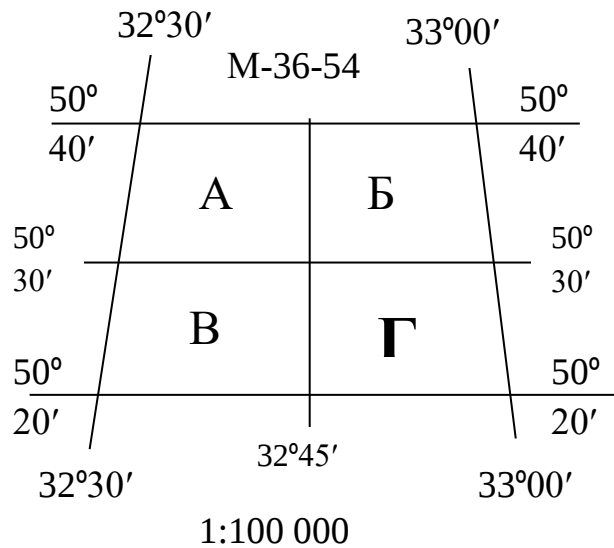


Рис. 11. Аркуш карти масштабу 1:100000, поділений на аркуші карти масштабу 1:50000

Один аркуш карти масштабу 1:50 000 містить 4 аркуша карти масштабу 1:25 000, які позначаються прописними буквами українського алфавіту *а, б, в, г* і записуються після номенклатури масштабу 1:50000. Розміри по широті 5', по довготі 7'30" (рис. 12).

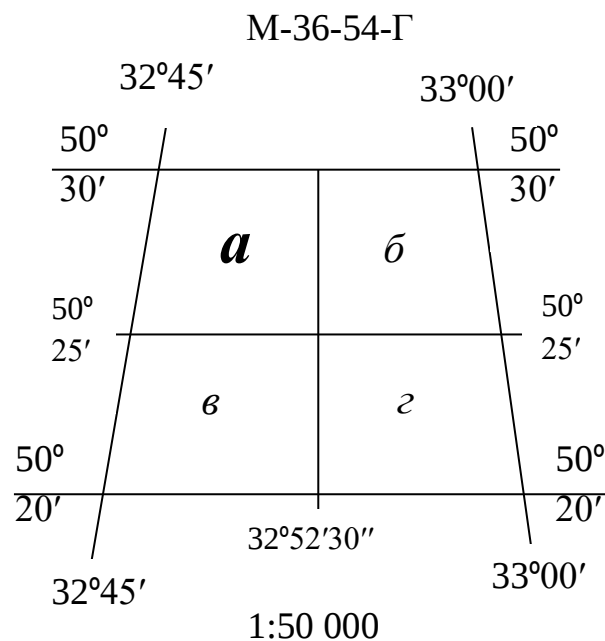


Рис. 12. Аркуш карти масштабу 1:50000, поділений на аркуші карти масштабу 1:25000

Один аркуш карти масштабу 1:25 000 містить 4 аркуша карти масштабу 1:10000, які позначають арабськими цифрами 1,2,3,4 і записують після номенклатури масштабу 1:10 000. Розміри аркуша по широті 2'30'', по довготі 3'45'' (рис. 13).

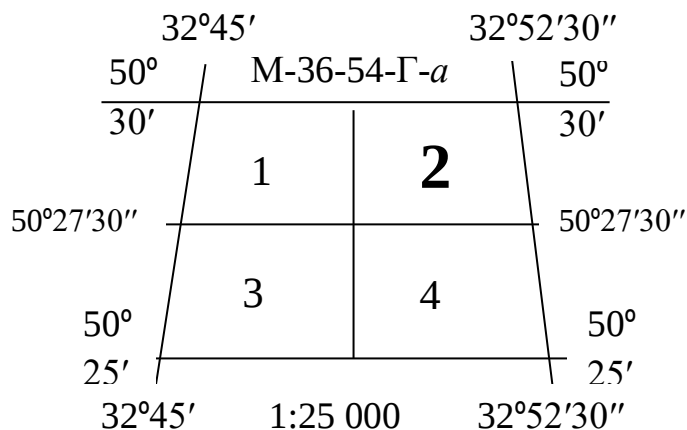


Рис. 13. Аркуш карти масштабу 1:25000, поділений на аркуші карти масштабу 1:10000

Відповідь.

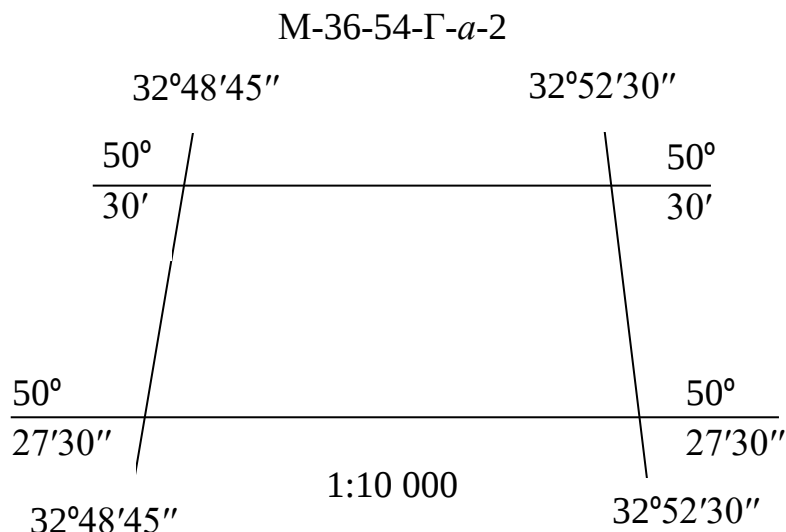


Рис. 14. Аркуш карти масштабу 1:10000

Контроль: розміри аркуша карти масштабу 1:10 000 – по широті 2'30'', по довготі – 3'45''.

Приклад 2 (рис. 15).

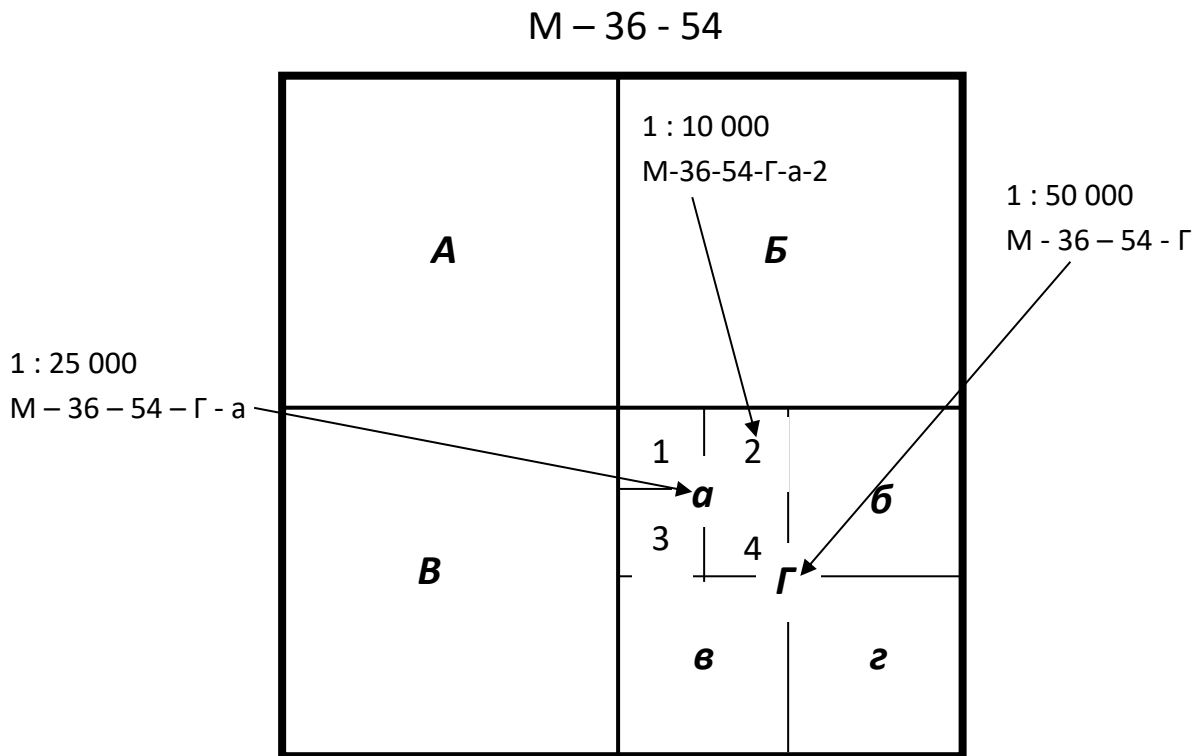


Рис. 15. Схема розподілу території, охопленої аркушем карти М – 36 – 54 масштабу 1 : 100 000, на трапеції аркушів карт крупніших масштабів

Завдання 3. Визначити географічні координати кутів рамки карти масштабу 1:10000 за виданою викладачем номенклатурою. 2). Визначити за номенклатурою виданого топографічного плану його масштаб та графічно зобразити його положення на аркуші топографічного плану масштабу 1 : 100 000.

2.4. Рельєф і його зображення на топографічних картах та планах

Основні форми рельєфу докладно описані у підручнику [3] с. 44-44 та в навчальному посібнику [6] с. 24 – 34.

Вид, взаємне положення і зв'язок між собою нерівностей рельєфу легко розпізнаються на карті за рисунком горизонталей. Однак зображення хребтів і улоговин дуже схожі між собою і розрізнити їх можна за напрямком схилів. Тому основна суть читання рельєфу за картою полягає в тому, щоб швидко зорієнтуватись в напрямках нерівностей різноманітних схилів. Цьому суттєво допомагають рисунок горизонталей, берг-штрихи і позначки висот, які на карті доповнюють горизонталі.

Горизонталь – замкнена крива лінія, яка з'єднує точки земної поверхні, які розміщені на однаковій рівневій поверхні від прийнятого референц-еліпсоїда.

На планах і картах горизонталі креслять коричневим кольором. Цим горизонталі відрізняються на планах від доріг і інших ліній контурів, що обводяться чорною тушшю.

Для полегшення читання рельєфу кожна п'ята (відраховуючи від рівневої поверхні) суцільна горизонталь потовщена. Так, наприклад, при висоті перерізу 1 м, потовщеними горизонталями будуть 5, 10, 15, 20 і т.д.

Відмітки горизонталей завжди кратні висоті перерізу.

Горизонталі не проводяться через вулиці населених пунктів, дороги, ріки, позначені обома берегами, будівлі і т.д.

Горизонталі мають такі властивості:

1) усі точки, які знаходяться на горизонталі, мають однакову абсолютну висоту, що відрізняється від висоти точок сусідньої горизонталі на висоту перерізу рельєфу. Відстань по прямовисній лінії між сусідніми горизонталями називають **висотою перерізу рельєфу h** ;

2) за кількістю горизонталей можна визначити перевищення одних точок місцевості над іншими;

3) найкоротша відстань між двома горизонталями – перпендикуляр до них, що відповідає напрямку найбільшої крутості;

4) вододільні лінії та осі лощовин перетинаються горизонталями під прямим кутом;

5) горизонталі на карті не перетинаються і зберігають подібність відповідних їм ліній на місцевості, утворених у результаті уявного перерізу рельєфу площинами. Отже, горизонталі на карті точно передають форми рельєфу та їх розміщення і поєднання.

Берг-штрих – це короткі штрихи на горизонталях (перпендикулярні до них), напрямлені у бік падіння схилу (пониження місцевості) (рис. 16).

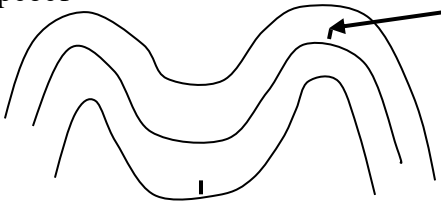
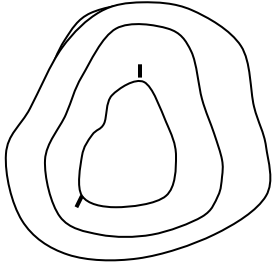
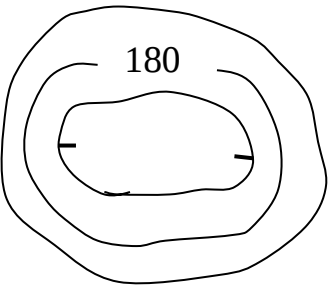
хребет  гора 	Берг-штрихи розміщують на вигинах горизонталей в найбільш характерних місцях, переважно біля вершин, сідловин або на дні котловин, а також на схилах. На підвищеннях (гора, хребет) горизонталі витягуються і заокруглюються в бік пониження схилу.
	За позначками на карті завжди можна визначити напрямок пониження місцевості.
котловина 	Позначки горизонталей (підписи горизонталей) – цифрові підписи на горизонталях, які зазначають висоту горизонталі над рівнем моря. Верх цих цифр завжди дивиться в бік підвищення схилу. Підписи горизонталей завжди виконують коричневим кольором. На пониженнях (котловина, улоговина) горизонталі заокруглюються у бік підвищення схилу.

Рис. 16. Визначення по горизонталях форм рельєфу

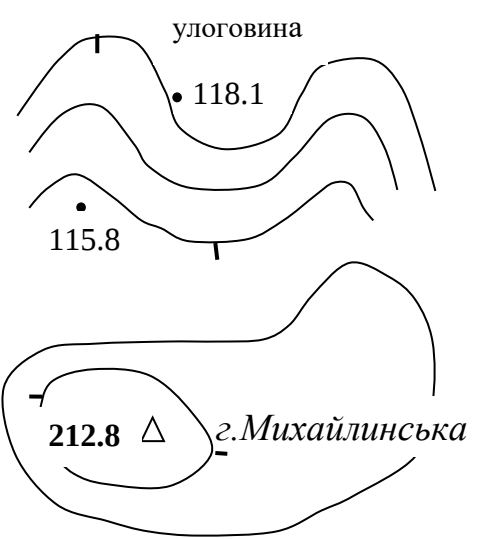
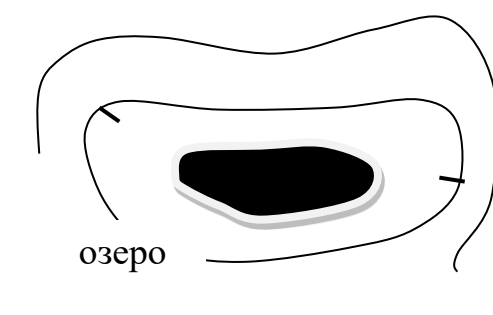
	Відмітки (позначки) висот окремих точок показують висоту над рівнем моря найбільш характерних точок місцевості – вершини гір, хребтів, найвищих точок вододілу, найнижчих точок улоговин, котловин та інших точок, які можуть бути орієнтирами на місцевості. Відмітки пунктів державної мережі виділяють на картах більшими цифрами і доповнюють умовними знаками.
	Пониження рельєфу завжди іде в бік водоймищ (річок, озер).

Рис. 16 (продовження). Визначення по горизонталям форм рельєфу

Завдання 4. За картою, яка видається викладачем, визначити форми рельєфу.

2.5. Графік закладень (рис. 17, 18)

Шкалою закладень називають спеціальний графік, який друкується на всіх топографічних картах поряд із лінійним масштабом. Стрімкість місцевості на карті між горизонталями можна визначити за допомогою графіка закладень. Для цього в розтвір циркуля-вимірювача вводять величину закладення і суміщають його з лініями по горизонталі та кривій графіка. По шкалі графіка беруть значення кута нахилу ν° (рис. 18, а). Нехай розтвір циркуля займе положення mn , тоді в цьому випадку стрімкість схилу $\nu = 2^\circ 26'$.

Графік закладень по нахилах використовують так, як і графік по кутах нахилу. Так, наприклад, для лінії ab нахил $i = 0,0027$ (рис. 18, б).

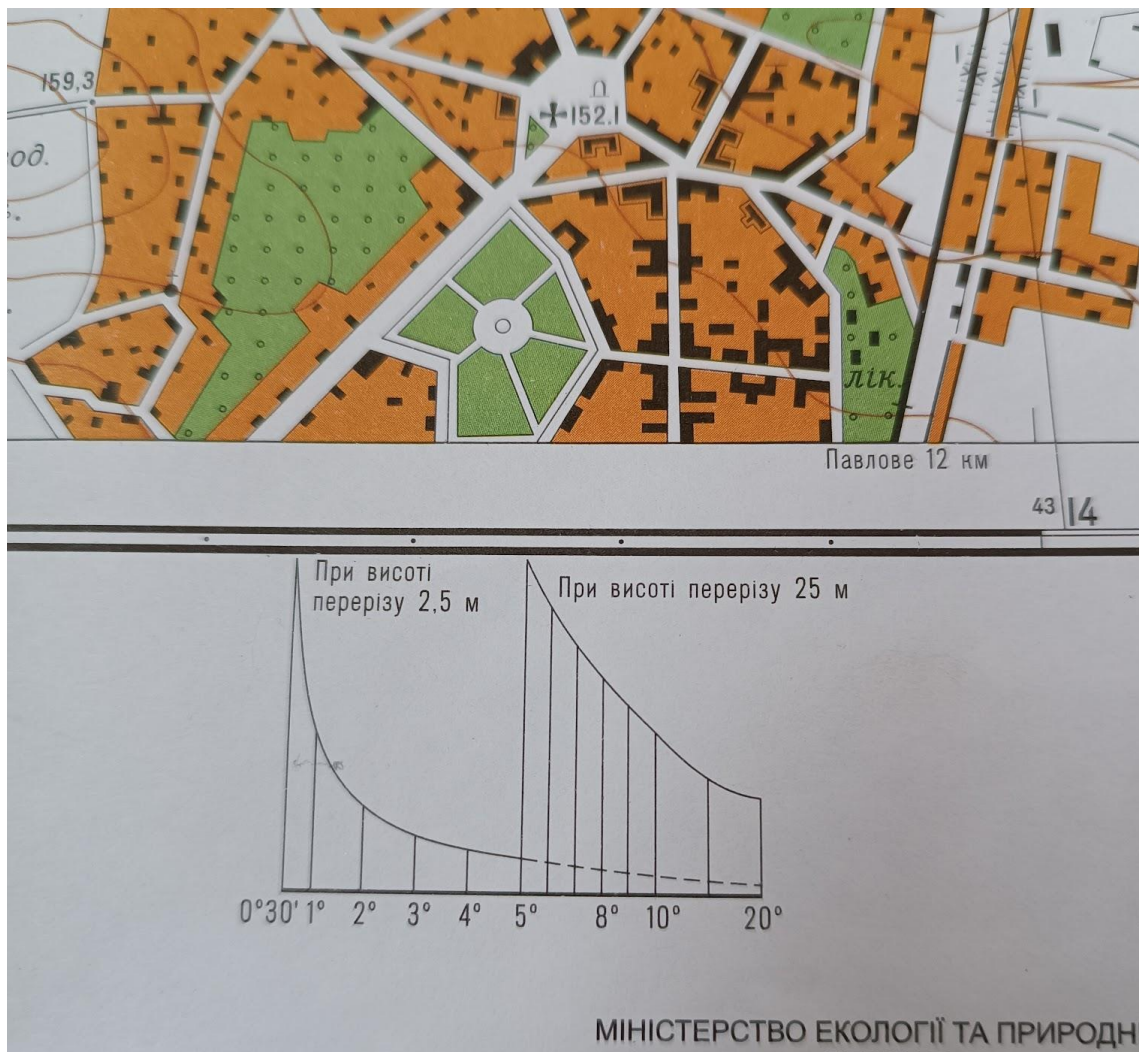


Рис. 17. Зображення графіка закладень по кутах нахилу на карті масштабу 1:10 000

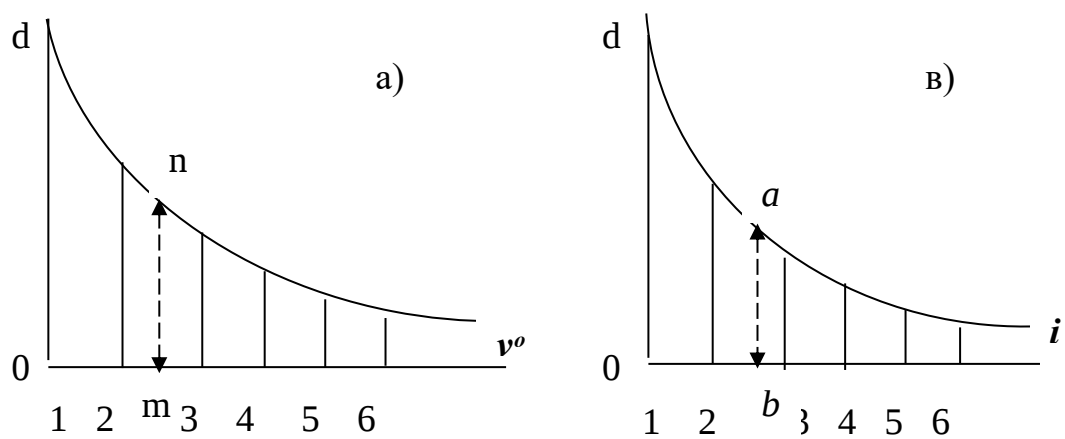


Рис. 18. Графік закладень: а) по кутах нахилу; б) по нахилах

Завдання 5. Використовуючи графік закладень на навчальній карті У-34-37-В-в-4 визначити кути нахилу ν від горизонталі до горизонталі вздовж польової дороги, яка іде по схилу від г. Михайлинська до горизонталі з позначкою 200 м.

2.6. Умовні знаки та їх класифікація

Вивчаючи умовні знаки місцевих предметів, треба не просто формально запам'ятовувати той чи інший умовний знак, а чітко уявляти той місцевий предмет, який зображують даним умовним знаком. Для цього треба прочитати посібник [2], де даються пояснення до умовних знаків. Мінімальна кількість умовних знаків, які студент повинен запам'ятати на залік, це знаки, розміщені на сторінках 42 – 43 підручника [3] і на полях карти У-34-37-В-в-4.

Контрольні питання та завдання

1. За допомогою навчальної карти У-34-37-В-в-4 намалюйте в зошиті для лабораторних робіт умовні знаки таких предметів і об'єктів на місцевості:
 - а) промислове підприємство без труби; б) шахти; в) буровини без вишок; г) водяні млини; д) пам'ятники; є) радіощогли; ж) окремих камінь-орієнтир; з) кладовище з густою деревною рослинністю.
2. Охарактеризуйте ліс, зображений в квадраті 6713.
3. Дайте повну характеристику залізниці на карті.
4. Які дороги розходяться з населеного пункту Снов (квадрат 6413)?

3. Лабораторна робота №2. Розв'язання інженерних задач на топографічних картах і планах

Ця лабораторна робота охоплює такі теми:

1. Розв'язання задач на орієнтування.
2. Розв'язання прямої та оберненої геодезичних задач.
3. Визначення висот точок та стрімкості схилу.
4. Визначення ухилу лінії на карті.
5. Побудова на карті ліній із заданим нахилом.
6. Побудова профілю місцевості.
7. Визначення площ аналітичним методом.

3.1. Рішення задач на орієнтування

Орієнтування ліній на місцевості полягає у визначенні їх напрямку щодо іншого напрямку, взятого за початковий. Необхідність в орієнтуванні виникає у процесі зображення ліній на планах і картах, а також під час перенесення проєктів споруд на натуру.

За початкові напрямки в геодезії приймають таке: істинний меридіан (географічний), магнітний меридіан, осьовий меридіан зони (або лінія йому паралельна). Залежно від прийнятого початкового напрямку, положення лінії визначають відповідно до градусних значень кутів, які називають азимутом (A), магнітним азимутом (A_M), дирекційним кутом (α). Кут між північним напрямком істинного меридіана в певній точці і вертикальною лінією координатної сітки (паралельна осьовому меридіану) називають зближенням меридіанів і позначають грецькою буквою γ (гама). Якщо лінія сітки відхиляється північним кінцем на схід від істинного меридіана, то зближення меридіанів східне (зі знаком $+$), у разі відхилення в протилежний бік – західне (зі знаком $-$). Кут між північним напрямком істинного і магнітного меридіанів називають магнітним схиленням і позначають грецькою буквою δ (дельта). Схилення є східним (зі знаком $+$), якщо північний кінець магнітного меридіана відхиляється на схід, і західним (зі знаком $-$) у разі відхилення на захід.

Коли зближення меридіанів і магнітне схилення відомі, то виникає зв'язок:

$$A = \alpha + \gamma \quad (3.1)$$

$$A_M = A - \delta \quad (3.2)$$

$$A_M = \alpha - (\delta - \gamma) \quad (3.3)$$

$$\alpha = A - \gamma \quad (3.4)$$

$$\alpha = A_M + \delta - \gamma \quad (3.5)$$

Розв'язувати задачі на залежність між орієнтирними кутами краще графічно. Таке рішення не потребує запам'ятовування формул. Для графічного вирішення задачі треба зробити рисунок, на якому схематично показати напрямки істинного меридіана, магнітного меридіана, осьового меридіана (вертикальна лінія координатної сітки) і напрямок лінії, положення якої визначають. При цьому істинний меридіан на рисунку завжди показують прямою вертикальною лінією, а магнітний меридіан і осьовий (лінія координатної сітки) показують прямими, що відхиляються від істинного меридіана на схід або захід, залежно від знаків зближення меридіанів і схилення магнітної стрілки.

Приклад 1 (рис. 19).

Відомо: $A_{AB} = 160^{\circ}00'$

$\delta = +6^{\circ}30'$, $\gamma = -1^{\circ}30'$

Обчислити: α_{AB} , A_M лінії AB .

З рисунка видно, що A_M буде менше істинного азимута A лінії AB на величину кута схилення, тобто $A_M = 160^{\circ}00' - 5^{\circ}30' = 154^{\circ}30'$,

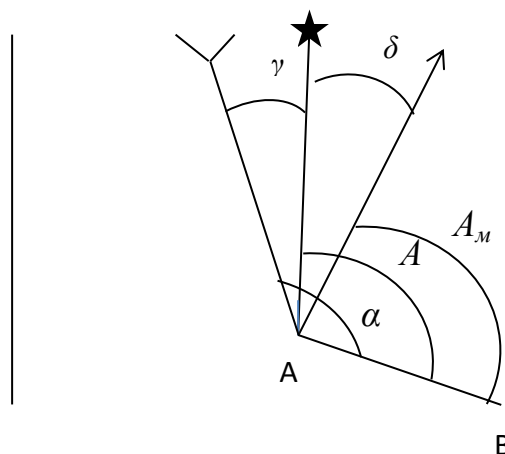


Рис. 19. Схема рішення задачі

Дирекційний кут α буде більший A (азимута) на величину γ , тобто $\alpha = 160^{\circ}00' + 1^{\circ}30' = 161^{\circ}30'$.

Якщо вирішувати задачу за формулами, то рішення буде мати такий вигляд:

$$A_M = A - \delta = 160^{\circ}00' - (+5^{\circ}30') = 154^{\circ}30',$$

$$\alpha = A - \gamma = 160^{\circ}00' - (-1^{\circ}30') = 161^{\circ}30'.$$

Завдання 6. Вирішити задачу на орієнтування, використовуючи схему і формули з прикладу 1 за такими даними:

$A_{AB} = 160^{\circ} - N^{\circ}$, $\delta = 6^{\circ} - (30' + N')$, $\gamma = -1^{\circ} + (30' + N')$, де N° – номер студента за списком групи

Приклад 2 (рис. 20).

Відомо: $\alpha = 225^{\circ}00'$,

$\gamma = -2^{\circ}10'$, $\delta = -10^{\circ}30'$.

Обчислити: A , A_M лінії AB

З рисунка видно, що A менше α на кут γ (зближення меридіанів), тобто $A = 225^{\circ}00' - 2^{\circ}10' = 222^{\circ}50'$.

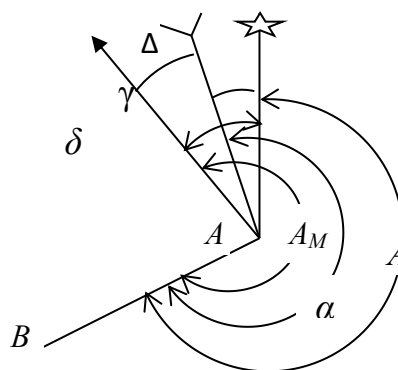


Рис. 20. Схема рішення задачі

A_M більше α на різницю кутів δ і γ , тобто на величину середнього відхилення магнітної стрілки Δ . Кут Δ ще називають поправкою в дирекційний кут.

$$A_M = 225^\circ 00' + (10^\circ 30' - 2^\circ 10') = 233^\circ 20'.$$

Під час використання формул рішення буде мати такий вигляд:

$$A = \alpha + \gamma = 225^\circ 00' + (-2^\circ 10') = 222^\circ 50',$$

$$A_M = \alpha - (\delta - \gamma) = 225^\circ 00' - (-10^\circ 30' - (-2^\circ 10')) = 233^\circ 20'.$$

Завдання 7. Вирішити задачу на орієнтування, використовуючи схему і формули з *прикладу 2* за такими даними: $\alpha = 225^\circ 00' + N_2$, $\gamma = -2^\circ + (10' + N_2')$, $\delta = -10^\circ + (30^\circ + N_2')$, де N_2 – номер студента за списком групи.

Затитання для самоперевірки

1. Що називається орієнтуванням ліній?
2. Що називається істинним (або магнітним) азимутом?
3. Що називається дирекційним кутом?
4. Що називається схиленням магнітної стрілки?
5. Що називається зближенням меридіанів?

3.2. Розв'язання прямої та оберненої геодезичних задач

Пряма геодезична задача. Нехай AB (рис. 21) – лінія на місцевості, щодо якої відомі її горизонтальне прокладання d (проекція лінії на горизонтальну площину), дирекційний кут α_{AB} і координати вихідної точки A (X_A ; Y_A). Необхідно визначити координати точки B (X_B , Y_B).

Різницю ΔX і ΔY координат точок A і B називають *приростами координат*. Згідно з рис. 10:

$$\Delta X = X_B - X_A, \quad \Delta Y = Y_B - Y_A.$$

З прямокутного трикутника ABC маємо:

$$\Delta X = d_{AB} \cos \alpha, \quad \Delta Y = d_{AB} \sin \alpha. \quad (3.5)$$

Знаки ΔX і ΔY залежать від знаків $\cos \alpha$ і $\sin \alpha$ (табл. 2).

Обчислюємо координати точки B :

$$X_B = X_A + \Delta X, \quad Y_B = Y_A + \Delta Y.$$

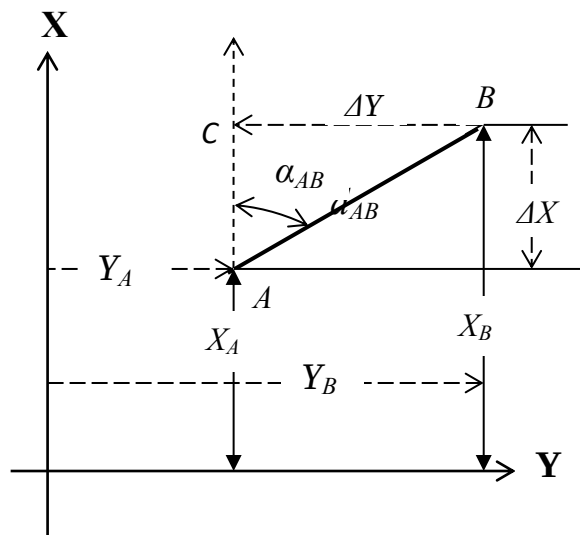


Рис. 21. Пряма і обернена геодезичні задачі на площині

Таблиця 2

Чверть прирости	I – ПнСх 0 – 90°	II – ПдСх 90° – 180°	III – ПдЗх 180° – 270°	IV – ПнЗх 270° – 360°
ΔX	+	–	–	+
ΔY	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\sin \alpha$	+	+	–	–

Обернена геодезична задача. Відомі координати точок A і B .
Обчислити горизонтальне прокладання d_{AB} і дирекційний кут α_{AB} .

З прямокутного трикутника ABC маємо :

$$\alpha_{AB} = \arctg = \Delta Y / \Delta X \quad (3.6)$$

$$d = \Delta X / \cos \alpha = \Delta Y / \sin \alpha \quad (3.7)$$

або за теоремою Піфагора:

$$d = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad (3.8)$$

Приклад. Відомо : $X_A = 68\,450$ м, $Y_A = 311\,537$, $X_B = 67\,635$ м, $Y_B = 310\,955$ м. Визначити дирекційний кут α_{AB} та довжину лінії d_{AB} .

За формулами (3.6) – (3.8) отримаємо:

$$r_{AB} = \arctg \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{310\,955 - 311\,537}{67\,635 - 68\,450} = \arctg \frac{-582}{-815} = 35^\circ 53'$$

$$r_{AB} = 35^\circ 53' - \text{III чверть, } \alpha_{AB} = 180^\circ + 35^\circ 53' = 215^\circ 53'.$$

$$d_{AB} = \sqrt{815^2 + 582^2} = 1001,47 \text{ м.}$$

$$d_{AB} = \frac{\Delta X}{\cos \alpha} = \frac{-815}{\cos 215^\circ 53'} = 1001,46 \text{ м.}$$

$$d_{AB} = \frac{\Delta Y}{\sin \alpha} = \frac{-582}{\sin 215^\circ 53'} = 1001,49 \text{ м.}$$

Завдання 8. Визначити за картою, яка видається викладачем, прямокутні координати точок A і B , виміряти транспортиром дирекційний кут лінії AB , горизонтальне прокладання d_{AB} і вирішити пряму та обернену геодезичні задачі.

3.3. Визначення висот точок

Коли шукана точка A лежить на горизонталі, то її позначка H_A дорівнює висоті горизонталі. Висоти непідписаних горизонталей визначають від підписаної горизонталі за кількістю перерізів горизонталей n . Висоту перерізу горизонталей h підписують під лінійним масштабом біля південної сторони рамки карти. Якщо такої інформації немає, то переріз визначають за формулою :

$$h = \frac{H_{max} - H_{min}}{n}, \quad (3.9)$$

де H_{max} і H_{min} – висоти підписаних горизонталей; n – кількість перерізів (закладень) між підписаними горизонталями.

Точка A лежить між горизонталями з висотами H_1 і H_2 , $H_1 < H_2$.

Провівши через точку A найкоротшу лінію між горизонталями і помірявши відстань d , a і b , в масштабі карти отримаємо:

$$H_A = H_1 + ha / d = H_2 - hb / d,$$

де h – висота перерізу (рис. 22).

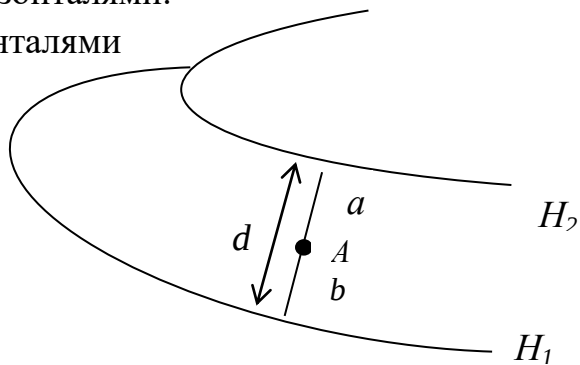


Рис. 22. Визначення висоти точки

Завдання 9. Визначити на учбовій карті переріз горизонталей за формулою (3.9). Поставити на карті, виданій викладачем, дві точки A і B між горизонталями в будь-якому місці. Визначити їх відмітки.

3.4. Визначення ухилу лінії на карті

Нахилом лінії i називають відношення перевищення h лінії до її закладення d . Перевищенням лінії AB називають різницю позначок точок A і B . Наприклад: $H_A = 120$ м, $H_B = 150$ м, тоді $h_{AB} = 150 - 120 = 30$ м. Закладення d (горизонтальне прокладання лінії AB) вимірюють по карті за допомогою лінійного масштабу.

Нехай лінія місцевості AB нахилена під кутом v до горизонту AA' . Тоді

$$i = h / d = \operatorname{tg} v \quad (3.10)$$

Отже, ухил лінії є тангенс кута (рис. 23)

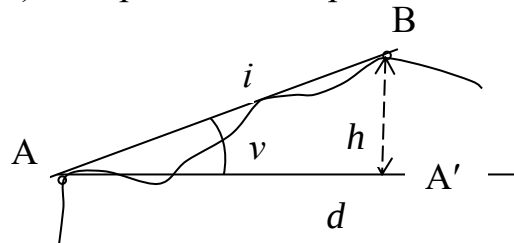


Рис. 23. Нахил лінії

Наприклад, при $h = 15$ м і $d = 200$ м за формулою (3.10) маємо:

$i = 15 : 200 = 0.075$ або 75‰. Ухил виражають у тисячних частках або промілліє, а стрімкість ухилу при цьому дорівнює: $v = 4^{\circ}17'$.

Завдання 10. Поставити на карті в різних місцях точки А і В. Знайти їх позначки і обчислити ухил лінії АВ і стрімкість ухилу v .

3.5. Побудова на карті лінії заданого ухилу

У камеральних вишукуваннях і проєктуванні споруд лінійного типу (автомобільних та залізничних шляхів, каналів, трубопроводів тощо) на топографічній карті або плані визначають положення лінії (вісь споруди) так, щоб її нахил не перевищував граничного ухилу $i_{гр}$.

Величина граничного ухилу завжди задається і пишеться в нормативних документах під час проєктування споруди.

Наприклад (рис. 24), треба через точки А і В

провести найкоротшу лінію так, щоб окремі її ділянки не перевищували граничний нахил $i_{гр}$.

Обчислюють найкоротшу відстань між сусідніми горизонталями, яка буде відповідати ухилу $i_{гр}$,

за формулою $d_{гр} = \frac{h}{i_{гр}}$,

де h – переріз рельєфу для даної карти.

Взявши в розхил циркуля-вимірника в масштабі карти (плана)

відстань $d_{гр}$, засікають цим радіусом з точки А сусідню горизонталь в точках С і Д. З цих точок тим же радіусом засікають наступну горизонталь і т.д. Таким чином отримують два варіанти рішення задачі. Напрямок АДВ, як найбільш короткий, приймають за шуканий.

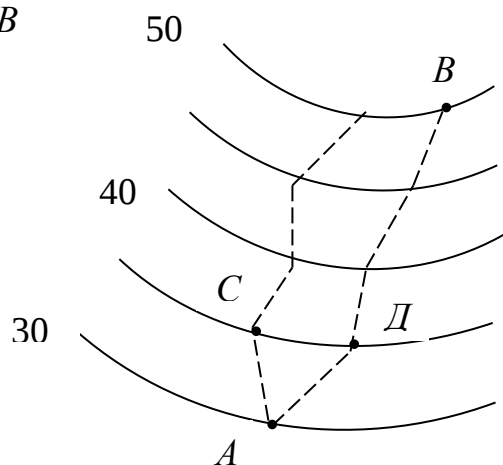


Рис. 24. Побудова лінії із заданим нахилом

Завдання 11. На навчальній карті на будь-якій відстані поставити точки А і В. Провести лінію із заданим ухилом.

3.6. Визначення площ аналітичним способом

Під визначенням площі будь-якої ділянки (рис. 25) за топографічною картою розуміють сукупність вимірювальних і обчислювальних робіт, у результаті яких обчислюється площа ділянки в земельній мірі (квадратних метрах, гектарах тощо). Причому визначається площа не фізичної поверхні ділянки місцевості, а її проєкція на горизонтальну площину. Залежно від

необхідної точності результатів застосовують різні способи визначення площі: за допомогою палетки, графічний, аналітичний, механічний, фотоелектронний. Кожний зі способів може застосовуватися самостійно або в комбінації з іншим.

Точність визначення площі аналітичним способом залежить від точності визначення координат точок.

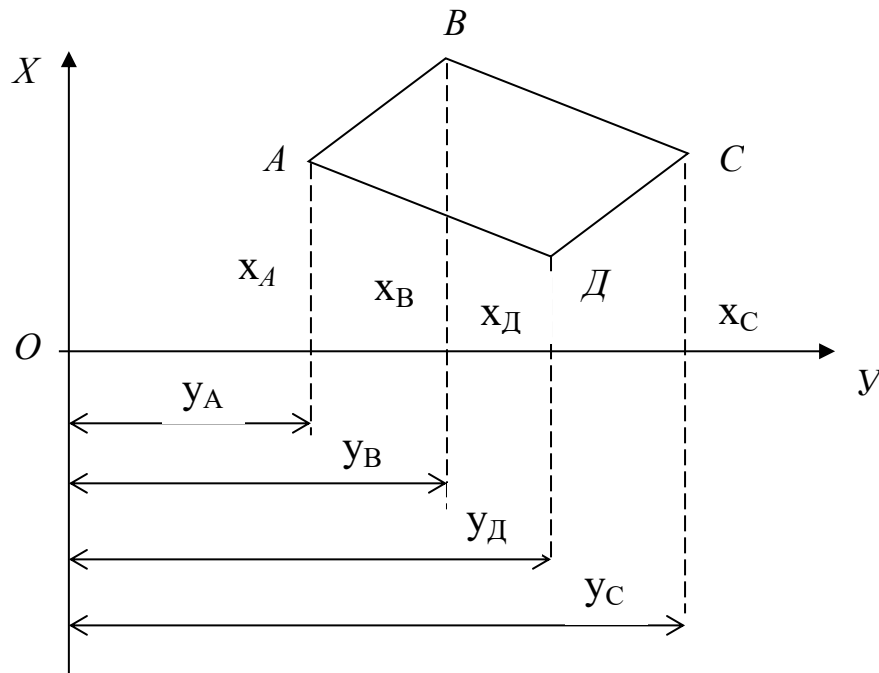


Рис. 25. Визначення площі ділянки

$$2S = x_A \cdot (y_B - y_D) + x_B \cdot (y_C - y_A) + x_C \cdot (y_D - y_B) + x_D \cdot (y_A - y_C)$$

Формулу обчислення площі n – кутника в загальному вигляді можна записати таким чином:

$$S = 0.5 \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (3.11)$$

або

$$S = 0.5 \sum_{i=1}^n y_i (x_{i-1} - x_{i+1}), \quad (3.12)$$

де n – кількість вершин полігона;

i – номер вершини; $i - 1$ та $i + 1$ – попередня вершина та наступна вершина по ходу стрілки годинника для вершини полігона.

Наприклад, для точки B попередня вершина буде точка A , а наступною буде точка C .

Приклад. Обчислити площу земельної ділянки, якщо відомі координати її вершин (див. рис. 25).

Таблиця 3

№ вершин	X_i	Y_i	$Y_{i+1} - Y_{i-1}$	$X_{i-1} - X_{i-1}$	$X_i \cdot (Y_{i+1} - Y_{i-1})$	$Y_i \cdot (X_{i-1} - X_{i+1})$
А	68750	311025	510	- 680	35062500	-211497000
В	68630	311910	- 805	- 1230	- 54699750	- 383022000
С	67520	311830	805	1230	55247150	383649300
Д	67950	311400	- 510	680	- 34435200	21204440
			0	0	1174700	1174700

$$S = 0.5 \cdot 1174700 = 587350 \text{ м}^2 = 58,73 \text{ га}$$

Завдання 12. Поставити на карті чотири точки А, В, С, Д, з'єднати їх лініями, щоб утворився чотирикутник. Зняти з карти прямокутні координати цих точок і обчислити площу ділянки (див. табл. 3).

4. Лабораторна робота №3. Похибки вимірів

Для більш докладного вивчення теми прочитати підручник [3] сторінки 95 – 110, та посібник [7].

Будь-які вимірювання проводять за наявності таких факторів: 1) об'єкт вимірювання; 2) суб'єкт вимірювання – спостерігач; 3) вимірювальний прилад; 4) метод вимірювання – сукупність правил і дій під час вимірювання; 5) зовнішнє середовище. Залежно від умов роботи вимірювання можуть бути *рівноточними* і *нерівноточними*. Якщо в процесі вимірювань зберігаються всі п'ять факторів, то такі вимірювання називають *рівноточними*. Розрізняють три основних види похибок: *грубі похибки*, *систематичні похибки*, *випадкові похибки*.

Випадковою похибкою Δ називають різницю між виміряним значенням l і її істинним значенням X , тобто

$$\Delta = l - X \quad (4.1)$$

До того ж сума випадкових похибок, розділена на їхнє число, за необмеженої кількості вимірів наближається до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta]}{n} \cong 0 \quad (4.2)$$

Ця властивість випадкових помилок називається *властивістю компенсації* і дає змогу визначити за низкою вимірів однієї і тієї ж величини результат, найбільш близький до істинного.

4.1. Принцип арифметичної середини

Розглянемо тільки рівноточні виміри. Нехай деяка величина, істинне значення якої дорівнює X , виміряна n разів. При цьому отримані значення $l_1, l_2, \dots, l_n$. На основі формули (4.1) маємо:

$$\begin{array}{r} \Delta_1 = l_1 - X, \\ \Delta_2 = l_2 - X, \\ \dots\dots\dots \\ \Delta_n = l_n - X \end{array}$$

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - X$$

Враховуючи формулу (4.2), запишемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[l]}{n} - X = 0$$

Позначимо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[l]}{n} = \bar{X}$ і отримаємо $\bar{X} = X$, коли $n \rightarrow \infty$.

Остаточного отримаємо:
$$\bar{X} = \frac{[l]}{n} \quad (4.3)$$

Таким чином, за вірогідніше значення виміряної величини під час рівноточних спостережень треба приймати середню арифметичну величину із ряду результатів вимірювань. Її називають *арифметичною серединою*.

4.2. Середня квадратична похибка

На практиці результат рахується однаково помилковим, буде він більше істинного значення або менше. Тому намагаються встановити такий критерій оцінки точності спостережень, який не залежав би від знаків окремих похибок і відображав би найбільші з них. Таким вимогам задовольняє *середня квадратична похибка*:

1) кожного окремого виміру

– за формулою Гаусса, коли відомо істинне значення шуканої величини

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \quad (4.4)$$

– за формулою Бесселя, коли не відоме X , а обчислене $\bar{X}$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad (4.5)$$

2) середнього арифметичного

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (4.6)$$

Приклад. В результаті шести вимірювань довжини лінії на місцевості отримані дані, приведені в табл. 4.

Таблиця 4

Виміряне значення лінії l , м	v , см	v^2 , см ²	Обчислення
56,25	+1	1	$m = \sqrt{\frac{8}{6-1}} = 1,26 \text{ см}$
56,23	-1	1	$M = \frac{1,26}{\sqrt{6}} = 0,52 \text{ см}$
56,24	0	1	$\Delta_{\text{ГР}} = \pm 2 \cdot 1,26 = \pm 2,52 \text{ см}$
56,26	+2	4	$\frac{1}{T} = \frac{2,52}{56,23} = \frac{1}{2231}$
56,23	-1	1	
56,23	-1	1	
$\bar{x} = 56,24$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 8$	

де $\Delta_{\text{ГР}}$ – гранична похибка, яка обчислюється за формулою :

$$\Delta_{\text{ГР}} = \pm t \cdot m,$$

де $t = 2$ – під час вимірювань технічної точності; $t = 3$ – під час високоточних вимірювань.

Для лінійних вимірювань визначають відносну похибку, яка теж є мірою їх точності за формулою:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta_{\text{ГР}}}{\bar{x}} \quad (4.7)$$

Завдання 13. Виконати математичну обробку вимірної рулеткою лінії місцевості за сталого комплексу умов. Результати вимірів взяти з табл. 4, збільшивши дві останні цифри після коми в кожному вимірі на номер студента за списком групи. Наприклад: номер студента за списком групи № =12, тоді $l_1 = 56,25 + 0,12 = 56,37\text{м}$, $l_2 = 56,23 + 0,12 = 56,35\dots$ і так далі. Номер студента за списком групи № = 3, тоді $l_1 = 56,25 + 0,03 = 56,28 \text{ м}$, $l_4 = 56,26 + 0,03 = 56,29\dots$ і так далі.

4.3. Вага. Загальне середнє арифметичне

Поняття про вагу вводять у процесі обробки результатів **нерівноточних** вимірів. Вага визначає ступінь надійності результатів вимірів. Чим надійніший результат, тим більша його вага. Отже, вага пов'язана з точністю вимірів.

Кожен результат вимірювання можна характеризувати середньою квадратичною похибкою m_i , довжиною L_i , кількістю вимірів N_i , кількістю вимірів однієї і тієї ж величини n_i . Виходячи з цього, вагу можна обчислювати за формулами:

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}; \quad p_i = \frac{c}{L_i}; \quad p_i = \frac{c}{N_i}; \quad p_i = \frac{n_i}{c} \quad (4.8)$$

Величину коефіцієнта c вибирають такою, щоб значення ваг p_i були близькими до одиниці.

Імовірним або найближчим значенням до шуканої величини X буде загальне середнє арифметичне $\bar{X}$, яке обчислюється за формулою

$$\bar{X} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[px]}{[p]} \quad (4.9)$$

Мірою точності буде:

а) середня квадратична похибка одиниці ваги

– за формулою Гаусса

$$\mu = \sqrt{\frac{[p \Delta^2]}{[p]}} \quad (4.10)$$

– за формулою Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \quad (4.11)$$

б) середня квадратична похибка загального середнього арифметичного

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \quad (4.12)$$

в) середні квадратичні похибки окремих вимірів обчислюються за формулою

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} \quad (4.13)$$

Приклад. Виконати математичну обробку нерівноточних вимірів під час визначення висоти точки A з чотирьох різних напрямків.

$$\bar{H}_A = H_0 + \frac{p \Delta H}{[p]} = 184,45 + \frac{11,19}{4,1} = 184,48,$$

де H_0 – довільно взята висота точки близька за значенням до виміряних.

Відповідно обчислимо:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{271}{4-1}} = 9,5 \text{ см}; \quad M = \frac{\mu}{\sqrt{p}} = 4,6 \text{ см}.$$

Таблиця 5

Номер ходу	H_A (м)	L_n (км)	$p = \frac{5}{L}$	$\Delta H =$ $H_i - H_0$ (см)	$p\Delta H$	v (см)	$p v$	$[p v^2]$
1	184,46	5,0	1,0	+ 1	+ 1	– 2	– 2	4
2	184,32	8,0	0,6	–13	–7,8	–16	–9,6	153,6
3	184,56	3,0	1,7	+11	+18,7	+8	+13,6	108,8
4	184,45	6,0	0,8	0	0	–3	–2,4	4,6
$H_0 =$	184,45	Σ	4,1	Σ	+11,9	Σ	–0,4	271,0

Середня квадратична похибка визначення висоти точки A першого ходу складе $m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} = \frac{9.5}{\sqrt{1}} = 9.5$ см, і т.д.

Завдання 14. Виконати математичну обробку вимірювання висоти точки A по чотирьох ходах. Виміряні дані взяти з табл. 5. Замінити довжини ходів на $+ N_0$ км, де N_0 – номер студента за списком групи. *Наприклад*, $N_0 = 14$, тоді $L_1 = 5 + 14 = 19$ км, $L_2 = 8 + 14 = 22$ км і т. д.

4.4. Оцінка точності функцій виміряних величин

Досить часто визначувана величина y є функцією інших безпосередньо виміряних величин $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Якщо відомі середні квадратичні похибки виміряних величин $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$, то мірою точності функції y буде середня квадратична похибка:

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2}, \quad (4.14)$$

де $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ – часткові похідні за наближеними значеннями аргументів x_i .

Приклад. Визначити середню квадратичну похибку перевищення за формулою: $h = d \operatorname{tg} \nu$, де горизонтальне прокладання $d = 143.5$ м, кут нахилу

лінії до горизонту $\nu = 2^\circ 30'$. Визначені із середніми квадратичними похибками $m_d = 0.5$ м і $m_\nu = 1'$.

Обчислюємо часткові похідні

$$\frac{\partial h}{\partial d} = tq\nu, \quad \frac{\partial h}{\partial \nu} = \frac{d}{\cos^2 \nu}.$$

За формулою (4.15) отримуємо:

$$m_h = \sqrt{tq^2 \nu m_d^2 + \frac{d^2}{\cos^2 \nu} \frac{m_\nu^2}{\rho^2}} = 0,044^2 \cdot 0,5^2 + \frac{143,5^2}{0,999^2} \frac{1^2}{3438^2} = 4,8 \text{ см.}$$

Завдання 15. Визначити середню квадратичну похибку перевищення, якщо $d = 143,5$ м + № м № см, $\nu = 2^\circ 30'$ + №, де № – номер студента за списком групи, $m_d = 0,5$ м, $m_\nu = 1'$.

Приклад. Під час визначення площі прямокутної ділянки виміряні сторони $a = 120,52$ м та $b = 144,85$ м із середніми квадратичними похибками $m_a = 2$ см; $m_b = 3$ см. Визначити середню квадратичну похибку визначення площі ділянки $m_s = ?$

Площа ділянки обчислюється за формулою: $S = a \cdot b$.

За формулою (4.15) отримаємо:

$$m_s = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2 m_b^2} = \sqrt{b^2 m_a^2 + a^2 m_b^2}$$

Тоді

$$m_s = \sqrt{144,85^2 \cdot 0,02^2 + 120,52^2 \cdot 0,03^2} = \sqrt{8,4 + 13,1} = \sqrt{21,5^4} = 4,6 \text{ м}^2.$$

Завдання 16. Обчислити площу ділянки квадратної форми зі стороною $a = 100 + \text{№}$, № м, при $m_a = 2$ см.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Інструкція з топографічного знімання 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500. ГКНТА – 2.04 – 02 – 98 , (видання офіційне та доповнене). – Київ : ГУГК, 1998. – 156 с.
2. Умовні знаки для топографічних планів масштабів 1:5000, 1:2000, 1:1000, 1:500. ГУГК. – М.: Недра, 1989. – 286 с.
3. Войтенко С.П. Інженерна геодезія : підручник / С.П. Войтенко. – Київ : Знання, 2009. – 557 с.
4. Черняга П.Г. Інженерна геодезія. Лабораторні роботи, ч. I : навчальний посібник для студентів технічних вищих навчальних закладів освіти / П.Г. Черняга, Г.Г. Лебідь, М.П. Мальчук та ін. – Рівне : РДТУ, 1999. – 137 с.
5. Артамонов Б.Б. Топографія з основами картографії : навчальний посібник / Б.Б. Артамонов, В.П. Штангрет. – Львів : Новий Світ – 2000, 2006.– 248 с.
6. Войтенко С.П. Інженерна геодезія. Робота з картою та планом : методичні вказівки / С.П. Войтенко, І.В. Лапицький, П.О. Чуланов. – Київ : КНУБА, 2006. – 54 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методичне видання

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ГЕОДЕЗІЇ НА ТОПОГРАФІЧНИХ КАРТАХ ТА ПЛАНАХ

Методичні вказівки
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія»

Укладачі: **Адаменко** Олександр Вікторович,
Циколенко Олена Василівна,
Бондар Світлана Андріївна

Випусковий редактор *Л. С. Тавлуй*
Комп’ютерне верстання *К. А. Мавроді*

Підписано до друку 14.04.2025. Формат 60 x 84_{1/16}
Ум. друк. арк. 2,32. Обл.-вид. арк. 2,5.
Електронний документ. Вид. № 21/III-25

Видавець і виготовлювач:
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002

