

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

**РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО
НЕВИЗНАЧУВАНОЇ НЕСИМЕТРИЧНОЇ
РАМИ МЕТОДОМ СИЛ**

Методичні вказівки та індивідуальні завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
освітньої програми «Міське будівництво та господарство»

Київ 2022

УДК 624.01/07
Р64

Укладачі: І.Д. Кара, канд. техн. наук, доцент;
М.Г. Кушніренко, канд. техн. наук, доцент;
Р.М. Остапенко, асистент

Рецензент А.А. Козак, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск П.П. Лізунов, д-р техн. наук, професор

*Затверджено на засіданні кафедри будівельної механіки,
протокол № 8 від 16 червня 2022 року.*

В авторській редакції.

Розрахунок статично невизначуваної несиметричної рами
Р64 методом сил: методичні вказівки та індивідуальні завдання до
виконання розрахунково-графічної роботи / уклад.: І.Д. Кара та ін.
– Київ: КНУБА, 2022. – 32 с.

Містять короткі теоретичні відомості, методичні вказівки,
приклад розрахунку несиметричної рами з використанням методу сил та
завдання до виконання розрахунково-графічної роботи.

Призначено для студентів спеціальності 192 «Будівництво та
цивільна інженерія» освітньої програми «Міське будівництво та
господарство».

© КНУБА, 2022

ЗМІСТ

Загальні положення	4
Короткі теоретичні відомості	5
Приклад розрахунку несиметричної рами методом сил	11
Завдання до виконання розрахунково-графічної роботи	22
Список літератури	30

Загальні положення

Однією з фундаментальних дисциплін, які необхідні для якісної підготовки спеціалістів у будівельній сфері є будівельна механіка, оскільки вона вивчає методи розрахунку будівель і споруд на міцність, стійкість і жорсткість. Базуючись на отриманих раніше знаннях з вищої математики, фізики, теоретичної механіки та опору матеріалів, будівельна механіка знайомить студентів з основними підходами розрахунку будівельних споруд на дію статичних навантажень і динамічних впливів. При проходженні подальших курсів будівельних конструкцій та при виконанні курсових та дипломних проєктів застосовуються надані даною дисципліною знання та навички.

Для розуміння принципів розрахунку будівельних конструкцій студентам необхідно прослухати курс лекцій, пройти курс практичних занять з будівельної механіки та виконати розрахунково-графічні роботи (РГР). Методичні вказівки «Розрахунок статично невизначуваної несиметричної рами методом сил» розроблені для допомоги здобувачам при виконанні однойменної РГР, пояснення алгоритму та принципів розрахунку статично невизначуваних рам з використанням методу сил. Також допомогти студенту краще засвоїти матеріал та виконати роботу можуть навчальні та методичні матеріали [1-4] з будівельної механіки, в яких висвітлені важливі аспекти розрахунку конструкцій та наведені деякі приклади розрахунку задач.

Методичні вказівки складаються з: коротких теоретичних відомостей, в яких висвітлений теоретичний матеріал; прикладу виконання розрахунку статично невизначуваної рами з поетапними поясненнями і рисунками; схеми індивідуальних завдань з описом складу роботи.

РГР необхідно оформляти охайно на аркушах паперу формату А4. Титульний лист є першим аркушем роботи. В РГР після титульного листа вкладається видане завдання, після чого всі аркуші роботи скріпляються з лівого боку двома скобами.

Короткі теоретичні відомості

Усі інженерні споруди та їх окремі несучі елементи мають бути нерухомими, їх розрахункові схеми – геометрично незмінюваними. Необхідною умовою при цьому є виконання вимоги, щоб ступінь геометричної змінюваності системи Γ дорівнював або був меншим за нуль $\Gamma \leq 0$. З точки зору утворення конструкцій $\Gamma = 0$ означає, що кількість кінематичних в'язей, які з'єднують окремі частини системи та прикріплюють її до диску «земля», є мінімально необхідною. Присутність в системі, так званих, зайвих в'язей дозволяє збільшити її жорсткість, оскільки у випадку припинення роботи однієї чи декількох в'язей руйнування всієї конструкції не відбудеться. Разом з тим виникає проблема визначення внутрішніх зусиль в елементах споруди, оскільки кількість невідомих перевищуватиме кількість рівнянь рівноваги, а сама система буде статично невизначуваною.

Одним із класичних методів розрахунку статично невизначуваних систем є метод сил, який особливо широко використовується при розрахунку рам. Використовуючи цей метод, система, яка розраховується, шляхом відкидання в'язей замінюється іншою, яка може бути розрахована за допомогою рівнянь рівноваги. Така система і є основною системою методу сил, з якою необхідно в подальшому працювати. Вона обов'язково має бути статично визначуваною та геометрично незмінюваною. Для того, щоб дізнатись скільки в'язей необхідно відкинути, слід обчислити ступінь статичної невизначуваності рами n . Це можна зробити за допомогою спрощеної формули, яка є модифікацією формули Чебишова для рам:

$$n = 3 \cdot k - u, \quad (1)$$

де k – кількість замкнених контурів, які утворені елементами рами та диском «земля» (диск «земля» при цьому має бути одним замкненим диском); u – кількість простих шарнірів, включно з опорними. Шарнірно нерухома опора приймається як один шарнір, шарнірно рухома – як два. Ступінь статичної невизначуваності рами n є рівним ступеню геометричної змінюваності системи Γ , визначеному за класичною формулою Чебишова.

Якщо, для прикладу, взяти раму, зображену (рис. 1а), то ступінь її статичної невизначуваності n буде рівним (рис. 1б):

$$n = 3 \cdot 3 - 6 = 3.$$

Можна також визначити ступінь геометричної змінюваності Γ даної рами (рис. 1в):

$$\begin{aligned}
 G &= 3 \cdot D + 2 \cdot B - 3 \cdot П - 2 \cdot Ш - C - 3 = \\
 &= 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 1 - 3 = 12 - 15 = 3,
 \end{aligned}$$

де G – ступінь геометричної змінюваності системи; D – кількість простих дисків; B – кількість вузлів; $П$ – кількість припайок; $Ш$ – кількість простих шарнірів; C – кількість стержнів включно з опорними.

Обидва пораховані значення співпадають, тобто дана рама є три рази статично невизначуваною або має три «зайві» в'язі.

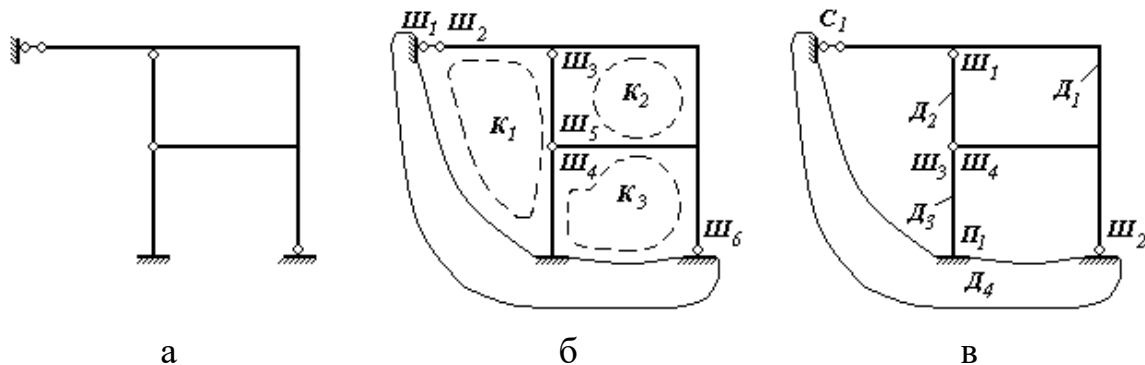


рис. 1

При виборі основної системи методу сил допускається відкидання лише кінематичних в'язей, які перетворюють систему в статично визначувану (умовно зайві в'язі), і не допускається відкидання в'язей, які перетворюють систему в геометрично змінювану або миттєво змінювану (абсолютно необхідні в'язі).

Оскільки в початковій рамі та основній системі методу сил деформації та внутрішні зусилля відрізняються між собою, то для усунення цієї розбіжності на основну систему замість видалених в'язей слід прикласти зусилля, які виникають в них в заданій рамі. При відкиданні одного опорного стержня прикладається одна реакція у відкинутій в'язі. Врізання одного простого шарніра в систему є еквівалентним відкиданню однієї в'язі, при цьому з обох боків від шарніра прикладаються два рівні за величиною та протилежні за напрямками зосереджені моменти. Наскрізний переріз елемента рами дозволяє відкинути відразу три в'язі, тому в місці розрізу треба прикласти три реакції: поздовжню, поперечну сили та зосереджений момент. Усі ці реактивні зусилля мають назву – основні невідомі методу сил і початково мають невідомі значення. Приклади відкидання в'язей і заміни їх відповідними реакціями наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Вузли вихідної рами	Вузли основної системи	Реакції, які замінюють відкинуті в'язі
		 або або

Для однієї рами можна обрати декілька варіантів основної системи методу сил. Кількість основних невідомих для будь-якої статично невизначуваної рами є постійною величиною і не залежить від обраного варіанту основної системи методу сил.

В обраній основній системі після відкидання в'язей стають можливими переміщення, які до цього унеможлилювались цими в'язями. Для визначення переміщення в напрямі однієї з вилучених в'язей у початково n разів статично невизначуваній рамі запишемо рівняння:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0, \quad (2)$$

де δ_{jk} – переміщення в основній системі в напрямі реакції X_j від дії одиничної сили X_k ; $\delta_{jk} \cdot X_k$ та Δ_{jP} – переміщення в напрямі реакції X_j від дії сили X_k та зовнішнього навантаження; рівність нулю означає, що сумарне переміщення в напрямі відкинutoї в'язі X_j від дії сил X_1, X_2, \dots, X_n та заданого навантаження має дорівнювати нулю ($j, k = 1, 2, \dots, n$).

Якщо записати рівняння для кожної відкинutoї в'язі, можна отримати систему з n рівнянь, де невідомими виступають реакції в n відкинutoх в'язях:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Прирівнюючи до нуля переміщення в основній системі методу сил в напрямках «зайвих» в'язей, напружено-деформований стан статично визначуваної системи стає еквівалентним напружено-деформованому стану початкової статично невизначуваної системи.

Коефіцієнти δ_{jk} та вантажні члени Δ_{jP} системи рівнянь можна визначити за допомогою формули Максвелла-Мора:

$$\delta_{jk} = \sum_{j=1}^n \int_l \frac{M_j \cdot M_k}{EI} dx, \quad (j, k = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

$$\Delta_{jP} = \sum_{j=1}^n \int_l \frac{M_j \cdot M_P}{EI} dx, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

де M_j, M_k, M_P – згинальні моменти в елементах основної системи, які виникають від дії одиничних сил X_j, X_k та зовнішнього навантаження; EI – жорсткість елементів рами на згин.

Для визначення значень коефіцієнтів та вільних членів системи рівнянь необхідно розглянути стани основної системи: одиничні (від дії однієї одиничної сили, прикладеної в напрямі відкинутої в'язі) та вантажний (при дії лише зовнішнього навантаження). При розгляді кожного з цих станів треба побудувати одиничні та вантажну епюри згинальних моментів.

Система канонічних рівнянь методу сил має властивості: по-перше, коефіцієнти на головній діагоналі (головні коефіцієнти) є додатними ($\delta_{jj} > 0$); по-друге, симетричні відносно головної діагоналі коефіцієнти (другорядні коефіцієнти) дорівнюють один одному ($\delta_{jk} = \delta_{kj}$).

Значення зусиль у відкинутих в'язях визначаються шляхом розв'язання системи рівнянь методу сил. Після цього можна переходити до визначення дійсних зусиль у початковій рамі. Для цього необхідно скористатись одним із двох способів.

Перший має назву спосіб додавання. Його можна використовувати, якщо в одиничних та вантажному стані були побудовані епюри згинальних моментів, поперечних та поздовжніх зусиль. Відповідно до принципу суперпозиції побудувати дійсні епюри внутрішніх зусиль $M_\delta, Q_\delta, N_\delta$ можна шляхом накладання епюр:

$$\begin{aligned} M_\delta &= M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n + M_P, \\ Q_\delta &= Q_1 \cdot X_1 + Q_2 \cdot X_2 + \dots + Q_n \cdot X_n + Q_P, \\ N_\delta &= N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + \dots + N_n \cdot X_n + N_P. \end{aligned} \quad (6)$$

У випадку наявності лише одиничних та вантажної епюр згинальних моментів можна побудувати епюру M_δ шляхом додавання, епюру Q_δ – використовуючи відповідність між епюрами M і Q , а поздовжні зусилля визначити з рівнянь рівноваги вирізаних вузлів рами.

Згідно з другим способом основна система розраховується на одночасну дію зовнішнього навантаження та одержаних з розв'язку системи рівнянь значень реакцій у відкинутих в'язях: визначаються опорні реакції, зусилля взаємодії дисків та будуються епюри внутрішніх зусиль. Цей спосіб має назву статичний.

Для перевірки достовірності визначених зусиль необхідно виконати кінематичну перевірку – обчислити переміщення, яке має бути нульовим. Таким переміщенням у початковій рамі є переміщення в напрямі однієї з існуючих в'язей. Обчислення переміщення в напрямі j -ої відкинутої в'язі відбувається за формулою Максвелла-Мора:

$$\Delta_{j\partial} = \sum_{j=1}^n \int_l \frac{M_j \cdot M_{\partial}}{EI} dx. \quad (7)$$

Для перевірки дійсної епюри моментів у всіх перерізах рами доцільніше обчислювати сумарне переміщення в напрямках всіх відкинутих в'язей, а при множенні скористатись сумарною одиничною епюрою M_{Σ} , побудованою шляхом додавання одиничних епюр:

$$M_{\Sigma} = M_1 + M_2 + \dots + M_n. \quad (8)$$

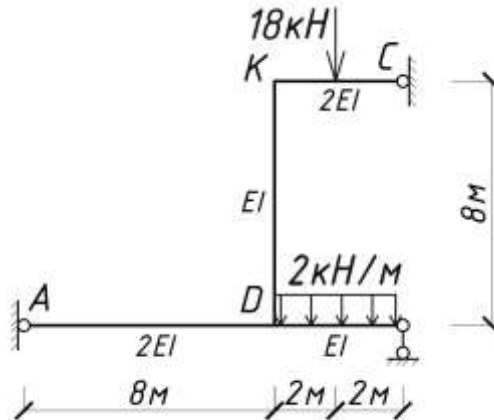
Значення переміщення $\Delta_{j\partial}$ зазвичай відрізняється від нуля через заокруглення проміжних результатів. Відносна похибка ε одержаного значення $\Delta_{j\partial}$ не повинна перевищувати декількох відсотків:

$$\varepsilon = \frac{|\Delta_{j\partial}|}{\Sigma_{\partial}} \cdot 100\%, \quad (9)$$

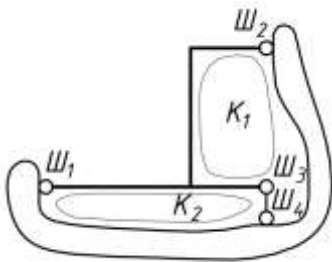
де Σ_{∂} – сума додатних чисел в розрахунках.

Наприкінці розрахунків також необхідно виконати перевірку відповідності між епюрами M_{∂} і Q_{∂} , перевірити рівновагу всіх вирізаних вузлів системи і всієї рами в цілому. Величини і напрям опорних реакцій при цьому визначаються з дійсних епюр. Наведені перевірки можуть не проводитись, якщо котрась із них вже використовувалась при побудові дійсних епюр внутрішніх зусиль вихідної статично невизначуваної рами.

Приклад розрахунку несиметричної рами методом сил



1. Визначення ступеня статичної невизначуваності.



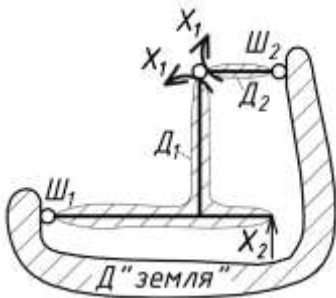
$$n = 3k - u = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

Отже, задана рама двічі статично невизначувана. Для розв'язання задачі необхідно відкинути дві зайві в'язі і замінити їх одиничними реакціями.

2. Визначення основної системи методу сил та системи канонічних рівнянь.

Варіанти основної системи методу сил:

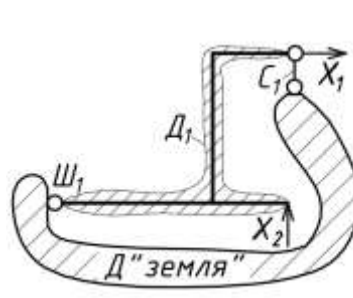
Перший варіант



$$ДІ = \frac{D_1 + D_2 + Д"земля"}{Ш_1, Ш_2, Ш_3}$$

(спосіб шарнірного трикутника)

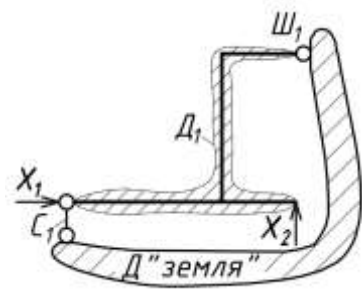
Другий варіант



$$ДІ = \frac{D_1 + Д"земля"}{Ш_1, C_1}$$

(спосіб Полонсо)

Третій варіант



$$ДІ = \frac{D_1 + Д"земля"}{Ш_1, C_1}$$

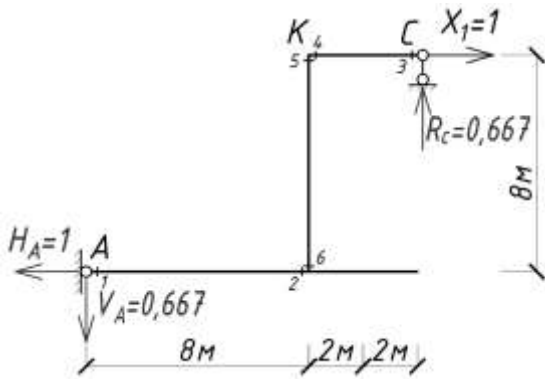
(спосіб Полонсо)

Для подальших розрахунків обираємо другий варіант основної системи. У випадку двох невідомих система рівнянь матиме вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

3. Визначення зусиль взаємодії дисків.

3.1. Перший одиничний стан



$$\sum F_x = 0: -H_A + 1 = 0, H_A = 1;$$

$$\sum M_A = 0: 1 \cdot 8 - R_C \cdot 12 = 0,$$

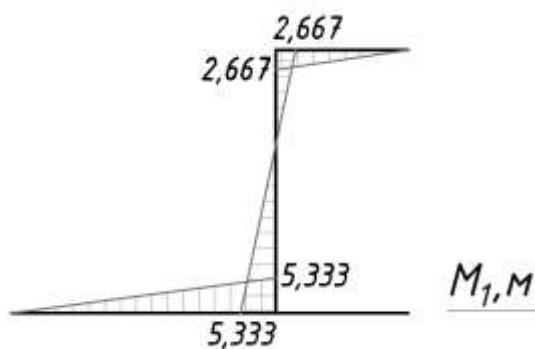
$$R_C = 0,667;$$

$$\sum F_y = 0: -V_A + 0,667 = 0, V_A = 0,667;$$

Перевірка:

$$\sum M_K = 1 \cdot 8 - 0,667 \cdot 8 - 0,667 \cdot 4 =$$

$$= 8 - 8,004 = -0,004 \approx 0.$$



$$M_1 = 0;$$

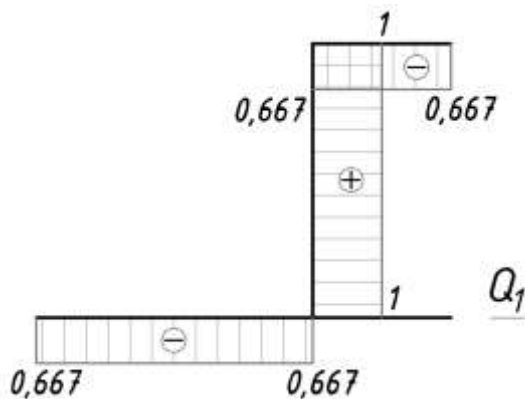
$$M_2^{лів} = -0,667 \cdot 8 = -5,333 м;$$

$$M_3 = 0;$$

$$M_4^{np} = -0,667 \cdot 4 = -2,667 м;$$

$$M_5^{єєрх} = -2,667 м;$$

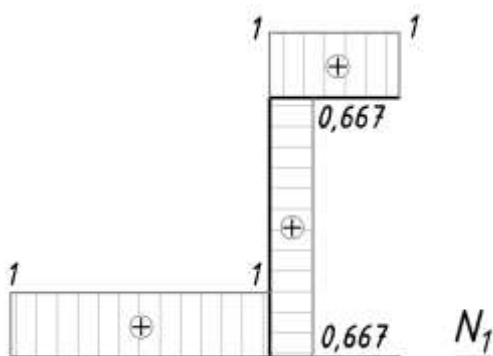
$$M_6^{єєрх} = -0,667 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = +5,333 м.$$



$$Q_1 = Q_2 = -0,667;$$

$$Q_3 = Q_4 = -0,667;$$

$$Q_5 = Q_6 = +1.$$

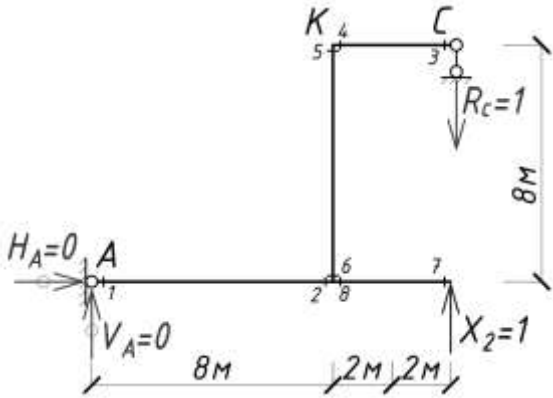


$$N_1 = N_2 = +1;$$

$$N_3 = N_4 = +1;$$

$$N_5 = N_6 = +0,667.$$

3.2. Другий одиничний стан



$$\sum F_x = 0: H_A = 0;$$

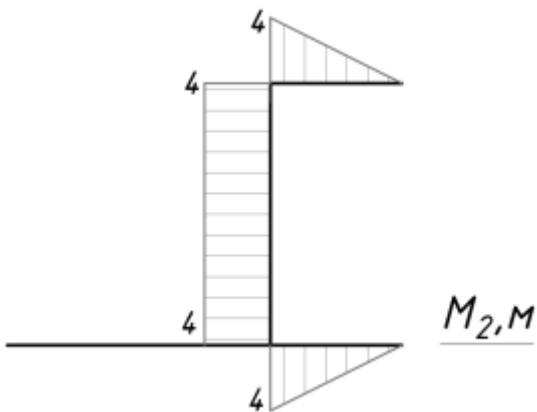
$$\sum M_A = 0: -1 \cdot 12 + R_C \cdot 12 = 0,$$

$$R_C = 1;$$

$$\sum F_y = 0: V_A + 1 - 1 = 0, V_A = 0;$$

Перевірка:

$$\sum M_K = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$



$$M_1 = M_2 = 0;$$

$$M_3 = 0;$$

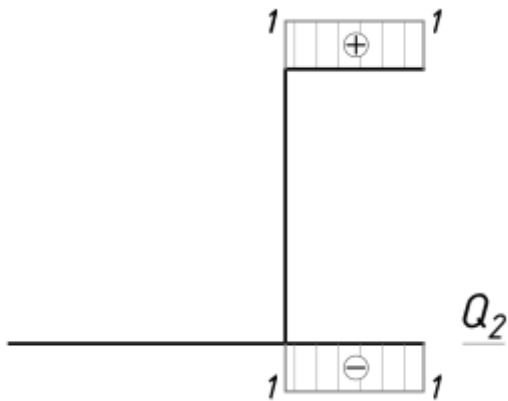
$$M_4^{np} = +1 \cdot 4 = +4M;$$

$$M_5^{exp} = +4M;$$

$$M_6^{exp} = +4M;$$

$$M_7 = 0;$$

$$M_8^{np} = -1 \cdot 4 = -4M.$$

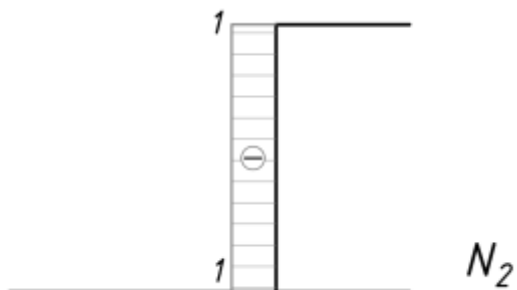


$$Q_1 = Q_2 = 0;$$

$$Q_3 = Q_4 = +1;$$

$$Q_5 = Q_6 = 0;$$

$$Q_7 = Q_8 = -1.$$



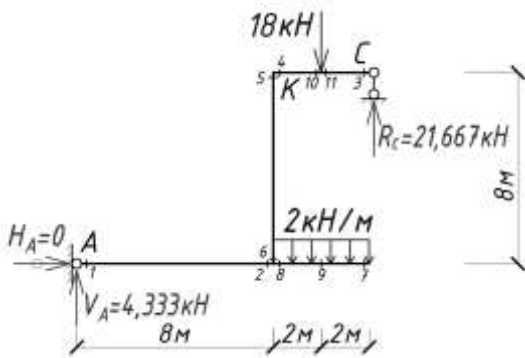
$$N_1 = N_2 = 0;$$

$$N_3 = N_4 = 0;$$

$$N_5 = N_6 = -1;$$

$$N_7 = N_8 = 0.$$

3.3. Вантажний стан



$$\sum F_x = 0: H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0: 18 \cdot 10 + 2 \cdot 4 \cdot 10 - R_C \cdot 12 = 0,$$

$$R_C = 21,667 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0: V_A - 18 - 2 \cdot 4 + 21,667 = 0,$$

$$V_A = 4,333 \text{ кН};$$

Перевірка:

$$\sum M_K = 4,333 \cdot 8 + 18 \cdot 2 - 21,667 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = 86,664 - 86,668 \approx 0.$$

$$M_1 = 0;$$

$$M_2^{лів} = +4,333 \cdot 8 = +34,664 \text{ кНм};$$

$$M_3 = 0;$$

$$M_{10}^{np} = M_{11}^{np} = -21,667 \cdot 2 = -43,334 \text{ кНм};$$

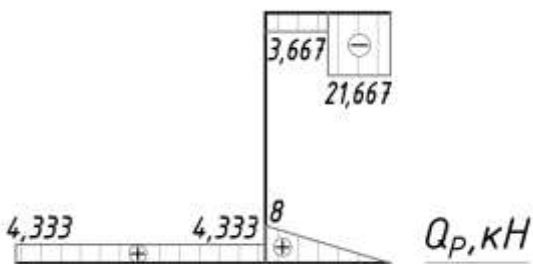
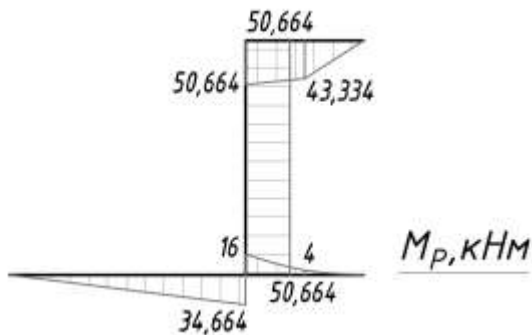
$$M_4^{np} = -21,667 \cdot 4 + 18 \cdot 2 = -50,664 \text{ кНм};$$

$$M_5^{вєрх} = M_6^{вєрх} = -50,664 \text{ кНм};$$

$$M_7 = 0;$$

$$M_9^{np} = +2 \cdot 2 \cdot 1 = +4 \text{ кНм};$$

$$M_8^{np} = +2 \cdot 4 \cdot 2 = +16 \text{ кНм}.$$



$$Q_1 = Q_2 = +4,333 \text{ кН};$$

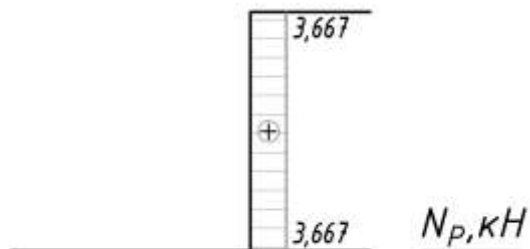
$$Q_3 = Q_{11} = -21,667 \text{ кН};$$

$$Q_{10} = Q_4 = -21,667 + 18 = -3,667 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_6 = 0;$$

$$Q_7 = 0;$$

$$Q_8 = +2 \cdot 4 = +8 \text{ кН}.$$



$$N_1 = N_2 = 0;$$

$$N_3 = N_{11} = N_{10} = N_4 = 0;$$

$$N_5 = N_6 = +21,667 - 18 = +3,667 \text{ кН};$$

$$N_7 = N_8 = 0.$$

4. Обчислення коефіцієнтів та вільних членів системи рівнянь.

Головні коефіцієнти:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5,333 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,333 \right] + \frac{1}{EI} \frac{8}{6} \left[2,667^2 + \right. \\ \left. + 4 \cdot \left(\frac{5,333 - 2,667}{2} \right)^2 + 5,333^2 \right] + \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2,667 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,667 \right] = \frac{99,545}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 \cdot M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] + \frac{1}{EI} [4 \cdot 8 \cdot 4] + \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \\ = \frac{160}{EI}.$$

Другорядні коефіцієнти:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{(5,333 - 2,667)}{2} \cdot 8 \cdot 4 \right] - \\ - \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2,667 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{35,544}{EI}.$$

Вантажні коефіцієнти:

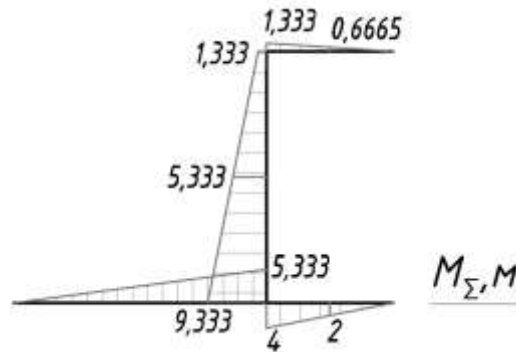
$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_P}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5,333 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 34,664 \right] - \\ - \frac{1}{EI} \left[\frac{(5,333 - 2,667)}{2} \cdot 8 \cdot 50,664 \right] + \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2,667}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 43,334 \right] + \\ - \frac{1}{2EI} \frac{2}{6} \left[2,667 \cdot 50,664 + 4 \cdot \frac{(50,664 + 43,334)}{2} \cdot \frac{(2,667 + \frac{2,667}{2})}{2} + \right. \\ \left. + \frac{2,667}{2} \cdot 43,334 \right] = \frac{-672,679}{EI};$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{M_2 \cdot M_P}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \frac{4}{6} \left[4 \cdot 16 + 4 \cdot \frac{4}{2} \cdot 4 \right] - \frac{1}{EI} [4 \cdot 8 \cdot 50,664] - \\ - \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 43,334 \right] - \frac{1}{2EI} \frac{2}{6} \left[50,664 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{(4 + 2)}{2} \cdot \frac{(50,664 + 43,334)}{2} + \right. \\ \left. + 2 \cdot 43,334 \right] = \frac{1856,356}{EI}.$$

5. Перевірка коефіцієнтів системи рівнянь.

Побудуємо сумарну одиничну епюру за формулою:

$$M_{\Sigma} = M_1 + M_2$$



$$\delta_{1\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12} = \frac{99,545}{EI} + \frac{35,544}{EI} = \frac{135,089}{EI},$$

$$\delta_{1\Sigma} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_{\Sigma}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5,333 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,333 \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \frac{8}{6} \left[5,333 \cdot 9,333 + 4 \cdot \frac{(5,333 - 2,667)}{2} \cdot 5,333 - 2,667 \cdot 1,333 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2,667 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,333 \right] = \frac{135,09}{EI};$$

$$\delta_{2\Sigma} = \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{35,544}{EI} + \frac{160}{EI} = \frac{195,544}{EI},$$

$$\delta_{2\Sigma} = \sum \int \frac{M_2 \cdot M_{\Sigma}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] + \frac{1}{EI} [5,333 \cdot 8 \cdot 4] +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,333 \right] = \frac{195,544}{EI};$$

$$\Delta_{\Sigma P} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = -\frac{672,679}{EI} - \frac{1856,356}{EI} = -\frac{2529,035}{EI},$$

$$\Delta_{\Sigma P} = \sum \int \frac{M_{\Sigma} \cdot M_P}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5,333 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 34,664 \right] - \frac{1}{EI} \frac{4}{6} \left[4 \cdot 16 + 4 \cdot \frac{4}{2} \cdot 4 \right] -$$

$$- \frac{1}{EI} [5,333 \cdot 8 \cdot 50,664] - \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1,333}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 43,334 \right] - \frac{1}{2EI} \frac{2}{6} [1,333 \cdot 50,664 +$$

$$+ 4 \cdot \frac{(1,333 + 0,6665)}{2} \cdot \frac{(50,664 + 43,334)}{2} + 0,6665 \cdot 43,343] = -\frac{2529,034}{EI}.$$

6. Обчислення невідомих системи рівнянь.

Система канонічних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{95,545}{EI} X_1 + \frac{35,544}{EI} X_2 - \frac{672,679}{EI} = 0, \\ \frac{35,544}{EI} X_1 + \frac{160}{EI} X_2 - \frac{1856,356}{EI} = 0; \\ \begin{cases} 95,545 \cdot X_1 + 35,544 \cdot X_2 = 672,679, \\ 35,544 \cdot X_1 + 160 \cdot X_2 = 1856,356. \end{cases} \end{cases}$$

Для розв'язання використаємо спосіб підстановки. З другого рівняння маємо:

$$X_1 = \frac{1856,356 - 160 \cdot X_2}{35,544} = 52,227 - 4,501 \cdot X_2.$$

Підставимо у перше рівняння:

$$95,545 \cdot (52,227 - 4,501 \cdot X_2) + 35,544 \cdot X_2 = 672,679,$$

$$5198,937 - 448,052 \cdot X_2 + 35,544 \cdot X_2 = 672,679,$$

$$412,508 \cdot X_2 = 4526,258,$$

$$X_2 = 10,973 \text{ кН},$$

$$X_1 = 52,227 - 4,501 \cdot 10,973 = 2,838 \text{ кН}.$$

Для перевірки підставимо у сумарне рівняння:

$$135,089 \cdot X_1 + 195,544 \cdot X_2 = 2529,035,$$

$$135,089 \cdot 2,838 + 195,544 \cdot 10,973 - 2529,035 = 0,$$

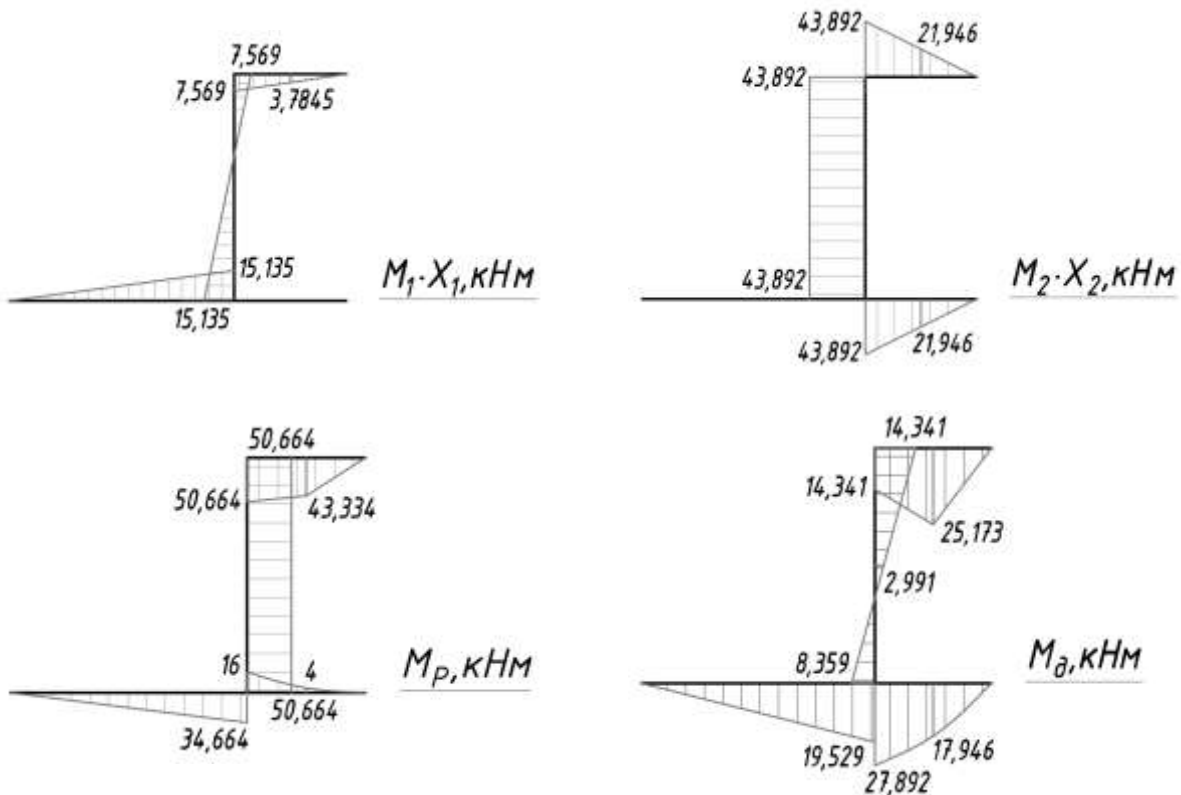
$$0,052 \approx 0.$$

Отже, $X_1 = 2,838 \text{ кН}$, $X_2 = 10,973 \text{ кН}$.

7. Побудова дійсних епюр внутрішніх зусиль.

Дійсні епюри внутрішніх зусиль будуюмо шляхом додавання епюр:

$$M_{\partial} = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_P .$$



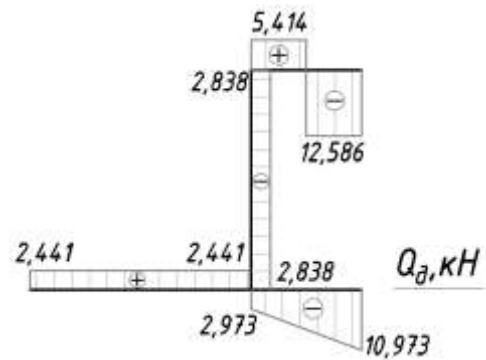
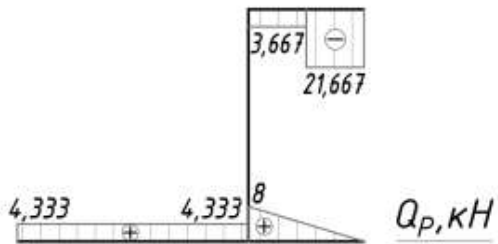
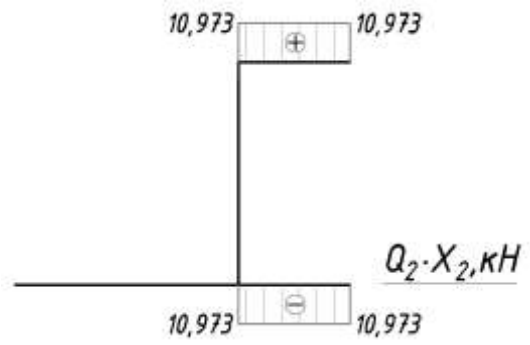
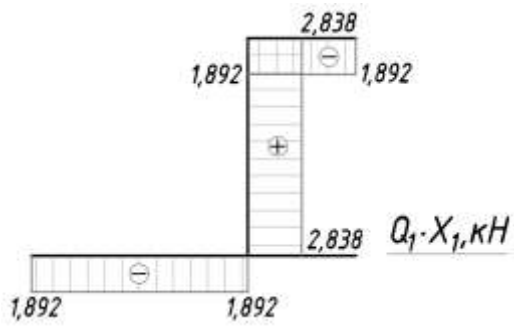
Кінематична перевірка:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma\partial} = \sum \int \frac{M_{\Sigma} \cdot M_{\partial}}{EI} dx = & -\frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5,333 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 19,529 \right] + \frac{1}{EI} \frac{4}{6} \left[4 \cdot 27,892 + \right. \\ & \left. + 4 \cdot 2 \cdot 17,946 \right] + \frac{1}{EI} \frac{8}{6} \left[9,333 \cdot 8,359 - 4 \cdot 5,333 \cdot 2,991 - 1,333 \cdot 14,341 \right] - \\ & - \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 0,6665 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25,173 \right] - \frac{1}{2EI} \frac{2}{6} \left[1,333 \cdot 14,341 + 4 \cdot \frac{(1,333 + 0,6665)}{2} \times \right. \\ & \left. \times \frac{(14,341 + 25,173)}{2} + 0,6665 \cdot 25,173 \right] = \frac{1}{EI} [170,091 - 170,148] = -\frac{0,057}{EI} \approx 0 . \end{aligned}$$

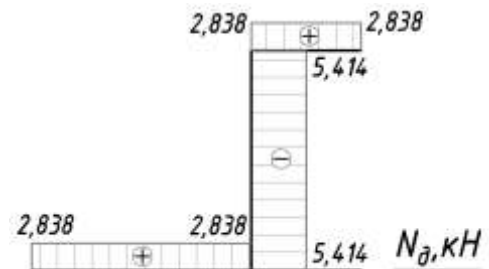
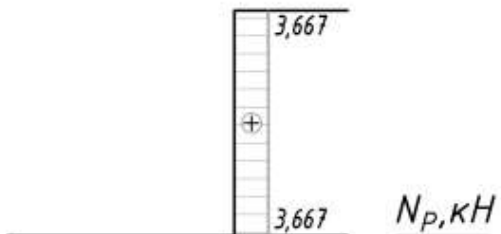
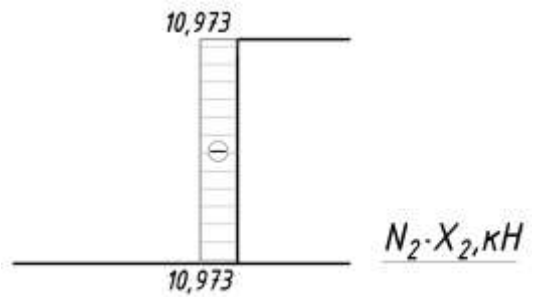
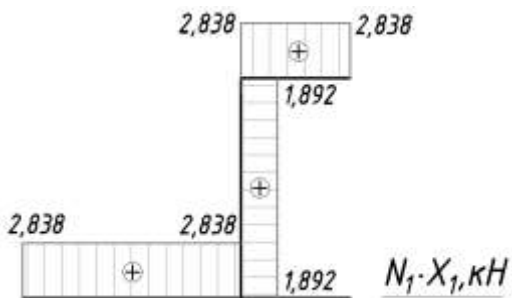
Відносна похибка становить:

$$\varepsilon = \frac{0,057}{170,091} \cdot 100\% = 0,0335\% < 2\% .$$

$$Q_{\partial} = Q_1 \cdot X_1 + Q_2 \cdot X_2 + Q_P$$

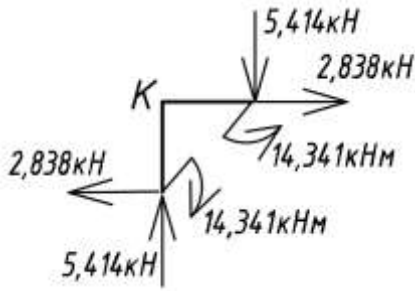


$$N_{\partial} = N_1 \cdot X_1 + N_2 \cdot X_2 + N_P$$



7. Перевірки побудови дійсних епюр внутрішніх зусиль.

Перевірка рівноваги вирізаних вузлів рами:

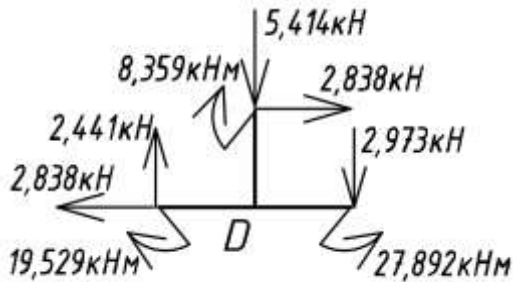


Вузол K :

$$\sum F_x = -2,838 + 2,838 = 0,$$

$$\sum F_y = 5,414 - 5,414 = 0,$$

$$\sum M_K = 14,341 - 14,341 = 0.$$



Вузол D :

$$\sum F_x = -2,838 + 2,838 = 0,$$

$$\sum F_y = 2,441 + 2,973 - 5,414 = 0,$$

$$\sum M_K = 19,529 + 8,359 - 27,892 = 0.$$

Перевірка відповідності між епюрами M і Q :

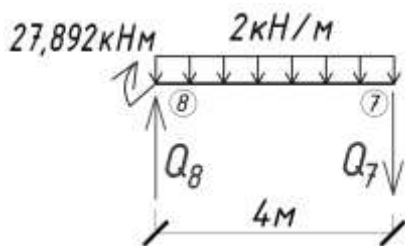
$$Q_{1-2} = -\frac{19,529 - 0}{8} = -2,441 \text{ кН},$$

$$Q_{5-6} = +\frac{14,529341 - (-8,359)}{8} = +2,838 \text{ кН},$$

$$Q_{3-11} = -\frac{25,173 - 0}{2} = +12,5865 \text{ кН} \approx 12,586 \text{ кН},$$

$$Q_{4-10} = +\frac{25,173 - 14,341}{2} = +5,416 \text{ кН} \approx 5,414 \text{ кН},$$

Q_{7-8} :



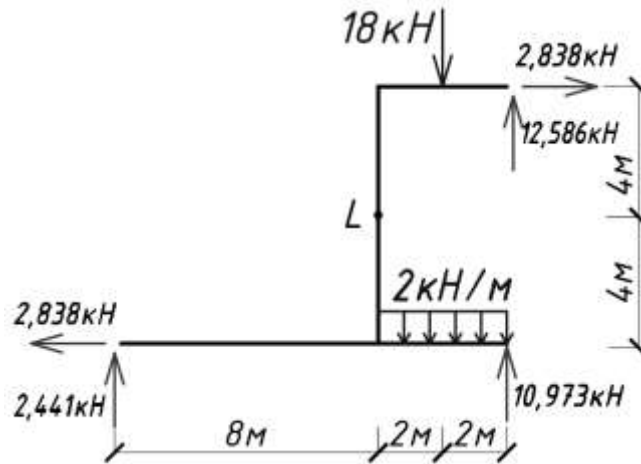
$$\sum M_8 = 0: 27,892 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + Q_7 \cdot 4 = 0;$$

$$Q_7 = -10,973 \text{ кН}.$$

$$\sum M_7 = 0: 27,892 - 2 \cdot 4 \cdot 2 + Q_8 \cdot 4 = 0;$$

$$Q_8 = +2,973 \text{ кН}.$$

8. Перевірка загальної рівноваги всієї системи.



$$\Sigma F_x = -2,8388 + 2,838 = 0,$$

$$\Sigma F_y = 2,441 - 2 \cdot 4 - 18 + 10,973 + 12,586 = 26 - 26 = 0,$$

$$\Sigma M_L = 2,838 \cdot 4 + 2,441 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 10,973 \cdot 4 + 18 \cdot 2 - 12,586 \cdot 4 + 2,838 \cdot 4 = \\ = 94,232 - 94,197236 = -0,004 \approx 0.$$

Усі перевірки виконуються, отже, значення внутрішніх зусиль початкової системи обчислені правильно.

Завдання до виконання розрахунково-графічної роботи

1.

l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	3	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	1	-	3	20	2
2	4	5	5	-	18	4

2.

l_1	l_2	h	q	P_1	P_2	n
2	3	1	2	-	11	4
5	6	3	3	12	-	3
4	3	5	4	-	7	5
7	6	4	5	20	-	2
2	4	6	6	-	14	4

3.

l	h_1	h_2	q_1	q_2	P_1	n
2	4	1	4	-	15	4
5	3	3	-	2	12	3
4	2	5	6	-	10	5
7	1	4	-	3	20	2
2	5	6	5	-	18	4

4.

l	h_1	h_2	q_1	q_2	P_1	n
2	4	1	4	-	11	4
5	3	3	-	2	9	3
4	2	5	6	-	7	5
7	1	4	-	3	14	2
2	5	6	5	-	17	4

5.

l	h_1	h_2	q_1	q_2	P_1	n
2	4	1	4	-	15	4
5	3	3	-	2	12	3
4	2	5	6	-	10	5
7	1	4	-	3	20	2
2	5	6	5	-	18	4

6.

l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	3	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	1	-	3	20	2
2	4	5	5	-	18	4

7.

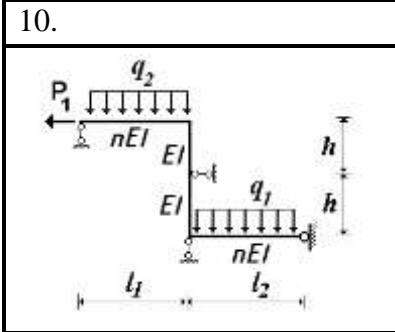
l_1	l_2	h	q	P_1	P_2	n
2	3	4	2	-	11	4
5	6	3	3	12	-	3
4	3	2	4	-	7	5
7	6	1	5	20	-	2
2	4	5	6	-	14	4

8.

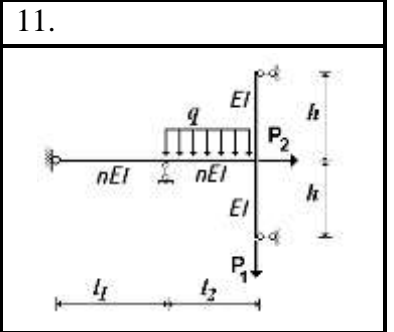
l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	3	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	1	-	3	20	2
2	4	5	5	-	18	4

9.

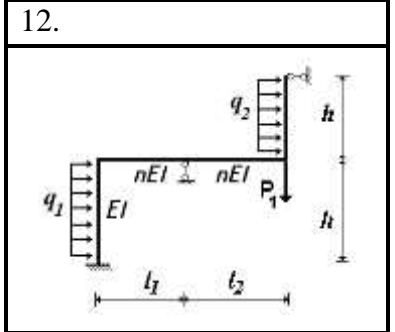
l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	3	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	1	-	3	20	2
2	4	5	5	-	18	4



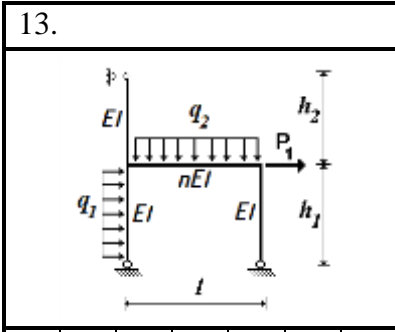
l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	3	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	1	-	3	20	2
2	4	5	5	-	18	4



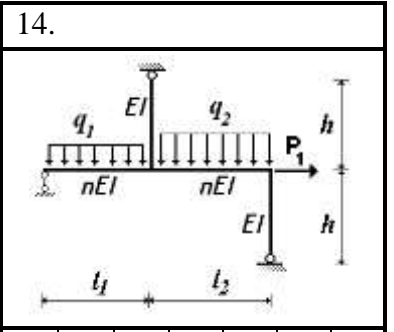
l_1	l_2	h	q	P_1	P_2	n
2	3	4	2	-	11	4
5	6	3	3	12	-	3
4	3	2	4	-	7	5
7	6	1	5	20	-	2
2	4	5	6	-	14	4



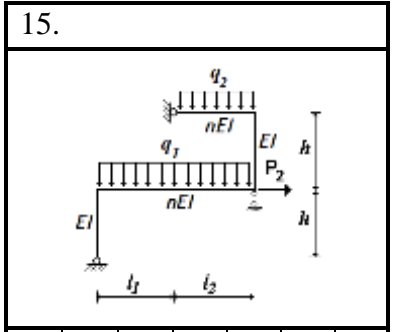
l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	3	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	1	-	3	20	2
2	4	5	5	-	18	4



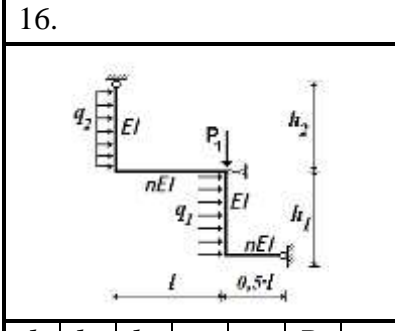
l	h_1	h_2	q_1	q_2	P_1	n
2	4	1	4	-	11	4
5	3	3	-	2	9	3
4	2	5	6	-	7	5
7	1	4	-	3	14	2
2	5	6	5	-	17	4



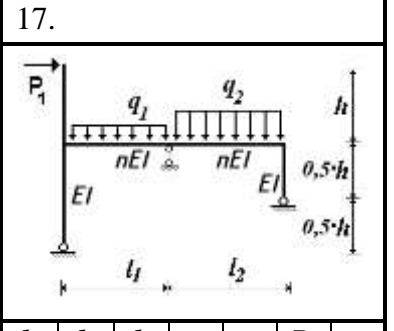
l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	3	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	1	-	3	20	2
2	4	5	5	-	18	4



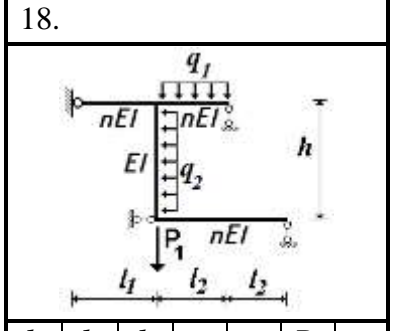
l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	3	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	1	-	3	20	2
2	4	5	5	-	18	4



l	h_1	h_2	q_1	q_2	P_1	n
2	4	1	4	-	15	4
6	3	3	-	2	12	3
4	2	5	6	-	10	5
8	1	4	-	3	20	2
2	5	6	5	-	18	4

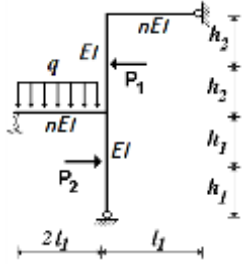


l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	6	6	-	2	12	3
4	3	2	6	-	10	5
7	6	8	-	3	20	2
2	4	4	5	-	18	4



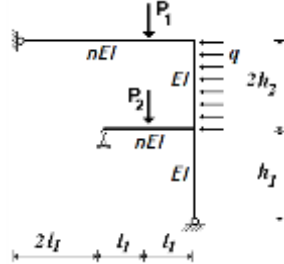
l_1	l_2	h	q_1	q_2	P_1	n
2	3	4	4	-	15	4
5	1	3	-	2	12	3
4	2	2	6	-	10	5
5	4	1	-	3	20	2
2	1	5	5	-	18	4

19.



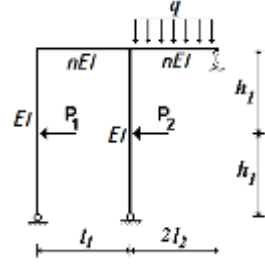
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	-	11	2
3	3	3	3	5	-	3
4	2	5	4	-	7	5
1	1	4	5	12	-	2
2	5	6	6	-	6	4

20.



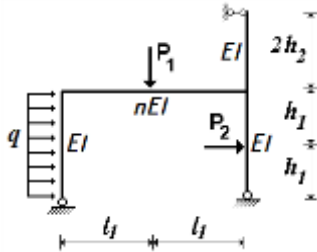
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	6	-	2
3	3	3	3	-	9	3
4	2	5	4	7	-	5
1	1	4	5	-	12	2
2	5	2	6	8	-	4

21.



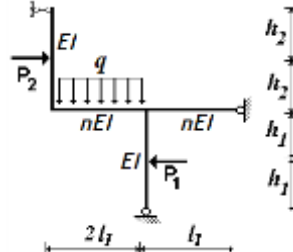
l_1	l_2	h_1	q	P_1	P_2	n
2	3	4	2	-	11	2
5	6	3	3	5	-	3
4	3	2	4	-	7	5
7	6	1	5	12	-	2
2	4	5	6	-	6	4

22.



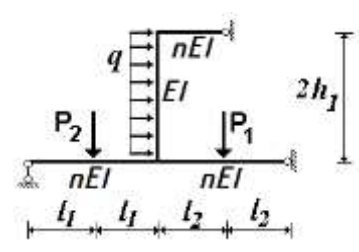
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	6	-	2
3	3	3	3	-	9	3
4	2	5	4	7	-	5
5	4	4	5	-	12	2
2	5	2	6	8	-	4

23.



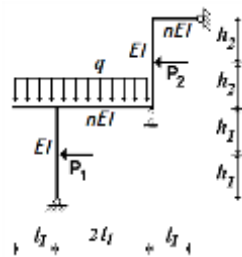
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	-	11	2
5	3	3	3	5	-	3
4	2	5	4	-	7	5
7	1	4	5	12	-	2
2	5	6	6	-	6	4

24.



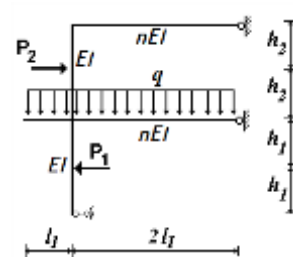
l_1	l_2	h_1	q	P_1	P_2	n
2	3	4	2	6	-	2
5	6	3	3	-	9	3
4	3	2	4	7	-	5
7	6	1	5	-	12	2
2	4	5	6	8	-	4

25.



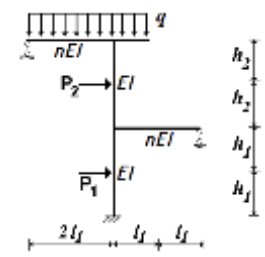
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	-	11	2
3	3	3	3	5	-	3
4	2	5	4	-	7	5
1	4	4	5	12	-	2
2	5	2	6	-	6	4

26.



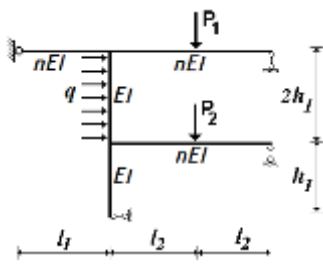
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	6	-	2
5	3	3	3	-	9	3
4	2	5	4	7	-	5
7	4	4	5	-	12	2
2	5	2	6	8	-	4

27.



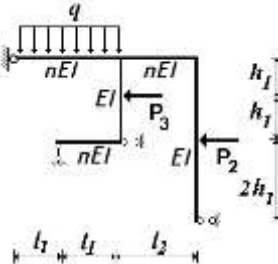
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	-	11	2
5	3	3	3	5	-	3
4	2	5	4	-	7	5
7	4	4	5	12	-	2
2	5	2	6	-	6	4

28.



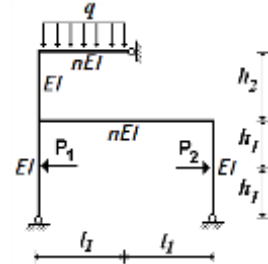
l_1	l_2	h_1	q	P_1	P_2	n
2	3	4	2	-	11	2
5	6	3	3	5	-	3
4	3	2	4	-	7	5
7	6	1	5	12	-	2
2	4	5	6	-	6	4

29.



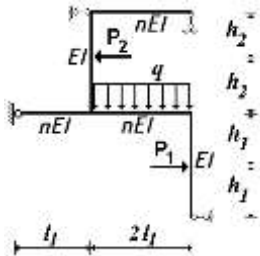
l_1	l_2	h_1	q	P_1	P_2	n
2	3	4	2	6	-	2
5	6	3	3	-	9	3
4	3	2	4	7	-	5
7	6	1	5	-	12	2
2	4	5	6	8	-	4

30.



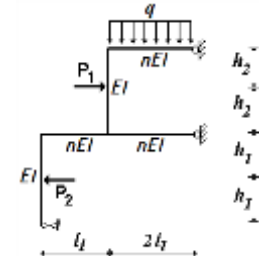
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	-	11	2
5	3	3	3	5	-	3
4	2	5	4	-	7	5
7	4	4	5	12	-	2
2	5	2	6	-	6	4

31.



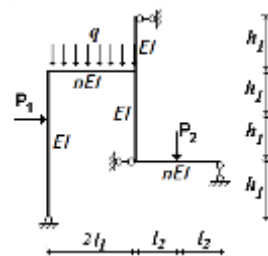
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	6	-	2
5	3	3	3	-	9	3
4	2	5	4	7	-	5
7	1	4	5	-	12	2
2	5	6	6	8	-	4

32.



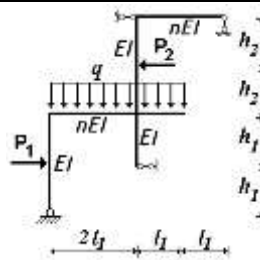
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	-	11	2
5	3	3	3	5	-	3
4	2	5	4	-	7	5
7	4	4	5	12	-	2
2	5	2	6	-	6	4

33.



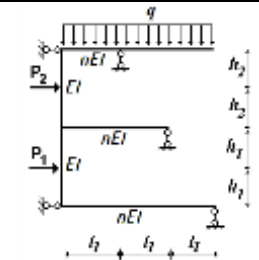
l_1	l_2	h_1	q	P_1	P_2	n
2	3	4	2	6	-	2
5	6	3	3	-	9	3
4	3	2	4	7	-	5
7	6	1	5	-	12	2
2	4	5	6	8	-	4

34.



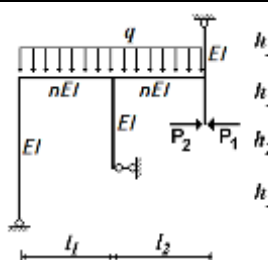
l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	-	11	2
5	3	3	3	5	-	3
4	2	5	4	-	7	5
7	1	4	5	12	-	2
2	5	6	6	-	6	4

35.



l_1	h_1	h_2	q	P_1	P_2	n
2	4	1	2	6	-	2
5	3	3	3	-	9	3
4	2	5	4	7	-	5
7	1	4	5	-	12	2
2	5	6	6	8	-	4

36.



l_1	l_2	h_1	q	P_1	P_2	n
2	3	4	2	-	11	2
5	6	3	3	5	-	3
4	3	2	4	-	7	5
7	6	1	5	12	-	2
2	4	5	6	-	6	4

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання: підручник / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов. – К.: ПАТ «ВПОЛ», 2013. – 896 с.
2. *Баженов В.А.* Будівельна механіка: Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навч. посібник / В.А. Баженов, Г.М. Іванченко, О.В. Шишов, С.О. Пискунов. – К.: Каравела, 2013. – 439 с.
3. *Ждан В.З.* Расчет статически неопределимой рамы методом сил: методические указания к контрольной работе №5 по строительной механике для студентов специальностей ПГС и ГС заочной формы обучения / В.З. Ждан, Г.И. Мельниченко, В.К. Чибиряков, З.К. Демьянюк, В.Е. Вериженко. – К.: КИСИ, 1982. – 48 с.
4. *Легостаев А.Д.* Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил: методичні вказівки до виконання розрахунково–графічної роботи з будівельної механіки / А.Д. Легостаєв, Г.М. Іванченко. – К.: КНУБА, 2002. – 40 с.

Для нотаток

Навчально-методичне видання

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ НЕСИМЕТРИЧНОЇ РАМИ МЕТОДОМ СИЛ

Методичні вказівки та індивідуальні завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
освітньої програми «Міське будівництво та господарство»

Укладачі **КАРА** Ірина Дмитрівна,
КУШНІРЕНКО Микола Григорович,
ОСТАПЕНКО Роман Миколайович

Випусковий редактор *В.С. Сасько*
Комп'ютрне верстання *Л.В. Лабунець*

Підписано до друку . 2022. Формат 60 × 84_{1/16}

Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк 2,0.

Електронний документ. Вид. № 43/III–22.

Видавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.