

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

**РОЗРАХУНОК ТРИШАРПІРНОЇ АРКИ І
СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ РАМ**

Методичні вказівки
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів спеціальності 191 «Архітектура та містобудування»
освітньої програми «Архітектура та містобудування»

Київ 2022

УДК 624.01/07
Р64

Укладачі: Кара І.Д., канд. техн. наук

Костіна О.В., канд. техн. наук

Рецензент Ю.В. Максим'юк, д-р. техн. наук, професор

Відповідальний за випуск П.П. Лізунов, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри будівельної механіки, протокол №8 від 16 травня 2022 року.

В авторській редакції.

Розрахунок тришарнірної арки і статично визначуваних рам:
Р64 методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи /
уклад.: І.Д. Кара, О.В. Костіна. – Київ: КНУБА, 2022. – 32 с.

Містять короткі теоретичні відомості, методичні вказівки, приклади розрахунку статично визначуваних стержневих систем: тришарнірної арки, простої та складеної рам.

Призначено для студентів спеціальності 191 «Архітектура та містобудування» освітньої програми «Архітектура та містобудування».

© КНУБА, 2022

ЗМІСТ

Загальні положення	4
Короткі теоретичні відомості	5
Приклад індивідуального завдання	11
Приклад виконання індивідуального завдання	13
Розрахунок тришарнірної арки	13
Розрахунок простої рами	20
Розрахунок складеної рами	24
Список літератури	29

Загальні положення

«Основи теорії споруд» є однією з дисциплін, які складають основу якісної освіти бакалаврів у сфері архітектури. Ця дисципліна викладається як частина курсу будівельної механіки. Вивчаючи дисципліну, студент дізнається про основні методи розрахунку будівельних споруд, які знаходяться під дією статичних навантажень. Підґрунтя для проходження дисципліни складають знання, попередньо одержані зі сфер вищої математики, фізики та опору матеріалів. При подальшому виконанні курсових проєктів з будівельних конструкцій та дипломному проєктуванні важливими є знання та вміння, які надає дисципліна «Основи теорії споруд».

Вивчення дисципліни для майбутніх спеціалістів-архітекторів розділене на дві частини, перша з яких викладається на другому курсі, а друга – на третьому. Методичні вказівки є необхідними для здобувачів вищої освіти освітньої програми «Архітектура та містобудування» під час самостійного опрацювання матеріалу та при виконанні розрахунково-графічної роботи з дисципліни «Основи теорії споруд – II частина». Виконання роботи базується на успішному засвоєнні навчального матеріалу, який викладений у джерелах [1-3].

До складу методичних вказівок входять короткі теоретичні відомості, які знайомлять студента з такими стержневими конструкціями як: тришарнірна арка, проста та складена рами, їх властивостями та особливостями розрахунку. В наступній частині наведений приклад виконання завдання, в якому показаний порядок проведення статичного розрахунку цих систем.

Розрахунково-графічна робота оформляється з однієї сторони аркуша формату А4 охайно вручну або з використанням електронних засобів. Першим аркушем роботи є титульний лист. Видане завдання додається до роботи, після чого робота скріплюється.

Короткі теоретичні відомості

При конструюванні мостів, підземних інженерних споруд та дахових конструкцій досить часто використовуються арки. Одним із видів аровних конструкцій є тришарнірна арка (рис.1). Вона представляє собою плоску геометрично незмінювану систему, яка складається з двох криволінійних дисків, з'єднаних між собою та диском «земля» попарно трьома шарнірами, що не розташовані на одній прямій.

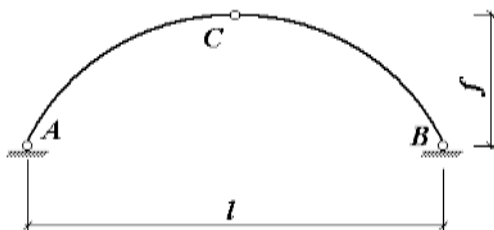


Рис. 1

Висота арки має назву стріла підйому арки f , відстань по горизонталі між опорами – прогін арки l . Опорні шарнірно-нерухомі опори A і B називають п'ятами, а шарнір C між елементами арки – замок, який зазвичай знаходиться посередині прогону.

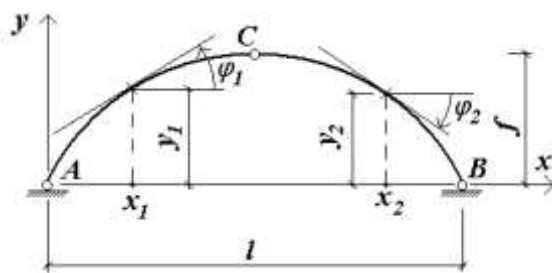


Рис. 2

Геометрична вісь арки задається криволінійною функцією. Початок системи координат приймається в лівій опорі (рис. 2). Рівняння осі арки та кута нахилу φ між дотичною до осі арки та горизонтальною віссю x мають вигляд:

для параболи:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{4f}{l^2} (l-2x) \right), \quad (1)$$

для синусоїди:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \right), \quad (2)$$

де x – координата центру перерізу по горизонтальній осі; y – відстань між центром перерізу та віссю абсцис.

При дії на тришарнірну арку лише вертикального навантаження (рис. 3) в обох її опорах, на відміну від простої балки, виникають також горизонтальні опорні реакції, які дорівнюють одна одній і мають назву «розпір» ($H_A = H_B = H$). Для визначення вертикальних опорних реакцій (V_A, V_B) в арці достатньо записати рівняння моментів відносно опорних точок для всієї системи; для визначення горизонтальних реакцій (H_A, H_B) – додаткові рівняння суми моментів відносно внутрішнього шарніра для правої та лівої частин арки.

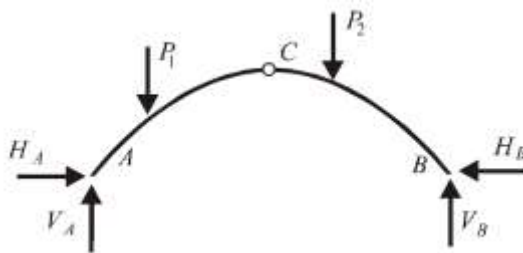


Рис. 3

Для обчислення внутрішніх зусиль, що виникають в i -ому перерізі арки: згинального моменту M_i , поперечного Q_i та поздовжнього зусилля N_i , складаються рівняння рівноваги для лівої або правої частин арки, умовно відсічених відносно перерізу (рис. 4):

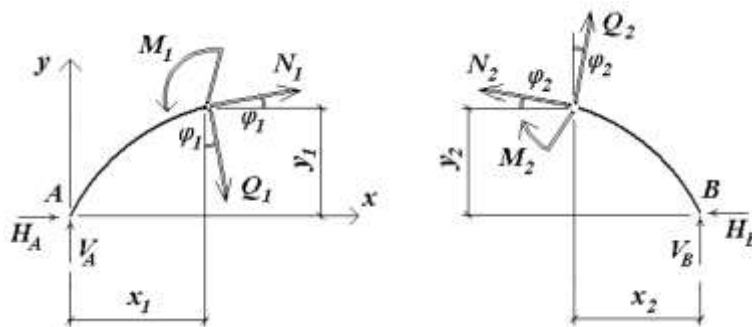


Рис. 4

Для розрахунку тришарнірної арки зручно використовувати еквівалентну просту балку на двох опорах, прогін та навантаження якої співпадають з арочними. В такому випадку внутрішні зусилля можна обчислити з трансформованих формул:

$$\begin{aligned} M_i^a &= M_i^{\delta} - Hy_i, \\ Q_i^a &= Q_i^{\delta} \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i, \\ N_i^a &= -Q_i^{\delta} \sin \varphi_i - H \cos \varphi_i, \end{aligned} \quad (3)$$

де $M_i^{\bar{o}}$, $Q_i^{\bar{o}}$ – значення згинальних моментів і поперечних внутрішніх зусиль у відповідному перерізі еквівалентної статично визначуваної балки (рис. 5):

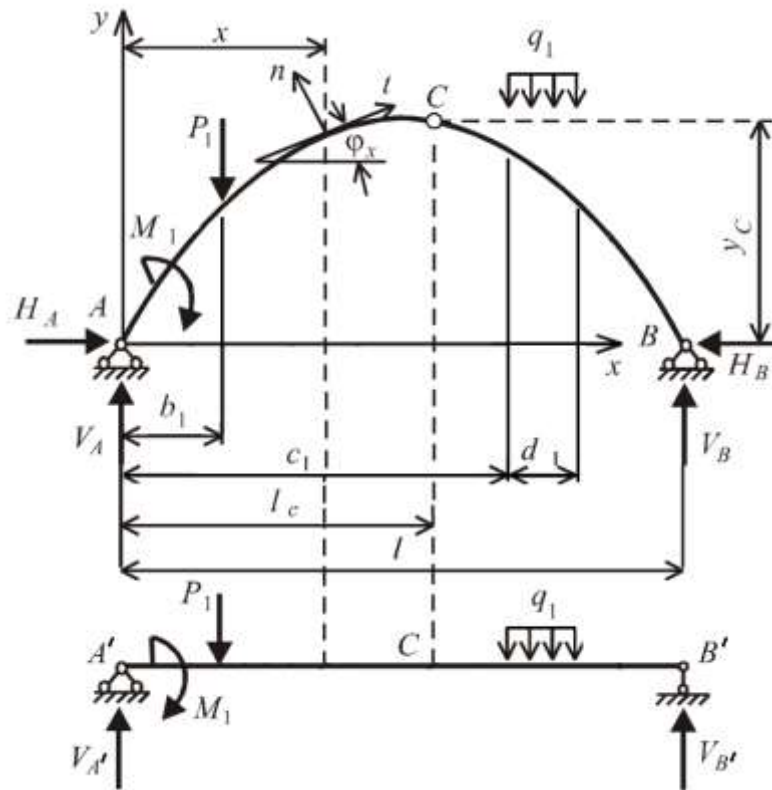


Рис. 5

Конструкції зі стержнів, які приєднуються один до одного у вузлах, частина з яких є жорсткими, називають рамами. В залежності від кількості етапів приєднання дисків під час проведення кінематичного аналізу рами бувають: простими (структурний аналіз проводиться за один етап) і складеними (структурний аналіз проходить за два чи більше етапів). Прості рами в залежності від способу приєднання до диску «земля» можуть бути трьох типів: консольними (рис. 6а), балочними (рис. 6б,в), арочними (рис. 6г).

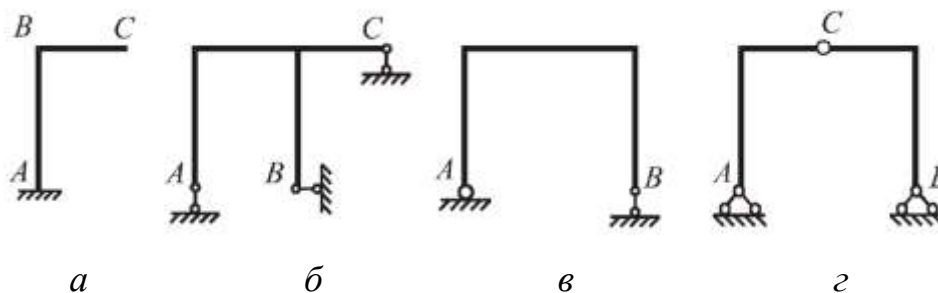


Рис. 6

В простих балочних рамах (рис. 7а) три опорні реакції визначаються з трьох рівнянь рівноваги відсіченої від диску «земля» рами (рис. 7б).

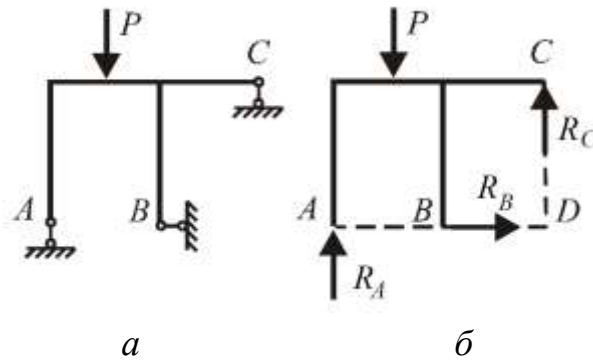


Рис. 7

Складені рами (рис. 8а) представляють собою декілька простих рам, які опираються одна на одну. Складені рами можуть бути: багатопрогоновими та поперховими. Розрахунок в такому випадку полягає не лише у визначенні реакцій опор, але і у обчисленні реакцій взаємодії внутрішніх дисків між собою. Розрахунок проходить у порядку, зворотному до якісного етапу кінематичного аналізу рами, тобто від верхнього «поверху» (рис. 8б) до нижнього (рис. 8в). «Опорні» реакції вищих «поверхів» прикладаються на нижні зі зворотним знаком як зовнішнє навантаження.

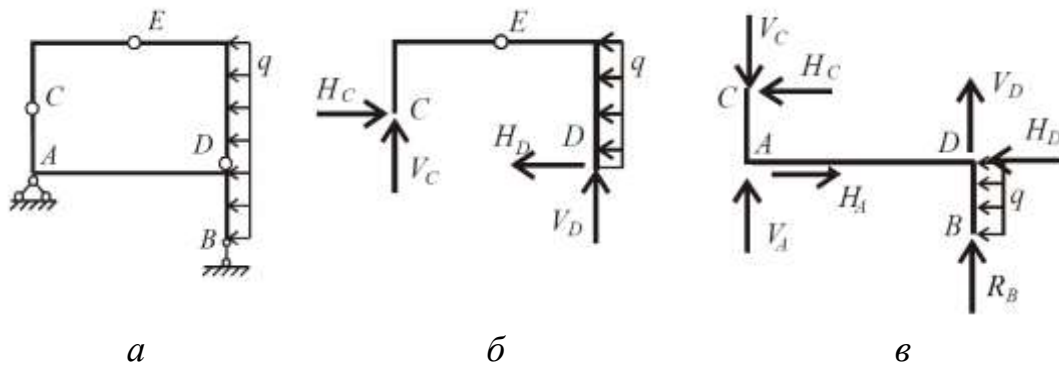


Рис. 8

В кожному перерізі рами k (рис. 9а) також виникають три види внутрішніх зусиль. Визначають їх значення шляхом запису алгебраїчної суми моментів усіх зовнішніх сил відносно центру ваги перерізу (при обчисленні згинального моменту M_k), алгебраїчної суми проєкцій всіх сил на нормаль n до осі стержня (при обчисленні поперечного зусилля Q_k) або на дотичну t до осі стержня рами (при обчисленні поздовжнього зусилля N_k) по одну сторону (ліву або праву) від перерізу (рис. 9б,в):

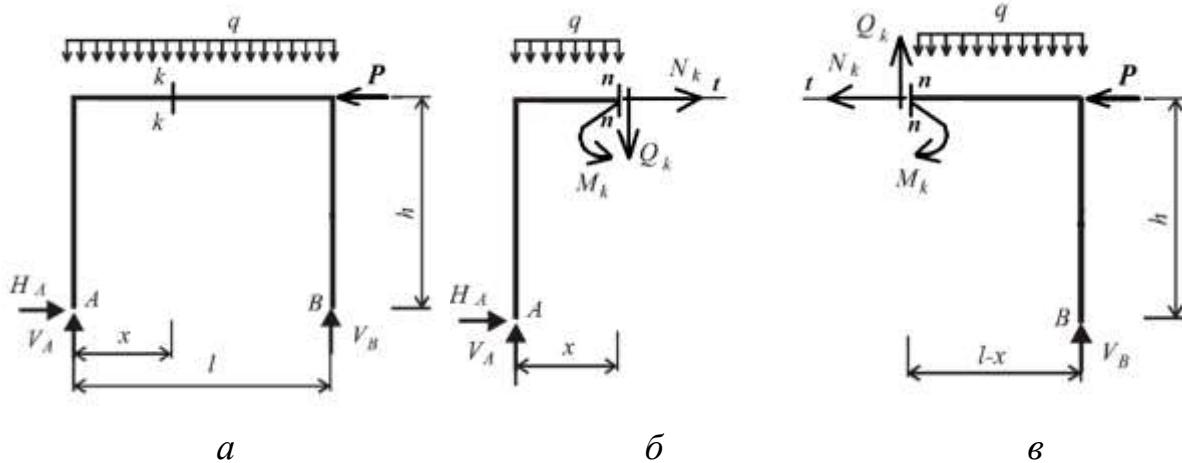


Рис. 9

Відповідно, вирази для визначення внутрішніх зусиль мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 M_k &= \sum M_k^l \text{ або } M_k = \sum M_k^{np}; \\
 Q_k &= \sum F_n^l \text{ або } Q_k = \sum F_n^{np}; \\
 N_k &= \sum F_t^l \text{ або } N_k = \sum F_t^{np}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Під час побудови епюр ординати на епюрі M відкладаються з боку розтягнутих волокон, при цьому знак на епюрі не ставиться. Додатний знак на епюрі Q ставиться, якщо сумарне поперечне зусилля в перерізі намагається повернути стержень за годинниковою стрілкою; епюра N є додатною, якщо поздовжнє зусилля намагається розтягнути елемент рами.

Щоб переконатись, що значення внутрішніх зусиль визначені вірно, необхідно виконати дві перевірки епюр. Перша з них, перевірка рівноваги вирізаних вузлів рами, полягає у перевірці задоволення умов рівноваги кожного вирізаного із системи вузла після прикладання до місць розривів внутрішніх зусиль, взятих з епюр. Сума проєкцій на осі x і y та сума моментів відносно вирізаного вузла мають дорівнювати нулю. Також між епюрами M і Q повинна спостерігатись відповідність, в чому і полягає друга перевірка. Оскільки епюра Q є похідною від епюри M на ділянках, де епюра моментів змінюється за лінійним законом, значення поперечного зусилля має дорівнює тангенсу кута нахилу епюри M до осі стержня. Якщо епюра M відхиляється від осі стержня за годинниковою стрілкою – епюра Q має позитивний знак. Для перевірки на ділянках з криволінійною епюрою згинальних моментів необхідно розглянути вирізаний елемент рами, приклавши до нього розподілене навантаження, моменти на кінцях та невідомі перерізуючі зусилля. При наявності на епюрі Q нульової точки на епюрі M в цьому ж перерізі має спостерігатись екстремум.

В стержневих системах для визначення переміщення зазвичай застосовують метод Мора. В такому випадку спочатку необхідно розглянути вантажний стан системи та побудувати епюри внутрішніх зусиль M , Q і N від дії зовнішнього навантаження. Після цього треба створити допоміжний стан системи, прибравши все зовнішнє навантаження та приклавши одиничну узагальнену силу, яка відповідає переміщенню. При цьому, горизонтальному зсуву відповідає одинична горизонтальна сила; вертикальному прогину – одинична вертикальна сила; куту повороту перерізу системи – момент, який є рівним $1m$; кут зламу осі стержня в шарнірі може бути викликаний одночасним прикладанням до стержня по обидва боки від шарніра двох одиничних моментів, протилежних за напрямками; зближення двох точок системи може відбутись в результаті прикладання двох одиничних сил, направлених назустріч одна одній вздовж лінії, яка з'єднує ці точки. Оскільки в рамках переважають деформації згину, то при розгляді одиничного стану достатньо побудувати лише епюру згинальних моментів M_1 та обчислити значення переміщення Δ_{1P} за спрощеною формулою Максвелла-Мора:

$$\Delta_{1P} = \sum \int_l \frac{M_1 \cdot M}{EI} dx, \quad (5)$$

де l – довжина ділянки інтегрування.

Інтеграл у виразі (5) можна обчислити за допомогою прийомів чисельного інтегрування. Першим із них є правило Верещагіна:

$$\int_0^l M \cdot M_1 dx = A \cdot y_i, \quad (6)$$

де A – площа епюри M на ділянці, y_i – ордината на епюрі M_1 , взята під центром ваги епюри M .

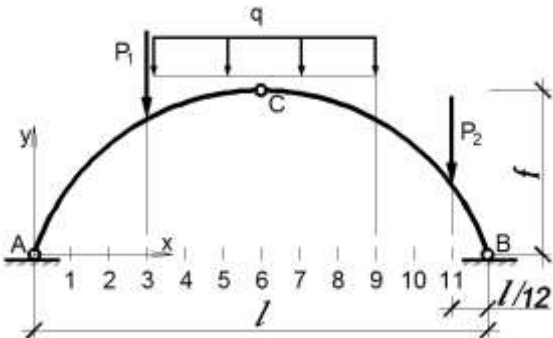
Другим способом множення епюр є використання формули Сімпсона–Корноухова:

$$\int_0^l M \cdot M_1 dx = \frac{l}{6} [a \cdot a_1 + 4 \cdot b \cdot b_1 + c \cdot c_1], \quad (7)$$

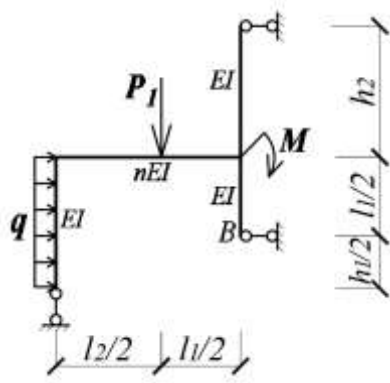
де a , b , c та a_1 , b_1 , c_1 – значення на кінцях та посередині ділянки інтегрування на епюрах M та M_1 відповідно.

Приклад індивідуального завдання

(лицева сторона завдання)

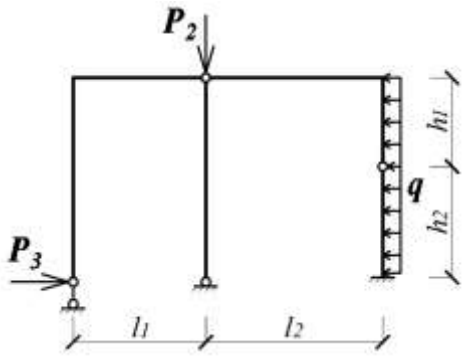


l , м	f , м	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	вісь арки
8,4	6,0	15	14	2,5	парабола
7,2	2,5	4,0	5,0	2,0	синусоїда
9,6	4,0	5,0	6,0	2,4	парабола
10,8	4,5	4,0	6,0	3,0	синусоїда
12,0	5,0	5,0	8,0	3,2	парабола



Обчислити вертикальне переміщення точки B

№	l_1 , м	l_2 , м	h_1 , м	h_2 , м	q , кН/м	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	M , кНм	n
1	6,0	8,0	4,0	5,0	2,0	7	3	7	3	2
2	3,6	4,0	3,0	2,4	1,6	4	7	5	6	1,5
3	2,0	3,4	2,4	4,0	1,8	15	16	18	7	2,5
4	4,0	2,4	3,8	3,0	1,4	3	8	5	8	3
5	2,4	3,2	3,6	2,0	2,2	4	7	8	9	1,5



Підкреслені значення в таблиці означають дані, які задаються викладачем кожному студенту для подальших розрахунків.

(зворотна сторона завдання)

РОЗРАХУНОК ТРИШАРНІРНОЇ АРКИ ТА СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ РАМ

Розрахунок тришарнірної арки:

1. Виконати кінематичний аналіз.
2. Визначити опорні реакції. Перевірити рівновагу арки.
3. Визначити внутрішні зусилля: згинальні момент, поперечні та поздовжні зусилля в перерізах арки з кроком $l/12$.
3. Побудувати епюри внутрішніх зусиль в арці по одержаним значенням.
4. Перевірити обчислені зусилля у перерізах **3** і **10** шляхом проектування на осі.

Розрахунок простої та складеної рам:

1. Підготувати вихідну розрахункову схему.
2. Виконати кінематичний аналіз.
3. Визначити реакції опор і зусилля взаємодії дисків, виконати перевірки.
4. Побудувати епюри згинальних моментів, поперечних та поздовжніх зусиль.
5. Виконати перевірки епюр (перевірку рівноваги вирізаних вузлів рами та перевірку відповідності між епюрами M і Q).

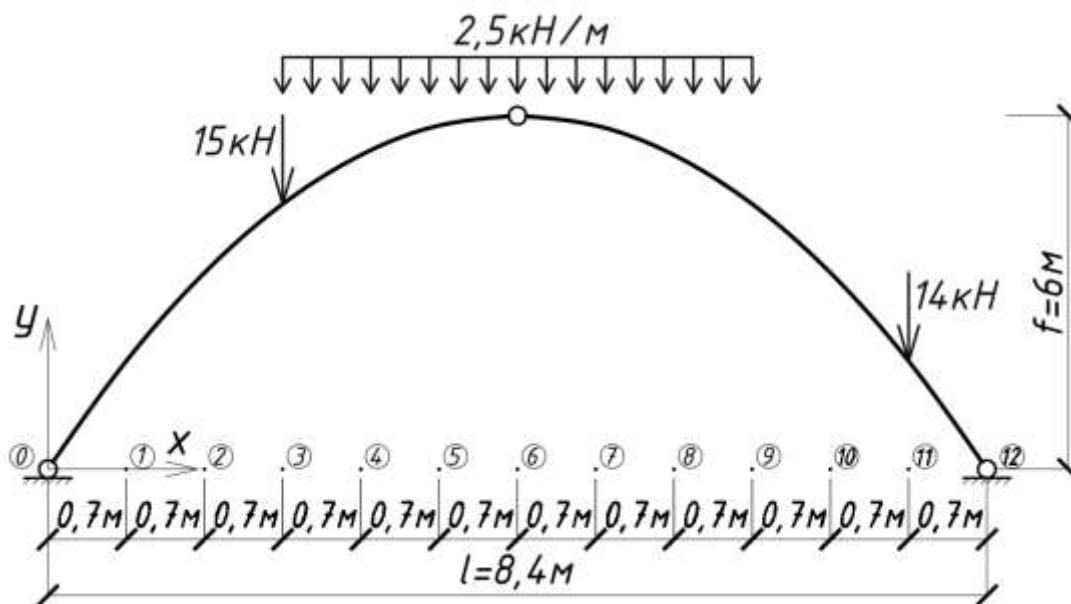
Для простої рами:

6. Утворити допоміжний стан для визначення переміщення.
7. У допоміжному стані визначити реакції опор і побудувати епюру згинальних моментів.
8. Обчислити шукане переміщення за формулою Максвелла-Мора (підготувати епюри до чисельного інтегрування і визначити значення переміщення використовуючи правила Верещагіна і Сімпсона-Корноухова).

Підкреслені числа визначають перерізи, які задаються викладачем для виконання перевірки при розрахунку тришарнірної арки.

Приклад виконання індивідуального завдання

Розрахунок тришарнірної арки

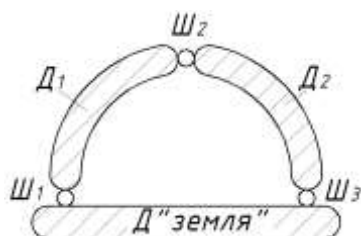


Вісь арки – парабола (1):

$$y = \frac{4 \cdot 6}{(8,4)^2} x(8,4 - x), \quad \varphi = \arctg \left(\frac{4 \cdot 6}{(8,4)^2} (8,4 - 2x) \right).$$

1. Кінематичний аналіз.

1.1 Кількісний етап:



$$D = 3,$$

$$B = 0,$$

$$P = 0,$$

$$Ш = 3,$$

$$C = 0.$$

$$\Gamma = 3 \cdot D + 2 \cdot B - 3 \cdot P - 2 \cdot Ш - C - 3 =$$

$$= 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 - 0 - 3 = 9 - 6 - 3 = 0.$$

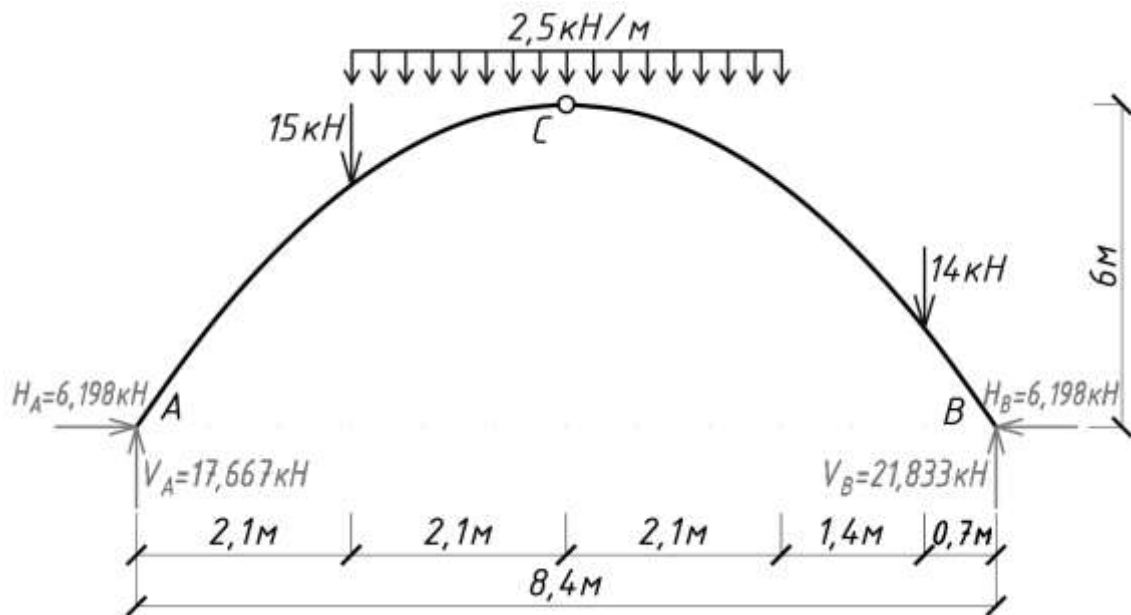
Система має мінімально необхідну кількість в'язей.

1.2 Якісний етап:

$$\frac{D_1 + D_2 + D \text{ "земля"}}{Ш_1, Ш_2, Ш_3} = D I \text{ (спосіб шарнірного трикутника).}$$

Висновок: система геометрично незмінювана, статично визначувана.

2. Визначення опорних реакцій.



$$\sum M_A = 0: 15 \cdot 2,1 + 2,5 \cdot 4,2 \cdot 4,2 + 14 \cdot 7,7 - V_B \cdot 8,4 = 0;$$

$$V_B = \frac{183,4}{8,4} = 21,833 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0: V_B \cdot 8,4 - 15 \cdot 6,3 - 2,5 \cdot 4,2 \cdot 4,2 - 14 \cdot 0,7 = 0;$$

$$V_A = \frac{148,4}{8,4} = 17,667 \text{ кН}.$$

Перевірка вертикальних реакцій:

$$\sum F_y = 17,667 - 15 - 2,5 \cdot 4,2 - 14 + 21,833 = 39,5 - 39,5 = 0.$$

$$\sum M_C^l = 0: 17,667 \cdot 4,2 - 15 \cdot 2,1 - 2,5 \cdot 2,1 \cdot 1,05 - H_A \cdot 6 = 0;$$

$$H_A = \frac{37,189}{6} = 6,198 \text{ кН}.$$

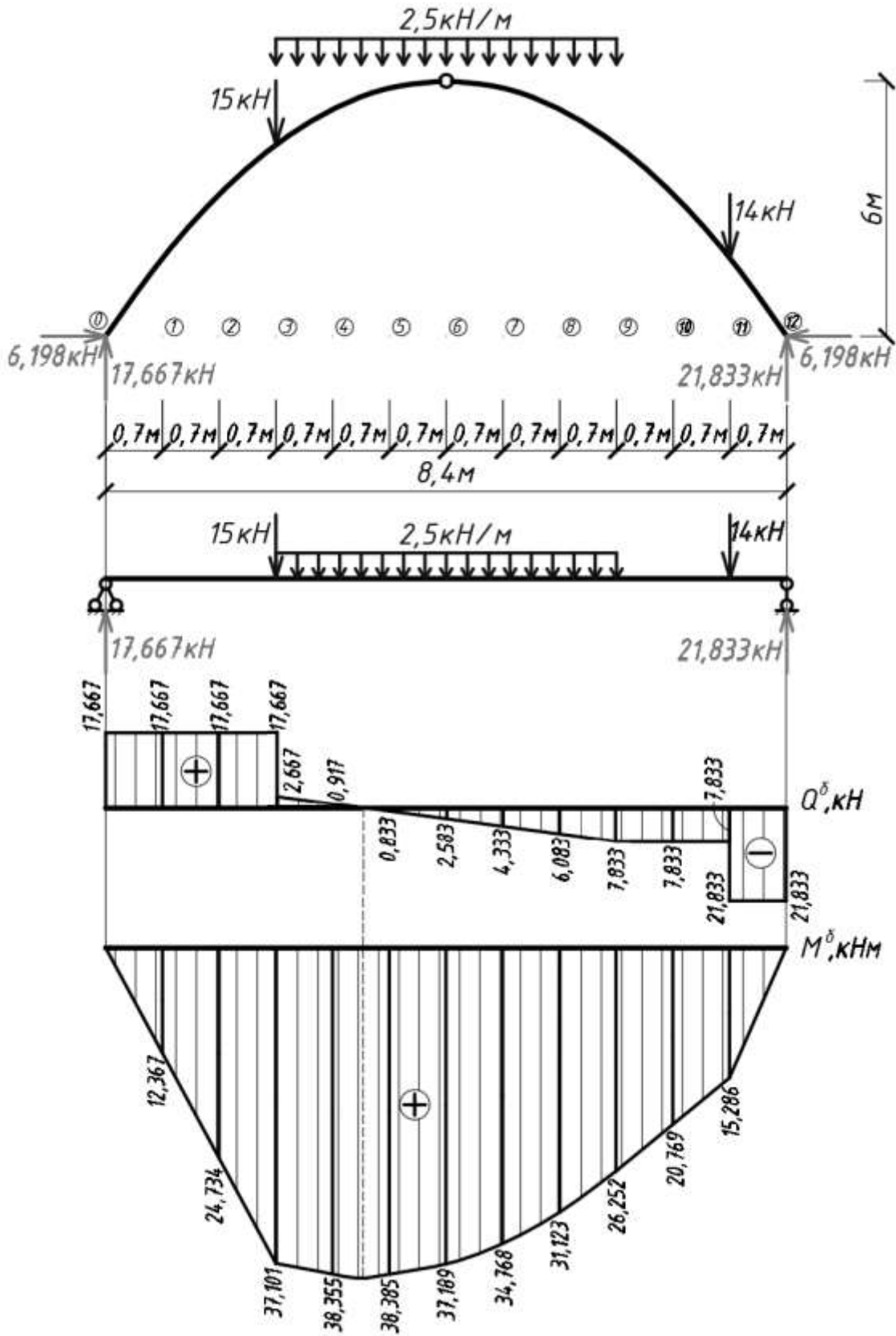
$$\sum M_C^{np} = 0: 2,5 \cdot 2,1 \cdot 1,05 + 14 \cdot 3,5 - 21,833 \cdot 4,2 + H_B \cdot 6 = 0;$$

$$H_B = \frac{37,186}{6} = 6,198 \text{ кН}.$$

Перевірка горизонтальних реакцій:

$$\sum F_x = 6,198 - 6,198 = 0.$$

3. Побудова епюр в еквівалентній балці.



$$\begin{aligned}
Q_0^{\bar{o}} &= +17,667 \kappa H ; \\
Q_1^{\bar{o}} &= +17,667 \kappa H ; \\
Q_2^{\bar{o}} &= +17,667 \kappa H ; \\
Q_{3(\text{лив})}^{\bar{o}} &= +17,667 \kappa H ; \\
Q_{3(\text{нр})}^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 = 2,667 \kappa H ; \\
Q_4^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot 0,7 = 0,917 \kappa H ; \\
Q_5^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot (2 \cdot 0,7) = -0,833 \kappa H ; \\
Q_6^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot (3 \cdot 0,7) = -2,583 \kappa H ; \\
Q_7^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot (4 \cdot 0,7) = -4,333 \kappa H ; \\
Q_8^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot (5 \cdot 0,7) = -6,083 \kappa H ; \\
Q_9^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot (6 \cdot 0,7) = -7,833 \kappa H ; \\
Q_{10}^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot (6 \cdot 0,7) = -7,833 \kappa H ; \\
Q_{11(\text{лив})}^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot (6 \cdot 0,7) = -7,833 \kappa H ; \\
Q_{11(\text{нр})}^{\bar{o}} &= +17,667 - 15 - 2,5 \cdot (6 \cdot 0,7) - 14 = -21,833 \kappa H ; \\
Q_{12}^{\bar{o}} &= -21,833 \kappa H . \\
M_0^{\bar{o}} &= 0 ; \\
M_1^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot 0,7 = 12,367 \kappa H M ; \\
M_2^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (2 \cdot 0,7) = 24,734 \kappa H M ; \\
M_3^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (3 \cdot 0,7) = 37,101 \kappa H M ; \\
M_4^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (4 \cdot 0,7) - 15 \cdot 0,7 - 2,5 \cdot 0,7 \cdot 0,35 = 38,355 \kappa H M ; \\
M_5^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (5 \cdot 0,7) - 15 \cdot (2 \cdot 0,7) - 2,5 \cdot (2 \cdot 0,7) \cdot 0,7 = 38,385 \kappa H M ; \\
M_6^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (6 \cdot 0,7) - 15 \cdot (3 \cdot 0,7) - 2,5 \cdot (3 \cdot 0,7) \cdot 1,05 = 37,189 \kappa H M ; \\
M_7^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (7 \cdot 0,7) - 15 \cdot (4 \cdot 0,7) - 2,5 \cdot (4 \cdot 0,7) \cdot 1,4 = 34,768 \kappa H M ; \\
M_8^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (8 \cdot 0,7) - 15 \cdot (5 \cdot 0,7) - 2,5 \cdot (5 \cdot 0,7) \cdot 1,75 = 31,123 \kappa H M ; \\
M_9^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (9 \cdot 0,7) - 15 \cdot (6 \cdot 0,7) - 2,5 \cdot (6 \cdot 0,7) \cdot 2,1 = 26,252 \kappa H M ; \\
M_{10}^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (10 \cdot 0,7) - 15 \cdot (7 \cdot 0,7) - 2,5 \cdot (6 \cdot 0,7) \cdot 2,8 = 20,769 \kappa H M ; \\
M_{11}^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (11 \cdot 0,7) - 15 \cdot (8 \cdot 0,7) - 2,5 \cdot (6 \cdot 0,7) \cdot 3,5 = 15,286 \kappa H M ; \\
M_{12}^{\bar{o}} &= +17,667 \cdot (12 \cdot 0,7) - 15 \cdot (9 \cdot 0,7) - 2,5 \cdot (6 \cdot 0,7) \cdot 4,2 - 14 \cdot 0,7 = 0 .
\end{aligned}$$

4. Визначення зусиль в перерізах арки.

	$x,$ $м$	$y,$ $м$	$\varphi,$ $град$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$M^{\bar{o}},$ $кНм$	$Q^{\bar{o}},$ $кН$	$M^a,$ $кНм$	$Q^a,$ $кН$	$N^a,$ $кН$
0	0	0	70,71	0,9439	0,3303	0	17,667	0	-0,014	-18,723
1	0,7	1,833	67,22	0,922	0,3872	12,367	17,667	1,004	1,127	-18,689
2	1,4	3,333	62,3	0,8854	0,4648	24,734	17,667	4,074	2,725	-18,523
3 ^{лів}	2,1	4,5	55	0,8192	0,5736	37,101	17,667	9,21	5,054	-18,028
3 ^{пр}	2,1	4,5	55	0,8192	0,5736	37,101	2,667	9,21	-3,548	-5,739
4	2,8	5,333	43,59	0,6895	0,7243	38,355	0,917	5,299	-3,610	-5,121
5	3,5	5,833	25,45	0,4297	0,903	38,385	-0,833	2,23	-3,417	-5,238
6	4,2	6	0	0	1	37,189	-2,583	0	-2,583	-6,198
7	4,9	5,833	-25,45	-0,4297	0,903	34,768	-4,333	-1,387	-1,247	-7,459
8	5,6	5,333	-43,59	-0,6895	0,7243	31,123	-6,083	-1,933	-0,130	-8,683
9	6,3	4,5	-55	-0,8192	0,5736	26,252	-7,833	-1,639	0,586	-9,971
10	7	3,333	-62,3	-0,8854	0,4648	20,769	-7,833	0,109	1,847	-9,816
11 ^{лів}	7,7	1,833	-67,22	-0,922	0,3872	15,286	-7,833	3,923	2,681	-9,622
11 ^{пр}	7,7	1,833	-67,22	-0,922	0,3872	15,286	-21,833	3,923	-2,740	-22,530
12	8,4	0	-70,71	-0,9439	0,3303	0	-21,833	0	-1,363	-22,655

Значення в таблиці обчислені за допомогою формул:

$$y = \frac{4 \cdot 6}{(8,4)^2} x(8,4 - x);$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{4 \cdot 6}{(8,4)^2} (8,4 - 2x) \right);$$

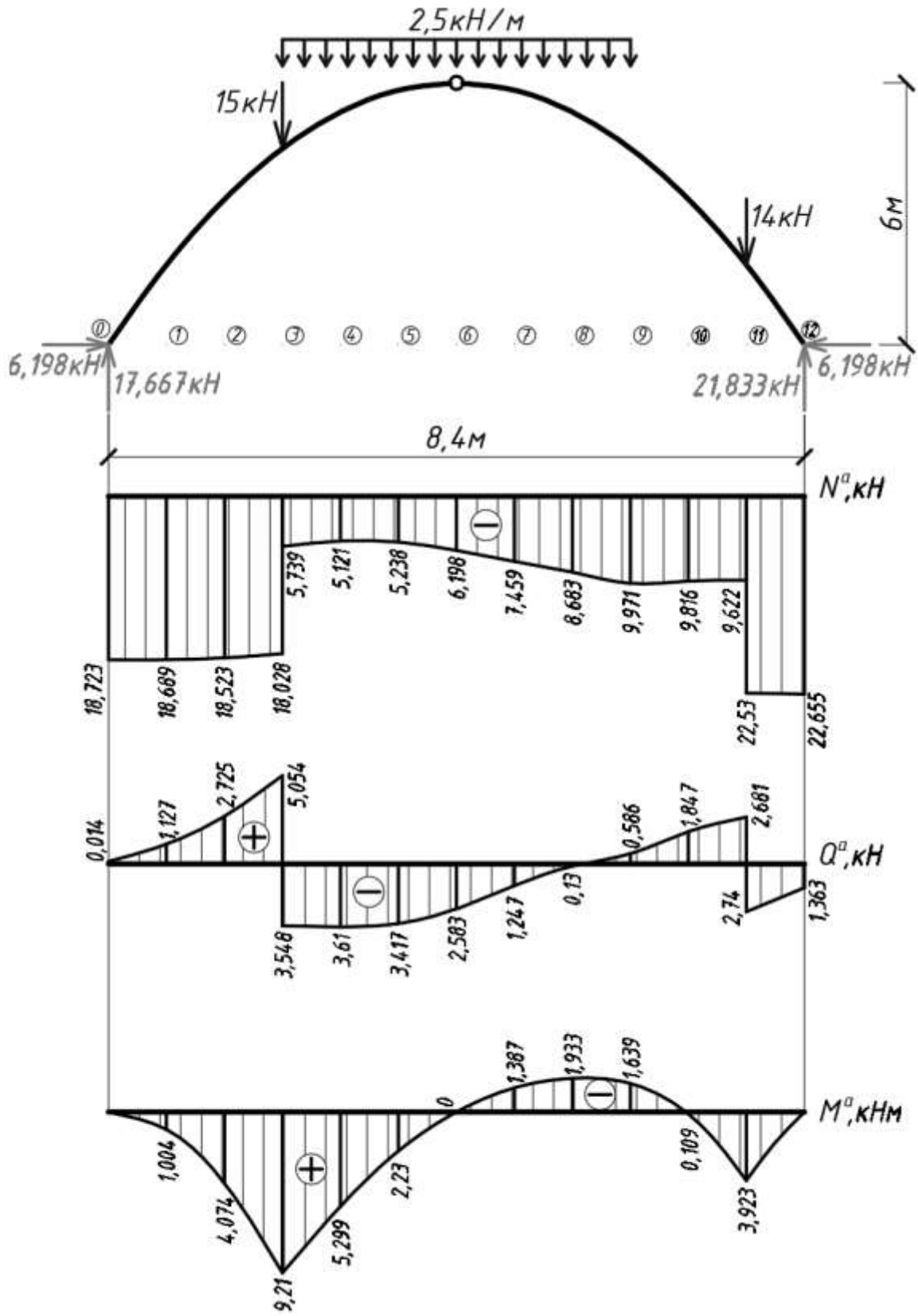
$$M^a = M^{\bar{o}} - H \cdot y;$$

$$Q^a = Q^{\bar{o}} \cdot \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi;$$

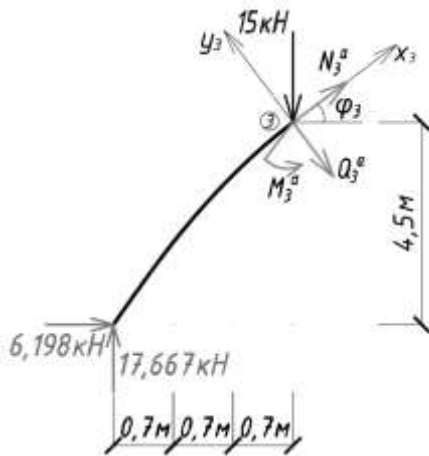
$$N^a = -(Q^{\bar{o}} \cdot \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi);$$

$$H = H_A = H_B = 6,198 \text{кН}.$$

5. Побудова епюр в арці.



6. Перевірка зусиль в заданих перерізах арки.



Переріз 3:

$$\varphi_3 = 55^\circ$$

$$\sin \varphi_3 = 0,8192$$

$$\cos \varphi_3 = 0,5736$$

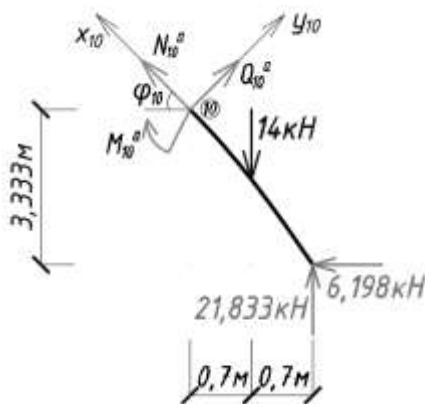
$$\Sigma F_{x_3} = 0: N_3^a + 6,198 \cdot \cos \varphi_3 + 17,667 \cdot \sin \varphi_3 - 15 \cdot \sin \varphi_3 = 0;$$

$$N_3^a = -5,74 \text{ кН}.$$

$$\Sigma F_{y_3} = 0: -Q_3^a - 6,198 \cdot \sin \varphi_3 + 17,667 \cdot \cos \varphi_3 - 15 \cdot \cos \varphi_3 = 0;$$

$$Q_3^a = -3,548 \text{ кН}.$$

$$\Sigma M_3 = 0: -M_3^a - 6,198 \cdot 4,5 + 17,667 \cdot 2,1 = 0; M_3^a = +9,21 \text{ кНм}.$$



Переріз 10:

$$\varphi_{10} = 62,3^\circ$$

$$\sin \varphi_{10} = 0,8854$$

$$\cos \varphi_{10} = 0,4648$$

$$\Sigma F_{x_{10}} = 0: N_{10}^a + 6,198 \cdot \cos \varphi_{10} + 21,833 \cdot \sin \varphi_{10} - 14 \cdot \sin \varphi_{10} = 0;$$

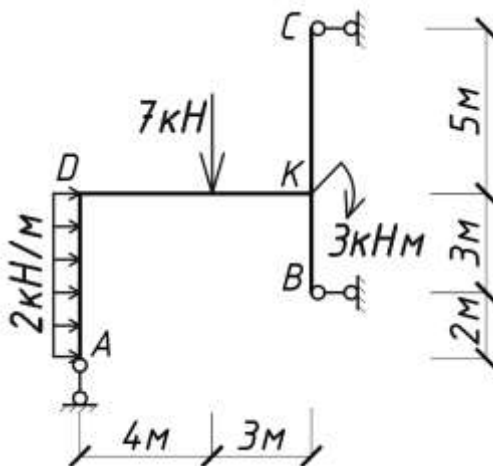
$$N_{10}^a = -9,816 \text{ кН}.$$

$$\Sigma F_{y_{10}} = 0: Q_{10}^a - 6,198 \cdot \sin \varphi_{10} + 21,833 \cdot \cos \varphi_{10} - 14 \cdot \cos \varphi_{10} = 0;$$

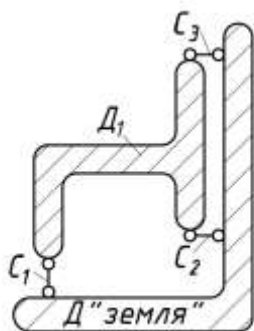
$$Q_{10}^a = -1,847 \text{ кН}.$$

$$\Sigma M_{10} = 0: M_{10}^a + 6,198 \cdot 3,333 - 21,833 \cdot 1,4 + 14 \cdot 0,7 = 0; M_{10}^a = +0,108 \text{ кНм}.$$

Розрахунок простої рами



1. Кінематичний аналіз.



1.1 Кількісний етап:

$$D = 2, B = 0, П = 0, Ш = 0, C = 3.$$

$$Г = 3 \cdot D + 2 \cdot B - 3 \cdot П - 2 \cdot Ш - C - 3 =$$

$$= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 3 - 3 = 6 - 6 = 0.$$

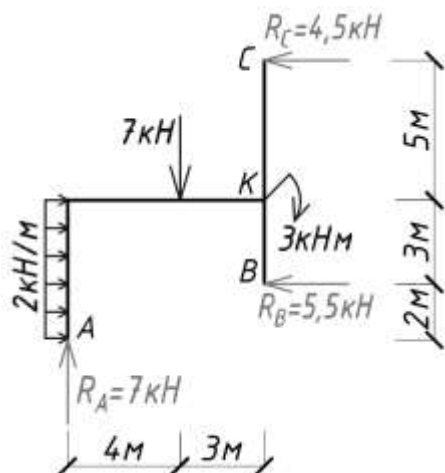
Система має мінімально необхідну кількість в'язей.

1.2 Якісний етап:

$$\frac{D_1 + D \text{ "земля"}}{C_1, C_2, C_3} = D I \text{ (спосіб Шухова).}$$

Висновок: система геометрично незмінювана, статично визначувана.

2. Визначення опорних реакцій.



$$\sum F_y = 0: R_A - 7 = 0; R_A = 7 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0: 7 \cdot 7 - 2 \cdot 5 \cdot 7,5 - 7 \cdot 3 + 3 - R_B \cdot 8 = 0;$$

$$R_B = 5,5 \text{ кН}.$$

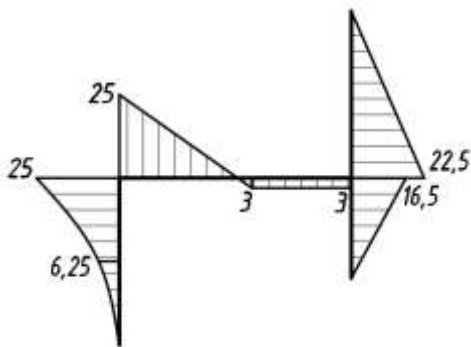
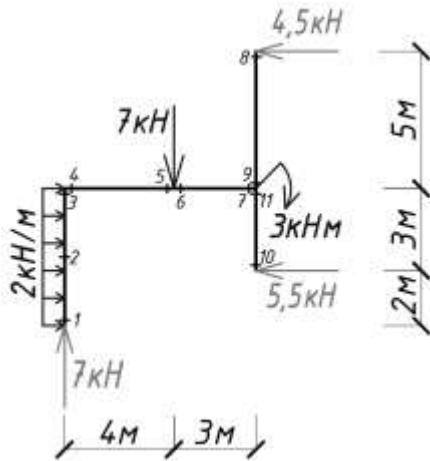
$$\sum F_x = 0: 2 \cdot 5 - 5,5 - R_C = 0; R_C = 4,5 \text{ кН}.$$

Перевірка:

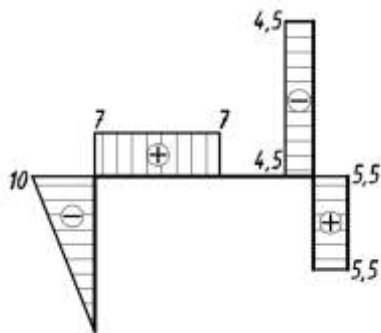
$$\sum M_K = 7 \cdot 7 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 - 7 \cdot 3 + 5,5 \cdot 3 + 3 - 4,5 \cdot 5 =$$

$$= 68,5 - 68,5 = 0.$$

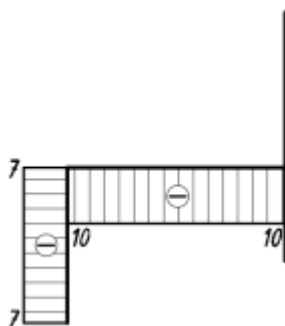
3. Побудова епюр внутрішніх зусиль.



M, кНм



Q, кН



N, кН

$$M_1 = 0,$$

$$M_2^H = -2 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = -6,25 \text{ кНм},$$

$$M_3^H = -2 \cdot 5 \cdot 2,5 = -25 \text{ кНм},$$

$$M_4^{лив} = -25 \text{ кНм},$$

$$M_5^{лив} = -25 + 7 \cdot 4 = +3 \text{ кНм},$$

$$M_6^{лив} = +3 \text{ кНм},$$

$$M_7^{лив} = -25 + 7 \cdot 7 - 7 \cdot 3 = +3 \text{ кНм},$$

$$M_8 = 0,$$

$$M_9^e = -4,5 \cdot 5 = -22,5 \text{ кНм},$$

$$M_{10} = 0,$$

$$M_{11}^H = +5,5 \cdot 3 = +16,5 \text{ кНм}.$$

$$Q_1 = 0,$$

$$Q_3 = -2 \cdot 5 = -10 \text{ кН},$$

$$Q_4 = Q_5 = +7 \text{ кН},$$

$$Q_6 = Q_7 = +7 - 7 = 0,$$

$$Q_8 = Q_9 = -4,5 \text{ кН},$$

$$Q_{10} = Q_{11} = +5,5 \text{ кН}.$$

$$N_1 = N_3 = -7 \text{ кН},$$

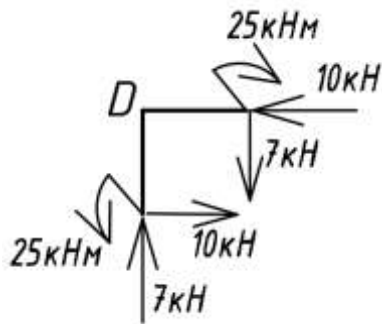
$$N_4 = N_5 = -2 \cdot 5 = -10 \text{ кН},$$

$$N_6 = N_7 = -10 \text{ кН},$$

$$N_8 = N_9 = 0,$$

$$N_{10} = N_{11} = 0.$$

4. Перевірка рівноваги вирізаних вузлів рами.

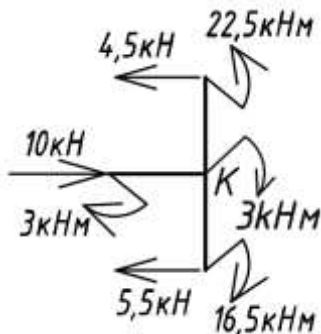


Вузол D:

$$\sum F_x = 10 - 10 = 0,$$

$$\sum F_y = 7 - 7 = 0,$$

$$\sum M_K = 25 - 25 = 0.$$



Вузол K:

$$\sum F_x = 10 - 4,5 - 5,5 = 10 - 10 = 0,$$

$$\sum F_y = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum M_K &= 3 - 22,5 + 3 + 16,5 = \\ &= 22,5 - 22,5 = 0. \end{aligned}$$

5. Перевірка відповідності між епюрами M і Q.

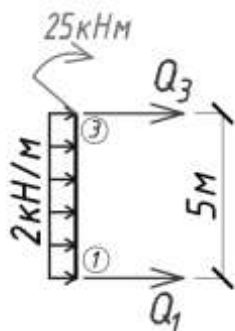
$$Q_{4-5} = + \frac{25 - (-3)}{4} = +7 \text{ кН};$$

$$Q_{6-7} = + \frac{3 - 3}{3} = 0;$$

$$Q_{8-9} = - \frac{22,5 - 0}{5} = -5,5 \text{ кН};$$

$$Q_{10-11} = + \frac{16,5 - 0}{3} = -4,5 \text{ кН};$$

Q_{1-3} :



$$\sum M_1 = 0: 2 \cdot 5 \cdot 2,5 + Q_3 \cdot 5 + 25 = 0;$$

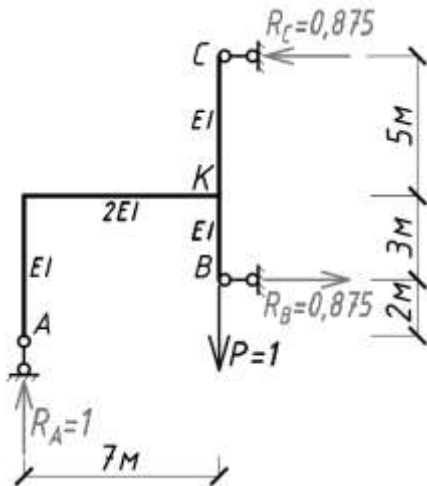
$$Q_3 = -10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_3 = 0: Q_1 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 + 25 = 0;$$

$$Q_1 = 0.$$

6. Обчислення заданого переміщення (вертикальне переміщення точки В).

Створимо допоміжний стан, що відповідає шуканому переміщенню:



$$\sum F_y = 0: R_A - 1 = 0; R_A = 1.$$

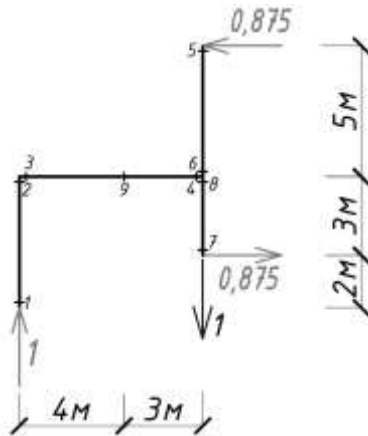
$$\sum M_C = 0: 1 \cdot 7 - R_B \cdot 8 = 0; R_B = 0,875.$$

$$\sum F_x = 0: 0,875 - R_C = 0; R_C = 0,875.$$

Перевірка:

$$\sum M_K = 1 \cdot 7 - 0,875 \cdot 5 - 0,875 \cdot 3 = 7 - 7 = 0.$$

Будуємо епюру моментів в одиничному стані:



$$M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 0,$$

$$M_4^{лів} = +1 \cdot 7 = +7м,$$

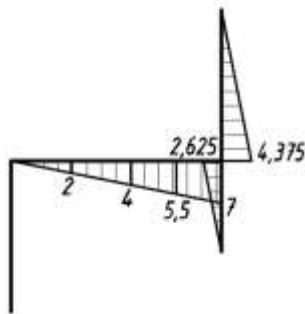
$$M_5 = 0,$$

$$M_6^в = -0,875 \cdot 5 = -4,375м,$$

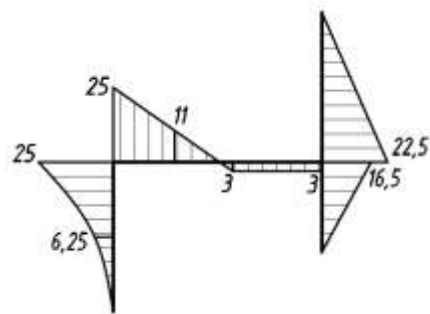
$$M_7 = 0,$$

$$M_8^л = -0,875 \cdot 3 = -2,625м,$$

$$M_9^{лів} = +1 \cdot 4 = +4м.$$



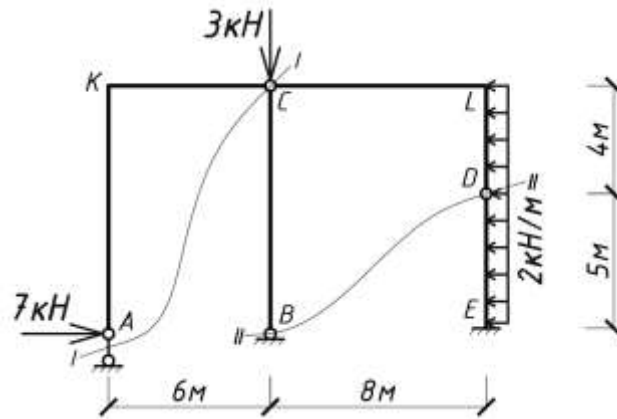
$M_l, м$



$M, кНм$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot 4 \left(0 \cdot 25 - 4 \cdot \frac{25-3}{2} \cdot 2 + 3 \cdot 4 \right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{4+7}{2} \cdot 3 \cdot 3 \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,375 \right) - \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 16,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,625 \right) = \frac{1}{EI} (178,833).$$

Розрахунок складеної рами



1. Кінематичний аналіз.

1.1 Кількісний етап:

$$D = 5, B = 0, П = 1, Ш = 4, C = 1.$$

$$\Gamma = 3 \cdot D + 2 \cdot B - 3 \cdot П - 2 \cdot Ш - C - 3 =$$

$$= 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 1 - 3 = 15 - 15 = 0.$$

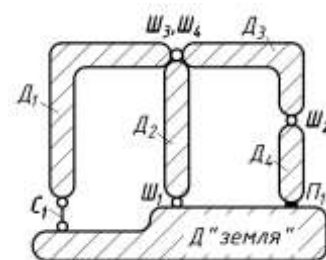
Система має мінімально необхідну кількість в'язей.

1.2 Якісний етап:

$$\frac{D'' \text{земля} + D_4}{П_1} = D I \text{ (спосіб припайки);}$$

$$\frac{D I + D_2 + D_3}{Ш_1, Ш_2, Ш_3} = D II \text{ (спосіб шарнірного трикутника);}$$

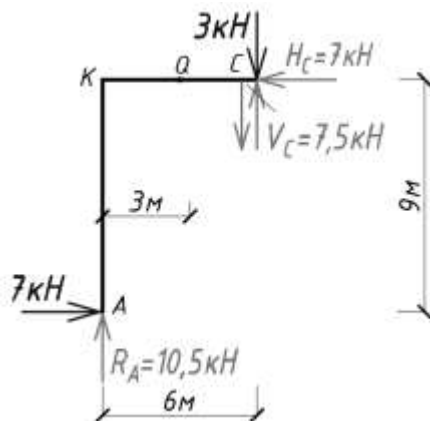
$$\frac{D III + D_1}{Ш_4, C_1} = D III \text{ (спосіб Полонсо).}$$



Висновок: система геометрично незмінювана, статично визначувана.

2. Визначення опорних реакцій та зусиль взаємодії дисків.

Виконаємо переріз I-I та розглянемо ліву частину:



$$\sum M_C = 0: -7 \cdot 9 + R_A \cdot 6 = 0; R_A = 10,5 \text{кН} .$$

$$\sum F_x = 0: 7 - H_C = 0; H_C = 7 \text{кН} .$$

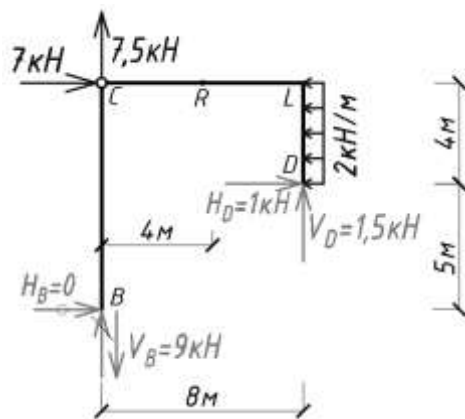
$$\sum F_y = 0: 10,5 - 3 + V_C = 0; R_C = -7,5 \text{кН} .$$

Перевірка:

$$\sum M_Q = -7 \cdot 9 + 10,5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 7,5 \cdot 3 =$$

$$= 63 - 63 = 0.$$

Виконаємо переріз II-II та розглянемо ліву частину:



$$\sum M_C^H = 0: H_B = 0.$$

$$\sum F_x = 0: 7 - H_D - 2 \cdot 4 = 0; H_D = 1kH.$$

$$\sum M_C^{np} = 0: 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - V_D \cdot 8 = 0;$$

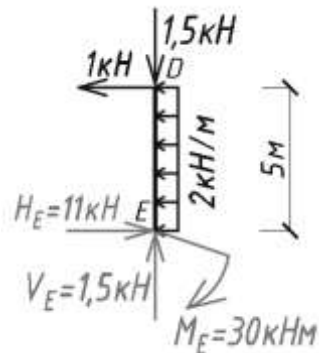
$$V_D = 1,5kH.$$

$$\sum F_y = 0: 7,5 + 1,5 + V_B = 0; V_B = -9kH.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum M_R &= -9 \cdot 4 + 7,5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 1,5 \cdot 4 = \\ &= 46 - 46 = 0. \end{aligned}$$

Визначимо зусилля в припайці:



$$\sum F_x = 0: -1 - 2 \cdot 5 + H_E = 0; H_E = 11kH.$$

$$\sum F_y = 0: -1,5 + V_E = 0; V_E = 1,5kH.$$

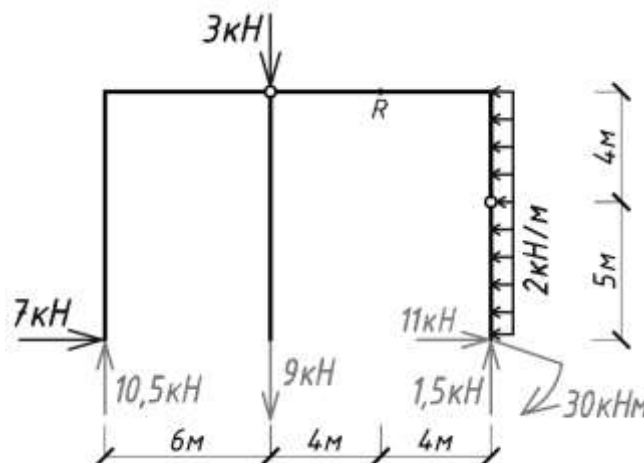
$$\sum M_E = 0: -1 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 + M_E = 0;$$

$$M_E = 30кНм.$$

Перевірка:

$$\sum M_D = -2 \cdot 5 \cdot 2,5 - 11 \cdot 5 + 30 = 55 - 55 = 0.$$

Перевірка загальної рівноваги:



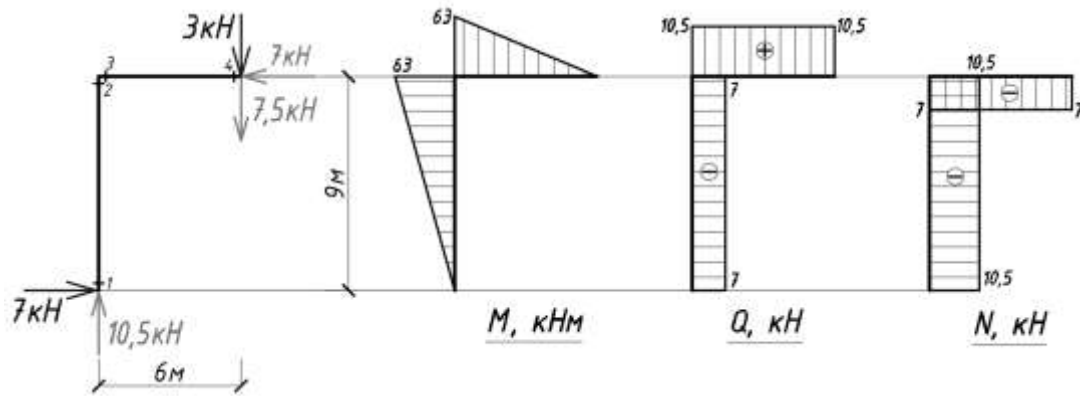
$$\sum F_x = 7 + 11 - 2 \cdot 9 = 18 - 18 = 0.$$

$$\sum F_y = 0: 10,5 - 3 - 9 + 1,5 = 12 - 12 = 0.$$

$$\sum M_R = -7 \cdot 9 + 10,5 \cdot 10 - 3 \cdot 4 - 9 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 4,5 - 11 \cdot 9 - 1,5 \cdot 4 + 30 = 216 - 216 = 0.$$

3. Побудова епюр внутрішніх зусиль.

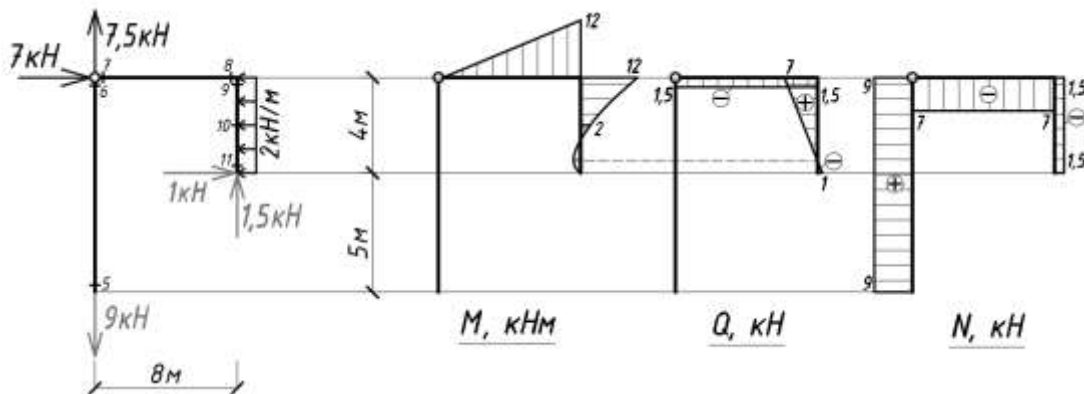
I



$$M_1 = 0, M_2^H = -7 \cdot 9 = -63 \text{кНм}, \quad Q_1 = Q_2 = -7 \text{кН}, \quad N_1 = N_2 = -10,5 \text{кН},$$

$$M_4 = 0, M_3^{np} = +10,5 \cdot 6 = 63 \text{кНм}. \quad Q_3 = Q_4 = +10,5 \text{кН}. \quad N_3 = N_4 = -7 \text{кН}.$$

II



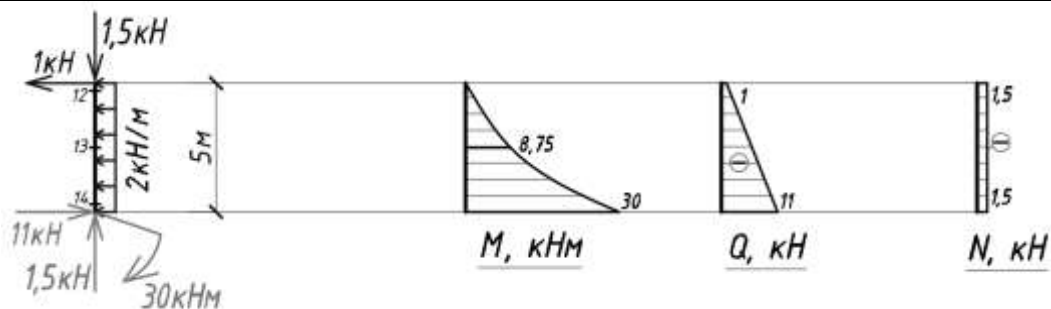
$$M_5 = 0, M_6 = 0, M_{11} = 0, \quad Q_5 = Q_6 = 0, \quad N_5 = N_6 = +9 \text{кН},$$

$$M_{10}^H = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = +2 \text{кНм}, \quad Q_{11} = -1 \text{кН}, \quad N_9 = N_{11} = -1,5 \text{кН},$$

$$M_9^H = -1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 = +12 \text{кНм}, \quad Q_9 = -1 + 2 \cdot 4 = +7 \text{кН}, \quad N_7 = N_8 = -7 \text{кН}.$$

$$M_8^{np} = +12 \text{кНм}, M_7 = 0. \quad Q_7 = Q_8 = -1,5 \text{кН}.$$

III

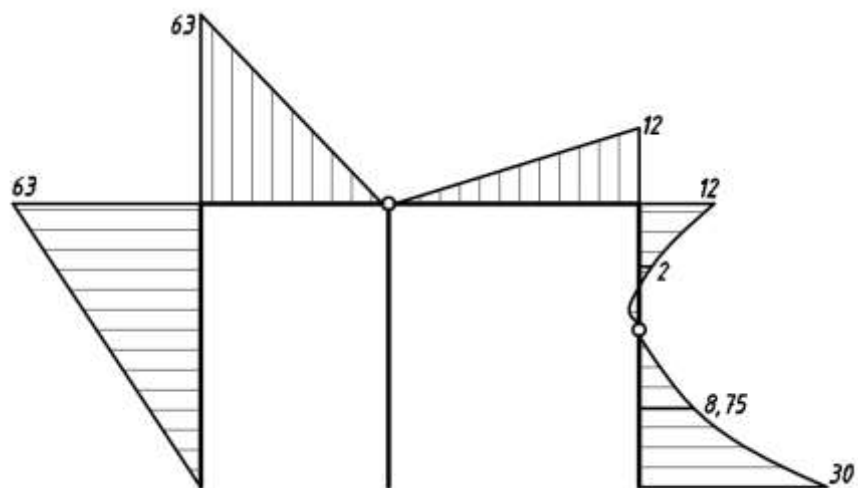


$$M_{12} = 0, \quad Q_{12} = -1 \text{кН},$$

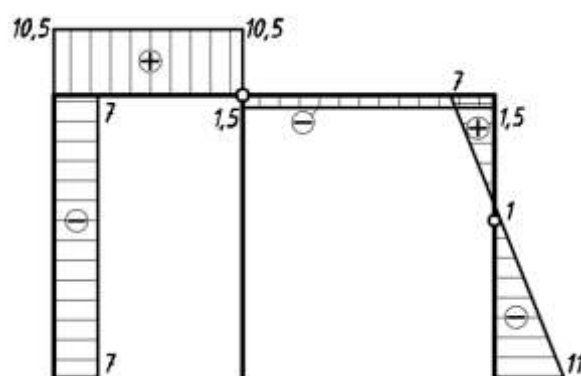
$$M_{13}^6 = -1 \cdot 2,5 - 2 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = -8,75 \text{кНм}, \quad Q_{14} = -1 - 2 \cdot 5 = 11 \text{кН}.$$

$$M_4 = -1 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 2,5 = -30 \text{кНм}. \quad N_{12} = N_{14} = -1,5 \text{кН}.$$

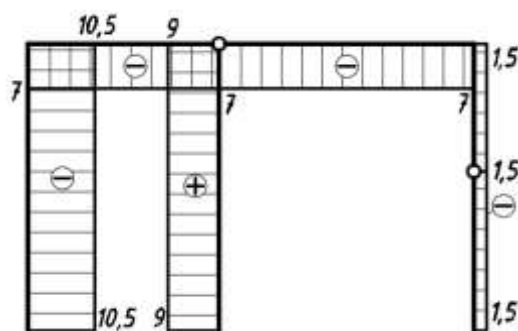
Побудова епюр у всій складеній рамі



$M, \text{кНм}$

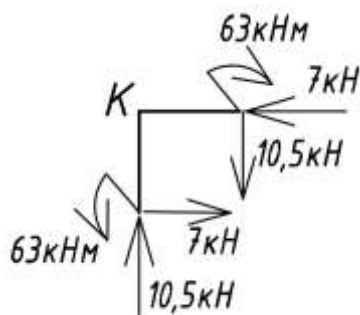


$Q, \text{кН}$



$N, \text{кН}$

4. Перевірка рівноваги вирізаних вузлів рами.

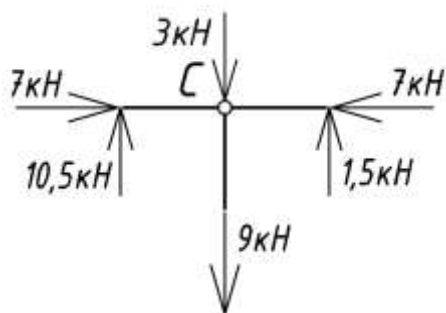


Вузол K:

$$\sum F_x = 7 - 7 = 0,$$

$$\sum F_y = 10,5 - 10,5 = 0,$$

$$\sum M_K = 63 - 63 = 0.$$

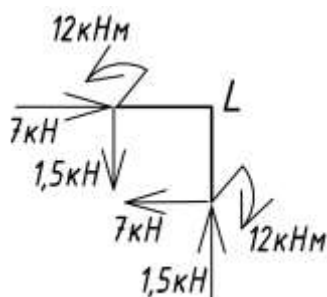


Вузол C:

$$\sum F_x = 7 - 7 = 0,$$

$$\sum F_y = 10,5 + 1,5 - 3 - 9 = 12 - 12 = 0,$$

$$\sum M_C = 0.$$



Вузол L:

$$\sum F_x = 7 - 7 = 0,$$

$$\sum F_y = 1,5 - 1,5 = 0,$$

$$\sum M_L = 12 - 12 = 0.$$

5. Перевірка відповідності між епюрами M і Q.

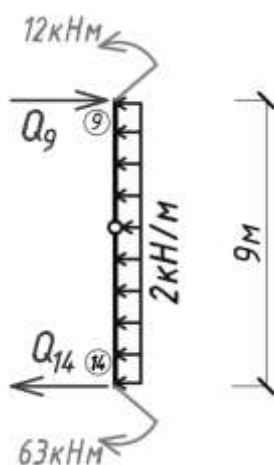
$$Q_{1-2} = -\frac{63-0}{9} = -7 \text{ кН};$$

$$Q_{5-6} = 0;$$

$$Q_{3-4} = +\frac{63-0}{6} = +10,5 \text{ кН};$$

$$Q_{7-8} = -\frac{12-0}{8} = -1,5 \text{ кН};$$

Q_{9-14} :



$$\sum M_9 = 0: -12 + 2 \cdot 9 \cdot 4,5 + 30 + Q_{14} \cdot 9 = 0;$$

$$Q_P = -11 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{14} = 0: Q_9 \cdot 9 - 12 - 2 \cdot 9 \cdot 4,5 + 30 = 0;$$

$$Q_9 = +7 \text{ кН}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання: підручник. – К.: ПАТ «ВПОЛ», 2013. – 896 с.
2. *Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В., Пискунов С.О.* Будівельна механіка: Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навч.посібник. – К.: Каравела, 2013. – 439 с.
3. *Розрахунок статично визначуваних стержневих систем: методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт / Уклад.: Ю.В. Ворона, І.Д. Кара.* – К.: КНУБА, 2020. – 28 с.

Навчально-методичне видання

РОЗРАХУНОК ТРИШАРНІРНОЇ АРКИ І СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ РАМ

Методичні вказівки

до виконання розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності 191 «Архітектура та містобудування»
освітньої програми «Архітектура та містобудування»

Укладачі Кара Ірина Дмитрівна
 Костіна Олена Володимирівна

Комп'ютерна верстка