

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

**РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО  
НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ  
МЕТОДОМ СИЛ**

Методичні вказівки та індивідуальні завдання  
до виконання розрахунково-графічної роботи  
для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна  
інженерія» освітньої програми «Технологія будівельних  
конструкцій, виробів і матеріалів»

Київ 2023

УДК 624.01/07

Р64

Укладачі: П.П. Лізунов, д-р техн. наук, професор

В.О. Недін, канд. техн. наук, доцент

А.А. Козак, канд. техн. наук, доцент

І.Д. Кара, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Г.М. Іванченко, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск П.П. Лізунов, д-р техн. наук,  
професор

*Затверджено на засіданні кафедри будівельної механіки,  
протокол № 7 від 1 березня 2023 року.*

В авторській редакції.

**Розрахунок** статично невизначуваних рам методом сил:  
Р64 методичні вказівки та індивідуальні завдання до виконання  
розрахунково-графічної роботи / уклад.: П.П. Лізунов та ін. –  
Київ: КНУБА, 2023. – 32 с.

Містять короткі теоретичні відомості, методичні вказівки,  
приклад розрахунку статично невизначуваних рам методом сил  
та завдання для виконання розрахунково-графічної роботи.

Призначено для студентів спеціальності 192 «Будівництво  
та цивільна інженерія» освітньої програми «Технологія  
будівельних конструкцій, виробів і матеріалів».

© КНУБА, 2023

## ЗМІСТ

|                                                            |    |
|------------------------------------------------------------|----|
| Загальні положення .....                                   | 4  |
| Короткі теоретичні відомості .....                         | 5  |
| Приклад розрахунку статично невизначуваної рами .....      | 11 |
| Завдання для виконання розрахунково-графічної роботи ..... | 25 |
| Список літератури .....                                    | 31 |

## **Загальні положення**

Однією з фундаментальних дисциплін, які необхідні для якісної підготовки спеціалістів у будівельній галузі є будівельна механіка, оскільки вона вивчає методи розрахунків будівель і споруд на міцність, жорсткість і стійкість. Базуючись на отриманих раніше знаннях з вищої математики, фізики, теоретичної механіки та опору матеріалів, будівельна механіка знайомить студентів з основними підходами розрахунку конструкцій будівель і споруд на дію статичних навантажень і динамічних впливів.

Для розуміння принципів розрахунку будівельних конструкцій студентам необхідно прослухати курс лекцій, пройти курс практичних занять з будівельної механіки та виконати розрахунково-графічні роботи (РГР). Методичні вказівки «Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил» розроблені для допомоги здобувачам при виконанні однойменної РГР, пояснення алгоритму та принципів розрахунку. Також допомогти студенту краще засвоїти матеріал може навчальна література [1-5] з будівельної механіки, яка висвітлює важливі аспекти розрахунку конструкцій.

Розрахунково-графічну роботу необхідно оформляти охайно на аркушах паперу формату А4. Титульний лист є першим аркушем роботи. В РГР після титульного листа вкладається видане завдання, після чого всі аркуші роботи скріпляються.

## Короткі теоретичні відомості

Одним із класичних методів розрахунку статично невизначуваних систем є метод сил, який особливо широко використовується при розрахунку рам. Використовуючи цей метод статично невизначувана система, що розраховується, шляхом відкидання надлишкових в'язей замінюється статично визначуваною, яка може бути розрахована за допомогою рівнянь рівноваги. Така система і є основною системою методу сил.

Основною характеристикою статично невизначуваних систем є *ступінь статичної невизначуваності*, який характеризує кількість «зайвих» або надлишкових в'язей.

Ступінь статичної невизначуваності може бути обчислений за формулою Чебишова. Проте для практичних розрахунків існує зручніша формула:

$$n = 3k - m. \quad (1)$$

У цій формулі  $n$  – ступінь статичної невизначуваності плоскої стержневої системи,  $m$  – кількість простих шарнірів,  $k$  – число замкнених контурів в схемі, яке визначається кількістю ділянок, на які розподіляє площину розрахункова схема споруди.

Бувають випадки, коли формулою (1) скористатись важко або навіть неможливо. В таких випадках ступінь статичної невизначуваності схеми можна обчислити згідно формули Чебишова, виразивши

$$n = -\Gamma = -(3D + 2B - 3П - 2Ш - C - 3).$$

У цій формулі  $\Gamma$  – ступінь геометричної змінюваності системи,  $D$  – кількість простих дисків, включаючи опорний диск,  $B$  – кількість вузлів в'язей,  $П$  – кількість простих припайок,  $Ш$  – кількість простих шарнірів,  $C$  – кількість простих в'язей, 3 (три) – число ступенів вільності всієї плоскої розрахункової схеми як твердого тіла в її площині.

*Основною системою методу сил* називають геометрично незмінювану і статично визначувану систему, яка одержана із заданої статично невизначуваної схеми відкиданням «зайвих» в'язей.

Реакції відкинутих в'язей прикладаються до основної системи разом із заданими зовнішніми діями як сили, величини яких невідомі. У подальшому ці сили визначатимуться в першу чергу. Вони становлять *основні невідомі* задачі і позначаються символами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , де  $n$  – ступінь статичної невизначуваності задачі.

Завдяки переходу від розрахункової схеми до основної системи розрахунок статично невизначуваної схеми замінюється на розрахунок її статично визначуваної основної системи.

Для усунення розбіжності в деформуванні цих двох схем на основну систему слід накласти додаткові умови, які зроблять неможливими переміщення в напрямі відкинутих «зайвих» в'язей. Ці умови можуть бути одержані безпосередньо із розгляду деформацій основної системи від заданих зовнішніх дій та від дії основних невідомих.

Повне переміщення основної системи в напрямі «зайвої» в'язі  $i$  може бути представлене як сума переміщень від дії кожного зайвого невідомого і зовнішнього навантаження окремо.

Для  $n$  разів статично невизначуваної системи повне переміщення в напрямі відкинутої «зайвої» в'язі  $i$  може бути записано:

$$\Delta_{i\Sigma} = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{ii} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0, \quad (2)$$

де  $\Delta_{ik}$  – переміщення в стані  $k$  основної системи в напрямі основного невідомого  $X_i$ . Кожне з переміщень, зумовлене дією основного невідомого, може бути представлене як добуток переміщення від дії цього невідомого, яке умовно приймається за одиницю, на його дійсну поки що невідому величину:

$$\Delta_{i1} = \delta_{i1} X_1, \Delta_{i2} = \delta_{i2} X_2, \dots, \Delta_{ii} = \delta_{ii} X_i, \dots, \Delta_{in} = \delta_{in} X_n, \quad (3)$$

де  $\delta_{ik}$  – аналогічні переміщення від дії основних одиничних невідомих. Величини  $\Delta_{ip}$  характеризують переміщення основної системи в напрямі основного невідомого  $X_i$  у вантажному стані.

Підставивши вирази (3) у (2), отримаємо рівняння

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{ii} X_i + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip} = 0. \quad (4)$$

Записавши рівняння (4) послідовно для кожної відкинутої в'язі, можна отримати систему рівнянь відносно основних невідомих задачі:

[illegible]

Система рівнянь (5) називається *системою канонічних рівнянь методу сил*. Невідомі системи канонічних рівнянь становлять сили – реакції відкинутих «зайвих» в’язей, коефіцієнти – переміщення в основній системі в напрямі цих в’язей від дії одиничних основних невідомих. Коефіцієнти при невідомих називають *одиничними переміщеннями*, а вільні члени – *вантажними*.

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил являють собою переміщення основної системи від дії основних невідомих, які покладають за одиницю. Для обчислення коефіцієнтів необхідно скористатися формулою Максвелла-Мора, яка для плоских систем має вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum_l \int \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum_l \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum_l \int \frac{\eta \bar{Q}_i Q_p}{GA} dx.$$

Для різного типу розрахункових схем звичайно утримують лише деякі складові формули. Так, при розрахунку елементів, які переважно працюють на згин (балки, рами), утримується доданок, який залежить від згинальних моментів:

$$\delta_{ij} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx, \quad \Delta_{ip} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \quad (6)$$

Таким чином, для обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь необхідно визначити зусилля, які виникають у всіх елементах основної системи від дії зовнішнього навантаження, а також від дії кожного основного невідомого  $X_i=1$ .

У практичних розрахунках безпосереднє інтегрування замінюється чисельним з використанням *правила Верещагіна*, *формули Сімпсона-Корноухова*, формули прямокутників, трапецій тощо. Тому для подальшого розрахунку будуються епюри зусиль у статично визначуваній основній системі.

За правилом Верещагіна для обчислення інтеграла Мора достатньо помножити площу епюри  $M_p$  на ординату епюри  $\bar{M}_i$  (рис.1), що береться під центром тяжіння епюри  $M_p$ :

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = A_p y_i.$$

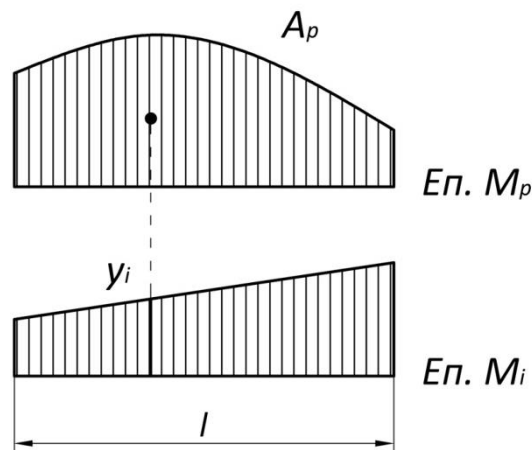


Рис. 1

Викорисовуючи правило Сімпсона-Корноухова для обчислення визначених інтегралів, інтервал інтегрування розкладається на дві ділянки (рис. 2), а формула має вигляд:

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = \frac{l}{6} (a_i a_p + 4c_i c_p + b_i b_p).$$

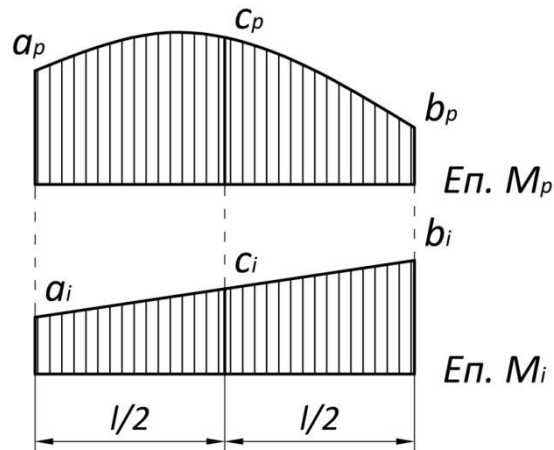


Рис. 2

Використовуючи формулу Сімпсона-Корноухова необхідно, щоб обидві перемножувані епюри не мали зламів, розривів і точок перегину. В противному разі інтервал інтегрування треба розкласти на окремі підінтервали.

Розв'язок системи канонічних рівнянь (5) визначає величини основних невідомих, а саме – реакцій «зайвих» в'язей.

Для визначення дійсних зусиль в елементах статично невизначуваної системи, що розраховується за методом сил існує два основних способи. Обидва з них ґрунтуються на тому, що епюри будуються не в заданій схемі, а в статично визначуваній основній системі, яка перебуває під дією заданих зовнішніх навантажень і реакцій відкинутих в'язей, які знайдено після розв'язання канонічних рівнянь.

Перший спосіб, який називають статичним, полягає в тому, що виконується звичайний статичний розрахунок основної системи від одночасної дії всіх сил включно з основними невідомими задачі. При цьому звичайними способами визначаються опорні реакції і будуються епюри зусиль або відшукуються їхні величини в характерних точках схеми.

Другий спосіб – це спосіб накладання. Він ґрунтується на принципі незалежності дій (принципі суперпозиції) і полягає в тому, що будь-яке зусилля, напруження або переміщення може бути одержано як сума цих величин від кожної дії окремо. На цій підставі можна записати

$$\begin{aligned}
M_{\partial} &= \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \dots + \overline{M}_n X_n + M_p, \\
Q_{\partial} &= \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 + \dots + \overline{Q}_n X_n + Q_p, \\
N_{\partial} &= \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \dots + \overline{N}_n X_n + N_p.
\end{aligned}
\tag{7}$$

Під величинами  $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$  слід розуміти або зусилля в якомусь перерізі або епюри зусиль в основній системі, зумовлені дією одиничних основних невідомих.

Для перевірки правильності розрахунку будь-якої статично невизначуваної системи застосовують так звану *кінематичну перевірку*. Вона полягає в обчисленні переміщення, яке напевно дорівнює нулю. Такими переміщеннями у вихідній статично невизначуваній схемі є дійсні переміщення в напрямках існуючих в'язей.

$$\Delta_{i\partial} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_{\partial}}{EI} dx = 0$$

Таким чином, для перевірки правильності розрахунку статично невизначуваної системи достатньо в будь-якій основній системі методу сил визначити зусилля (наприклад, згинальний момент  $\overline{M}_i$ ) від дії будь-якого основного невідомого  $X_i=1$  і помножити їх за формулою Мора на дійсні зусилля (наприклад, згинальний момент  $M_{\partial}$ ). Якщо результат дорівнює нулю, то зусилля знайдено правильно.

Наприкінці розрахунків також варто виконати перевірку відповідності між епюрами  $M_{\partial}$  і  $Q_{\partial}$ , перевірити рівновагу всіх вирізаних вузлів системи і всієї рами в цілому. Величини і напрям опорних реакцій при цьому визначаються з дійних епюр.

## Приклад розрахунку статично невизначуваної рами

Розглянемо статично невизначувану раму (рис. 3), на яку діє зовнішнє горизонтальне розподілене навантаження інтенсивністю  $q=5\text{кН/м}$ , прикладене до стояка  $AB$ , зосереджена сила  $P=20\text{кН}$ , прикладена посередині ригеля  $BD$  в точці  $C$ . Жорсткості стояків рами –  $EI$ , ригеля –  $2EI$ .

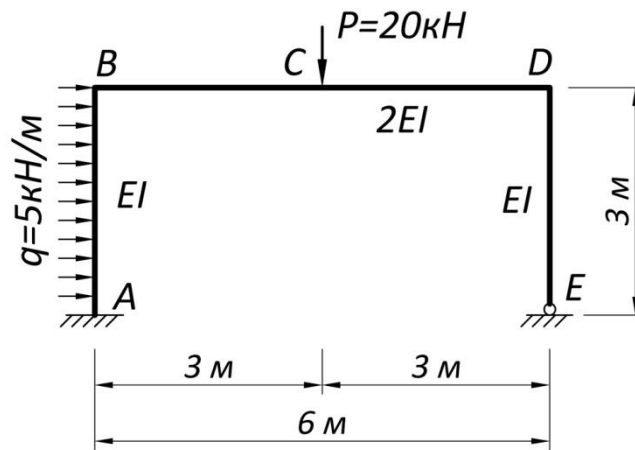


Рис. 3

### 1. Визначення ступеня статичної невизначуваності рами

Ступінь статичної невизначуваності рами обчислимо за формулою

$$n = 3\kappa - \omega.$$

У цій формулі  $\kappa = 1$  – число замкнених контурів,  $\omega = 1$  – кількість простих шарнірів (рис. 4).

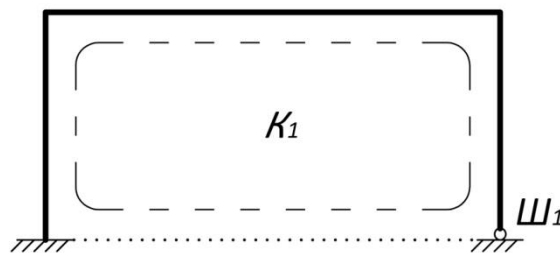


Рис. 4

Отже

$$n = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Визначаємо, що вихідна рама два рази статично невизначувана, оскільки має дві «зайві» або надлишкові в'язі.

### 2. Вибір основної системи і основних невідомих

В якості основної системи розглянемо статично визначувану раму (рис. 5), яка одержана із заданої статично невизначуваної (рис. 3) відкиданням «зайвих» в'язей (одної в опорі А та одної в опорі Е), замінивши їх відповідними реакціями невідомої величини  $X_1$ ,  $X_2$ .

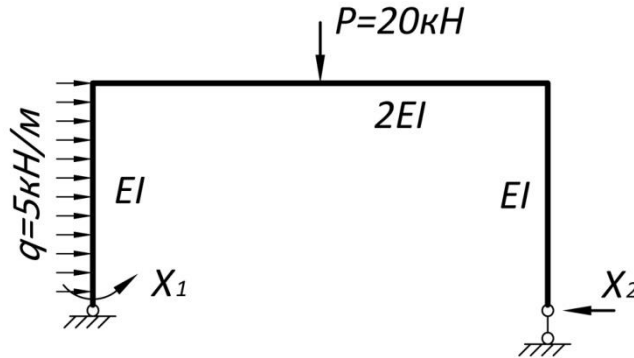


Рис. 5

### 3. Побудова епюр внутрішніх зусиль від дії одиничних навантажень

#### 3.1. Дія одиничного навантаження $X_1=1$

Опорні реакції від дії  $X_1=1$  (рис. 6).

$$\sum M_A = 0: R_E \cdot 6 - 1 = 0; R_E = 0,167.$$

$$\sum M_E = 0: V_A \cdot 6 - 1 = 0; V_A = 0,167.$$

$$\sum F_x = 0: H_A = 0.$$

Перевірка:  $\sum F_y = 0: 0,167 - 0,167 = 0$ .

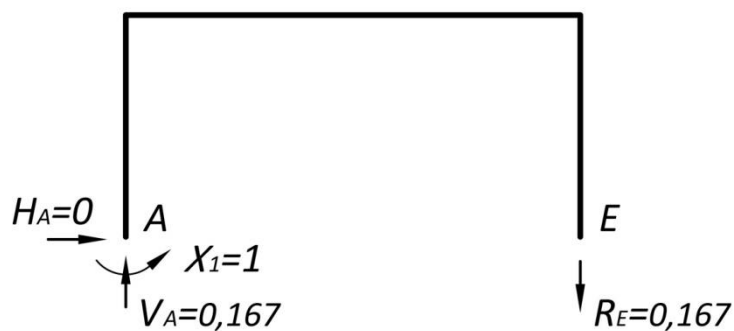


Рис. 6

Будуємо епюри згинальних моментів  $\bar{M}_1$ , поперечних  $\bar{Q}_1$  і поздовжніх сил  $\bar{N}_1$ .

*Епюра згинальних моментів*

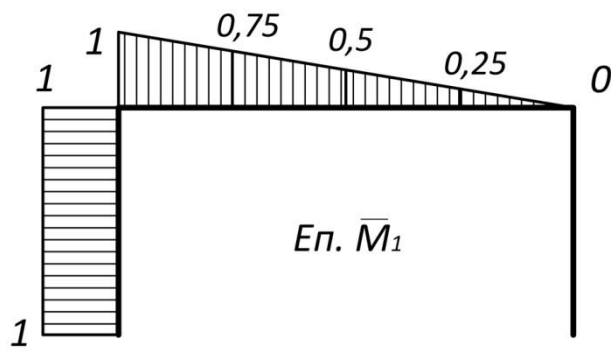


Рис. 7

*Епюра поперечних сил*

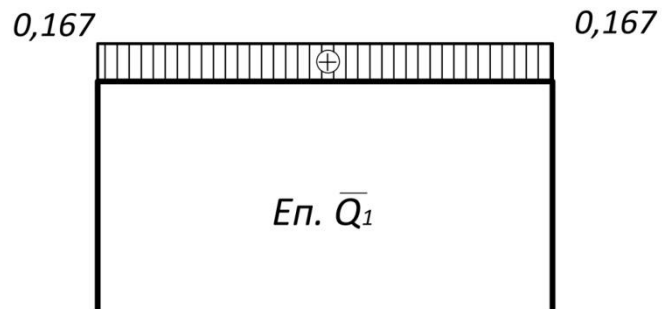


Рис. 8

*Епюра поздовжніх сил*

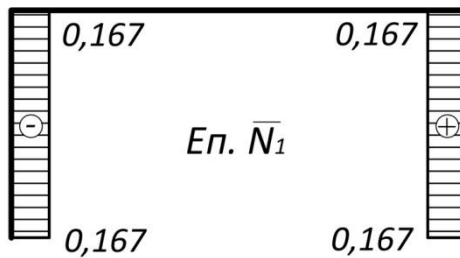


Рис. 9

3.2. Дія одиничного навантаження  $X_2=1$

Опорні реакції від дії  $X_2=1$  (рис. 10).

$$\sum M_A = 0: R_E \cdot 6 = 0; R_E = 0.$$

$$\sum M_E = 0: V_A \cdot 6 = 0; V_A = 0.$$

$$\sum F_x = 0: H_A - 1 = 0; H_A = 1.$$

Перевірка:  $\sum F_y = 0: 0 + 0 = 0.$

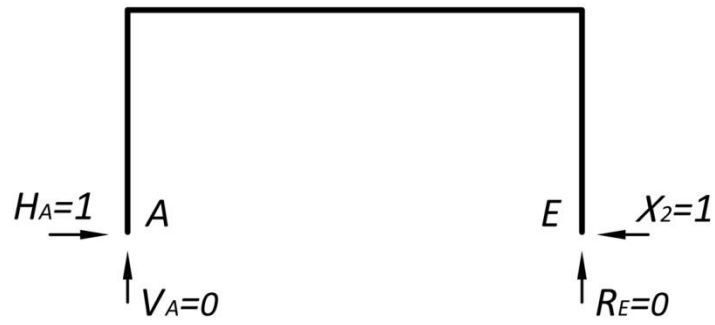


Рис. 10

Будуємо епюри згинальних моментів  $\bar{M}_2$ , поперечних  $\bar{Q}_2$  і поздовжніх сил  $\bar{N}_2$ .

*Епюра згинальних моментів*

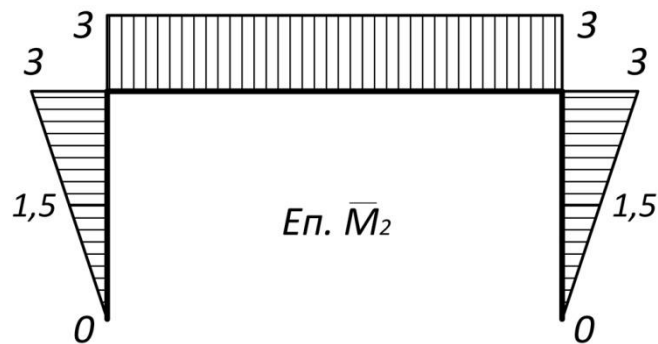


Рис. 11

*Епюра поперечних сил*

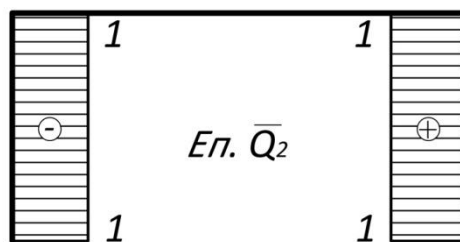


Рис. 12

*Епюра поздовжніх сил*

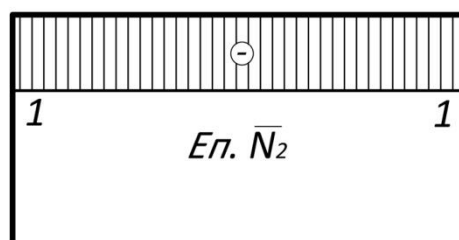


Рис. 13

#### 4. Побудова епюри внутрішніх зусиль від дії заданих навантажень

Розглянемо дію заданих зовнішніх навантажень і побудуємо епюри  $M_p, Q_p, N_p$ .

##### 4.1. Визначення опорних реакцій від дії зовнішніх навантажень

Відокремимо диск рами від «землі», розглянемо рівновагу системи.

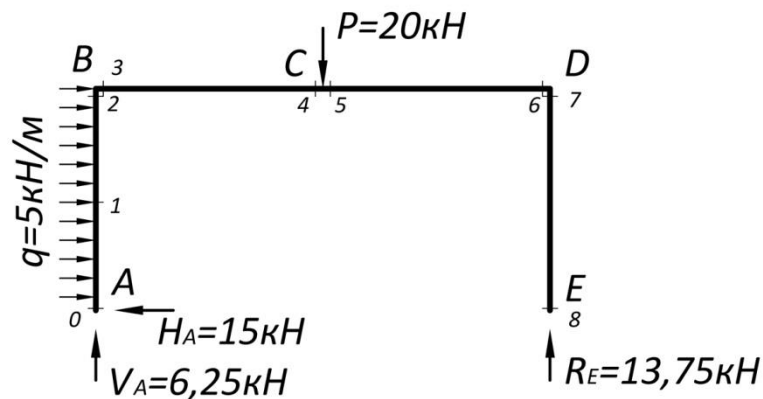


Рис. 14

$$\sum M_A = 0: R_E \cdot 6 - 20 \cdot 3 - \frac{1}{2} 5 \cdot 3^2 = 0; \quad R_E = 13,75 \text{ кН.}$$

$$\sum M_E = 0: V_A \cdot 6 - 20 \cdot 3 + \frac{1}{2} 5 \cdot 3^2 = 0; \quad V_A = 6,25 \text{ кН.}$$

$$\sum F_x = 0: -H_A + 5 \cdot 3 = 0; \quad H_A = 15 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0: 6,25 + 13,75 - 20 = 0.$$

##### 4.2. Визначення внутрішніх зусиль в призначених перерізах від дії зовнішніх навантажень

*Згинальні моменти*

$$M_0 = \sum M_0^l = 0.$$

$$M_1 = \sum M_1^l = 15 \cdot 1,5 - \frac{1}{2} 5 \cdot 1,5^2 = 16,875 \text{ кНм.}$$

$$M_2 = \sum M_2^{\text{л}} = 15 \cdot 3 - \frac{1}{2} 5 \cdot 3^2 = 22,5 \text{ кНм.}$$

$$M_3 = \sum M_3^{\text{л}} = 15 \cdot 3 - \frac{1}{2} 5 \cdot 3^2 = 22,5 \text{ кНм.}$$

$$M_4 = \sum M_4^{\text{np}} = 13,75 \cdot 3 = 41,25 \text{ кНм.}$$

$$M_5 = \sum M_5^{\text{np}} = 13,75 \cdot 3 = 41,25 \text{ кНм.}$$

$$M_6 = \sum M_6^{\text{np}} = 0. \quad M_7 = \sum M_7^{\text{np}} = 0. \quad M_8 = \sum M_8^{\text{np}} = 0.$$

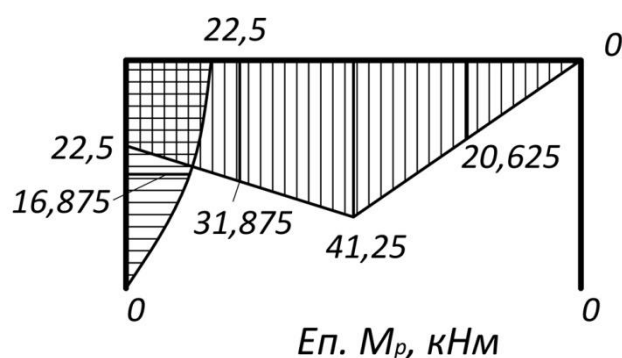


Рис. 15

### Поперечні сили

$$Q_0 = \sum Q_0^{\text{л}} = 15 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = \sum Q_1^{\text{л}} = 15 - 5 \cdot 1,5 = 7,5 \text{ кН.}$$

$$Q_2 = \sum Q_2^{\text{л}} = 15 - 5 \cdot 3 = 0.$$

$$Q_3 = \sum Q_3^{\text{л}} = 6,25 \text{ кН.} \quad Q_4 = \sum Q_4^{\text{л}} = 6,25 \text{ кН.}$$

$$Q_5 = \sum Q_5^{\text{np}} = -13,75 \text{ кН.} \quad Q_6 = \sum Q_6^{\text{np}} = -13,75 \text{ кН.}$$

$$Q_7 = \sum Q_7^{\text{np}} = 0. \quad Q_8 = \sum Q_8^{\text{np}} = 0.$$

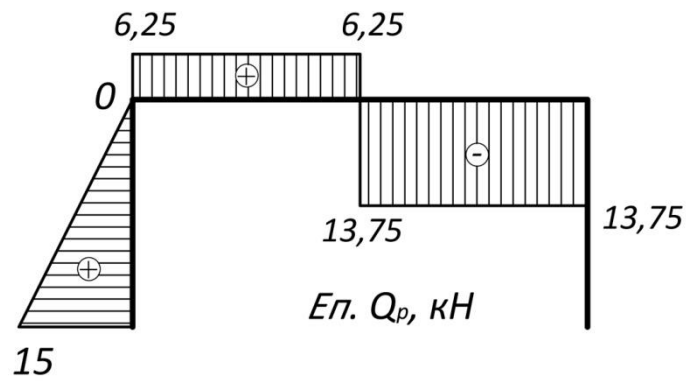


Рис. 16

*Поздовжні сили*

$$N_0 = \sum N_0^l = -6,25 \text{ кН.}$$

$$N_1 = \sum N_1^l = -6,25 \text{ кН.}$$

$$N_2 = \sum N_2^l = -6,25 \text{ кН.}$$

$$N_3 = \sum N_3^{np} = 0. \quad N_4 = \sum N_4^{np} = 0.$$

$$N_5 = \sum N_5^{np} = 0. \quad N_6 = \sum N_6^{np} = 0.$$

$$N_7 = \sum N_7^{np} = -13,75 \text{ кН.}$$

$$N_8 = \sum N_8^{np} = -13,75 \text{ кН.}$$

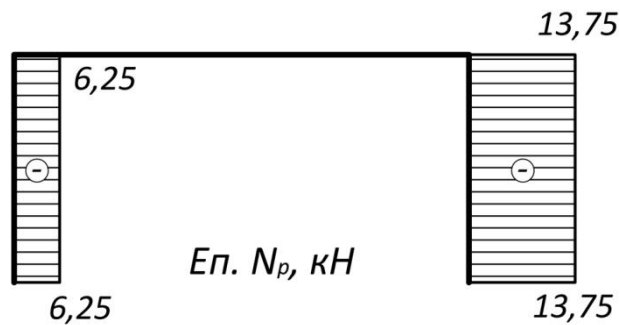


Рис. 17

##### 5. Система розв'язувальних (канонічних) рівнянь методу сил

Оскільки невідомих задачі дві –  $X_1$ ,  $X_2$ , для їх визначення складаємо систему з двох канонічних рівнянь.

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

##### 6. Обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь

Для визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь  $\delta_{ik}$ ,  $\Delta_{ip}$  використаємо інтеграл Мора (6), для обчислення якого інтервал інтегрування розкладемо на ділянки, на кожній з яких, в залежності від вигляду епюри, застосуємо правило Верещагіна (рис. 1) або Сімпсона-Корноухова (рис. 2).

#### 6.1. Коефіцієнт $\delta_{11}$

$$\delta_{11} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx + \int_B^D \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx.$$

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{11}$  помножимо епюру  $\bar{M}_1$  (рис. 7) саму на себе, отримаємо

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 0 = \frac{4}{EI}.$$

#### 6.2. Коефіцієнт $\delta_{22}$

$$\delta_{22} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dx + \int_B^D \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dx.$$

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{22}$  помножимо епюру  $\bar{M}_2$  (рис. 11) саму на себе, отримаємо

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{45}{EI}.$$

#### 6.3. Коефіцієнт $\delta_{12}$ , ( $\delta_{21} = \delta_{12}$ )

$$\delta_{12} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx + \int_B^D \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx.$$

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{12}$  помножимо епюру  $\bar{M}_1$  (рис. 7) на епюру  $\bar{M}_2$  (рис. 11), отримаємо

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 3 + 0 = \frac{9}{EI}.$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{9}{EI}.$$

#### 6.4. Вільний член $\Delta_{1P}$

$$\Delta_{1p} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dx + \int_B^C \frac{\bar{M}_1 M_p}{2EI} dx + \int_C^D \frac{\bar{M}_1 M_p}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI} dx.$$

Для визначення вільного члена  $\Delta_{1p}$  помножимо епюру  $\bar{M}_1$  (рис. 7) на епюру  $M_p$  (рис. 15), отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = & -\frac{3}{6EI}(0 + 4 \cdot 1 \cdot 16,875 + 1 \cdot 22,5) - \\ & -\frac{3}{6 \cdot 2EI}(1 \cdot 22,5 + 4 \cdot 0,75 \cdot 31,875 + 0,5 \cdot 41,25) - \\ & -\frac{3}{6 \cdot 2EI}(0,5 \cdot 41,25 + 4 \cdot 0,25 \cdot 20,625 + 0) + 0 = -\frac{90}{EI}. \end{aligned}$$

#### 6.5. Вільний член $\Delta_{2p}$

$$\Delta_{2p} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_2 M_p}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI} dx + \int_B^C \frac{\bar{M}_2 M_p}{2EI} dx + \int_C^D \frac{\bar{M}_2 M_p}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI} dx.$$

Для визначення вільного члена  $\Delta_{2p}$  помножимо епюру  $\bar{M}_2$  (рис. 11) на епюру  $M_p$  (рис. 15), отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} = & -\frac{3}{6EI}(0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 16,875 + 3 \cdot 22,5) - \\ & -\frac{3}{6 \cdot 2EI}(3 \cdot 22,5 + 4 \cdot 3 \cdot 31,875 + 3 \cdot 41,25) - \\ & -\frac{3}{6 \cdot 2EI}(3 \cdot 41,25 + 4 \cdot 3 \cdot 20,625 + 0) + 0 = -\frac{320,625}{EI}. \end{aligned}$$

#### 6.6. Перевірка коефіцієнтів і вільних членів

Для перевірки коефіцієнтів системи канонічних рівнянь будується сумарна епюра моментів  $\bar{M}_\Sigma = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  шляхом складання ординат епюр моментів в одиничних станах  $\bar{M}_1$  (рис. 7) та  $\bar{M}_2$  (рис. 11) у відповідних точках (рис. 18).

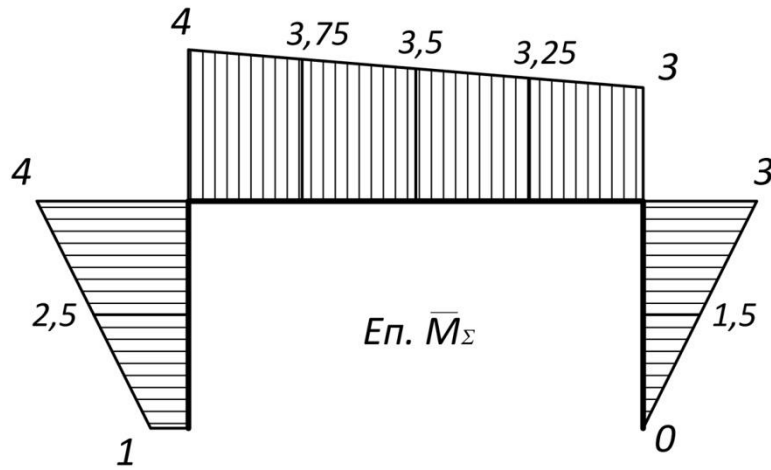


Рис. 18

Суть перевірки полягає в альтернативному обчисленні коефіцієнтів у відповідності з формулами

$$\delta_{1\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12}, \quad \delta_{2\Sigma} = \delta_{21} + \delta_{22}, \quad \Delta_{\Sigma P} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P}.$$

$$\delta_{1\Sigma} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_\Sigma}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx + \int_B^D \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_\Sigma}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx.$$

$$\delta_{1\Sigma} = \frac{3}{6EI} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2,5 + 1 \cdot 4) + \frac{6}{6 \cdot 2EI} (1 \cdot 4 + 4 \cdot 0,5 \cdot 3,5 + 0) + 0 = \frac{13}{EI}.$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{4}{EI} + \frac{9}{EI} = \frac{13}{EI}.$$

$$\delta_{2\Sigma} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_\Sigma}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx + \int_B^D \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_\Sigma}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx.$$

$$\delta_{2\Sigma} = \frac{3}{6EI} (0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 2,5 + 3 \cdot 4) + \frac{6}{6 \cdot 2EI} (3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 3,5 + 3 \cdot 3) + \frac{3}{6EI} (3 \cdot 3 + 4 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + 0) = \frac{54}{EI}.$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} = \frac{9}{EI} + \frac{45}{EI} = \frac{54}{EI}.$$

$$\Delta_{\Sigma P} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_\Sigma \bar{M}_P}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_\Sigma \bar{M}_P}{EI} dx + \int_B^C \frac{\bar{M}_\Sigma \bar{M}_P}{2EI} dx + \int_C^D \frac{\bar{M}_\Sigma \bar{M}_P}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_\Sigma \bar{M}_P}{EI} dx.$$

$$\Delta_{\Sigma P} = -\frac{3}{6EI}(0 + 4 \cdot 2,5 \cdot 16,875 + 4 \cdot 22,5) -$$

$$-\frac{3}{6 \cdot 2EI}(4 \cdot 22,5 + 4 \cdot 3,75 \cdot 31,875 + 3,5 \cdot 41,25) -$$

$$-\frac{3}{6 \cdot 2EI}(3,5 \cdot 41,25 + 4 \cdot 3,25 \cdot 20,625 + 0) + 0 = -\frac{410,625}{EI}.$$

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = -\frac{90}{EI} - \frac{320,625}{EI} = -\frac{410,625}{EI}.$$

### 7. Обчислення невідомих системи розв'язувальних рівнянь

Запишемо систему розв'язувальних рівнянь з урахуванням знайдених коефіцієнтів і вільних членів:

$$\begin{cases} \frac{4}{EI} X_1 + \frac{9}{EI} X_2 - \frac{90}{EI} = 0; \\ \frac{9}{EI} X_1 + \frac{45}{EI} X_2 - \frac{320,625}{EI} = 0. \end{cases}$$

Помноживши ліву та праву частину рівнянь на  $EI$ , отримаємо

$$\begin{cases} 4X_1 + 9X_2 - 90 = 0; \\ 9X_1 + 45X_2 - 320,625 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему рівнянь отримаємо шукані значення невідомих задачі

$$X_1 = 11,761; \quad X_2 = 4,773.$$

### 8. Визначення дійсних зусиль та побудова дійсних епюр

Визначення дійсних зусиль в призначених характерних перерізах (рис. 14) здійснимо використовуючи вирази (7).

*Згинальні моменти*

$$M_{\partial} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p.$$

$$M_{\partial}^0 = -1 \cdot 11,761 + 0 + 0 = -11,761 \text{ кНм.}$$

$$M_{\partial}^1 = -1 \cdot 11,761 - 1,5 \cdot 4,773 + 16,875 = -2,045 \text{ кНм.}$$

$$M_{\partial}^2 = -1 \cdot 11,761 - 3 \cdot 4,773 + 22,5 = -3,579 \text{ кНм.}$$

$$M_{\partial}^3 = -1 \cdot 11,761 - 3 \cdot 4,773 + 22,5 = -3,579 \text{ кНм.}$$

$$M_{\partial}^4 = -0,5 \cdot 11,761 - 3 \cdot 4,773 + 41,25 = 21,051 \text{ кНм.}$$

$$M_{\partial}^5 = -0,5 \cdot 11,761 - 3 \cdot 4,773 + 41,25 = 21,051 \text{ кНм.}$$

$$M_{\partial}^6 = 0 - 3 \cdot 4,773 + 0 = -14,318 \text{ кНм.}$$

$$M_{\partial}^7 = 0 - 3 \cdot 4,773 + 0 = -14,318 \text{ кНм.}$$

$$M_{\partial}^8 = 0 + 0 + 0 = 0.$$

За визначеними значеннями будуюмо епюру дійсних моментів  $M_{\partial}$ .

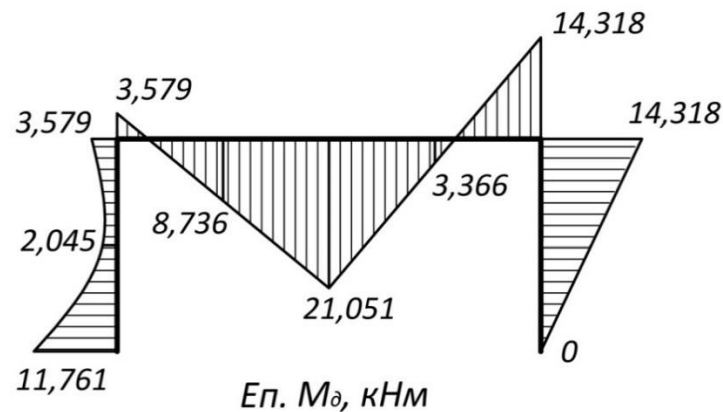


Рис. 19

*Поперечні сили*

$$Q_{\partial} = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + Q_p.$$

Аналогічно визначаємо значення поперечних сил в призначених перерізах і будуюмо епюру дійсних поперечних сил  $Q_{\partial}$ .

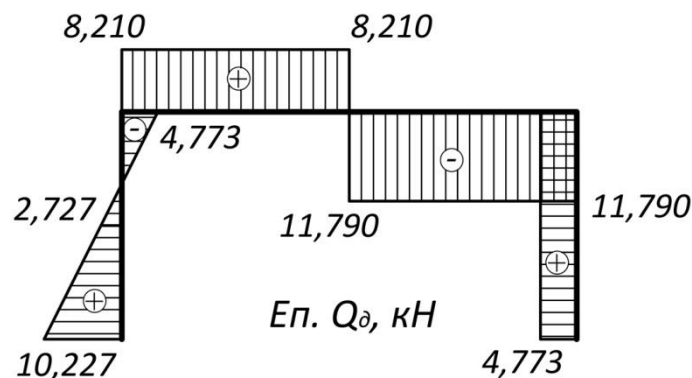


Рис. 20

*Поздовжні сили*

$$N_{\partial} = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + N_p.$$

Аналогічно визначаємо значення поздовжніх сил в призначених перерізах і будуюмо епюру дійсних поздовжніх сил  $N_{\partial}$ .

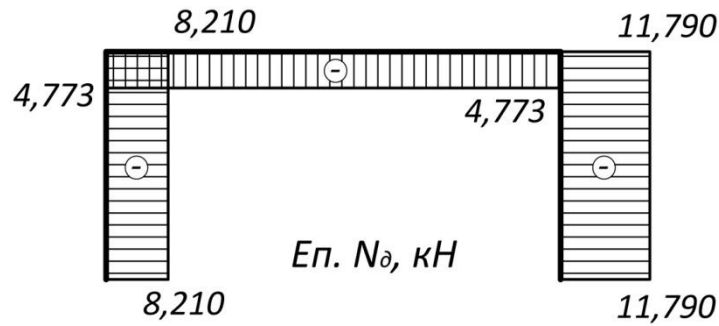


Рис. 21

### 9. Кінематична перевірка розрахунку

Для перевірки правильності здійсненого розрахунку визначимо переміщення  $\Delta_{1\delta}$ , яке має дорівнювати 0. Для цього використовуючи формулу Мора помножимо епюру моментів  $\bar{M}_1$  (рис. 7) від дії одиничної сили  $X_1=1$  на епюру дійсних моментів  $M_\delta$  (рис. 19).

$$\Delta_{1\delta} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 M_\delta}{nEI} dx = \int_A^B \frac{\bar{M}_1 M_\delta}{EI} dx + \int_B^C \frac{\bar{M}_1 M_\delta}{2EI} dx + \int_C^D \frac{\bar{M}_1 M_\delta}{2EI} dx + \int_D^E \frac{\bar{M}_1 M_\delta}{EI} dx.$$

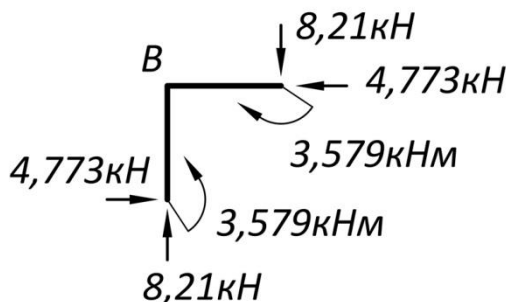
$$\Delta_{1\delta} = \frac{3}{6EI} (1 \cdot 11,761 + 4 \cdot 1 \cdot 2,045 + 1 \cdot 3,579) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (1 \cdot 3,579 - 4 \cdot 0,75 \cdot 8,736 - 0,5 \cdot 21,051) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (-0,5 \cdot 21,051 - 4 \cdot 0,25 \cdot 3,366 + 0) + 0 = 0.$$

### 10. Перевірки побудови дійсних епюр внутрішніх зусиль

Здійснимо перевірку рівноваги вузлів рами. Виріжемо вузол  $B$  та відповідно дійсним епюрам  $M_\delta$ ,  $Q_\delta$ ,  $N_\delta$  прикладемо до нього внутрішні зусилля (рис. 22).



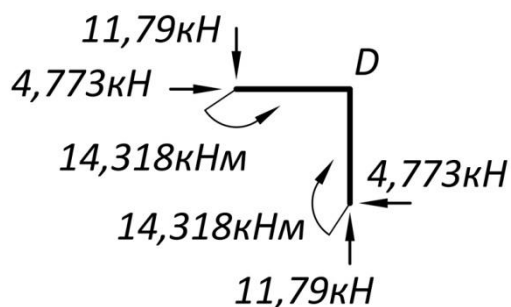
$$\sum M_B = 0: 3,579 - 3,579 = 0.$$

$$\sum F_x = 0: 4,773 - 4,773 = 0.$$

$$\sum F_y = 0: 8,21 - 8,21 = 0.$$

Рис. 22

Виріжемо вузол  $D$  та відповідно дійсним епюрам  $M_0$ ,  $Q_0$ ,  $N_0$  прикладемо до нього внутрішні зусилля (рис. 23).



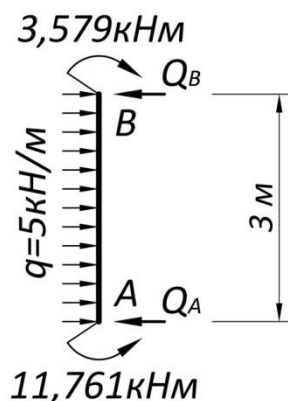
$$\sum M_B = 0: 14,318 - 14,318 = 0.$$

$$\sum F_x = 0: 4,773 - 4,773 = 0.$$

$$\sum F_y = 0: 11,79 - 11,79 = 0.$$

Рис. 23

Для стояка  $AB$  перевірку епюр виконаємо розглянувши його рівновагу (рис. 24), приклавши до нього зовнішнє навантаження  $q=5\text{кН/м}$ , згинальні моменти в перерізах нижнього і верхнього кінця (відповідно значенням з епюри  $M_0$ ), а також дві поперечні сили  $Q_A$  та  $Q_B$ , які в результаті перевірки мають співпасти зі значеннями з дійсної епюри  $Q_0$  у відповідних перерізах.



$$\sum M_B = 0: Q_A \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 1,5 - 11,761 + 3,579 = 0;$$

$$Q_A = 10,227\text{кН}.$$

$$\sum M_A = 0: Q_B \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 1,5 - 3,579 + 11,761 = 0;$$

$$Q_B = 4,773\text{кН}.$$

Рис. 24

Для ригеля  $BD$  та стояка  $DE$  перевірку епюр виконаємо використовуючи диференціальну залежність між епюрами поперечних сил  $Q_0$  та згинальних моментів  $M_0$ :

$$Q_0^{BC} = \frac{21,051 - (-3,579)}{3} = 8,210\text{кН}.$$

$$Q_0^{CD} = \frac{(-14,318) - 21,051}{3} = -11,790\text{кН}.$$

$$Q_0^{DE} = \frac{0 - (-14,318)}{3} = 4,773\text{кН}.$$

## Завдання для виконання розрахунково-графічної роботи

**1**

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 3          | 2          | 1,6             | -               | -             | 4             | -            | 1,5 |
| 2 | 4          | 3          | -               | 2               | -             | -             | 8            | 2,5 |
| 3 | 5          | 4          | 2,4             | -               | -             | 3             | -            | 2   |
| 4 | 6          | 5          | -               | 3,2             | 6             | -             | -            | 3   |
| 5 | 8          | 6          | 3,6             | -               | -             | 5             | -            | 4   |

**2**

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 6          | 5          | -               | 4               | 6             | -             | -            | 3   |
| 2 | 8          | 6          | 3,2             | -               | -             | 3             | -            | 2   |
| 3 | 10         | 8          | -               | 3,6             | 5             | -             | -            | 4   |
| 4 | 3          | 2          | 2               | -               | -             | -             | 6            | 1,5 |
| 5 | 4          | 3          | -               | 2,4             | 4             | -             | -            | 2   |

**3**

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 4          | 3          | -               | 4               | -             | -             | 8            | 2   |
| 2 | 5          | 4          | 2               | -               | 5             | -             | -            | 2,5 |
| 3 | 6          | 5          | -               | 1,6             | -             | 2             | -            | 3   |
| 4 | 8          | 6          | 3,2             | -               | 4             | -             | -            | 4   |
| 5 | 3          | 2          | -               | 2,4             | -             | 3             | -            | 1,5 |

**4**

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 8          | 6          | 3,6             | -               | 4             | -             | -            | 4   |
| 2 | 10         | 8          | -               | 4               | -             | -             | 10           | 2,5 |
| 3 | 4          | 3          | 1,6             | -               | 3             | -             | -            | 2   |
| 4 | 5          | 4          | -               | 2               | -             | 6             | -            | 2,5 |
| 5 | 6          | 5          | 2,4             | -               | 5             | -             | -            | 1,5 |

**5**

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 5          | 4          | 2,4             | -               | -             | 4             | -            | 2,5 |
| 2 | 6          | 5          | -               | 3,2             | 6             | -             | -            | 3   |
| 3 | 8          | 6          | 3,6             | -               | -             | 5             | -            | 4   |
| 4 | 10         | 8          | -               | 4               | -             | -             | 12           | 2,5 |
| 5 | 4          | 3          | 1,6             | -               | 3             | -             | -            | 2   |

**6**

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 10         | 8          | -               | 2               | 4             | -             | -            | 2   |
| 2 | 3          | 2          | 2,4             | -               | -             | -             | 6            | 1,5 |
| 3 | 4          | 3          | -               | 1,6             | 3             | -             | -            | 2   |
| 4 | 5          | 4          | 3,2             | -               | -             | 5             | -            | 2,5 |
| 5 | 6          | 5          | -               | 4               | 6             | -             | -            | 3   |

7

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 3          | 2          | 1,6             | -               | -             | 4             | -            | 1,5 |
| 2 | 4          | 3          | -               | 2               | -             | -             | 8            | 2,5 |
| 3 | 5          | 4          | 2,4             | -               | -             | 3             | -            | 2   |
| 4 | 6          | 5          | -               | 3,2             | 6             | -             | -            | 3   |
| 5 | 8          | 6          | 3,6             | -               | -             | 5             | -            | 4   |

8

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 6          | 5          | -               | 4               | 6             | -             | -            | 3   |
| 2 | 8          | 6          | 3,2             | -               | -             | 3             | -            | 2   |
| 3 | 10         | 8          | -               | 3,6             | 5             | -             | -            | 4   |
| 4 | 3          | 2          | 2               | -               | -             | -             | 6            | 1,5 |
| 5 | 4          | 3          | -               | 2,4             | 4             | -             | -            | 2   |

9

| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 4          | 3          | -               | 4               | -             | -             | 8            | 2   |
| 2 | 5          | 4          | 2               | -               | 5             | -             | -            | 2,5 |
| 3 | 6          | 5          | -               | 1,6             | -             | 2             | -            | 3   |
| 4 | 8          | 6          | 3,2             | -               | 4             | -             | -            | 4   |
| 5 | 3          | 2          | -               | 2,4             | -             | 3             | -            | 1,5 |

10

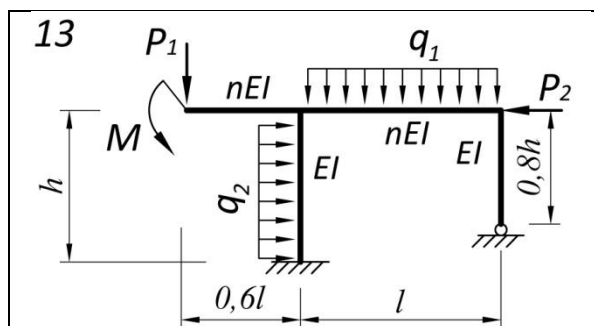
| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 8          | 6          | 3,6             | -               | 4             | -             | -            | 4   |
| 2 | 10         | 8          | -               | 4               | -             | -             | 10           | 2,5 |
| 3 | 4          | 3          | 1,6             | -               | 3             | -             | -            | 2   |
| 4 | 5          | 4          | -               | 2               | -             | 6             | -            | 2,5 |
| 5 | 6          | 5          | 2,4             | -               | 5             | -             | -            | 1,5 |

11

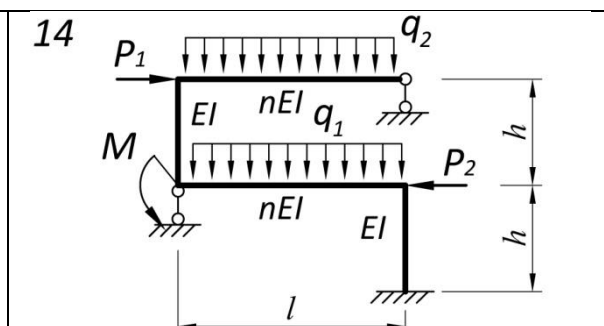
| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 5          | 4          | 2,4             | -               | -             | 4             | -            | 2,5 |
| 2 | 6          | 5          | -               | 3,2             | 6             | -             | -            | 3   |
| 3 | 8          | 6          | 3,6             | -               | -             | 5             | -            | 4   |
| 4 | 10         | 8          | -               | 4               | -             | -             | 12           | 2,5 |
| 5 | 4          | 3          | 1,6             | -               | 3             | -             | -            | 2   |

12

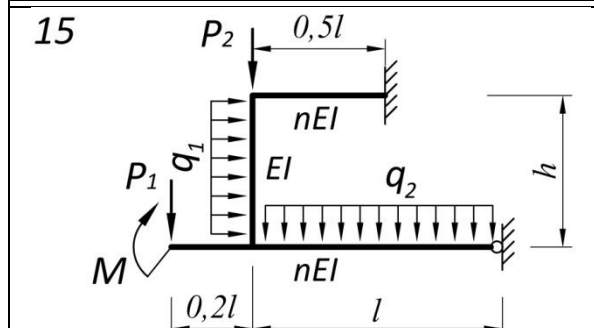
| № | $l$<br>(м) | $h$<br>(м) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 10         | 8          | -               | 2               | 4             | -             | -            | 2   |
| 2 | 3          | 2          | 2,4             | -               | -             | -             | 6            | 1,5 |
| 3 | 4          | 3          | -               | 1,6             | 3             | -             | -            | 2   |
| 4 | 5          | 4          | 3,2             | -               | -             | 5             | -            | 2,5 |
| 5 | 6          | 5          | -               | 4               | 6             | -             | -            | 3   |



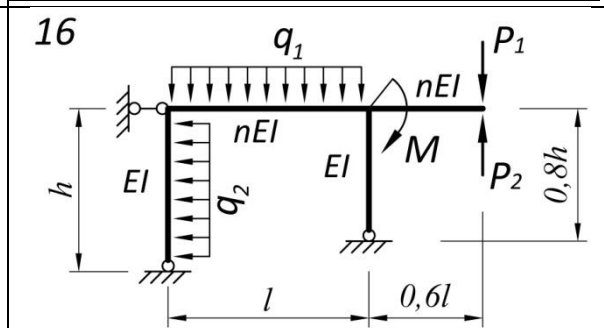
| N <sub>0</sub> | l<br>(m) | h<br>(m) | q <sub>1</sub><br>(кН/м) | q <sub>2</sub><br>(кН/м) | P <sub>1</sub><br>(кН) | P <sub>2</sub><br>(кН) | M<br>(кНм) | n   |
|----------------|----------|----------|--------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------|-----|
| 1              | 3        | 2        | 1,6                      | -                        | -                      | 4                      | -          | 1,5 |
| 2              | 4        | 3        | -                        | 2                        | -                      | -                      | 8          | 2,5 |
| 3              | 5        | 4        | 2,4                      | -                        | -                      | 3                      | -          | 2   |
| 4              | 6        | 5        | -                        | 3,2                      | 6                      | -                      | -          | 3   |
| 5              | 8        | 6        | 3,6                      | -                        | -                      | 5                      | -          | 4   |



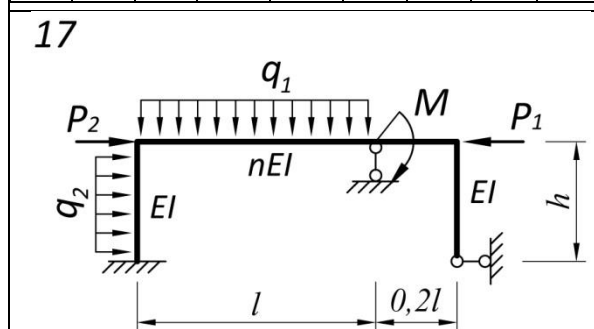
| N <sub>0</sub> | l<br>(m) | h<br>(m) | q <sub>1</sub><br>(кН/м) | q <sub>2</sub><br>(кН/м) | P <sub>1</sub><br>(кН) | P <sub>2</sub><br>(кН) | M<br>(кНм) | n   |
|----------------|----------|----------|--------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------|-----|
| 1              | 6        | 5        | -                        | 4                        | 6                      | -                      | -          | 3   |
| 2              | 8        | 6        | 3,2                      | -                        | -                      | 3                      | -          | 2   |
| 3              | 10       | 8        | -                        | 3,6                      | 5                      | -                      | -          | 4   |
| 4              | 3        | 2        | 2                        | -                        | -                      | -                      | 6          | 1,5 |
| 5              | 4        | 3        | -                        | 2,4                      | 4                      | -                      | -          | 2   |



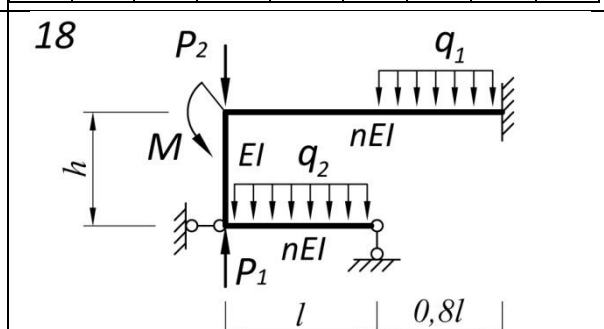
| N <sub>0</sub> | l<br>(m) | h<br>(m) | q <sub>1</sub><br>(кН/м) | q <sub>2</sub><br>(кН/м) | P <sub>1</sub><br>(кН) | P <sub>2</sub><br>(кН) | M<br>(кНм) | n   |
|----------------|----------|----------|--------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------|-----|
| 1              | 4        | 3        | -                        | 4                        | -                      | -                      | 8          | 2   |
| 2              | 5        | 4        | 2                        | -                        | 5                      | -                      | -          | 2,5 |
| 3              | 6        | 5        | -                        | 1,6                      | -                      | 2                      | -          | 3   |
| 4              | 8        | 6        | 3,2                      | -                        | 4                      | -                      | -          | 4   |
| 5              | 3        | 2        | -                        | 2,4                      | -                      | 3                      | -          | 1,5 |



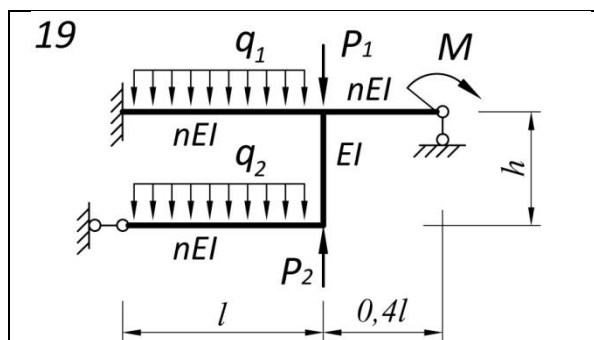
| N <sub>0</sub> | l<br>(m) | h<br>(m) | q <sub>1</sub><br>(кН/м) | q <sub>2</sub><br>(кН/м) | P <sub>1</sub><br>(кН) | P <sub>2</sub><br>(кН) | M<br>(кНм) | n   |
|----------------|----------|----------|--------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------|-----|
| 1              | 8        | 6        | 3,6                      | -                        | 4                      | -                      | -          | 4   |
| 2              | 10       | 8        | -                        | 4                        | -                      | -                      | 10         | 2,5 |
| 3              | 4        | 3        | 1,6                      | -                        | 3                      | -                      | -          | 2   |
| 4              | 5        | 4        | -                        | 2                        | -                      | 6                      | -          | 2,5 |
| 5              | 6        | 5        | 2,4                      | -                        | 5                      | -                      | -          | 1,5 |



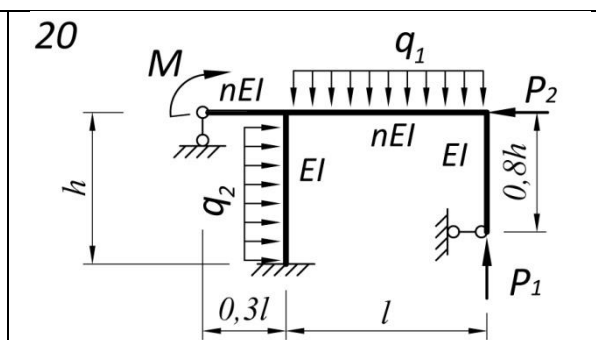
| N <sub>0</sub> | l<br>(m) | h<br>(m) | q <sub>1</sub><br>(кН/м) | q <sub>2</sub><br>(кН/м) | P <sub>1</sub><br>(кН) | P <sub>2</sub><br>(кН) | M<br>(кНм) | n   |
|----------------|----------|----------|--------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------|-----|
| 1              | 5        | 4        | 2,4                      | -                        | -                      | 4                      | -          | 2,5 |
| 2              | 6        | 5        | -                        | 3,2                      | 6                      | -                      | -          | 3   |
| 3              | 8        | 6        | 3,6                      | -                        | -                      | 5                      | -          | 4   |
| 4              | 10       | 8        | -                        | 4                        | -                      | -                      | 12         | 2,5 |
| 5              | 4        | 3        | 1,6                      | -                        | 3                      | -                      | -          | 2   |



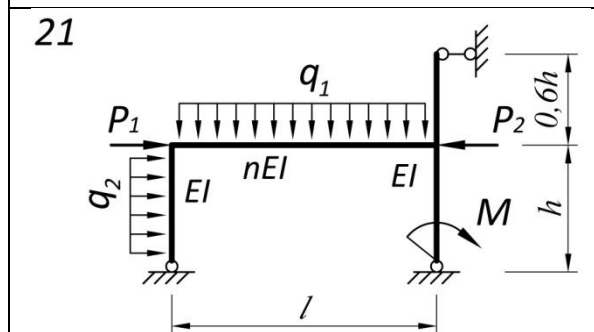
| N <sub>0</sub> | l<br>(m) | h<br>(m) | q <sub>1</sub><br>(кН/м) | q <sub>2</sub><br>(кН/м) | P <sub>1</sub><br>(кН) | P <sub>2</sub><br>(кН) | M<br>(кНм) | n   |
|----------------|----------|----------|--------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------|-----|
| 1              | 10       | 8        | -                        | 2                        | 4                      | -                      | -          | 2   |
| 2              | 3        | 2        | 2,4                      | -                        | -                      | -                      | 6          | 1,5 |
| 3              | 4        | 3        | -                        | 1,6                      | 3                      | -                      | -          | 2   |
| 4              | 5        | 4        | 3,2                      | -                        | -                      | 5                      | -          | 2,5 |
| 5              | 6        | 5        | -                        | 4                        | 6                      | -                      | -          | 3   |



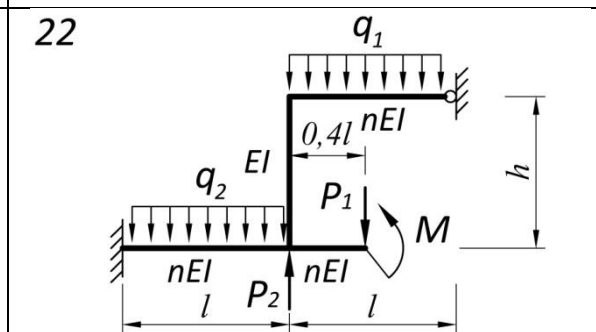
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 3          | 2          | 1,6             | -               | -             | 4             | -            | 1,5 |
| 2 | 4          | 3          | -               | 2               | -             | -             | 8            | 2,5 |
| 3 | 5          | 4          | 2,4             | -               | -             | 3             | -            | 2   |
| 4 | 6          | 5          | -               | 3,2             | 6             | -             | -            | 3   |
| 5 | 8          | 6          | 3,6             | -               | -             | 5             | -            | 4   |



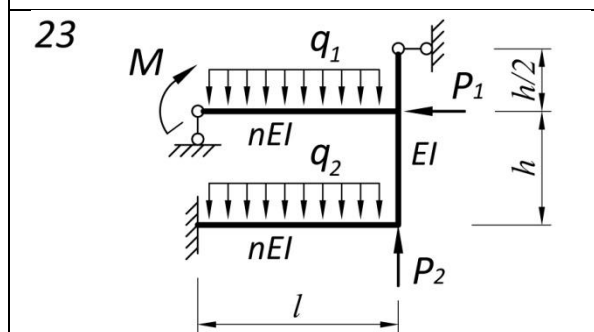
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 6          | 5          | -               | 4               | 6             | -             | -            | 3   |
| 2 | 8          | 6          | 3,2             | -               | -             | 3             | -            | 2   |
| 3 | 10         | 8          | -               | 3,6             | 5             | -             | -            | 4   |
| 4 | 3          | 2          | 2               | -               | -             | -             | 6            | 15  |
| 5 | 4          | 3          | -               | 2,4             | 4             | -             | -            | 2   |



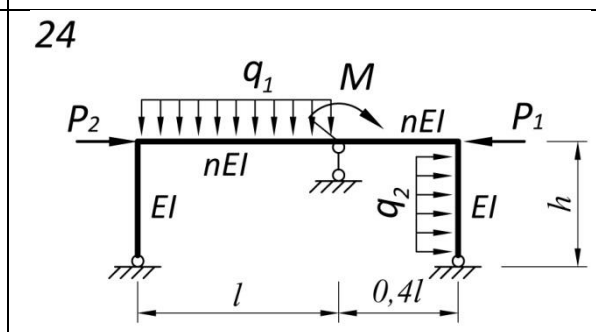
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 4          | 3          | -               | 4               | -             | -             | 8            | 2   |
| 2 | 5          | 4          | 2               | -               | 5             | -             | -            | 2,5 |
| 3 | 6          | 5          | -               | 1,6             | -             | 2             | -            | 3   |
| 4 | 8          | 6          | 3,2             | -               | 4             | -             | -            | 4   |
| 5 | 3          | 2          | -               | 2,4             | -             | 3             | -            | 1,5 |



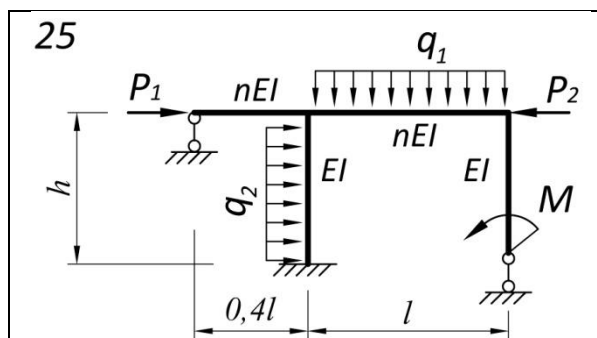
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 8          | 6          | 3,6             | -               | 4             | -             | -            | 4   |
| 2 | 10         | 8          | -               | 4               | -             | -             | 10           | 2,5 |
| 3 | 4          | 3          | 1,6             | -               | 3             | -             | -            | 2   |
| 4 | 5          | 4          | -               | 2               | -             | 6             | -            | 2,5 |
| 5 | 6          | 5          | 2,4             | -               | 5             | -             | -            | 1,5 |



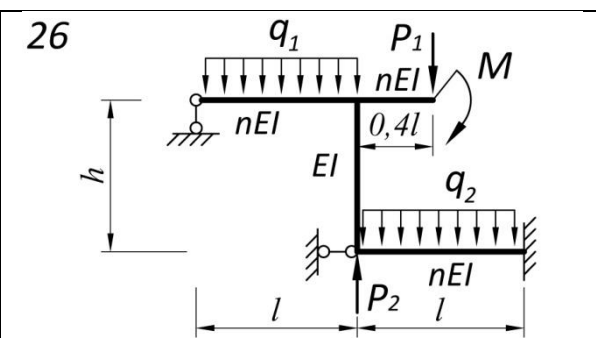
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 5          | 4          | 2,4             | -               | -             | 4             | -            | 2,5 |
| 2 | 6          | 5          | -               | 3,2             | 6             | -             | -            | 3   |
| 3 | 8          | 6          | 3,6             | -               | -             | 5             | -            | 4   |
| 4 | 10         | 8          | -               | 4               | -             | -             | 12           | 2,5 |
| 5 | 4          | 3          | 1,6             | -               | 3             | -             | -            | 2   |



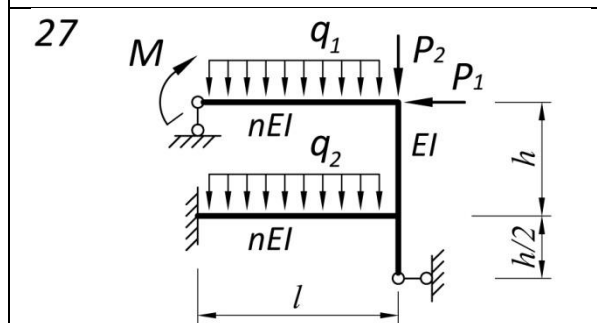
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 10         | 8          | -               | 2               | 4             | -             | -            | 2   |
| 2 | 3          | 2          | 2,4             | -               | -             | -             | 6            | 1,5 |
| 3 | 4          | 3          | -               | 1,6             | 3             | -             | -            | 2   |
| 4 | 5          | 4          | 3,2             | -               | -             | 5             | -            | 2,5 |
| 5 | 6          | 5          | -               | 4               | 6             | -             | -            | 3   |



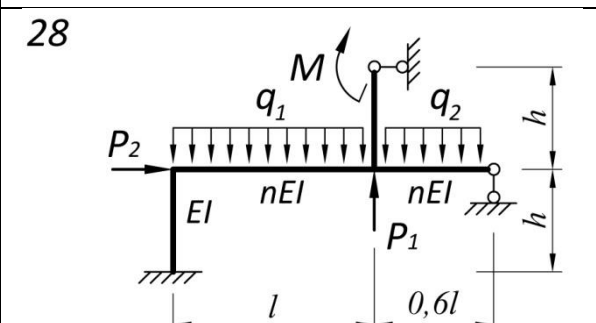
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 3          | 2          | 1,6             | -               | -             | 4             | -            | 1,5 |
| 2 | 4          | 3          | -               | 2               | -             | -             | 8            | 2,5 |
| 3 | 5          | 4          | 2,4             | -               | -             | 3             | -            | 2   |
| 4 | 6          | 5          | -               | 3,2             | 6             | -             | -            | 3   |
| 5 | 8          | 6          | 3,6             | -               | -             | 5             | -            | 4   |



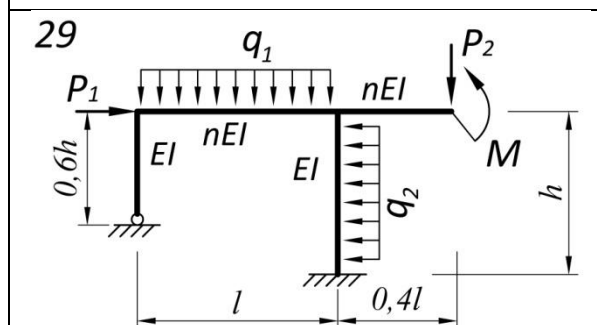
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 6          | 5          | -               | 4               | 6             | -             | -            | 3   |
| 2 | 8          | 6          | 3,2             | -               | -             | 3             | -            | 2   |
| 3 | 10         | 8          | -               | 3,6             | 5             | -             | -            | 4   |
| 4 | 3          | 2          | 2               | -               | -             | -             | 6            | 1,5 |
| 5 | 4          | 3          | -               | 2,4             | 4             | -             | -            | 2   |



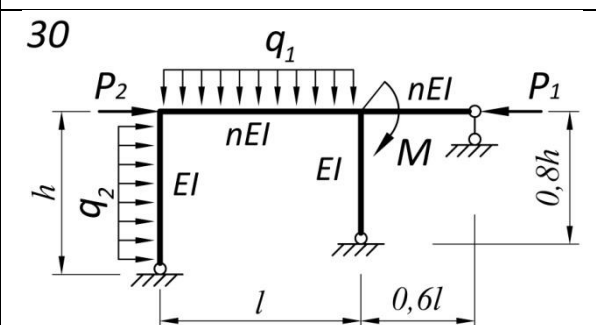
| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 4          | 3          | -               | 4               | -             | -             | 8            | 2   |
| 2 | 5          | 4          | 2               | -               | 5             | -             | -            | 2,5 |
| 3 | 6          | 5          | -               | 1,6             | -             | 2             | -            | 3   |
| 4 | 8          | 6          | 3,2             | -               | 4             | -             | -            | 4   |
| 5 | 3          | 2          | -               | 2,4             | -             | 3             | -            | 1,5 |



| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 8          | 6          | 3,6             | -               | 4             | -             | -            | 4   |
| 2 | 10         | 8          | -               | 4               | -             | -             | 10           | 2,5 |
| 3 | 4          | 3          | 1,6             | -               | 3             | -             | -            | 2   |
| 4 | 5          | 4          | -               | 2               | -             | 6             | -            | 2,5 |
| 5 | 6          | 5          | 2,4             | -               | 5             | -             | -            | 1,5 |



| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 5          | 4          | 2,4             | -               | -             | 4             | -            | 2,5 |
| 2 | 6          | 5          | -               | 3,2             | 6             | -             | -            | 3   |
| 3 | 8          | 6          | 3,6             | -               | -             | 5             | -            | 4   |
| 4 | 10         | 8          | -               | 4               | -             | -             | 12           | 2,5 |
| 5 | 4          | 3          | 1,6             | -               | 3             | -             | -            | 2   |



| № | $l$<br>(m) | $h$<br>(m) | $q_1$<br>(кН/м) | $q_2$<br>(кН/м) | $P_1$<br>(кН) | $P_2$<br>(кН) | $M$<br>(кНм) | $n$ |
|---|------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------|-----|
| 1 | 10         | 8          | -               | 2               | 4             | -             | -            | 2   |
| 2 | 3          | 2          | 2,4             | -               | -             | -             | 6            | 1,5 |
| 3 | 4          | 3          | -               | 1,6             | 3             | -             | -            | 2   |
| 4 | 5          | 4          | 3,2             | -               | -             | 5             | -            | 2,5 |
| 5 | 6          | 5          | -               | 4               | 6             | -             | -            | 3   |

### **Склад розрахунково-графічної роботи**

1. Визначити ступінь статичної невизначуваності рами.
2. Обрати основну систему і основні невідомі методу сил.
3. Побудувати епюри внутрішніх зусиль від дії одиничних навантажень.
4. Побудувати епюри внутрішніх зусиль від дії заданих навантажень.
5. Скласти розв'язувальні (канонічні) рівняння методу сил.
6. Обчислити коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь.
7. Обчислити невідомі системи розв'язувальних рівнянь.
8. Визначити дійсні зусилля та побудувати дійсні епюри.
9. Виконати кінематичну перевірку розрахунку.
10. Виконати перевірку побудови дійсних епюр внутрішніх зусиль.

## Список літератури

1. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології моделювання: підручник. / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов – К.: ПАТ «ВІПОЛ», 2013. – 896 с.
2. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерний курс: підручник. / В.А. Баженов, С.Я. Гранат, О.В. Шишов.– К.: 1999. – 584 с.
3. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навчальний посібник. / В.А. Баженов, Г.М. Іванченко, О.В. Шишов та ін. – К.: Каравела, 2010. – с.
4. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навчальний посібник. / В.А. Баженов, Г.М. Іванченко, О.В. Шишов. –К.: Каравела, 2006. – с.
5. *Лізунов П.П.* Будівельна механіка: конспект лекцій. / П.П. Лізунов, В.О. Недін. – К.: КНУБА, 2022. – 172 с.

Навчально-методичне видання

# **РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ**

Методичні вказівки та індивідуальні завдання  
до виконання розрахунково-графічної роботи  
для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна  
інженерія» освітньої програми «Технологія будівельних  
конструкцій, виробів і матеріалів»

Укладачі: **ЛІЗУНОВ** Петро Петрович  
**НЕДІН** Валентин Олегович  
**КОЗАК** Андрій Анатолійович та ін.

Випусковий редактор *Л.М. Морозюк*  
Комп'ютерне верстання *Д.М. Ніколаєвич*

Підписано до друку 20.10.2023. Формат 60x84<sub>1/16</sub>  
Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 2,0.  
Електронний документ. Вид. № 82/III-23

Видавець і виготовлювач:  
Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.