

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

АРИФМЕТИЧНІ ТА ЛОГІЧНІ ОСНОВИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Методичні вказівки та завдання
до виконання самостійної роботи
для студентів спеціальностей 125 «Кібербезпека» і
123 «Комп'ютерна інженерія»

Київ 2024

УДК 510.23:510.6

П49

Укладач Н.І. Полтораченко, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Є.В. Бородавка, д-р техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск О.О. Терентьєв, д-р техн. наук,
професор

*Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій
проектування і прикладної математики, протокол № 5 від
12 грудня 2023 року.*

В авторській редакції.

Арифметичні та логічні основи обчислювальної техніки :
П49 методичні вказівки та завдання до виконання самостійної роботи /
уклад. : Н.І. Полтораченко. – Київ : КНУБА, 2024. – 52 с.

Представлено приклади розв’язування задач щодо арифметичних та логічних основ обчислювальної техніки відповідно до програми першого курсу, запропоновано вправи для самостійної роботи. Наведено короткий зміст теоретичного матеріалу.

Призначено для студентів спеціальностей 125 «Кібербезпека» і 123 «Комп’ютерна інженерія».

© КНУБА, 2024

Загальні положення

Метою викладання дисципліни «Арифметичні та логічні основи обчислювальної техніки» є набуття знань з основ вказаного курсу, формування у майбутніх фахівців знань і навичок застосування законів, принципів та методів математичної логіки в інженерній практиці у процесі вирішення технічних задач.

Арифметичні та логічні основи обчислювальної техніки є дисципліною, яка спирається на курс математики в шкільній програмі та широко використовується в теорії алгоритмів, системах штучного інтелекту, математичній кібернетики тощо.

У методичних вказівках стисло викладено теоретичний матеріал щодо логіки систем числення, булевої алгебри та алгебри Жегалкіна, числення висловлювань.

Кожна теоретична теза коментується прикладами розв'язування задач.

Методичні вказівки містять варіанти завдань для самостійної роботи.

1. Логіка систем числення

Системою числення називають систему відображення будь-яких чисел за допомогою обмеженої кількості знаків.

Позиційною системою числення називають систему, в якій кількісне значення кожної цифри залежить від її місця у відображенні числа. В такій системі числення будь-яке число, що має вигляд

$$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_i \dots a_k},$$

може бути представлено у вигляді суми

$$A = a_1 \cdot q^{t-1} + a_2 \cdot q^{t-2} + \dots + a_i \cdot q^{t-i} + \dots + a_k \cdot q^{t-k},$$

де k – кількість розрядів у відображенні числа; a_i – цифра i -го розряду; q – основа системи числення; t – фіксоване число, яке визначає положення коми; цифра a_i має задовільняти умові $0 \leq a_i \leq q - 1$.

У двійковій системі числення $q = 2$, а для зображення чисел використовують символи 0 та 1. У вісімковій системі числення $q = 8$, а для зображення чисел використовують символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. У десятковій системі числення $q = 10$, а для зображення чисел використовують символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. У шістнадцятковій

системі числення $q = 16$, а для зображення чисел використовують символи 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, де $A=10$, $B=11$, $C=12$, $D=13$, $E=14$, $F=15$.

Для переведення цілих чисел з однієї системи числення в іншу найчастіше використовують такий алгоритм:

- 1) розділити число, яке переводять, на основу p нової системи за правилами початкової системи;
- 2) перевірити, чи не дорівнює 0 частка; якщо не дорівнює, то прийняти її за нове число та повернутися до кроку 1;
- 3) якщо частка дорівнює 0, то виписати всі отримані залишки від ділення в порядку, зворотному їх отриманню;
- 4) отриманий результат і є записом числа в системі числення з основою p .

Приклад 1.1. Перевести число 1648 десяткової системи числення у:

а) двійкову; б) вісімкову; в) шістнадцяткову. Зробити перевірку.

Розв'язання.

а)

$$\begin{array}{r}
 1648 \overline{) 2} \\
 1648 \overline{) 824} \overline{) 2} \\
 \underline{0} \overline{) 824} \overline{) 412} \overline{) 2} \\
 \underline{0} \overline{) 412} \overline{) 206} \overline{) 2} \\
 \underline{0} \overline{) 206} \overline{) 103} \overline{) 2} \\
 \underline{0} \overline{) 102} \overline{) 51} \overline{) 2} \\
 \underline{1} \overline{) 50} \overline{) 25} \overline{) 2} \\
 \underline{1} \overline{) 24} \overline{) 12} \overline{) 2} \\
 \underline{1} \overline{) 12} \overline{) 6} \overline{) 2} \\
 \underline{0} \overline{) 6} \overline{) 3} \overline{) 2} \\
 \underline{0} \overline{) 2} \overline{) 1} \overline{) 2} \\
 \underline{1} \overline{) 0} \overline{) 0} \overline{) 1} \\
 \underline{1}
 \end{array}$$

Отже, $1648_{(10)} = 11001110000_{(2)}$.

Виконаємо перевірку:

$$1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1024 + 512 + 64 + 32 + 16 = 1648.$$

б)

$$\begin{array}{r} 1648 \overline{)8} \\ 1648 \ 206 \overline{)8} \\ \underline{0} \ 200 \ 25 \overline{)8} \\ \underline{6} \ 24 \ 3 \overline{)8} \\ \underline{1} \ 0 \ 0 \overline{) } \\ \underline{3} \end{array}$$

Отже, $1648_{(10)} = 3160_{(8)}$.

Виконаємо перевірку:

$$3 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 1536 + 64 + 48 = 1648.$$

в)

$$\begin{array}{r} 1648 \overline{)16} \\ 1648 \ 103 \overline{)16} \\ \underline{0} \ 96 \ 6 \overline{)16} \\ \underline{7} \ 0 \ 0 \overline{) } \\ \underline{6} \end{array}$$

Отже, $1648_{(10)} = 670_{(16)}$.

Виконаємо перевірку:

$$6 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 1536 + 112 = 1648.$$

Для переведення дробових чисел (ціла частина дорівнює 0) використовують такий алгоритм:

- 1) помножити дробове число на основу системи числення, у яку його переводять; виділити цілу частину;
- 2) якщо точність результату вимагає наступних перетворень, то виділяємо дробову частину і переходимо до пункту 1;
- 3) якщо точність результату задовольняє, то виділені цілі частини добутоків і є цифрами дробової частини числа.

Приклад 1.2. Перевести число 0,64 десяткової системи числення у:
а) двійкову; б) вісімкову; в) шістнадцяткову. Зробити перевірку.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу з точністю до чотирьох знаків після коми:

$$\begin{array}{r} \text{а) } 0,64 \quad 0,28 \quad 0,56 \quad 0,12 \\ \underline{\quad 2 \quad} \quad \underline{\quad 2 \quad} \quad \underline{\quad 2 \quad} \quad \underline{\quad 2 \quad} \\ 1,28 \quad 0,56 \quad 1,12 \quad 0,24 \end{array}$$

Отже, $0,64_{(10)} \approx 0,1010_{(2)}$.

Виконаємо перевірку:

$$1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 0,5 + 0,125 = 0,625.$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } 0,64 \quad 0,12 \quad 0,96 \quad 0,68 \\ \underline{\quad 8 \quad} \quad \underline{\quad 8 \quad} \quad \underline{\quad 8 \quad} \quad \underline{\quad 8 \quad} \\ 5,12 \quad 0,96 \quad 7,68 \quad 5,44 \end{array}$$

Отже, $0,64_{(10)} \approx 0,5075_{(8)}$.

Виконаємо перевірку:

$$5 \cdot 8^{-1} + 0 \cdot 8^{-2} + 7 \cdot 8^{-3} + 5 \cdot 8^{-4} = 0,625 + 0,0137 + 0,0012 = 0,6399.$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } 0,64 \quad 0,24 \quad 0,84 \quad 0,44 \\ \underline{\quad 16 \quad} \quad \underline{\quad 16 \quad} \quad \underline{\quad 16 \quad} \quad \underline{\quad 16 \quad} \\ 10,24 \quad 3,84 \quad 13,44 \quad 7,04 \end{array}$$

Отже, $0,64_{(10)} \approx 0, A3D7_{(16)}$.

Виконаємо перевірку:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 16^{-1} + 3 \cdot 16^{-2} + 13 \cdot 16^{-3} + 7 \cdot 16^{-4} \\ = 0,625 + 0,0117 + 0,0032 + 0,0001 = 0,64. \end{aligned}$$

Щоб перевести числа, які містять і цілу, і дробову частини, треба виконати окремо переведення цих частин, а отримані результати з'єднати.

Приклад 1.3. Перевести число 1648,64 десяткової системи числення у:
а) двійкову; б) вісімкову; в) шістнадцяткову.

Розв'язання. Скористаємося результатами з попередніх прикладів:

а) $1648,64_{(10)} \approx 11001110000,1010_{(2)}$;

б) $1648,64_{(10)} \approx 3160,5075_{(8)}$;

в) $1648,64_{(10)} \approx 670, A3D7_{(16)}$.

Щоб перевести число з вісімкової системи числення у двійкову і навпаки, можна скористатися такими відповідностями (тріадами):

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Приклад 1.4. Перевести числа 3168 та 324,61 вісімкової системи числення у двійкову.

Розв'язання.

$$3160_{(8)} = 011\ 001\ 110\ 000_{(2)};$$

$$324,61_{(8)} = 011\ 010\ 100,110\ 001_{(2)}.$$

Приклад 1.5. Перевести число 101100011,011101 двійкової системи числення у вісімкову.

Розв'язання.

$101\ 100\ 011,011\ 101_{(2)} = 543,35_{(8)}$ (відраховуємо тріади від коми вліво та вправо).

Щоб перевести число з шістнадцяткової системи числення у двійкову і навпаки, можна скористатися наступними відповідностями (тетрадами):

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010

11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Приклад 1.6. Перевести числа 670 та A24,B3 шістнадцяткової системи числення у двійкову.

Розв'язання.

$$670_{(16)} = 0110\ 0111\ 0\ 000_{(2)};$$

$$A24,B3_{(16)} = 1010\ 0010\ 0100,1011\ 0011_{(2)}.$$

Приклад 1.7. Перевести число 101100011,011101 двійкової системи числення у шістнадцяткову.

Розв'язання.

1 0110 0011,0111 01₍₂₎ = 163,74₍₁₆₎ (відраховуємо тетради від коми вліво та вправо).

При додаванні двійкових чисел мають виконуватися наступні правила:

$$0+0=0; \quad 0+1=1; \quad 1+0=1; \quad 1+1=10.$$

В останньому випадку виникає перенос 1 до сусіднього старшого розряду.

Приклад 1.8. Додати числа 11100011₍₂₎ та 10101100₍₂₎.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11100011 \\ \underline{10101100} \\ 110001111 \end{array}$$

Зробимо перевірку через десяткову систему:

$$11100011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 227;$$

$$10101100_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 128 + 32 + 8 + 4 = 172;$$

$$110001111_{(2)} = 2^8 + 2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 256 + 128 + 8 + 4 + 2 + 1 = 399;$$

$$227 + 172 = 399.$$

При відніманні двійкових чисел мають виконуватися наступні правила:

$$0-0=0; \quad 1-1=0; \quad 1-0=1; \quad 10-1=1.$$

Якщо під час порозрядного віднімання необхідно відняти від нуля одиницю, то береться позичка в сусідньому розряді і операція виконується за правилом $10-1=1$.

Приклад 1.9. Відняти числа $11100011_{(2)}$ та $10101100_{(2)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 11100011 \\ \underline{10101100} \\ 00110111 \end{array}$$

Зробимо перевірку через десяткову систему:

$$11100011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 227;$$

$$10101100_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 128 + 32 + 8 + 4 = 172;$$

$$00110111_{(2)} = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 55;$$

$$227 - 172 = 55.$$

Множення двох двійкових чисел виконується за аналогією з множенням десяткових чисел.

Приклад 1.10. Знайти добуток чисел $11100011_{(2)}$ та $10101100_{(2)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r} 11100011 \\ \underline{10101100} \\ 11100011 \\ 11100011 \\ 11100011 \\ \underline{11100011} \\ 1001100010000100 \end{array}$$

Зробимо перевірку через десяткову систему:

$$11100011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 227;$$

$$10101100_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 128 + 32 + 8 + 4 = 172;$$

$$1001100010000100_{(2)} = 2^{15} + 2^{12} + 2^{11} + 2^7 + 2^2$$

$$= 32768 + 4096 + 2048 + 128 + 4 = 39044;$$

$$227 \cdot 172 = 39044.$$

Якщо множники мають цілу та дробову частини, то операція множення відбувається як добуток цілих чисел з наступним виділенням дробових розрядів.

Приклад 1.11. Знайти добуток чисел $1110,0011_{(2)}$ та $1010,11_{(2)}$.

Розв'язання.

$$\begin{array}{r}
 1110,0011 \\
 \underline{1010,11} \\
 11100011 \\
 11100011 \\
 11100011 \\
 \underline{11100011} \\
 10011000,100001
 \end{array}$$

Ділення двох двійкових чисел відбувається аналогічно діленню десятичних чисел.

Приклад 1.12. Розділити число $11100011_{(2)}$ на число $10101100_{(2)}$.

Розв'язання. Результат шукаємо з точністю до чотирьох знаків.

$$\begin{array}{r}
 11100011 \overline{) 10101100} \\
 \underline{10101100} \\
 11011100 \\
 \underline{10101100} \\
 11000000 \\
 \underline{10101100} \\
 10100
 \end{array}$$

Зробимо перевірку через десяткову систему:

$$11100011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 2 + 1 = 227;$$

$$10101100_{(2)} = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = 128 + 32 + 8 + 4 = 172;$$

$$1,0101_{(2)} = 2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} = 1 + 0,25 + 0,0625 = 1,3125;$$

$$227 \div 172 \approx 1,3198.$$

2. Логічні операції

Основні логічні операції:

- 1) заперечення, інверсія (одномісна) $\bar{x}$;
- 2) диз'юнкція (двомісна, x_1 або x_2) $x_1 \vee x_2$;
- 3) кон'юнкція (двомісна, x_1 та x_2) $x_1 \wedge x_2$;
- 4) імплікація (двомісна, якщо x_1 , то x_2) $x_1 \rightarrow x_2$;
- 5) еквіваленція (двомісна, якщо x_1 , то x_2 і навпаки) $x_1 \leftrightarrow x_2$.

Властивості операцій:

- 1) комутативність: $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$;
- 2) асоціативність: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
- 3) дистрибутивність кон'юнкції $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ та дистрибутивність диз'юнкції $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
- 4) властивість констант: $x \vee 0 = x$, $x \wedge 1 = x$, $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$;
- 5) властивість заперечення: $x \vee \bar{x} = 1$, $x \wedge \bar{x} = 0$, $\bar{\bar{x}} = x$.

Закони тотожних перетворень:

- 1) закони ідемпотентності: $x \vee x = x \wedge x = x$;
- 2) закони поглинання: $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$;
- 3) закони де Моргана: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Пріоритет операцій:

- 1) вираз в дужках;
- 2) заперечення $\neg$;
- 3) кон'юнкція $\wedge$;
- 4) диз'юнкція $\vee$;
- 5) імплікація $\rightarrow$;
- 6) еквіваленція $\leftrightarrow$, $\sim$.

Допускається явна відсутність операції кон'юнкції. Наприклад, $x \wedge \bar{x}$ можна замінити на $x \bar{x}$.

Вирази, що відповідають символам операцій:

- 1) $\wedge$ – і, але, а, хоч, незважаючи на...;
- 2) $\vee$ – або, чи, хоч одне з них...;
- 3) $\neg$ – не, неправильно, що...;
- 4) $\rightarrow$ – якщо..., то...; впливає...;
- 5) $\sim$ –...тоді й тільки тоді, коли...; ...якщо й тільки якщо...; ...еквівалентне (рівносильне)...

Приклад 2.1. Підставити у формулу $a \vee b$ та за можливості скоротити:

- а) $a = \bar{x}y, b = z$;
- б) $a = xy, b = x\bar{y}$;
- в) $a = x, b = xy$;
- г) $a = x, b = \bar{x}y$;
- г) $a = xy, b = c \vee d, c = xz, d = y\bar{x}$.

Розв'язання.

- а) $a = \bar{x}y, b = z; a \vee b = \bar{x}y \vee z$.

$$\text{б) } a = xy, b = x\bar{y}; a \vee b = xy \vee x\bar{y} = x(y \vee \bar{y}) = x1 = x.$$

$$\text{в) } a = x, b = xy; a \vee b = x \vee xy = x1 \vee xy = x(1 \vee y) = x1 = x.$$

$$\text{г) } a = x, b = \bar{x}y; a \vee b = x \vee \bar{x}y = (x \vee \bar{x})(x \vee y) = 1(x \vee y) = x \vee y.$$

$$\text{г) } a = xy, b = c \vee d, c = xz, d = y\bar{x}; a \vee b = xy \vee xz \vee y\bar{x} = y(x \vee \bar{x}) \vee xz = y \vee xz.$$

Приклад 2.2. Скласти таблицю відповідності:

$$\text{а) } x\bar{x}; \text{ б) } xy \vee \bar{x}; \text{ в) } (p \vee q)(\bar{p} \vee \bar{q}); \text{ г) } \overline{x \vee y}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } x\bar{x}:$$

x	$\bar{x}$	$x\bar{x}$
0	1	0
1	0	0

Або за властивістю заперечення: $x\bar{x} = 0$.

$$\text{б) } xy \vee \bar{x}:$$

x	$\bar{x}$	y	xy	$xy \vee \bar{x}$
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1

$$\begin{aligned} xy \vee \bar{x} &= \left| \begin{array}{l} \text{дистрибутивність диз'юнкції та} \\ \text{властивість заперечення} \end{array} \right| = \bar{x} \vee y \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{таблиця істинності} \\ \text{для імплікації} \end{array} \right| = x \rightarrow y. \end{aligned}$$

$$\text{в) } (p \vee q)(\bar{p} \vee \bar{q}):$$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \vee q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$(p \vee q)(\bar{p} \vee \bar{q})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

$$(p \vee q)(\bar{p} \vee \bar{q}) = \left| \begin{array}{l} \text{таблиця істинності} \\ \text{для еквівалентності та заперечення} \end{array} \right| = \overline{p \leftrightarrow q}.$$

$$\text{г) } \overline{x \vee y}:$$

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

x	$\bar{x}$	y	$\bar{y}$	$x \vee y$	$\bar{x} \bar{y}$	$\overline{x \vee y}$
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0

Таблицями істинності перевірено закон де Моргана $\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}$.

Приклад 2.3. Скоротити:

- а) $x \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{y}$; б) $(x \vee y)(x \vee z)$; в) $x y z \vee x y \bar{z} \vee x \bar{y}$; г) $\bar{x} y z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x y \bar{z}$;
 д) $x y \vee z \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} (z \vee v \vee x) x \vee z$; е) $x \bar{y} \bar{z} \vee x y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y z$.

Розв'язування.

- а) $x \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{y} = |\text{дистрибутивність диз'юнкції}| = y(x \vee \bar{x}) \vee \bar{x} \bar{y} =$
 $|\text{властивість заперечення}| = y \vee \bar{x} \bar{y} = |\text{дистрибутивність кон'юнкції}| =$
 $(y \vee \bar{x})(y \vee \bar{y}) = |\text{властивість заперечення}| = y \vee \bar{x};$
 б) $(x \vee y)(x \vee z) = |\text{дистрибутивність кон'юнкції}| = x \vee yz;$
 в) $x y z \vee x y \bar{z} \vee x \bar{y} = |\text{дистрибутивність диз'юнкції}| = x y (z \vee \bar{z}) \vee x \bar{y} =$
 $|\text{властивість заперечення}| = x y \vee x \bar{y} = |\text{дистрибутивність диз'юнкції}| =$
 $x(y \vee \bar{y}) = |\text{властивість заперечення}| = x;$
 г) $\bar{x} y z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee x y \bar{z} = |\text{дистрибутивність диз'юнкції}| = \bar{x} y z \vee x \bar{z} (\bar{y} \vee y) =$
 $|\text{властивість заперечення}| = \bar{x} y z \vee x \bar{z};$
 д) $x y \vee z \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} (z \vee v \vee x) = |\text{закон де Моргана}| = x y \vee z \vee \bar{x} \bar{y} \bar{z} (z \vee v \vee x) =$
 $|\text{закон де Моргана}| = x y \vee z \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) \bar{z} (z \vee v \vee x) =$
 $|\text{дистрибутивність диз'юнкції}| = x y \vee z \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{z} z \vee v \bar{z} x) =$
 $|\text{властивості заперечення}| = x y \vee z \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) \bar{z} x =$
 $|\text{та констант}| = x y \vee z \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) \bar{z} x =$
 $|\text{дистрибутивність диз'юнкції}| = x y \vee z \vee \bar{x} \bar{z} x \vee \bar{y} \bar{z} x =$
 $|\text{властивості заперечення}| = x y \vee z \vee \bar{y} \bar{z} x =$
 $|\text{та констант}| = x y \vee z \vee \bar{y} \bar{z} x =$
 $|\text{дистрибутивність кон'юнкції}| = x y \vee (z \vee \bar{y} x) (z \vee \bar{z}) =$
 $|\text{властивість заперечення}| = x y \vee (z \vee \bar{y} x) = x y \vee z \vee \bar{y} x =$

$$|\text{дистрибутивність диз'юнкції}| = x(y \vee \bar{y}) \vee z =$$

$$|\text{властивості заперечення}|_{\text{та констант}} = x \vee z;$$

$$\text{е) } x\bar{y}\bar{z} \vee x y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x y z = |\text{дистрибутивність диз'юнкції}| =$$

$$x\bar{z}(\bar{y} \vee y) \vee yz(\bar{x} \vee x) = |\text{властивості заперечення}|_{\text{та констант}} = x\bar{z} \vee yz.$$

Приклад 2.4. Перетворити формули так, щоб операція заперечення застосовувалася тільки до змінних:

а) $\overline{x y \vee \bar{z}}$; б) $x(x y \vee \bar{y} \bar{z}) \vee \overline{y \vee z \bar{v}}$.

Розв'язування.

а) $\overline{x y \vee \bar{z}} = |\text{закон де Моргана}| = \bar{x} \bar{y} \bar{\bar{z}} =$

$$|\text{закон де Моргана}|_{\text{та властивість подвійного заперечення}} = (\bar{x} \vee \bar{y}) \bar{z};$$

б) $x(x y \vee \bar{y} \bar{z}) \vee \overline{y \vee z \bar{v}} = |\text{закон де Моргана}| = x(x y \vee \bar{y} \bar{z}) \vee \bar{y} \bar{z} \bar{\bar{v}} =$

$$|\text{закон де Моргана}| = x(x y \vee \bar{y} \bar{z}) \vee \bar{y}(\bar{z} \vee \bar{\bar{v}}) =$$

$$|\text{властивість подвійного заперечення}| = x(x y \vee \bar{y} \bar{z}) \vee \bar{y}(\bar{z} \vee v).$$

Приклад 2.5. Перевірити за таблицями відповідності:

а) $x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$; б) $x_1 \leftrightarrow x_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$; в) $x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_1)$.

Розв'язування.

а) $x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$:

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$x_1 \rightarrow x_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

б) $x_1 \leftrightarrow x_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = (x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$:

x_1	x_2	$x_1 x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

x_1	x_2	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
-------	-------	----------------------	----------------------	--	---------------------------

0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

в) $x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_1)$:

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_2 \rightarrow x_1$	$(x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_1)$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

3. Логічні функції

Булеві функції двох змінних ($k = 2, n = 2, k^n = 4, k^{k^n} = 16$):

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	Позначка	Назва	Читання
y_0	0 0 0 0	0	Константа 0 (завжди хибно)	Тотожний 0
y_1	0 0 0 1	$x_1 x_2$; $x_1 \wedge x_2$; $x_1 \& x_2$; $x_1 \cap x_2$	Кон'юнкція (добуток, перетин, логічне «і»)	x_1 і x_2
y_2	0 0 1 0	$x_1 \leftarrow x_2$	Заперечення імплікації	x_1 , але не x_2
y_3	0 0 1 1	x_1	Повторення першого аргументу	Як x_1
y_4	0 1 0 0	$x_2 \leftarrow x_1$	Заперечення оберненої імплікації	Не x_1 , але x_2
y_5	0 1 0 1	x_2	Повторення другого аргументу	Як x_2
y_6	0 1 1 0	$x_1 + x_2$;	Сума за модулем 2	x_1 не як x_2 (або

		$x_1 \oplus x_2$	(антиеквівалентність)	x_1 або x_2
y_7	0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$; $x_1 \cup x_2$	Диз'юнкція (добуток, об'єднання, логічне «або»)	x_1 або x_2
y_8	1 0 0 0	$x_1 \downarrow x_2$; $\overline{x_1 \vee x_2}$	Стрілка Пірса; заперечення диз'юнкції	Ні x_1 , ні x_2
y_9	1 0 0 1	$x_1 \leftrightarrow x_2$	Еквіваленція (рівнозначність)	x_1 як x_2
y_{10}	1 0 1 0	$\overline{x_2}$; $\neg x_2$	Заперечення другого аргументу	Не x_2
y_{11}	1 0 1 1	$x_2 \rightarrow x_1$	Обернена імплікації	Якщо x_2 , то x_1
y_{12}	1 1 0 0	$\overline{x_1}$; $\neg x_1$	Заперечення першого аргументу	Не x_1
y_{13}	1 1 0 1	$x_1 \rightarrow x_2$	Імплікація	Якщо x_1 , то x_2
y_{14}	1 1 1 0	$x_1 x_2$; $\overline{x_1 \wedge x_2}$	Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції)	Не x_1 або не x_2
y_{15}	1 1 1 1	1	Константа 1 (завжди істино)	Тотожня 1

Приклад 3.1. Записати таблицю відповідності для булевої функції $(x \downarrow y)|(x \leftarrow z)$.

Розв'язування.

x	y	z	$x \downarrow y$	$x \leftarrow z$	$(x \downarrow y) (x \leftarrow z)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1

Приклад 3.2. Довести, що наведені формули є тотожними одиницями:

а) $x(x \rightarrow y) \rightarrow y$; б) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (xy \rightarrow z)$; в) $(x \rightarrow y)(z \rightarrow y) \rightarrow (xz \rightarrow y)$;

г) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow y)(y \rightarrow x)$.

Розв'язування. Доведення відбувається як таблично, так і аналітично.

а) $x(x \rightarrow y) \rightarrow y = x(\bar{x} \vee y) \rightarrow y = xy \rightarrow y = \overline{x\bar{y}} \vee y = \bar{x} \vee \bar{y} \vee y = \bar{x} \vee 1 = 1$;

x	y	$x \rightarrow y$	$x(x \rightarrow y)$	$x(x \rightarrow y) \rightarrow y$
0	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

б) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (xy \rightarrow z) = (x \rightarrow (\bar{y} \vee z)) \rightarrow (\bar{x} \vee y \vee z) =$
 $= (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee z} \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z = 1$;

в) $(x \rightarrow y)(z \rightarrow y) \rightarrow (xz \rightarrow y) = (\bar{x} \vee y)(\bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{xz} \vee y) =$
 $= (\bar{x} \bar{z} \vee y) \rightarrow (\bar{xz} \vee y) = (\overline{\bar{x} \bar{z}} \vee y) \rightarrow (\bar{x} \vee \bar{z} \vee y) =$
 $= (\overline{\bar{x} \bar{z}} \vee y) \vee (\bar{x} \vee \bar{z} \vee y) = (x \vee z) \vee \bar{y} \vee (\bar{x} \vee \bar{z} \vee y) =$
 $= x \vee z \vee \bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{z} \vee y = (x \vee \bar{x}) \vee (z \vee \bar{z}) \vee (\bar{y} \vee y) = 1 \vee 1 \vee 1 = 1$;

x	y	z	$x \rightarrow y$	$z \rightarrow y$	$(x \rightarrow y)(z \rightarrow y)$	xz	$xz \rightarrow y$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

г) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) = (\bar{x} \vee y \vee xy) \leftrightarrow (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = (\bar{x} \vee y \vee xy) \leftrightarrow$
 $\leftrightarrow (\bar{x} \vee y \vee xy) = (\bar{x} \vee y \vee xy) (\bar{x} \vee y \vee xy) \vee (\bar{x} \vee y \vee xy) (\bar{x} \vee y \vee xy) = (\bar{x} \vee y \vee xy) \vee (\bar{x} \vee y \vee xy) = 1$.

Приклад 3.3. Скориставшись властивостями функцій, виразити всі функції двох змінних через:

- а) константу 0, заперечення, кон'юнкцію та диз'юнкцію;
- б) заперечення і кон'юнкцію;
- в) заперечення і диз'юнкцію;
- г) стрілку Пірса.

Розв'язування. а)

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 0; y_1 = x_1 x_2; y_2 = x_1 \leftarrow x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee x_2} = x_1 \overline{x_2}; y_3 = x_1; \\
 y_4 &= x_2 \leftarrow x_1 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = \overline{x_1} x_2; y_5 = x_2; \\
 y_6 &= x_1 + x_2 = \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2)} = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}; y_7 = x_1 \vee x_2; \\
 y_8 &= x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \overline{x_2}; y_9 = x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2) \\
 &= x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_2}; \\
 y_{10} &= \overline{x_2}; y_{11} = x_2 \rightarrow x_1 = \overline{x_2} \vee x_1; y_{12} = \overline{x_1}; y_{13} = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2; \\
 y_{14} &= x_1 | x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}; y_{15} = 1 = \overline{0}.
 \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 0 = x_1 \overline{x_1}; y_1 = x_1 x_2; y_2 = x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \overline{x_2}; y_3 = x_1; \\
 y_4 &= x_2 \leftarrow x_1 = \overline{x_1} x_2; y_5 = x_2; y_6 = x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_1} x_2}; \\
 y_7 &= x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \overline{x_2}}; y_8 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1} \overline{x_2}; y_9 = x_1 \leftrightarrow x_2 = \overline{\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_1} x_2}; \\
 y_{10} &= \overline{x_2}; y_{11} = x_2 \rightarrow x_1 = \overline{\overline{x_1} x_2}; y_{12} = \overline{x_1}; y_{13} = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \overline{x_2}; \\
 y_{14} &= x_1 | x_2 = \overline{x_1} \overline{x_2}; y_{15} = 1 = \overline{x_1 \overline{x_1}}.
 \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 0 = \overline{x_1 \vee \overline{x_1}}; y_1 = x_1 x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}; y_2 = x_1 \leftarrow x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee x_2}; y_3 = x_1; \\
 y_4 &= x_2 \leftarrow x_1 = \overline{x_1 \vee \overline{x_2}}; y_5 = x_2; y_6 = x_1 + x_2 = \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \vee x_2)}; \\
 y_7 &= x_1 \vee x_2; y_8 = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}; y_9 = x_1 \leftrightarrow x_2 = \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \vee x_2)}; \\
 y_{10} &= \overline{x_2}; y_{11} = x_2 \rightarrow x_1 = \overline{x_2} \vee x_1; y_{12} = \overline{x_1}; y_{13} = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2; \\
 y_{14} &= x_1 | x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}; y_{15} = 1 = x_1 \vee \overline{x_1}.
 \end{aligned}$$

г)

$$y_0 = 0 = x_1 \downarrow (x_1 \downarrow x_1); y_1 = x_1 x_2 = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2);$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= x_1 \leftarrow x_2 = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2; y_3 = x_1; \\
y_4 &= x_2 \leftarrow x_1 = x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2); y_5 = x_2; y_6 = x_1 + x_2 = (x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2)) \downarrow \\
&\quad \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2)) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2); \\
y_7 &= x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2); y_8 = x_1 \downarrow x_2; \\
y_9 &= x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2)) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2); \\
y_{10} &= \overline{x_2} = x_2 \downarrow x_2; y_{11} = x_2 \rightarrow x_1 = (x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2)) \downarrow (x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_2)); \\
y_{12} &= \overline{x_1} = x_1 \downarrow x_1; y_{13} = x_1 \rightarrow x_2 = ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2); \\
y_{14} &= x_1 | x_2 = ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)); \\
y_{15} &= 1 = (x_1 \downarrow (x_1 \downarrow x_1)) \downarrow (x_1 \downarrow (x_1 \downarrow x_1)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{г)} \quad y_0 &= 0 = (x_1 | (x_1 | x_1)) | (x_1 | (x_1 | x_1)); y_1 = (x_1 | x_2) | (x_1 | x_2); \\
y_2 &= x_1 \leftarrow x_2 = (x_1 | (x_2 | x_2)) | (x_1 | (x_2 | x_2)); y_3 = x_1; \\
y_4 &= x_2 \leftarrow x_1 = ((x_1 | x_1) | x_2) | ((x_1 | x_1) | x_2); y_5 = x_2; \\
y_6 &= x_1 + x_2 = (x_1 | (x_2 | x_2)) | ((x_1 | x_1) | x_2); \\
y_7 &= x_1 \vee x_2 = (x_1 | x_1) | (x_2 | x_2); y_8 = x_1 \downarrow x_2 \\
&= ((x_1 | x_1) | (x_2 | x_2)) | ((x_1 | x_1) | (x_2 | x_2)); y_9 = x_1 \leftrightarrow x_2 = \\
&= ((x_1 | (x_2 | x_2)) | ((x_1 | x_1) | x_2)) | ((x_1 | (x_2 | x_2)) | ((x_1 | x_1) | x_2)); \\
y_{10} &= \overline{x_2} = x_2 | x_2; y_{11} = x_2 \rightarrow x_1 = (x_1 | x_1) | x_2; y_{12} = \overline{x_1} = x_1 | x_1; \\
y_{13} &= x_1 \rightarrow x_2 = x_1 | (x_2 | x_2); y_{14} = x_1 | x_2; y_{15} = 1 = x_1 | (x_1 | x_1).
\end{aligned}$$

Приклад 3.4. Довести рівносильність формул:

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad A &= (\overline{x_1} \rightarrow x_2) \rightarrow (\overline{x_1} x_2 \leftrightarrow (x_1 \oplus x_2)) \text{ та } B = (\overline{x_1} \overline{x_2} \rightarrow x_1) \rightarrow x_2; \\
\text{б)} \quad A &= (x_1 x_2 \vee (\overline{x_1} \rightarrow x_2 x_3)) \leftrightarrow ((\overline{x_1} \rightarrow \overline{x_2}) \rightarrow x_3) \quad \text{та} \\
B &= (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \oplus x_3).
\end{aligned}$$

Розв'язування. а)

$$\begin{aligned}
A &= (\overline{x_1} \rightarrow x_2) \rightarrow (\overline{x_1} x_2 \leftrightarrow (x_1 \oplus x_2)) = (x_1 \vee x_2) \rightarrow (\overline{x_1} x_2 \leftrightarrow (\overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2})) = \\
&= (x_1 \vee x_2) \rightarrow (\overline{\overline{x_1} x_2} \overline{\overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}} \vee \overline{x_1} x_2 (\overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2})) = \\
&= (x_1 \vee x_2) \rightarrow ((x_1 \vee \overline{x_2}) \overline{\overline{x_1} x_2} \overline{x_1 \overline{x_2} \vee x_1 x_2}) = \\
&= (x_1 \vee x_2) \rightarrow ((x_1 \vee \overline{x_2})(x_1 \vee \overline{x_2}) (\overline{x_1} \vee x_2) \vee \overline{x_1} x_2) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_2) = (x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1) = \\
&= (x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_2 \vee \bar{x}_1) = \bar{x}_2 \bar{x}_1 \vee (x_2 \vee \bar{x}_1) = \bar{x}_1 \vee x_2;
\end{aligned}$$

$$B = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2 = (x_1 x_2 \vee x_1) \rightarrow x_2 = x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2.$$

Як наслідок, $A = B$.

$$\begin{aligned}
\text{б)} \quad A &= (x_1 x_2 \vee (\bar{x}_1 \rightarrow x_2 x_3)) \leftrightarrow ((\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2) \rightarrow x_3) = (x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_2 x_3)) \leftrightarrow \\
&((x_1 \vee \bar{x}_2) \rightarrow x_3) = (x_1 \vee x_2 x_3) \leftrightarrow ((x_1 \vee \bar{x}_2) \vee x_3) = (x_1 \vee x_2 x_3) \leftrightarrow (\bar{x}_1 x_2 \vee x_3) = \\
&(\bar{x}_1 \vee x_2 x_3) (\bar{x}_1 x_2 \vee x_3) \vee (x_1 \vee x_2 x_3) (\bar{x}_1 x_2 \vee x_3) = \\
&\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee (x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3) = \\
&\bar{x}_1 (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) (x_1 \vee \bar{x}_2) \bar{x}_3 \vee (x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3) = \\
&\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee (x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3) = \\
&\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = \\
&\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \oplus x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3) = \\
&(\bar{x}_1 \vee x_2) (\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3) \vee (\bar{x}_1 \vee x_2) (x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3) = \\
&(\bar{x}_1 \vee x_2) \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 (x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2) (\bar{x}_2 \vee x_3) (x_2 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \\
&(\bar{x}_1 \vee x_2) (\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \\
&\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 = \\
&\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3.
\end{aligned}$$

Як наслідок, $A = B$.

4. Нормальні форми логічних формул

Означення. Булева функція $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *двоїстою* до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$. Позначка: f^* , а саме $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Приклад 4.1. Перевірити, чи є функція, що задана формулою A , двоїстою до функції, що задана формулою B :

а) $A = x \rightarrow y$; $B = \bar{x}y$;

б) $A = x \oplus y \oplus z$; $B = x \oplus y \oplus z$;

в) $A = xy \vee z$; $B = x(y \vee z)$;

г) $A = xy \oplus xz \oplus yz$; $B = xy \vee xz \vee yz$.

Розв'язування. Перевірка проводиться як таблично, так і аналітично.

а)

x	y	$\bar{x}$	$x \rightarrow y$	$\bar{x}y$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

$A = x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{\bar{x}y}$. Двоїстість доведено.

б)

x	y	z	$x \oplus y$	$x \oplus y \oplus z$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

$A = x \oplus y \oplus z = (\bar{x}y \vee x\bar{y}) \oplus z = \overline{\bar{x}y \vee x\bar{y}}z \vee (\bar{x}y \vee x\bar{y})\bar{z} = (\bar{x}y \vee x\bar{y})\bar{z} \vee \overline{\bar{x}y \vee x\bar{y}}z = \overline{\bar{x}y \vee x\bar{y}} \oplus \bar{z} = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y}} \oplus \bar{z} = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y}} \leftrightarrow \bar{z} = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z}};$

$A = x \oplus y \oplus z = \bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z} = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z}} = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y}} \leftrightarrow \bar{z} = \overline{\bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z}}.$

Двоїстість доведено.

в)

x	y	z	xy	$y \vee z$	$xy \vee z$	$x(y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

$A = xy \vee z = \overline{\overline{xy \vee z}} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}}$. Умова двоїстості не виконується.

г)

x	y	z	xy	xz	yz	$xy \oplus xz$	$xy \vee xz$	$xy \oplus xz \oplus yz$	$xy \vee xz \vee yz$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

$$\begin{aligned}
 A &= xy \oplus xz \oplus yz = \overline{xy} \leftrightarrow \overline{xz} \oplus yz = \overline{xy} \overline{xz} \vee xyxz \oplus yz = \\
 &= (\overline{x} \vee \overline{y}) (\overline{x} \vee \overline{z}) \vee xyxz \oplus yz = \overline{x} \vee \overline{x} \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \vee \overline{z} \vee xyxz \oplus yz = \overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \vee xyxz \oplus yz = \\
 &= \overline{z} \vee \overline{x} \vee yz \oplus yz = (\overline{z} \vee \overline{x} \vee yz) \overline{yz} \vee \overline{z} \vee \overline{x} \vee yz yz = \\
 &= (\overline{z} \vee \overline{x} \vee yz) (\overline{y} \vee \overline{z}) \vee \overline{z} \vee \overline{x} \vee yz yz = \overline{z} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{x} \overline{z} \vee (zy) \overline{xy} \overline{zy} = \overline{z} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{x} \overline{z}.
 \end{aligned}$$

Двоїстість доведено.

Диз'юнктивна (кон'юнктивна) нормальна форма (ДНФ, КНФ) – це диз'юнкція (кон'юнкція) скінченної кількості різних членів, кожен з яких є кон'юнкцією (диз'юнкцією) окремих змінних або їх заперечень, що входять до кожного члена не більше одного разу.

Формула зводиться до нормальної форми таким шляхом:

- 1) за допомогою законів де Моргана формула перетворюється так, щоб знаки заперечення стосувалися лише окремих змінних;
- 2) на основі властивості дистрибутивності формула зводиться до диз'юнкції кон'юнкцій або до кон'юнкції диз'юнкцій;
- 3) отриманні вирази скорочуються за рахунок використання законів поглинання та властивостей заперечення.

Якщо в кожному члені нормальної форми містяться всі змінні, то вона називається *досконалою нормальною формою* (ДДНФ, ДКНФ). Будь-яку змінну можна ввести, використовуючи властивості

$$\begin{aligned}
 x &= x \cdot 1 = x(y \vee \overline{y}) = xy \vee x\overline{y}, \\
 x &= x \vee 0 = x \vee y\overline{y} = (x \vee y)(x \vee \overline{y}).
 \end{aligned}$$

Рівносильність формул можна перевірити за таблицями істинності, але велика кількість змінних робить цю задачу занадто складною. Інший

Приклад 4.2. За допомогою зведення до ДДНФ довести рівносильність формул A та B :

6) $A = \bar{x}\bar{z} \vee xy \vee x\bar{z}$; $B = x(\bar{z} \vee yz) \vee \bar{x}\bar{z}$;

Розв'язування.

6)

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad A &= (x_1 x_2 \vee (\overline{x_1} \rightarrow x_2 x_3)) \leftrightarrow ((\overline{x_1} \rightarrow \overline{x_2}) \rightarrow x_3) = (x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_2 x_3)) \leftrightarrow \\ &((x_1 \vee \overline{x_2}) \rightarrow x_3) = (x_1 \vee x_2 x_3) \leftrightarrow ((\overline{x_1 \vee \overline{x_2}}) \vee x_3) = (x_1 \vee x_2 x_3) \leftrightarrow (\overline{x_1} x_2 \vee x_3) = \\ &\overline{(x_1 \vee x_2 x_3)} \overline{(\overline{x_1} x_2 \vee x_3)} \vee (x_1 \vee x_2 x_3) (\overline{x_1} x_2 \vee x_3) = \\ &\overline{x_1} \overline{x_2 x_3} \overline{\overline{x_1} x_2} \overline{x_3} \vee (x_1 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_2 x_3) = \\ &\overline{x_1} (\overline{x_2 \vee x_3}) (x_1 \vee \overline{x_2}) \overline{x_3} \vee (x_1 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_2 x_3) = \\ &\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee (x_1 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_2 x_3) = \\ &\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 = \\ &\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3; \end{aligned}$$

Як наслідок, $A = B$.

Розв'язування.

23

Для сукупності змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ вираз $\widetilde{x_1} \widetilde{x_2} \dots \widetilde{x_n}$ називають конституентою одиниці, а вираз $\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \dots \vee \widetilde{x_n}$ – конституентою нуля, де $\widetilde{x_i}$ означає x_i або $\overline{x_i}$. Такі конституенти одиниці (нуля) перетворюються на одиницю (нуль) тільки у разі одного відповідного набору значень змінних, який отримується, якщо всі змінні прирівняти до одиниці (нуля), а їх заперечення – до нуля (одиниці). Наприклад, конституенті одиниці $\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4$ відповідає набір 0011, а конституенті нуля $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ – набір 1000.

Правильним є й зворотне твердження, яке покладене в основу побудови формули будь-якої функції, що представлена таблицею істинності. Для цього треба записати диз'юнкції (кон'юнкції) конституент одиниці (нуля), що відповідають наборам значень змінних, де функція дорівнює одиниці (нулю).

Приклад 4.4. Побудувати ДДНФ та ДКНФ для функцій, що задані таблицею істинності. За можливості, скороти за допомогою тотожних перетворень.

x_1	0 0 0 0 1 1 1 1
x_2	0 0 1 1 0 0 1 1
x_3	0 1 0 1 0 1 0 1
y	1 1 1 1 0 0 1 0

Розв'язування.

$$y = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} = \overline{x_1} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} = \overline{x_1} \vee x_2 \overline{x_3};$$

$$y = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) = (\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) = \overline{x_1} \vee x_2 \overline{x_3}.$$

5. Алгебра Жегалкіна

Алгебра Жегалкіна – алгебра, яка будується на додаванні по модулю 2, кон'юнкції та 1. Її основні властивості:

- 1) комутативність $x + y = y + x$; $x y = y x$;
- 2) асоціативність $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x(y z) = (x y) z$;
- 3) дистрибутивність кон'юнкції відносно додавання $x(y + z) = x y + x z$ (дистрибутивність додавання відносно кон'юнкції не працює);

4) властивість констант $x \cdot 1 = x$; $x \cdot 0 = 0$; $x + 0 = x$.

Також для цієї алгебри працює закон приведення подібних $x + x = 0$ та закон ідемпотентності добутку $xx = x$.

За допомогою формул або таблиць істинності можна перевірити інші формули:

$$\bar{x} = 1 + x; \quad x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1 x_2; \quad x_1 + x_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2.$$

Приклад 5.1. Виразити через операції алгебри Жегалкіна такі функції:

а) $(x \rightarrow y)\bar{z}$; б) $\bar{x}y \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}$.

Розв'язування.

$$\text{а) } (x \rightarrow y)\bar{z} = (1 + x + xy)(1 + z) = 1 + x + xy + z + xz + xyz;$$

б)

$$\bar{x}y \vee yz \vee \bar{y}\bar{z} = \bar{x}y(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})yz \vee (x \vee \bar{x})\bar{y}\bar{z} = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} =$$

$$xyz + (1 + x)yz + (1 + x)y(1 + z) + x(1 + y)(1 + z)$$

$$+ (1 + x)(1 + y)(1 + z)$$

$$= xyz + yz + xyz + y + yz + xy + xyz + x + xz + xy + xyz$$

$$+ 1 + z + y + yz + x + xz + xy + xyz$$

$$= 1 + z + yz + xy + xyz.$$

Будь-яка булева функція може бути зведена до канонічного многочлена (*полінома Жегалкіна*), члени якого не містять числових коефіцієнтів і лінійні відносно будь-якої змінної. Для цього треба:

- 1) функцію звести до досконалої нормальної форми;
- 2) замінити всі знаки диз'юнкції знаками суми за модулем 2 (бо тільки одна елементарна кон'юнкція на кожному наборі перетворюється на одиницю, а решта дають нулі), заперечення змінних виразити через формулу $\bar{x} = 1 + x$;
- 3) розкрити дужки та використати закони $x + x = 0$ і $xx = x$.

Приклад 5.2. Знайти поліном Жегалкіна для функції $(x \leftarrow y)(x|y) + (x \leftrightarrow y)y$.

$$\text{Розв'язування. } (x \leftarrow y)(x|y) + (x \leftrightarrow y)y = \overline{x \rightarrow y}(\bar{x} \vee \bar{y}) +$$

$$(\bar{x}\bar{y} \vee xy)y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}(\bar{x} \vee \bar{y}) + xy = x\bar{y}(\bar{x} \vee \bar{y}) + xy = x\bar{y} + xy =$$

$$x(1 + y) + xy = x + xy + xy = x.$$

Безпосереднє використання формул булевих функцій в алгебрі Жегалкіна дає такий результат:

$$(x \leftarrow y)(x|y) + (x \leftrightarrow y)y = (x + xy)(1 + xy) + (1 + x + y)y = x + xy + xy + xuyu + y + xy + yu = x.$$

Приклад 5.3. Знайти поліном Жегалкіна за методом невизначених коефіцієнтів для функції $x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \downarrow \overline{x_2}$.

Розв'язування. Враховуючи пріоритет операцій та перетворення алгебри Жегалкіна, функція матиме вигляд:

$$x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \downarrow \overline{x_2} = x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} = x_1 \vee x_2 x_3 x_2 = x_1 \vee x_2 x_3 = x_1 + x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3.$$

Для використання методу невизначених коефіцієнтів побудуємо таблицю істинності

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_3}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3} \downarrow \overline{x_2}$	$x_2 \overline{x_3} \downarrow \overline{x_2}$	$x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \downarrow \overline{x_2}$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Тоді функція матиме вигляд $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \downarrow \overline{x_2} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_1 x_3 + a_6 x_2 x_3 + a_7 x_1 x_2 x_3$, де $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ – невизначені коефіцієнти, які знаходимо, підставляючи її значення на відповідних наборах значень змінних:

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0: a_0 = 0; \\ f(0, 0, 1) &= 0: a_3 = 0; \\ f(0, 1, 0) &= 0: a_2 = 0; \\ f(0, 1, 1) &= 1: a_6 = 1; \\ f(1, 0, 0) &= 1: a_1 = 1; \\ f(1, 0, 1) &= 1: 1 + a_5 = 1; a_5 = 0; \\ f(1, 1, 0) &= 1: 1 + a_4 = 1; a_4 = 0; \\ f(1, 1, 1) &= 1: 1 + 1 + a_7 = 1; a_7 = 1. \end{aligned}$$

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у поліном:

$$x_1 \vee x_2 \overline{x_3} \downarrow \overline{x_2} = x_1 + x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3.$$

6. Логічний висновок на базі алгебри висловлень

Алфавіт найпоширенішої формальної мови алгебри висловлювань складається з таких символів:

- 1) символи елементарних висловлювань та пропозиційних змінних: $a, b, c, \dots$ і $x, y, z, \dots$ (можливо, з індексами);
- 2) символи операцій: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$;
- 3) допоміжні символи – круглі дужки.

Формули алгебри висловлювань будуються за такими правилами:

- 1) усі елементарні висловлювання та пропозиційні змінні є формулами;
- 2) якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \rightarrow B)$ – також формули;
- 3) інших формул, ніж побудовані за правилами 1) та 2), немає.

Формула B є *логічним слідуванням* формули A , якщо формула B істинна на всіх наборах змінних, для яких формула A істинна.

Приклад 6.1. Розташувати наведені формули таким чином, щоб кожна з них була логічним висновком усіх попередніх: 1) $\neg a \leftrightarrow b$; 2) $a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$; 3) $a \wedge \neg b$; 4) $\neg a \rightarrow b$; 5) $a \wedge \neg(\neg b \vee a)$.

Розв'язування. Побудуємо таблиці істинності для наведених формул та розташуємо їх з урахуванням означення операції імплікації:

a	b	$a \wedge \neg(\neg b \vee a)$	$a \wedge \neg b$	$\neg a \leftrightarrow b$	$\neg a \rightarrow b$	$a \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$
0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Приклад 6.2. Перший засновок: «Якщо студент не знає математичної логіки, то він не зможе розв'язати логічну задачу». Визначити коректність логічного висновку за умови другого засновку:

а) «Студент розв'язав логічну задачу. Отже, він знає математичну логіку»;

б) «Студент знає математичну логіку. Отже, він зможе розв'язати логічну задачу»;

в) «Студент не знає математичної логіки. Отже, він не зможе розв'язати логічну задачу»;

г) «Студент не розв'язав логічну задачу. Отже, він не знає математичну логіку».

Розв'язування.

а) Введемо позначки: a – студент знає математичну логіку, b – студент може розв'язати логічну задачу. Тоді $\neg a \rightarrow \neg b, b \models a$.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b, b$	$\neg a \rightarrow \neg b, b \models a$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1

б) Введемо позначки: a – студент знає математичну логіку, b – студент може розв'язати логічну задачу. Тоді $\neg a \rightarrow \neg b, a \models b$.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b, a$	$\neg a \rightarrow \neg b, a \models b$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1

в) Введемо позначки: a – студент знає математичну логіку, b – студент може розв'язати логічну задачу. Тоді $\neg a \rightarrow \neg b, \neg a \models \neg b$.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b, \neg a$	$\neg a \rightarrow \neg b, \neg a \models \neg b$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1

г) Введемо позначки: a – студент знає математичну логіку, b – студент може розв'язати логічну задачу. Тоді $\neg a \rightarrow \neg b, \neg b \models \neg a$.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b, \neg b$	$\neg a \rightarrow \neg b, \neg b \models \neg a$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1

Аксиомами $A1 - A10$ числення висловлювань є такі формули:

- $A1. a \rightarrow (b \rightarrow a);$
 $A2. (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c));$
 $A3. (a \wedge b) \rightarrow a;$
 $A4. (a \wedge b) \rightarrow b;$
 $A5. (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge c)));$
 $A6. a \rightarrow (a \vee b);$
 $A7. b \rightarrow (a \vee b);$
 $A8. (a \rightarrow c) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c));$
 $A9. (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a);$
 $A10. \neg \neg a \rightarrow a.$

Правилами виведення є:

- 1) *правило підстановки*. Якщо A – вивідна формула (тавтологія), яка містить літеру a (тобто $A(a)$), то вивідною (тавтологією) є й формула $A(B)$, де B – довільна формула, що записується:

$$\frac{A(a)}{A(B)};$$

- 2) *правило висновку (modus ponens)*. Якщо A та $A \rightarrow B$ – вивідні формули (тавтології), то вивідною (тавтологією) є й формула B , що записують:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}.$$

Аксиоми числення висловлювань разом із правилами виведення повністю визначають поняття теореми числення висловлювань.

Під час доведення теорем будемо використовувати такі позначки правил:

$S_B^a A$ реалізує правило підстановки $\frac{A(a)}{A(B)}$,

а $MP(A, A \rightarrow B) = B$ реалізує правило висновку $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$.

Також під час доведення будемо спиратися на закон тотожності $a \vdash a$ та закон контрапозиції $a \rightarrow b \vdash \neg b \rightarrow \neg a$.

Приклад 6.3. Довести теорему:

- 1) $(a \wedge a) \rightarrow a$;
- 2) $a \rightarrow (a \wedge a)$;
- 3) $(a \vee a) \rightarrow a$;
- 4) $a \rightarrow (a \vee a)$;
- 5) $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge b))$;
- 6) $(b \rightarrow (a \vee c)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow (a \vee c))$;
- 7) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \vee a) \rightarrow b)$;
- 8) $(a \wedge b) \rightarrow (a \vee b)$;
- 9) $(a \vee b) \rightarrow (b \vee a)$;
- 10) $a \rightarrow ((a \vee b) \wedge a)$;
- 11) $(a \vee (a \wedge b)) \rightarrow a$.

Розв'язування.

$$1) (a \wedge a) \rightarrow a.$$

$$F1: S_a^b A3 = (a \wedge a) \rightarrow a$$

$$\vdash (a \wedge a) \rightarrow a.$$

$$2) a \rightarrow (a \wedge a).$$

$$F1: S_{a,a}^{b,c} A5 = (a \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge a)))$$

$$F2: MP(\text{закон тотожності}, F1) = ((a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge a)))$$

$$F3: MP(\text{закон тотожності}, F2) = a \rightarrow (a \wedge a)$$

$$\vdash a \rightarrow (a \wedge a).$$

$$3) (a \vee a) \rightarrow a.$$

$$F1: S_{a,a}^{b,c} A8 = (a \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow ((a \vee a) \rightarrow a))$$

$$F2: MP(\text{закон тотожності}, F1) = (a \rightarrow a) \rightarrow ((a \vee a) \rightarrow a)$$

$$F3: MP(\text{закон тотожності}, F2) = (a \vee a) \rightarrow a$$

$$\vdash (a \vee a) \rightarrow a.$$

$$4) a \rightarrow (a \vee a).$$

$$F1: S_a^b A6 = a \rightarrow (a \vee a)$$

$$\vdash a \rightarrow (a \vee a).$$

$$5) (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge b)).$$

$$F1: S_{a,b}^{b,c} A5 = (a \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge b)))$$

$$F2: MP(\text{закон тотожності}, F1) = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge b))$$

$\vdash (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (a \wedge b)).$

6) $(b \rightarrow (a \vee c)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow (a \vee c)).$

$F1: S_c^b A6 = a \rightarrow (a \vee c)$

$F2: S_{(a \vee c)}^c A8 = (a \rightarrow (a \vee c)) \rightarrow ((b \rightarrow (a \vee c)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow (a \vee c)))$

$F3: MP(F1, F2) = (b \rightarrow (a \vee c)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow (a \vee c))$

$\vdash (b \rightarrow (a \vee c)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow (a \vee c)).$

7) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \vee a) \rightarrow b).$

$F1: S_{b, a, b}^{a, b, c} A8 = (b \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow ((b \vee a) \rightarrow b))$

$F2: MP(\text{закон тотожності}, F1) = (a \rightarrow b) \rightarrow ((b \vee a) \rightarrow b)$

$\vdash (a \rightarrow b) \rightarrow ((b \vee a) \rightarrow b).$

8) $(a \wedge b) \rightarrow (a \vee b).$

$F1: S_{a \rightarrow (a \vee b), a \wedge b}^{a, b} A1 = (a \rightarrow (a \vee b)) \rightarrow (a \wedge b \rightarrow (a \rightarrow (a \vee b)))$

$F2: MP(A6, F1) = a \wedge b \rightarrow (a \rightarrow (a \vee b))$

$F3: S_{a \wedge b, a, a \vee b}^{a, b, c} A2 = ((a \wedge b) \rightarrow a) \rightarrow (((a \wedge b) \rightarrow (a \rightarrow (a \vee b))) \rightarrow ((a \wedge b) \rightarrow (a \vee b)))$

$F4: MP(A3, F3) = ((a \wedge b) \rightarrow (a \rightarrow (a \vee b))) \rightarrow ((a \wedge b) \rightarrow (a \vee b))$

$F5: MP(F2, F4) = (a \wedge b) \rightarrow (a \vee b)$

$\vdash (a \wedge b) \rightarrow (a \vee b).$

9) $(a \vee b) \rightarrow (b \vee a)$

$F1: S_{(b \vee a)}^c A8 = (a \rightarrow (b \vee a)) \rightarrow ((b \rightarrow (b \vee a)) \rightarrow ((b \vee a) \rightarrow (b \vee a)))$

$F2: S_{b, a}^{a, b} A6 = b \rightarrow (b \vee a)$

$F3: S_{b, a}^{a, b} A7 = a \rightarrow (b \vee a)$

$F4: MP(F3, F1) = (b \rightarrow (b \vee a)) \rightarrow ((b \vee a) \rightarrow (b \vee a))$

$F5: MP(F2, F4) = (b \vee a) \rightarrow (b \vee a)$

$\vdash (b \vee a) \rightarrow (b \vee a).$

10) $a \rightarrow ((a \vee b) \wedge a).$

$F1: S_{a \vee b, a}^{b, c} A5 = (a \rightarrow (a \vee b)) \rightarrow ((a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow ((a \vee b) \wedge a)))$

$F2: MP(A3, F1) = (a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow ((a \vee b) \wedge a))$

$F3: MP(\text{закон тотожності}, F2) = a \rightarrow ((a \vee b) \wedge a)$

$\vdash a \rightarrow ((a \vee b) \wedge a).$

11) $(a \vee (a \wedge b)) \rightarrow a.$

$F1: S_{a \wedge b, a}^{b, c} A8 = (a \rightarrow a) \rightarrow (((a \wedge b) \rightarrow a) \rightarrow (a \vee (a \wedge b)) \rightarrow a))$

$F2: MP(\text{закон тотожності}, F1) = ((a \wedge b) \rightarrow a) \rightarrow (a \vee (a \wedge b)) \rightarrow a$

$$F3: MP(A3, F2) = (a \vee (a \wedge b)) \rightarrow a$$

$$\vdash (a \vee (a \wedge b)) \rightarrow a.$$

Приклад 6.4. Довести теорему:

$$1) ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow b);$$

$$2) (a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \vee c));$$

$$3) (\neg a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow a);$$

$$4) (a \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow \neg a);$$

$$5) ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c));$$

$$6) (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)).$$

Розв'язування.

$$1) ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow b), \text{ тобто } (a \rightarrow b) \rightarrow a, (a \rightarrow b) \vdash b$$

$$F1: (a \rightarrow b) \rightarrow a$$

$$F2: a \rightarrow b$$

$$F3: MP(F2, F1) = a$$

$$F4: MP(F3, F2) = b$$

$$\vdash ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow b).$$

$$2) (a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \vee c)), \text{ тобто } a \rightarrow c, a \vdash b \vee c$$

$$F1: a \rightarrow c$$

$$F2: a$$

$$F3: MP(F2, F1) = c$$

$$F4: S_{b,c}^{a,b} A7 = c \rightarrow (b \vee c)$$

$$F5: MP(F4, F3) = b \vee c$$

$$\vdash (a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow (b \vee c)).$$

$$3) (\neg a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow a), \text{ тобто } \neg a \rightarrow b, \neg b \vdash a$$

$$\neg a \rightarrow b, \neg b \vdash a$$

$$F1: \neg a \rightarrow b$$

$$F2: \neg b$$

$$F3: S_{\neg a}^a A9 = (\neg a \rightarrow b) \rightarrow ((\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg \neg a)$$

$$F4: S_{\neg b, \neg a}^{a,b} A1 = \neg b \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b)$$

$$F5: MP(F1, F3) = (\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg \neg a$$

$$F6: MP(F2, F4) = \neg a \rightarrow \neg b$$

$$F7: MP(F6, F5) = \neg \neg a$$

$F8: MP(F7, A10) = a$

$\vdash (\neg a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow a).$

4) $(a \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow \neg a)$, тобто

$a \rightarrow \neg b, b \vdash \neg a$

$F1: a \rightarrow \neg b$

$F2: b$

$F3: S_{b,a}^{a,b} A1 = b \rightarrow (a \rightarrow b)$

$F4: MP(F2, F3) = a \rightarrow b$

$F5: MP(F4, A9) = (a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a$

$F7: MP(F1, F5) = \neg a$

$\vdash (a \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow \neg a).$

5) $((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c))$, тобто

$(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c), a, b \vdash c$

$F1: a$

$F2: b$

$F3: (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$

$F4: S_{b,a}^{a,b} A1 = b \rightarrow (a \rightarrow b)$

$F5: MP(F2, F4) = a \rightarrow b$

$F6: MP(F5, F3) = a \rightarrow c$

$F7: MP(F1, F6) = c$

$\vdash ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow (b \rightarrow c)).$

6) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$, тобто

$a \rightarrow (b \rightarrow c), a \rightarrow b, a \vdash c$

$F1: a$

$F2: a \rightarrow b$

$F3: a \rightarrow (b \rightarrow c)$

$F4: MP(F1, F2) = b$

$F5: MP(F1, F3) = b \rightarrow c$

$F6: MP(F4, F5) = c.$

Приклад 6.5. Довести правило:

1) $a \wedge \neg a \vdash b$;

2) $a \vee b, \neg a \vdash b$;

3) $(\neg a \vee \neg b) \vdash \neg(a \wedge b)$;

4) $\neg(a \wedge b) \vdash (\neg a \vee \neg b)$;

$$5) (\neg a \wedge \neg b) \vdash \neg(a \vee b).$$

Розв'язування.

$$1) a \wedge \neg a \vdash b.$$

$$F1: a \wedge \neg a$$

$$F2: S_{\neg a}^b A3 = (a \wedge \neg a) \rightarrow a$$

$$F3: S_{\neg a}^b A4 = (a \wedge \neg a) \rightarrow \neg a$$

$$F4: MP(F1, F2) = a$$

$$F5: MP(F1, F3) = \neg a$$

$$F6: S_{\neg b}^b A1 = a \rightarrow (\neg b \rightarrow a)$$

$$F7: S_{\neg a, \neg b}^{a, b} A1 = \neg a \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$$

$$F8: MP(F4, F6) = \neg b \rightarrow a$$

$$F9: MP(F5, F7) = \neg b \rightarrow \neg a$$

$$F10: S_{\neg b, a}^{a, b} A9 = (\neg b \rightarrow a) \rightarrow ((\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg \neg b)$$

$$F11: MP(F6, F10) = (\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow \neg \neg b$$

$$F12: MP(F9, F11) = \neg \neg b$$

$$F13: S_b^a A10 = \neg \neg b \rightarrow b$$

$$F14: MP(F12, F13) = b.$$

$$2) a \vee b, \neg a \vdash b.$$

$$F1: \neg a$$

$$F2: a \vee b$$

$$F3: S_{\neg a, \neg b}^{a, b} A1 = \neg a \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$$

$$F4: MP(F1, F3) = \neg b \rightarrow \neg a$$

$$F5: MP(\text{закон контрапозиції}, F4) = a \rightarrow b$$

$$F6: S_b^c A8 = (a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow b) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow b))$$

$$F7: MP(F5, F6) = (b \rightarrow b) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow b)$$

$$F8: MP(\text{закон тотожності}, F7) = (a \vee b) \rightarrow b$$

$$F9: MP(F2, F8) = b.$$

$$3) (\neg a \vee \neg b) \vdash \neg(a \wedge b).$$

$$F1: \neg a \vee \neg b$$

$$F2: MP(A3, \text{закон контрапозиції}) = \neg a \rightarrow \neg(a \wedge b)$$

$$F3: MP(A4, \text{закон контрапозиції}) = \neg b \rightarrow \neg(a \wedge b)$$

$$F4: S_{\neg a, \neg b, \neg(a \wedge b)}^{a, b, c} A8 = (\neg a \rightarrow \neg(a \wedge b)) \rightarrow ((\neg b \rightarrow \neg(a \wedge b)) \rightarrow ((\neg a \vee \neg b) \rightarrow \neg(a \wedge b)))$$

$$F5: MP(F2, F4) = (\neg b \rightarrow \neg(a \wedge b)) \rightarrow ((\neg a \vee \neg b) \rightarrow \neg(a \wedge b))$$

$F6: MP(F3, F5) = (\neg a \vee \neg b) \rightarrow \neg(a \wedge b)$
 $F7: MP(F1, F6) = \neg(a \wedge b).$
 4) $\neg(a \wedge b) \vdash (\neg a \vee \neg b).$
 $F1: \neg(a \wedge b)$
 $F2: S_{\neg a, \neg b}^{a, b} A6 = \neg a \rightarrow (\neg a \vee \neg b)$
 $F3: S_{\neg a, \neg b}^{a, b} A7 = \neg b \rightarrow (\neg a \vee \neg b)$
 $F4: MP(F2, \text{закон контрапозиції}) = \neg(\neg a \vee \neg b) \rightarrow a$
 $F5: MP(F3, \text{закон контрапозиції}) = \neg(\neg a \vee \neg b) \rightarrow b$
 $F6: S_{\neg(\neg a \vee \neg b), a, b}^{a, b, c} A5 = (\neg(\neg a \vee \neg b) \rightarrow a) \rightarrow ((\neg(\neg a \vee \neg b) \rightarrow b) \rightarrow (\neg(\neg a \vee \neg b) \rightarrow (a \wedge b)))$
 $F7: MP(F4, F6) = (\neg(\neg a \vee \neg b) \rightarrow b) \rightarrow (\neg(\neg a \vee \neg b) \rightarrow (a \wedge b))$
 $F8: MP(F5, F7) = \neg(\neg a \vee \neg b) \rightarrow (a \wedge b)$
 $F9: MP(F8, \text{закон контрапозиції}) = \neg(a \wedge b) \rightarrow (\neg a \vee \neg b)$
 $F10: MP(F1, F9) = \neg a \vee \neg b.$
 5) $(\neg a \wedge \neg b) \vdash \neg(a \vee b).$
 $F1: \neg a \wedge \neg b$
 $F2: S_{\neg a, \neg b}^{a, b} A3 = (\neg a \wedge \neg b) \rightarrow \neg a$
 $F3: S_{\neg a, \neg b}^{a, b} A4 = (\neg a \wedge \neg b) \rightarrow \neg b$
 $F4: MP(F2, \text{закон контрапозиції}) = a \rightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b)$
 $F5: MP(F3, \text{закон контрапозиції}) = b \rightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b)$
 $F6: S_{\neg(\neg a \wedge \neg b)}^c A8 = (a \rightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b)) \rightarrow ((b \rightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b)))$
 $F7: MP(F4, F6) = (b \rightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b))$
 $F8: MP(F5, F7) = (a \vee b) \rightarrow \neg(\neg a \wedge \neg b)$
 $F9: MP(F8, \text{закон контрапозиції}) = \neg a \wedge \neg b \rightarrow \neg(a \vee b)$
 $F10: MP(F1, F9) = \neg(a \vee b).$

7. Секвенції і секвенційні форми для логіки висловлень

Ідея *секвенційного числення* логіки висловлювань полягає у пошуку протиріччя. Розглянемо твердження $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$. За означенням воно буде істинним тоді і тільки тоді, коли для всіх значень змінних з істинності $A_1, A_2, \dots, A_n$ випливає істинність B . Доведення цього факту пропонується виконувати методом від супротивного. Припустимо, що твердження є

хибним, тобто існує набір значень змінних такий, що $A_1, A_2, \dots, A_n$ є істинними, а B – хибним. Якщо у процесі перетворень отримаємо суперечність (якась формула буде одночасно істинною та хибною), то припущення буде спростованим, а твердження $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ – істинним. Більш загальний вигляд наслідкового твердження – $A_1, A_2, \dots, A_n \models B_1, B_2, \dots, B_m$ або для секвенційних методів – $A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_m$, які називаються *секвенціями*.

Секвенційне доведення може бути представлено у вигляді дерева секвенцій (корінь – остання операція, в індексах – значення формул, жирним шрифтом виділені формули, відносно яких відбувається утворення нових гілок, знак «X» означає замкнену секвенцію (наявність протиріччя), якщо всі секвенції замкнені, то доведення від супротивного виконано, знак «!» означає відсутність протиріччя щодо початкового твердження).

Приклад 7.1. Визначити, чи є правильною наслідковість з використанням секвенційного числення:

- а) $((a \vee b) \rightarrow c) \rightarrow ((a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c))$;
- б) $(a \rightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow a)$;
- в) $(a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (b \leftrightarrow a)$;
- г) $(a \rightarrow b)(c \rightarrow d) \rightarrow ((a \vee c) \rightarrow (b \vee d))$;
- д) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((d \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (d \rightarrow c)))$;
- е) $((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d)) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow d))$;
- ж) $\neg((a \rightarrow b) \rightarrow (a \neg b \rightarrow b))$;
- з) $(a \vee \neg a) \rightarrow b \neg b$.

Розв'язування.

- а) $((a \vee b) \rightarrow c) \rightarrow ((a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c))$.

$(a \vee b) \rightarrow c)_{(1)}, ((a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c))_{(0)}$		
$(a \vee b) \rightarrow c)_{(1)}, (a \rightarrow c)_{(0)}, (b \rightarrow c)_{(0)}$		
$(a \vee b) \rightarrow c)_{(1)}, a_{(1)}, b_{(1)}, c_{(0)}$		
$(a \vee b)_{(1)}, c_{(1)}, c_{(0)}$	$(a \vee b)_{(0)}, a_{(1)}, b_{(1)}, c_{(0)}$	$(a \vee b)_{(0)}, a_{(1)}, b_{(1)}, c_{(0)}, c_{(1)}$
X	$a_{(0)}, b_{(0)}, a_{(1)}, b_{(1)}, c_{(0)}$	X
X		

Всі секвенції замкнені. Отже, формула є тавтологією.

- б) $(a \rightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow a)$.

$$\frac{\frac{(a \rightarrow b)_{(1)}, (b \rightarrow a)_{(0)}}{(a \rightarrow b)_{(1)}, b_{(1)}, a_{(0)}}}{\frac{b_{(0)}, b_{(1)}}{\times} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}, a_{(0)}}{\times} \quad \frac{b_{(1)}, a_{(0)}}{!}}$$

Одна з секвенцій не є замкненою ($b = 1, a = 0$ контрприклад). Отже, формула є нейтральною.

в) $(a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (b \leftrightarrow a)$.

$$\frac{(a \rightarrow (a \rightarrow b))_{(1)}, (b \leftrightarrow a)_{(0)}}{\frac{(a \rightarrow (a \rightarrow b))_{(1)}, a_{(0)}, b_{(1)}}{a_{(1)}, b_{(1)}, a_{(0)} \quad \frac{a_{(0)}, b_{(1)}}{!} \quad \frac{a_{(0)}, b_{(0)}, b_{(1)}}{\times}} \quad \frac{(a \rightarrow (a \rightarrow b))_{(1)}, a_{(1)}, b_{(0)}}{a_{(1)}, b_{(1)}, b_{(0)} \quad \frac{a_{(0)}, b_{(1)}, b_{(0)}}{\times} \quad \frac{a_{(0)}, b_{(0)}, a_{(1)}}{\times}}}{\frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times}}$$

Одна з секвенцій не є замкненою ($b = 1, a = 0$ контрприклад). Отже, формула є нейтральною.

г) $(a \rightarrow b)(c \rightarrow d) \rightarrow ((a \vee c) \rightarrow (b \vee d))$.

$$\frac{\frac{(a \rightarrow b)(c \rightarrow d)_{(1)}, ((a \vee c) \rightarrow (b \vee d))_{(0)}}{(a \rightarrow b)_{(1)}, (c \rightarrow d)_{(1)}, (a \vee c)_{(1)}, (b \vee d)_{(0)}}}{\frac{(a \rightarrow b)_{(1)}, (c \rightarrow d)_{(1)}, (a \vee c)_{(1)}, b_{(0)}, d_{(0)}}{b_{(1)}, b_{(0)}, d_{(0)} \quad \frac{a_{(0)}, (c \rightarrow d)_{(1)}, (a \vee c)_{(1)}, b_{(0)}, d_{(0)}}{d_{(1)}, d_{(0)} \quad \frac{a_{(0)}, c_{(0)}, (a \vee c)_{(1)}, b_{(0)}, d_{(0)}}{a_{(0)}, a_{(1)} \quad c_{(0)}, c_{(1)}}}}{\frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times}}$$

Всі секвенції замкнені. Отже, формула є тавтологією.

д) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((d \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (d \rightarrow c)))$.

$$\frac{\frac{(a \rightarrow (b \rightarrow c))_{(1)}, ((d \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow (d \rightarrow c)))_{(0)}}{(a \rightarrow (b \rightarrow c))_{(1)}, (d \rightarrow b)_{(1)}, (a \rightarrow (d \rightarrow c))_{(0)}}}{\frac{(a \rightarrow (b \rightarrow c))_{(1)}, (d \rightarrow b)_{(1)}, a_{(1)}, (d \rightarrow c)_{(0)}}{a_{(0)}, a_{(1)} \quad \frac{a_{(1)}, (b \rightarrow c)_{(1)}, (d \rightarrow b)_{(1)}, (d \rightarrow c)_{(0)}}{a_{(1)}, (b \rightarrow c)_{(1)}, (d \rightarrow b)_{(1)}, d_{(1)}, c_{(0)}}}}{\frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times} \quad \frac{\times}{\times}}$$

Всі секвенції замкнені. Отже, формула є тавтологією.

е) $((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d)) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow d))$.

$$\begin{array}{c}
((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d))_{(1)}, ((a \rightarrow c) \rightarrow (b \rightarrow d))_{(0)} \\
\hline
((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d))_{(1)}, (a \rightarrow c)_{(1)}, (b \rightarrow d)_{(0)} \\
\hline
((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d))_{(1)}, (a \rightarrow c)_{(1)}, b_{(1)}, d_{(0)} \\
\hline
(a \rightarrow b)_{(0)}, (a \rightarrow c)_{(1)}, b_{(1)}, d_{(0)} \quad (a \rightarrow b)_{(1)}, (c \rightarrow d)_{(1)}, (a \rightarrow c)_{(1)}, b_{(1)}, d_{(0)} \\
\hline
\frac{a_{(1)}, b_{(0)}, b_{(1)}}{\times} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}, (c \rightarrow d)_{(1)}, (a \rightarrow c)_{(1)}, d_{(0)}}{a_{(1)}, a_{(0)} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}, (c \rightarrow d)_{(1)}, c_{(1)}, d_{(0)}}{\times} \quad \frac{a_{(0)}, b_{(0)}, b_{(1)}}{\times} \\
\hline
\frac{c_{(0)}, c_{(1)}}{\times} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}, c_{(0)}, c_{(1)}, d_{(0)}}{\times}
\end{array}$$

Всі секвенції замкнені. Отже, формула є тавтологією.

ж) $\neg((a \rightarrow b) \rightarrow (a \neg b \rightarrow b))$.

$$\begin{array}{c}
((a \rightarrow b) \rightarrow (a \neg b \rightarrow b))_{(1)} \\
\hline
(a \rightarrow b)_{(0)} \quad (a \rightarrow b)_{(1)}, (a \neg b \rightarrow b)_{(1)} \\
\hline
\frac{a_{(1)}, b_{(0)}}{!} \quad \frac{a_{(0)}, (a \neg b \rightarrow b)_{(1)}}{a_{(0)}, (a \neg b)_{(0)} \quad \frac{a_{(0)}, (a \neg b)_{(1)}, b_{(1)}}{a_{(0)}, a_{(1)}, b_{(0)}, b_{(1)}} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}, (a \neg b \rightarrow b)_{(1)}}{a_{(1)}, b_{(1)}, (a \neg b)_{(0)} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}, (a \neg b)_{(1)}}{a_{(1)}, a_{(0)} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}}{!} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}, b_{(0)}}{\times} \\
\hline
\frac{a_{(0)}, b_{(0)}}{!} \quad \frac{a_{(0)}, b_{(1)}}{!} \quad \frac{a_{(0)}, a_{(1)}, b_{(0)}, b_{(1)}}{\times} \quad \frac{a_{(1)}, a_{(0)}}{\times} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}}{!} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(1)}, b_{(0)}}{\times}
\end{array}$$

Чотири секвенції не є замкненими. Отже, формула є нейтральною.

з) $(a \vee \neg a) \rightarrow b \neg b$.

$$\begin{array}{c}
(a \vee \neg a)_{(1)}, (b \neg b)_{(0)} \\
\hline
(a \vee \neg a)_{(1)}, b_{(1)} \quad (a \vee \neg a)_{(1)}, b_{(0)} \\
\hline
\frac{a_{(1)}, b_{(1)}}{!} \quad \frac{a_{(0)}, b_{(1)}}{!} \quad \frac{a_{(1)}, b_{(0)}}{!} \quad \frac{a_{(0)}, b_{(0)}}{!}
\end{array}$$

Всі секвенції не є замкненими. Отже, формула є суперечністю.

8. Логіка предикатів. Квантори

Предикатом n -місним $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$ називається довільна функція виду $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow B$, де $B = \{0, 1\}$ – булевий алфавіт, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – предметні змінні, або терми предиката P .

З елементарних предикатів та логічних операцій можна будувати складні предикати або *предикатні формули*.

Приклад 8.1. Побудувати таблицю одномісного предиката « x – націло ділиться на 2» на множині $M = \{1, 2, \dots, 10\}$.

Розв'язування.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Приклад 8.2. Побудувати таблицю двомісного предиката $\langle \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} < 4 \rangle$, де $x, y \in M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Розв'язування.

$x \backslash y$	-2	-1	0	1	2
-2	0	0	0	0	0
-1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0

Квантор загальності – $\forall$ (перевернута перша буква слова «all»).
Висловлювання $\forall x P(x)$ читають: «для всіх x виконується $P(x)$ ».

Квантор існування – $\exists$ (розвернута перша буква слова «exist»).
Висловлювання $\exists x P(x)$ читають: «існує такий x , що $P(x)$ має місце».

Означення формули логіки предикатів:

- 1) Усі предикати $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множині M є формулами (елементарними).
- 2) Якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \rightarrow B), (A \sim B)$ – також формули.
- 3) Якщо A – формула, а x – вільна змінна в A , то $(\forall x A)$ і $(\exists x A)$ – також формули.
- 4) Інших формул, ніж побудовані за правилами 1) – 3), немає.

Заради зручності скорочується кількість дужок за наступними правилами:

а) зберігаються усі правила скорочення кількості дужок з алгебри висловлювань;

б) відкидаються зовнішні дужки;

в) квантори мають більший пріоритет, ніж логічні операції;

г) не вказують дужки області дії квантора, якщо це не викликає протиріччя;

г) не пишуть дужки між кванторами, які слідують один за одним, при цьому такі кванторні операції виконуються справа наліво.

Приклад 8.3. Довести істинність формул:

а) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$;

б) $(\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \sim \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$.

Розв'язування.

а) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$.

Якщо ліва частина істинна, то існує хоча б одне значення a з предметної області M , яке перетворює кон'юнкція $A(x) \wedge B(x)$ у вірне твердження, а це означає, що істинними будуть $A(a)$ та $B(a)$ одночасно, тобто твердження $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ також істинне. Якщо зліва хиба, то це означає, що немає жодного значення x з предметної області M , яке перетворює кон'юнкція $A(x) \wedge B(x)$ в істину, тобто при якихось значеннях x $A = 0$, при якихось значеннях x $B = 0$, або разом. В той час як справа $\exists x A(x)$ та $\exists x B(x)$ при різних значеннях x можуть бути й 1, тобто знак імплікації неможна замінити на знак рівності.

б) $(\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \sim \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$.

Якщо $B(x)$ є істинним хоча б в одній з точок предметної області M , то ліва та права частини еквіваленції будуть рівними 1(істинна з будь-чого), тобто формула істинна. Якщо $B(x)$ є хибою в усій предметній області M , то все залежить від $A(x)$. При істинному $A(x)$ в кожній точці області M ліва та права частини еквіваленції будуть рівними 0, тобто формула істинна. Якщо $A(x)$ є хибним хоча б в одній з точок предметної області M , то ліва та права частини еквіваленції будуть рівними 1, тобто формула істинна.

Числення предикатів будується за класичною схемою побудови формальних теорій:

1) Алфавіт складається з предметних змінних $x_1, x_2, \dots$, предметних констант $a_1, a_2, \dots$, предикатних букв $P_1^1, P_2^1, \dots, P_k^j, \dots$, функціональних букв $f_1^1, f_2^1, \dots, f_k^j, \dots$ (нижні індекси – номери, верхні – кількість аргументів), кванторів $\forall, \exists$ та розділових знаків (дужки, кома).

2) Формули.

3) Аксиоми: аксиоми довільного числення висловлювань (наприклад, $A1 - A10$) та предикатні аксиоми $P1. \forall x F(x) \rightarrow F(y)$; $P2. F(y) \rightarrow \exists x F(x)$. Формула $F(y)$ отримується з $F(x)$ заміною всіх вільних входжень змінної x на y .

4) Правила виведення:

4.1) правило висновку;

4.2) правило узагальнення (введення квантора $\forall$), тобто з $B \rightarrow A(x)$ виводиться $B \rightarrow \forall x A(x)$;

4.3) правило введення квантора $\exists$, тобто з $A(x) \rightarrow B$ виводиться $\exists x A(x) \rightarrow B$.

Формула B є логічним наслідком формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, тобто $A_1, A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$, якщо для кожної предметної області і для кожного значення формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ в цих областях формула B істинна за умови, що всі формули $A_1, A_2, \dots, A_n$ істинні. При цьому для всіх вільних входжень деякої змінної x в формули $A_1, A_2, \dots, A_n$ обирається одне й те ж саме значення з предметної області.

Приклад 8.4. Користуючись правилами логічного виводу, довести:

1) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x)), \exists x (P(x) \wedge S(x)) \Rightarrow \exists x (R(x) \wedge S(x))$;

2) $\exists x (P(x) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow R(x, y))), \forall x (P(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow \neg R(x, y))) \Rightarrow \forall x (Q(x) \wedge \neg S(x))$.

Розв'язування.

1) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x)), \exists x (P(x) \wedge S(x)) \Rightarrow \exists x (R(x) \wedge S(x))$.

Використаємо теорему дедукції. З другої послідовності $\exists x (P(x) \wedge S(x))$ випливає, що $P(a) \wedge S(a) = 1$ (правило екзистенціальної конкретизації), тобто $P(a) = 1, S(a) = 1$. З першої послідовності $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x) \wedge R(x))$ випливає, що $P(a) \rightarrow Q(a) \wedge R(a) = 1$ (правило універсальної конкретизації, аксіома P1), тоді з $P(a) = 1$ та $P(a) \rightarrow Q(a) \wedge R(a) = 1$ маємо $Q(a) \wedge R(a) = 1$, тобто $Q(a) = 1, R(a) = 1$. Тоді з $S(a) = 1$ та $R(a) = 1$ отримаємо $S(a) \wedge R(a) = 1$, а звідси $\exists x (R(x) \wedge S(x))$ (правило екзистенціального узагальнення, аксіома P2).

2) $\exists x (P(x) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow R(x, y))), \forall x (P(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow \neg R(x, y))) \Rightarrow \forall x (Q(x) \wedge \neg S(x))$.

Використаємо теорему дедукції. З першої послідовності $\exists x (P(x) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow R(x, y)))$ випливає, що $P(a) \wedge \forall y (Q(y) \rightarrow R(a, y)) = 1$ (правило екзистенціальної конкретизації), тобто $P(a) = 1$ та $\forall y (Q(y) \rightarrow R(a, y)) = 1$ (означення кон'юнкції), з $\forall y (Q(y) \rightarrow R(a, y)) = 1$ маємо $Q(x) \rightarrow R(a, x) = 1$ (правило універсальної конкретизації). З другої послідовності $\forall x (P(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow \neg R(x, y)))$ випливає $P(a) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow \neg R(a, y)) = 1$.

$\neg R(a, y)) = 1$ (правило універсальної конкретизації, аксіома $P1$), а з $P(a) = 1$ слідує, що $\forall y (S(y) \rightarrow \neg R(a, y)) = 1$. Тоді $S(x) \rightarrow \neg R(a, x) = 1$ (правило універсальної конкретизації, аксіома $P1$), а $R(a, x) \rightarrow \neg S(x) = 1$ (правило контрапозиції). В результаті, з $Q(x) \rightarrow R(a, x) = 1$ та $R(a, x) \rightarrow \neg S(x) = 1$ маємо $Q(x) \rightarrow \neg S(x) = 1$, що означає істинність $\forall x (Q(x) \rightarrow \neg S(x))$ (правило універсального узагальнення введення квантора $\forall$).

9. Варіанти завдань

1. Перевести числа десяткової системи числення у двійкову, вісімкову та шістнадцяткову. Зробити перевірку. Знайти їх суму, різницю і добуток в двійковій системі числення. Зробити перевірку.

№	Завдання	№	Завдання	№	Завдання
1.	32,64; 21,3	11.	92,64; 31,4	21.	53,62; 22,5
2.	33,61; 11,3	12.	52,64; 21,5	22.	72,64; 21,6
3.	52,64; 21,4	13.	74,66; 35,3	23.	42,68; 22,5
4.	32,84; 28,3	14.	62,64; 21,9	24.	52,64; 21,7
5.	72,64; 31,3	15.	72,94; 31,6	25.	92,68; 51,5
6.	38,24; 21,1	16.	82,64; 21,3	26.	32,67; 18,5
7.	72,44; 21,3	17.	72,64; 21,6	27.	52,64; 21,3
8.	82,64; 27,3	18.	92,65; 31,4	28.	82,64; 41,5
9.	92,64; 51,3	19.	62,64; 41,1	29.	43,64; 24,9
10.	42,64; 11,9	20.	82,63; 21,7	30.	62,64; 31,1

2. Прибрати зайві дужки. Виразити формули через операції заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції.

№	Завдання	№	Завдання	№	Завдання
1.	$((x \downarrow y) \leftrightarrow (\bar{x}z))$	11.	$((x\bar{z}) \downarrow (y \mid x))$	21.	$((x \leftrightarrow \bar{y})z) \downarrow y$
2.	$((x \downarrow \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x}z))$	12.	$(x \leftrightarrow (y \mid (y\bar{z})))$	22.	$((x \mid \bar{z}) \bar{y}) \vee z$
3.	$(x \leftrightarrow ((z \mid \bar{y})x))$	13.	$((yz) \rightarrow x) \leftrightarrow \bar{y}$	23.	$(\bar{y} \vee (x(z \downarrow y)))$

4.	$((x y) \leftrightarrow (\bar{y}z))$	14.	$((\bar{x}y) \rightarrow (\bar{z} \bar{y}))$	24.	$((yx) \rightarrow (y \bar{z}))$
5.	$((\bar{x} \vee \bar{y}) \rightarrow z)$	15.	$(x \rightarrow (y (\bar{y}\bar{z})))$	25.	$(z \downarrow (x \vee (\bar{y}\bar{z})))$
6.	$(x \leftrightarrow (y \rightarrow (\bar{y}z)))$	16.	$(x \rightarrow ((y \downarrow x)\bar{z}))$	26.	$((x \leftrightarrow \bar{y})(z y))$
7.	$((x \downarrow y) \rightarrow (\bar{x}z))$	17.	$(x \leftrightarrow (y \downarrow (\bar{x}\bar{z})))$	27.	$((x \downarrow (\bar{y}z)) \leftrightarrow y)$
8.	$((\bar{x}y) \leftrightarrow (z \bar{y}))$	18.	$((\bar{y}\bar{z}) \vee (x \downarrow y))$	28.	$((x (\bar{y}\bar{z})) \rightarrow y)$
9.	$((x y) \rightarrow (y\bar{z}))$	19.	$((x \vee (y\bar{x})) \rightarrow \bar{z})$	29.	$((z (\bar{x} \vee \bar{y})) \downarrow y)$
10.	$((x \bar{y}) \leftrightarrow (\bar{x} z))$	20.	$((z (\bar{x} \vee \bar{y})) \downarrow z)$	30.	$((z(x \leftrightarrow y)) \vee z)$

3. Виразити формули через операції заперечення та диз'юнкції (непарні варіанти) і операції заперечення та кон'юнкції (парні варіанти).

№	Завдання
1.	$((a c) (d \leftrightarrow c)) \rightarrow ((c \vee b)(a \rightarrow d))$
2.	$(a \rightarrow d) ((c \rightarrow b) \vee (d \downarrow b))$
3.	$(c \leftrightarrow d) ((\bar{a} \downarrow \bar{b}) \rightarrow (ab))$
4.	$((ab) (a \downarrow b)) \vee (c \rightarrow d)$
5.	$((a c) \rightarrow ad) \vee ((bc) \downarrow (bd))$
6.	$((a \vee b) (d \rightarrow b)) \rightarrow (cd \vee (a\bar{c}))$
7.	$(ad \vee (a \leftrightarrow d))(bc \downarrow (c \vee b))$
8.	$(a \vee d)(b \vee c)(a \rightarrow d)(b c)$
9.	$((c \vee d) (a \rightarrow c)) \vee \bar{b}\bar{d} \vee ab$
10.	$\overline{(a b)} \vee (\bar{b} \rightarrow c) \vee (c \leftrightarrow d)$
11.	$((c \rightarrow b)(d \downarrow c))(ab \vee ad)$
12.	$(ac \downarrow (a \leftrightarrow c))(b \downarrow d)$
13.	$(a \vee b) \downarrow ((a c) \downarrow (b \vee d))$
14.	$(ab \rightarrow a) \vee (d(b \vee c))$
15.	$a(b \vee c) \rightarrow (ad \vee c)$
16.	$(c \rightarrow ad) \rightarrow ((\overline{b \vee c}) \downarrow a)$

17.	$(\bar{a} \rightarrow \bar{d}) \mid (bc \rightarrow (a \vee c))$
18.	$((a \vee d) \mid (c \rightarrow \bar{a})) \rightarrow (\bar{b} \vee \bar{c})$
19.	$(a \rightarrow b) \rightarrow (a(\bar{b} \vee cd))$
20.	$(a \vee \bar{d}\bar{b})(\bar{a}(b \rightarrow d) \vee c) \vee (c \rightarrow a)$
21.	$(\bar{d}\bar{b} \vee ab \vee \bar{d}\bar{c} \vee ac)(\bar{b} \rightarrow a)$
22.	$(c \rightarrow a)(a \mid b)(b \rightarrow c)(b \vee c)$
23.	$ac \vee ((d \mid \bar{a})(\bar{d} \rightarrow b)) \vee ac$
24.	$((\bar{b} \vee c)(a \vee b)) \vee (\bar{d}\bar{c}) \vee ((\bar{b}\bar{a}) \rightarrow c)$
25.	$(a \vee (c \rightarrow b))(\bar{c} \vee \bar{d} \vee cd)(\bar{d}\bar{c} \mid d)$
26.	$((\bar{b} \vee \bar{d})(a \vee \bar{c})(\bar{c} \vee d)) \vee ((b \rightarrow c)(\bar{a} \rightarrow d))$
27.	$(c \rightarrow a)(\bar{a}\bar{d} \vee bd \vee \bar{a}\bar{d})(a \vee c)$
28.	$(dc \vee \bar{d}\bar{b} \vee cb)(\bar{d}\bar{b} \vee cb)(a \vee \bar{d})$
29.	$(\bar{c}\bar{d} \vee bc)(a \vee \bar{d})(\bar{c} \rightarrow b)d \vee cb$
30.	$(a \rightarrow b)b\bar{c}\bar{d} \vee ab\bar{c}\bar{d} \vee b \vee \bar{c} \vee \bar{d}$

4. Встановити еквівалентність формул за допомогою таблиць істинності та за допомогою формул перетворень.

№	Завдання
1.	$(a \vee \bar{d})(b \vee \bar{c})(a \oplus d) = ((c \vee d) \mid (a \rightarrow c)) \vee b\bar{d}$
2.	$\overline{ad \vee (a \leftrightarrow d)}(\bar{b}\bar{c} \downarrow (\bar{c} \oplus b)) = ((a \vee b)(d \rightarrow b)) \rightarrow (cd \vee (\bar{a}\bar{c}))$
3.	$(a \mid c) \wedge ((bc) \downarrow (b\bar{d})) = ((ab) \mid (a \oplus b)) \vee (\bar{c} \rightarrow \bar{d})$
4.	$((a \rightarrow d) \mid (a \rightarrow c)) \downarrow (c \rightarrow b) = ((c \vee d) \mid (b \leftrightarrow d)) \mid (\bar{a} \oplus \bar{b})$
5.	$(b \downarrow a)(c \rightarrow d)(\bar{b}\bar{d}) = (b \leftrightarrow c) \rightarrow ((a \oplus d)(a \rightarrow d))$
6.	$(\bar{a}\bar{c} \downarrow (a \leftrightarrow c))(\bar{b} \downarrow \bar{d}) = ((\bar{c} \rightarrow b)(d \rightarrow a)) \vee ad$
7.	$ad \mid ((\bar{a}\bar{c}) \downarrow (\bar{b}\bar{c})) = (\bar{a} \oplus \bar{b}) \rightarrow ab \downarrow (\bar{c} \leftrightarrow \bar{d})$

8.	$\overline{(a \downarrow b)} ((\overline{cd}) \downarrow (c \leftrightarrow d)) = ((a \vee d)(b \mid d)) \rightarrow (c \rightarrow a)$
9.	$(a \downarrow b) \downarrow \overline{(d \rightarrow a) \rightarrow cd} = (a \oplus \overline{c}) \vee ((\overline{bd}) \downarrow (b \leftrightarrow d))$
10.	$(a \leftrightarrow \overline{b}) \mid ((\overline{c} \oplus \overline{d}) \rightarrow (\overline{cd})) = (a \rightarrow \overline{d}) \downarrow ((\overline{b} \mid \overline{c}) \mid (\overline{c} \rightarrow a))$
11.	$\overline{(c \downarrow \overline{b}) \vee (c \oplus \overline{b})} \downarrow (\overline{d} \leftrightarrow \overline{a}) = ((d \vee \overline{b})(d \vee c)) \rightarrow (\overline{b} \downarrow \overline{a})$
12.	$((\overline{bd}) \downarrow (\overline{bc})) \overline{(d \rightarrow a)} = ((\overline{c} \leftrightarrow \overline{d})) \rightarrow ((a \oplus b)(b \rightarrow a))$
13.	$(a \rightarrow c) \downarrow ((b \rightarrow d) \mid (b \rightarrow c)) = ((c \rightarrow d) \mid (c \oplus d)) \mid (a \leftrightarrow b)$
14.	$((a \downarrow b) \downarrow (c \downarrow b)) \overline{(d \rightarrow a)} = (a \oplus c) \vee ((\overline{bd}) \downarrow (b \leftrightarrow d))$
15.	$\overline{(\overline{ad} \vee (a \leftrightarrow d))} \downarrow (\overline{b \leftrightarrow c}) = (a \mid b) \rightarrow ((c \vee d) \mid (a \rightarrow c))$
16.	$(b \oplus c)(b \downarrow c) \downarrow ((\overline{a} \leftrightarrow \overline{d}) = ((b \downarrow d) \downarrow (c \downarrow d)) \mid (\overline{a}b)$
17.	$(a\overline{c} ((\overline{bd}) \downarrow (b \leftrightarrow d))) = (c \rightarrow b) \rightarrow (a\overline{d} \vee cd)$
18.	$((\overline{a \mid b}) (\overline{a \oplus b})) \vee (c\overline{d}) = (b \downarrow d) ((\overline{a \rightarrow c}) (\overline{bc}))$
19.	$((a \rightarrow b) \rightarrow (\overline{c} \rightarrow b)) \downarrow (c \vee d) = ((\overline{c} \mid a) \mid (c \oplus a)) \mid (d \leftrightarrow b)$
20.	$\overline{(a \vee \overline{b} (\overline{a \oplus b}))} \vee ((\overline{cd}) \downarrow (c \leftrightarrow d)) = ((\overline{ac}) \downarrow (\overline{bc}))(b \downarrow d)$
21.	$\overline{(a \oplus b) \rightarrow ((\overline{dc}) \downarrow (d \leftrightarrow c))} = ((a \rightarrow c)(b \rightarrow c)) \rightarrow (b \mid d)$
22.	$(a \oplus b) \downarrow ((c \leftrightarrow d) \downarrow (\overline{cd})) = ((a\overline{c}) \downarrow (b\overline{c})) \mid (a \downarrow d)$
23.	$\overline{(a \downarrow b)(\overline{c \rightarrow d})} \downarrow (c \leftrightarrow d) = ((c \rightarrow a)(c \oplus b)) \vee (b \downarrow d)$
24.	$(ac) \downarrow ((\overline{a \mid d}) \rightarrow \overline{bd}) = (a \mid b) \rightarrow ((c \oplus d)(d \rightarrow c))$
25.	$((a \downarrow b) \rightarrow (c \vee b)) \vee (c \leftrightarrow d) = d \rightarrow (b \vee c) \mid \overline{a}$
26.	$((a \mid b) \rightarrow (c \downarrow b)) \vee (c \leftrightarrow d) = d \rightarrow (b \vee \overline{c}) \vee \overline{(\overline{da})}$
27.	$(a \vee b \vee d) \leftrightarrow (abc) = (c \rightarrow a)(b \downarrow d)(a \rightarrow b)$
28.	$(a \mid (b \mid c)) \oplus (d \mid (a \downarrow c)) = (a \rightarrow (b \vee c))(c \rightarrow (a \vee d))$
29.	$((a \vee d) \mid (\overline{a \leftrightarrow b})) = ((\overline{a} \downarrow \overline{b}) \rightarrow (\overline{ad}))$
30.	$((a \leftrightarrow c) \downarrow (d \mid b)) = (\overline{a \oplus b}) \rightarrow \overline{\overline{cd} \vee a\overline{b}}$

5. Знайти ДНФ, ДДНФ, КНФ, ДКНФ функції.

№	Завдання
1.	$((a c) (d \leftrightarrow c)) \rightarrow ((c \vee b)(a \rightarrow d))$
2.	$(a \rightarrow d) ((c \rightarrow b) \vee (d \downarrow b))$
3.	$(c \leftrightarrow d) ((\bar{a} \downarrow \bar{b}) \rightarrow (\bar{ab}))$
4.	$((ab) (a \downarrow b)) \vee (c \rightarrow d)$
5.	$((a c) \rightarrow ad) \vee ((bc) \downarrow (bd))$
6.	$((a \vee b) (d \rightarrow b)) \rightarrow (cd \vee (\bar{a}\bar{c}))$
7.	$(ad \vee (a \leftrightarrow d))(bc \downarrow (c \vee b))$
8.	$(a \vee d)(b \vee c)(a \rightarrow d)(b c)$
9.	$((c \vee d) (a \rightarrow c)) \vee \bar{b}\bar{d} \vee ab$
10.	$(\bar{a} \bar{b}) \vee (\bar{b} \rightarrow c) \vee (c \leftrightarrow d)$
11.	$((c \rightarrow b)(d \downarrow c))(ab \vee ad)$
12.	$(ac \downarrow (a \leftrightarrow c))(b \downarrow d)$
13.	$(a \vee b) \downarrow ((a c) \downarrow (b \vee d))$
14.	$(ab \rightarrow a) \vee (d(b \vee c))$
15.	$a(b \vee c) \rightarrow (ad \vee c)$
16.	$(c \rightarrow ad) \rightarrow ((\bar{b} \vee \bar{c}) \downarrow a)$
17.	$(\bar{a} \rightarrow \bar{d}) (bc \rightarrow (a \vee c))$
18.	$((a \vee d) (c \rightarrow \bar{a})) \rightarrow (\bar{b} \vee \bar{c})$
19.	$(a \rightarrow b) \rightarrow (\bar{a}(b \vee cd))$
20.	$(a \vee \bar{d}\bar{b}) (\bar{a}(b \rightarrow d) \vee c) \vee (c \rightarrow a)$
21.	$(\bar{d}\bar{b} \vee ab \vee \bar{d}\bar{c} \vee \bar{a}\bar{c}) (\bar{b} \rightarrow a)$
22.	$(c \rightarrow a)(a b)(b \rightarrow c)(b \vee c)$
23.	$Ac \vee ((d \bar{a}) (\bar{d} \rightarrow b)) \vee \bar{a}\bar{c}$

24.	$((\bar{b} \vee c)(a \vee b)) \vee (\bar{d}c) \vee ((\bar{b}a) \rightarrow c)$
25.	$(a \vee (\bar{c} \rightarrow b)) (\bar{c} \vee \bar{d} \vee \bar{c}d) (\bar{d}c d)$
26.	$((\bar{b} \vee \bar{d})(a \vee \bar{c})(\bar{c} \vee d)) \vee ((b \rightarrow c)(\bar{a} \rightarrow d))$
27.	$(c \rightarrow a)(\bar{a}d \vee bd \vee \bar{a}d)(a \vee c)$
28.	$(dc \vee db \vee \bar{c}b)(d \bar{b} \vee cb)(a \vee \bar{d})$
29.	$(\bar{c}d \vee bc)(\bar{a} \vee \bar{d})((c \rightarrow b)d \vee cb)$
30.	$(a \rightarrow b) bcd \vee abcd \vee b \vee c \vee \bar{d}$

6. Побудувати поліном Жегалкіна, використовуючи перетворення алгебри Жегалкіна, та за методом невизначених коефіцієнтів.

№	Завдання	№	Завдання	№	Завдання
1.	$x \downarrow y \leftrightarrow \bar{x}z$	11.	$x\bar{z} \downarrow y x$	21.	$(x \leftrightarrow \bar{y})z \downarrow y$
2.	$x \downarrow \bar{y} \leftrightarrow \bar{x}z$	12.	$x \leftrightarrow y y\bar{z}$	22.	$x \bar{z} \bar{y} \vee z$
3.	$x \leftrightarrow z \bar{y}x$	13.	$yz \rightarrow x \leftrightarrow \bar{y}$	23.	$\bar{y} \vee xz \downarrow y$
4.	$x y \leftrightarrow \bar{y}z$	14.	$\bar{x}y \rightarrow \bar{z} \bar{y}$	24.	$yx \rightarrow y \bar{z}$
5.	$\bar{x} \vee \bar{y} \rightarrow z$	15.	$x \rightarrow y \bar{y}\bar{z}$	25.	$z \downarrow (x \vee \bar{y}\bar{z})$
6.	$x \leftrightarrow y \rightarrow \bar{y}z$	16.	$x \rightarrow y \downarrow x\bar{z}$	26.	$(x \leftrightarrow \bar{y})z y$
7.	$x \downarrow y \rightarrow \bar{x}z$	17.	$x \leftrightarrow y \downarrow \bar{x}\bar{z}$	27.	$x \downarrow (\bar{y}z) \leftrightarrow y$
8.	$\bar{x}y \leftrightarrow z \bar{y}$	18.	$\bar{y}\bar{z} \vee x \downarrow y$	28.	$x \bar{y}\bar{z} \rightarrow y$
9.	$x y \rightarrow y\bar{z}$	19.	$x \vee y\bar{x} \rightarrow \bar{z}$	29.	$z (\bar{x} \vee \bar{y}) \downarrow y$
10.	$x \bar{y} \leftrightarrow \bar{x} z$	20.	$z (\bar{x} \vee \bar{y}) \downarrow z$	30.	$z(x \leftrightarrow y) \vee z$

7. Визначити, чи є правильною наслідковість з використанням секвенційного числення.

№	Завдання
1.	$((a \mid c) \mid (d \leftrightarrow c)) \rightarrow ((c \vee b)(a \rightarrow d))$
2.	$(a \rightarrow d) \mid ((c \rightarrow b) \vee (d \downarrow b))$
3.	$(c \leftrightarrow d) \mid ((\bar{a} \downarrow \bar{b}) \rightarrow (\bar{ab}))$
4.	$((ab) \mid (a \downarrow b)) \vee (c \rightarrow d)$
5.	$((a \mid c) \rightarrow ad) \vee ((bc) \downarrow (bd))$
6.	$((a \vee b) (d \rightarrow b)) \rightarrow (cd \vee (a\bar{c}))$
7.	$(ad \vee (a \leftrightarrow d)) (bc \downarrow (c \vee b))$
8.	$(a \vee d) (b \vee c) (a \rightarrow d) (b \mid c)$
9.	$((c \vee d) \mid (a \rightarrow c)) \vee \bar{b}\bar{d} \vee ab$
10.	$(\bar{a} \mid b) \vee (\bar{b} \rightarrow c) \vee (c \leftrightarrow d)$
11.	$((c \rightarrow b) (d \downarrow c)) (ab \vee ad)$
12.	$(ac \downarrow (a \leftrightarrow c))(b \downarrow d)$
13.	$(a \vee b) \downarrow ((a \mid c) \downarrow (b \vee d))$
14.	$(ab \rightarrow a) \vee (d(b \vee c))$
15.	$a(b \vee c) \rightarrow (ad \vee c)$
16.	$(c \rightarrow ad) \rightarrow ((\bar{b} \vee \bar{c}) \downarrow a)$
17.	$(\bar{a} \rightarrow \bar{d}) \mid (bc \rightarrow (a \vee c))$
18.	$((a \vee d) \mid (c \rightarrow \bar{a})) \rightarrow (\bar{b} \vee \bar{c})$
19.	$(a \rightarrow b) \rightarrow (a(\bar{b} \vee cd))$
20.	$(a \vee \bar{d}\bar{b})(\bar{a}(b \rightarrow d) \vee c) \vee (c \rightarrow a)$
21.	$(\bar{d}\bar{b} \vee ab \vee \bar{d}\bar{c} \vee ac) (\bar{b} \rightarrow a)$
22.	$(c \rightarrow a)(a \mid b)(b \rightarrow c)(b \vee c)$
23.	$ac \vee ((d \mid \bar{a}) (\bar{d} \rightarrow b)) \vee a\bar{c}$

24.	$((\bar{b} \vee c)(a \vee b)) \vee (\bar{d}c) \vee ((\bar{b}a) \rightarrow c)$
25.	$(a \vee (\bar{c} \rightarrow b)) (\bar{c} \vee \bar{d} \vee \bar{c}d) (\bar{d}c d)$
26.	$((\bar{b} \vee \bar{d}) (a \vee \bar{c}) (\bar{c} \vee d)) \vee ((b \rightarrow c) (\bar{a} \rightarrow d))$
27.	$(c \rightarrow a) (\bar{a}d \vee bd \vee \bar{a}d)(a \vee c)$
28.	$(dc \vee db \vee \bar{c}b) (\bar{d}b \vee \bar{c}b) (a \vee \bar{d})$
29.	$(\bar{c}d \vee bc) (\bar{a} \vee \bar{d}) ((c \rightarrow \bar{b}) d \vee cb)$
30.	$(a \rightarrow b) bcd \vee ab \bar{c}d \vee b \vee \bar{c} \vee \bar{d}$

8. Побудувати таблицю двомісного предиката.

№	Завдання	№	Завдання
1.	$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	16.	$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} < 1,$ $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
2.	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	17.	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
3.	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	18.	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} \leq 1,$ $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
4.	$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	19.	$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
5.	$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	20.	$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} \leq 1,$ $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
6.	$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} \leq 1,$ $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$	21.	$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < 4,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
7.	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	22.	$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
8.	$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} < 1,$	23.	$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \leq 1,$

	$x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$		$x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
9.	$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	24.	$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
10.	$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} < 1,$ $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$	25.	$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
11.	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} \leq 4,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	26.	$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} \leq 1,$ $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
12.	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	27.	$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
13.	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	28.	$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} < 1,$ $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
14.	$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	29.	$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{3} \leq 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
15.	$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} < 1,$ $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	30.	$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{3} < 1,$ $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

Список літератури

1. *Дискретна математика* : навчальний посібник / Н.І. Федоренко, С.В. Білощицька, А.О. Білощицький, І.О. Баліна, І.С. Безклубенко, Ю.П. Буценко. – Київ : КНУБА, 2014. – 103 с.
2. *Основи математичної логіки* : навчальний посібник / Ю.А. Дрозд. – Київ : ВПЦ Київський університет, 2003. – 100 с.
3. *Математична логіка та теорія алгоритмів* : навчальний посібник / С.М. Прийма. – Мелітополь : ТОВ «Видавничий будинок ММД», 2008. – 134 с.
4. *Математична логіка. Приклади і задачі*: навчальний посібник / С.С. Шкільняк. – Київ : ВПЦ Київський університет, 2007. — 145 с.
5. *Математична логіка та теорія алгоритмів* : навчальний посібник / М.П. Матвієнко, С.П. Шаповалов. – Київ : Ліра, 2015. – 212 с.
6. *Дискретна математика у прикладах і задачах* : теорія множин, математична логіка, комбінаторика, теорія графів : математичний практикум / Л.Є. Базилевич. – Львів, 2013. – 486 с.
7. *Формальна логіка* : короткий словник-довідник / О.С. Гасяк. – Чернівці : Чернівецький нац. університет, 2014. – 200 с.
8. *Дискретна математика*: навчальний посібник / Р.М. Трохимчук. – Київ : ДП «Видавничий дім «Персонал», 2010. – 528 с.
9. *Полтораченко Н.І. Математична логіка і числення предикатів* : конспект лекцій / Н.І. Полтораченко. – Київ : КНУБА, 2022. – 60 с.

Навчально-методичне видання

АРИФМЕТИЧНІ ТА ЛОГІЧНІ ОСНОВИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Методичні вказівки та завдання
до виконання самостійної роботи
для студентів спеціальностей 125 «Кібербезпека» і
123 «Комп'ютерна інженерія»

Укладач **Полтораченко** Наталія Іванівна

Випусковий редактор *Л.С. Тавлуй*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 06.09.2024. Формат 60 × 84 ^{1/16}
Ум. друк. арк. 3,02. Обл.-вид. арк 3,25.
Електронний документ. Вид. № 92/III–24.

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.