МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПІР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 85

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2010

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *О.С. Сахаров*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

Ю.В. Верюжський, д-р техн. наук
В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.І. Гуляр, д-р техн. наук
Є.С. Дехтярюк, д-р техн. наук
Г.В. Ісаханов, д-р техн. наук
П.П. Лізунов, д-р техн. наук
М.О. Шульга, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 16 вересня 2010 року, протокол № 57.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 85 / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.: КНУБА, 2010. – 165 с. – Укр. мовою.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31,
м. Київ, 03037,
тел.: (044) 241-5470

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2010

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О. О. Шкриль, канд. техн. наук
С. О. Пискунов, канд. техн. наук
Д. В. Богдан

НЕОДНОРІДНИЙ ПРИЗМАТИЧНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ЗІ ЗМІННОЮ ПЛОЩЕЮ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ТА УРАХУВАННЯМ ЗМІННОСТІ КОМПОНЕНТІВ МЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРУ

Отримані розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) для косокутного призматичного неоднорідного скінченого елемента зі змінною площею поперечного перерізу та з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині його поперечного перерізу; показана ефективність їх застосування при розв'язанні тестових задач.

Вступ. Напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ) є ефективною модифікацією методу скінчених елементів (МСЕ) [1, 2], що дозволяє суттєво підвищити ефективність чисельного розв'язання задач про визначення напружено-деформованого стану (НДС) просторових тіл канонічної форми. Одним з таких класів об'єктів є призматичні тіла, що утворені рухом геометричної фігури складної форми, яка визначається контуром поперечного перерізу тіла, вздовж прямолінійної утворюючої. У розрахунковій практиці зустрічаються призматичні тіла змінної в напрямку утворюючої площі поперечного перерізу (рис. 1). Для апроксимації таких тіл в роботі [3] було розроблено скінченний елемент (СЕ), що враховує змінність площі поперечного перерізу вздовж напрямної. В межах поперечного перерізу компоненти метричного тензору були постійними. Тому для забезпечення збіжності розв'язання задачі потрібно було значно згущувати сітку. В той же час в роботі [4] було розроблено косокутний СЕ з довільними граничними умовами, розв'язувальні співвідношення для якого враховують змінність компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу. Це призвело до суттєвого зменшення кількості невідомих дискретної моделі. Але вздовж напрямної визначник компонентів метричного тензору залишався постійним. Метою даної роботи є розробка розв'язувальних співвідношень НМСЕ для призматичного СЕ, які будуть враховувати змінність компонентів метричного тензору в межах поперечного перерізу і його визначника вздовж напрямної і апробація їх на тестовій задачі.

Вихідні співвідношення для призматичних просторових тіл. Для дослідження процесів деформування та руйнування призматичних тіл

© Баженов В.А., Шкриль О. О., Пискунов С.О., Богдан Д.В.

доцільно використовувати наступні системи координат: базисну декартову $z^{j'}$, яка є незмінною і призначена для задання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (вісі $z^{1'}$ та $z^{2'}$ базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь $z^{3'}$ орієнтована вздовж напрямної); місцеву систему координат x^i, природно пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта, при цьому вісь x^3 збігається за напрямком з $z^{3'}$ (рис. 1).

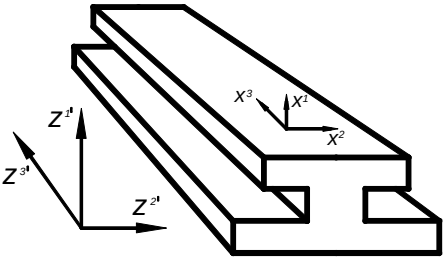


Рис. 1. Неоднорідні призматичні тіла із змінною площею поперечного перерізу

Компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат зручно подати у вигляді матриці:

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}.$$

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z^{i'}_{,j}$, що обумовлює зв'язок між місцевою та базисною системами координат [5]:

$$z^{i'}_{,j} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \qquad z^{\alpha}_{,3} = z^{3'}_{,\alpha} = 0.$$

Тоді компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензору базисної системи:

$$g_{mn} = z^{i'}_{,m} z^{j'}_{,n} g_{i'j'}.$$

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат матриця компонентів метричного тензору набуде наступного

вигляду:

$$[g_{mn}]=\begin{bmatrix} z^{\gamma'}_{,1}z^{\gamma'}_{,2}, & z^{\gamma'}_{,1}z^{\gamma'}_{,2}, & 0 \\ z^{\gamma'}_{,2}z^{\gamma'}_{,1}, & z^{\gamma'}_{,2}z^{\gamma'}_{,2}, & 0 \\ 0 & 0 & \left(z^{3'}_{,3}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій ε_{ij} через переміщення u_i в місцевій системі координат [5]:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right). \tag{1}$$

Подамо переміщення в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k = u_{s'}z^{s'}_{,k}. \tag{2}$$

Підставивши (2) в вираз (1) після зведення подібних, одержимо загальні вирази для деформацій в місцевій системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{l',i}z^{l'}_{,j}+u_{l',j}z^{l'}_{,i}\right), \tag{3}$$

Передбачається, що пружні деформації малі та пов'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\overset{\circ}{u}_{i',3}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}u_{i'(S_1S_2),3}. \tag{4}$$

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних сталих C^{ijkl} визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$C^{ijkl}=\lambda g^{ij}g^{kl}+\mu\left(g^{jl}g^{ik}+g^{il}g^{jk}\right),$$

де величини λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu=\nu\left(z^{i'}\right)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E=E\left(z^{i'}\right)$:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Величини фізичних напружень і деформацій обчислюються із використанням співвідношень:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \qquad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij}\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}} \tag{5}$$

Неоднорідний призматичний скінченний елемент зі змінною площею поперечного перерізу та урахуванням змінності компонентів метричного тензору. Апроксимація просторових неоднорідних призматичних тіл відбувається в межах поперечного перерізу (рис. 2). Вздовж твірної застосовується один скінченний елемент (СЕ). Просторові неоднорідні призматичні СЕ являють собою прямолінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді прямої (рис. 3а).

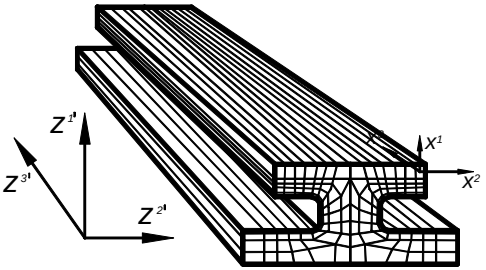


Рис. 2. Дискретна модель НМСЕ.

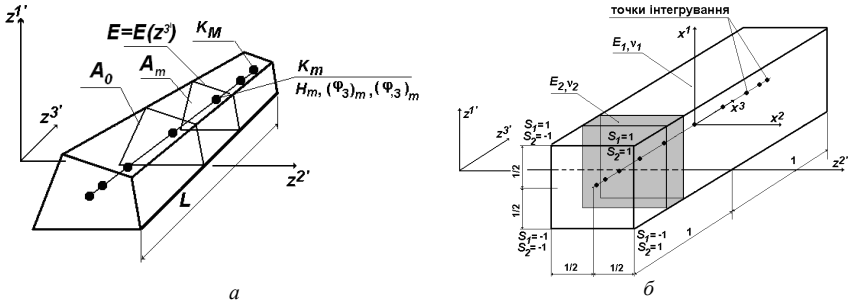
Площа такого чотирикутника може змінюватись (із збереженням подібності його форми) за законом:

$$A(z^{3'}) = A_0 f(z^{3'}), \tag{6}$$

де A_0 – площа поперечного перерізу при $z^{3'} = 0$, $f(z^{3'})$ – монотонна безперервна функція. В цьому випадку отримаємо неоднорідний призматичний СЕ змінної площі поперечного перерізу.

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева прямолінійна система координат x^i, яка природно пов'язана з геометрією об'єкта так, що осі x^1

і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ, а вісь x^3 спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із $z^{3'}$. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ (рис. 3,б) [1, 2].



а *б*

Рис. 3. Неоднорідний призматичний скінчений елемент змінної площі поперечного перерізу в базисній (а) та місцевій (б) системі координат

При побудові розв'язувальних співвідношень для неоднорідних призматичних скінчених елементів для геометричних і фізико-механічних параметрів застосовують в межах поперечного перерізу наступні гіпотези:

– компоненти метричного тензору СЕ є змінними:

$$g_{ij} = g_{ij}(x^{\alpha});$$

– визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора g_{ij}, компоненти тензору пружних сталих дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перерізу СЕ:

$$g = \mathring{g} = g\big|_{x^{\alpha}=0}, \quad C^{ijkl} \approx \mathring{C}^{ijkl} = C^{ijkl}\Big|_{x^{\alpha}=0};$$

– визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора g_{ij}, є змінним за напрямною і обчислюється виходячи із вихідних даних про змінення площі поперечного перерізу (6) – із використанням співвідношення:

$$\sqrt{\overset{\circ}{g}(z^{3'})} = f(z^{3'})\sqrt{\overset{\circ}{g}\Big|_{z^{3'}=0}}\,.$$

– компоненти тензору пружних сталих є змінними за напрямною:

$$C^{ijkl} = C^{ijkl}(x^3),$$

і обчислюються на основі вихідних даних про фізико-механічні властивості матеріалу або інформації про змінення фізико-механічних властивостей, що відбулись внаслідок деформування.

Розподілення переміщень у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2 + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right), \qquad (7)$$

де $u_{m'(S_1S_2)}$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центра поперечного перетину елементу в місцевій системі координат x^i.

Похідні від переміщень в центрі поперечного перетину СЕ, виходячи з прийнятого закону їх розподілу (7) дорівнюють:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)};\\
\overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)}S_\alpha;\\
\overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)}S_1S_2; \qquad (8)\\
\overset{\circ}{u}_{i',3} &= \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2),3};\\
\overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} &= \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2),3}S_\alpha.
\end{aligned}$$

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [6] компоненти тензора повних фізичних деформацій у поперечному перетині, що відповідає точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\, x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12};$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)}\, x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}\, x^{\beta}\ , \qquad (9)$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}\big|_{x^{\alpha}=0}$, $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \left.\dfrac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^{\beta}}\right|_{x^{\alpha}=0}$.

З урахуванням подання фізичних компонент деформацій через відповідні ненормовані величини в загальному випадку отримаємо:

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \left.\frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\beta}=0} = \left.\frac{\partial\left(\varepsilon_{\alpha(\alpha)}/g_{\alpha(\alpha)}\right)}{\partial x^{(3-\alpha)}}\right|_{x^{\beta}=0} =$$

$$= \left.\frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}}\left(\varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)}\frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}}\right)\right|_{x^{\beta}=0} =$$

$$= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right). \qquad (10)$$

Аналогічно для інших компонентів отримаємо:

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{g}_{33}}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right);$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}}\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}\,.$$

де $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\big|_{x^{\alpha}=0}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \left.\dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}}\right|_{x^{\alpha}=0}$, $\overset{\circ}{h}_{ij,\delta} = \dfrac{\overset{\circ}{g}_{ij,\delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}$, $\overset{\circ}{g}_{ij,\delta} = \left.\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\delta}}\right|_{x^{\alpha}=0}$.

Подамо коефіцієнти розкладення ненормованих компонент деформацій в ряд Маклорена (9) в місцевій прямолінійній системі координат через вузлові переміщення та їх похідні, що обчислені в базисній системі координат (8) з урахуванням прийнятого розподілення переміщень в поперечному перерізі. При цьому, аналогічно до використаного в (8) позначення для значень похідних від переміщень $\overset{\circ}{u}_{m',i}$ центрі СЕ введемо позначення для значень компонент тензора

перетворення $z_{,i}^{m'}\big|_{x^\alpha=0} = \overset{\circ}{z}{}_{,i}^{m'}$. Тоді для призматичних просторових тіл із застосуванням базисної декартової системи координат на основі виразу (10) отримаємо:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_\alpha \overset{\circ}{z}{}_{,\beta}^{\gamma'} + S_\beta \overset{\circ}{z}{}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2)} S_\alpha \overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1S_2),3} \overset{\circ}{z}{}_{,\alpha}^{\gamma'} \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2),3} \overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'} \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{\gamma'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2 \overset{\circ}{z}{}_{,\alpha}^{\gamma'} + S_\alpha \overset{\circ}{z}{}_{,12}^{\gamma'} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[2\, u_{3'(S_1S_2)}\, S_1S_2 \overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'} + u_{\gamma'(S_1S_2),3}\left(S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}{}_{,\alpha}^{\gamma'} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}{}_{,12}^{\gamma'} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2),3}\left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}{}_{,3}^{3'} \right) \right].$$

На основі закону Гука (4) і прийнятих співвідношень (9) запишемо вираз для компонент тензора фізичних напружень:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{ij} = {} & \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2}\, x^2 \right) + 2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij12}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij22}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1}\, x^1 \right) + \\ & + 2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij13}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2}\, x^2 \right) + 2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij23}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1}\, x^1 \right) + \\ & + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1}\, x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}\, x^2 \right). \end{aligned} \qquad (11)$$

Застосовуючи позначення:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ijkl}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl},$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}_{,2}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij13}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}_{,1}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij23}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1},$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена в термінах фізичних величин:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,2} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,1} x^1. \qquad (12)$$

Відкидаючи з (12) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{i\alpha}_{,\alpha}$ як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елементу, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \qquad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12};$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha 3} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \qquad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha}, \qquad (13)$$

де значення коефіцієнтів $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,\alpha}$ обчислюються в точках інтегрування K_m, що розташовані в поперечних перерізах вздовж вісі x^3 (рис. 3,*а*).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент тензора напружень в місцевій системі координат (5):

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12} = \overset{\circ}{g}_{12} \overset{\circ}{\sigma}{}^{12};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}\, \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} = \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}{}^{33};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}\, \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} = \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,(3-\alpha)}. \qquad (14)$$

Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи N СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\delta W_n - \delta A_n \right) = 0 .$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W_n = \int_{V_n} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \, dV_n ,$$

де $dV_n = \sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^1dx^2dx^3$ – об'єм n-го СЕ.

Подаючи, відповідно до МССЕ, фізичні компоненти тензору напружень (13) і тензору деформацій (9) через їх значення у центрі елементу отримаємо для варіації енергії n-го СЕ $\delta W_n = \delta W$:

$$\delta W = \int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\, x^{(3-\alpha)} \right) + \right.$$

$$+ 2\overset{\circ}{\sigma}{}^{12}\delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} + \left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}\, x^{(3-\alpha)} \right) +$$

$$\left. + \left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}\, x^{\beta} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^1dx^2dx^3 . \qquad (15)$$

Виконуючи інтегрування цього виразу в межах поперечного перерізу СЕ з урахуванням значень наступних інтегралів:

$$\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1dx^2 = 1 ; \qquad \int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^{\alpha}dx^1dx^2 = 0 ;$$

$$\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^{\alpha}x^{\beta}dx^1dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \dfrac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}, \qquad (16)$$

для варіації енергії деформації одного СЕ одержимо:

$$\delta W = \int\limits_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}\,\delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha} \delta\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3 .$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень (14) і деформацій (10) в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\delta W = \int\limits_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}\, \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}\, \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}\, \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha}\, \delta \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3, \quad (17)$$

або, у векторній формі:

$$\delta W = \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T_h \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T_h \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \right\} \times \quad (18)$$

$$\times \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3,$$

де $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\};$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T_h = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}\, \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{23}\, \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T_h = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}\, \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{13}\, \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} \right\}.;$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{23} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{13} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33} \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{22}_{,1} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{23}_{,1} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,1} \right\}; \qquad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11}_{,2} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{13}_{,2} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,2} \right\};$$

При розгляді неоднорідних призматичних просторових тіл з довільними граничними умовами апроксимація невідомих переміщень в базисній системі координат $u_{s'}$ в напрямку утворюючої здійснюється розкладенням за системою координатних функцій φ^l – поліномам Лагранжа (l = 0, 1) і Міхліна (l = 2,....L):

$$u_{s'} = \sum_{l=0}^{L} \overline{u}^l_{s'} \varphi^{(l)}, \quad (19)$$

де $\varphi^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1-x^3\right)$, $\varphi^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1+x^3\right)$,

$$\varphi^{(l)} = f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \qquad f^{(l)} = \sqrt{\left(4l^2-1\right)^{-1}},$$

$$p^{(l)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)!(k!)^2\, 2^{k+1}} \left[\left(1-x^3\right)^k + (-1)^l \left(1+x^3\right)^k\right]$$ – поліноми Лагранжа.

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

Вздовж осі скінченого елемента, відповідно до вимог формули інтегрування Гаусса, розташована певна кількість точок інтегрування K_m, m=1….M (рис. 3,*а*) [1, 2].

З урахуванням прийнятої апроксимації переміщень (19) отримані вирази розкладення ненормованих компонент деформацій в ряд Маклорена в місцевій прямолінійній системі координат через вузлові переміщення та їх похідні, що обчислені в базисній системі координат набудуть вигляду:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L} u^{l}_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\beta} + S_\beta \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha}\right)\varphi^{(l)}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}\left(u^{l}_{3'(S_1S_2)} \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} S_\alpha \varphi^{(l)} + \frac{1}{2} u^{l}_{\gamma'(S_1S_2)} \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} \varphi^{(l)}_{,3}\right)\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L} u^{l}_{3'(S_1S_2)} z^{3'}_{,3} \varphi^{(l)}_{,3}\right]; \qquad (20)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L} u^{l}_{\gamma'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2 \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)\varphi^{(l)}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{S_1\pm1}\sum_{S_2\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L}\left\{u^{l}_{3'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2 \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)\varphi^{(l)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + u^{l}_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12}\right)\varphi^{(l)}_{,3}\right\}\right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[\sum_{l=0}^{L} u^{l}_{3'(S_1S_2)}\left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3}\right)\varphi^{(l)}_{,3}\right].$$

Співвідношення (20) і (9), що описують залежність між ненормованими компонентами деформацій – складовими коефіцієнтів розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами (19), у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\} = \sum_{l=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]\varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2\right]\varphi_{,3}^{(l)}\right)\{\, u_l \,\};$$

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}_h = \sum_{l=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h\varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h\varphi_{,3}^{(l)}\right)\{\, u_l \,\}, \qquad (21)$$

де $\{\, u_l \,\}^T = \left\{ u^l_{i(-1;-1)} \quad u^l_{i(1;-1)} \quad u^l_{i(-1;1)} \quad u^l_{i(1;1)} \right\}$;

$$\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(-1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(-1;1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(1;1)}\right];$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h = \left[\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(-1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(1;-1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(-1;1)} \quad \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(1;1)}\right]. \qquad (22)$$

Для неоднорідних призматичних тіл із змінними компонентами метричного тензора значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(S_1,S_2)}$ визначаються відповідно до формул (20).

Необхідно відзначити, що структура виразів (21) і (22) є повністю ідентичною аналогічним виразам, що не враховують змінність компонент метричного тензора в межах СЕ (зокрема, наведеним в роботі [2]). Зважаючи на це, їх використання дозволяє, не виконуючи трудомісткого чисельного інтегрування в поперечному перерізі і практично не змінюючи обсяг обчислювальних витрат враховувати змінність геометрії в межах поперечного переріз СЕ.

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій (21) через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\delta W = \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^{L} \left(\delta\{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\delta\{u_l\}^T \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_h^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_h^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3$$

$$\delta W = \sum_{l=0}^{L} \delta\{u_l\}^T \left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_h , \qquad (23)$$

де $\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_h$ – вектор вузлових реакцій призматичного СЕ із змінними компонентами метричного тензора в межах поперечного перерізу:

$$\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_h = \left[\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_h^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_h^T \varphi_{,3}^{(l)} \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 \right) \right] =$$

$$= \left[\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_h^T \cdot \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_h^T \cdot \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 \right) \right] .$$

Виконуємо чисельне інтегрування за напрямком x^3:

$$\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_m^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m = \{ \sigma_l \} ;$$

$$\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_m \varphi_{,3\,m}^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m = \{ \sigma_{l3} \} ;$$

$$\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi^{(l)}{}_m \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m = \{ \sigma_{l\alpha} \} ;$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\varphi_{,3}^{(l)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3=\sum_{m=1}^{M}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}_m\varphi_{,3}^{(l)}{}_m\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m=\left\{\sigma_{l\alpha 3}\right\}.$$

де $\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m=\dfrac{A_m}{A\big|_{z^{3'}=0}}\sqrt{\overset{\circ}{g}\big|_{z^{3'}=0}}$; A_m – площа поперечного перерізу в точці інтегрування m (рис. 3); H_m – значення вагових функцій в точці інтегрування m.

З урахуванням результатів чисельного інтегрування отримаємо вираз для обчислення компонент вектору вузлових реакцій СЕ:

$$\left\{\overset{\circ}{R}_l\right\}_h=\left\{\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\left\{\sigma_l\right\}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\left\{\sigma_{l3}\right\}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\left\{\sigma_{l\alpha}\right\}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\left\{\sigma_{l\alpha 3}\right\}\right)\right\}. \tag{24}$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}=\left[\overset{\circ}{D}\right]\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\},\qquad \left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}=\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}_h,$$

де, у відповідності із законом Гука (4),

$$\left[\overset{\circ}{D}\right]=\left[\overset{\circ}{C}{}^{ijkl}\right],\quad \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]=\left[\left[\overset{\circ}{C}{}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)}\right]\left[\overset{\circ}{C}{}^{ij(3-\alpha)3}\right]\left[\overset{\circ}{C}{}^{ij33}\right]\right].$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергій деформування СЕ (23) набуває вигляду:

$$\delta W=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}^T\left[\overset{\circ}{D}\right]\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}_h^T\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}_h\right)\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3.$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^{L} \sum_{n=0}^{L} \left(\delta \{ u_l \}^T \right) [K_{ln}]_h \{ u_n \},$$

де $[K_{ln}]_h$ – матриця жорсткості неоднорідного призматичного СЕ із змінними компонентами метричного тензора:

$$[K_{ln}]_h = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[\overset{\circ}{D} \right] \times \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right] \varphi^{(n)} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_h^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_h^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \times \right.$$

$$\left. \left. \times \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_h \varphi^{(n)} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_h \varphi_{,3}^{(n)} \right) \right] \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3.$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком x^3 з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$\left[D_{00}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$\left[D_{30}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \varphi_{,3}^{(l)}{}_m \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$\left[D_{03}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)}{}_m \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$\left[D_{33}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \varphi_{,3}^{(l)}{}_m \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)}{}_m \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$\left[D_{00\alpha}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$\left[D_{30\alpha}^{ln} \right] = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} \sqrt{\overset{\circ}{g}}\, dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \varphi_{,3}^{(l)}{}_m \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m;$$

$$\left[D_{03\alpha}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_{,3}^{(n)}{}_m\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m;$$

$$\left[D_{33\alpha}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi_{,3}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_{,3}^{(l)}{}_m\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_{,3}^{(n)}{}_m\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m.$$

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

$$\begin{aligned}\left[K_{ln}\right]_h=\Bigg\{&\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\left[D_{00}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_1\right]+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\left[D_{30}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_1\right]+\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\left[D_{03}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_2\right]+\\&+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\left[D_{33}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_2\right]+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\left[D_{00\alpha}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h+\\&+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\left[D_{30\alpha}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h+\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\left[D_{03\alpha}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h+\\&+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\left[D_{33\alpha}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h\Bigg)\Bigg\}.\end{aligned}\qquad(25)$$

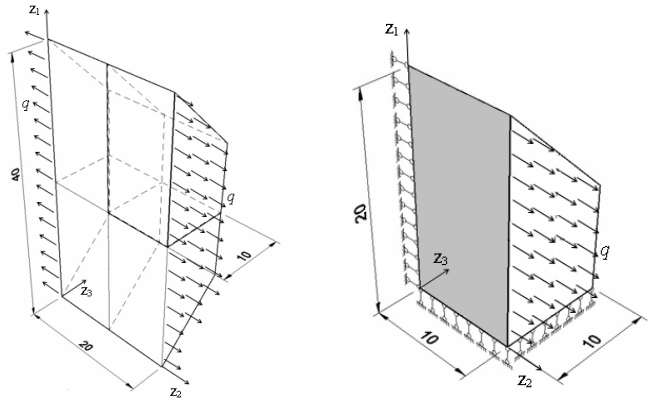
Отримані вирази матриці жорсткості (25) і вектору вузлових реакцій (24) неоднорідного скінченого елемента із змінними компонентами метричного тензора дозволяють будувати дискретні моделі для неоднорідних призматичних тіл складної форми, в тому числі при змінній вздовж утворюючої площею поперечного перерізу.

Розв'язання тестових прикладів. З метою доведення ефективності розроблених підходів, розглянуто тестову задачу про одновісний розтяг обеліску (рис. 4, *а*). Дві грані, що розташовані в площині $z^{1'}-z^{2'}$ закріплені вздовж $z^{3'}$.

Внаслідок симетрії розрахункова схема і дискретні моделі побудовані для 1/4 об'єкта (рис. 4, *б*). Вихідні дані: зусилля розтягу $q=1$ кг/см^2, модуль пружності $E=1$ кг/см^2, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$.

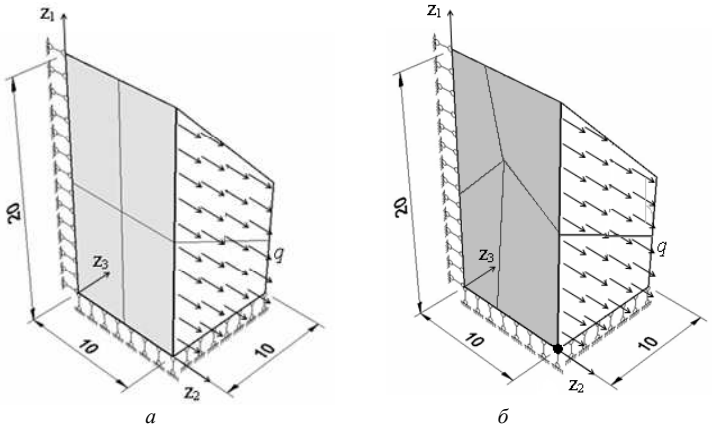
В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий для ортогональної сітки із застосуванням програмного комплексу "Ліра" (рис. 5,*а*). Результати, отримані для косокутної сітки (рис. 5,*б*) побудованої із застосуванням розроблених СЕ, повністю співпали з еталонним розв'язком. Значення переміщення вздовж $z^{2'}$ для вузла

позначеного на рис. 5,*б* чорним колом, що отримане на косокутній сітці із СЕ, що не враховують змінність метричного тензору відрізняються від еталонних на 30%.



а *б*

Рис. 4. Тестовий приклад про одновісний розтяг обеліску:
а) схема об'єкту; б) розрахункова модель



а *б*

Рис. 5. Дискретні моделі тіла із ортогональною (а) та косокутною (б) сітками

Ефективність розробленого СЕ також підтверджено результатами розв'язання тестової задачі про розтяг в умовах плоскої деформації в площині $z^{1'} - z^{3'}$ стрижня зі змінною за лінійним законом площею поперечного перерізу (розміром в напрямку $z^{1'}$), розрахунок якого був проведений із

використанням МСЕ і НМСЕ [3] (рис. 5). Отримані результати розподілення напружень $\sigma_{3'3'}$ і переміщень $U^{3'}$ за напрямком $z^{3'}$ свідчать, що похибка визначення напружень і переміщень лежить в межах 1% (рис. 5).

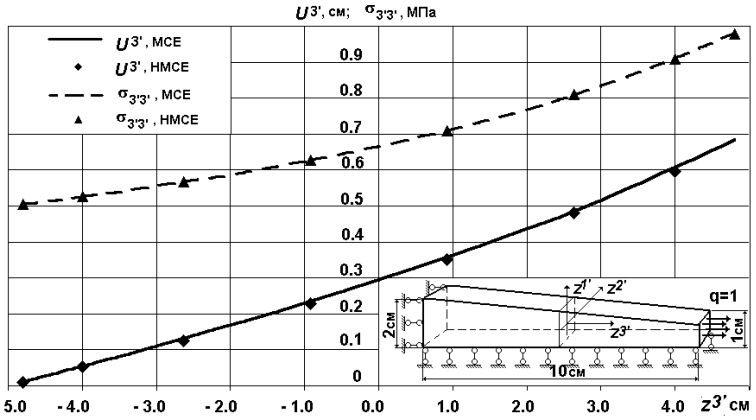


Рис. 5.Стрижень із змінною прощею поперечного перерізу: розрахункова схема та розподілення напружень і переміщень по довжині стрижня

Висновки. В даній роботі отримані вирази матриці жорсткості і вектору вузлових реакцій неоднорідного призматичного СЕ зі змінною площею поперечного перерізу та урахуванням змінності компонентів метричного тензору, з довільними граничними умовами. Ефективність його застосування доведена на тестових задачах. Результати виявили, що урахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі СЕ зі змінною площею поперечного перерізу вздовж твірної дозволяє отримувати вірогідні результати на косокутних сітках.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Пискунов С.О., Рутковський В.А., Шкриль О.О.* Призматичний скінчений елемент змінної геометрії // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.- техн. збірник – К.: КНУБА, 2005.- Вип. 76.- С. 83-90.
4. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченого елемента для розв'язання просторових

задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 76. – С.3–26.
5. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
6. *Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. –479 с.

Отримано 30.04.10

Баженов В.А., Шкрыль А.А., Пискунов С.О., Богдан Д.В.

НЕОДНОРОДНЫЙ ПРИЗМАТИЧЕСКИЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДЬЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ И УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОСТИ КОМПОНЕНТОВ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА

Получены разрешающие соотношения полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) для косоугольного призматического конечного элемента с переменной площадью поперечного сечения и учетом переменности компонент метрического тензора в площади его поперечного сечения; показана эффективность их использования при решении тестовых задач.

Bazhenov V., Shkril' A., Piskunov S., Bogdan D.

THE HETEROGENEOUS PRISMATIC FINITE ELEMENT WITH VARIABLE CROSS-SECTIONAL AREA AND TAKING INTO ACCOUNT THE VARIABILITY OF COMPONENTS OF METRIC TENSOR

Obtained resolving relations of semi-analytic finite element method (SFEM) for the oblique-angled prismatic finite element with variable cross-sectional area and taking into account the variability of components of metric tensor in its cross-section area, shows the effectiveness of their use in solving test problems.

УДК 539.3

Є.О. Гоцуляк, д-р техн. наук
О.О. Лук'янченко, канд. техн. наук
О.В. Костіна, канд. техн. наук
В.В. Шах

ПОБУДОВА ПОВЕРХНІ КРИТИЧНИХ СПОЛУЧЕНЬ ОСЬОВОГО ТА БІЧНОГО СТИСНЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ З НЕРЕГУЛЯРНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

Запропонована чисельна методика дослідження стійкості циліндричних оболонок змінної товщини з нерегулярними недосконалостями форми при сумісній дії осьового стиснення та поверхневого тиску. Даний підхід дозволяє моделювати недосконалості у вигляді комбінацій форм втрати стійкості оболонки, будувати поверхню критичних сполучень навантажень, визначати області стійкості циліндричних оболонок змінної товщини з нерегулярними недосконалостями при дії комбінованого навантаження.

Стійкість циліндричних оболонок, як відомо [1–3], залежить від початкових недосконалостей форми. Аналітичні методи розв'язку задачі стійкості обумовлювали форму недосконалостей у вигляді тригонометричних функцій, що значно звужувало коло досліджень. При окремій дії поверхневого тиску або осьового стиснення початкова недосконаліть в багатьох випадках приймалася у вигляді відповідних форм втрати стійкості, бо така модель регулярних недосконалостей мала найбільший вплив на стійкість оболонки. При дії комбінованого навантаження задача моделювання початкових недосконалостей оболонки є більш складною. Але наявність сучасних обчислювальних комплексів дає можливість задавати недосконалості стінки оболонки в довільній формі.

В роботі запропонований чисельний підхід до визначення стійкості циліндричних оболонок з нерегулярними недосконалостями форми при сумісній дії осьового стиснення та поверхневого тиску [4], який дозволяє моделювати недосконалості у вигляді комбінацій форм втрати стійкості оболонки, що отримані при окремій дії осьового стиснення та поверхневого тиску, оцінити вплив недосконалостей на критичні значення комбінованого навантаження, побудувати поверхню критичних сполучень осьового стиснення і поверхневого тиску та визначити область стійкості циліндричної оболонки змінної товщини при дії комбінованого навантаження.

© Гоцуляк Є.О., Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Шах В.В.

Досліджується стійкість циліндричної оболонки з радіусом $R_{ср}$ =19,978 м, висотою H =17,88 м та товщиною стінки, яка змінюється по висоті від 7,63 мм до 15,98 мм, яка виготовлена із сталі Ст3 з механічними характеристиками: E =2,06·10^{11} Па, μ =0,3, ρ =7800 кг/м^3. Розрахункова модель формується за допомогою обчислювального комплексу скінченноелементного аналізу [5] для сегменту оболонки, недосконаліть якої подається у вигляді комбінацій форм втрати стійкості досконалої оболонки при окремій дії осьового стиснення та поверхневого тиску: $[\gamma\vec{\phi}_P + (1-\gamma)\vec{\phi}_q]$, де γ – безрозмірний коефіцієнт, який приймає значення [0; 0,3; 0,5; 0,7; 1], $\vec{\phi}_P$ та $\vec{\phi}_q$ – вектори форм втрати стійкості досконалої оболонки при дії осьового стиснення та поверхневого тиску відповідно. Створена програма, в якій компоненти векторів форм втрати стійкості додаються до відповідних координат серединної поверхні досконалої оболонки таким чином, щоб максимальна амплітуда початкової недосконалості приймала значення [0,5t_{min}; t_{min}; 1,5t_{min}; 2t_{min}], де t_{min} – мінімальна товщина стінки. Скінченноелементна модель сегменту недосконалої оболонки містить 425 вузлів і 768 плоских трикутних елементів. У вузлах граничних твірних сегменту обмежені переміщення по колу та кути обертання навколо радіуса та твірної.

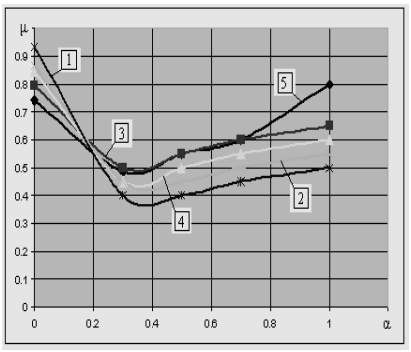
Навантаження задається у вигляді комбінацій осьового стиснення та поверхневого тиску: $[\alpha\bar{P}; (1-\alpha)\bar{q}]$, де $\bar{P} = \dfrac{P}{P^0_{кр}}$ і $\bar{q} = \dfrac{q}{q^0_{кр}}$ – відносні значення осьового стиснення та поверхневого тиску відповідно; $P^0_{кр}$ =430598 Н/м і $q^0_{кр}$ =1230,4 Н/м^2 – критичні значення навантажень циліндричної оболонки без врахування недосконалостей; α – безрозмірний коефіцієнт, що приймає значення [0; 0,3; 0,5; 0,7; 1]. Розв'язання нелінійних рівнянь рівноваги виконується за допомогою модифікованого методу Ньютона-Рафсона. Втрата стійкості оболонки відбувається при критичному сполученні осьового стиснення та поверхневого тиску: $\mu[\alpha\bar{P}; (1-\alpha)\bar{q}]$, де μ – параметр критичного навантаження, значення якого наведений для циліндричної оболонки з недосконалостями різної форми і максимальною амплітудою $\Delta_{макс}$ в табл. 1.

На рис. 1 представлені криві залежності параметра критичного навантаження μ від коефіцієнта комбінованого навантаження α для циліндричної оболонки з недосконалостями, форма якої отримана при різних значеннях коефіцієнту γ.

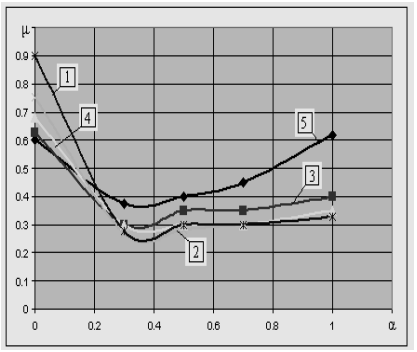
Таблиця 1

$\Delta_{макс}$	Коеф. навант. α	Параметр критичного навантаження μ				
		$\gamma = 0$	$\gamma = 0{,}3$	$\gamma = 0{,}5$	$\gamma = 0{,}7$	$\gamma = 1$
$0{,}5t_{min}$	0	0,742	0,795	0,846	0,866	0,934
	0,3	0,485	0,5	0,45	0,45	0,4
	0,5	0,55	0,55	0,5	0,45	0,4
	0,7	0,6	0,6	0,55	0,5	0,45
	1	0,8	0,65	0,6	0,55	0,5
t_{min}	0	0,601	0,626	0,682	0,754	0,9
	0,3	0,375	0,3	0,3	0,269	0,276
	0,5	0,4	0,35	0,3	0,282	0,3
	0,7	0,45	0,35	0,3	0,3	0,3
	1	0,619	0,4	0,35	0,32	0,33
$1{,}5t_{min}$	0	0,5	0,524	0,6	0,702	0,842
	0,3	0,3	0,25	0,25	0,25	0,25
	0,5	0,3	0,25	0,25	0,25	0,253
	0,7	0,35	0,264	0,278	0,274	0,264
	1	0,5	0,3	0,297	0,289	0,284
$2t_{min}$	0	0,4	0,45	0,486	0,517	0,821
	0,3	0,25	0,2	0,2	0,21	0,243
	0,5	0,25	0,206	0,215	0,25	0,25
	0,7	0,3	0,25	0,25	0,25	0,268
	1	0.3	0.28	0.27	0.27	0.275

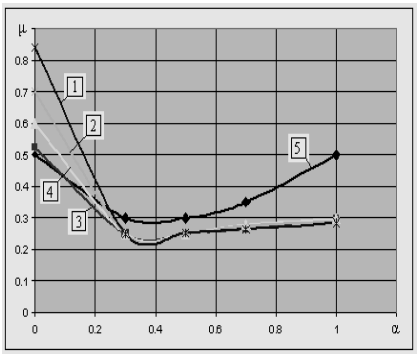
Дослідження показали, що вплив форми недосконалості оболонки зі змінною товщиною не є пропорційним до відповідних комбінацій навантажень. Тобто параметр критичного навантаження μ не є мінімальним при збігу коефіцієнта форми недосконалості γ та коефіцієнта навантаження α. Наприклад, з рис. 1,а видно, що для оболонки з недосконалістю $[0{,}5\vec{\phi}_P + 0{,}5\vec{\phi}_q]$ (крива 4) при дії комбінованого навантаження $[0{,}5\vec{P}; 0{,}5\vec{q}]$ ($\alpha = 0{,}5$) значення параметру критичного навантаження μ не є мінімальним.



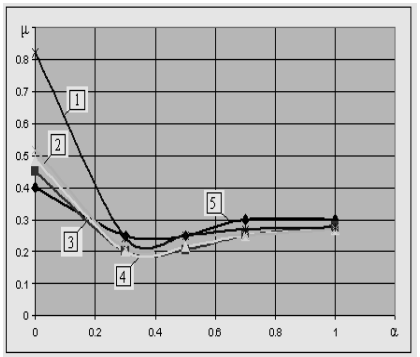
а) 0,5 t_{min}



б) t_{min}



в) 1,5t_{min}



г) 2 t_{min}

Рис. 1. Залежність параметру критичного навантаження μ від коефіцієнта α для оболонки з недосконалостями різної форми і амплітуди:
1) $\gamma = 0$; 2) $\gamma = 0{,}3$; 3) $\gamma = 0{,}7$; 4) $\gamma = 0{,}5$; 5) $\gamma = 1$

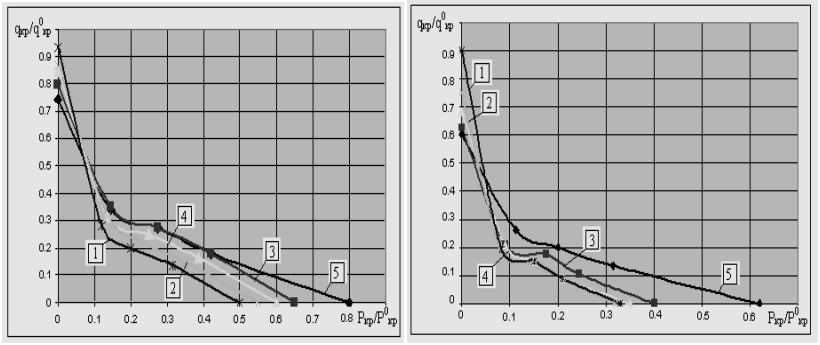
Для визначення області стійкості недосконалої оболонки визначаються критичні сполучення осьового стиснення та поверхневого тиску у вигляді $[\, P_{\text{кр}} / P^0_{\text{кр}};\, q_{\text{кр}} / q^0_{\text{кр}} \,]$. В табл. 2 представлені результати розрахунків для оболонки з недосконалостями різної форми та амплітуди $\Delta_{\text{макс}}$.

Області стійкості оболонки лежать між осями координат та кривими залежності від $P_{\text{кр}} / P^0_{\text{кр}}$ (рис. 3). Видно, що області стійкості для оболонки з різними формами нерегулярних недосконалостей є різними. Вплив недосконалостей на область стійкості не є пропорційним до відповідних комбінацій навантажень.

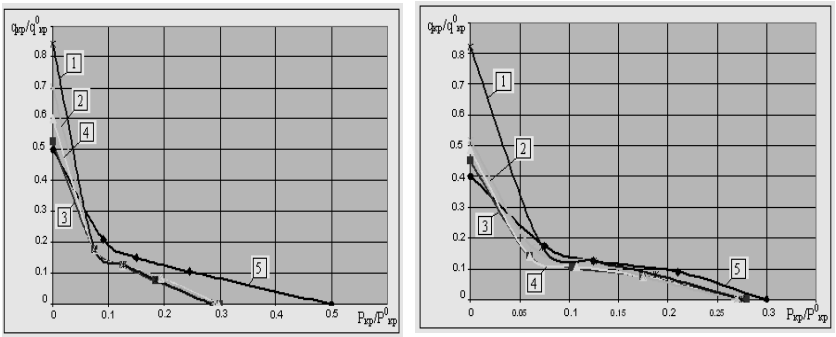
Вважаємо, що областю стійкості оболонки при конкретній максимальній амплітуді її недосконалості є область, яка лежить між осями координат та мінімальними значеннями критичних сполучень навантаження (табл. 3), які відповідають кривим, що обмежують знизу області стійкості оболонки з різними формами і максимальними амплітудами недосконалості.

Таблиця 2

$\Delta_{макс}$	Коеф. навант. α	Критичне значення комбінованого навантаження $[P_{кр}/P^0_{кр}; q_{кр}/q^0_{кр}]$				
		$\gamma = 0$	$\gamma = 0{,}3$	$\gamma = 0{,}5$	$\gamma = 0{,}7$	$\gamma = 1$
$0{,}5t_{min}$	0	[0; 0,742]	[0; 0,795]	[0; 0,846]	[0; 0,866]	[0; 0,934]
	0.3	[0,146; 0,34]	[0,145; 0,35]	[0,135; 0,315]	[0,135; 0,315]	[0,12; 0,28]
	0.5	[0,275; 0,275]	[0,275; 0,275]	[0,25; 0,25]	[0,225; 0,225]	[0,2; 0,2]
	0.7	[0,42; 0,18]	[0,42; 0,18]	[0,385; 0,165]	[0,35; 0,15]	[0,315; 0,135]
	1	[0,8; 0]	[0,65; 0]	[0,6; 0]	[0,55; 0]	[0,5; 0]
t_{min}	0	[0; 0,601]	[0; 0,626]	[0; 0,682]	[0; 0,754]	[0; 0,9]
	0.3	[0,113; 0,263]	[0,09; 0,21]	[0,09; 0,21]	[0,081; 0,188]	[0,083; 0,193]
	0.5	[0,2; 0,2]	[0,175; 0,175]	[0,15; 0,15]	[0,141; 0,141]	[0,15; 0,15]
	0.7	[0,315; 0,135]	[0,245; 0,105]	[0,21; 0,09]	[0,21; 0,09]	[0,21; 0,09]
	1	[0,619; 0]	[0,4; 0]	[0,35; 0]	[0,32; 0]	[0,33; 0]
$1{,}5t_{min}$	0	[0; 0,5]	[0; 0,524]	[0; 0,6]	[0; 0,702]	[0; 0,842]
	0.3	[0,09; 0,21]	[0,075; 0,175]	[0,075; 0,175]	[0,075; 0,175]	[0,075; 0,175]
	0.5	[0,15; 0,15]	[0,125; 0,125]	[0,125; 0,125]	[0,125; 0,125]	[0,127; 0,127]
	0.7	[0,245; 0,105]	[0,185; 0,075]	[0,195; 0,083]	[0,192; 0,082]	[0,185; 0,079]
	1	[0,5; 0]	[0.3; 0]	[0,297; 0]	[0,289; 0]	[0.284; 0]
$2t_{min}$	0	[0; 0,742]	[0; 0,795]	[0; 0,846]	[0; 0,866]	[0; 0,934]
	0.3	[0,146; 0,34]	[0,145; 0,35]	[0,135; 0,315]	[0,135; 0,315]	[0,12; 0,28]
	0.5	[0,275; 0,275]	[0,275; 0,275]	[0,25; 0,25]	[0,225; 0,225]	[0,2; 0,2]
	0.7	[0,42; 0,18]	[0,42; 0,18]	[0,385; 0,165]	[0,35; 0,15]	[0,315; 0,135]
	1	[0,8; 0]	[0,65; 0]	[0,6; 0]	[0,55; 0]	[0,5; 0]



а) 0,5 t_{min} *б*) t_{min}



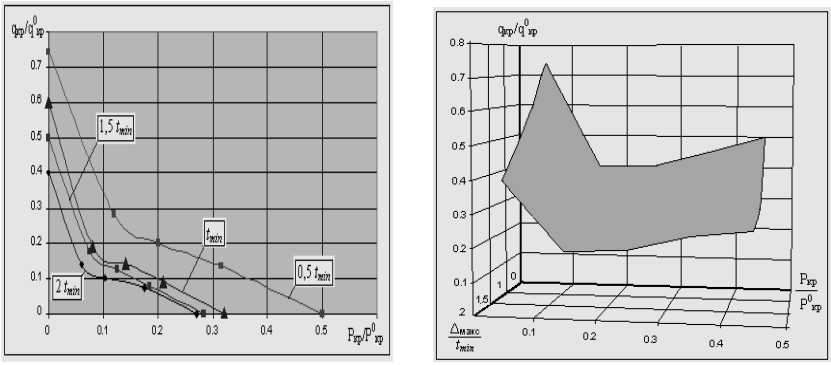
в) 1,5 t_{min} *г*) 2 t_{min}

Рис. 2. Діаграми областей стійкості циліндричної оболонки для оболонки з недосконалостями різної форми і амплітуди:
1) $\gamma = 0$; 2) $\gamma = 0{,}3$; 3) $\gamma = 0{,}7$; 4) $\gamma = 0{,}5$; 5) $\gamma = 1$

Таблиця 3

Мінімальні критичні значення комбінованого навантаження $[\, P_{кр} / P^0_{кр};\ q_{кр} / q^0_{кр} \,]_{мін}$			
$0{,}5t_{min}$	t_{min}	$1{,}5t_{min}$	$2t_{min}$
[0; 0,742]	[0; 0,601]	[0; 0,5]	[0; 0,4]
[0,12; 0,28]	[0,081; 0,188]	[0,075; 0,175]	[0,06; 0,14]
[0,2; 0,2]	[0,141; 0,141]	[0,125; 0,125]	[0,103; 0,103]
[0,315; 0,135]	[0,21; 0,09]	[0,185; 0,079]	[0,175; 0,075]
[0,5; 0]	[0,32; 0]	[0,284; 0]	[0,27; 0]

На рис. 3,а представлені криві мінімальних критичних сполучень осьового стиснення та поверхневого тиску недосконалої оболонки. Видно, що збільшення максимальної амплітуди недосконалості $\Delta_{макс}$ призводить до зменшення області стійкості оболонки.



а *б*

Рис. 4. Криві та поверхня критичних сполучень осьового стиснення та поверхневого тиску оболонки з нерегулярними недосконалостями

Вважаємо, що для в рахування всіх можливих амплітуд недосконалості оболонки треба за допомогою отриманих кривих (рис. 4, а) побудувати поверхню критичних сполучень осьового та бічного стиснення (рис. 4, б). Тоді областю стійкості оболонки змінної товщини з нерегулярними недосконалостями треба вважати область, яка обмежена поверхнею критичних сполучень навантажень та осями координат.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем . – М.: Наука, 1967. – 984с.
2. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек – М.: Наука, 1971. – 807с.
3. *Гоцуляк Є.О., А.Ю.Барвінко, Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Шах В.В* Оцінка впливу початкових недосконалостей циліндричних оболонок резервуарів на їх стійкість при дії бічного тиску // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2008. – Віп. 82. – С. 48-54.
4. *Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Гаран І.Г.* Моделювання початкових недосконалостей циліндричної оболонки змінної товщини при дослідженні її стійкості при дії комбінованого навантаження// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.84. – К.:КНУБА, 2009. – С. 97 –103.
5. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. - М.: ДМК Пресс, 2001.- 448 С.

Отримано 27.05.10

Гоцуляк Е.А., Лукьянченко О.А., Костина Е.В., Шах В.В.

ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ КРИТИЧЕСКИХ КОМБИНАЦИЙ ОСЕВОЙ И БОКОВОЙ НАГРУЗОК ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ

Предложена численная методика исследования устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины с нерегулярными несовершенствами при совместном действии осевого сжатия и поверхностного давления. Данный подход позволяет моделировать несовершенства в виде комбинаций форм потери устойчивости оболочки, строить поверхность критических сочетаний нагрузок, определять области устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины с нерегулярными несовершенствами при действии комбинированной нагрузки.

Goculyak E.O., Lukyanchenko O.O., Kostina E.V., Shah V.V.

CONSTRUCTION OF CRITICAL COMBINATIONS OF THE AXIAL AND SURFACAL LOADINGS SURFACE ON CYLINDRICAL SHELLS OF VARIABLE THICKNESS WITH IRREGULAR IMPERFECTIONS

The numerical research method for stability of cylindrical shells of variable thickness with irregular imperfections under the combined action of axial compression and superficial pressure is offered. This approach allows to design imperfection as combinations of buckling modes of shell, to build the surface of critical combinations of loadings, to determine the areas of stability of cylindrical shells of variable thickness with irregular imperfections under the action of the combined loading.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
Ю.В. Максим'юк
В.П. Андрієвський
О.І. Гуляр, д-р техн. наук

ВПЛИВ УРАХУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ НА ВЕЛИЧИНУ РОЗРАХУНКОВОГО РЕСУРСУ ХВОСТОВИКА ЛОПАТКИ ГТУ

Досліджено вплив геометричної нелінійності на розрахунковий ресурс хвостовика лопатки стаціонарної газотурбінної установки в умовах повзучості.

Вступ. Хвостовик є важливою складовою частиною лопаток стаціонарних газотурбінних установок (ГТУ), розрахунковий ресурс якого значною мірою визначає їх загальний ресурс.

Одним із найбільш важливих питань, від яких залежить достовірність отримуваних результатів досліджень, є коректне визначення розрахункової схеми об'єкта і постановки задачі. Огляд відомих підходів, присвячених різним аспектам обґрунтування постановки задачі та конкретним результатам розрахунку різних типів хвостовиків наведено в роботах [1,3,22].

Найбільш адекватною розрахунковою схемою хвостовика є така, що дозволяє врахувати його взаємодію з фрагментом диска двигуна (рис.1) [1,17,20,22,23,26]. Розв'язання задачі про деформування хвостовика в такій постановці потребує наявності інформації про жорсткість зубців диска турбіни. В той же час, для моделювання таких умов обпирання пружні опори доцільно замінити зустрічною деталлю, що за геометрією та умовами роботи відповідає фрагменту обода диска турбіни. Розгляд сукупності цих елементів ГТУ призводить до необхідності розрахунку ялинкового з'єднання, яке являє собою об'єкт складної структури. Для побудови відповідної дискретної моделі

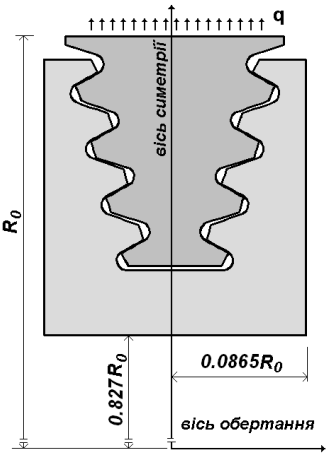


Рис. 1

© Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Андрієвський В.П., Гуляр О.І.

особливого значення набуває використання концепції багатофрагментних сіткових моделей.

Замкові з'єднання лопаток із дисками працюють в умовах важкого і тривалого термосилового навантаження. При температурі газів перед турбіною 820°С – 900°С для з'єднання характерною є температура приблизно 700 С [4]. Несуча здатність деталі в цих умовах значною мірою визначається накопиченням деформацій повзучості і погіршенням фізико-механічних властивостей матеріалу, що потребує використання рівнянь, які враховують накопичення пошкодженості [1,4,7,9,14, ін.] Крім того як зазначено в монографії [6] при конструюванні ГТУ необхідно враховувати також вплив зміни початкової форми окремих деталей.

Інженерні методики розрахунку хвостовиків лопаток ґрунтуються на використанні приблизного закону розподілення навантаження між зубцями з'єднання і не враховують всього комплексу факторів (концентрація напружень, повзучість тощо), у зв'язку з цим виконуються із використанням значних коефіцієнтів запасу [6]. В той же час, внаслідок складної форми досліджуваного об'єкта, його напружено-деформований стан в площині поперечного перерізу відрізняється суттєвою неоднорідністю. При цьому, як показано в роботі [22] зменшення такої неоднорідності шляхом змінення величин зазорів між зубцями хвостовика та диску є практично неможливим. Вплив умов взаємодії по лінії контакту хвостовика і диска на результати досліджень в кожному конкретному випадку потребують додаткових досліджень, а коректне визначення напружено-деформованого стану об'єкта, навіть на етапі пружного деформування, вимагає залучення чисельних методів [1,20, ін].

Чисельне розв'язання задач про визначення напружено-деформованого стану і ресурсу хвостовиків та ялинкових з'єднань як правило, виконується у двовимірній постановці в умовах плоского деформованого стану [1,4,6,9,15,17,20,24], в просторовій постановці відомі лише окремі результати дослідження пружного деформування [23]. Це, насамперед, пов'язано із складністю постановки і розв'язання просторових задач повзучості із урахуванням накопичення пошкодженості, а також незначними відхиленнями величини напружень в напрямку, перпендикулярному площині поперечного перерізу.

Визначення величини розрахункового ресурсу з урахуванням процесу повзучості здебільшого проводяться на основі визначення стаціонарного напружено-деформованого стану або моделювання окремих етапів деформування і подальшої екстраполяції цих результатів на весь процес навантаження [4,15,17,18,20]. В декількох роботах моделювання процесу повзучості здійснено без урахування пошкодженості матеріалу [4,15]. Визначення ресурсу на основі чисельного моделювання повзучості з

урахуванням процесу накопичення пошкодженості здійснено в роботах [17,18], при цьому в [18] розв‘язання задачі здійснено до досягнення параметром пошкодженості критичного значення.

Необхідно відзначити, що питання дослідження впливу на величину розрахункового ресурсу геометрично-нелінійного деформування в відомих роботах залишилось поза увагою.

Мета даної роботи полягає в дослідженні впливу урахування геометричної нелінійності на величину розрахункового ресурсу хвостовика стаціонарної газотурбінної установки в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості матеріалу.

1. Вихідні та розрахункові співвідношення геометрично нелінійної задачі повзучості з урахуванням пошкодженості. При дослідженні геометрично нелінійних задач для двовимірних тіл обертання доцільно використовувати дві системи координат: базисну і місцеву (Лагранжеву).

Опис напружено-деформованого стану об’єктів в процесах, що супроводжуються великими подовженнями і поворотами, як правило, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій x_0^i і актуальній X^i (рис. 2).

Повні деформації в актуальній конфігурації визначаються співвідношенням :

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}\left(F^{ij} - G^{ij}\right). \qquad (1)$$

де F^{ij} – компоненти міри деформації Фінгера, що дорівнюють відповідним компонентам метричного тензору в початковій відрахунковій конфігурації $g_o{}^{ij}$, $F^{ij} = g_o{}^{ij}$, де G^{ij} – компоненти метричного тензору в актуальній конфігурації.

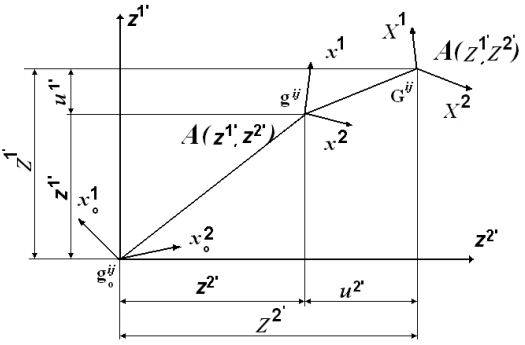


Рис. 2

Введемо проміжну перемінну відрахункову конфігурацію x^i (рис. 2.), компоненти метричного тензора якої позначимо через g^{ij} [10]. Перемінну відрахункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора був малою величиною порівняно з G^{ij} :

$$\Delta G^{ij} = \left(G^{ij} - g^{ij} \right) \langle\langle G^{ij} . \tag{2}$$

Використовуючи перемінну відрахункову конфігурацію представимо деформацію в вигляді суми компонент, обумовлених переходом від початкової відрахункової до перемінної і від перемінної до відрахункової конфігурації:

$$\varepsilon_o^{ij} = \varepsilon^{ij} + \Delta\varepsilon^{ij} ,$$

де

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}\left(g_o^{ij} - g^{ij} \right),$$

$$\Delta\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{ij} - G^{ij} \right) = -\frac{1}{2}\Delta G^{ij} . \tag{3}$$

Коваріантні компоненти ΔG^{ij} визначаються з умови:

$$G^{ik} G_{kj} = \delta_j^i . \tag{4}$$

Представимо компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації в відповідності з (2):

$$\left(g^{ik} + \Delta G^{ik} \right)\left(g_{kj} + \Delta G_{kj} \right) - \delta_j^i = 0 . \tag{5}$$

Нехтуючи приростом малих величин $\Delta G^{ik}\Delta G_{kj}$, одержуємо :

$$\Delta G^{ik} g_{kj} + \Delta G_{kj} g^{ik} = 0 ,$$

Звідси

$$\Delta G^{ik} = -\Delta G_{kj} g^{ik} g^{il} . \tag{6}$$

Коваріантні компоненти приросту деформацій в актуальній конфігурації відносно перемінної відрахункової дорівнюють:

$$\Delta\varepsilon_{kl} = \Delta\varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta\varepsilon^{ij} g_{ik} g_{jl} = -\frac{1}{2}\Delta G^{ij} g_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2}\Delta G_{kl} . \tag{7}$$

Будемо вважати, що в кожній точці тіла для актуальної і проміжної відрахункової конфігурації відомі компоненти тензору перетворення $z^{\alpha'}_{,\beta}$, і $Z^{\alpha'}_{,\beta}$ відповідно, що обумовлюють зв‘язок між місцевою та базисною системою координат:

$$z^{\alpha'}_{,\beta} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_\beta}, \qquad Z^{\alpha'}_{,\beta} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X_\beta}. \tag{8}$$

Подамо компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат через коефіцієнти перетворення і компоненти метричного тензору базисної декартової системи координат:

$$g_{ij} = z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0, \; g_{3'3'} = \left(z^{2'}\right)^2$$

$$g_{\alpha\beta} = z_\alpha^{\nu'} z_\beta^{\nu'}, \quad g_{33} = \left(z^{2'}\right)^2.$$

Аналогічно,

$$G_{\alpha\beta} = Z_\alpha^{\nu'} Z_\beta^{\nu'}, \quad G_{33} = \left(Z^{2'}\right)^2. \tag{9}$$

Нове положення точки А в системі $z^{i'}$ визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = z^{\alpha'} + u^{\alpha'}.$$

Диференціюючи по x^i, визначимо компоненти тензора перетворення:

$$Z^{\alpha'}_{,\beta} = z^{\alpha'}_{,\beta} + u^{\alpha'}_{,\beta}.$$

Представимо коваріантні компоненти метричного тензора $G_{\alpha\beta}$ в актуальній конфігурації через компоненти тензора перетворень:

$$G_{\alpha\beta} = \left(z^{\nu'}_{,\alpha} + u^{\nu'}_{,\alpha}\right)\left(z^{\nu'}_{,\beta} + u^{\nu'}_{,\beta}\right) = z^{\nu'}_{,\alpha} z^{\nu'}_{,\beta} + z^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta} + z^{\nu'}_{,\beta} u^{\nu'}_{,\alpha} + u^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta}$$

$$G_{33} = \left(z^{2'} + u^{2'}\right)^2. \tag{10}$$

Перепишемо (10) в вигляді:

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta},$$

$$G_{33} = g_{33} + \Delta G_{33},$$

де

$$\Delta G_{\alpha\beta} = z^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta} + z^{\nu'}_{,\beta} u^{\nu'}_{,\alpha} + u^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta},$$

$$\Delta G_{33} = \left(2z^{\,2'} u^{2'} + \left(u^{2'} \right)^2 \right). \qquad (11)$$

Підставляючи (11) в (7), опускаємо в подальшому знак Δ запишемо геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних і контраваріантних компонент приросту деформації в проміжній відрахунковій конфігурації:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(z^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta} + z^{\nu'}_{,\beta} u^{\nu'}_{,\alpha} + u^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left(2z^{\,2'} u^{2'} + \left(u^{2'} \right)^2 \right). \qquad (12)$$

Згідно прийнятим припущенням, співвідношення (12) справедливе при малих $\Delta\varepsilon_{kl}$ і великих переміщеннях.

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(z^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta} + z^{\nu'}_{,\beta} u^{\nu'}_{,\alpha} \right),$$

$$\hat{\varepsilon}_{33} = z^{2'} u^{2'}.$$

При ізотермічному навантаженні зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями теорії пластичного течіння для матеріалу при ізотропному спрочненні.

Повний приріст тензора деформацій $d\varepsilon_{ij}$ дорівнює сумі приросту пружних $d\varepsilon^{e}_{ij}$ і деформацій повзучості $d\varepsilon^{c}_{ij}$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^{e}_{ij} + d\varepsilon^{c}_{ij}. \qquad (13)$$

Передбачається, що пружні деформації малі і зв'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Опис деформування в умовах повзучості з урахуванням накопичення пошкодженості здійснюється на основі співвідношень теорії Качанова-Работнова [13,21]:

$$\xi_i^c = D\left(\frac{\sigma_i}{1-\omega}\right)^m, \qquad (14)$$

де інтенсивність швидкості деформацій повзучості $\xi_c^i = \frac{d\varepsilon_c^i}{dt}$, $\varepsilon_c^i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{I_2(D_\varepsilon)}$ – інтенсивність деформацій повзучості [20]; t – час, ω – параметр пошкодженості матеріалу Ю.М.Работнова [21], $\sigma_i = \sqrt{3 s_{ij} s^{ij}/2}$ – інтенсивність нормальних напружень; D, m – константи матеріалу, що залежать від температури і визначаються з базових експериментів на повзучість.

Значення величини параметра пошкодженості $\omega = \omega(t)$ змінюється в процесі деформування матеріалу від $\omega_0 = 0$ в вихідному стані матеріалу до $\omega^* = 1$, що відповідає умові локальної втрати несучої здатності.

Взаємозв`язок компонент тензора швидкостей деформацій повзучості ξ_{ij}^c і напружень має вигляд:

$$\xi_{ij}^c = \frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2}\xi_i^c \frac{s_{ij}}{\sigma_i}. \qquad (15)$$

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості необхідно наведене співвідношення доповнити рівнянням, що описує зміни з часом параметра пошкодженості:

$$\frac{d\omega}{dt}\,\omega^{-\beta} = C_2\left[\frac{\sigma_e}{1-\omega}\right]^m,$$

де σ_e – еквівалентне напруження, обчислене відповідно до обраного критерію міцності [12].

Згідно з роботою [8] найбільш загальною структурою виразу для еквівалентного напруження при ізотропному характері накопичення пошкодженості є:

$$\sigma_e = \alpha\sigma_1 + \beta I_1(\sigma_{ij}) + \gamma I_2(s_{ij}),$$

де $I_1(\sigma_{ij})$, $I_2(s_{ij})$ – відповідно перший і другий інваріанти тензора σ_{ij} і девіатора напружень s_{ij}; α, β, γ – константи матеріалу, $\alpha+\beta+\gamma = 1$

Наведені фізичні співвідношення дозволяють проводити опис процесу континуального руйнування двовимірних тіл на основі моделювання деформацій повзучості з урахуванням пошкодженості матеріалу.

Для отримання матриці жорсткості використовуємо лінійний зв'язок між приростом деформацій і приростом переміщень [10]. Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій, отримаємо вираз варіації енергії:

$$\delta W = \left(\delta \{ u \}^T\right) [K]_n \{ u \}_n , \tag{16}$$

де $[K]_n$ – матриця жорсткості:

$$[K]_n = \left\{ \left[\overset{\circ}{B} \wedge \right]^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left[\overset{\circ}{B} \wedge \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \wedge \right]^T \left[\overset{\circ}{D}_1 \right] \left[\overset{\circ}{B}_1 \wedge \right] + \left[\overset{\circ}{B} \hat{}_2 \right]^T \left[\overset{\circ}{D}_2 \right] \left[\overset{\circ}{B} \hat{}_2 \right] \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} \right. . \tag{17}$$

При поданні варіації енергії деформацій в такому вигляді:

$$\delta W = \left(\delta \{ u \}^T \left[\overset{\circ}{\mathrm{B}} \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left(\delta \{ u \}^T \left(\left[\overset{\circ}{\mathrm{B}}_1 \right]^T + \left[\overset{\circ}{\mathrm{B}}_2 \right]^T \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} =$$

$$= \delta \{ u \}^T \left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\}$$

отримаємо вектор вузлових реакцій, що визначаються по значенням повних напружень в актуальній конфігурації за такою формулою:

$$\left\{ \overset{\circ}{\tilde{r}} \right\} = \left[\left[\overset{\circ}{B} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{2} \left(\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} , \tag{18}$$

2. Алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Моделювання еволюційного процесу нелінійного деформування для геометрично нелінійних задач здійснюється кроковим методом за параметрами навантаження і часу. Вибір величини кроку за параметром Δt за часом здійснюється виходячи з необхідності дотримання умов збіжності, як ітераційного процесу розв'язання систем нелінійних рівнянь, так і отримуваних результатів. Правильний вибір кроку за часом

суттєво впливає на точність отримуваних результатів, тому проведення відповідних досліджень збіжності є важливим етапом розв'язання задачі. При розв'язанні задач повзучості при силовому навантаженні інтервал часу t, підчас якого триває процес деформування, розбивається на скінченне число M відрізків Δt_m $(m = 1,2,3.....,M)$ в загальному випадку різної величини. При цьому критерієм вибору оптимального значення Δt є збіжність ітераційного процесу розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Передбачається, що механічні характеристики в межах кроку по часу є сталими і визначаються по результатам розв'язку на попередньому кроці.

На кожному кроці по часу Δt_m основні операції виконуються в такій послідовності. За величиною обраного кроку по часу Δt_m із використанням значень вектора прирощень переміщень на попередньому кроці $\{\Delta u_{m-1}\}$ і співвідношенням параметрів Δt_{m-1} і Δt_m визначається початкове значення приросту вектора переміщення на даному кроці $\{\Delta u_m\}$. На кожній ітерації n кроку m вектор невідомих переміщень $\{u\}_n^m$ системи нелінійних рівнянь МСЕ може бути поданий через рівняння наведені в роботі [19].

На кожній ітерації n кроку m розв'язання системи нелінійних рівнянь здійснюється із використанням алгоритму :

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1}\left(\{Q\}^m - \{R\}_n^m\right), \qquad (19)$$

Умова збіжності ітераційного процесу:

$$\left(\{Q\}^m - \{R\}_n^m\right) \le \zeta \left\|\{Q\}^m\right\|, \qquad (20)$$

де ζ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь.

У випадку наявності геометрично-нелінійного деформування наприкінці кожного кроку перерахунок базисних координат усіх вузлів сіткової області виконується по формулі:

$$z_m^{\alpha} = z_{m-1}^{\alpha'} + \Delta u_m^{\alpha}. \qquad (21)$$

Для дослідження характеру збіжності і вірогідності результатів, отримуваних із використанням викладеного алгоритму розглянуто тестову задачу про згин защемленої по контуру круглої пластини, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 3) з урахуванням геометричної нелінійності.

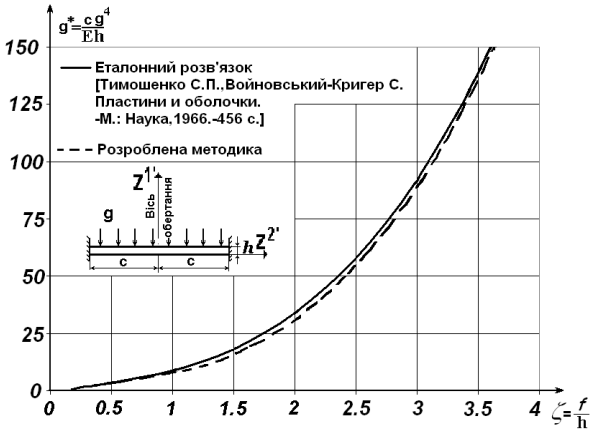


Рис. 3

Геометричні і механічні параметри пластини є наступними: a=0.2 м, h=0.01 м, модуль пружності E=10^5 МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$ В якості еталонного розв'язку використано результат показаний на (рис.3) суцільною лінією в вигляді залежності безрозмірного прогину в центрі пластини від безрозмірного параметра навантаження. Результати розв'язку, отриманого на основі МСЕ, майже повністю збігаються із еталонним розв'язком (рис. 3).

При наявності деформацій повзучості на початку кожної ітерації, n кроку m компоненти тензора напружень σ^{ij} обчислюються за формулою:

$$\left(\sigma^{ij}\right)_n = \left(\sigma^{ij}\right)_{n-1} + \left(\Delta\sigma^{ij}\right)_n, \qquad (22)$$

де $\left(\Delta\sigma^{ij}\right)_n$ – прирощення напружень, які визначаються згідно з законом Гука за величиною прирощення повних деформацій.

Дійсні значення напружень $\left(\tilde{\sigma}^{ij}\right)_n^m$, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються за формулою:

$$\left(\tilde{\sigma}^{ij}\right)_n^m = \frac{1}{3}\delta^{ij}\left(\sigma^{ij}\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(\sigma_o\right)_n^m + \left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m, \qquad (23)$$

де $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ – компоненти девіатора напружень, що враховують прирощення

нелінійних деформацій повзучості.

Для визначення компонент $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$, що входять до складу (23), за (13) обчислюється інтенсивність деформацій повзучості ξ_i^c і компоненти швидкостей деформацій повзучості:

$$\left(\xi_{ij}^c\right)_n^m = \frac{3}{2}\left[\xi_i^c\right]_m^n \frac{\left(s_{ij}\right)_n^m}{\left(\sigma_i\right)_m^n}. \tag{24}$$

де $\left(s^{ij}\right)_n^m = (\sigma)_n^m - (\sigma_0)_n^m$.

Приростання деформацій повзучості $\left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m$ на кроці за часом Δt_m обчислюються за формулою:

$$\left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m = \left(\xi_{ij}^c\right)_n^m \Delta\, t_m\,, \tag{25}$$

після чого здійснюється визначення компонент девіатора $\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m$ дійсних напружень, що входять до формули (23) і враховують деформації повзучості:

$$\left(\overline{s^{ij}}\right)_n^m = \left(s^{ij}\right)_n^m - G_1\left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_n^m, \tag{26}$$

де $G_1 = E\,/\,(1-2\nu)$.

За величинами напружень, отриманих за формулами (23)– (26) обчислюються вузлові реакції. Визначені з їх використанням переміщення перевіряються за умовою збіжності ітераційного процесу (20). В разі її виконання ітераційний процес на кроці завершується і проводиться обчислення приростів деформацій повзучості $\left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_m$ і пошкодженості $(\Delta\omega)_m$ із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку, і відповідних накопичених величин $\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m$ і ω_m:

$$\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\Delta\varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\xi_{ij}^c\right)_m \Delta t_m\,,$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta\omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{d\,t}\right)_m \Delta t_m\,. \tag{27}$$

Формули (22), (24)–(26) є інваріантними щодо конкретизованого вигляду виразів ξ_i^c і $\frac{d\omega}{d\,t}$.

У кінці кожного кроку для всіх точок дискретної моделі здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу:

$$\omega > \omega^*,$$

де ω^* – критичне значення параметра пошкодженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу, $\omega^* \approx 1$ ($\omega^* = 0{,}9$ [16], $\omega^* = 0{,}95 \ldots 0{,}96$ [25], $\omega^* = 0{,}99$ [5]).

Момент часу t*, коли задовільняється умова (24) є моментом переходу від процесу накопичення пор і несуцільностей у матеріалі, що враховуються інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів. Цей момент часу визначає величину основного ресурсу досліджуваного об'єкта.

Передбачаючи, що змінення швидкості деформування від кроку до кроку є незначним, значення приросту вектора переміщень на кроці m визначається таким чином:

$$\{\Delta u_m\} = \frac{\{\Delta u_{m-1}\}\Delta t_m}{\Delta t_{m-1}}.$$

Для дослідження характеру збіжності ітераційного процесу при розв'язанні задач повзучості і підтвердження вірогідності отримуваних результатів розглянемо тестовий приклад про деформування в умовах повзучості тонкостінної трубки [19]. При моделюванні процесу деформування розглядалася ділянка зразка, що обмежена двома поперечними перетинами, проведеними на відстані 1 мм, яка апроксимувалася із використанням вісесиметричного скінченого елемента (рис. 4).

Деформування під впливом постійного розтягуючого навантаження в умовах повзучості описується системою рівнянь:

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A\frac{Sh\left(\sigma/c\right)}{\left(1-\omega\right)^{k_1}}, \qquad \frac{d\omega}{d\,t} = B\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^{k_2},$$

де $A = 3{,}12 \cdot 10^{-4}$ год$^{-1}$, $k_1 = 2{,}36$, $c = 20.5$ МПа, $B = 0{,}58 \cdot 10^{-7}$год$^{-1}$, $k_2 = 3{,}17$ – константи матеріалу при $T = 850^{\circ} C$ [11].

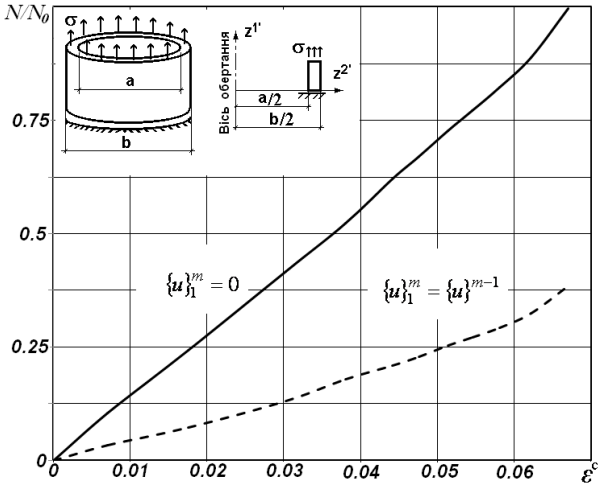


Рис. 4

Величини деформацій повзучості при σ = 60МПа, отримані за формулами (22)-(27) (таблиця 1), добре узгоджуються з експериментальним результатом [11].

Таблиця 1

t , год	2,5	5	7,5	10	12,5
ε_c % [еталон]	0,625	1,27	2,2	3,6	5
ε_c % (22)-(27)	0,625	1,29	2,4	3,76	5
Похибка	0	1,55%	9%	4,44%	0

На графіку (рис. 4) показана залежність відношення кількості ітерацій N, необхідних на розв'язання задачі при різних значеннях деформацій повзучості до кількості ітерацій No, потрібної для розв'язання задачі до максимального рівня деформацій повзучості при застосуванні алгоритму при $\{u\}_1^m = 0$.

Як видно, застосування початкового наближення прирощень переміщень дозволяє зменшити обпилювальні витрати в три рази.

3. Визначення величини ресурсу хвостовика з урахуванням геометричної нелінійності в умовах повзучості.

Розрахунок хвостовика проведений в двовимірній постановці для серединного перетину хвостовика під впливом рівномірно розподіленого розтягуючого навантаження інтенсивністю q=160 МПа, що відповідає дії відцентрових сил пера лопатки (рис. 1). Зубці хвостовика спираються на відповідні до них вирізи в ободі диска, які деформуються. Таким чином, вздовж поверхонь сполучення зубців хвостовика із диском реалізуються граничні умови у вигляді пружних опор. Розв'язання задачі про деформування хвостовика в такій постановці потребує наявності інформації про жорсткість зубців диска турбіни. В той же час, для моделювання таких умов обпирання пружні опори доцільно замінити зустрічною деталлю, що за геометрією та умовами роботи відповідає фрагменту обода диска турбіни. Хвостовик із зустрічною деталлю утворюють ялинкове з'єднання.

Внаслідок симетрії при розрахунку розглядалася половина поперечного перетину об'єкта (рис.5,а), геометричні розміри подані у величинах, віднесених до радіусу R_0 кореневого перерізу лопатки. Без урахування геометричної нелінійності цей об'єкт було розглянуто в роботі [2].

Для опису деформування матеріалу в умовах повзучості застосовано рівняння:

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q} \tag{28}$$

$\sigma_e = \sigma_i = \sqrt{3 s_{ij} s_{ij}/2}$ – еквівалентне напруження.

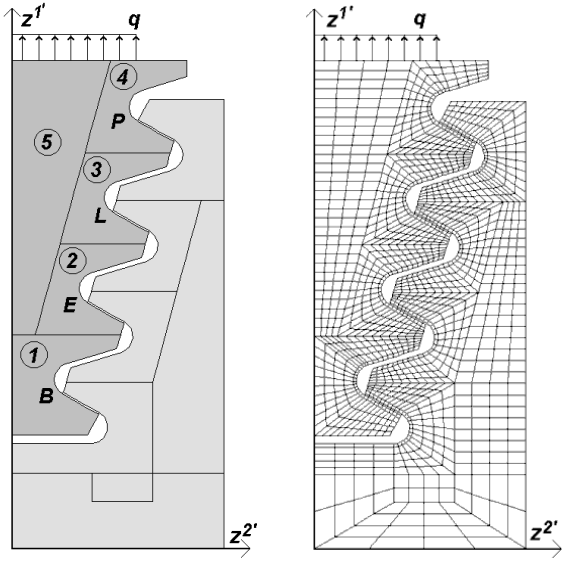
Дослідження збіжності отримуваних результатів в залежності від кількості невідомих скінченоелементної моделі проведено шляхом співставлення розподілів безрозмірної інтенсивності напружень [2] для сіток з кількістю невідомих 1074, 3344 та 9596.

Похибка визначення напружень при пружному деформуванні становить біля 2%. Тому в подальшому використовуємо сітку з 3344 кількістю невідомих (рис. 5,б).

Отримане розподілення безрозмірної інтенсивності напружень наведено на (рис. 6), показало, що максимальні напруження виникають на галтелях хвостовика та зустрічній деталі.

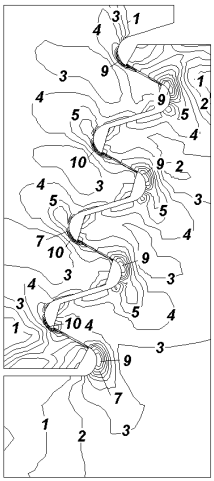
Для більш детального аналізу збіжності результатів було досліджено розподілення безрозмірної інтенсивності напружень вздовж кривої, що проходить через зону максимальних напружень вздовж поверхні зуба хвостовика. В роботі [2],показані результати, отримані при застосуванні

скінченоелементних моделей з кількістю невідомих 3344 та 9596 майже повністю співпав (похибка менше 1%), в той же час на сітці з кількістю невідомих 1074 максимальні напруження є меншими майже на 10%.



а *б*

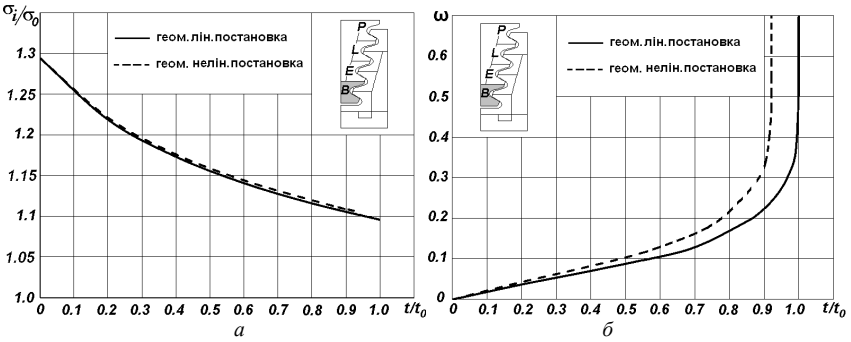
Рис. 5



Поз. на ізолініях	σ_i / σ_0
1	0,12
2	0,24
3	0,36
4	0,48
5	0,60
6	0,72
7	0,84
8	0,95
9	1,07
10	1,19

Рис. 6

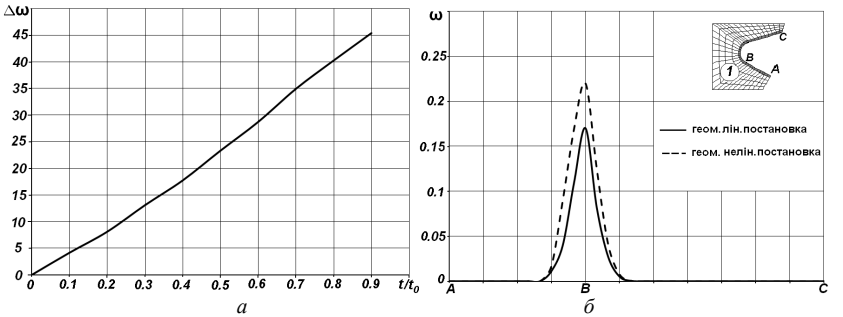
В подальшому досліджувався вплив геометричної нелінійності в умовах повзучості на напружено-деформований стан об'єкту та величину основного ресурсу хвостовика.



а *б*

Рис. 7

На рис. 7а проілюстровано зміну безрозмірної інтенсивності напружень з часом в нижній галтелі хвостовика з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності, залежність зміни параметра пошкодженості з часом показано на рис. 7б. На рис. 8а показана накопичення різниці розв'язку за часом зміни параметра пошкодженості з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності. Розглядаючи графік можна зробити висновок, накопичення різниці відбувається по лінійному закону. На рис. 8б показано розподілення параметра пошкодженості вздовж радіусу цієї галтелі в момент часу $0{,}8t_0$.

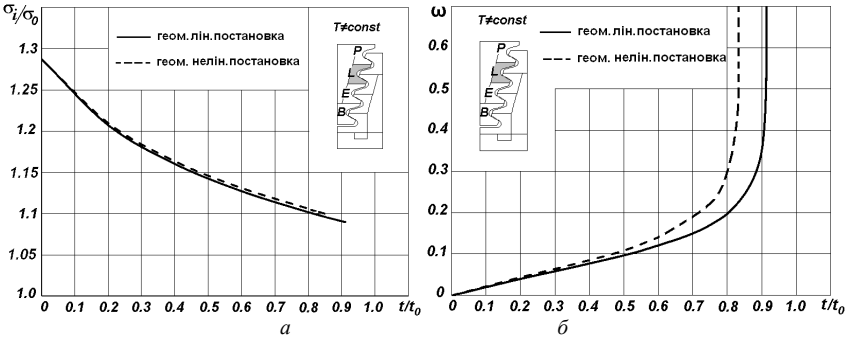


а *б*

Рис. 8

Аналіз показав, що зміна інтенсивності напружень при геометрично лінійній і нелінійній постановках складає порядку біля 0,6%. В той же час ресурс зменшується на 8%.

На другому етапі розв'язання даної задачі проведене дослідження впливу неоднорідного температурного поля на еволюцію параметрів напружено-деформованого стану і розрахунковий ресурс хвостовика лопатки з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності. Зміна температури по висоті поперечного перерізу хвостовика лопатки описується лінійним законом, максимальні і мінімальні значення лежать в межах ±0.5% від значення температури в перерізі, що знаходиться на відстані $0{,}9345R_0$ від осі обертання диска.



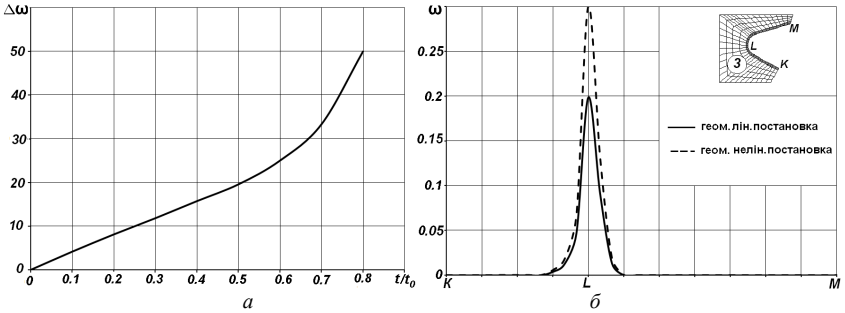
а *б*

Рис. 10

Проведений розрахунок хвостовика показав, що врахування нерівномірного розподілення температури майже не впливає на загальний напружено-деформований стан. Відповідна якісна картина розподілення напружень як в цілому в поперечному перерізі так і вздовж галтелей, не змінюється. В той же час, температура суттєво відображається на фізико-механічних характеристиках матеріалу (константах повзучості) (28), що призводить до зміни ресурсу. Для даного розподілення температури значення розрахункового ресурсу становить t^T=0,9$1t$ [2].

З графіка зміни безрозмірної інтенсивності напружень та параметра пошкодженості з часом, що побудовані із урахуванням та без урахування геометричної нелінійності (рис. 10а,б) видно, що врахування нерівномірного розподілення температури в хвостовику приводить до зміни розташування точки, де виникають максимальні значення пошкодженості порівняно з розрахунком при постійній температурі. Максимальні значення напружень в початковий момент часу виникають в точці *B*, що знаходиться на галтелі фрагмента *1* (рис.7а,б), а максимальні значення пошкодженості виникають в точці *L* фрагмента 3. На рис. 8а показана накопичення різниці розв'язку за часом зміни параметра пошкодженості з урахуванням і без урахування геометричної нелінійності тільки вже для галтелі номер *L* фрагмента 3. Також на рис. 11б показано

зміну параметра пошкодженості вздовж радіусу цієї галтелі в момент часу $0{,}8t_0$.



а *б*

Рис. 11

Таким чином, проведене визначення ресурсу до початку руйнування хвостовика лопатки газотурбінної установки в умовах термосилового навантаження показало, що врахування нерівномірного розподілення температур по висоті дозволяє уточнити розрахунковий ресурс більш ніж на 9%, а врахування геометричної нелінійності в умовах повзучості – на 8% порівняно із геометрично лінійною постановкою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Анищенко Г.О., Морачковський О.К.* Обзор решений задач ползучести и разрушения елочных замковых соединений лопаток ГТД. – Весник нациогального технического университета «ХПИ» - Харьков.: №38, 2007
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П.* Дослідження впливу нерівномірного розподілу температури на ресурс хвостовика лопатки газотурбінної установки // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 83. – С.3–32.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
4. *Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
5. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1976. – 360 с.
6. *Гецов Л.Б.* Материалы и прочность деталей газовых турбин. – М.: Недра, 1996. – 591с.
7. *Гецов Л.Б.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Санкт-Петербург.:Изд. Политехнического университета, 2005. – 52 с.
8. *Голуб В.П.* Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости // Прикл. механика. – 2000. – № 3. – С. 31–66.
9. *Грубин Н.А.* Расчет на прочность елочного замка лопаток турбин. – М.: Машиностроение, 1970. – 184 с.

10. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Максим'юк Ю.В., Сизевич Б.І* Розрахункові співвідношення МССЕ геометрично нелінійної задачі темов'язкопружно-пластичного деформування вісесиметричних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу. - Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.79, 2007.
11. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / *Под ред. С.А. Шестерикова* – М.: Машиностроение, 1983. –101 с.
12. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974.– 312 с.
13. *Качанов Л.М.* Теория ползучести . – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
14. *Лейкин А.С.* Напряженность и выносливость деталей сложной конфигурации. – М.: Машиностроение, 1968. – 372 с.
15. *Мавлютов Р.Р.* Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. –М.: Наука, 1981. – 141 с.
16. *Мазур В.Н.* Решение пространственных краевых задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала при ползучести.// Известия ВУЗов: Машиностроение. – М.: Машиностроение, 1992. – № 4 – 6. – С. 41–45.
17. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть машиностроительных конструкций. – М., Машиностроение, 1981. – 221 с.
18. *Морачковський О.К.* О нелинейных задачах ползучести тел при воздействии быстро осциллирующего поля. – Прикладная механика - К.: т. 34, №3, 1998.
19. *Пискунов С.О., Гуляр О.І., Максим'юк Ю.В.* Алгоритм розв'язання геометрично нелінійної задачі термов'язко-пружнопластичного деформування вісесиметричних тіл. - Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. – К.:КНУБА, Вип.83, 2009
20. *Приложение* методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач в машиностроении: в 2 ч. – К.: Вища школа, 1991.– Ч. 2. Можаровский Н.С., Качаловская Н.Е. Методы и алгоритмы решения краевых задач.: Учеб.пособие – 287 с.
21. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
22. *Сухинин В.П.* Расчет нагрузочных и деформационных характеристик елечных хвостових соединений рабочих лопаток паровых турбин. – Проблемы машиностроения, Харковь.: т.8,№1,2005
23. *Сухинин В.П., Фурсова Т.Н. Н*апряженно-деформированное состояние хвостовых соединений высоконагруженных лопаток паровых турбин – Весник нациогального технического университета «ХПИ» - Харьков.: №3, 2010
24. *Скубачевский Г.С.* Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей. – М.: Машиностроение, 1981. – 552 с.
25. *Шевченко Ю.Н., Мазур В.Н.* Решение плоских и осесимметричных задач термовязкопластичности с учетом повреждаемости материала при ползучести // Прикл. механика. – 1986. – № 8. – С. 3–14.
26. *Шульженко Н.Г., Гонтаровський П.П., Мележик И.И., ГецовЛ.Б.* Расчетная оценка живу чести многоопорных замковых соединений. – Весник двигателестроения. – Запорожье.: ОАО «Мотор Сич», №2, 2009

Отримано 07.05.10

Баженов В.А., Максимюк Ю.В., Андриевский В.П., Гуляр А.И.

ВЛИЯНИЕ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ВЕЛИЧИНУ РАСЧЕТНОГО РЕСУРСА ХВОСТОВИКА ЛОПАТКИ ГТУ

Исследовано влияние учёта геометрической нелинейности на расчетный ресурс хвостовика лопатки стационарной газотурбинной установки в условиях ползучести.

Bazhenov V.O., Maksymiuk Y.V., Andriievskyi V.P., Guliar A. I., Piskunov S.O.

INFLUENCE OF ACCOUNT OF GEOMETRICAL NON-LINEARITY IS ON SIZE OF CALCULATION RESOURCE OF TAILPRESS OF SHOULDER-BLADE OF GTU

Influence of geometrical non-linearity on the calculation resource of blade tail press of the stationary gas-turbine setting under creep loading conditions is investigatigated.

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
І.І. Солодей, канд. техн. наук,
А.Ю. Приходько

ВИКОРИСТАННЯ НАПІВАНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ПЕРІОДИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

На основі напіваналітичного метода скінченних елементів розроблено ефективний підхід до дослідження стаціонарних періодичних коливань неоднорідних тіл із складною формою та структурою поперечного перерізу. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів, що охоплюють тіла довільної мірності при різноманітних граничних умовах. Проведено аналіз особливостей процесів динамічного деформування, що протікають у реальних конструкціях.

Вступ

Значна частина реальних конструкцій, що розглядається з позицій механіки деформівного твердого тіла, перебуває під дією нестаціонарних зовнішніх впливів. Для визначення найбільш небезпечних з погляду міцності конструкцій значень параметрів напружено-деформованого стану необхідно простежити весь процес деформування, що призводить до необхідності розв'язання нестаціонарних просторових задач. Це вимагає здійснення просторово-часової апроксимації і веде до збільшення розмірності задачі.

Зважаючи на складність поставленої задачі, її розв'язання потребує застосування чисельних методів. В наш час найбільш універсальним чисельним методом, що використовується у наукових дослідженнях, особливо для розрахунку складних об'єктів, є метод скінченних елементів [6]. Не дивлячись на те, що дослідження просторового динамічного напружено-деформованого стану методом скінченних елементів є одним з найважливіших напрямків сучасної механіки деформівного тіла, залишаються суттєві труднощі, які зумовлені високою розмірністю математичної моделі МСЕ та великим об'ємом інформації, що звужують область його використання для розв'язання складних просторових задач динаміки.

Істотно підвищити ефективність МСЕ дозволяє його поєднання з методом розділення невідомих. Цей підхід одержав назву напіваналітичного методу скінченних елементів. НМСЕ був запропонований в роботах [1, 10] як ефективний метод розв'язання просторових задач теорії пружності для невісесиметрично навантажених тіл обертання, та розвинений в роботах [2, 3, 9]. Висока ефективність

© Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.

напіваналітичного варіанта у порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних.

Для апроксимації просторових неоднорідних тіл використовуються неоднорідні замкнені кругові або прямолінійні призматичні скінченні елементи, що являють собою призму утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж твірної у вигляді дуги кола або прямої [8]. Суть апроксимації полягає у розкладі невідомих задачі вздовж твірної по деякій системі неперервних гладких функцій (ряди Фур′є) у поєднанні із скінчено елементною дискретизацією в області поперечного перерізу. Основні теоретичні положення методики, що використовується в даній роботі висвітлені в публікаціях [4, 5].

Розробка ефективних методів розв'язання великих задач, що виникають при розрахунку конструкцій споруд та об'ємних тіл складної форми, значно зменшують час аналізу, що в свою чергу зменшує строки виконання проекту, його кошторис та збільшує якість, завдяки реальній можливості за невеликий час оцінити велику кількість конструктивних рішень. Це суттєво розширює можливості МСЕ програм, що орієнтовані на доступні рядовому користувачу персональні комп'ютери.

1. Дослідження збіжності та вірогідності результатів НМСЕ в задачах періодичних коливань просторових конструкцій

Проведено дослідження збіжності НМСЕ в задачі періодичних коливань защемленої по контуру круглої пластини під дією розподіленого по частині пластини нормального навантаження (рис.1), що змінюється за законом $q = q_0 \sin pt$, $q_0 = 1$ Н/м, $p = 40$ с$^{-1}$. Радіус пластини $R = 3$ м, товщина $h = 0.2$ м. Аналітичне рішення задачі отримане в [11] і відображене на рис. 2 і рис. 3 у вигляді епюр амплітуд нормальних переміщень (цифра 4). На рис. 2 показані результати для даної задачі при використанні неузгодженої матриці мас, на рис. 3 – погодженої. Цифрами позначені графіки, побудовані при описі пластини вздовж радіусу наступним числом скінченних елементів: 1 – $n = 3$, 2 – $n = 6$, 3 – $n = 12$. При використанні обох типів матриці мас спостерігається добра збіжність чисельних рішень, а використання 12 СЕ вздовж радіусу забезпечує похибку результатів в області максимальних значень амплітуд коливань в межах 1%.

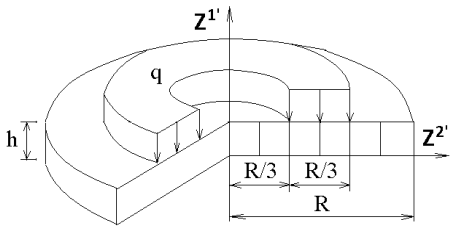


Рис. 1

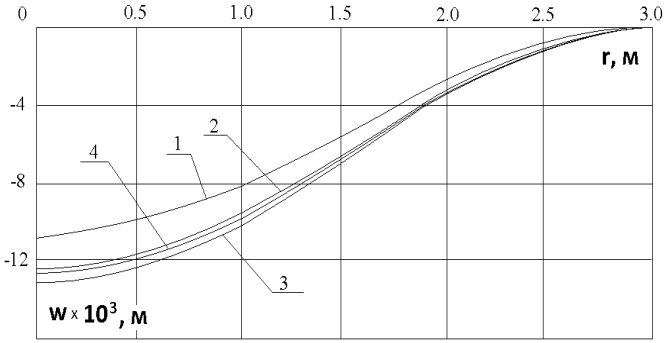


Рис. 2. Використання неузгодженої матриці мас

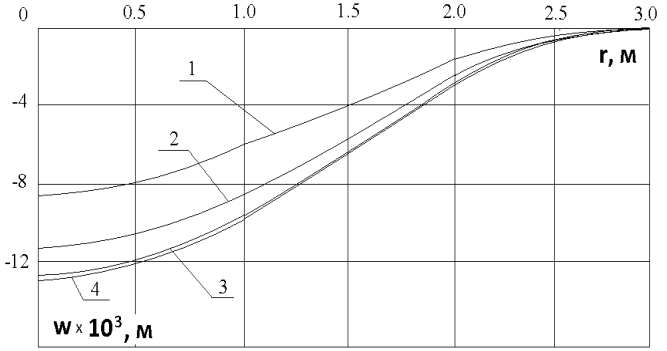


Рис. 3. Використання погодженої матриці мас

Можливість застосування підходу до дослідження сталих коливань призматичних тіл ілюструється на прикладі циліндричного зводу із шарнірним обпиранням по торцях (рис. 4). Звід навантажений зосередженою силою, що змінюється за законом $P = P_0 \sin pt$, прикладеної в центрі прольоту. Амплітуда сили $P_0 = 1$ Н, частота коливань $p = 2$ с$^{-1}$. Довжина зводу L = 54.4 м, товщина h = 0.2 м, радіус серединної поверхні R = 14.4 м. Характеристики матеріалу зводу: $E = 5.6 \cdot 10^3$ МПа, $\rho = 1.6 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\nu = 0$.

В результаті досліджень збіжності чисельних рішень встановлено, що для апроксимації об'єкту досить сіткової області 2x17 і утримання 9 членів ряду Фур'є вздовж направляючої.

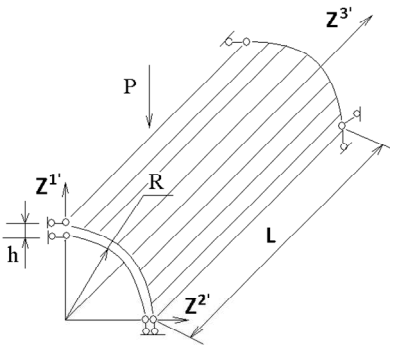


Рис. 4. Модель зводу

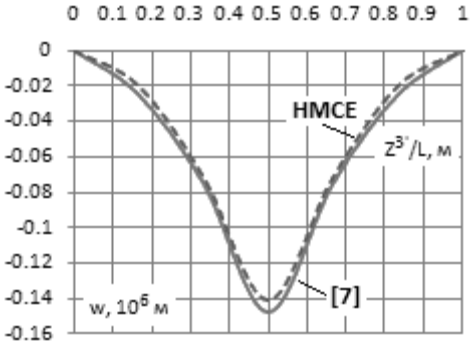


Рис. 5. Вертикальний прогин зводу

Така апроксимація забезпечує добре узгодження чисельного рішення з аналітичним [7] – похибка визначення максимальних значень амплітуди коливань складає 1-3% (рис. 5).

2. Аналіз стаціонарних коливань резервуару для прийому і зберігання пальмового стеарину під дією вітрового навантаження

Об'єктом дослідження є резервуар, що знаходиться під дією статичних і періодичних за часом силових зовнішніх навантажень. Резервуар призначено для зберігання пальмового стеарину.

Будівельні металоконструкції резервуару запроектовані в традиційній формі вертикального циліндру, що складається з днища, стінки і криши. Стінка резервуару виготовляється у вигляді полотнища довжиною 28.3 м та висотою 17.88 м з 12 рядів листів по висоті, внутрішній діаметр - 9.0 м. Товщина листа – 10 мм. Стінка на рівні днища кріпиться до фундаменту за допомогою 12 фундаментних болтів марки М30. Кришка резервуару збірна конічна, складається з 12 щитів, має ухил 1:8. Всі заводські з'єднання зварні, монтажні – на болтах і зварні. Днище резервуару виготовляється у вигляді полотнища, має ухил 1:33, товщина 10 мм. По висоті резервуару розташовані 2 проміжних кільця жорсткості з інтервалом 5960 мм з L№75х6 С245. Відстань від днища резервуару до нижнього та від кришки до верхнього кільця жорсткості – 5760 мм та 6160 мм відповідно.

До статичних навантажень, що розглядаються, відносяться: вага термоізоляції 36 кгс/м^2, власна вага конструкції (розраховується виходячи із щільності матеріалу резервуару – 7800 кг/м^3), вага продукту, що зберігається (розраховується виходячи із щільності матеріалу продукту – 920 кг/м^3), вага обладнання 200 кгс/м^2, корисне навантаження і

надлишковий тиск 100 кгс/м^2. Снігове навантаження 100 кгс/м^2 на площадках покриттів враховується з коефіцієнтом надійності рівним 1.4.

Вітрове навантаження визначається як сума середньої та пульсаційної складових:

$$q(z,t)=q_н^c(z)+q^t(z,t). \qquad (1)$$

Нормативне значення середньої складової вітрового навантаження $q_н^c(z)$ на висоті z над поверхнею землі визначається за формулою:

$$q_н^c(z)=q_0 kc, \qquad (2)$$

де q_0 - нормативне значення вітрового тиску; k – коефіцієнт, що враховує зміну вітрового тиску по висоті; c – аеродинамічний коефіцієнт.

Розрахунки проводились для для вітрового району III та типу місцевості С (міські райони).

Пульсаційна складова навантаження обчислюється за формулою:

$$q^t(z,t)=2\frac{\upsilon(z,t)}{\upsilon_н(z)}q_н^c(z), \qquad (3)$$

де $\upsilon(z,t)$ - пульсаційна складова швидкості вітру на рівні z; $\upsilon_н(z)$ - нормативна швидкость вітру на стандартній висоті анемометра (10 м).

При розрахунках висотних споруд, чуттєвих до динамічного впливу вітру, необхідно знати розподіл енергії турбулентного потоку по частотам. Цей розподіл називають енергетичним спектром (спектральною щільністю) пульсації компонент швидкості вітру, один з яких: емпіричний спектр Давенпорта $S(n)$ отриманий на основі аналіза спектрів повздовжньої пульсації швидкості при сильних вітрах. На практиці використовують його нормоване значення по відношенню до середнього квадрату пульсації швидкості (табл. 1):

$$S_н(n)=u^2\Big/\left[3n\left(1+u^2\right)^{\frac{4}{3}}\right],\ u=nL/\upsilon_н\ , \qquad (4)$$

L = 1200 м – масштаб довжини.

При цьому, швидкість пульсації, що відповідає заданій частоті визначається виразом:

$$\upsilon_k(z)=\sqrt{S(n_k)\Delta n_k}\ . \qquad (5)$$

Виходячи із $S_н(n)=S(n)\Big/6r_0\upsilon_н^2(z)$ та використавши коефіцієнт лобового опору підстилаючої поверхні $r_0=0.04$, що відповідає міській місцевості, отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{6r_0}}\frac{\upsilon_k(z)}{\upsilon_н(z)}=\sqrt{S_н(n)\Delta n} \tag{6}$$

оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{6r_0}}\approx 2\text{, маємо } 2\frac{\upsilon_k(z)}{\upsilon_н(z)}=\sqrt{S_н(n)\Delta n}\ . \tag{7}$$

Таблиця 1

Нормовані значення енергетично спектру Давенпорта

T, с	*n*, Гц	ω, рад/сек	*Sн*(n)
4347.826087	0.00023	0.001445	0.417311179
2173.913043	0.00046	0.00289	0.834141926
869.5652174	0.00115	0.007226	2.076981036
434.7826087	0.0023	0.014451	4.09509904
217.3913043	0.0046	0.028903	7.747200632
86.95652174	0.0115	0.072257	13.85037473
43.47826087	0.023	0.144513	12.70643235
21.73913043	0.046	0.289027	6.530971643
8.695652174	0.115	0.722566	1.692691328
4.347826087	0.23	1.445133	0.547922827
2.173913043	0.46	2.890265	0.17378234
0.869565217	1.15	7.225663	0.037810803
0.434782609	2.3	14.45133	0.011912965
0.217391304	4.6	28.90265	0.003752609
0.086956522	11.5	72.25663	0.000814908

Виходячи із отриманих значень вводимо тимчасову функцію *f(t)* коефіцієнтів пульсації:

$$f(t)=2\frac{\upsilon(z,t)}{\upsilon_н(z)}=\sum_k 2\frac{\upsilon_к}{\upsilon_н}\sin\omega_k t\,. \tag{8}$$

Тоді формула для обчислення значень вітрового навантаження приймає вигляд:

$$q(z,t)=\left[1+f_p(t)\right]q_н^c(z)\,. \tag{9}$$

На першому етапі отримано розв'язок статичної задачі відносно ряду стаціонарних навантажень (включаючи постійну складову вітрового навантаження). Епюри максимальних кільцевих та повздовжніх напруг вздовж поперечного перерізу конструкції представлені на рис. 7. Як видно, найбільш проблемними є області з'єднань циліндричної частини з кришкою та днищем. При цьому значення напружень не перевищують 150 МПа.

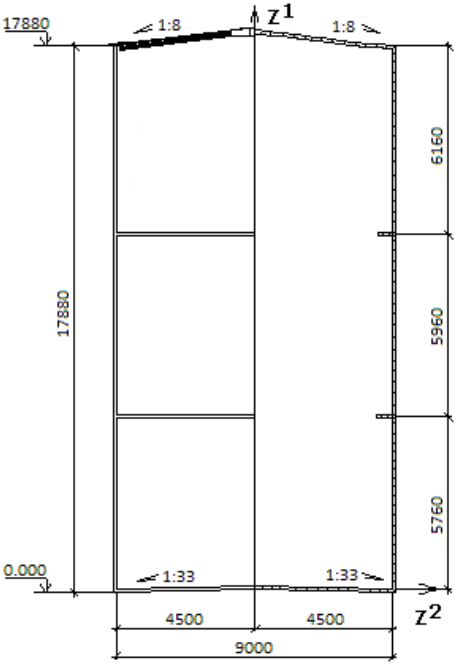


Рис. 6. Модель резервуару

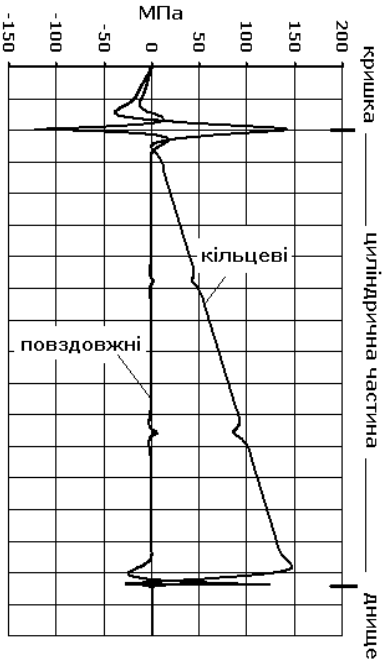


Рис. 7. Результати задачі статики

На другому етапі проводився розрахунок динамічної задачі. Для подання пульсаційної частини вітрового навантаження використовувався ряд Фур'є. На рис. 8, 9 показано еволюцію максимальних повздовжніх та кільцевих напружень у часі, які реалізуються в зоні з'єднання циліндру і кришки. Результати показують, що динамічна частина вітрового навантаження привносить до загального напружено-деформованого стану напруження приблизно рівні 18 МПа, що складає 12% від результатів статичного розв'язку.

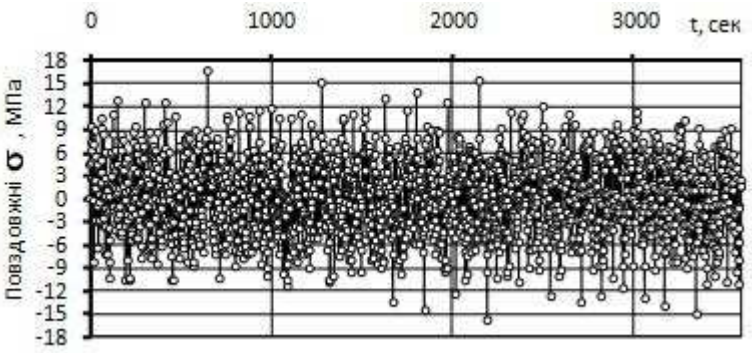


Рис. 8. Повздовжні напруження

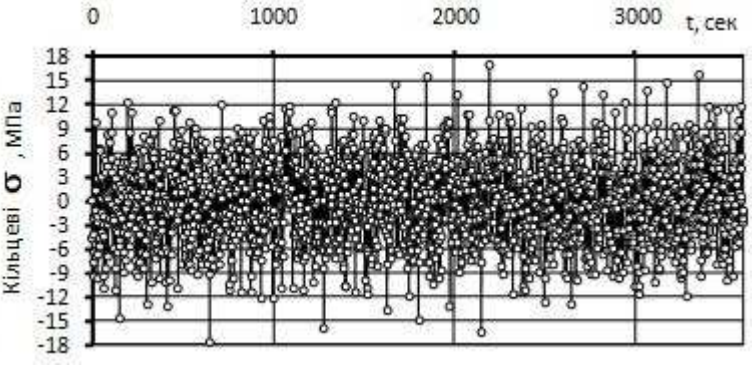


Рис. 9. Кільцеві напруження

Висновки

На основі напіваналітичного методу скінченних елементів розроблено ефективний підхід до дослідження стаціонарних періодичних коливань неоднорідних тіл із складною формою та структурою поперечного

перерізу. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів, що охоплюють тіла довільної мірності при різноманітних граничних умовах. В процесі виконання роботи проведено аналіз особливостей реальних процесів динамічного деформування, що протікають у складних конструкціях. На основі напіваналітичного методу скінченних елементів проведено дослідження нестаціонарного процесу деформування резервуару, який призначений для зберігання пальмового стеарину і являє собою просторове тіло обертання зі складною формою поперечного перерізу, під дією ряду статичних та змінного у часі вітрового динамічного навантаження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл // КНУБА, 2005, 298с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості реалізації НМСЕ в задачах динамічної взаємодії неоднорідних пружнопластичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.69, 2001. – с.134-146
4. *Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах лінійних стаціонарних коливань просторових тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.81, 2007.-с.142-158.
5. *Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.* Дослідження ефективності динамічного розрахунку будівельних конструкцій, що знаходяться під дією рухомих навантажень // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. – К.:КНУБА, Вип.84, 2009.-с.32-41.
6. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.
7. *Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов О.В.* Устойчивость и динамика в примерах и задачах. – М.: Высш.шк. – 1987. – 264с.
8. *Солодей І.І.* Ефективність скінченноелементної бази напіваналітичного метода скінченних елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.154-163.
9. *Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І.* Використання спеціальних скінченних елементів з тріщиною в задачах механіки руйнування при нестаціонарних динамічних навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.84, 2009. –с.49-64
10. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
11. *Коренев В.Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматлит, 1960. – 458с.

Отримано 17.09.10

Баженов В.А., Солодей И.И., Прыходько А.Ю.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

На основе полуаналитического метода конечных элементов разработан эффективный подход к исследованию стационарных периодических колебаний неоднородных тел со сложной формой и структурой поперечного сечения. Достоверность получаемых результатов и эффективность подхода подтверждены решением контрольных примеров, которые охватывают тела различной мерности при различных граничных условиях. Проведено анализ особенностей процессов динамического деформирования, которые протекают в реальных конструкциях.

Bazhenov V.A., Solodei I.I., Pryhodko A.Y.

SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD USES IN PERIODICAL 3D ANALYSIS

The advanced variant of Semi-analitical Finite Element Method (SFEM) is developed to simulate three-dimensional periodical oscillations of arbitrary loaded heterogeneous along all co-ordinates solids of revolution and hinged prismatic solids. Reliability of computational intelligence and efficiency of mentioned approach are corroborated with the help of test solutions. A stress analysis of important construction under static and dynamic periodical loading is considered to demonstrate method to solving 3D problems.

УДК 539.3

О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

ПОРІВНЯННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ РІЗНИХ ТИПІВ

Аналізується вплив змінювання як параметрів зовнішнього періодичного навантаження, так і конструктивних параметрів нелінійних віброударних систем з двома масами двох різних типів з двома ступенями вільності на характер їхнього руху. Удар моделюється силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца. При змінюванні параметрів обидві системи змінюють характер коливальних режимів від одно ударного гармонічного до багато ударних субгармонійних аж до хаотичного. Але система з ударом о м'який обмежник дещо більш чутлива до змінювання параметрів і частіше змінює характер коливальних режимів, ніж система з ударом о твердий обмежник.

Вступ

Одним з головних завдань при підготовці сучасних освічених інженерів є необхідність дати їм в руки інструменти, які дозволяють розглядати досліджувані об'єкти з єдиної точки зору: "модель – розрахункова схема – отримання розв'язку – коректна інтерпретація результату" [1].

У статті ця задача розв'язується для різних типів двомасових нелінійних віброударних систем з двома ступнями вільності, на які діє періодичне зовнішнє навантаження. Перша модель віброударної системи з твердим обмежником коливань є класичною моделлю системи, у якої приєднане тіло може бути використане як ударний гаситель коливань (рис. 1,а). Друга модель з м'яким обмежником коливань відповідає віброударному майданчику, що широко застосовується у будівельному виробництві задля ущільнення бетонних сумішей та формування бетонних виробів великої маси (рис. 1,б).

Коливання в віброударних системах характеризуються різким змінюванням швидкості в деякі проміжки часу, і за цією причиною їх іноді називають розривними. Та сама обставина є причиною нелінійності таких систем.

В літературі пропонуються принципи класифікації віброударних систем за різними аспектами [2], а саме за:

– числом ступенів вільності;
– кількістю перешкод, що обмежують рух;
– характером переміщення перешкод, що обмежують рух;
– типами сил, що діють в системі – сили пружності, сили опору;

© Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.

– кількістю сил збурення;
– характером збурення – кінематичне чи динамічне;
– характеристиками сил, які аналізуються в системі – пружні сили: лінійні чи нелінійні, сили демпфірування: лінійні чи нелінійні, сили тертя: лінійні чи нелінійні;
– виглядом перешкод, що обмежують рух – тверді обмежники, м'які обмежники.

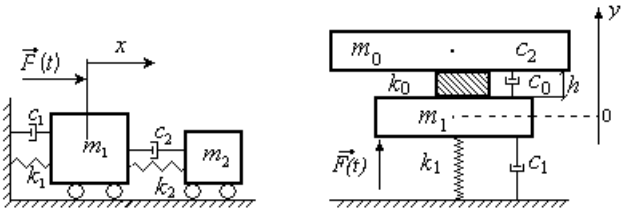
Розподіл механічних систем з ударами за виглядом перешкод, що обмежують рух, здійснюється на основі різних способів моделювання удару – вирішальним тут є коефіцієнт жорсткості; саме швидкоплинність удару та його сила визначаються жорсткістю контактуючих тіл. Вважається, що в системах з твердим обмежником тривалість удару є безмежно малою і коефіцієнт відновлення має постійне значення, тому удар може бути змодельований граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення. Інший варіант моделювання полягає в застосуванні нелінійної сили контактної взаємодії, яка діє лише під час удару і може бути описана різними законами [3]. В системах з м'яким обмежником припущення про миттєвість удару не відповідає дійсності. В своїх попередніх роботах ми довели, що в таких системах моделювання удару граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення не відтворює реальну картину руху віброударної систиеми, удар слід моделювати нелінійною силою контактної взаємодії [4].

1. **Постановка задачі**

В статті розглядаються віброударні системи з двома масами і з двома ступнями вільності, характеристики яких співпадають за усіма аспектами які представлені вище , крім одного, а саме властивості обмежувальної перешкоди – удар здійснюється о твердий чи о м'який обмежники.

Використання ударних процесів в цих віброударних системах пов'язано з тонкими динамічними ефектами, що супроводжують співудари тіл. При роботі віброударного гасителя (модель з ударом о твердий обмежник) його ефективність цілком визначається саме характером віброударних режимів руху[5]. При формуванні бетонної суміші (модель з ударом о м'який обмежник) удари нічого не руйнують, але необхідний технологічний результат досягається саме завдяки їм. Для того, щоб досягти ефективної роботи машини, треба навчитися її налаштовувати, і найбільш раціональний путь для цього – вивчити її динаміку і отримати найбільш повну інформацію про поведінку машини в різних умовах роботи та залежність цієї поведінки від змінювання параметрів конструкції [6].

На рис. 1 приведені схеми моделей віброударних систем. На основне тіло першої системи масою m_1 і на нижнє тіло другої діє періодична збурюючи сила $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$.



а *б*

Рис. 1

Верхнє тіло другої системи має величезну масу (це є форма з бетоном), під час коливального руху воно відривається від прокладки та «підстрибує», потім падає на м'яку, піддатливу прокладку, при цьому відбувається удар о м'який обмежник коливань. Більш докладний опис цих моделей приведений в [3,4,7].

Рівняння руху першої системи мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 = -2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 - \omega_1^2 x_1 - 2\xi_2\omega_2\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) +$$
$$+ \frac{1}{m_1}[F(t) - F_{кон}(t)],$$
$$\ddot{x}_2 = -2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) + \frac{1}{m_2}F_{кон}(t). \qquad (1)$$

Для другої моделі маємо три системи рівнянь руху: сумісний рух тіл до першого відриву верхнього тіла

$$\ddot{y}_0 = -g + \omega_0^2[h - (y_0 - y_1)] - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0,$$
$$\ddot{y}_1 = g\chi - \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2\chi[h - (y_0 - y_1)] - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_0 + 2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 +$$
$$+ \frac{F_0}{m_1}(\cos(\omega t) + \varphi), \qquad (2)$$

роздільний рух тіл після відриву верхнього тіла

$$\ddot{y}_0 = -g - 2\xi_2\omega_0\dot{y}_0,$$

$$\ddot{y}_1 = g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \frac{F_0}{m_1}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (3)$$

сумісний рух тіл під час удару після падіння верхнього тіла на прокладку

$$\ddot{y}_0 = -g - 2(\xi_0 + \xi_2)\omega_0\dot{y}_0 + \frac{F_{кон}(t)}{m_0},$$

$$\ddot{y}_1 = g\chi - \omega_1^2 y_1 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + +2\xi_0\omega_0\chi\dot{y}_0 - \frac{F_{кон}(t)}{m_1} +$$

$$+ \frac{F_0}{m_1}\cos(\omega t + \varphi)\,. \qquad (4)$$

Тут прийняті звичайні позначення:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\ ;\ \xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}\ ,\ \xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}\ ;\ \chi = \frac{m_2}{m_1}\,.$$

Числові характеристики обох систем та вихідні умови для рівнянь (1)-(4) приведені в [3,4,7].

В системах обох типів удар моделюємо нелінійною силою контактної взаємодії, яка змінюється відповідно закону Герца [8]:

$$F_{кон}(t) = K\alpha(t)^{3/2},$$

де $\alpha(t) = h - (y_0 - y_1)$ – відносне зближення тіл,

$$K = \frac{4}{3}\frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}},\quad \delta_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0\pi},\quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi},$$

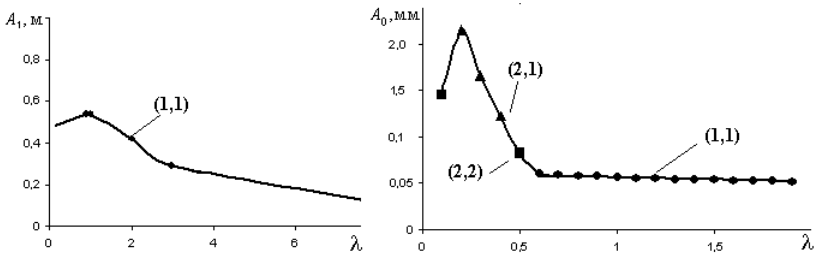
μ_i и E_i – коефіцієнти Пуасона та модулі Юнга для обох тіл, A, B и q – константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту.

В роботі аналізується та порівнюється динамічна поведінка двох віброударних систем, що описані вище, при змінюванні параметрів зовнішнього навантаження та таких параметрів систем, як маса одного з тіл та жорсткість обмежника.

2. Вплив маси одного з тіл віброударних систем

На рис. 2 представлені залежності напіврозмахів коливань основного тіла від маси приєднаного для моделі з твердим обмежником (рис. 2,а); верхнього тіла (форми з бетоном) від його маси для моделі з м'яким обмежником (рис. 2,б). При дослідженні впливу маси одного з тіл віброударної системи на її

поведінку маса, яка змінюється, приймається як $m=\lambda m_2$ для системи з твердим обмежником та $m=\lambda m_0$ для системи з м'яким.



а *б*

Рис. 2

Тут і далі субгармонічний (чи гармонічний) режим коливань періоду nT з k ударами за цикл називатимемо (n,k)-періодичним, де T-період зовнішнього навантаження [9]. Як видно із графіків, одноударний гармонічний режим – (1,1)-періодичний – при змінюванні параметрів віброударної системи з м'яким обмежником змінюється субгармонічними $2T$- періодичними режимами с двома та одним ударом за цикл.

На рис. 3 - 6 представлені зазначені режими. На рис. 3 – (1,1)- періодичний режим коливань системи з твердим обмежником при λ=1. Тут і далі на графіках сили тонкою лінією зображена зовнішня гармонічна сила періоду T.

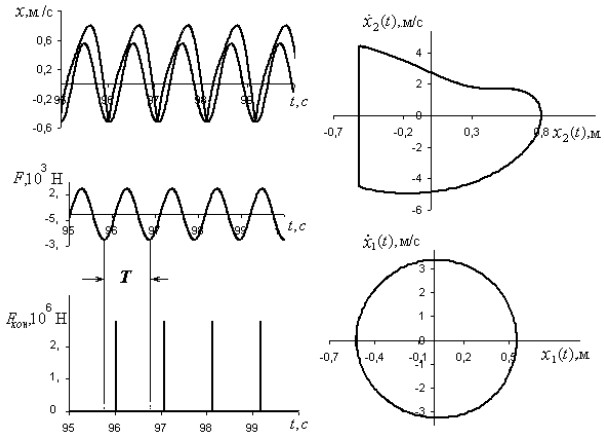


Рис. 3

На рис. 4 показано (1,1)- періодичний режим коливань системи з м'яким обмежником, якщо λ змінюється в діапазоні $0{,}6 \le \lambda \le 2$ (на рис. $\lambda=1$).

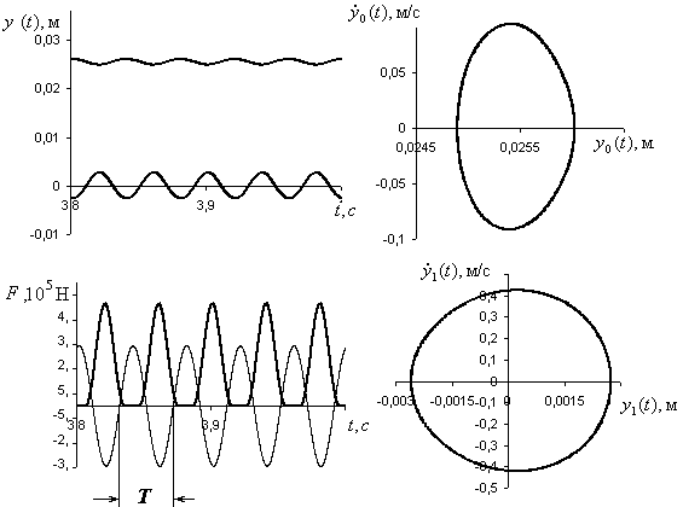


Рис. 4

На рис. 5 показано (2,1)- періодичний режим коливань системи з м'яким обмежником, якщо λ змінюється в діапазоні $0{,}2 \le \lambda \le 0{,}4$ (на рис. $\lambda=0{,}3$).

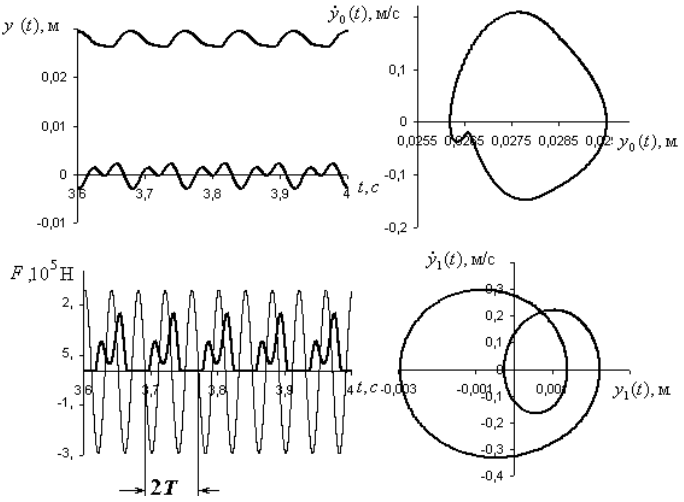


Рис. 5

На рис. 6 показано (2,2)- періодичний режим коливань системи з м'яким обмежником при λ=0,5.

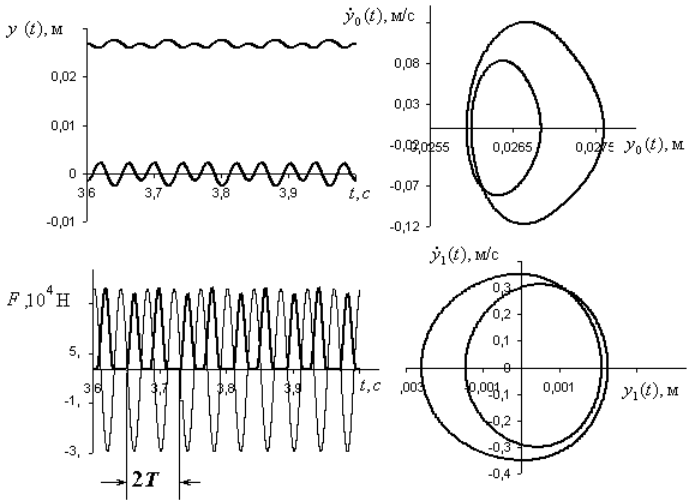
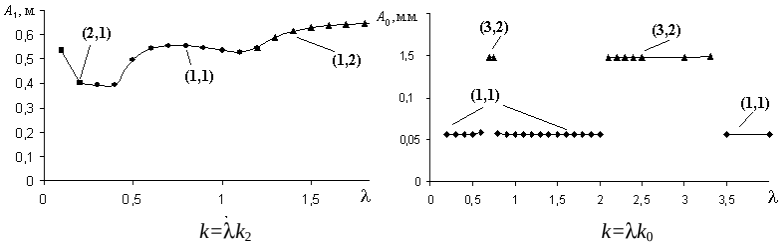


Рис. 6

3. Вплив жорсткості елемента віброударних систем

На рис. 7 представлені залежності напіврозмахів коливань основного тіла від жорсткості пружини, яка з'єднує тіла, для віброударної системи з твердим обмежником (рис. 7,а) та верхнього тіла від жорсткості прокладки для моделі з м'яким обмежником (рис. 7,б). При дослідженні впливу жорсткості на поведінку системи жорсткість, яка змінюється, приймається як $k=\lambda k_2$ для системи з твердим обмежником та $k=\lambda k_0$ для системи з м'яким.



а б

Рис. 7

Як видно із графіків, тут також одно ударний гармонійний режим – (1,1)- періодичний – змінюється багато ударними субгармонійними режимами при змінюванні жорсткості окремих елементів моделей.

На рис.8 - 11 представлені ці режими. На рис. 8 показано (2,1)-періодичний режим коливань системи з твердим обмежником при λ=0,1.

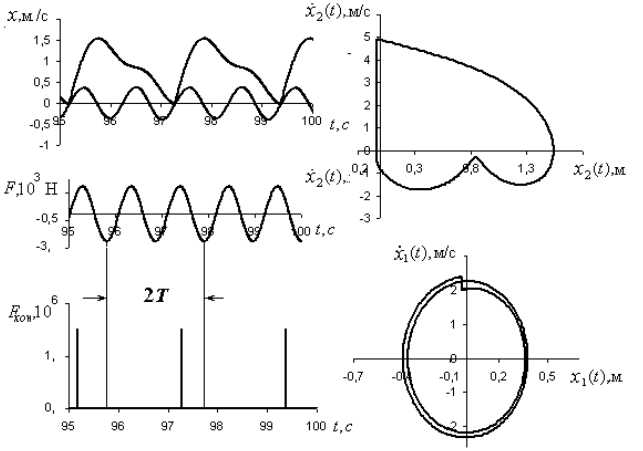


Рис. 8

На рис. 9 показано (1,1)- періодичний режим коливань системи з твердим обмежником, якщо λ змінюється в діапазоні $0{,}2 \le \lambda \le 1{,}1$ (на рис. λ=1.0).

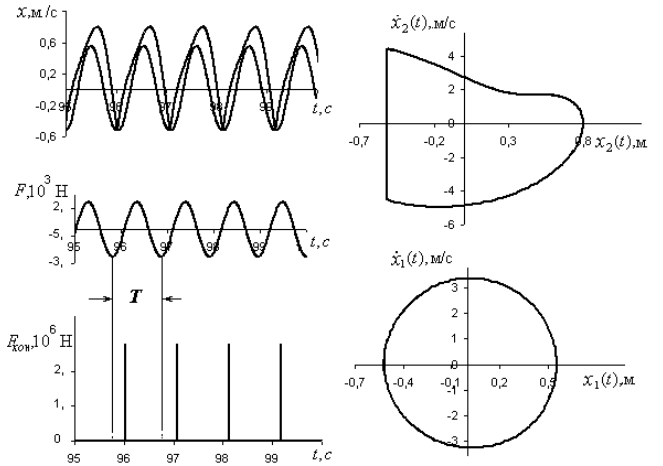


Рис. 9

На рис. 10 показано (1,2)- періодичний режим коливань системи з твердим обмежником, якщо λ змінюється в діапазоні $1{,}2 \le \lambda \le 2{,}0$ (на рис. $\lambda=1{,}5$).

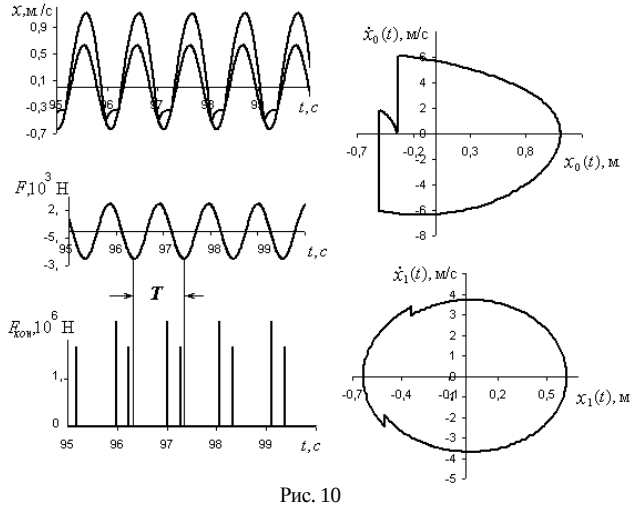


Рис. 10

На рис. 11 показано (3,2)- періодичний режим коливань системи з м'яким обмежником, якщо λ змінюється в діапазоні $0{,}7 \le \lambda \le 0{,}75$ чи в діапазоні $2{,}1 \le \lambda \le 3{,}3$ (наприклад, на рис. $\lambda=2{,}2$).

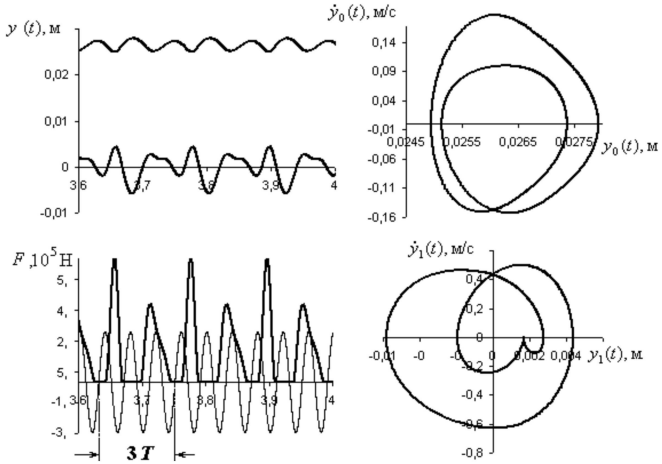


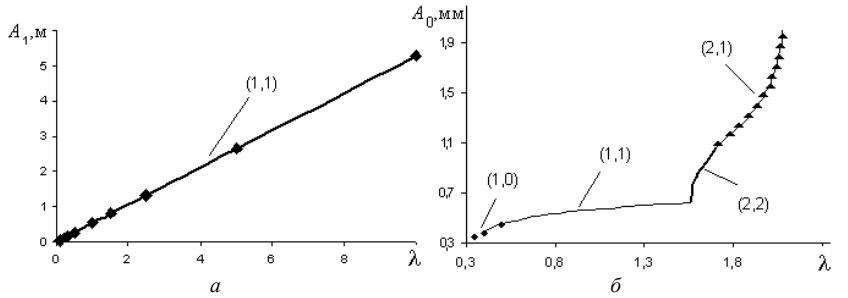
Рис. 11

Для аналізу впливу жорсткості досліджувалась також залежність коливальних режимів та їхніх характеристик від змінювання модуля пружності тіл, що контактують. В системі з твердим обмежником вважалось, що основне тіло та приєднане (гаситель) в зоні контакту мають однаковий матеріал і, відповідно, однакові модулі пружності. Дослідження, виконані для 4-х різних матеріалів (сталь, мідь, алюміній та каучук), показали, що режим коливань залишається одно ударним гармонічним, змінювання модуля пружності впливає на величину контактної сили і практично не змінює величин напіврозмахів коливань. Наприклад, модуль пружності каучуку в 26000 разів менше, ніж у сталі, контактна сила менше в 60 разів, а напіврозмах основного тіла збільшується лише в 1,14 рази! В системі з м'яким обмежником вважалось, що форма завжди стальна, а модуль пружності прокладки змінюється. Дослідження показали, що в деякому діапазоні значень модуля пружності прокладки одно ударний гармонійний режим змінюється субгармонійним двох ударним – (3,2)- періодичним режимом. Докладніше ці дослідження описані в [7].

4. Вплив амплітуди зовнішнього періодичного навантаження

Подивимось тепер, як впливає на динамічну поведінку віброударних систем змінювання параметрів зовнішнього навантаження – його амплітуди та частоти. При дослідженні впливу амплітуди зовнішнього навантаження на поведінку системи введемо параметр зовнішнього навантаження, тобто гармонічну збурюючу силу запишемо у вигляді $F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Змінюючи λ і залишаючи незмінними інші параметри, простежимо вплив параметра зовнішнього навантаження на поведінку віброударних систем.

На рис. 12 представлені залежності напіврозмахів коливань основного тіла для моделі з твердим обмежником (рис. 12,а); верхнього тіла (форми з бетоном) для моделі з м'яким обмежником (рис. 12,б) від параметра зовнішнього навантаження, тобто криві навантаження для обох віброударних систем.



а *б*

Рис. 12

Система з твердим обмежником в достатньо широкому діапазоні значень λ зберігає одно ударний гармонічний режим і лише при досить великому значенні λ=20 режим стає двох ударним – (1,2)- періодичним (рис. 13).

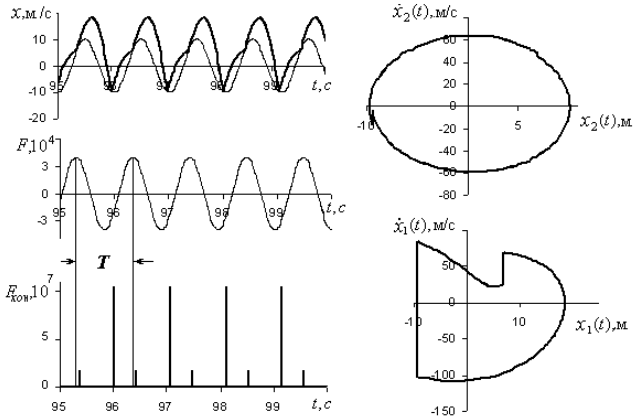
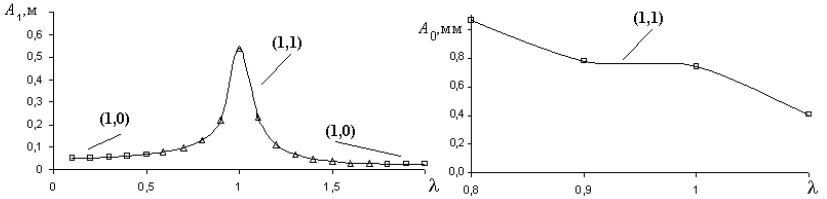


Рис. 13

В системі з м'яким обмежником при змінюванні λ режим коливань змінюється від без ударного (1,0)- періодичного при λ в діапазоні 0,35≤λ≤0,5 до хаотичного при λ≥2,07. Докладніше ці режими віброударних коливань описані в [10].

5. Вплив частоти зовнішнього періодичного навантаження

Побудуємо тепер амплітудно-частотні характеристики обох віброударних систем, тобто простежимо, як змінюється їхня динамічна поведінка при змінюванні частоти зовнішнього навантаження. Параметр λ віднесемо до частоти і гармонічну збурюючу силу запишемо у вигляді $F(t) = F_0 \cos(\lambda\omega t + \varphi)$. Одразу відмітимо, що амплітудно-частотні характеристики при змінюванні λ не мають багатої картини зміни режимів коливань. На рис. 14 представлені залежності напіврозмахів коливань основного тіла для моделі з твердим обмежником (рис. 14,а); верхнього тіла (форми з бетоном) для моделі з м'яким обмежником (рис. 14,б) від параметра частоти зовнішнього навантаження, тобто амплітудно-частотні характеристики для обох віброударних систем.



а *б*

Рис.14

Система з твердим обмежником в достатньо широкому діапазоні значень λ зберігає одно ударний гармонічний режим і лише при більших значеннях $\lambda \geq 1{,}8$ та при менших $\lambda \leq 0{,}5$ режим стає без ударним – (1,0)-періодичним. В системі з м'яким обмежником в основному діапазоні частот $0{,}8 \leq \lambda \leq 1{,}1$ режим одно ударний гармонічний, при малих частотах $\lambda \leq 0{,}7$ він хаотичний, а при більших $\lambda \geq 1{,}2$ обидва тіла системи рухаються сумісно, відрив форми від прокладки не відбувається.

Висновки

Підсумовуючи сказане, підкреслимо, що змінювання як конструктивних параметрів нелінійних віброударних систем обох типів, так і параметрів зовнішнього навантаження сильно впливає на динамічну поведінку цих систем, змінюючи режим їхнього коливального руху від одно ударного гармонічного до багато ударних субгармонійних і навіть до хаотичного. При цьому віброударна система з м'яким обмежником коливань дещо більш чутлива до змінювання параметрів і частіше змінює характер коливальних режимів, ніж система з ударом о твердий обмежник.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Крупенин В.Л.* О проблеме изучения нелинейных объектов. //Фундаментарные исследования, - 2009.-№5. – С. 16-18.
2. *Barbara Blazejczyk-Okolewska, Krzysztof Czolczynski, Tomasz Kapitaniak* Classification principles of types of mechanical systems with impacts – fundamental assumptions and rules// European Journal of Mechanics. - 2004. № 23 - P.517–537.
3. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
4. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – С. 69-77.

5. *Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Чисельні дослідження режимів коливань віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2006.-Вип.78.- С.14-23.
6. *Крупенин В.Л.* Ударные и виброударные машины и устройства //Вестник научно-технического развития . - 2009.- №4 (20). – С. 3-32.
7. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Влияние отдельных конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику //Пробл. прочности. - 2009. –(здана до друку).
8. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.
9. *Lamarque C. H., Janin O.* Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal// Journal of Sound and Vibration. - 2000. № 235(4). – P. 567-609.
10. *Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Вплив параметра зовнішнього навантаження на динамічну поведінку віброударної системи з ударом о м'який обмежник // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2009.-Вип.84 – С. 77-88.

Отримано 14.05.10

Погорелова О.С., Постникова Т.Г.

СРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ РАЗНЫХ ТИПОВ

Анализируется влияние изменения как параметров внешней периодической нагрузки, так и конструктивных параметров нелинейных двухмассовых виброударных систем двух разных типов с двумя степенями свободы на характер их движения. Удар моделируется силой контактного взаимодействия, описанной законом Герца. При изменении параметров обе системы меняют характер колебательных режимов от одноударного гармонического до многоударных субгармонических вплоть до хаотического. Однако, система с ударом о мягкий ограничитель несколько более чувствительна к изменению параметров и чаще меняет характер колебательных режимов, чем система с ударом о твердый ограничитель.

Pogorelova O.S., Postnikova T.G.

COMPARISON OF THE DIFFERENT TYPES VIBRO-IMPACT SYSTEM DYNAMICAL BEHAVIOUR

The influence of external periodic loading parameters and constructive parameters modification for two different types of nonlinear two-mass vibro-impact systems with two degrees of freedom at their movement is analyzed. The contact force that is described by Hertz law models the impact. It is shown that both systems change vibration regimes character from harmonic with one impact in the cycle to subharmonic with several impacts in the cycle up to chaotic. But the system with the impact at soft limiting stop is somewhat more sensitive to parameters modification and changes its vibration regime character more frequently then the system with the impact at rigid limiting stop.

УДК 539.3

В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук
С.М. Худолій, канд. техн. наук
О.М. Андрусенко

ПРО РУХОМІСТЬ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ В КРИВОЛІНІЙНІЙ СВЕРДЛОВИНІ ЗІ СПІРАЛЬНИМИ ГЕОМЕТРИЧНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

Досліджується рух бурильної колони при виконанні спуско-підйомних операцій в криволінійній свердловині з локалізованими спіральними недосконалостями осьової лінії. Для визначення однієї частини змінних поставлено пряму задачу статики, для іншої частини – обернену. Розглянуто приклад.

Вступ. Важливою обставиною, яка сприяє ускладненню ситуації в нафтовій і газовій галузях промисловості, є те, що, як правило, лише 35% вуглеводневих палив, які заповнюють тріщини та пори підземних резервуарів, можуть бути добутими при застосуванні традиційної технології добування. Один із способів збільшення об’ємів палив, що відбираються з підземних резервуарів, пов’язаний з прокладанням криволінійних свердловин, які пронизують нафтоносні та газоносні прошарки вздовж їх ламінованої структури, і тому вони покривають більші зони відбору палива. Оскільки із застосуванням такої технології зменшується загальна кількість прохідних колодязів і дебіт криволінійних свердловин виявляється на порядок вищим дебіту вертикальних свердловин, тому найближчим часом буріння свердловин складної конфігурації стане основним в більшості країн світу.

Практичне впровадження технологій буріння глибоких свердловин зі складною просторовою орієнтацією їх траєкторій пов'язано з необхідністю теоретичного моделювання механічних явищ, що супроводжують їх функціонування, з метою прогнозування можливих критичних станів [1, 2, 5]. При цьому одним з найважливіших аспектів даного напрямку є теоретичне моделювання поведінки колон глибокого буріння в криволінійних свердловинах на етапах їх спуску і підйому.

Питання особливостей механічної поведінки БК у вертикальних свердловинах розглянуті в публікації [10]. У роботі [11] досліджується механічна поведінка БК у криволінійних свердловинах на основі моделювання їх абсолютно гнучкими нитками, в [4] це питання вивчається з позицій формулювання прямих і обернених задач згинання криволінійного пружного стержня.

© Гайдайчук В.В, Худолій С.М., Андрусенко О.М.

Сучасні методи фізичного та математичного моделювання механіки бурильних колон (БК) в криволінійних свердловинах, базуються, як правило, на представленні колони абсолютно гнучкою нерозтяжною ниткою [8, 9, 12]. Така модель може бути виправдана при виконанні оціночних розрахунків на етапі попереднього проектування, коли траєкторія свердловини задається у вигляді гладкої кривої найпростішого обрису з великими радіусами кривини [7]. Проте в процесі проходки свердловини (особливо дальньої) не вдається досягти її проектної ідеалізованої геометрії і в результаті збурень технологічного або тектонічного характерів на її осьовій кривій виникають локальні геометричні викривлення, що грають роль недосконалостей. Вони можуть мати форму дрібномасштабних тривимірних спіралей змінного діаметру і кроку, плоских гармонік або закруглених зломів. Так як кривини осьової лінії свердловини на таких ділянках різко зростають, БК піддається на них пружному згинанню, в результаті чого різко зростають сили контактної взаємодії колони зі стінкою свердловини і сили опору руху колони. Ці сили нелінійно залежать від значень геометричних параметрів недосконалостей та зі збільшенням останніх можуть спрямовуватися до нескінченності. Тоді виникає явище прихоплення колони та її подальше функціонування стає неможливим [1]. Для опису подібних явищ моделі гнучких ниток не можуть бути застосовані, і повинна використовуватися теорія пружних криволінійних стержнів [3].

Розв'язувальні співвідношення теорії криволінійних стержнів. При моделюванні пружного деформування бурильної колони в похило-скерованій свердловині з геометричними недосконалостями приймемо, що викривлення проектної траєкторії свердловини, яке викликане порушенням технології буріння або механічними неоднорідностями тектонічних структур, не може супроводжуватися утворенням зломів її осьової лінії, яка є диференційованою за всіма трьома незалежними просторовими змінними. При цьому, однак, якщо ці недосконалості є дрібно масштабними, то вони можуть наближатися до геометричних сингулярностей. Будемо вважати також, що осьові лінії свердловини і БК збігаються.

Наведемо основні співвідношення, що визначають геометрію осьової лінії криволінійної свердловини. Для їх подання можна застосовувати два способи параметризації [3]. У першому способі положення точки на кривій задається координатою s, вимірюваної довжиною осьової лінії від деякої початкової точки до поточної (натуральна параметризація), у другому - використовується деякий довільний параметр ϑ, який може бути більш зручний для опису загальних властивостей кривої.

Нехай рівняння осьової лінії свердловини в декартовій системі координат $Oxyz$ мають вигляд

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \tag{1}$$

або

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(s). \tag{2}$$

Випишемо рівності, що визначають її радіуси кривини та кручення [6]

$$R = \left[(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad T = R^{-2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}^{-1}, \tag{3}$$

де штрихом праворуч, зверху позначена похідна за s.

Співвідношення (2), (3) дозволяють знайти орти $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ рухомого тріедра

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \vec{n} = R\frac{d\vec{\tau}}{ds}, \quad \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}, \tag{4}$$

і тим самим повністю визначити геометричні характеристики траєкторії свердловини.

Якщо крива (1) визначена через параметр ϑ

$$x = x(\vartheta), \quad y = y(\vartheta), \quad z = z(\vartheta), \tag{5}$$

то диференціювання по змінній s замінюється диференціальним оператором $Dd\vartheta$, де метричний множник D підраховується за формулою

$$D = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{6}$$

Відзначимо, що при розв'язанні задачі про згинання БК у свердловині з недосконалостями складної форми зручно застосовувати рівності (1) та (5) разом, використовуючи їх паралельно для виконання різних геометричних перетворень.

Пружне деформування трубчастої БК у криволінійній свердловині в процесі буріння і виконання спуско-підіймальних операцій здійснюється під дією розподілених сил тяжіння $\vec{f}^{\,gr}$, сил $\vec{f}^{\,c}$ контактної взаємодії між БК і стінкою свердловини, сил $\vec{f}^{\,fr}$ і моментів $\vec{m}^{\,fr}$ фрикційної взаємодії, а також зосереджених крайових сил і моментів, прикладених у точці підвісу БК і в точці її контакту з дном свердловини. Виникаючі при цьому

в кожному елементі БК внутрішня сила $\vec{F}$ і момент $\vec{M}$ задовольняють векторним рівнянням рівноваги [3]

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{f}^{\,gr} - \vec{f}^{\,c} - \vec{f}^{\,fr}, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = -\vec{\tau}\times\vec{F} - \vec{m}^{\,fr}, \tag{7}$$

У загальному випадку найбільш зручно їх записувати в рухомій системі осей (u,v,w), в якій вісь w спрямована вздовж орта $\vec{\tau}$, а осі u,v орієнтовані уздовж головних центральних осей інерції поперечного перерізу БК. Оскільки ця система повертається в міру руху вздовж координати s, необхідно повні похідні $d\vec{F}/ds$, $d\vec{M}/ds$ представити в рухомій системі. Тоді

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{\tilde{d}\vec{F}}{ds} + \vec{\omega}_\chi \times \vec{F}, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{\tilde{d}\vec{M}}{ds} + \vec{\omega}_\chi \times \vec{M}. \tag{8}$$

Тут позначкою ~ позначена операція локального диференціювання, $\vec{\omega}_\chi$ - вектор Дарбу, обчислюваний за формулою

$$\vec{\omega}_\chi = \frac{1}{R}\vec{b} + \left(\frac{1}{T} + \frac{d\chi}{ds}\right)\vec{\tau},$$

χ - кут, відлічуваний від орта $\vec{n}$ до вісі u.

$$p = \frac{1}{R}\sin\chi, \quad q = \frac{1}{R}\cos\chi, \quad r = \frac{1}{T} + \frac{d\chi}{ds}. \tag{9}$$

Підставляючи праві частини цих рівностей в рівняння (7), отримаємо

$$\frac{\tilde{d}\vec{F}}{ds} = -\vec{\omega}_\chi \times \vec{F} - \vec{f}^{\,gr} - \vec{f}^{\,c} - \vec{f}^{\,fr}, \quad \frac{\tilde{d}\vec{M}}{ds} = -\vec{\omega}_\chi \times \vec{M} - \vec{\tau}\times\vec{F} - \vec{m}^{\,fr}. \tag{10}$$

Випишемо відповідні першому рівнянню три скалярних рівняння рівноваги сил

$$\begin{aligned}
\frac{dF_u}{Dd\vartheta} &= \left(\frac{1}{T} + \frac{d\chi}{Dd\vartheta}\right)F_v - \frac{1}{R}\cos\chi\cdot F_w - f_u^{gr} - f_u^{c},\\
\frac{dF_v}{Dd\vartheta} &= \frac{1}{R}\sin\chi\cdot F_w - \left(\frac{1}{T} + \frac{d\chi}{Dd\vartheta}\right)\cdot F_u - f_v^{gr} - f_v^{c},\\
\frac{dF_w}{Dd\vartheta} &= \frac{1}{R}\cos\chi\cdot F_u - \frac{1}{R}\sin\chi\cdot F_v - f_w^{gr} - f_w^{fr}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Враховуючи, що осі головного тригранника (u,v,w) є головними осями згину та кручення елемента стержня, компоненти M_u, M_v, M_w моменту $\vec{M}$ представимо у вигляді

$$M_u = Ap = \frac{A}{R}\sin\chi, \quad M_v = Aq = \frac{A}{R}\cos\chi, \quad M_w = Cr = C\left(\frac{1}{T} + \frac{d\chi}{ds}\right), \quad (12)$$

де $A = EI$; $C = GI_0$; E, G - модулі пружності матеріалу БК при розтяганні і зсуві; I, I_0 - осьовий і полярний моменти інерції поперечного перерізу труби БК.

Вводячи позначення $\chi = h_1$, $d\chi/d\vartheta = dh_1/d\vartheta = h_2$, за допомогою рівностей (12) друге векторне рівняння (10) приведемо до системи трьох скалярних рівнянь рівноваги моментів

$$\frac{1}{D}\left[\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\sinh_1 + \frac{1}{R}\cosh_1 \cdot h_2\right] = \frac{A-C}{A}\cdot\frac{1}{R}\cosh_1\left(\frac{1}{T}+\frac{h_2}{D}\right) + \frac{F_v}{A},$$

$$\frac{1}{D}\left[-\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\cosh_1 + \frac{1}{R}\sinh_1 \cdot h_2\right] = \frac{A-C}{A}\cdot\frac{1}{R}\sinh_1\left(\frac{1}{T}+\frac{h_2}{D}\right) + \frac{F_u}{A},$$

$$\frac{1}{D}\left[\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{D}\right)h_2 + \frac{1}{D}\frac{dh_2}{d\vartheta}\right] = -\frac{m_w^{fr}}{C}. \quad (13)$$

Якщо геометрія (1) осьової лінії свердловини відома, рівняння (11), (13) дозволяють сформулювати завдання про контактну взаємодію БК з її стінкою в процесі буріння і виконання спуско-підіймальних операцій.

Постановка оберненої задачі про згинанні БК у криволінійній свердловині. Система шести рівнянь (11), (13) містить не шість невідомих функцій внутрішніх сил і моментів, а тільки три функції сил $F_u(\vartheta)$, $F_v(\vartheta)$, $F_w(\vartheta)$ і функцію кута пружного кручення χ, через яку при заданих R і T обчислюються моменти (12). Тим не менше вона є недовизначеною, оскільки в неї входять також зовнішні розподілені сили контактної взаємодії $f_u^c(\vartheta)$, $f_v^c(\vartheta)$, що підлягають визначенню, і сила $f_w^{fr}(\vartheta)$, і момент $m_w^{fr}(\vartheta)$ сил тертя. Задачі механіки твердих деформованих тіл, в яких внутрішні сили (або моменти) частково відомі, а деякі зовнішні сили (зазвичай це контактні сили або сили тертя) підлягають визначенню, називаються оберненими.

Для формулювання оберненої задачі в даному випадку зведемо систему (13) до вигляду

$$F_u = -\frac{A}{D}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\cosh_1 - \frac{A}{RT}\sinh_1 + \frac{C}{R}\left(\frac{1}{T}+\frac{h_2}{D}\right)\sinh_1,$$

$$F_v = \frac{A}{D}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\sinh_1 - \frac{A}{RT}\cosh_1 + \frac{C}{R}\left(\frac{1}{T}+\frac{h_2}{D}\right)\cosh_1,$$

$$\frac{dh_2}{d\vartheta} = -\frac{D^2}{C}m_w^{fr} - D\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{1}{D}\frac{dD}{d\vartheta}h_2. \qquad (14)$$

Продиференціюємо за ϑ обидві частини двох перших рівностей цієї системи, після чого прирівняємо їх праві частини правим частинам двох перших рівностей (11). З урахуванням останньої рівності системи (14) отримаємо

$$f_u^c = -\frac{C\cdot h_2}{D^2}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\sinh_1 - \frac{1}{R}\cosh_1\cdot F_w - \frac{A-C}{RT^2}\cosh_1 + \frac{C\cdot h_2}{DRT}\cosh_1 +$$
$$+\frac{A}{D}\frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{d}{Dd\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\cosh_1 + \frac{A}{TD}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\sinh_1 + \frac{A}{RD}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{T}\right)\sinh_1 +$$
$$+\frac{A-C}{TD}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\sinh_1 + \frac{\sinh_1}{R}m_w^{fr} - f_u^{gr},$$

$$f_v^c = -\frac{C\cdot h_2}{D^2}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\cosh_1 + \frac{1}{R}\sinh_1\cdot F_w + \frac{A-C}{RT^2}\sinh_1 - \frac{C\cdot h_2}{DRT}\sinh_1 -$$
$$-\frac{A}{D}\frac{d}{d\vartheta}\left[\frac{d}{Dd\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\right]\sinh_1 + \frac{A}{TD}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\cosh_1 + \frac{A}{RD}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{T}\right)\cosh_1 +$$
$$+\frac{A-C}{TD}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{R}\right)\cosh_1 + \frac{\cosh_1}{R}m_w^{fr} - f_v^{gr}. \qquad (15)$$

За допомогою рівностей (15) підрахуємо повну силу контактної взаємодії БК і стінки свердловини

$$f^c = \sqrt{\left(f_u^c\right)^2 + \left(f_v^c\right)^2}. \qquad (16)$$

Будемо вважати, що при бурінні і виконання спуско-підіймальних операцій БК одночасно здійснює осьовий рух зі швидкістю $\dot{w}$ і обертається з кутовою швидкістю ω. Тоді повну силу тертя $f^{fr} = \mu\cdot f^c$ можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові

$$f_w^{fr} = \pm\mu \cdot f^c \frac{\dot{w}}{\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}}, \quad f_\omega^{fr} = \pm\mu \cdot f^c \frac{\omega d}{2\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}}, \quad (17)$$

які пропорційні відповідним компонентам швидкостей $\dot{w}$ і $\omega d/2$. Тут μ - коефіцієнт тертя, d – зовнішній діаметр труби БК. Перша з цих сил перешкоджає осьовому руху БК, друга спрямована в окружному напрямку і призводять до виникнення розподіленого моменту сил тертя

$$m_w^{fr} = f_\omega^{fr} \cdot \frac{d}{2} = \pm\mu \cdot f^c \frac{\omega d^2}{4\sqrt{\dot{w}^2 + (\omega d/2)^2}}. \quad (18)$$

Знаки «$\pm$» у формулах (17), (18) вибираються залежно від напрямків руху і обертання БК. У виразі для f_w^{fr} знак «-» відповідає процедурі підйому БК, знак «+» - її спуску і процесу буріння.

Виведені в цьому підрозділі співвідношення дозволяють сформулювати систему рівнянь пружного згинання БК у свердловині з заданою осьової лінією (1).

Вхідні сюди компоненти f_u^{gr}, f_v^{gr}, f_w^{gr} розподілених сил тяжіння відомі і визначаються так

$$\begin{aligned} f_u^{gr} &= -F(\gamma_{st} - \gamma_l) g (n_z \cosh_1 + b_z \sinh_1), \\ f_v^{gr} &= F(\gamma_{st} - \gamma_l) g (n_z \sinh_1 - b_z \cosh_1), \\ f_w^{gr} &= -F(\gamma_{st} - \gamma_l) g \tau_z, \end{aligned} \quad (19)$$

де F - площа поперечного перерізу труби БК, γ_{st} - щільність матеріалу труби, γ_l - щільність промивальної рідини.

Шукані змінні підраховуються чисельно. Для інтегрування перших трьох рівнянь системи використовується метод Рунге-Кутта. На кожному кроці його реалізації спочатку обчислюються функції $h_1(\vartheta_i)$, $h_2(\vartheta_i)$, $F_w(\vartheta_i)$, потім по їх знайденим значенням підраховуються інші невідомі $F_u(\vartheta_i)$, $F_v(\vartheta_i)$, $f_w^{fr}(\vartheta_i)$, $m_w^{fr}(\vartheta_i)$. Після цього здійснюється наступний крок інтегрування.

Результати дослідження згинання БК у свердловині зі спіральними геометричними недосконалостями. При бурінні криволінійних свердловин часто виникають ситуації, коли внаслідок різкого порушення однорідності тектонічної структури або технології

буріння свердловини траєкторія відхиляється від проектної і на ній виникають локальні геометричні недосконалості. Зазвичай вони мають вигляд збурення у формі тривимірної спіралі, плоскою гармоніки або місцевого згладженого злому. У даній роботі розглянуто випадок спіральних недосконалостей. Прийнято, що в проектному стані осьова лінія свердловини являє собою чверть дуги еліпса з півосями H, L, у площині xOz. Для цієї геометрії вирішується поставлена вище задача про визначення внутрішніх і зовнішніх силових факторів, що діють на БК при її русі. Потім в геометрію осьової лінії свердловини вводиться викривлення у формі спіралі з кроком λ і змінним радіусом. Тоді рівняння (5) в цьому випадку приводяться до вигляду

$$x = L\cos\vartheta - h\cos\left(k\int\limits_{3\pi/2}^{\vartheta}\sqrt{L^2\sin^2\theta + H^2\cos^2\theta}\,d\theta\right)\frac{H\cos\vartheta}{\sqrt{L^2\sin^2\vartheta + H^2\cos^2\vartheta}},$$

$$y = h\sin\left(k\int\limits_{3\pi/2}^{\vartheta}\sqrt{L^2\sin^2\theta + H^2\cos^2\theta}\,d\theta\right),$$

$$z = H\sin\vartheta - h\cos\left(k\int\limits_{3\pi/2}^{\vartheta}\sqrt{L^2\sin^2\theta + H^2\cos^2\theta}\,d\theta\right)\frac{L\sin\vartheta}{\sqrt{L^2\sin^2\vartheta + H^2\cos^2\vartheta}},$$

$$\left(3\pi/2 \le \vartheta \le 2\pi\right) \qquad (20)$$

де α - коефіцієнт при показнику експоненти (функції Гауса), який визначає швидкість спадання $h(\vartheta)$; ϑ_c - значення параметра з максимальним $h(\vartheta) = h_c$, і вирішується задача про визначення внутрішніх і зовнішніх сил; k - частота спіралі, що показує скільки її витків укладається на відрізку $0 \le \vartheta \le 2\pi$ кривої (рис. 1).

Користуючись цими рівностями за формулами (3) підраховуються радіуси кривини та кручення. Потім за формулою (6) його метричний множник D, що дозволяє перейти до натуральної параметризації кривої (20), підрахувати орти $\vec{n}$, $\vec{b}$, $\vec{\tau}$, тригранника Френе і перейти до інтегрування системи. Всі ці змінні описуються громіздкими виразами і тут не наводяться.

При виконанні спуско-підіймальних операцій із заданим відношенням $\nu = \dfrac{\dot{w}}{\omega d/2}$ (відношення лінійних швидкостей осьового та обертального рухів елемента зовнішньої поверхні труби БК) шукані функції h_1, h_2, F_w

при $\vartheta = 3\pi/2$ дорівнюють нулю, але відмінні від нуля сили тяжіння (19). Це дозволяє підрахувати в цій точці змінні f_u^c, f_v^c, f_w^{fr}, m_w^{fr}, F_u, F_v, і зробити один крок інтегрування перших трьох рівнянь системи, а потім за такою ж схемою продовжувати рішення системи на наступних кроках до точки $\vartheta = 2\pi$.

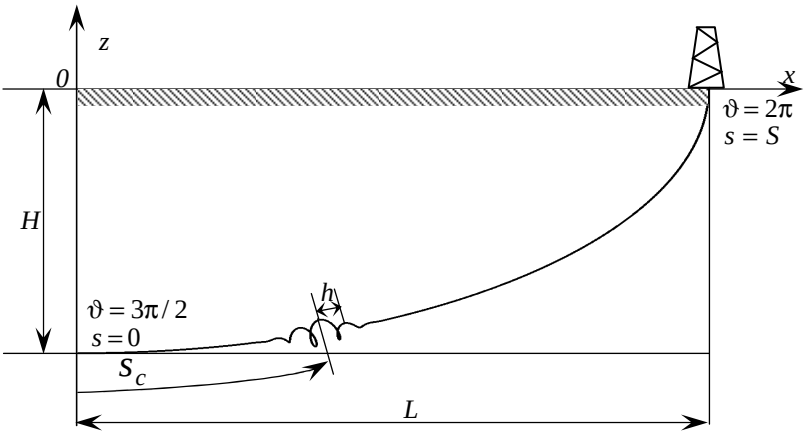


Рис. 1. Схема криволінійної свердловини зі спіральними недосконалостями

За розробленою методикою виконано комп'ютерне моделювання пружного згинання БК в еліптичній свердловині зі спіральними недосконалостями при наступних значеннях характерних параметрів: $L = 4000$м, $H = 2000$м, $d = 0{,}1683$м, $\delta = 0.01$м - товщина труби БК, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$Па, $G = 0{,}8077 \cdot 10^{11}$Па, $\gamma_{st} = 7850$кг/м^3, $\gamma_l = 1500$кг/м^3, $\mu = 0{,}2$, $\nu = 1$.

У табл. 1 наведено результати розрахунків для випадків, коли крок спіралі недосконалостей складав $\lambda = 96{,}88$ і $48{,}44$м, а центри з порівняно невеликою амплітудою $h_c = 2$м розташовані посередині першої, другої, третьої та четвертої чвертей довжини осьової лінії свердловини при виконанні операції підйому БК. Вони свідчать про те, що з перенесенням зони недосконалостей на більш викривлені ділянки осьової лінії свердловини сила $F_w(S)$ і момент $M_w(S)$ помітно збільшуються (позиції 1 - 4 в табл. для випадку $\lambda = 96.88$м та позиції 5 - 8 для випадку $\lambda = 48.44$м).

Таблиця 1

Значення сил і моментів у точці підвісу БК у свердловині з геометричними недосконалостями

№ п/п	λ, м	s_c, м	$F_w(S)$, Н	$M_w(S)$, Нм
1	96,88	605,5	$0{,}821\cdot10^6$	$17{,}0\cdot10^3$
2	–	1816,6	$0{,}980\cdot10^6$	$30{,}3\cdot10^3$
3	–	3027,6	$1{,}326\cdot10^6$	$59{,}5\cdot10^3$
4	–	4238,7	$1{,}657\cdot10^6$	$87{,}2\cdot10^3$
5	48,44	605,5	$2{,}966\cdot10^6$	$197{,}5\cdot10^3$
6	–	1816,6	$7{,}655\cdot10^6$	$592{,}0\cdot10^3$
7	–	3027,6	$14{,}76\cdot10^6$	$1189{,}7\cdot10^3$
8	–	4238,7	$20{,}87\cdot10^6$	$1703{,}6\cdot10^3$

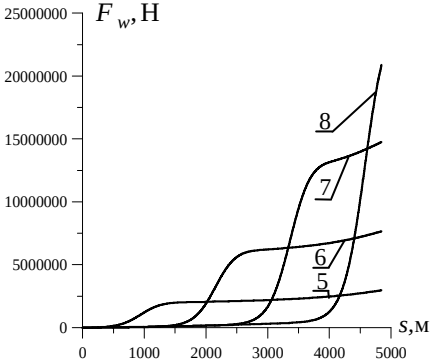


Рис. 2. Графіки зміни поздовжньої сили F_w для чотирьох позицій розташування спіральних недосконалостей ($H = 2000$ м , $L = 4000$ м , $\lambda = 48{,}44$ м , $h_c = 2$ м , $\nu = 1$)

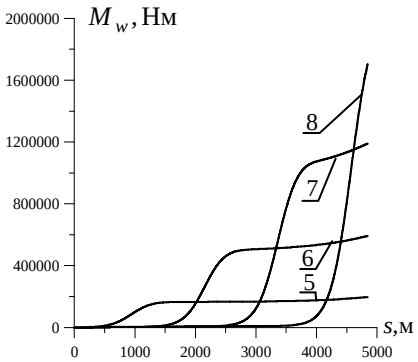


Рис. 3. Графіки зміни крутного моменту M_w для чотирьох позицій розташування спіральних недосконалостей ($H = 2000$ м , $L = 4000$ м , $\lambda = 48{,}44$ м , $h_c = 2$ м , $\nu = 1$)

Залежності $F_w(s)$ для недосконалостей з довжиною хвилі $\lambda = 48.44м$ при різних s_c показані на рис. 2. Номери кривих відповідають номерам позицій в табл. Відзначимо, що в усіх випадках на ділянках зміни змінної s, що містять локалізовані недосконалості, функція $F_w(s)$ швидко зростає. Причому, якщо недосконалості локалізовані на майже

горизонтальній ділянці свердловини (крива 5 на рис. 2), то функція $F_w(s)$ отримує порівняно невелике збільшення. Якщо вони розташовані у другій чверті, то на кривій 6 в зоні їх локалізації з'явилась ділянка більш швидкого зростання. З подальшим перенесенням недосконалостей величини стрибків функції $F_w(s)$ на недосконалостях стають ще більше (криві 7, 8 на рис. 2). У цих випадках сили опору виявляються найбільш чутливими до недосконалостей.

Аналогічні закономірності простежуються і для функції $M_w(s)$, представленої на рис. 3.

Аналіз представлених діаграм дозволяє зробити висновок, що недосконалості становлять велику небезпеку, якщо вони розташовані в більш викривлених зонах з найбільшими значеннями функції $T(s)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гуляєв В.І., Гайдайчук В.В., Худолій С.М., Гловач Л.В.* Сучасні методи теоретичного моделювання стану бурильної колони у похило-скерованих свердловинах // Нафтова та газова промисловість. – 2009. - №1. – С. 26 – 30.
2. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Соловьев И.Л., Горбунович И.В.* Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения // Проблемы прочности. – 2006. – № 5. – С.109 – 119.
3. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Худолий., С.Н., Гловач Л.В.* Теоретическая идентификация сил сопротивления продольному перемещению бурильных колонн в криволинейных скважинах // Прикладная механика. – 2007. – Т.43, №11. – С. 80 – 89.
5. *Мислюк М. А., Рибчич І. Й., Яремчук Р.С.* Буріння свердловин. Т. 3. Вертикальне та скероване буріння. – Київ: Інтерпрес Лтд., 2004. – 294 с.
6. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 180 с.
7. *Чан Суан Дао, Ширинзаде С.А.* Новые профили наклонно-направленных скважин на месторождениях «Белый Тигр» и «Дракон» // Азербайджан. нефт. хоз-во. – 1999. – №1. – С. 18 –26.
8. *Aadnoy B. S. and Andersen K.* Design of oil wells using analytical friction models // J. Petroleum Sci. Eng. – 2001. – 32, No. 1. – P. 53 – 71.
9. *Choe Jonggeun, Schubert J. J., and Juvkam-Wold H. C.* Well-control analyses on extended-reach and multilateral trajectories // SPE Drilling and Completion. – 2005. – June. – P. 101 – 108.
10. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V.* The buckling of elongated rotating drill strings // J. of Petroleum Science and Engineering. 2009. 67. P. 140 – 148.
11. *Sawaryn S. J. and Thorogood J. L.* A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method // SPE Drilling and Completion. – 2005. – March. – P. 24 – 36.
12. *Sheppard M.C.* Designing well paths to reduce drag and torque // SPE Drilling Eng. - 1987. – December. – P. 344 – 350.

Отримано 23.04.10

В *Гайдайчук В.В., Худолий С.Н., Андрусенко Е.Н.*
О ПОДВИЖНОСТИ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СКВАЖИНЕ СО СПИРАЛЬНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ.
Исследуется движение бурильной колонны при выполнении спуско-подъемных операций в криволинейной скважине с локализованными спиральными несовершенствами осевой линии. Для определения одной части переменных поставлена прямая задача статики, для другой части – обратная задача. Рассмотрен пример.

Gaidaichuk V.V., Hudoliy S.N., Andrusenko E.N.
ON MOVEMENT OF A DRILL STRING IN CURVILINEAR BORE-HOLE WITH SPIRAL GEOMETRIC IMPERFECTIONS.
Motion of a drill string at fulfillment of raising-lowering operations in curvilinear bore-hole with localized geometrical imperfections of axial line is considered. The direct and inverse problems of statics are stated for different parts of unknown variables. An example is analyzed.

УДК 539.375

С.О. Пискунов, канд. техн. наук
С.В. Мицюк

ВИЗНАЧЕННЯ РЕСУРСУ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ЗМІННОЇ ПЛОЩІ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З ПОЧАТКОВОЮ ТРІЩИНОЮ

На основі НМСЕ досліджено вплив зміни площі поперечного перерізу об'єкта на характерні розмірі тріщини і величину ресурсу при багато цикловому навантаженні.

Вступ. Обчислення несучої здатності і визначення розрахункового ресурсу відповідальних елементів конструкцій з початковими тріщинами передбачає проведення моделювання росту тріщини. Величина ресурсу елемента конструкції з тріщиною визначається кількістю циклів навантаження до досягнення тріщиною певного, наперед обумовленого критичного розміру.

Значна кількість відповідальних об'єктів являють собою просторові тіла, в тому числі тіла обертання складної конфігурації: ротори та диски парових і газових турбін, фрагменти оболонок ядерних реакторів, ємності і резервуари, деталі трубопроводів, елементи технологічного обладнання та ін.. В певних випадках їх напружено-деформований стан може мати невісесиметричний характер, що може бути спричинено невісесиметричним зовнішнім навантаженням, наявністю початкових тріщин, а для тонкостінних тіл обертання – вихідні недосконалості форми у вигляді змінності геометричних розмірів вздовж колової координати. Які можуть знаходитися під дією довільного розподіленого в просторі невісесиметричного навантаження. В той же час циклічний характер зовнішніх навантажень призводить до розвитку початкових тріщин.

Визначення напружено-деформованого стану просторових тіл обертання змінної площі поперечного перерізу і моделювання росту тріщин при використанні традиційного тривимірного МСЕ, може призвести до значних обчислювальних витрат. Зважаючи на це для розв'язання задачі доцільним є використання напіваналітичного МСЕ.

Метою даної роботи є апробація розроблених скінчено-елементних засобів визначення напружено-деформованого стану і методик визначення КІН і моделювання росту тріщини для тіл змінної площі поперечного перерізу та розв'язання на їх основі задач про визначення

© Пискунов С.О., Мицюк С.В.

ресурсу просторових тіл обертання змінної площі поперечного перерізу з початковою тріщиною в умовах циклічного навантаження.

1. Співвідношення механіки руйнування. Для опису просторового напружено-деформованого стану в околі фронту тріщини застосовується пов'язана із тріщиною система координат $y^{i''}$: вісь $y^{1''}$ спрямована за нормаллю до поверхні тріщини, а $y^{2''}$, $y^{3''}$ – за дотичною до фронту. У випадку лінійного деформування під впливом силового навантаження напружено-деформований стан в околі вершини тріщини може бути описаний асимптотичними формулами, які встановлюють взаємозв'язок між переміщеннями і напруженнями та коефіцієнтом інтенсивності напружень. Для випадку тріщин нормального відриву, що розглядуються найчастіше (тип I, рис. 1), в яких переміщення берегів тріщини перпендикулярні її площині, ці залежності мають вигляд [1]:

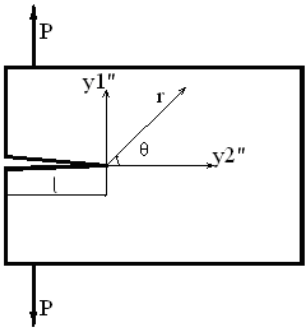


Рис. 1

$$\sigma^{1''1''} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$\sigma^{1''2''} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},$$

$$\sigma^{2''2''} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right),$$

$$u_{1''} = \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$u_{2''} = \frac{K_I}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

де r, θ – полярні координати з початком у точці фронту тріщини, для якої визначені КІН; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона.

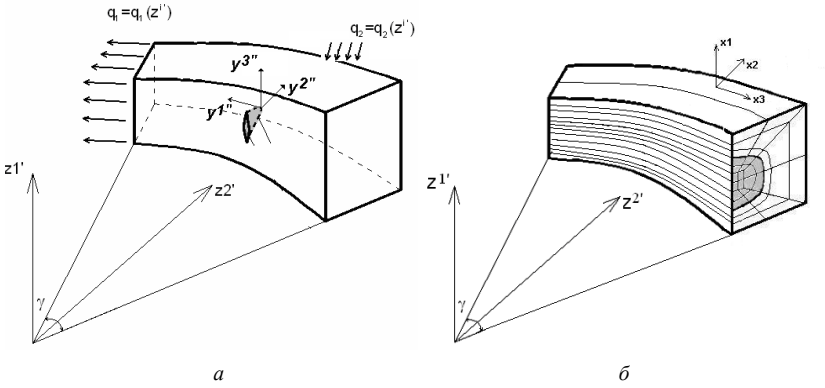
При впливі циклічного навантаження процес розвитку тріщини описується диференційними залежностями, що встановлюють зв'язок між приростом довжини тріщини dl, кількістю циклів навантаження dN і значенням КІН $K_I(l)$, що відповідає поточній довжині (характерним розмірам) тріщини l в кожній точці її фронту [6]:

$$\frac{dl}{dN} = C(K_I(l))^b, \qquad (1.1)$$

де C і b – коефіцієнти, що характеризують фізичні властивості матеріалу.

Визначення ресурсу передбачає визначення параметрів напружено-деформованого стану, КІН [1,5] та ефективного алгоритму моделювання росту тріщини [1].

2. Методика визначення напружено-деформованого стану і параметрів механіки руйнування тіл обертання змінної площі поперечного перерізу на основі НМСЕ. При використанні НМСЕ скінченно-елементна дискретизація об'єкта відбувається в поперечному перерізі, а вздовж направляючої використовується один скінчений елемент, який повторює форму тіла (рис. 2).



а *б*

Рис. 2

Для дискретизації тіл обертання змінної площі поперечного перерізу в НМСЕ використовуються неоднорідний круговий скінчений елемент, що являють собою криволінійну призму утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола. При цьому передбачається, що конфігурація поперечного перерізу СЕ зберігається незмінною, а площа може змінюватись за законом: $A(z^3) = A_0 f(z^{3'})$, де A_0 - площа поперечного перерізу при $z^{3'} = 0$, $f(z^{3'})$ – монотонна безперервна функція. Розв'язувальні співвідношення для даного скінченого елементу отримано в роботі [4].

Обчислення КІН здійснюється прямим методом [1] на основі результатів розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану тіла з тріщиною. Відповідна методика і результати її апробації для тіл сталої площі поперечного перерізу викладені в [5].

При виконанні чисельного інтегрування рівняння (1.1) в кожній точці фронту *i (i*=1..*k)* характерні розміри тріщини l_m^i на кожному наступному

кроці визначаються за довжиною тріщини на попередньому кроці l^i_{m-1} з врахуванням її приросту Δl^i_m (рис. 3):

$$l^i_m = l^i_{m-1} + \Delta l^i_m . \tag{2.1}$$

Визначення приросту довжини тріщини в точках фронту за ΔN циклів навантаження виконується за величиною КІН і, згідно з (1.2), становить:

$$\Delta l^i_m = C\left(K_I(l^i{}_m)\right)^b \Delta N_m . \tag{2.2}$$

За величинами Δl^i_m обчислюються нові координати вузлів фронту тріщини, а також інших вузлів СЕ моделі і проводиться зміна конфігурації сіткової області.

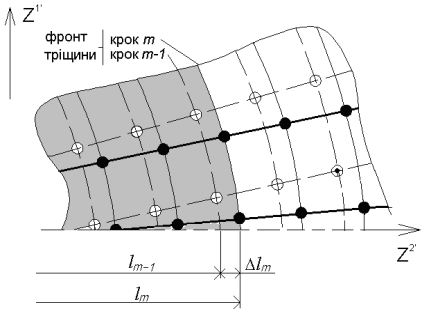


Рис. 3

В роботі [2] було розглянуто декілька алгоритмів обчислення параметрів напружено-деформованого стану при покроковому моделюванні росту тріщини і шляхом розв'язку тестових прикладів про моделювання росту тріщини в тілах різної конфігурації було показано, що найвища точність визначення параметрів напружено-деформованого стану і ресурсу досягається при використанні алгоритму з екстраполяцією по повних переміщеннях. Основа його полягає у тому, що враховуючи, що змінення напружено-деформованого стану, пов'язане із зміненням конфігурації тріщини від кроку до кроку є незначним, за перше наближення розв'язку на кроці m можна прийняти повне переміщення точок тіла, отримані на попередньому кроці:

$$\{u\}^m_0 = \{U\}^{m-1} . \tag{2.3}$$

На першій ітерації прирощення напруження обчислюється за повними переміщеннями попереднього кроку $m-1$:

$$\{\Delta\sigma\}^m_1 == f\left(\{U\}^{m-1}\right), \tag{2.4}$$

а на наступних ітераціях *n* – за повними переміщеннями, отриманими на попередній ітерації *n-1* даного кроку *m*:

$$\{\Delta\sigma\}_n^m = f\left(\{U\}_{n-1}^m\right). \tag{2.5}$$

Отримані на останній ітерації кроку *m* (*m=2,3…M*) напруження і переміщення є повними напруженнями і переміщеннями для тіла з тріщиною розмірами l_m^i:

$$\{\sigma\}_N^m = \{\Delta\sigma\}_N^m, \tag{2.6}$$

$$\{U\}^m = \{u\}_N^m. \tag{2.7}$$

Таким чином виключається похибка, що утворюється внаслідок обчислення параметрів напружено-деформованого стану за величинами прирощень переміщень на кожному кроці.

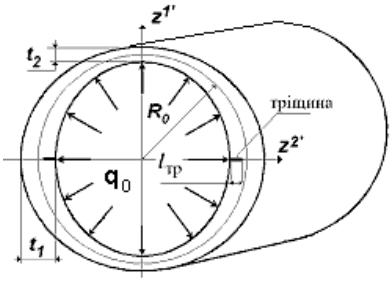


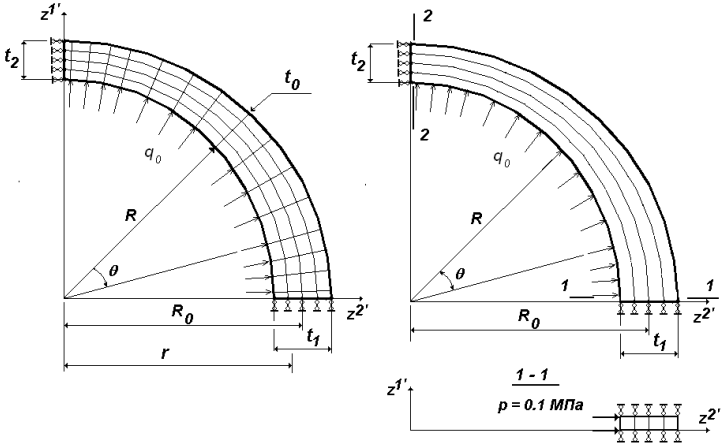
Рис. 4

Для дослідження можливостей описаної методики до визначення ресурсу тіл обертання змінної площі поперечного перерізу з початковими тріщинами, було проведено розв'язання тестового прикладу про деформування циліндра змінної площі поперечного перерізу під впливом внутрішнього тиску із початковою тріщиною при різних співвідношеннях характерних розмірів перерізів t_1 і t_2 (рис.4).

Внаслідок симетрії розглядалась ¼ частина поперечного перерізу циліндра. Середній радіус циліндра R_0=100мм, характерні номінальні товщини стінок t_0=20мм., $t_{1,2} = t_0 \pm k t_0/(2\times 100)$, де *k* – коефіцієнт, що являє собою відмінність товщини від t_0 (в відсотках). Навантаження, що діє на внутрішню поверхню циліндра складає q_0 = 1.67МПа. Розглянуто зміну площ поперечного перерізу на 4% та 10% на секторі циліндра кутом 90° градусів (рис. 4).

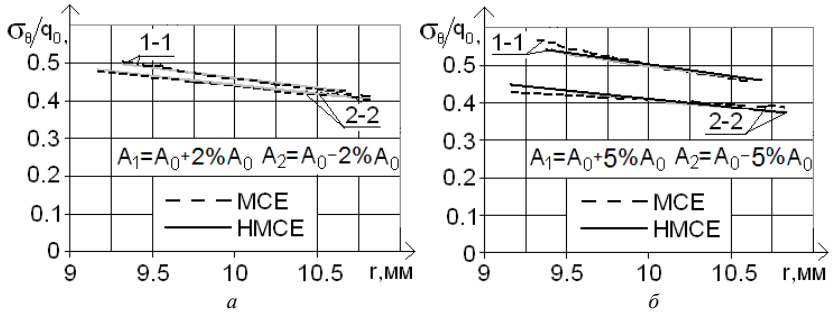
На першому етапі проведено дослідження вірогідності моделювання напружено-деформованого стану без тріщини. Дискретні моделі МСЕ та НМСЕ наведені на рис. 5. Розподілення безрозмірних величин колових напружень σ_θ/q_0 вздовж радіуса, отримані основі МСЕ та НМСЕ

зображено на (рис. 6). Як видно, для внутрішнього радіуса максимальна різниця колових напружень складає: при k=4% 1.47%, при 10% – 4,66%. Для зовнішнього радіуса в точках різниця колових напружень складає: при 4% – 1%, при 10% – 1,95%.



а *б*

Рис. 5



а *б*

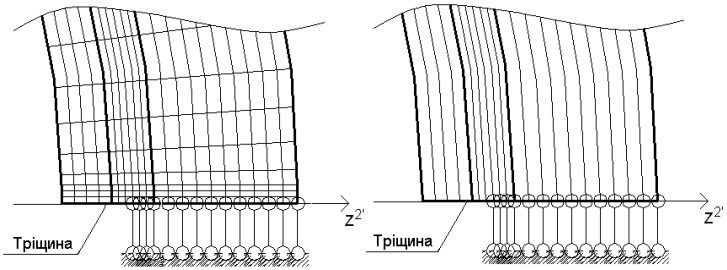
Рис. 6

Таким чином отримані результати розв’язку тестової задачі засвідчили задовільну точність отримуваних величин напружень при змінені площі поперечного перерізу в межах 10%.

Необхідною передумовою вірогідного моделювання росту тріщини є висока точність визначення КІН. Тому важливим є перевірка достовірності його величин при різних характерних розмірах тріщини.

Для дослідження достовірності визначення КІН в тілах обертання змінної площі поперечного перерізу було розв'язано задачу про визначення КІН в циліндрі.

Матеріал циліндра являє собою високоміцну корозійностійку сталь 08Х14АН4МДБ, фізико-механічні характеристики пружного деформування $E = 2{,}04 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$, константи рівняння Періса (1) $C = 1{,}32 \cdot 10^{-12}$, $b = 3.83$.[3]. Фрагменти дискретних моделей МСЕ і НМСЕ в околі вершини тріщини наведені на рис. 7,а та рис. 7,б відповідно. Загальний вигляд дискретної моделі є аналогічним наведеним на рис. 5.



а *б*

Рис. 7

Розрахунок було проведено при різних довжинах тріщини l_{Tp}. Отримані результати визначення КІН при різних довжинах тріщинах із використанням МСЕ і НМСЕ повністю співпали (різниці не перевищують 1%). Таким чином, результати є вірогідними при різних довжинах тріщин.

Для подальшого дослідження вірогідності моделювання росту тріщини і визначення впливу зміни площі поперечного перерізу на величину ресурсу було проведено моделювання росту тріщини в даному циліндрі із використанням розробленої методики.

Як бачимо з отриманих результатів (рис. 8) при зміни площі поперечного перерізу на 4% ресурс зменшується близько 8%, а при зміні площі поперечного перерізу на 8% ресурс порівняно із сталою площею поперечного перерізу зменшується на 15%. Це дозволяє зробити висновок, що зміна площі поперечного перерізу вздовж утворюючої призводить до значного зменшення величини ресурсу. Результати за НМСЕ були порівняні із результатами отриманими в МСЕ (рис. 8). Результати співпали в межах 1%-2% (рис. 8).

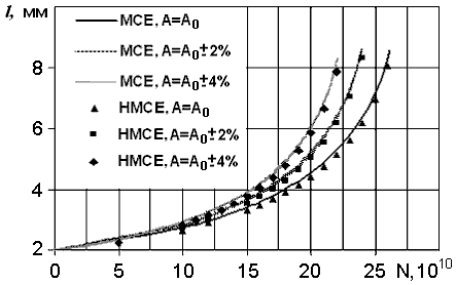


Рис. 8

3. Визначення ресурсу в робочій камері високого тиску при багато-цикловому навантаженні. На наступному етапі даної роботи було проведено дослідження впливу зміни площі поперечного перерізу на величину ресурсу робочої камери високого тиску з початковою еліптичною тріщиною при багато цикловому навантаженні (рис. 9).

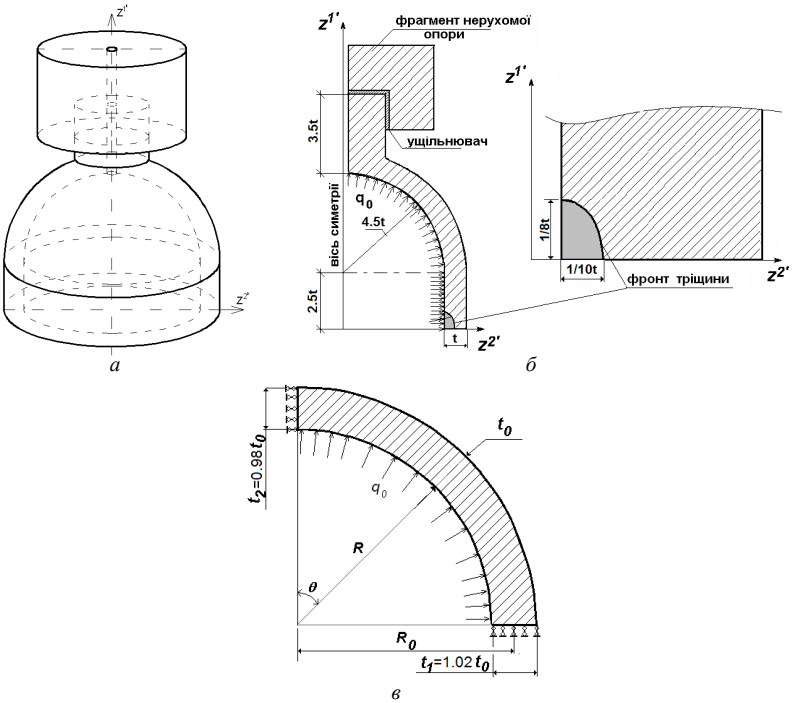


Рис. 9

Об’єкт виготовлений із сталі 08Х14АН4МДБ і являє собою тіло обертання, верхня частина якого закріплена в масивній нерухомій опорі (рис. 9,а). Поперечний переріз показаний на рис.9,б. Камера навантажена рівномірно розподіленим внутрішнім тиском $q_0 = 1.67$ МПа, середній радіус циліндричної частини R_0=100мм, товщина стінки t_0=20мм. В циліндричній частині стінки камери наявна вихідна напівеліптична тріщина. При цьому, внаслідок недосконалостей технологічного процесу обробки товщина стінки камери є змінною вздовж утворюючої, що проілюстровано повздовжним розрізом (рис. 9,в). В зв’язку з цим було досліджено вплив зміни площі поперечного перерізу в цій частині камери на величину ресурсу.

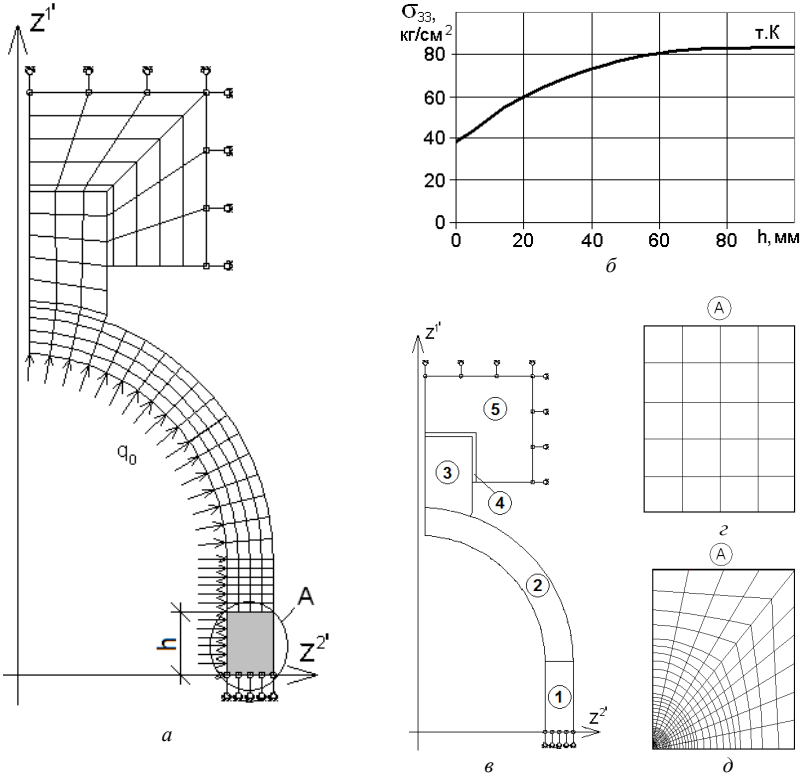


Рис. 10

Побудова дискретної моделі НМСЕ, загальний вигляд поперечного перерізу якої на рис. 10,а, здійснений на основі пофрагментної

дискретизації області (рис.10,в) із використанням регулярних сіткових структур.

На першому етапі було досліджено напружено деформований стан без початкової тріщини. При цьому для фрагмента дискретної моделі, що відповідає циліндричній частини, використана регулярна скінчено-елемента сітка (рис. 10,г). Для дослідження можливості використання відомих аналітичних розв'язків із визначення напружено-деформованого стану циліндричних і сферичних посудин для визначення напружено-деформованого стану і ресурсу камери було проведено дослідження величини колових напружень в околі точки розташування тріщини (т.К.) в залежності від висоти циліндричної частини h рис. 10,б. Як бачимо, при досягненні h=72мм напруження повністю співпадають з аналітичним розв'язком. У даному випадку висота циліндричної частини складає 45мм. (рис. 9), відповідно відмінності напружень від аналітичного розв'язку є досить суттєвими, що спричиняє неможливість використання аналітичних формул для визначення напружено-деформованого стану, і потребує розв'язання задачі чисельними методами.

Фронт початкової тріщини має еліптичну конфігурацію: співвідношення напіввісей тріщини вздовж вісей $z^{1'}$ та $z^{2'}$ складає 5/4, розмір меншої з півосей тріщини, розташованої в напрямку радіусу, складає 1/10 товщини стінки. Фрагмент відповідної скінчено-елементної моделі циліндричної частини камери з тріщиною зображений на рис. 10,г.

Розподілення КІН вздовж фронту початкової еліптичної тріщини при сталій і змінній площі поперечного перерізу відрізняється незначно (близько 2-3%, рис. 11).

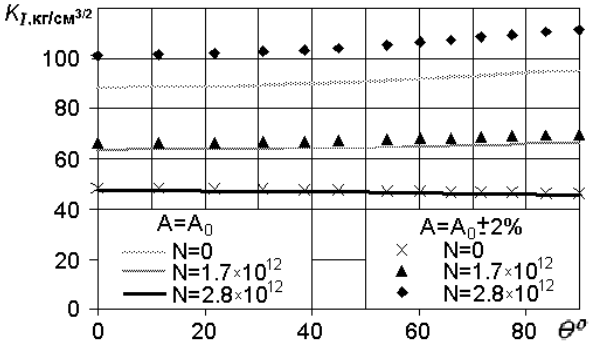


Рис. 11

При моделюванні росту тріщини з метою дослідження збіжності результатів в залежності від величини кроку за кількістю циклів

навантаження ΔN розв'язання задачі за умови сталої товщини стінки проведено при ΔN=1.0•10^{10} і ΔN=2.5•10^{10}. Як видно з наведених залежностей різниця (рис. 12) кількості циклів до руйнування складає менше ніж 1.5% характерних розмірів тріщини вздовж вісі $z^{1'}$, а по $z^{2'}$ відмінність отриманих довжин тріщин становить 1%. Таким чином, збіжність досягається при ΔN=2.5•10^{10}.

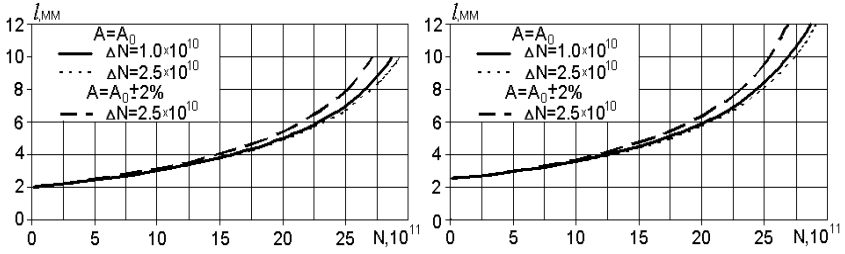


Рис. 12

Порівняння конфігурацій фронту тріщини при сталій (A_0) і змінній (A_0±2%) площі поперечного перерізу наведена на рис.13 (1-початкова тріщина (N=0), 2 – N=1.7•10^{12}; 3– N=2.4•10^{12}; 4 – N=2.8•10^{12};). Як видно, з часом різниця конфігурації розмірів тріщини зростає, зокрема вздовж вісі $z^{1'}$ після N=1.7•10^{12} ця різниця складає 1,4%, після N=2.4•10^{12} – 13%, після N=2.8•10^{12} – 24% .

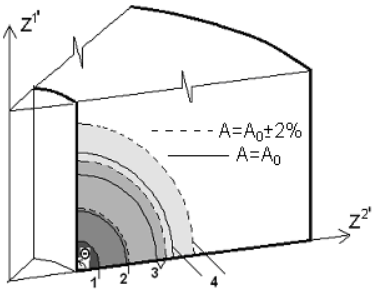


Рис. 13

Аналіз розподілень КІН вздовж фронту тріщини, виконаний після N=1.7•10^{12} і N=2.8•10^{12} циклів навантаження для сталої і змінної товщини свідчить, що з часом різниця величин КІН також зростає (рис.11) відповідно до зростання різниці конфігурації фронтів тріщини при сталій та змінній площі поперечного перерізу.

Таким чином, зміна площі поперечного перерізу в межах 4% спричиняє суттєве змінення характерних розмірів тріщини і зменшення величини ресурсу на 6.7%

Висновок. В даній роботі була проведена апробація розроблених в попередніх роботах методик визначення параметрів механіки руйнування і моделювання росту тріщин для чисельного дослідження тіл обертання

змінної площі поперечного перерізу. На цій основі проведено розв'язання практичної задачі про дослідження впливу зміни площі поперечного перерізу на величину ресурсу при циклічному навантаженні. Отримані результати показали, що незначна зміна площі поперечного перерізу суттєво впливає на характерні розміри тріщини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О. Мицюк С.В.* Алгоритм розв'язання задач про моделювання росту тріщини при визначенні граничного ресурсу. //Опір матеріалів і теорія споруд. – К., 2008.- Вип. 81. с.57-83.
3. *Дронов В.С.* Влияние структурного состояния на кинетику локализованного усталостного разрушения конструкционных сталей.// АВТОРЕФЕРАТ диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук – Тула.2008 -46с.
4. *Пискунов С.О., Шкриль О.О., Мицюк С.В.* Визначення напружено-деформованого стану тіл обертання із використанням кругового скінченого елементу змінної площі поперечного перерізу// Геотехнічна механіка: Міжвідомчий збірник наукових праць/ Інститут геотехнічної механіки ім.. М.С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип. 71. – С.198-223..
5. *Пискунов С.О., Шкриль О.О., Мицюк С.В.,* Визначення параметрів лінійної механіки руйнування для неоднорідних кругових тіл// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 80. – С. 9-22.
6. *Трощенко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В.* Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении. – К.:Наук. думка, 1987.-257с.

Отримано 02.05.10

Пискунов С.О., Мицюк С.В.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С НАЧАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ.

На основе ПМКЭ исследовано влияние изменения площади поперечного сечения объекта на характерне размеры и величину ресурса при многоцикловом нагружении.

Pyskunov S.O., Mytsyuk S.V.

LIFETIME DEFINITION OF SPATIAL BODIES OF ROTATION OF THE VARIABLE AREA OF CROSSECTION WITH THE INITIAL CRACK.

An influence of change of the area of cross section on characteristic size of crack and life time value at multisequencing loading is investigated on the basis of SFEM.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук
О.В. Геращенко, канд. техн. наук
О.С. Русанова

ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ДЕФОРМУВАННЯ МАСИВІВ З ТРІЩИНАМИ

Аналізуються особливості дослідження коливань масивних елементів конструкцій з тріщинами за гранично-елементною методикою, що базується на регулярізації з використанням теореми Стокса. Розроблена методика порівнюється з іншим чисельним підходом, пов'язаним з обчисленням скінченної частини гіперсингулярного інтегралу. Показано, що останній алгоритм є більш ефективним.

При усталених гармонійних коливаннях масивних елементів конструкцій, послаблених тріщинами, напруження σ_{jk} в регулярних точках границі Γ можуть бути знайдені за формулою Соміліани [1,2]:

$$\frac{1}{2}\sigma_{jk}(\bar{x}_0) = \int\limits_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y - \int\limits_{\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \quad , \quad j,k,l=1,2,3, \qquad (1)$$

де u_l і τ_l – амплітудні значення компонент векторів відповідно граничних переміщень і напружень; $\vec{x}_0, \vec{y} \in \Gamma$; D_{jkl} та S_{jkl} – узагальнені похідні матриці фундаментальних розв'язків задачі U_{jk} (матриці В.Д.Купрадзе [3]), а саме $D_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) = -C_{jkmt} U_{ml,t}(\vec{x}, \vec{y})$, $S_{jkl}(\vec{x}, \vec{y}) = -C_{jkmt} n_s C_{slrq} U_{mr,qt}(\vec{x}, \vec{y})$, n_j – компонента вектора зовнішньої нормалі в точці $y \in \Gamma$, C_{jklm} – тензор пружних констант, який задається виразом $C_{jkml} = \lambda \delta_{jk} \delta_{ml} + \mu(\delta_{jl}\delta_{mk} + \delta_{jm}\delta_{kl})$; λ і μ – константи Ляме. Крім того у виразі (1) використані позначення

$$\int\limits_{\Gamma} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int\limits_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\}; \qquad (2)$$

$$\int\limits_{\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int\limits_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y + u_l(\vec{x}_0) \int\limits_{\Gamma_s} S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y \right\}, \qquad (3)$$

© Ворона Ю.В., Геращенко О.В., Русанова О.С.

причому Γ_ε – це частина границі Г, яка вирізається сферою малого радіусу ε з центром в точці x_0, а Γ_s – це частина вказаної сфери, занурена всередину тіла.

Отже, $\oint\limits_\Gamma \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y$ – це головне за Коші значення невласного інтегралу $\int\limits_\Gamma \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y$, а $\oint\limits_\Gamma u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y$ – це скінченна за Адамаром [4] частина невласного інтегралу $\int\limits_\Gamma u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y$.

Вираз (1) може використовуватись для знаходження незаданих граничними умовами переміщень і напружень, тобто стає за таких умов гіперсингулярним граничним інтегральним рівнянням (ГІР). Наприклад, якщо розглядається симетричний напружений стан в нескінченному просторі, послабленому тріщиною нормального відриву, яка розташована в площині симетрії x_3=0, і до берегів якої прикладене нормальне рівномірно розподілене навантаження з амплітудою q, формула (1) спрощується і набуває вигляду [5]:

$$2 \oint\limits_{\Gamma^+} u_3(\vec{y}) S_{333}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y = q, \quad \vec{x}_0, \vec{y} \in \Gamma^+, \; q=const, \tag{4}$$

де Γ^+ – це поверхня верхнього берегу тріщини.

Вираз (4) є інтегральним рівнянням відносно u_3 (амплітуд нормальних переміщень точок границі тріщини). В роботі [5] був розроблений алгоритм розв'язання гіперсингулярного ГІР (4). Цей алгоритм базується на підході, який має назву регуляризація після дискретизації [6], оскільки він використовує припущення про те, що точка $\vec{x}_0$ розташована на плоскому фрагменті поверхні, переміщення на якому можуть бути подані у вигляді поліному. За таких умов Γ_s стає півсферою, і граничний перехід у виразі (3) може бути виконаний за методикою, викладеною в [5].

Існує також інший підхід, який має назву регуляризація перед дискретизацією [6] і виходить з припущення, що переміщення поблизу точки $\vec{x}_0$ є диференційованими функціями. При цьому застосування теореми Стокса [7] дозволяє надати гіперсингулярному інтегралу (3) наступного вигляду:

$$\oint\limits_{\Delta\Gamma} u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y = \int\limits_{L_\Delta} u_k(\vec{y}) C_{ijml} \mathrm{e}_{tsl} \left[D_{skm}(\vec{x}_0, \vec{y}) \right] dx_t -$$

$$- \oint\limits_{\Delta\Gamma} \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial s_t} C_{ijml} \mathrm{e}_{tsl} \left[D_{skm}(\vec{x}_0, \vec{y}) \right] d\Gamma_y + \rho\omega^2 \oint\limits_{\Delta\Gamma} u_k(\vec{y}) F_{ijk}(\vec{x}_0, \vec{y}) d\Gamma_y, \tag{5}$$

де L_Δ – контур фрагмента $\Delta\Gamma$, в межах якого компоненти нормалі $\vec{n}$ є неперервними величинами; ρ – густина пружного середовища; ω – кутова частота коливань; e_{ijk} – символ Леві-Чивіта, $\vec{s}_t$ – деякий одиничний вектор, перпендикулярний до нормалі в точці y поверхні Γ. Зазначимо також , що перший з інтегралів в правій частині виразу (5) є регулярним, третій має слабку сингулярність, а другий – сильну сингулярність, яка втім, не є нездоланною перешкодою [8].

Якщо розглядається інтеграл по всій поверхні об'єкту розрахунку Γ, тобто по сукупності фрагментів $\Delta\Gamma$, то відповідний вираз може бути записаний наступним чином:

$$\oint_\Gamma u_l(\vec{y}) S_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})\,d\Gamma_y = \sum \int_{L_\Delta} u_k(\vec{y}) C_{ijml} e_{tsl}\left[D_{skm}(\vec{x}_0,\vec{y})\right] dx_t -$$

$$- \sum \int_{\Delta\Gamma} \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial s_t} C_{ijml} e_{tsl}\left[D_{skm}(\vec{x}_0,\vec{y})\right] d\Gamma_y + \rho\omega^2 \int_\Gamma u_k(\vec{y}) F_{ijk}(\vec{x}_0,\vec{y})\,d\Gamma_y \quad . \quad (6)$$

При цьому слід мати на увазі, що контур, як сукупність границь між будь-якими парами фрагментів, обходиться двічі – перший раз в прямому напрямі (границя першого фрагменту), а другий раз в зворотному (границя другого фрагменту). Оскільки переміщення точок границі є неперервними функціями, то повна сума контурних інтегралів дорівнює нулю. В результаті, застосовуючи (6) та виконуючи граничний перехід [2], отримуємо альтернативну інтегро-диференціальну форму граничного рівняння для напружень:

$$\frac{1}{2}\sigma_{jk}(\vec{x}_0) = \oint_\Gamma \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})\,d\Gamma_y + \int_\Gamma \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial s_t} C_{ijml} e_{tsl}\left[D_{skm}(\vec{x}_0,\vec{y})\right] d\Gamma_y -$$

$$- \rho\omega^2 \int_\Gamma u_k(\vec{y}) F_{ijk}(\vec{x}_0,\vec{y})\,d\Gamma_y \quad , \quad (7)$$

причому всі інтеграли в правій частині ГІР (7) слід розуміти за Коші.

Рівність (7) так само, як і (1) може використовуватись в якості алгоритмічної основи чисельної методики, спрямованої на розв'язання за методом потенціалу задачі про коливання масивного пружного об'єкту, послабленого тріщинами. Якщо знову розглядається симетричний напружений стан в нескінченному просторі, послабленому тріщиною нормального відриву, то рівняння (7) спрощується і набуває вигляду:

$$\frac{\lambda+2\mu}{2\pi}\left\{\oint_{\Gamma}\left[\frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_1}r_{,1}+\frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_2}r_{,2}\right]\left[\frac{\nu}{1-\nu}T_1(r)-T_2(r)\right]d\Gamma_y \quad - \right.$$

$$\left. -\frac{\rho\omega^2}{\mu}\oint_{\Gamma}u_3(\vec{y})U_0(r)d\Gamma_y\right\}=q\,, \qquad (8)$$

де $U_0(r)=\exp(z_2)r^{-1}\left[1-z_2^{-1}+z_2^{-2}\right]+\beta\ \exp(z_1)r^{-1}\ \left[z_1^{-1}-z_1^{-2}\right]$;

$z_k=\dfrac{i\omega r}{C_k}$, k = 1,2 ; $\beta=\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}$; $r=\sqrt{(x_k-y_k)(x_k-y_k)}$; $r_{,j}=\dfrac{\partial r}{\partial x_j}=\dfrac{y_j-x_j}{r}$.

$T_1=-2\exp(z_2)r^{-2}\left[1-3z_2^{-1}+3z_2^{-2}\right]+\exp(z_1)r^{-2}\left[z_1-1-2\beta\left(1-3z_1^{-1}+3z_1^{-2}\right)\right]$;

$T_2=\exp(z_2)r^{-2}\left[z_2-3+6z_2^{-1}-6z_2^{-2}\right]-2\beta\ \exp(z_1)r^{-2}\left[1-3z_1^{-1}+3z_1^{-2}\right]$.

Найбільш відповідальною та трудомісткою частиною процесу чисельного розв'язування системи сингулярних ГІР є обчислення інтегралів по тому граничному елементу, на якому розташовано полюс $\vec{x}_0$. Якщо прийнята кусково-квадратична апроксимація невідомих переміщень, то при інтегруванні по елементу, що містить $\vec{x}_0$, можна користуватись поданнями

$$u_3(\vec{y})=u_3(\vec{x}_0)+\frac{\partial u_3(\vec{x}_0)}{\partial x_\alpha}\cdot r\cdot r_{,\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_3(\vec{x}_0)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\cdot r^2\cdot r_{,\alpha}\cdot r_{,\beta}\ ; \qquad (9)$$

$$\frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial u_3(\vec{x}_0)}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial^2 u_3(\vec{x}_0)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\cdot r\cdot r_{,\beta}\,,\ \alpha,\beta=1,\ 2. \qquad (10)$$

Перенесемо початок координат в т. $\vec{x}_0$ та виділимо з області інтегрування круг Γ_R радіусу R_Δ з центром в полюсі (рис. 1).

Використовуючи локальні подання (9-10) та полярну систему координат, в якій $r_{,1}=\cos\theta$; $r_{,2}=\sin\theta$, отримуємо

$$\oint_{\Gamma_R}u_3(\vec{y})U_0(r)d\Gamma_y=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma_R-\Gamma_\varepsilon}u_3(\vec{y})U_0(r)\Gamma_y\right\}=$$

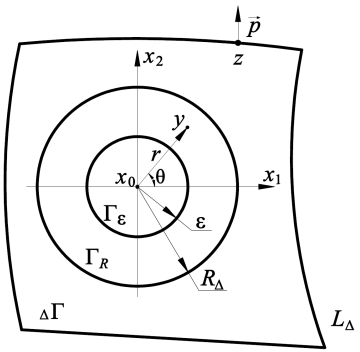


Рис. 1. Параметризація сингулярного ГЕ

$$= 2\pi\left\{u_3(x_0)H_0(R_\Delta) + \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u_3(\vec{x}_0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3(\vec{x}_0)}{\partial x_2^2}\right]H_2(R_\Delta)\right\}, \qquad (11)$$

де

$$H_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x U_0(r)rdr = x\exp(z_2)\left[\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_2^2}\right] + \frac{x\exp(z_1)}{z_2^2} - \frac{z_1}{z_2^2};$$

$$H_2(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x U_0(r)r^3dr =$$

$$= \frac{iC_2^3}{\omega^3}\exp(z_2)\left[4 - 3z_2 + z_2^2\right] + \frac{iC_1^3}{\omega^3}\beta\exp(z_1)(z_1 - 2) - 4\frac{iC_2^3}{\omega^3} + 2\frac{iC_2^2C_1}{\omega^3},$$

$$\oint_{\Gamma_R}\left[\frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_1}r_{,1} + \frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_2}r_{,2}\right]\left[\frac{\nu}{1-\nu}T_1(r) - T_2(r)\right]d\Gamma_y =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[\int_{\Gamma_R-\Gamma_\varepsilon}\left[\frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_1}r_{,1} + \frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_2}r_{,2}\right]\left[\frac{\nu}{1-\nu}T_1(r) - T_2(r)\right]d\Gamma_y\right\}\right.=$$

$$= \pi\left[\frac{\partial^2 u_3(\vec{x}_0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3(\vec{x}_0)}{\partial x_2^2}\right]\left[\frac{\nu}{1-\nu}I_1(R_\Delta) - I_2(R_\Delta)\right], \qquad (12)$$

де

$$I_1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x T_1(r)r^2dr = \frac{iC_2}{\omega}\exp(z_2)\left[2 - \frac{6}{z_2}\right] + \frac{2i}{\omega}(2C_2 - C_1) -$$

$$- \frac{iC_1}{\omega}\exp(z_1)\left[(1-2\beta)z_1 - 2(1-2\beta) - \frac{C_2}{C_1}\frac{6}{z_2}\right];$$

$$I_2(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x T_2(r)r^2dr = \frac{iC_2}{\omega}\exp(z_2)\left[4 - \frac{6}{z_2} + z_2\right] +$$

$$+ \frac{2iC_2}{\omega}\left(1 - 2\frac{C_2}{C_1}\right) - \frac{iC_1}{\omega}\exp(z_1)\beta\left[2 - \frac{6}{z_1}\right].$$

Таким чином, одержані компактні вирази для визначення сингулярних частин невласних інтегралів по граничному елементу, що містить полюс x_0. Чисельне інтегрування по решті поверхні не викликає утруднень. Зазначимо також, що на елементах, які розташовані біля фронту тріщини, зазвичай використовується спеціальна апроксимація, що враховує характер поведінки переміщень та їх похідних в цій зоні. Вирази (9), (10) при цьому стають наближеними, але зменшуючи розмір R_Δ, завжди можна обчислити сингулярні частини інтегралів з лівої частини рівності (8) з якою завгодно точністю.

Методика розв'язання системи рівнянь (8), побудована з використанням співвідношень (9)-(12), була застосована для аналізу гармонійних коливань пружного простору, послабленого дископодібною тріщиною, до берегів якої прикладене нормальне осцилююче навантаження. Результати розрахунків у вигляді графіків залежностей динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) від частоти коливань показані на рис. 2. При цьому кількість граничних елементів вздовж радіусу тріщини дорівнювала п'яти.

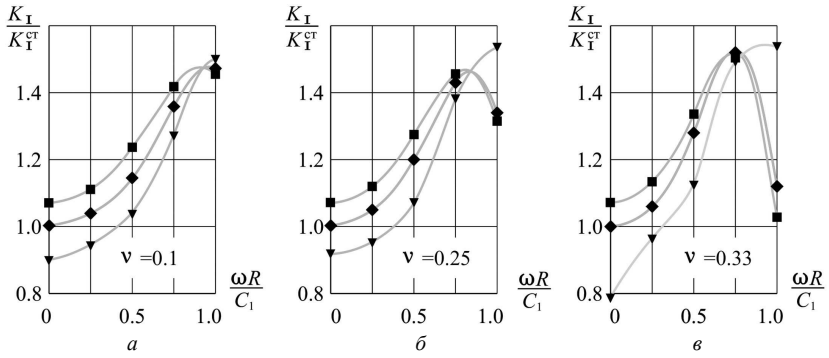


Рис. 2

Бачимо, що незважаючи на досить густу сітку, розрахункові дані (лінії, позначені трикутниками) суттєво відрізнялись від еталонних [9] (лінії, позначені ромбами). Так при значені коефіцієнту Пуассона ν=0,1 відносна похибка розрахунків знаходилась в межах 10%, при ν=0,25 похибка за великих значень параметра частоти доходила до 14,5%, а при ν=0,33 перевищувала 30% (табл. 1). І хоча максимальні значення виявились досить добре узгодженими (похибка була меншою 2%), суттєва розбіжність значень похибки свідчить не на користь достовірності розробленої методики.

Проведені додаткові дослідження показали, що велика похибка розрахункових даних зумовлена обраною колокаційною схемою розв'язання задачі, в якій полюси розташовуються не на контурах, а всередині граничних елементів. При цьому функції форми, а слідом за ними і граничні переміщення є розривними функціями, тому нехтування контурними інтегралами при підстановці виразу (6) до формули Соміліани для напружень є невиправданим. Отже, при розташуванні точок колокації всередині ГЕ граничне інтегро-диференціальне рівняння для напружень має бути записано наступним чином:

$$\frac{1}{2}\sigma_{jk}(\vec{x}_0) = \int_\Gamma \tau_l(\vec{y}) D_{jkl}(\vec{x}_0,\vec{y})\,d\Gamma_y + \int_\Gamma \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial s_t} C_{ijml}\mathrm{e}_{tsl}\left[D_{skm}(\vec{x}_0,\vec{y})\right]d\Gamma_y - \tag{13}$$

$$-\sum \int_{L_\Delta} u_k(\vec{y}) C_{ijml}\mathrm{e}_{tsl}\left[D_{skm}(\vec{x}_0,\vec{y})\right]dx_t \quad -\rho\omega^2 \int_\Gamma u_k(\vec{y}) F_{ijk}(\vec{x}_0,\vec{y})\,d\Gamma_y \quad ,$$

де підсумовування контурних інтегралів розповсюджується на всі ГЕ. Варто зазначити, що згадані контурні інтеграли є регулярними і їх поява обтяжує чисельний алгоритм дуже незначною мірою.

В свою чергу, урахування симетрії задачі про коливання пружного простору, послабленого тріщиною нормального відриву, дозволяє надати рівнянню (13) більш простий вигляд:

$$\frac{\lambda+2\mu}{2\pi}\left\{\int_\Gamma\left[\frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_1} r_{,1} + \frac{\partial u_3(\vec{y})}{\partial x_2} r_{,2}\right]\left[\frac{\nu}{1-\nu} T_1(r) - T_2(r)\right]d\Gamma_y \quad -\right.$$

$$\left. -\sum \int_{L_\Delta} u_3(\vec{z}) \frac{\partial r}{\partial p}\left[\frac{\nu}{1-\nu} T_1(r) - T_2(r)\right]dL - \frac{\rho\omega^2}{\mu}\int_\Gamma u_3(\vec{y}) U_0(r)\,d\Gamma_y\right\} = q\,, \tag{14}$$

де через $\vec{p}$ позначений вектор одиничної нормалі до контуру плоского елемента L_Δ в точці $\vec{z}$.

Чисельна методика, побудована на основі граничного рівняння (14), була знову застосована для чисельного розв'язання задачі про коливання простору, послабленого дископодібною тріщиною нормального відриву, при тій самій густині ГЕ-сітки. Отримані результати засвідчили значне підвищення точності розрахунків (лінії на рис. 2, позначені прямокутниками). В більшості випадків відносна похибка становила 6-7% (табл. 1). Розподіл похибки в залежності від частоти коливань набув більш рівномірного характеру, причому в районі максимальних значень КІН величина похибки знову була досить малою.

Таблиця 1

Відносна похибка (%) чисельного обчислення нормованого динамічного КІН в залежності від частоти ω, коефіцієнту Пуассона ν та виду розв'язувального рівняння

$\omega R C_1^{-1}$ / ν	0	0.25	0.5	0.75	0.85	1.0	ГІР	N_R
0.1	10.2	9.4	10.7	8.0	3.0	1.3	(8)	5
	7.1	6.8	6,6	2.8	3.0	1.7	(14)	5
	5.7	5.5	5.6	2.4	3.0	0.9	(14)	10
	2.3	2.0	2.1	0.2	1.6	1.7	(4)	10
0.25	8.2	9.4	10.8	3.4	0.1	14.5	(8)	5
	7.2	6.7	6.3	1.8	0.5	1.9	(14)	5
	5.7	5.4	5.3	1.7	0.9	0.4	(14)	10
	2.3	1.9	2.8	0.5	0.1	0.8	(4)	10
0.33	21.4	9.3	12.4	1.9	8.4	37.2	(8)	5
	7.2	7.0	4.4	1.1	1.3	8.2	(14)	5
	5.7	5.8	3.6	0.7	0.1	2.8	(14)	10
	2.3	2.3	0.	1.4	0.7	3.0	(4)	10

Цифри в останньому стовпчику таблиці характеризують густину ГЕ-сітки (кількість елементів вздовж радіусу кругової тріщини).

Зазначимо, що при подальшому згущенні сітки граничних елементів точність результатів, отриманих за допомогою рівняння (14), підвищується досить повільно (табл. 1). Водночас, застосування чисельної методики, побудованої на основі гіперсингулярного ГІР (4) [5], дозволяє при такій самій сітці отримати загалом кращі результати. Зокрема, як свідчать дані, наведені в таблиці 1, при невеликих значеннях параметра частоти ($\omega R C_1^{-1} \le 0.5$) за будь-якого ν спостерігалась значно вища точність, тоді як при збільшенні частоти обчислення за формулою (4) інколи давали більшу похибку.

На рис. 3 представленні залежності від параметра частоти нормованого динамічного КІН, обчисленого за допомогою рівняння (14) (лінії, позначені прямокутниками) та рівняння (4) (лінії, позначені трикутниками) при трьох значеннях коефіцієнту Пуассона ν. Для чисельних розрахунків була використана досить густа ГЕ-сітка (10 елементів вздовж радіусу). Лінії, позначені ромбами, відповідають еталонним даним [9].

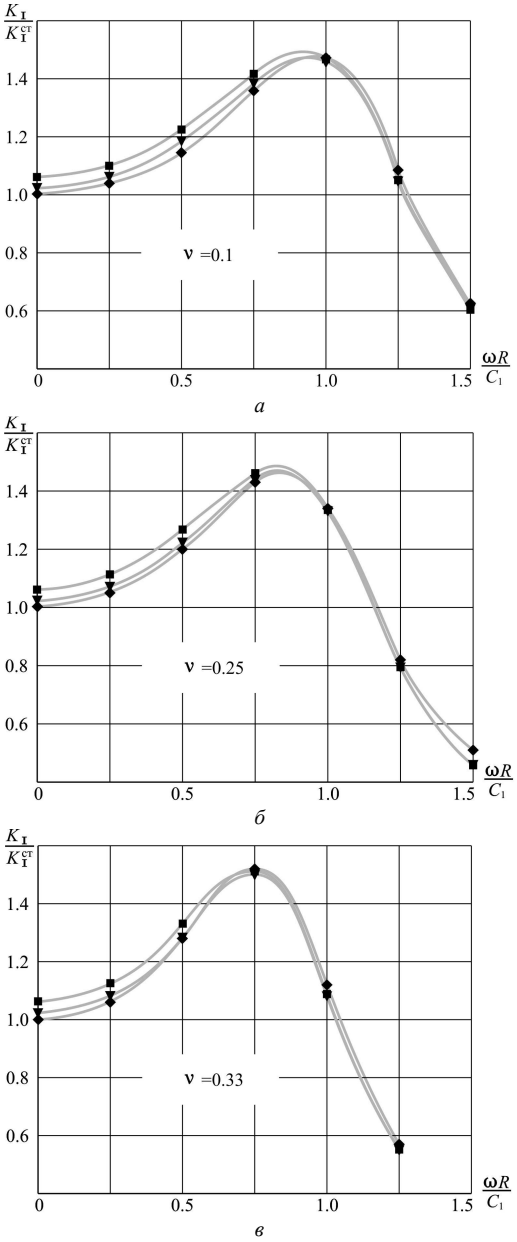

$\frac{K_I}{K_I^{ст}}$
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
ν =0.1
0
0.5
1.0
1.5
$\frac{\omega R}{C_1}$
а
$\frac{K_I}{K_I^{ст}}$
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
ν =0.25
0
0.5
1.0
1.5
$\frac{\omega R}{C_1}$
б
$\frac{K_I}{K_I^{ст}}$
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
ν =0.33
0
0.5
1.0
1.5
$\frac{\omega R}{C_1}$
в

Рис. 3

Отже, дані, наведені в таблиці 1 та на рис. 3, свідчать про більш високу в цілому точність результатів, отриманих за чисельним алгоритмом, побудованим на основі гіперсингулярного ГІР (4). Та головним аргументом на користь цієї методики слід вважати значно нижчий об'єм обчислень. Справа в тому, що в усіх чисельних експериментах процес розв'язання задачі за допомогою системи (4) займав приблизно в 4,5 рази менше часу, ніж за допомогою граничних інтегро-диференціальних рівнянь (14). Таким чином, слід визнати, що з точки зору ефективності викладена в роботі [5] методика аналізу коливань масивів, послаблених тріщинами, що спирається на регуляризацію після дискретизації, переважає викладену вище методику, яка використовує інтегро-диференціальну форму розрахункових співвідношень (регуляризацію до дискретизації).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Хуторянский Н.М.* Граничные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения второго рода для основной смешанной задачи теории упругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1981. – С.3–13
2. *Ворона Ю.В, Геращенко О.В.* Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81.– С.119–134
3. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Ф-М, 1963. – 280 с.
4. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
5. *Ворона Ю.В, Геращенко О.В.* Методика чисельного дослідження коливань масивних елементів конструкцій з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2009. – Вип. 83.– С.84–92
6. *Sladek V., Sladek J.* Regularization of hypersingular integrals in BEM formulations using various kinds of continuous elements // Engineering Analysis with Boundary Elements, 17 (1996), pp. 5-18
7. *Купрадзе В.Д. и др.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
8. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. – 524 с.
9. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ./Под ред. Ю.Мураками. – М: Мир, 1990. – 1016 с.

Отримано 07.06.10

Ворона Ю.В., Геращенко О.В., Русанова Е.С.

ГРАНИЧНО-ЕЛЕМЕНТНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПРО ДЕФОРМИРОВАНИЕ МАССИВОВ С ТРЕЩИНАМИ

Анализируются особенности исследования колебаний массивных элементов конструкций с трещинами по гранично-элементной методике, основанной на применении теоремы Стокса. Разработанная методика сравнивается с другим численным подходом, связанным с вычислением конечной части гиперсингулярного интеграла. Показано, что последний алгоритм является более эффективным.

Vorona Y.V., Gerashchenko O.V., Rusanova O.S.

BOUNDARY ELEMENTS APPROACHES TO THE 3-D FRACTURE ANALYSIS

The aspects of the Boundary Element procedures for the vibration analysis of elastic solids with cracks are considered. The procedure is based on the regularization with the help of Stoke's theorem and compared with another technique connected to direct evaluation of hypersingular integrals. The last approach is found to be more efficient.

УДК 539.3

І.В. Жупаненко
А.М. Станкевич, канд. техн. наук
В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
Л.Т. Шкельов, д-р техн. наук

ЧАСТОТИ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОВСТОЇ ШАРНІРНО-ОПЕРТОЇ ПЛАСТИНИ

З позицій плоскої задачі теорії пружності пропонується методика розрахунку частот власних коливань прямокутного в перерізі пружного тіла, що реалізує комбінований двоетапний чисельно-аналітичний підхід. На першому етапі розрахунку застосовується два альтернативні підходи, ефективність та збіжність яких перевірена при розвяз'анні тестових задач та порівнянні результатів.

З позицій плоскої задачі теорії пружності розглядаються коливання прямокутного в перерізі пружного тіла (рис. 1), закріпленого по торцях ($x = 0$ та $x = l$) в'язями, що виключають вертикальні переміщення ($v(0, y) = 0$, $v(l, y) = 0$) та дозволяють зміщення точок торців в горизонтальному напрямку, що відповідає граничним умовам $\sigma_x(0, y) = 0$ та $\sigma_x(l, y) = 0$. З точки зору кінематики такі умови відповідають шарнірно-рухомому закріпленню в теорії тонких пластин.

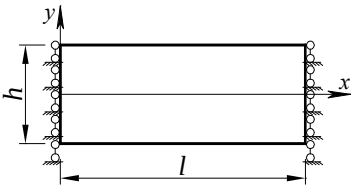


Рис. 1

Динаміка такої пластини при вільних коливаннях описується рівняннями динамічної задачі теорії пружності, які запишемо у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку по просторовій координаті:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_x = (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_y = \lambda \dfrac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{xy} = \mu \dfrac{\partial v}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \tag{1}$$

© Жупаненко І.В., Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.

Відповідну граничну задачу будемо розв'язувати комбінованим чисельно-аналітичним методом, на першому кроці якого знижується вимірність вихідних рівнянь та граничних умов. Для зниження вимірності граничної задачі скористаємось узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень [1], де шукані функції представляються у вигляді розкладів по координаті y по системі нормованих в скалярному добутку

$$\left(\varphi(x), g(x)\right) = \int_{-0.5h}^{0.5h} \varphi(x) g(x) dx, \tag{2}$$

поліномів Лежандра

$$f(x,y) = \overset{i}{f}(x) P_i^H(y). \tag{3}$$

Тут і далі використовуються індексні позначення і дії з індексними величинами. Відповідно, вживається угода Ейнштейна, згідно з якою по індексах, що повторюються, передбачено підсумовування.

Далі вихідні рівняння (1) та граничні умови множаться скалярно на нормовані поліноми Лежандра $P_j^H(y)\left(j = 1, 2, \ldots, N\right)$ і отримуються редуковані рівняння та граничні умови:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overset{i}{\sigma}_x}{\partial x} - \dfrac{2}{h} m^{ji} \overset{j}{\tau}_{xy} = \rho \dfrac{\partial^2 \overset{i}{u}}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial \overset{i}{\tau}_{xy}}{\partial x} - \dfrac{2}{h} m^{ji} \overset{j}{\sigma}_y = \rho \dfrac{\partial^2 \overset{i}{v}}{\partial t^2}, \\ \overset{i}{\sigma}_x = (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial \overset{i}{u}}{\partial x} + \lambda \dfrac{2}{h} m^{ij} \overset{j}{v}, \\ \overset{i}{\sigma}_y = \lambda \dfrac{\partial \overset{i}{u}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \dfrac{2}{h} m^{ij} \overset{j}{v}, \\ \overset{i}{\tau}_{xy} = \mu \dfrac{\partial \overset{i}{v}}{\partial x} + \mu \dfrac{2}{h} m^{ij} \overset{j}{u}. \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\overset{i}{v}(0) = 0, \overset{i}{v}(l) = 0; \\ &\overset{i}{\sigma}_x(0) = 0, \overset{i}{\sigma}_x(l) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Матриця $\{m^{ij}\}$ описана в [1]. Виключаючи з перших двох рівнянь $\overset{i}{\sigma}_x$, $\overset{i}{\sigma}_y$ та $\overset{i}{\tau}_{xy}$ за допомогою трьох інших, отримуємо розв'язувальні рівняння

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial^2 \overset{i}{u}}{\partial x^2} - \dfrac{4}{h^2}\mu m^{ji} m^{j\alpha} \overset{\alpha}{u} + \dfrac{2}{h}\left(\lambda m^{ij} - \mu m^{ji}\right)\dfrac{\partial \overset{j}{v}}{\partial x} = \rho \dfrac{\partial^2 \overset{i}{u}}{\partial t^2}, \\ \dfrac{2}{h}\left(\mu m^{ij} - \lambda m^{ji}\right)\dfrac{\partial \overset{j}{u}}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 \overset{i}{v}}{\partial x^2} - \dfrac{4}{h^2}(\lambda+2\mu) m^{ji} m^{j\alpha} \overset{\alpha}{v} = \rho \dfrac{\partial^2 \overset{i}{v}}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{6}$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} \overset{i}{u} &= \overset{i}{u}_0 \sin(\omega t + \varphi), \\ \overset{i}{v} &= \overset{i}{v}_0 \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{7}$$

Після підстановки (7) до рівнянь (6) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь і відповідних граничних умов відносно амплітудних значень $\overset{i}{u}_0$, $\overset{i}{v}_0$:

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{d^2 \overset{i}{u}_0}{dx^2} - \dfrac{4}{h^2}\mu m^{ji} m^{j\alpha} \overset{\alpha}{u}_0 + \dfrac{2}{h}\left(\lambda m^{ij} - \mu m^{ji}\right)\dfrac{d \overset{j}{v}_0}{dx} = -\rho\omega^2 \overset{i}{u}_0, \\ \dfrac{2}{h}\left(\mu m^{ij} - \lambda m^{ji}\right)\dfrac{d \overset{j}{u}_0}{dx} + \mu \dfrac{d^2 \overset{i}{v}_0}{dx^2} - \dfrac{4}{h^2}(\lambda+2\mu) m^{ji} m^{j\alpha} \overset{\alpha}{v}_0 = -\rho\omega^2 \overset{i}{v}_0. \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \overset{i}{v}_0(0) = 0, \ \overset{i}{v}_0(l) = 0; \\ \overset{i}{\sigma}_{x0}(0) = 0, \ \overset{i}{\sigma}_{x0}(l) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Граничні умови (9) дозволяють шукати розв'язок граничної задачі у вигляді:

$$\overset{i}{u}_0(x) = \overset{i}{u}_{0k} \cos\frac{k\pi x}{l}, \quad \overset{i}{v}_0(x) = \overset{i}{v}_{0k} \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{10}$$

Після підстановки до рівнянь (8) залежностей (10) для кожного k отримуємо задачу на власні значення для симетричної матриці:

$$\begin{cases} \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \delta^{i\alpha} + \frac{4}{h^2}\mu m^{ji} m^{j\alpha} - \gamma\delta^{i\alpha} \right] \cdot \overset{\alpha}{u}_{0k} + \frac{k\pi}{l}\frac{2}{h}\left(\mu m^{\alpha i} - \lambda m^{i\alpha}\right) \cdot \overset{\alpha}{v}_{0k} = 0, \\ \frac{k\pi}{l}\frac{2}{h}\left(\mu m^{i\alpha} - \lambda m^{\alpha i}\right) \cdot \overset{\alpha}{u}_{0k} + \left[\mu \cdot \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \delta^{i\alpha} + \frac{4}{h^2}(\lambda+2\mu) m^{ji} m^{j\alpha} - \gamma\delta^{i\alpha} \right] \cdot \overset{\alpha}{v}_{0k} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

де $\gamma = \rho\omega^2$ – шукане власне число. Тут $\delta^{i\alpha}$ – символ Кронекера $\delta^{i\alpha} = \begin{cases} 1, & якщо\ i = \alpha \\ 0, & якщо\ i \neq \alpha \end{cases}$. Власні числа, а по них відповідні частоти, шукаються за допомогою стандартної комп'ютерної програми для симетричних матриць EIGEN [2].

З метою дослідження вірогідності знаходження частот власних коливань даної пластини в роботі розглядається також альтернативний підхід до розв'язання поставленої задачі. Тут теж пропонується комбінована методика знаходження розв'язку задачі. На першому етапі по координаті y поперечний переріз пластини поділяється на смужки шириною $\Delta y = h/n$-1, які визначаються n прямими, серед яких пряма $y = -h/2\,(i=1)$ та пряма $y = h/2\,(i=n)$.

Шукані функції представляються у вигляді розкладів по координаті y по системі лінійно-незалежних функцій $\varphi_i(y)\ (i = \overline{1,n})$:

$$f(x,y) = f^i(x)\varphi_i(y). \tag{12}$$

Функції $\varphi_i(y)$ – кусково-лінійні функції, які дорівнюють 1 на прямій i та 0 на інших прямих. Ці функції не ортогональні в скалярному добутку (2) і тому утворюють косокутний базис. В зв'язку з цим для кожної функції $g(y)$ необхідно розглядати дві групи величин – коефіцієнти g^{ij}, що є коефіцієнтами в розкладі (12) та моменти g_{ij}, що є скалярними добутками ($g(y)$, $\varphi_i(y)$). Крім основного базису $\varphi_i\ (i = \overline{1,n})$ необхідно також розглядати взаємний базис $\varphi^i\ (i = \overline{1,n})$, який пов'язаний з основним базисом співвідношенням

$$(\varphi_i, \varphi^j) = \delta_{i\cdot}^{\cdot j} = \delta_{\cdot j}^{i\cdot} = (\varphi^i, \varphi_j). \tag{13}$$

Відповідно визначаються фундаментальні матриці

$$(\varphi_i, \varphi_j) = g_{ij}, \quad (\varphi^i, \varphi^j) = g^{ij},$$

які є взаємно оберненими $\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1}$ завдяки співвідношенню (13). Мають місце співвідношення, які пов'язують коефіцієнти (контраваріантні компоненти) з моментами (коваріантними компонентами):

$$\varphi_i = g_{ij}\varphi^j, \quad \varphi^i = g^{ij}\varphi_j. \tag{14}$$

Надалі використовується матриця $\{b_{ij}\}$, елементи якої

$$b_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi'_j(y)), \tag{15}$$

де штрихом позначено похідну від функції по змінній y.

Для зниження вимірності рівнянь (1) скористаємось описаним вище підходом, але з базисними функціями φ_i. В результаті отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} - b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha} = \rho \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x} - b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{y\alpha} = \rho \dfrac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}, \\ \sigma_{xi} = (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial u_i}{\partial x} + \lambda b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha, \\ \sigma_{yi} = \lambda \dfrac{\partial u_i}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha, \\ \tau_{xyi} = \mu \dfrac{\partial v_i}{\partial x} + \mu b_{ij} g^{j\alpha} u_\alpha. \end{cases} \tag{16}$$

і, відповідно, граничних умов

$$\begin{cases} v_i(0) = 0, \, v_i(l) = 0; \\ \sigma_{xi}(0) = 0, \, \sigma_{xi}(l) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Якщо в системі рівнянь (16) виключити моменти напружень за допомогою трьох останніх рівнянь, то можна отримати систему рівнянь другого порядку по змінних x і t:

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \mu b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} u_\gamma + \left(\lambda b_{ij} g^{j\alpha} - \mu b_{ji} g^{j\alpha}\right)\dfrac{\partial v_\alpha}{\partial x} = \rho\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ \left(\mu b_{ij} g^{j\alpha} - \lambda b_{ji} g^{j\alpha}\right)\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} - (\lambda+2\mu) b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} v_\gamma = \rho\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (18)$$

Далі, виконуючи аналогічні виконаним вище перетворення, задачу зводимо до знаходження власних чисел матриці:

$$\begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2 \delta_i^{\cdot\alpha} + & \dfrac{k\pi}{l}\left(\mu b_{ji} g^{j\alpha} - \lambda b_{ij} g^{j\alpha}\right) \\ + \mu b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta\varepsilon} g^{\varepsilon\alpha} - \gamma\delta_i^{\cdot\alpha} & \\ \dfrac{k\pi}{l}\left(\mu b_{ij} g^{j\alpha} - \lambda b_{ji} g^{j\alpha}\right) & \mu\cdot\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2 \delta_i^{\cdot\alpha} + \\ & + (\lambda+2\mu) b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta\varepsilon} g^{\varepsilon\alpha} - \gamma\delta^{i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\alpha^k \\ v_\alpha^k \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

для кожного окремого k.

На відміну від (11) матриця системи алгебраїчних рівнянь (19) не є симетричною. Причиною цього є застосування неортонормованої системи функцій $\varphi_i(y)\,(i=\overline{1,n})$. Щоб симетризувати відповідну матрицю на основі лінійно-незалежної системи функцій за допомогою алгоритму Грама-Шмідта побудуємо ортонормовану систему функцій $z_i(y)\,(i=\overline{1,n})$. При застосуванні алгоритму ортогоналізації Грама-Шмідта виробляється нижньотрикутна матриця скалярних добутків

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \omega_{n3} & \dots & \omega_{nn} \end{bmatrix},$$

яка є матрицею переходу до нового базису $z_i(y)$:

$$\varphi_i(y) = \omega_{ij} z_j(y),\ z_i(y) = \omega_{ij}^{-1}\varphi_i(y). \quad (20)$$

З цього випливають співвідношення між коефіцієнтами та моментами відносно косокутного базису $\varphi_i(y)$ та коефіцієнтами (а тут моменти співпадають з коефіцієнтами відносно ортонормованого базису):

$$\overset{i}{u} = \omega_{ij} u^j = \omega_{ij} g^{j\alpha} u_\alpha ,$$

$$u^i = \omega_{ij}^{-1} \overset{j}{u}, \quad u_i = \omega_{ji} \overset{j}{u} \quad (u \Leftrightarrow v), \tag{21}$$

де індексом над літерою позначено коефіцієнти відносно ортонормованого базису. З урахуванням співвідношення (21) систему (19) перетворюємо до вигляду, де матриця коефіцієнтів вже є симетричною.

Як приклад застосування розглянутих методик та розроблених програм, за допомогою яких ці методики реалізовані, розглянуто пластину, для якої прийнято $l = 1$ м, $\rho = 2{,}5$ т/м^3, $E = 2{,}4 \cdot 10^6$ кН/м^2, $\nu = 0{,}3$. Для пластини товщиною $h = 0{,}1$ м (досить тонкої) отримані результати при різних значеннях N та n порівнювались з відомими значеннями частот при поперечних коливаннях за класичною теорією пластин (табл. 1). Частоти коливань при $h = 0{,}5$ м наведені в табл. 2.

З наведених результатів видно, що обидві альтернативні методики дають однакові результати з високою точністю. Нижні частоти, отримані по класичній теорії з достатньою для практики точністю наближаються до отриманих з урахуванням просторових ефектів.

Таблиця 1

Частоти власних коливань пластини товщиною $h = 0{,}1$ м

Частота	Кількість прямих n				Кількість поліномів N				Класична теорія пластин
	5	11	16	21	4	6	8	10	
ω_1	287,7	287,7	287,7	287,7	287,7	287,7	287,7	287,7	292,6
ω_2	1098	1098	1098	1098	1098	1098	1098	1098	1171
ω_3	2311	2309	2309	2309	2309	2310	2309	2309	2634

Таблиця 2

Частоти власних коливань пластини товщиною $h = 0{,}5$ м

k		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	$N = 6$	1092	3151	5076	6643
	$N = 10$				6640
	$n = 7$	1092	3151	5076	6620
	$n = 11$				6638
2	$N = 6$	2957	5399	7283	7643
	$N = 10$			7282	7641
	$n = 7$	2960	5401	7273	7628
	$n = 11$	2957	5400	7281	7639
3	$N = 6$	4875	6511	9308	10410
	$N = 10$			9295	10390
	$n = 7$	4885	6523	9264	10370
	$n = 11$	4877	6513	9291	10390
4	$N = 6$	6768	7772	10830	13110
	$N = 10$			10800	12990
	$n = 7$	6790	7875	10740	12850
	$n = 11$	6770	7779	10790	12980

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Чибіряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
2. *Форсайд Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.

Отримано 25.05.10

Жупаненко И.В., Станкевич А.Н., Чибиряков В.К., Шкелёв Л.Т.

ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТОЙ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ

С позиции плоской задачи теории упругости предложена методика расчета частот собственных колебаний прямоугольного в сечении упругого тела, реализующая комбинированный двухэтапный численно-аналитический подход. На первом этапе расчета применяется два альтернативных подхода, эффективность и достоверность которых проверена решением тестовых задач и сравнением результатов.

Zhupanenko I.V., Stankevich A.N., Chybiryakov V.K., Shkelev L.T.

THE FREQUENCIES OF FREE VIBRATIONS OF THE HINGE-SUPPORTED THICK PLATE

From a position of a flat problem of the theory of elasticity a method is proposed for solution of the problem on free vibrations of rectangular in section of the elastic body. The method realizes combined the numerically-analytical approach. At the first stage of calculation it is applied two alternative approaches, which efficiency and reliability has been checked by solving of test problems and comparison of results.

УДК 539.3

М.О. Соловей, д-р техн. наук
О.П. Кривенко, канд. техн. наук
О.С. Дубина

АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ ТА ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В УЧБОВОМУ КОМПЛЕКСІ

Розв'язки задачі згину пружної пластини, що отримані в учбовому комплексі методом скінченних елементів (МСЕ), порівняні з результатами розрахунків за іншими програмними комплексами та методиками різних авторів.

Студенти 5-го курсу КНУБА за спеціальністю "Промислове та цивільне будівництво" виконують за допомогою учбового розрахункового комплексу (УРК) кафедри будівельної механіки розрахунково-графічну роботу «Розрахунок пластин на згин за методом скінченних елементів». Для аналізу якості отримуваних за УРК розв'язків розглянуто стандартну тестову задачу згину тонкої пружної жорстко затиснутої вздовж контуру квадратної пластини, що навантажена рівномірним нормальним тиском інтенсивністю q (рис. 1). Додатково розглядалися розв'язки [1], що отримані за моментною схемою скінченних елементів (МССЕ), за методиками О.Зенкевича, В.О.Постнова й І.Я.Хархуріма та за відомими програмними комплексами (ПК) ANSYS, COSMOS, NASTRAN, SCAD, ЛІРА, ФРОНТ.

В якості розрахункового фрагмента розглядалася чверть пластини з рівномірною сіткою, що обмежена двома площинами симетрії, при наступних вихідних даних: розмір у плані $a = 200$ см, товщина $h = 1$ см, модуль пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см^2, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

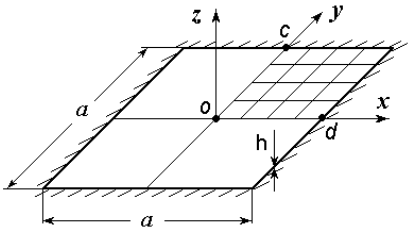


Рис. 1 . Жорстко затиснута квадратна пластина

За еталонні прийняті аналітичні розв'язки С.П.Тимошенка для прогинів та згинальних моментів, що отримані за теорією тонких пластин [2]. Прогин пластини у центрі (точці o) визначається співвідношенням

© Соловей М.О., Кривенко О.П., Дубина О.С.

$$w_o = 0.00126qa^4/D\,, \qquad (1)$$

де $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – жорсткість пластини при згині. З (1) випливає, що

$$q = w_o\, Eh^3/[0.01512\, a^4\ (1-\nu^2)]. \qquad (2)$$

Для зручності проведення аналізу розв'язку задачі прийнято w_o =1 см при відповідно до (2) $q = 0.0908483$ кг/см^2.

Таблиця 1

Сітка СЕ	УРК			Кількість невідомих	МССЕ		ПК ЛІРА	
	Кількість невідомих	w_o	Δ, %		w_o	Δ, %	w_o	Δ, %
1×1	12	1.17	17.00	-	-	-	-	-
2×2	27	1.11	11.00	54	0.97937	-2.06	1.10591	10.59
3×3	48	1.06	6.00	96	0.99180	-0.82	1.05574	5.57
4×4	75	1.03	3.00	150	0.99731	-0.27	1.03424	3.42
5×5	108	1.02	2.00	216	0.99993	-0.01	1.02370	2.37
6×6	147	1.02	2.00	294	1.00140	0.14	1.01797	1.80
7×7	192	1.01	1.00	384	1.00220	0.22	1.01504	1.50
8×8	-	-	-	486	1.00280	0.28	1.01202	1.20
9×9	-	-	-	600	1.00320	0.32	1.01073	1.07
10×10	-	-	-	726	1.00340	0.34	1.00923	0.92
С.П. Тимошенко [2]				w_o = 1 см				

Аналіз результатів показує швидку збіжність і високу точність розв'язку задачі в УРК за прогином порівняно з МССЕ й ПК ЛІРА (табл. 1) та методиками ПК ANSYS, NASTRAN, COSMOS, ФРОНТ, SCAD, О.Зенкевича, В.О.Постнова (рис. 2).

Порівнювальні величини згинальних моментів визначаються такими співвідношеннями [2]:

1) у центрі пластини (точці *о*)

$$M_{xo} = M_{yo} = 0.0231\, qa^2, \tag{3}$$

2) в серединах сторін квадратної пластини (точках *c* та *d*)

$$M_{xd} = M_{yc} = -0.0513 qa^2. \tag{4}$$

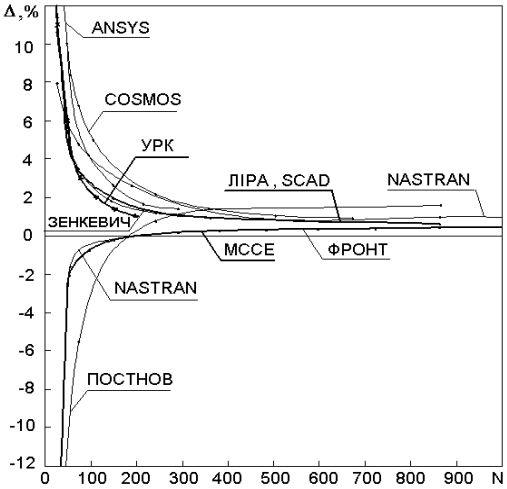


Рис. 2. Порівняння збіжності прогину центра пластини w_o

В УРК згинальні моменти обчислюються у вузлах скінченних елементів (СЕ). В МССЕ [1] та в ПК ЛІРА [3] ця процедура виконується в центрах СЕ. Тому для визначення зусиль у вузлових точках *o*, *c*, *d* були отримані розрахункові співвідношення зі застосуванням інтерполяційної формули Лагранжа [4] та врахуванням прийнятого шаблону (рис. 3) й існуючих площин симетрії:

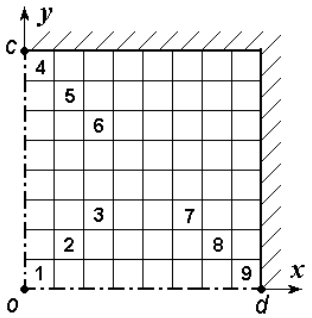


Рис. 3. Чверть розрахункової пластини

$$M_{xo} = 1.2201\, M_{x1} - 0.2717 M_{x2} + 0.0489 M_{x3},$$

$$M_{yo} = 1.2201\, M_{y1} - 0.2717 M_{y2} + 0.0489 M_{y3},$$

$$M_{yc} = 1.8750 M_{y4} - 1.2500 M_{y5} + 0.37500 M_{y6},$$

$$M_{xd} = 1.8750 M_{x9} - 1.2500 M_{x8} + 0.37500 M_{x7},$$

де $M_{x1} - M_{x9}$, $M_{y1} - M_{y9}$ – згинальні моменти в центрах СЕ шаблону з відповідними номерами 1 – 9.

Таблиця 2

Сітка СЕ	УРК			Кількість невідомих	МССЕ		ПК ЛІРА	
	Кількість невідомих	M_{xo}	Δ, %		M_{xo}	Δ, %	M_{xo}	Δ, %
3×3	48	90.6936	8.04	96	87.8195	4.62	83.5209	-0.50
4×4	75	87.3897	4.10	150	85.2196	1.52	83.0028	-1.12
5×5	108	85.8805	2.31	216	84.2891	0.41	82.8963	-1.25
6×6	147	85.0341	1.30	294	83.8424	-0.12	82.8906	-1.25
7×7	192	84.5753	0.75	384	83.6045	-0.40	82.9054	-1.24
8×8	-	-	-	486	83.4564	-0.58	82.9225	-1.22
9×9	-	-	-	600	83.3604	-0.70	82.9375	-1.20
10×10	-	-	-	726	83.2891	-0.78	82.9500	-1.18
С.П. Тимошенко [2]			$M_{xo} = M_{yo} = 83.9438$ кг·см					

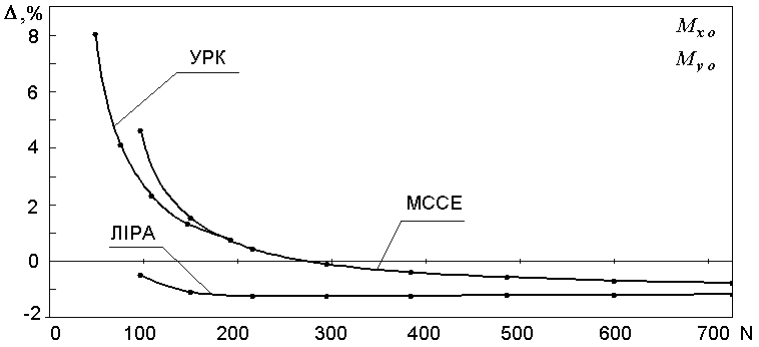


Рис. 4. Збіжність розв'язків за моментами M_{xo} і M_{yo} в центрі пластини

Проведене дослідження підтверджує швидку збіжність та високу точність розв'язків в УРК за моментами при порівнянні з результатами МССЕ та ПК ЛІРА (табл. 3 - 4, рис. 4 - 5). Похибка між порівнювальними розв'язками знаходиться в межах 1 - 2 %.

Таблиця 3

Сітка СЕ	УРК			Кіль-кість невідо-мих	МССЕ		ПК ЛІРА	
	Кількість невідо-мих	M_{xd}	Δ, %		M_{xd}	Δ, %	M_{xd}	Δ, %
3×3	48	-180.0819	-3.29	96	-191.4327	2.80	-179.1302	-3.81
4×4	75	-182.7331	-1.87	150	-197.6032	6.11	-189.1620	1.58
5×5	108	-183.9568	-1.21	216	-195.7868	5.14	-190.2987	2.19
6×6	147	-184.6706	-0.83	294	-193.4937	3.91	-189.8226	1.94
7×7	192	-185.1805	-0.56	384	-191.8326	3.02	-189.1727	1.59
8×8	-	-	-	486	-190.6801	2.40	-188.6246	1.29
9×9	-	-	-	600	-189.7450	1.89	-188.2008	1.07
10×10	-	-	-	726	-189.0567	1.53	-187.8806	0.89
С.П. Тимошенко [2]	$M_{xd} = M_{yc}$ = -186.4207 кг·см							

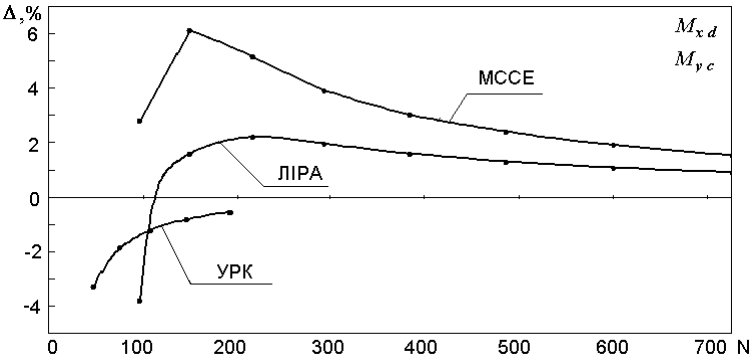


Рис. 5. Збіжність розв'язків за моментами M_{xd} і M_{yc} в серединах сторін пластини

Таким чином, на прикладі стандартної тестової задачі згину тонкої пружної пластини визначено швидку збіжність та достатню точність розв'язків, що обчислюються за допомогою учбового розрахункового комплексу кафедри будівельної механіки КНУБА.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ "Віпол", 2010. – 316 с.
2. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. – 636 с.
3. *Лантух-Лященко А.И.* Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций. – К.-М.: Факт, 2001. – 360 с.
4. *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974. – 832 с.

Отримано 20.08.2010

Соловей Н.А., Кривенко О.П., Дубина А.С.

АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ И ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УЧЕБНОМ КОМПЛЕКСЕ

Решения задачи изгиба упругой пластины, которые были получены в учебном комплексе методом конечных элементов, сравнивались с результатами расчетов по другим программным комплексам и методикам разных авторов.

Solovey M.O., Kryvenko O.P., Dubyna O.S.

THE ANALYSIS OF CONVERGENCE AND ACCURACY OF THE SOLUTIONS FOR THE PROBLEM OF THE CURVING OF ELASTIC PLATE BY A METHOD OF FINAL ELEMENTS AT THE EDUCATIONAL PROGRAM

The solutions of the analysis of curving of elastic plate, which were received at the educational program by a method of final elements, were compared with results of accounts by other programs complexes and techniques of the different authors.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук
Н.А. Гречух
О.О. Яковенко

УЗАГАЛЬНЕНІ КООРДИНАТИ РЕДУКОВАНИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ НЕРЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ

Викладено алгоритм розв'язання задачі про власні коливання оболонкових конструкцій нерегулярної структури, який ґрунтується на положеннях методу підконструкцій. Модель конструкції передбачає розділення її на окремі фрагменти по границям, які чітко визначають на стадії створення конструкції. В межах кожного фрагмента будується регулярна сітка скінченних елементів із забезпеченням співпадіння вузлів на границях суміжних фрагментів. Співвідношення МСЕ будуються у переміщеннях. За узагальнені координати рівнянь руху редукованої моделі конструкції прийняті конфігурації границь фрагментів і форми коливань їх внутрішніх областей, які уточнюються в ітераційному процесі визначення частот власних коливань, число яких і точність обчислення призначаються заздалегідь.

Задачі динаміки оболонкових конструкцій, які є основними несучими елементами машин і будівель є важливим розділом забезпечення їх надійності. По перше, потрібно визначити динамічні характеристики таких конструкцій, знання яких виключає можливість резонансу, по друге – форми власних коливань, як ортогональні вектори, використовуються у якості базису при розв'язанні задач на дію динамічних навантажень довільного характеру у просторі і часі. Застосування методу скінченних елементів щодо розв'язання таких задач потребує створення дискретних моделей з великим числом ступенів вільності для забезпечення достовірної апроксимації геометричних і фізичних характеристик моделей. В той же час практичну цінність має тільки деяка частина нижчого спектру власних частот. У зв'язку з цим виникла потреба побудови редукованих моделей, число ступенів вільності яких суттєво менше аніж вихідної дискретній моделі, але частоти і форми власних коливань вихідної і редукованої моделей співпадають. Для оболонкових конструкцій регулярної структури створення редукованих моделей адекватних вихідній моделі не викликає особливих труднощів. Для такого випадку створені алгоритми, які забезпечують реалізацію процесу ітерацій з деякою частиною власних векторів спектру власних коливань вихідної дискретної моделі із забезпеченням щільності нижчої частини спектру. Процес ітерацій передбачає забезпечення умов ортогональності

© Легостаєв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.

власних векторів, число яких заздалегідь призначено. Ці вектори утворюють своєрідний підпростір. Розмірність векторів, які його складають, відповідає числу ступенів вільності вихідної дискретної моделі. Тобто задача про власні коливання реалізується без зменшення просторової апроксимації області, яка рухається. Число ітерацій залежить від початкового значення власних векторів. Процес швидко завершується, якщо наближені значення векторів початкового етапу ітерацій досить близькі до дійсних значень векторів, які слід визначити.

Для забезпечення вище указаної умови, побудуємо наближені вектори власних коливань за методом базисних вузлів. Суть цього методу полягає в тім, що у випадку використання функцій переміщень в якості розв'язувальних, будується редукована модель вихідної дискретної моделі, число ступенів вільності якої відповідає числу переміщень тільки деякої сукупності вузлів. Ці вузлі називаються базисними, а їх переміщення новими узагальненими координатами. Для забезпечення їх незалежності по напрямку переміщень базисних вузлів ставляться абсолютно жорсткі в'язі. Перетворена таким чином вихідна модель аналогічна основній схемі методу переміщень будівельної механіки. Зв'язок між узагальненими координатами вихідної і редукованої дискретних моделей виконується за формулою:

$$\{u\} = [U]\{q\}, \tag{1}$$

де $\{q\}$ – вектор нових узагальнених координат.

Побудова матриці перетворень $[U]$ виконується шляхом розрахунку основної системи на змушені одиничні зміщення базисних вузлів по напрямку накладення в'язей. Кількість рядків матриці $[U]$ відповідає розмірності вихідної дискретної моделі, а кількість стовпців – кількості нових узагальнених координат. Таким чином побудова редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації вихідної моделі.

Редукована модель фрагмента будується шляхом підстановки (1) в рівняння руху його дискретної моделі

$$\{\delta u\}^T([k]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\}) = 0. \tag{2}$$

Рівняння руху редукованої моделі набуває вигляду:

$$[A]\{q\} + [B]\{\ddot{q}\} = 0, \tag{3}$$

де

$$[A] = [U]^T[k][U], \tag{4}$$

$$[B] = [U]^T [M][U], \tag{5}$$

$$\{g(t)\} = [U]^T \{Q(t)\}, \tag{6}$$

відповідно матриці жорсткості, мас і вектор узагальнених сил, які характеризують рух редукованої моделі.

Для оболонкових конструкцій нерегулярної структури використовується метод підконструкцій, суть якого полягає в розділенні конструкції на окремі фрагменти регулярної структури. Кожен фрагмент розглядається як оболонка тонка або середньої товщини. Геометрія фрагментів описується точковим каркасом на обмежуючих поверхнях в декартовій прямокутній системі координат, єдиній для цілої конструкції. Побудова дискретної моделі фрагмента виконується методом скінченних елементів. Сітка скінченних елементів в межах кожного фрагмента формується автономно, але із забезпеченням умов збіжності вузлів на границях суміжних фрагментів. Вузли дискретної моделі фрагмента нумеруються в топологічній системі координат x^1, x^2, x^3, пов'язаній із цим фрагментом. Така система координат еквівалентна Лагранжевій. Вона не змінюється у процесі руху об'єкта, до якого віднесена. Сукупність трьох координат (x^1, x^2, x^3) визначає положення вузла в сітковій області і забезпечує обчислення параметрів топологічної моделі фрагмента та розміри робочих і інформаційних масивів для реалізації обчислень на ЕОМ.

Кожному вузлу сітки відповідає трійка значень Z^1, Z^2, Z^3 глобальної декартової системи координат, яка визначає положення вузла дискретної моделі в просторі.

На вхідному рівні геометрія оболонки подається точковим каркасом – координатами вузлів сітки на обмежуючих поверхнях оболонки в декартовій прямокутній системі координат.

На оперативному рівні інформація про геометрію зображується точковим каркасом вузлів на серединній поверхні і значеннями функції товщин у вузлах. Координати вузлів на серединній поверхні обчислюються як напівсума координат відповідних вузлів на обмежуючих поверхнях. Функція товщин обчислюється як різниця координат відповідних вузлів на обмежуючих поверхнях, що можна трактувати як проекції відрізка, що з'єднує відповідні вузли, на осі глобальної декартової системи координат. Така проста заміна змінних дала змогу покращити обумовленість матриці жорсткості моделі фрагмента і підвищити точність розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку. При цьому число невідомих МСЕ не змінюється.

Для кожного фрагмента вводиться система базисних вузлів, частина яких повинна належати границі суміжних фрагментів, а частина – внутрішній області. Встановлюється послідовність побудови редукованих моделей фрагментів і виконується наскрізна нумерація узагальнених координат їх редукованих моделей. Введено поняття «глобальний номер узагальненої координати редукованої моделі», що суттєво спрощує процедуру побудови матриці жорсткості і мас цілої конструкції. Матриці будуються шляхом підсумовування коефіцієнтів відповідних редукованих матриць фрагментів, що мають одинакові глобальні номери узагальнених координат.

При такому підході побудови редукованої матриці жорсткості оболонкової конструкції сумісність переміщень для цілої моделі забезпечується тільки в граничних точках (базисних вузлах). Внутрішні точки також фігурують в загальній матриці, але характеризують той фрагмент, до якого вони відносяться. Побудова редукованої моделі конструкції за викладеним способом передбачає призначення стикових вузлів тільки з частини вузлів сіткової області, які розташовані на границі. Це може привести до умов розривності переміщень на границях.

Для запобігання такому явищу передбачено уточнення умов нерозривності на границях фрагментів шляхом використання у якості узагальнених координат конфігурації границі суміжних фрагментів в формах коливань фрагментів і самих форм коливань для внутрішньої області, отриманих за допомогою моделі першого рівня наближення.

Ще належить відпрацювати прийоми ідентифікації границь і їх конфігурацій, які будуть використані у якості нових узагальнених координат. Кожну з таких границь слід закріпити. Для побудови редукованої матриці фрагмента необхідно знов таки побудувати матрицю перетворення до нових координат. Для цього виконується розрахунок фрагмента на змушене зміщення границі стільки раз, скільки наближених форм коливань будуть використані для формування нових узагальнених координат. Конфігурація внутрішньої області фрагмента, яка також розглядається як узагальнена координата, приймається відповідно наближеній формі коливань.

Процес визначення динамічних характеристик складних оболонок методом підконструкцій за викладеною схемою передбачає ітераційний процес розв'язання задач.

Розв'язок узагальненої проблеми про власні значення редукованих матриць спочатку зводиться до задачі про власні значення симетричної матриці.

$$([A]-\lambda[B])\{q\}=0\,. \qquad (7)$$

З цією метою використовується факторизація матриці $[B]$ методом Холецького [1]:

$$[B]=[S]^T[S], \tag{8}$$

де $[S]$ – права трикутна матриця.

Підставляючи (8) в (7) з послідуючими визначеними добутку на $[S]^{T^{-1}}$ ліворуч отримаємо:

$$([\tilde{A}]-\lambda[E])\{\tilde{q}\}=0, \tag{9}$$

де

$$[\tilde{A}]=[S]^{T^{-1}}[A][S]^{-1}; \tag{10}$$

$$\{\tilde{q}\}=[S]\{q\}. \tag{11}$$

Розв'язок повної проблеми про власні значення (9) реальної симетричної матриці $[\tilde{A}]$ реалізується методом обертання Якобі [1].

В основі цього методу закладена побудова послідовності матриць, ортогонально подібній вихідній в яких монотонно зменшуються до нуля суми квадратів усіх поза діагональних коефіцієнтів. Власні значення матриці визначаються як границя послідовності діагональних коефіцієнтів. Одночасно обчислюються і власні вектори. Аналізуючи різні варіанти в алгоритмі Якобі було встановлено, що найбільш сприйнятливим є циклічний процес з бар'єрами. Він має перевагу над процесом, побудованим на послідовному вилученні найбільших поза діагональних елементів, що виключає необхідність пошуку цих членів. В процесі з бар'єрами вводиться визначена нумерація поза діагональних елементів і їх ліквідація виконується у відповідності з прийнятою послідовністю монотонного зменшення до нуля додатних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_\kappa$, які названі бар'єрами.

При циклічному перегляді анулюється лише той з поза діагональних елементів, який по модулю менший α_1. В подальшому бар'єр α_1 замінюється бар'єром α_2 і так далі, до повного завершення циклу.

Метод обертань за поданою схемою досить просто реалізується, він стійкий у відношенні до помилки округлення і має високу швидкість збіжності. Наявність кратних і близьких по значенню власних значень приводить до прискорення завершення циклічного процесу.

Найбільш сприйнятливим для задачі про власні коливання є алгоритм ітерації у підпросторі, який застосовується як для однофрагментної

моделі, так і для багатофрагментних моделей методу підконструкцій. Метод реалізується у такій послідовності:

1) будується матриця жорсткості дискретної моделі для вихідного числа ступенів вільності;
2) довільним чином задається n лінійно незалежних векторів;
3) розв'язується система рівнянь, де у якості «правої» частини використовується n довільних, але лінійно незалежних векторів.

Результати розв'язку цієї системи рівнянь є нові вектори

$$[K][U]_{(j)} = [P]_{(j-1)}. \tag{12}$$

Визначаємо матрицю

$$[A]_{(j)} = [U]^T_{(j)}[P]_{(j-1)} \tag{13}$$

і редуковану матрицю мас $n \times n$

$$[B]_{(j)} = [U]^T_{(j)}[M][U]_{(j)}. \tag{14}$$

Виконується ортогоналізація наближених значень власних векторів, з яких складена матриця $[U]_{(j)}$, що отримана в (12), методом обертання Якобі.

$$[B]_{(j)} = [S]^T_{(j)}[S]_{(j)},$$

$$[\tilde{A}]_{(j)} = [S]^{T^{-1}}_{(j)}[A]_{(j)}[S]^{-1}_{(j)}, \tag{15}$$

отримаємо власні значення перетворених наближених матриць

$$[\tilde{A}\}_{(j)}]\tilde{V}]_{(j)} = [\overset{*}{\Lambda}]_{(j)},$$

$$[V]_{(j)} = [S]^{-1}_{(j)}[\tilde{V}]_{(j)}, \tag{16}$$

$$[V]_{(j)} = [S]^{-1}[\tilde{V}].$$

Подальші дії пов'язані з такими перетвореннями матриць:

$$[\tilde{R}]_{(j)} = [U]_{(j)}[V]_{(j)},$$

$$[M]_{(j)} = diag([R]^T_{(j)}[M][\tilde{R}]),$$

$$[R]_{(j)} = [\tilde{M}]_{(j)} [\tilde{R}]_{(j)},$$

$$[\Lambda]_{(j)} = diag([R]^T [K][R]), \tag{17}$$

$$[P]_{(j)} = [R]_{(j)}. \tag{18}$$

Цикл алгоритму переривається у пункті (17), коли необхідне число перших значень λ_i співпадає з відповідним числом значень $\overset{*}{\lambda}_i$, отримали у п. (16) методом обертання Якобі.

Власні числа $[\Lambda]$ початкового варіанту редукованої моделі конструкції запам'ятовуються. Відповідні їм власні вектори дають змогу побудувати форми коливань повної скінченноелементної моделі конструкції.

Наступний крок розв'язку задачі пов'язаний з уточненням власних чисел, що передбачає призначення нових узагальнених координат – конфігурації границь фрагментів по отриманим наближеним формам коливань і формам коливань фрагментів. Побудова редукованих моделей фрагментів для нових узагальнених координат і обчислення редукованих матриць жорсткості і мас повної моделі. Розв'язується узагальнена проблема для цих матриць в приведеній послідовності (7) – (18).

Отримані власні числа порівнюються з тими, що отримані для попередньої моделі. Процес продовжується до тих пір, поки власні числа j-го та $(j+1)$-го кроку не співпадають з заданою заздалегідь точністю для призначеної кількості власних чисел.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Воеводин В.В.* Вычислительные методы алгебры. Теория и алгоритмы.- М. Наука.1966 г. –236 с.

Отримано 16.07.2010

Легостаев А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.

ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ РЕДУЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

Изложен алгоритм решения задач о собственных колебаниях оболочечных конструкций нерегулярной структуры, который основан на положениях метода подконструкций. Модель конструкции предопределяет разделение ее на отдельные фрагменты по границам, которые четко определяют на стадии создания конструкции. В пределах каждого фрагмента строится регулярная сетка конечных элементов с обеспечением совпадения узлов на границах смежных фрагментов. Соотношения МКЭ строятся в перемещениях. В качестве обобщенных координат уравнений движения редуцированной модели конструкции приняты конфигурации границ фрагментов и формы колебаний их внутренних областей, которые уточняются в итерационном процессе определения частот собственных колебаний, число которых и точность их вычисления задаются предварительно.

Legostaev A.D.,Grechukh N.A., Iakovenko O.O.

GENERAL CCORDINATES OF REDUCED MODELS IN TASKS OF DYNAMICS OF SHELL CONSTRUCTIONS WITH IRREGULAR STRUCTURE

The algorithm of decision of tasks of own oscillations of shallow constructions of irregular structure is set, which is based on positions of method of subconstructions. The model of construction predetermines dividing of it into separate fragments on boders which clearly determine on the stage of creation of construction. Within the limits of every fragment the regular grid of finite elements is built with providing of coinciding of knots on the borders of contiguous frag-ments. Correlations of MFE are built in displacements. For the generalized coordinates of equa-tions of motion of reduction model of construction configurations of borders of fragments and form of vibrations of their internal areas which are specified in the iteration process of determi-nation of frequencies of own oscillations are taken, the number of which and exactness finding them are set preliminary.

УДК 539.3

Г.М. Іванченко, канд. техн. наук

ТРАНСФОРМАЦІЯ ФРОНТІВ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗМІННОЇ ЩІЛЬНОСТІ

Розглядається задача про перебудову фронту розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі. На основі променевого методу виведені розв'язувальні рівняння. Досліджено залежність геометрії променів і фронтів від функції зміни щільності середовища.

Співвідношення, що моделюють явища розповсюдження і біфуркації фронтів розривних хвиль в анізотропних пружних середовищах дають змогу досліджувати загальні закономірності впливу неоднорідностей фізичних властивостей середовищ на ефекти перебудови системи хвильових променів та фронтів. За допомогою результатів цих досліджень можна прогнозувати динамічні властивості пружних середовищ, в яких відбулись ці трансформування та визначити зони найбільших динамічних переміщень. Такі дослідження актуальні в задачах сейсмології, геологорозвідки та в деяких інших галузях. Розроблено багато методів математичного моделювання розривних явищ в пружних середовищах [1, 2]: аналітичні, чисельні, експериментальні та інші. Аналітичним методам надається перевага із-за їх точності, але вони вимагають залучення складного математичного апарату і громіздких викладок. Такі методи придатні для розв'язку задач з відносно простими геометрією, навантаженням та рівняннями стану середовища. Більш універсальними є чисельні методи, реалізація яких стала можливою порівняно недавно – з появою потужної обчислювальної техніки. Для розв'язку більш вузького класу задач – розповсюдження нестаціонарних розривних хвиль в пружних середовищах (саме ці задачі викликають практичний інтерес у названих галузях) – найпридатнішим виявляється один із асимптотичних методів – променевий метод [8], який дозволяє досліджувати не лише кінематику фронтів в межах нескінченного однорідного або шаруватого середовища, а й отримувати динамічну картину розповсюдження імпульсних хвиль.

Променеві методи, основані на методах геометричної оптики [6], успішно застосовуються у квантовій механіці, акустиці та при вивченні електромагнітних полів. Для них характерні попередні променеві побудови, які відображають якісну картину хвильового поля і надають

© Іванченко Г.М.

можливість, використовуючи променеві ряди, визначати його кількісні характеристики. Метод променевих рядів особливо ефективний для дослідженні нестаціонарних розривних хвиль в пружних середовищах. Він дозволяє створювати прості математичні моделі процесів розповсюдження та перебудови стрибків параметрів польової функції.

Для однорідних ізотропних пружних середовищ, в яких швидкість розповсюдження розривної хвилі в усіх напрямках однакова і фронти розповсюджуються з точкового джерела, промені прямолінійні, сітка променів має найпростіший вигляд, а фронти, локально перпендикулярні до променів (як поздовжньої так і поперечної хвиль), до дифракції є сферичними. Після взаємодії фронту імпульсної хвилі навіть з плоскою межею розділу середовищ, котрі мають різні механічні властивості, сферичним залишається фронт лише однієї відображеної хвилі [3].

Більш складною є сітка фронтів та прямолінійних променів в анізотропних пружних середовищах постійної густини і параметрів анізотропії. Внаслідок наявності різним чином поляризованих хвиль, фазові швидкості яких залежать від напрямку руху, промені перестають бути ортогональними фронтам [4, 5], а при неоднорідному середовищі вони ще й втрачають прямолінійну геометрію. Слід зазначити, що побудовані за допомогою променевого методу система променів і фронтів хоч і не дозволяють визначити величини динамічних напружень, але за їх допомогою можна прослідкувати за картиною еволюції фронтів напружень та проявити зони їх концентрації.

Розглянемо в прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ неоднорідне трансверсально-ізотропне середовище з віссю симетрії Ox_2, яке характеризується тензором пружних постійних

$$\left(C_{\alpha\beta}\right)=\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda-l & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda-l & \lambda+2\mu-p & \lambda-l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda-l & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu-m \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де l, m, p – параметри анізотропії, які відрізняють середовище від ізотропного з коефіцієнтами Ламе λ і μ.

Найпростішим для розгляду є випадок, коли неоднорідність середовища полягає в підпорядкуванні його густини деякій функції координат $\rho=\rho(x_1,x_2,x_3)$.

Збурений стан середовища, що розглядається, виходячи з умов ідеальної пружності, описується рівняннями руху

$$\sum_{k,p,q=1}^{3}\lambda_{ik,pq}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p}+\sum_{k,p,q=1}^{3}\frac{\partial\lambda_{ik,pq}}{\partial x_k}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}-\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=0\ \ (i=1,2,3), \quad (2)$$

де $\lambda_{ik,pq}=c_{ik,pq}/\rho(x_1,x_2,x_3)$ – приведені параметри пружності, u_1,u_2,u_3 – компоненти вектора пружних зміщень.

Розв'язок системи рівнянь (2) з відомими початковими умовами

$$\vec{u}\big|_{t=0}=\vec{u}_0(x_1,x_2,x_3,0),\quad \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\vec{v}_0(x_1,x_2,x_3,0) \quad (3)$$

будується у вигляді плоскої монохроматичної хвилі із хвильовим числом k і фазовою швидкістю v, фронтами якої є поверхні постійних фаз [7]

$$\vec{n}\cdot\vec{r}-vt=const, \quad (4)$$

котрі рухаються зі швидкістю $\vec{v}=v\cdot\vec{n}$ та локально перпендикулярні до орту $\vec{n}$.

Для будь-якого вибраного напрямку $\vec{n}$ фазова швидкість хвилі v та вектор її поляризації $\vec{A}$ визначається із системи лінійних алгебраїчних рівнянь [7]

$$\sum_{k,p,q=1}^{3}\lambda_{ik,pq}n_k n_p A_q-v^2A_i=0\ \ (i=1,2,3). \quad (5)$$

Розв'язуванням задачі на власні значення симетричної додатньовизначеної матриці коефіцієнтів системи (5)

$$\Lambda_{iq}\equiv\sum_{k,p=1}^{3}\lambda_{ik,pq}n_k n_p\ \ (i,q=1,2,3) \quad (6)$$

для кожного напрямку $\vec{n}$ визначаються квадрати швидкостей трьох по різному поляризованих хвиль $\left[v^{(r)}\right]^2$, $r=1,2,3$, та для кожного значення фазової швидкості компоненти вектора поляризації $\vec{A}$ хвилі, як власні вектори матриці (6). Для будь-якого напрямку $\vec{n}$ вектори поляризації мають задовольняти умови ортогоналізації

$$\vec{A}^{(i)}(\vec{n})\cdot\vec{A}^{(k)}(\vec{n})=\delta_{ik}\quad(i,k=1,2,3). \tag{7}$$

Величини фазових швидкостей нумеруються в послідовності зменшення їх модулів. Хвиля, яка має найбільшу фазову швидкість та номер $r=1$, називається квазіподовжньою. Дві інші, $r=2,3$ – квазіпоперечні, фронти яких, зрозуміло, завжди відстають від фронту квазіподовжньої хвилі.

В анізотропних середовищах крім фазової швидкості $\vec{v}$ викликає не менший інтерес променева швидкість $\vec{\xi}$ – швидкість розповсюдження енергії хвильового поля. Ці швидкості пов'язані співвідношенням

$$\left(\vec{n}\cdot\vec{\xi}^{(r)}\right)=v^{(r)}\quad(r=1,2,3), \tag{8}$$

звідки видно, що променева швидкість за модулем більша від фазової або дорівнює її при співпаданні напрямків їх векторів.

Компоненти вектора променевої швидкості

$$\vec{\xi}^{(r)}=\sum_{k=1}^{3}\xi_k^{(r)}\vec{i}_k\quad(r=1,2,3) \tag{9}$$

обчислюється за формулою [7]

$$\xi_k^{(r)}=\frac{1}{v^{(r)}}\sum_{i,p,q=1}^{3}\lambda_{ik,pq}n_pA_q^{(r)}A_i^{(r)}\quad(r,k=1,2,3). \tag{10}$$

Поверхня фронту розривної хвилі з урахуванням (4) може бути представленою співвідношенням

$$\tau(x_1,x_2,x_3)-t=0, \tag{11}$$

де τ – функція, яка задовольняє диференційним рівнянням

$$\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\lambda_{ik,pq}p_kp_pA_q^{(r)}A_i^{(r)}=1, \tag{12}$$

тут позначено: $p_k\equiv\partial\tau/\partial x_k=n_k/v^{(r)}(\vec{n})$ – компоненти вектора рефракції [7].

Рівняння (12) за допомогою методу характеристик приводиться до системи звичайних диференційних рівнянь

$$\frac{d\,x_m^{(r)}}{d\,\tau} = \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{im,pq}\, p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)},$$

$$\frac{d\,p_m^{(r)}}{d\,\tau} = \eta_m = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \frac{\partial\,\lambda_{ik,pq}}{\partial\,x_m} p_k\, p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \; (r,\ m = 1, 2, 3) \qquad (13)$$

з початковими умовами

$$x_k^{(r)}\Big|_{t=0} = x_k^0, \quad p_k^{(r)}\Big|_{t=0} = \frac{n_k}{v_k^{(r)}}, \qquad (14)$$

інтегруючи які для послідовності зарані вибраних початкових напрямків можна побудувати сімейство m промені, вздовж яких у пружному анізотропному середовищі зі швидкостями $\vec{\xi}_m$ розповсюджується енергія хвильового поля.

Розглянемо випадки, коли розміри джерела, в якому збурюється хвиля, в порівнянні з геометрією її фронтів досить малі, що дозволятиме вважати його точкою. Помістимо в ній початок прямокутної системи координат $Ox_1x_2x_3$, вісь Ox_2 якої співпадатиме з віссю симетрії трансверсально-ізотропного середовища. Якщо густина середовища також розподіляється симетрично відносно осі Ox_2, тобто задаватиметься функцією $\rho = \rho(x_1, x_2)$, то для дослідження еволюцій поверхонь фронтів розривної хвилі достатньо побудови їх перетинів будь-якою площиною, якій належить вісь Ox_2 – тобто розв'язувати плоску задачу. Вибравши в площині розв'язку задачі деяку послідовність m напрямків фазових швидкостей хвилі певної поляризації, котрі визначаються векторами $\vec{n}_m^{(0)}$, для кожного з них будується матриця (6) та визначаються її власні числа і вектори. Для трансверсально-ізотропних пружних середовищ, густина яких має ту ж вісь симетрії, що і пружні константи, спрямована із площини малюнку фазова швидкість $v_m^{(3)}$, завжди дорівнює нулю. За значеннями інших існуючих фазових швидкостей $v_m^{(1)}, v_m^{(2)}$ обчислюються вектори поляризації та компоненти векторів рефракції. Часткові похідні приведених параметрів пружності по координатах $\partial\lambda\,(x_1, x_2)/\partial x_k$ для $k = 1, 2$ обчислюються аналітично або чисельно, залежно від виду функції $\lambda = c/\rho(x_1, x_2)$. Подальші дії

полягають у визначенні для кожного напрямку $\vec{n}_m$ за формулами (13) величин $\xi_k^{(m)}$ і $\eta_k^{(m)}$ та чисельному їх інтегруванні за методом Рунге-Кутта. Отримані координати $x_k^{(m)}$ точок, які належать променям, дозволяють побудувати послідовність положень фронтів імпульсної розривної хвилі для прийнятих фіксованих значень параметра τ.

Лінійний закон зміни щільності середовища. Використовуючи описану методику, побудована еволюція фронтів імпульсних квазіподовжніх і квазіпоперечних розривних хвиль, породжених в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі першої особливості – в доломіті з наступними величинами механічних параметрів: модуль пружності $E = 10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}28$, параметрами анізотропії $l = -0{,}5$; $m = -0{,}1$; $p = 0{,}3$ та щільністю, яка змінює свою величину лише вздовж осі симетрії середовища за лінійним законом $\rho = \rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]$ кг/м^3, де ρ_0 – щільність середовища в місці ініціації розривної хвилі.

Рівняння динамічного руху (2) пружного середовища зі змінною функцією $\rho(x_2)$ приймуть форму

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \frac{c_{ik,pq}}{\rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} +$$

$$+ \sum_{k,p,q=1}^{3} \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot c_{ik,pq}}{\rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]^2} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Їм відповідають рівняння

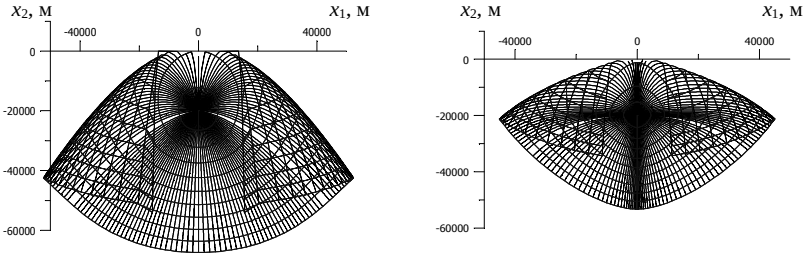
$$\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau} = \xi_m = \sum_{i,p,q=1}^{3} \frac{c_{ik,pq}}{\rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]} \quad p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)},$$

$$\frac{dp_m^{(r)}}{d\tau} = \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot c_{ik,pq}}{\rho_0 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]^2} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} \quad (16)$$

$(r, k = 1, 2, 3).$

Система (16) інтегрується методом, який описаний раніше.

При вибраних величинах E і ν значення параметрів Ламе у рівняннях (1) $\lambda = E\nu\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right]^{-1} = 4{,}972 \cdot 10^{10}\,Па$, $\mu = 0{,}5E(1+\nu)^{-1} = 3{,}906 \cdot 10^{10}$ Па. Слід підкреслити, що задача, що розглядається, є модельною у зв'язку з тим, що при наближенні до прямої $x_2 = 0$ густина ρ прагне до нуля, а швидкості подовжніх і поперечних хвиль – до нескінченності, чого не буває на практиці. Тим не менш отримані результати мають практичний інтерес, тому що відображають загальні тенденції впливу зміни густини $\rho(x_1, x_2, x_3)$ на хвильові процеси. На рис. 1, а, б зображені сліди фронтів квазіподовжньої (а) і квазіпоперечної (б) розривних хвиль на площині $x_2 = 0$, яка містить вісь симетрії середовища, та сімейства променів на цій площині, вздовж яких переноситься енергія хвилі. Точкове джерело розривної хвилі має координати $x_1 = 0$, $x_2 = -2 \cdot 10^4\,м$, $x_3 = 0$. Тривалість процесу $0 \le t \le 15$ с. В неоднорідних середовищах промені розривних хвиль, як видно на рисунках, виявляються криволінійними, тому, що швидкість розповсюдження імпульсного збурення частинок як за модулем, так і за напрямом, залежить від густини середовища. Промені відхиляються в бік згущення речовини і хвиля, не дійшовши вільного краю середовища при $x_2 = 0$ (де $\rho = 0$), змінює свій напрямок.



а *б*

Рис. 1. Трансформування фронтів квазіподовжніх (а) і квазіпоперечних (б) розривних хвиль в трансверсально-ізотропному середовищі з $\lambda = 4{,}972 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 3{,}906 \cdot 10^{10}$ Па, щільністю $\rho = 6650 \cdot \left[1 - 5 \cdot 10^{-5}\left(x_2 + 2 \cdot 10^4\right)\right]$ кг/м^3 та параметрами анізотропії $l = 0{,}3$; $m = -0{,}5$; $p = -0{,}1$.

Система променів має спільну огинаючу, яка є каустикою. Нагадаємо, що на ній якобіан

$$J(\xi,\gamma,\eta)=\left(\vec{\rho}_1\left[\vec{\rho}_2\times\vec{\rho}_3\right]\right)=\begin{vmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33}\end{vmatrix} \qquad (17)$$

переходу від декартової системи координат (x_1 x_2 x_3) до променевої системи (α β τ) і навпаки перетворюється в нуль. Тому на каустиках в рамках ідеальної теорії пружності значення динамічних напружень прагне до нескінченності.

Тригонометричний закон зміни щільності середовища. За методикою, описаною раніше, побудована сітка променів нерегулярних квазіподовжніх і квазіпоперечних розривних хвиль, ініційованих в неоднорідному трансверсально-ізотропному середовищі з такими величинами механічних параметрів: модуль пружності $E=10^{11}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu=0{,}28$, параметрами анізотропії $l=0{,}3$; $m=-0{,}5$; $p=-0{,}1$ та густиною, величина якої змінюється вздовж осі симетрії середовища за законом $\rho=\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]$ кг/м^3, а в площинах, перпендикулярних осі симетрії середовища, вона має постійні значення.

Динамічні рівняння руху пружного середовища зі змінною функцією $\rho(x_2)$ в цьому випадку приймуть вигляд

$$\sum_{k,p,q=1}^{3}\frac{c_{ik,pq}}{\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]}\ \frac{\partial^2u_q}{\partial x_k\partial x_p}+$$

$$+\sum_{k,p,q=1}^{3}\frac{2{,}5\cdot10^{-3}\cdot\sin(5\cdot10^{-4}x_3)\cdot c_{ik,pq}}{\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]^2}\ \frac{\partial u_q}{\partial x_p}-\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}=0\ (i=1,2,3), \qquad (18)$$

котрим відповідають рівняння

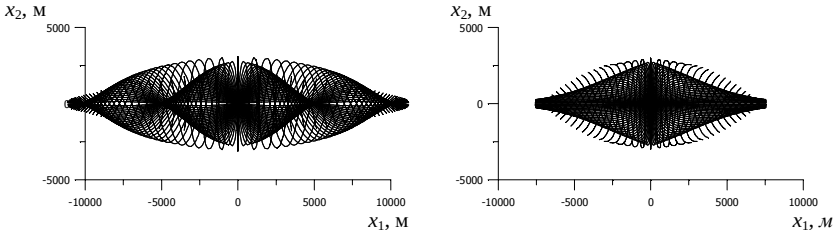
$$\frac{dx_m^{(r)}}{d\tau}=\xi_m=\sum_{i,p,q=1}^{3}\frac{c_{ik,pq}}{\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]}\ p_pA_q^{(r)}A_i^{(r)},$$

$$\frac{dp_m^{(r)}}{d\tau}=-\frac{1}{2}\sum_{i,k,p,q=1}^{3}\frac{2{,}5\cdot10^{-3}\sin\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\cdot c_{ik,pq}}{\rho_0\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot10^{-4}x_2\right)\right]^2}\ p_kp_pA_q^{(r)}A_i^{(r)} \qquad (19)$$

(r, m = 1, 2, 3).

Система рівнянь (19) чисельно інтегрується методом Рунге-Кутта.

При вибраних параметрах середовища (модуля пружності E та коефіцієнта Пуассона ν) в матриці (1) пружних характеристик середовища коефіцієнти Ламе будуть $\lambda = E\nu\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right]^{-1} = 4{,}972\cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 0{,}5E(1+\nu)^{-1} = 3{,}906\cdot 10^{10}$ Па. Задача, що розглядається тут, як і попередня, є модельною зважаючи на те, що при наближенні до площин $x_2 = \pm\, 2\cdot 10^3 \cdot \arccos(-0{,}2)$ густина ρ прагне до нуля, а швидкості подовжніх і поперечних хвиль в середовищі – до нескінченності, що не може реалізуватись на практиці. Проте, отримані результати мають певний практичний інтерес, тому що відображають загальні закономірності впливу зміни густини на хвильові процеси в середовищі. Для середовища з $\rho_0 = 6650$ кг/м^3 на рис. 2, а, б зображені криволінійні промені квазіподовжньої (а) і квазіпоперечної (б) розривних хвиль на площині симетрії задачі $x_3 = 0$, вздовж яких переноситься енергія хвилі. Точкове джерело розривної хвилі розміщене в початку координат $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Тривалість процесу поширення хвилі, зображеного на рисунках, складає $0 \le t \le 6{,}25$ с.



а *б*

Рис. 2. Сітка променів квазіподовжніх (а) і квазіпоперечних (б) розривних хвиль в трансверсально-ізотропному середовищі з $\lambda = 4{,}972\cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 3{,}906\cdot 10^{10}$ Па, щільністю $\rho = 6650\cdot\left[1+5\cos\left(5\cdot 10^{-4}x_2\right)\right]$ кг/м^3 та параметрами анізотропії $l = 0{,}3$; $m = -0{,}5$; $p = -0{,}1$.

В середовищах зі змінною густиною промені розривних хвиль, як видно на рисунках, є криволінійними, тому, що швидкість розповсюдження імпульсного збурення частинок за модулем і за напрямом залежить від густини середовища. Промені відхиляються в бік згущення речовини середовища і хвиля, не дійшовши до його вільного краю, де $\rho = 0$, змінює свій напрямок. Система променів розривної хвилі має спільну огинаючу – каустику. На ній якобіан переходу від декартової

системи координат (x_1 x_2 x_3) до променевої координатної системи (α β τ) набуває нульового значення, тому (в рамках ідеальної теорії пружності) на каустиках значення напружень в середовищі прагне до нескінченності.

Автором досліджені видозміни фронтів квазіподовжніх і квазіпоперечних розривних хвиль в трансверсально-ізотропних середовищах, щільність яких змінюється вздовж осі симетрії властивостей середовища лінійно або за тригонометричним законом та чисельно побудовані сітки криволінійних променів і послідовностість положень рухомих фронтів поширення розривних хвиль на площині симетрії трансверсально-ізотропних середовищ, які відрізняються особливостями, при змінних величинах параметрів анізотропії, котрі розміщуються на головній діагоналі матриці пружних характеристик середовища або входять до бічних елементів. Проведені дослідження виявили, що в пружних анізотропних середовищах зі змінними фізичними параметрами промені як квазіподовжних так і квазіпоперечних хвиль, що відходять від точкового джерела, стають криволінійними, а на поверхнях фронтів виникають додаткові викривлення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Издательство литературы по строительству, 1965. – 456 с.
2. *Гузь А.Н., Головчан В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наук. думка, 1972. – 254 с.
3. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М.* Дифракция сферической ударной волны на плоскости раздела упругих сред // Прикл мех. – 1997. – 33, №10 – С.51-58.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. матем. и мех. – 2000. – 64, №3. – С. 394-402.
5. *Іванченко Г.М.* Променевий метод побудови фронтів ударних хвиль в неоднорідних анізотропних середовищах // Опір матеріалів і теорія споруд. Вип. 69, 2001, с. 123-128.
6. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980 – 304 с.
7. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Л.: Наука, 1990. – 280 с.
8. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – Киев.: Наукова думка, 1988. – 220 с.

Отримано 27.09.10

Иванченко Г.М.

ТРАНСФОРМАЦИЯ ФРОНТОВ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН В УПРУГИХ СРЕДАХ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Рассматривается задача о перестройке фронта разрывной волны в неоднородной трансверсально-изотропной среде. На основе лучевого метода выведены разрешающие уравнения. Исследована зависимость геометри лучей и фронтов от функции изменения плотности среды.

Ivanchenko G.M.

TRANSFORMATION OF FRONTS OF DISCONTINUOUS WAVES IN THE ELASTIC MEDIUM OF VARIABLE DENSITY

The problem of disruptive wave rearrangement in nonhomogeneous transversely-isotropic medium is observed. Oriented on radial method, the resulting equations are derived. The characteristic curve of ray geometry and fronts from the function of environment density variance are investigated.

УДК 539.3

Л.В. Гловач, канд. техн. наук
В.П. Носенко

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ЛОПАТЕЙ ВІТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК

Обговорюються перспективи розвитку вітроенергетики в Україні. Поставлено задачу про динамічний розрахунок конструкції вітроенергетичної установки за інтегрованою розрахунковою схемою. Прийняті до уваги сили тяжіння, аеродинамічні сили та гіроскопічні сили інерції. Побудовані розв'язувальні рівняння. Розроблена методика розрахунку.

Вступ. Україна характеризується досить високими енергетичними потенціалами вітрового потоку в Карпатах, Криму, Причорномор'ї та Приазов'ї, де середньорічні швидкості вітру на висоті 10 м становлять 5 і більше метрів за секунду, що ставить вітрову енергію на перше місце серед відновлюваних джерел для виробництва електричної енергії.

Доцільність застосування вітрової енергетики визначається, крім великих запасів відновлювальних джерел енергії, ще й цілим рядом інших причин (невичерпністю покладів через постійне відновлення та екологічну чистоту) [1 – 3]. Особливої актуальності даний напрямок набуває в Україні, для якої характерна обмежена кількість запасів енергоносіїв. Так, на сьогоднішній день наша держава забезпечена лише на 10% нафтою і на 18% природним газом. Крім того існує цілий ряд проблем, пов'язаних навіть з розвитком традиційної енергетики; небезпека виникнення аварій, викиди шкідливих речовин та інше. В таких умовах особливого значення набуває використання нетрадиційних і відновлювальних джерел енергії (енергії Сонця, біомаси, тепла Землі, вітру та інших видів). Вони дозволяють суттєво поповнити енергобаланс як окремих регіонів, так і держави в цілому. Таким чином, необхідно створювати принципово нову систему енергозабезпечення, яка дасть можливість народногосподарським об'єктам отримати суттєву енергетичну незалежність свого розвитку. Значна роль у розв'язанні цієї проблеми належить енергії вітру.

Основні переваги вітроенергетики – екологічність та незначні експлуатаційні затрати. Безсумнівною перевагою вітроенергетики є її відновлюваність. До недавнього часу розвиток цієї галузі стримувався відносно високою вартістю обладнання, його складністю в обслуговуванні, частими поломками і нестабільністю вироблення

© Гловач Л.В., Носенко В.П.

електроенергії. Однак все це вдалось подолати. Технологічний процес зробив установки більш дешевими, надійними і досить простими в обслуговуванні. Це сприяло швидкому зростанню даного сектора енергетики.

Вітроенергетика України має достатній досвід виробництва, проектування, будівництва, експлуатації та обслуговування як вітроенергетичних установок (ВЕУ), так і вітроенергетичних станцій (ВЕС); в країні є достатньо високий науково-технічний потенціал і розвинена виробнича база. Останнім часом розвитку вітроенергетичного сектора сприяє державна підтримка, що забезпечує реалізацію ініціатив по вдосконаленню законодавства, структури керування, створенню сприятливих умов для внутрішніх і зовнішніх інвесторів.

Під час роботи ВЕУ піддаються впливу комбінації навантажень складної природи. Як засвідчує досвід, основними факторами, що впливають на їх працездатність, є динамічні навантаження, які викликані аеродинамічною взаємодією вітрових потоків і рухомих елементів конструкції. Суттєву роль відіграють також відцентрові сили простого обертання ротора та коріолісові сили інерції взаємодії обертального і поворотного руху елементів. Вони також повинні бути враховані при моделюванні динамічної поведінки системи.

Враховуючи порівняно високу частоту виникнення непередбачених поломок ВЕУ, можна зробити висновок, що проблема теоретичного моделювання їх динаміки є досить актуальною.

Коливання пружної лопаті при складному стаціонарному обертанні. Розглянемо ротор, який складається з диска та жорстко приєднаних до нього радіально направлених лопатей. Лопаті представляють собою прямі не закручені стержні з постійним по довжині розподілом маси та жорсткості [4 – 6].

Ротор обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо своєї осі симетрії, перпендикулярної площині диска. При цьому вісь власного обертання ротора здійснює плаский поворот з постійною кутовою швидкістю ω_0 навколо нерухомої прямої, яка проходить через центр ротора перпендикулярно осі власного обертання. Будемо вважати, що $\omega_0 < \omega$.

Введемо наступні праві прямокутні системи координат: *OXYZ* – інерціальна система координат з початком у центрі ротора; *Oxyz* – система координат, жорстко зв'язана з ротором. Осі *OZ* та *Oz* вибиремо таким чином, щоб вони співпали з віссю власного обертання ротора. Виділимо для розгляду одну з лопатей і систему координат *Oxyz* зорієнтуємо так, щоб її вісь *Ox* співпала з поздовжньою віссю лопаті. Система координат *OXYZ* вибрана так, що вісь власного обертання

здійснює поворот в площині *OXZ*, а напрям вектора кутової швидкості поворота осі ω_0 співпадає з віссю *OY*. Центри мас та інерції поперечних перерізів лопасті лежать на осі *Ox*. Поперечні перерізи лопаті симетричні відносно осей *Oy* і *Oz*.

Використовуючи принцип Даламбера, дослідимо рівновагу елемента стержня, положення якого в системі *Oxyz* визначається координатою *x* [10]. Скористаємось лінійною теоремою прямолінійних стержнів. Проектуючи на осі системи координат *Oxyz* діючі на елемент сили пружності та інерціальні сили, отримуємо рівняння поздовжніх та згинних у двох площинах коливань лопатей

$$EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho F a_x=0,$$

$$-EI_z\frac{\partial^4 \upsilon}{\partial x^4}-\rho F a_y+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \upsilon}{\partial x}T(x)\right]=0,$$

$$-EI_y\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\rho F a_z+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}T(x)\right]=0, \qquad (1)$$

де E, ρ – відповідно модуль пружності та густина матеріалу лопаті; F, I_z, I_y – відповідно площа поперечного перерізу і його моменти інерції відносно осей *Oz* і *Oy*; u, υ, w – компоненти вектора переміщення елемента лопаті вздовж осей *Ox*, *Oy*, *Oz*; a_x, a_y, a_z – відповідні компоненти вектора абсолютного прискорення елемента.

Поздовжня сила $T(x)$, обумовлена власним обертанням ротора з кутовою швидкістю ω і яка діє в поперечному перерізі лопаті з координатою *x*, обчислюється за формулою

$$T(x)=\rho\int_{x-R}^{L}(R+s)Fds,$$

де R – радіус диска ротора; L – довжина лопаті; $s=x-R$ – поздовжня координата елемента лопаті, початком відліку якої є край диска.

Для побудови рівнянь руху лопаті, обумовленого поворотом осі ротора, що обертається з кутовою швидкістю ω_0, необхідно визначити компоненти інерційного навантаження, яке виникає при цьому, і діє на елемент лопаті:

$$q_x^l = -\rho F a_x, \quad q_y^l = -\rho F a_y, \quad q_z^l = -\rho F a_z. \tag{2}$$

Вектор абсолютного прискорення, з яким рухається елемент стержня при складному обертанні, визначається теоремою Коріоліса

$$a = a^e + a^r + a^c, \tag{3}$$

де a^e, a^r, a^c – вектори переносного, відносного та коріолісового прискорення елемента відповідно.

Вектор переносного прискорення a^e обчислюється за формулою

$$a^e = \varepsilon \times r + \Omega \times (\Omega \times r). \tag{4}$$

Тут Ω та ε – вектори абсолютних кутової швидкості та кутового прискорення рухомої системи координат *Oxyz*; r – радіус-вектор елемента стержня у системі координат *Oxyz.*

У базисі (i_1, j_1, k_1) системи координат *OXYZ* вектор $\Omega = \omega + \omega_0$ має вигляд

$$\Omega = 0 i_1 + \omega_0 j_1 + \omega k_1. \tag{5}$$

Визначимо в цій же системі координат вектор ε:

$$\varepsilon = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\omega_0}{dt} = \omega_0 \times \omega. \tag{6}$$

Звідки слідує

$$\varepsilon = \omega\omega_0 i_1 + 0 j_1 + 0 k_1. \tag{7}$$

Введемо фазову координату $\tau = \omega t$ і визначимо радіус-вектор елемента стержня в системі координат *OXYZ:*

$$r = x\cos\tau\, i_1 + x\sin\tau\, j_1 + 0 k_1. \tag{8}$$

Здійснивши відповідні векторні операції, отримаємо проекції переносного прискорення a^e на осі системи координат *OXYZ*

$$a_x^e = -x\cos\tau\left(\omega_0^2 + \omega^2\right),$$

$$a_y^e = -x\omega^2 \sin\tau,$$

$$a_z^e = 2x\omega\omega_0 \sin\tau.$$

В рухомій системі координат *Oxyz* компоненти вектора a^e визначаємо наступним чином:

$$a_x^e = a_X^e \cos\tau + a_Y^e \sin\tau = -x\left(\omega_0^2 \cos^2\tau + \omega^2\right),$$
$$a_y^e = -a_X^e \sin\tau + a_Y^e \cos\tau = x\omega_0^2 \sin\tau\cos\tau\ ,$$
$$a_z^e = a_Z^e = 2x\omega\omega_0 \sin\tau\ . \qquad (9)$$

Складові вектора відносного прискорення a^r в напрямку осей системи координат *Oxyz*

$$a_x^r = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \ a_y^r = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2},\ \ a_z^r = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (10)$$

Вектор коріолісового прискорення a^c елемента стержня обчислюється за формулою

$$a^c = 2\Omega \times V^r\ , \qquad (11)$$

де V^r – вектор відносної швидкості елемента зі складовими

$$V_x^r = \frac{\partial u}{\partial t},\ \ V_y^r = \frac{\partial \upsilon}{\partial t},\ \ V_z^r = \frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (12)$$

Вектор кутової швидкості рухомої системи координат *Oxyz* в базисі $(i,\ j, k)$ виражається формулою

$$\Omega = \omega_0 \sin\tau\, i + \omega_0 \cos\tau\ j + \omega k\ . \qquad (13)$$

Додаючи відповідні складові із виразів (9) – (11), отримуємо проекції вектора абсолютного прискорення a елемента стержня на осі системи координат *Oxyz*. Потім на основі формул (2) визначаємо складові інтенсивності повного інерційного навантаження, яке діє на елемент стержня при складному обертанні

$$q_x^l = -\rho F\left[\begin{array}{l} -x\left(\omega_0^2 \cos^2\tau + \omega^2\right) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ +2\left(\omega_0 \cos\tau \dfrac{\partial w}{\partial t} - \omega\dfrac{\partial \upsilon}{dt}\right) \end{array}\right],$$

$$q_y^l = -\rho F\left[\begin{array}{l} x\omega_0^2 \sin\tau\cos\tau + \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} - \\ -2\left(\omega_0 \sin\tau \dfrac{\partial w}{\partial t} - \omega \dfrac{\partial u}{dt}\right)\end{array}\right],$$

$$q_z^l = -\rho F\left[\begin{array}{l} 2x\,\omega\omega_0 \sin\tau + \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ +2\left(\omega_0 \sin\tau \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} - \omega_0 \cos\tau \dfrac{\partial u}{dt}\right)\end{array}\right]. \qquad (14)$$

Ці розподілені навантаження необхідно враховувати при моделюванні складного обертання лопатей ВЕУ.

Аеродинамічні навантаження на лопать. Для розрахунку вимушених коливань лопаті необхідно визначити аеродинамічні навантаження, під дією яких виникають ці коливання. Ця задача є однією з найскладніших у загальній аеродинаміці [7 – 8].

Відправними формулами для визначення погонного аеродинамічного навантаження є досить відомі вирази

$$Y = c_y \frac{\rho U^2}{2} b, \qquad (15)$$

$$X = c_x \frac{\rho U^2}{2} b, \qquad (16)$$

де ρ – густина повітря; b – хорда профілю; U – швидкість потоку, що набігає на профіль; c_y, c_x – коефіцієнти підйомної сили та лобового опору, які залежать в свою чергу, від кута атаки α, чисел M і Re, форми профілю і стану поверхні відсіку.

У цих виразах наперед відомі лише густина повітря ρ та хорда b. Визначимо швидкості і кути атаки. Задачу вирішимо шляхом декількох послідовних переходів. Перший етап – розклад вектора швидкості насуваючого потоку на дві складові – перпендикулярну V_n і паралельну V_t площині обертання гвинта

$$V_n = V \sin\alpha_{н.гв.}, \quad V_t = V \cos\alpha_{н.гв.} \qquad (17)$$

Тут $\alpha_{н.гв.}$ – кут атаки несучого гвинта – кут між вектором швидкості насуваючого потоку і площиною обертання.

Наступний крок – розклад компонента швидкості V_t на дві складові – перпендикулярну V_t'' і паралельну V_t' проекції осі лопаті на площину обертання. Ці компоненти мають вигляд

$$V_t' = V_t \sin\psi = V \cos\alpha_{н.гв.} \sin\psi,$$
$$V_t'' = V_t \cos\psi = V \cos\alpha_{н.гв.} \cos\psi, \qquad (18)$$

де ψ – азимут лопаті.

З урахуванням обертання лопаті повна величина складової швидкості, перпендикулярної до проекції осі лопаті на площину обертання гвинта, складе

$$V_t^* = \omega r + V_t'' = \omega r + V \cos\alpha_{н.гв.} \sin\psi. \qquad (19)$$

Знайдемо тепер швидкості в площині, перпендикулярній до осі лопаті. Нормаль до цієї площини складає з площиною обертання кут β_r, який можна вважати малим, тому

$$\cos\beta_r \approx 1, \quad \sin\beta_r \approx tg\,\beta_r = y'. \qquad (20)$$

В цій площині проведемо дві осі – вісь Ox, паралельну площині обертання, і вісь Oy – перпендикулярну до неї. Тоді проекції швидкості потоку відносно профілю на ці осі

$$U_x = V_t^* = \omega r + V \cos\alpha_{н.гв.} \sin\psi, \qquad (21)$$

$$U_y = V_n \cos\beta_r - V_t' \sin\beta_r - \frac{\partial y}{\partial t} - \upsilon_i \approx V_n - V_t'\beta_r - \frac{\partial y}{\partial t} - \upsilon_i. \qquad (22)$$

У виразі для U_y наявність перших двох доданків стає зрозумілою із поступового розглядання рис. 1, 2. Третій доданок відповідає швидкості руху перерізу, що розглядається, при коливаннях лопаті у площині змаху. Четверта складова враховує індуктивну швидкість – додаткову швидкість потоку, викликану самим гвинтом. Використовуючи рівності (17) – (19), формулу (22) можна звести до вигляду

$$U_y = V_n \sin\alpha_{н.гв.} - V \cos\alpha_{н.гв.} \cos\psi \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial t} - \upsilon_i. \qquad (23)$$

В деяких випадках зручно використовувати коефіцієнти режиму роботи μ та протікання λ, які застосовуються в аеродинаміці гвинта:

$$\mu = \frac{V\cos\alpha_{н.св.}}{\omega R}, \quad \lambda = \mu\, tg\alpha_{н.св.} - \frac{\upsilon_i}{\omega R}.$$

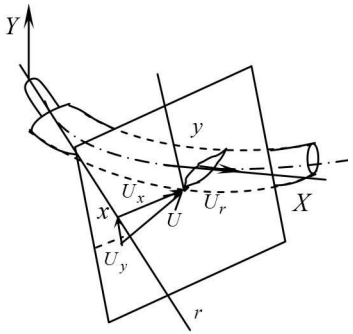


Рис. 1. Схема лопаті

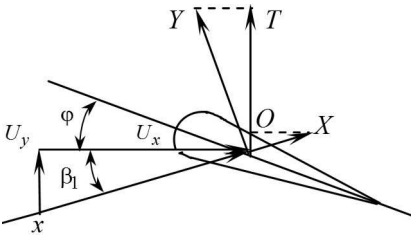


Рис. 2. Поперечний переріз лопаті

Перетворивши праві частини рівностей (21), (23), отримаємо

$$U_x = \omega R\left(r + \mu\sin\psi\right), \tag{24}$$

$$U_y = \omega R\left(\lambda - \mu\cos\psi\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{1}{\omega R}\frac{\partial y}{\partial t}\right). \tag{25}$$

Відмітимо, що повна швидкість повітря відносно профілю складається з двох компонент U_x, U_y і третього, перпендикулярного до них і направленого по дотичній до пружної осі лопаті, компонента U_r (див. рис. 1). Однак часто цим компонентом нехтують.

Вихрова теорія аеродинаміки лопатей має свої особливості. Величини індуктивних швидкостей залежать від розміщення та інтенсивності вихрів. Структура вихрів залежить від розподілу аеродинамічного навантаження, яке, в свою чергу, поряд з іншими факторами, визначається розподілом індуктивних швидкостей. Таким чином розрахунок індуктивних швидкостей нерозривно пов'язаний з розрахунком аеродинамічного навантаження. Якщо величина аеродинамічного навантаження визначається без урахування згинних та крутильних коливань лопаті, то можливі суттєві помилки. Тому в загальному випадку необхідно спільно вирішувати три задачі – визначення коливань лопаті, аеродинамічного навантаження та індуктивних швидкостей. Зазвичай у розрахунках при великих швидкостях польоту індуктивна швидкість вважається сталою по радіусу та азимуту і визначається на основі відомої формули Глауерта:

$$\frac{\upsilon_i}{\omega R} = \frac{c_\tau}{4\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}.$$

Кут атаки перерізу, як видно з рис. 2, представляє собою суму

$$\alpha = \beta_1 + \varphi, \tag{26}$$

де β_1 – кут притоку; φ – кут встановлення лопаті.

Кут притоку визначається, в свою чергу, співвідношеннями:

$$tg\,\beta_1 = U_y / U_x;\ \ \cos\beta_1 = U_x / U;\ \ \sin\beta_1 = U_y / U, \tag{27}$$

тобто розглянутими вище швидкостями U_x та U_y. Кут встановлення представляє собою суму

$$\varphi = \sigma_{a.n.} + \chi\beta_0 + \vartheta_{кр}, \tag{28}$$

де $\sigma_{a.n.}$ – кут встановлення, обумовлений положенням автомата перекосу; $\chi\beta_0$ – кут встановлення від дії компенсатора взмаху з коефіцієнтом χ; $\beta_0 = \left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r-0}$ – кут повороту комлевого перерізу; $\vartheta_{кр}$ – кут, отриманий в результаті кручення лопаті в польоті під дією прикладеного до лопаті крутного моменту.

Таким чином, для визначення кутів встановлення лопаті, необхідно виконати аеродинамічний розрахунок, розрахунок балансування і розрахунок кручення лопаті. Часто крученням лопаті нехтують, а аеродинамічний розрахунок і розрахунок балансування здійснюють з припущенням, що лопаті гвинта є абсолютно жорсткими на згин та на кручення.

Для того, щоб нарешті скористатись формулами (15) і (16), необхідно також знайти коефіцієнти c_y та c_x. Оскільки кути атаки перерізу лопаті можуть змінюватися у широкому діапазоні, то коефіцієнти c_y та c_x визначаються в залежності від кута атаки за результатами так званого кругового продуву, тобто продуву, виконаного при значеннях кута атаки від 0 до 360°.

Роботу виконано в рамках держбюджетної теми №0109U002146 при фінансовій підтримці Міністерства освіти і науки України.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Андрианов В.Н., Быстрицкий Д.Н., Вашкевич К.П., Секторов В.Р.* Ветроэлектрические станции. – Москва, ГЭИ, 1960. – 323 с.
2. *Шефтер Я.И., Рождественский И.В.* Ветронасосные и ветроэлектрические агрегаты. – Москва, "КОЛОС", 1967. – 376 с.
3. *Харитонов В.П.* Автономные ветроэлектрические установки. – Москва, ГНУ ВИЭСХ, 2006. – 273 с.
4. *Гуляев В.И., Соловьев И.Л., Худолий С.Н.* Прецессионные колебания двухлопастного ротора с упругим невесомым валом при сложном вращении. // Проблемы прочности. – 2002. – №2. – С. 73 – 81.
5. *Гуляев В.И., Худолий С.Н.* Колебания криволинейных закрученных лопастей при сложном вращении. // Проблемы прочности. – 2005. – 41, №4. – С. 126 – 132.
6. *Гайдайчук В.В., Худолий С.Н.* Резонансные колебания упругих лопастей при сложном вращении. // Вібрації в техніці та технологіях. – 2004. – №6 (38). – С. 54 – 57.
7. *Гайдайчук В.В., Носенко В.П.* Динаміка вітроенергетичних установок під дією вітрових та інерційних навантажень. // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2008. – № 82 – С. 31 – 38.
8. *Гайдайчук В.В., Носенко В.П.* Компьютерное моделирование динамического поведения и прочности конструкций ветроэнергетических установок. // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2009. – №3. – С. 22 – 26.
9. *Перельмутер А.В., Микитаренко М.А.* Башни для ветроэнергетических установок: тенденции развития. // Вісник Донбаської державної академії будівництва і архітектури. Будівельні конструкції. Будівлі та споруди. – 2001. – Вип. 5 (30). – С. 8 – 13.
10. *Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наукова думка, 1992. – 344 с.
11. *Михеев Р.А.* Прочность вертолетов. – Москва, Машиностроение, 1984. – 280 с.

Отримано 25.05.10

Гловач Л.В., Носенко В.П.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЛОПАСТЕЙ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Обсуждаются перспективы развития ветроэнергетики в Украине. Поставлено задачу о динамическом расчете конструкции ветроэнергетической установки с применением интегрированной расчетной схемы. Приняты во внимание силы тяжести, аэродинамические силы и гироскопические силы инерции. Построены разрешающие уравнения. Разработана методика расчета.

Glovach L.V., Nosenko V.P.

COMPUTER SIMULATION OF DYNAMICS OF WIND POWER STATION BLADES

The prospects of wind power development in the Ukraine are discussed. The problem on dynamic calculation of a wind power station structure is stated with the use of integrated design scheme. The gravity forces, aerodynamic and gyroscopic inertia forces are taken into account. The constitutive equations are constructed. The calculation techniques are elaborated.

УДК 531.31

М.В. Гончаренко, канд. техн. наук

ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ ТРУБОПРОВІДНИХ СИСТЕМ ПРИ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНОМУ ПАРАМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Досліджується стійкість трубопровідних систем при пульсаціях тиску внутрішнього потоку. Розглядаються питання, пов'язані з впливом стохастичної складової в параметричному навантаженні на структуру областей динамічної стійкості пружних систем. Межі областей динамічної стійкості будуються, виходячи з визначення стійкості відносно моментних функцій. Розглядаються випадки, коли параметричне навантаження зображується гармонічним і періодично нестаціонарним випадковим процесом. Розглянутий підхід і виконані на його основі дослідження дозволяють оцінити вплив стохастичної складової параметричного збудження на структуру областей динамічної стійкості.

Вступ. Широке застосування трубопроводів потребує вирішення проблем, що пов'язані з безаварійною їх роботою. Коливання тиску внутрішнього потоку можуть викликати значні поперечні коливання трубопровідних систем, порушення функціонування самих трубопроводів і приєднаного до них обладнання, навіть призводити до аварій.

Економічне та зручне транспортування речовин трубопровідними системами пов'язане з роботою різноманітних нагнітальних установок. Робота останніх супроводжується рядом різноманітних факторів і явищ, що впливають на поведінку системи компресор – трубопровід. До них належать коливання тиску и швидкості потоку речовини. Пульсації тиску и швидкості речовини мають складний гармонічний склад, що визначається роботою клапанів, схемою трубопроводу, іншими причинами. Вібрації технологічного обладнання, які являють собою небажане явище взагалі, при роботі багатьох компресорних установок представляють велику небезпеку при транспортуванні пожежо- або вибухонебезпечного, агресивного і токсичного газу.

Трубопроводи, приєднані до нагнітальних установок не тільки служать провідниками, по яким розповсюджуються хвилі тиску і швидкості, але й самі визначають цей процес – в залежності від конструкції трубопроводу ці коливання можуть збільшуватись чи зменшуватись.

Більш точний опис характеру пульсацій і відповідних їм коливань трубопровідної системи дозволить продовжувати пошук засобів зменшення пульсацій, що в свою чергу дозволить значно збільшити

© Гончаренко М.В.

продуктивність нагнітальних установок без встановлення допоміжних агрегатів. Зменшення пульсацій також приведе до скорочення витрат по утриманню і ремонту трубопроводів і нагнітальних установок, а також до полегшення і покращання умов праці обслуговуючого персоналу.

Моделювання стохастичного характеру тиску внутрішнього потоку. Параметри тиску внутрішнього потоку рідини у трубопровідних системах можуть мати дуже різноманітний характер. Визначальним тут є функціональне призначення трубопроводу, але у зв'язку з складністю системи значну роль можуть відігравати також випадкові фактори. Тому залежно від конкретних обставин при розрахунках використовують різні моделі для представлення дії внутрішнього потоку рідини.

У перших роботах, пов'язаних з аналізом стійкості трубопроводів швидкість потоку розглядалась сталою [7]. Потім стали використовувати моделі ,в яких швидкість потоку змінювалась за гармонічним законом [6, 8, 9]. Задача стійкості первісного недеформованого стану трубопроводу зводилась к задачі існування нетривіальних розв'язків рівняння Мат'є-Хілла. Але внаслідок певної схеми трубопроводу, роботи клапанів, інших причин пульсація тиску і швидкості речовини може мати більш складний гармонічний склад. В цьому випадку при аналізі динамічної стійкості системи треба використовувати метод узагальнених визначників Хілла. В ряді досліджень [5] було доведено, що при певних умовах пульсації тиску потоку мають чітко виражений стохастичний характер.

У загальному вигляді пульсації тиску внутрішнього потоку найбільш точно можна описати за допомогою випадкового процесу $\varphi(t)$, який має структуру

$$\varphi(t) = \mu_0 + \mu_1\varphi_1(\nu t) + \mu_2\psi(t), \qquad (1)$$

де $\varphi_1(\nu t)$ – детерміністична періодична функція; $\psi(t)$ – стаціонарний випадковий процес зі скінченним радіусом кореляції; μ_0, μ_1, μ_2, ν – параметри збудження.

Побудова рівнянь коливань трубопроводу під дією пульсацій внутрішнього потоку. Феодос'єв [7] одним з перших показав, що трубчатий стрижень при передачі зусиль через рідину або газ може зазнавати втрати стійкості. Сам стрижень не навантажений повздовжньою силою і в ідеально рівному стані стійкість не втратить. Але при аналізі рівноваги у відхиленому від вертикалі стані у перерізах виникають моменти, що пропорційні прогину. Форма рівноваги трубопроводу стає нестійкою, коли сила віддачі досягає значення ейлерової сили.

Якщо внутрішній тиск у трубопроводі змінюється гармонічно, хвиля тиску, що переміщується зі швидкістю $\tilde{v} = 2\nu / k$, в загальному вигляді залежить від часу і просторової координати:

$$p(x,t) = p_1 \cos(kx - 2\nu t). \tag{2}$$

Приймається, що довжина акустичної хвилі велика (хвильове число k - мала величина), отже внутрішній тиск не залежить від просторової координати. Тоді внутрішній тиск визначається

$$p(t) = p_1 \cos 2\nu t. \tag{3}$$

В цьому випадку повздовжня сила також не залежить від просторової координати і визначається добутком тиску на площу поперечного перерізу:

$$T(t) = T_0 + Fp_1 \cos 2\nu t, \tag{4}$$

де T_0 – стала складова зусилля;

Таким чином, рівняння, що описує динамічну поведінку трубопроводу при змінному в часі внутрішньому потоці:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + T(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (m_p + m_T) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

де m_p і m_T – погонні маси транспортуємої речовини і трубопроводу відповідно.

Рішення системи можна представити у вигляді

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t) \phi_i(x), \tag{6}$$

де $w_i(t)$ – узагальнена координата; $\phi_i(x)$ – базисні функції, в якості яких зручно використовувати форми власних коливань трубопровідної системи.

Після підстановки (6) в (5), внаслідок ортогональності функцій $\phi_i(x)$, отримаємо систему незв'язаних рівнянь відносно узагальнених координат

$$\frac{d^2 w_i}{dt^2} + \omega_{0i}^2 w_i (1 + 2 g_i \mu_1 \cos 2\nu t) = 0, \tag{7}$$

де ω_{0i} –-*i*-та власна частота; g_i – компонента матриці геометричної жорсткості; μ_1 – інтенсивність гармонічного навантаження.

Дослідження стійкості системи, рух якої описується рівнянням Мат'є (7), показує [1], що при певних значеннях частоти гармонічного параметричного навантаження, а саме, коли виконується рівність:

$$\frac{\nu}{\omega_{0i}} = 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \ldots \tag{8}$$

виникають зростаючі коливання при як завгодно малій інтенсивності μ_1. При введенні складової, що відображає дисипацію енергії в системі, втрата стійкості буде відбуватись при певних значеннях μ_1. Відомо, що такий доданок можна включити за допомогою методу квазінормальних координат вже в систему (7). Цей метод передбачає, що після застосування методу нормальних координат до кожного рівняння включається складова $2\xi_i\omega_{0i}\dfrac{dw_i}{dt}$, де ξ_i – модальний параметр затухання *i*-ої форми коливань. Система рівнянь (7) набуде вигляду

$$\frac{d^2w_i}{dt^2} + 2\xi_i\omega_{0i}\frac{dw_i}{dt} + \omega_{0i}^2 w_i(1 + 2g_i\mu_1\sin 2\nu t) = 0, \quad i = 1,2,...n. \tag{9}$$

Для повернення до рівнянь типу (7) виконується заміна перемінних

$$w_i(t) = -e^{-\xi\omega t}u_i(t), \tag{10}$$

що призводить до системи

$$\frac{d^2u_i}{dt^2} + \omega_{0i}^2 u_i(1 - \xi_i + 2g_i\mu_1\sin 2\nu t) = 0, \; i = 1,2,...n. \tag{11}$$

Області стійкості будуються окремо для кожного рівняння системи (11). Для визначення меж областей рівняння системи (11) можна застосувати метод узагальнених визначників Хіла [1]. Таким чином для головного простого резонансу $\left(\dfrac{\nu}{\omega_{0i}} = 1\right)$ межа стійкості визначається за формулою

$$2\nu \approx 2\omega_0\sqrt{1 \pm \sqrt{(g\mu_1)^2 - (2\xi)^2}}. \tag{12}$$

Межа наступного, другорядного резонансу $\left(\frac{\nu}{\omega_{0i}}=\frac{1}{2}\right)$

$$2\nu \approx \omega_0\sqrt{1-(g\mu_1)^2 \pm \sqrt{(g\mu_1)^4-(2\xi)^2\left(1-(g\mu_1)^2\right)}}\,. \qquad (13)$$

Отримані з виразів (12) і (13) критичні значення інтенсивності параметричного навантаження показують, що зі збільшенням порядку параметричного резонансу критичне значення навантаження збільшується. Оскільки найбільш небезпечним є резонанс першого порядку, при дослідженні конкретних систем більше уваги буде приділятись саме головному резонансу.

Як зазначалось вище, в ряді досліджень, де наведені графіки пульсацій тиску і відповідних їм коливань трубопроводів, чітко видно стохастичних характер пульсацій тиску потоку і відповідних їм коливань трубопровідних систем, тобто повздовжня сила $T(t)$ в загальному вигляді описується виразом (1). У статті [2] розглянута стійкість трубопроводу при стаціонарному параметричному навантаженні, тобто в зображенні (1) $\mu_1=0$, $\mu_0,\mu_2\neq 0$. У представленій роботі порівнюється стійкість трубопроводу при гармонічному ($\mu_0,\mu_1\neq 0$, $\mu_2=0$, $\varphi_1(\nu,t)=\sin 2\nu t$) і періодично нестаціонарному стохастичному навантаженні ($\mu_0,\mu_1,\mu_2\neq 0$, $\varphi_1(\nu,t)=\sin 2\nu t$).

При дослідженні стійкості при періодично нестаціонарному навантаженні застосовується підхід, що базується на методі усереднення Н.Н. Боголюбова, який для стохастичних систем був модифікований у роботах Р.Л. Стратоновича і Р.З. Хасьмінського.

В методах нелінійної динаміки доведені теореми [4], що при дослідженні стійкості в першому наближенні можна розглядати окремі рівняння типу Мат'є-Хілла, які визначаються власними частотами. Досліджується стійкість динамічних стохастичних систем біля частот (8) при стохастичному параметричному навантаженні за допомогою методу моментів, що передбачає складання детерміністичних рівнянь відносно моментів різних порядків змінних стану динамічної системи [4].

Принциповим є той момент, що згідно із загальною теорією усереднення М.М. Боголюбова в рамках першого наближення при дослідженні динамічної стійкості можна розглядати тільки прості головні резонанси і комбінаційні резонанси. Таким чином задача зводиться до дослідження незв'язаних окремих рівнянь, які представляють собою стохастичні аналоги рівняння Мат'є-Хілла й описують прості головні резонанси, а також до дослідження сукупності парних рівнянь.

Спочатку для запису рівнянь в стандартній формі виконується перехід до “повільних” змінних – двох амплітуд. Рішення отриманої системи зводиться до дифузійного марківського процесу, при визначенні коефіцієнтів зносу і дифузії якого отримуємо стохастичні рівняння Ітo відносно змінних станів і відповідних їх добутків. Записується укорочена система рівнянь, праві частини яких отримані шляхом усереднення за період правих частин вихідної системи. Отже система диференціальних рівнянь будується методом усереднення, що ґрунтується на теоремі Стратоновича-Хасьмінського. Виконавши такі перетворення отримуємо відповідні вирази для перших і других моментів [3]. Дослідження динамічної стійкості пружної системи зводиться до дослідження стійкості тривіального розв’язку цих систем.

Області стійкості будуються в координатах частота – інтенсивність гармонічного параметричного навантаження при наперед заданих характеристиках випадкової складової параметричного навантаження. Обчислюються власні значення λ_i при збільшенні інтенсивності гармонічної складової $\mu_1 g_i$. Найменше значення $\mu_1 g_i$, при якому серед власних значень λ_i з’являється хоча б одне з додатною дійсною частиною, вважається межею області стійкості. Таким чином, за допомогою описаної методики можна оцінити динамічну стійкість пружних систем у зоні параметричних резонансів.

Аналіз стійкості трубопровідної системи при пульсаціях внутрішнього потоку. Розглядається динаміка типової трубопровідної системи, що описана у [5]. Автор дійшов висновку,що трубопровід був зруйнований внаслідок пульсацій тиску внутрішнього потоку, які були спричинені кавітаційними явищами в турбіні.

В місці розриву внутрішній діаметр трубопроводу дорівнював 174см, товщина стінки 18мм, довжина прольоту 13,8м. Загальний вигляд трубопроводу показаний на рис. 1.

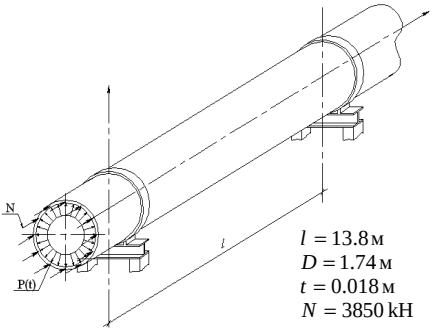


Рис. 1. Загальний вигляд трубопроводу

В задачах такого типу за розрахункову модель трубопроводу приймається нерозрізна балка з різними умовами опирання. Рух системи описується рівнянням (5). Рішення шукається у вигляді (6), де як базисні функції $\phi_i(x)$

використовуються форми власних коливань трубопровідної системи, що залежіть від умов закріплення трубопроводу. Для багатопрогінної моделі з умов симетрії можна прийняти опирання балки шарнірним.

Власні частоти багатопрогінної систем утворюють зони згущення. Якщо для однопрогінної балки в розрахунках беруть участь перша власна частота, що відповідає першій формі коливань, друга і т.д., то для багатопрогінної системи між звичайними формами коливань виникають проміжні, кількість яких відповідає кількості прольотів балки.

Початок кожної зони або нижня межа зони згущення шарнірно опертих балочних систем характеризується частотним коефіцієнтом α_1, що збігається з частотним коефіцієнтом відповідної форми коливань однопрогінної шарнірно опертої балки $\alpha_1 = \pi$, і це значення використовується далі для розрахунків. Остання форма зони згущення багатопрогінної балки відповідає другій формі звичайної балки $\alpha_1 = 2\pi$. Таким чином для трубопровідних систем зони згущення частот будуть утворювати зони згущення областей нестійкості і збільшиться частотний діапазон, в якому можуть виникати параметричні резонанси. Взагалі кажучи, для аналізу трубопровідної системи потрібно будувати зони, що відповідають кожній власній частоті. Далі розрахунки проводяться для нижчої частоти, з якої починається зона згущення. Якщо діюче навантаження може викликати резонанси при частотах, що нижчі за подвійну власну частоту, вважатиметься, що система не втрачатиме стійкість. Якщо при частотах, що вищі за подвійну власну частоту, потрібно досліджувати наступні частоти, але можна сказати що таке навантаження буде небезпечне і може викликати втрату стійкості.

Рух трубопроводу описується системою (11), в якій власні частоти будуть визначатись виразом

$$\omega_{0i} = \frac{(\alpha_i)^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}\left(1 - \frac{T_0 l^2}{i^2 \pi^2 EI}\right)}, \text{ рад/с}, \qquad (14)$$

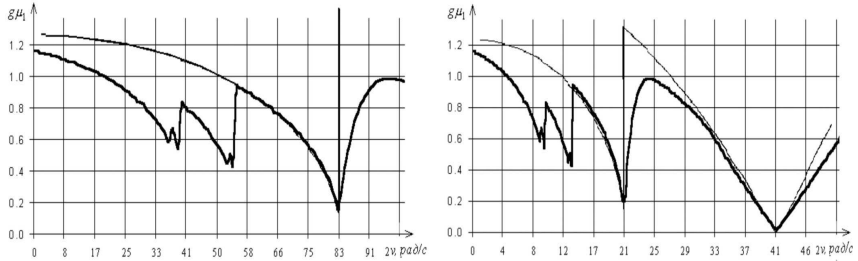
де α_i – коефіцієнт, що залежить від кількості прольотів, умов закріплення кінців трубопроводу і форми коливань; l – довжина прольоту, м; EI – жорсткість на згин, Па·м^4; m – погонна маса трубопроводу з транспортуємим продуктом, кг/м; T_0 – повздовжнє зусилля в трубопроводі.

Для трубопроводу, що досліджується нижча власна частота відповідно до виразу (14) дорівнює $\omega_{0i} = 82.8$ рад/с. Використовуючи формули (12) і (13) можна побудувати наближені межі стійкості головного резонансу та

побічного резонансу другого порядку. Для відображення областей нестійкості в широкій зоні частот гармонійного збудження потрібно будувати побічні резонанси вищих порядків. Більш точні зони нестійкості стійкості можна отримати за допомогою моментних рівнянь, прийнявши $\mu_1 = 0$.

Розглядається діапазон частот параметричного навантаження до 100рад/с. Графік залежності частота–амплітуда гармонічного параметричного навантаження для даного трубопроводу матимуть вигляд, показаний на рис. 2,а). Зона, що розташована вище графіків є зоною нестійкості системи, тобто якщо параметри навантаження потрапляються у цю зону, система втрачає стійкість. Величина $g\mu_1$ представляє собою відношення інтенсивності гармонічного навантаження до критичного значення статичної сили. У зону частот, що розглядається, головний резонанс не потрапляє. Побічний резонанс, побудований за наближеною формулою (13) і показаний тоншою лінією, значно зменшує зону нестійкості системи, що побудована за допомогою моментних рівнянь і показана більш товстою лінією.

Типовим дефектом для таких споруд є просідання опори і, як зазначено в [5], це було виявлено при обстеженні даного трубопроводу. Нещільне прилягання трубопроводу до опори збільшує вдвічі довжину прольоту. Власні частоти знизяться, нижча власна частота такої системи дорівнює $\omega_{0i} = 20.8$ рад/с. Проведені аналогічні побудови. Як видно на рис. 2,б), в діапазон частот до 50 рад/с потрапляють і головний, і побічні резонанси. Як і в попередньому випадку, формули (12) і (13) дещо зменшують реальні області нестійкості системи.



а *б*

Рис. 2. Межі областей стійкості при гармонічному навантаженні

У багатьох випадках характер пульсацій внутрішнього потоку більш точно можна описати сумою гармонічної і стохастичної складових, тобто періодично нестаціонарним процесом. Детермінована гармонічна

складова такого процесу має частоту, що відповідає характерній частоті процесу зміни пульсацій тиску, а випадкова складова відображає наведені пульсації. Стійкість системи, що зазнає такого впливу, можна проаналізувати за допомогою вище описаної методики дослідження моментних рівнянь. Зони стійкості будуються в координатах інтенсивність-частота гармонічного збудження, а параметри стохастичної складової визначаються заздалегідь.

Побудовані межі областей динамічної стійкості при різних характеристиках випадкового процесу. Потім параметри змінюються і аналізується вплив стохастичної складової на зону стійкості конструкції.

Для подальших досліджень при періодично нестаціонарному параметричному навантаженні потрібно знати аналітичне визначення стохастичного процесу. Для цього спектральна щільність задається виразом з такими параметрами, щоб графік максимально відповідав вигляду спектральної щільності, який отримано при аналізі реалізації випадкового процесу [2]:

$$S(\omega)=\frac{\sigma^2}{\pi}\frac{2\alpha\theta^2}{\left(\omega^2-\theta^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}, \qquad (15)$$

де σ^2 – дисперсія пульсуючої складової тиску; θ – характерна частота сумарного тиску; α – параметр кореляції.

Суцільною лінією на всіх графіках на рис. 3 показані межі областей стійкості при гармонічному параметричному навантаженні. Графіки, що зображені на рис. 3,а) побудовані при θ =5рад/с і $\sigma^2=0{,}01$, на рис. 3,б) – при θ =5рад/с і $\sigma^2=0{,}02$, на рис. 3,в) – при θ =10рад/с і $\sigma^2=0{,}02$; на рис. 3,г) – при θ =20рад/с і $\sigma^2=0{,}02$. Штриховою лінією показані межі стійкості при $\alpha=2\omega_0$, пунктирними при $\alpha=0{,}5\omega_0$ і $\alpha=0{,}25\omega_0$.

Аналіз результатів показує, що стохастичні флуктуації створюють стабілізуючий ефект. При збільшенні несучої частоти випадкового процесу межа стійкості при періодично нестаціонарному навантаженні наближається до межі стійкості при гармонічному параметричному навантаженні. При збільшенні параметра кореляції випадкового процесу стійкість системи збільшується безпосередньо у зоні резонансу і зменшується зі зростанням різниці між частотами гармонічної і стохастичної складових. Збільшення дисперсії збільшує стабілізуючий ефект флуктуацій випадкового процесу.

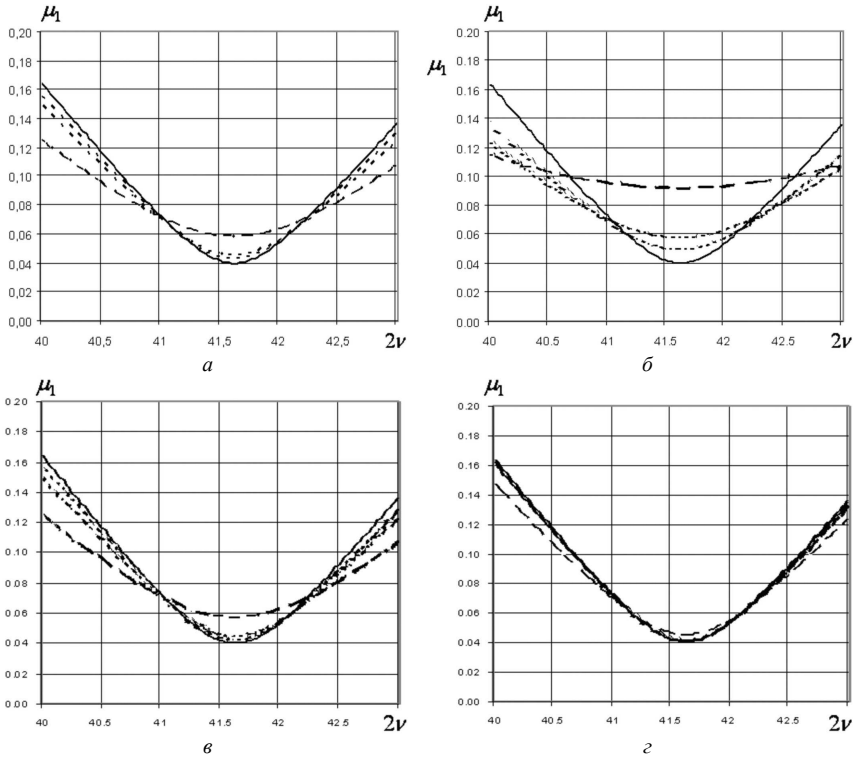


Рис. 3. Межі областей стійкості при періодично нестаціонарному навантаженні

Висновки. При певних характеристиках трубопровідної системи пульсації внутрішнього потоку впливають на стійкість системи і можуть викликати втрату стійкості. Методика, що базується на побудові моментних рівнянь за допомогою методу усереднення, дозволяє побудувати зони стійкості трубопровідної системи при випадкових пульсаціях внутрішнього потоку. Для розглянутого трубопроводу врахування стохастичного характеру коливань тиску збільшує зону стійкості конструкцій. Загалом можна зробити висновок, що пульсації внутрішнього потоку можуть призводити до втрати стійкості тільки у зоні резонансів і при значному рівні інтенсивності пульсацій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред.В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352с.
2. *Ворчак М.В.* Параметричний резонанс в задачах про коливання труб при випадкових пульсаціях тиску внутрішнього потоку // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.- техн. збірник – К.: КНУБА, 2002.- Вип. 71.- С. 107-114
3. *Гончаренко М.В., Дехтярюк Є.С.* Аналіз стійкості пружних систем в зонах простих і комбінаційних резонансів при стохастичному параметричному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд.- К.: КНУБА, 2004, Вип. 74. - с.115-123.
4. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
5. *Картвелишвили Н.А.* Динамика напорных трубопроводов. – М.: Энергия, 1979. – 224с.
6. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов: задачи взаимодействия стержней с потоками жидкости и воздуха. – М.: Машиностроение, 1982. – 279с.
7. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука,1967. – 372с.
8. *Paidoussis M.P., Issid N.T.* Dynamic stability of pipes conveying fluid // Journal of sound and vibration – 1974. – Vol.33(3) – P.267-294.
9. *Paidoussis M.P., Sundarajan C.* Parametric and combination resonance's of a pipe conveying pulsating fluid // Journal of applied mechanics. Transactions of the ASME. – 1975. – Vol.42. – P.780-784.

Отримано 25.08.10

Гончаренко М.В.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТЦИОНАРНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Исследуется устойчивость трубопроводных систем при пульсациях давления внутреннего потока. Рассматриваются вопросы, связанные с влиянием стохастической составляющей параметрической нагрузки на структуру областей динамической устойчивости упругих систем. Границы областей динамической устойчивости строятся исходя из определения устойчивости относительно моментных функций. Рассматриваются случаи, когда параметрическая нагрузка описывается гармоническим и периодически нестационарным случайным процессом. Рассмотренный подход и выполненные на его основании исследования позволяют оценить влияние стохастической составляющей параметрического воздействия на структуру областей динамической устойчивости.

Goncharenko M.V.

DYNAMIC STABILITY OF PIPELINE SYSTEM UNDER PERIODICAL NON STATIONARY PARAMETRIC LOAD

Constructions stability under internal flow pressure pulsation in pipeline system is analyzed. The effect of parametric additional random excitation on the dynamic stability regions structures of elastic systems is studied. The boundaries of dynamic regions of stability are constructed with regard to moment functions. Cases is considered when parametric load to represent by harmonic and periodical non stationary process. Considered approach and performed investigations is allowed to appreciate influence of stochastic parametric load on dynamic stability regions structure.

ЗМІСТ

Баженов В.А., Шкриль О.О., Пискунов С.О., Богдан Д.В.
Неоднорідний призматичний скінченний елемент зі змінною площею поперечного перерізу та урахуванням змінності компонентів метричного тензору 3

Гоцуляк Є.О., Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Шах В.В.
Побудова поверхні критичних сполучень осьового та бічного стиснення циліндричних оболонок змінної товщини з нерегулярними недосконалостями 23

Баженов В.А., Максим'юк Ю.В., Андрієвський В.П., Гуляр О.І.
Вплив урахування геометричної нелінійності на величину розрахункового ресурсу хвостовика лопатки ГТУ 31

Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.
Використання напіваналітичного метода скінченних елементів в задачах періодичних коливань просторових конструкцій 51

Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.
Порівняння динамічної поведінки віброударних систем різних типів 61

Гайдайчук В.В, Худолій С.М., Андрусенко О.М.
Про рухомість бурильної колони в криволінійній свердловині зі спіральними геометричними недосконалостями 74

Пискунов С.О., Мицюк С.В.
Визначення ресурсу просторових тіл обертання змінної площі поперечного перерізу з початковою тріщиною 86

Ворона Ю.В., Геращенко О.В., Русанова О.С.
Гранично-елементні підходи до розв'язання задачі про деформування масивів з тріщинами. 98

Жупаненко І.В., Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.
Частоти вільних коливань товстої шарнірно-опертої пластини 109

Соловей М.О., Кривенко О.П., Дубина О.С.
Аналіз збіжності та точності розв'язків задачі згину пружної пластини методом скінченних елементів в учбовому комплексі . . . 118

Легостаєв А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.
Узагальнені координати редукованих моделей в задачах динаміки оболонкових конструкцій нерегулярної структури 124

Іванченко Г.М.
Трансформація фронтів розривних хвиль в пружних середовищах змінної щільності 132

Гловач Л.В., Носенко В.П.
Комп'ютерне моделювання динаміки лопатей вітроенергетичних установок 143

Гончаренко М.В.
Динамічна стійкість трубопровідних систем при періодично нестаціонарному параметричному навантаженні 153

Наукове видання

ОПІР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 85

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 30.09.10. Формат 60х90 $^{1}/_{16}$. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.
Тираж 100. Зам. №

КНУБА
м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

Віддруковано на ЗАТ “ВІПОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.