

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 93

ЗАСНОВАНИЙ У 1965 р.

КИЇВ 2014

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

Відповідальний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук
Заступник відповідального редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

<i>Ю.В. Верюжський</i> , д-р техн. наук	<i>С.Н. Кривошапко</i> , д-р техн. наук (Росія)
<i>В.В. Гайдайчук</i> , д-р техн. наук	<i>С.Ю. Фіалко</i> , д-р техн. наук (Польща)
<i>О.І. Гуляр</i> , д-р техн. наук	<i>Чак Дик Тінь</i> , д-р техн. наук (В'єтнам)
<i>Г.М. Іванченко</i> , д-р техн. наук	<i>С.В. Заблоцький</i> , канд. техн. наук (Австралія)
<i>П.П. Лізунов</i> , д-р техн. наук	<i>А.А. Зверев</i> , канд. техн. наук (Німеччина)
<i>С.О. Пискунов</i> , д-р техн. наук	
<i>І.І. Солодей</i> , д-р техн. наук	

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури.

Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 93 / Відп. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2014. – 164 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталих і змінних у часі навантаженнях, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробничників, докторантів, аспірантів та студентів.

Адреса редакційної колегії: КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31
м. Київ, 03037
тел.: (044) 248-3040

УДК 539.3/6
ББК 30.121+38.112
О-61

© КНУБА, 2014

УДК 539.3

В.А. Баженов¹, д-р техн. наук,**П.П. Лізунов**¹, д-р техн. наук**І.І. Солодей**¹, д-р техн. наук

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

РОЗРАХУНОК ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ЕВОЛЮЦІЇ ВЗАЄМОДІЇ АРМАТУРИ З БЕТОНОМ

При дослідженні корпусу ядерного реактора вивчено підкріплюючий вплив металокожухи на напружений стан бетонного масиву, розраховано рівень граничного тиску, досліджено схему втрати несучої здатності конструкцій.

Ключові слова: залізобетонні просторові конструкції, нелінійне деформування, зони руйнування, метод скінченних елементів, кришка корпусу реактора.

Вступ

Об'єктом дослідження є процеси нелінійного деформування, поява та еволюція розповсюдження зон прогресуючого руйнування масивних будівельних конструкцій під дією статичного і динамічного навантаження. Предмет дослідження – параметри напружено-деформованого стану, нелінійні деформації, зони руйнування, що викликані дією як постійних так і змінних у часі силових навантажень.

В рамках цієї роботи залізобетон моделюється як макрооднорідний двокомпонентний континуум, анізотропія якого зумовлена просторовим армуванням та утворенням тріщин [3]. Передбачається, що деформація матриці і армування відбувається спільно, а опір суцільного середовища дорівнює сумі напружень у бетоні та арматурі. Нелінійна деформація металу описується на базі теорії пластичної течії, а бетону – відповідно до деформаційної теорії. За критерій міцності використовується: для металу критерій Мізеса, для бетону - критерій Карпенко.

Для дискретизації об'єктів розрахунку використовуються просторові кільцеві напіваналітичні скінченні елементи, особливістю яких є урахування просторового армування і тріщин [1]. В межах скінченного елемента допускається виникнення взаємно перпендикулярних тріщин, після чого матеріал не чинить опір зовнішнім навантаженням. Площина тріщини орієнтується таким чином, що дотичне і нормальне напруження в площині тріщини дорівнює нулю. Це досягається шляхом корекції констант тензора деформацій.

Алгоритм розрахунку базується на методі Ньютона-Канторовича [4].

Проведені чисельні експерименти засвідчили високу ефективність запропонованого підходу та достовірність отриманих рішень у порівнянні із експериментальними даними.

Дослідження особливостей напруженого стану перекриття корпусу ядерного реактора та схеми втрати несучої здатності конструкції

Розроблена методика моделювання прогресуючого тріщиноутворення масивних залізобетонних конструкцій у тривимірній постановці та програмних засобів, що її реалізують, була випробувана при розв'язанні задачі по визначенню несучої здатності моделі кришки корпусу реактора. Отримані результати порівнювалися з даними натурних випробувань [5], а також з результатами чисельного експерименту [6]. Вибір даної задачі обумовлений складним характером руйнування перекриття внаслідок утворення тріщин відриву і зсуву, що досить повно і достовірно описує механізм тріщиноутворення реальних об'єктів.

Для розрахунків була обрана плита SLAB-IV товщиною 6 in (рис. 1,а). Радіальне попереднє напруження в чотирьох напрямках здійснювалося натягом арматурних канатів з високоміцного дроту в незамонолічених горизонтальних каналах діаметром 0.5 in, вертикальне попереднє напруження розтяганням 16 високоміцних болтів діаметром 1.5 in, якими залізобетонна плита кріпилася до товстої сталевій плити основи. Тиск від болтів передавався на плиту через сталеве опорне кільце товщиною 1 in. Плита навантажувалася нагнітанням масла під тиском у гумову камеру, розміщену між внутрішньою поверхнею плити і плитою основи.

Для чисельного моделювання експерименту пружні характеристики бетону, а також межі міцності на розтяг і стискання прийняті згідно [5] з урахуванням варіації міцності бетону: $E_b = 4.2 \times 10^6 \text{ psi}$, $R_b = 8100 \text{ psi}$, $R_{bt} = 560 \text{ psi}$.

При побудові скінченноелементної моделі, враховувалося ослаблення масиву бетону горизонтальними каналами у відповідності зі схемою, зазначеною в роботі [6]. Коефіцієнт ослаблення матеріалу центральної частини плити був прийнятий рівним 18.75% і моделювався відповідними коефіцієнтами армування. Через відсутність пружних характеристик болтів вертикальне обтиснення визначалося з умови рівноваги конструкції.

Як показали чисельні експерименти, істотний вплив на розвиток процесу тріщиноутворення виявляє моделювання відриву і ковзання залізобетонного масиву по сталевій плиті основи, що більше відповідає реальним умовам контакту цих різномірних матеріалів. Тому, на відміну від [6], при побудові скінченноелементної моделі (рис. 1,б) контакт масиву бетону і сталевій плити моделювався одnobічними в'язями, які не перешкоджають ковзанню бетону по плиті і дозволяють йому відриватися

від основи. Такі умови деформування забезпечувалися використанням спеціальних контактних скінченних елементів (СКСЕ) для моделювання контактної взаємодії системи просторових тіл при дії змінних у часі зовнішніх силових навантажень [2].

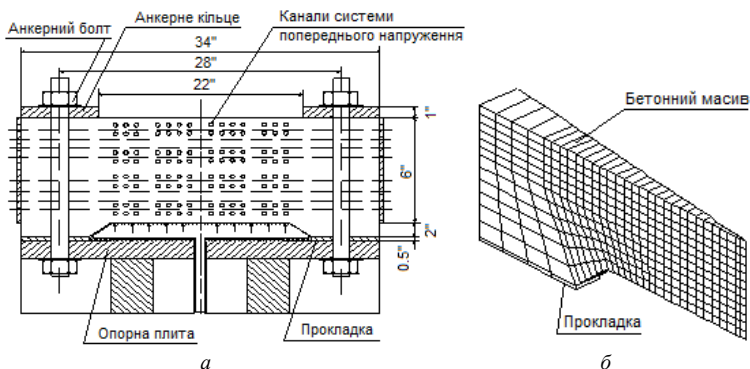


Рис. 1. Модель перекриття корпусу реактора:
а – конструкція, б – розрахункова сітка МСЕ

Моделювання однобічних в'язей у розрахунках здійснювалося введенням тонкого шару СЕ. Механічні характеристики кожного елемента шару змінюються в процесі деформування. В початковий момент часу модуль пружності матеріалу кожного елемента шару приймається на декілька порядків менше модуля пружності матеріалу об'єктів. На участках, товщина яких δ в процесі деформування стає меншою за деяку задану величину δ_0 (параметр так званої штрафної жорсткості), модуль пружності матеріалу елементів, що належать участку контакту, приймається рівним модулю пружності матеріалу одного з об'єктів. Якщо δ стає більшою за δ_0 , модуль СЕ знову зменшується.

При побудові дискретної моделі кришки враховувалася циклічна симетрія об'єкта. Розглядався сектор в 7.5 град , що відповідає одній сорок восьмій частині реальної конструкції.

Для виключення похибок, пов'язаних з недостатнім ступенем дискретизації об'єкта розрахунків, скінченноелементна сітка була прийнята надлишково густою, що відобразилося на параметрах системи розрахункових рівнянь: число невідомих 2448, ширина стрічки 96.

Підвищення тиску до 1000 psi викликало відрив внутрішнього краю бетонного масиву від жорсткої основи без утворення тріщин (рис. 2,а). Подальше підвищення до 1100 psi (рис. 2,б) збільшило зону відриву і призвело до утворення перших кільцевих тріщин в області вхідного кута.

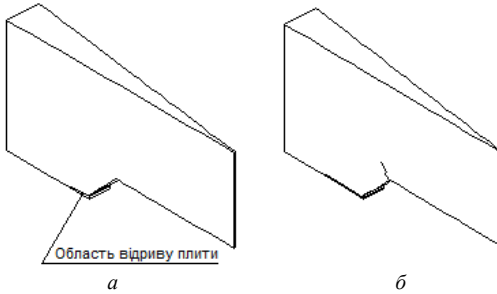


Рис. 2. Початкова стадія розвитку тріщиноутворення при дії внутрішнього тиску

Процес наступного зростання внутрішнього тиску до 1750 psi спричинив активний розвиток меридіональних тріщин на верхній поверхні моделі кришки в напрямку опорного кільця (рис. 3,*a*). Паралельно основному процесу тріщиноутворення область кільцевих тріщин просувалася в напрямку від вхідного кута до краю опорного кільця. Однак ця область тріщин прогресувала менш активно.

Істотні зміни в характер руйнування конструкції внесло утворення нової області кільцевих тріщин верхньої частини моделі кришки при збільшенні внутрішнього тиску до 1800 psi (рис. 3,*б*).

Наступний розвиток цієї області, за формою, що нагадує перевернений купол, паралельно з утворенням в ній системи меридіональних тріщин, призвів до видавлювання цієї частини конструкції з основного масиву бетону при внутрішньому тиску 2000 psi (рис. 4,*a*). Зміна стану тріщин з "відкритої" на "закриту" зупинило процес розвитку системи кільцевих тріщин. Зазначені тріщини утворювалися на ранніх кроках навантаження і розвивалися в напрямку від вершини вхідного кута до краю опорного кільця.

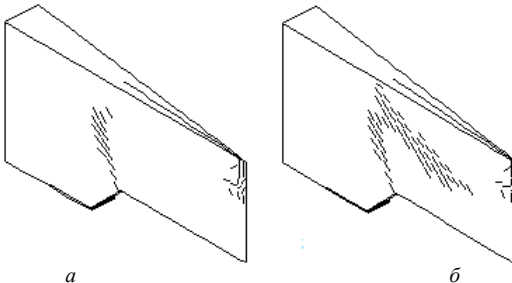


Рис. 3. Розвиток меридіональних кільцевих тріщин

Поділ конструкції на частини супроводжувався збільшенням області

відриву маси бетону від жорсткої основи. Подальше підвищення внутрішнього тиску до 2050 *psi* (рис. 4,б) призвело до активного руйнування звуженої центральної частини перекриття. При постійному значенні внутрішнього тиску відбувалося лавинообразне руйнування бетону і різко збільшувалися (на порядок) абсолютні значення переміщень. У зв'язку із цим величина внутрішнього тиску, що дорівнює 2050 *psi*, прийнята за розрахункову межу несучої здатності.

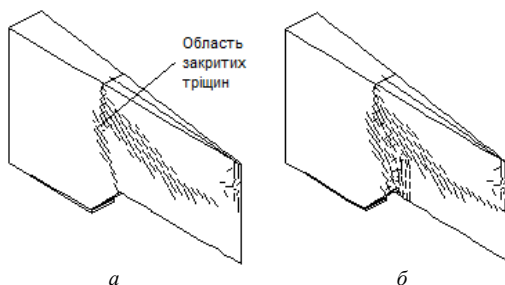


Рис. 4. Розвиток тріщиноутворення на межі несучої здатності перекриття

Таким чином, тиск, при якому відбувається вичерпання несучої здатності моделі кришки реактора, отриманий в результаті розрахунків з використанням запропонованої методики чисельного моделювання прогресуючого тріщиноутворення рівний 2050 *psi*. Це лише на 5.5% нижче значення, що отримане експериментально і дорівнює 2170 *psi* згідно [5].

Порівняння графіків залежності внутрішній тиск-переміщення центральної точки, що отримані за викладеною методикою і експериментально [5], також свідчить про їх добре узгодження (рис. 5).

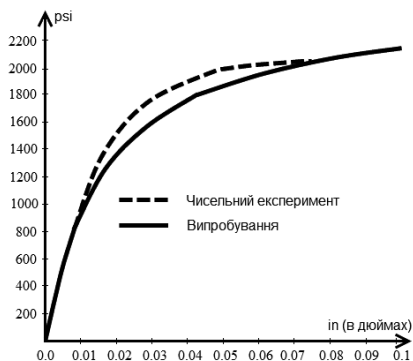


Рис. 5. Графік залежності $P-U$ (внутрішній тиск-переміщення центральної точки)

Автори експерименту [5], на підставі вивчення розпилів випробуваних моделей запропонували схему руйнування (рис. 6): характерне для вигину плит меридіональне тріщиноутворення (рис. 6,а), хоча і починається на ранніх стадіях навантаження, не відіграє ролі в остаточній втраті несучої здатності, яка відбувається в результаті зсувного

руйнування бетону; утворення похилих тріщин зсуву починається у верхніх шарах плити біля внутрішнього краю опорного кільця (рис. 6,б); наступне утворення горизонтальних тріщин відриву призводить до відділення частини конструкції у формі "перевернутого купола" (рис. 6,в); остаточне руйнування відбувається при продавлюванні ослабленої центральної частини кришки.

Схема втрати несучої здатності моделі кришки, отримана в результаті виконання розрахунків, практично повністю збігається зі схемою, що запропонована авторами експерименту [5]. Відмінність полягає в тому, що на ранніх стадіях навантаження з'являється область кільцевих тріщин, які розташувалися від вершини вхідного кута в нижній частині моделі кришки до краю металевого опорного кільця.

В описі результатів випробувань кришки SLAB-IV відсутня інформація про наявність тріщин такого типу, хоча їх можна спостерігати по фотографії кришки SLAB-VII. При виконанні чисельного експерименту [6] вони також мали місце. Очевидно, автори експерименту не акцентували уваги на таких тріщинах у зв'язку з

тим, що процес їх розвитку загасає, і вони не виявляють вирішального впливу на формування граничного стану моделі кришки SLAB-IV.

Висновки. Добре узгодження результатів розрахунків і даних експерименту дозволяє зробити висновок про можливість застосування запропонованої методики дослідження прогресуючого тріщиноутворення в масивних залізобетонних конструкціях у тривимірній постановці з урахуванням фізичної нелінійності бетону.

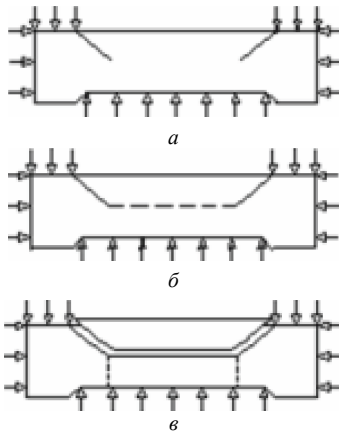


Рис. 6. Схема руйнування перекриття: утворення меридіональних (а), похилих зсувних (б) та горизонтальних (в) тріщин

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Напіваналітичний кільцевий скінченний елемент для моделювання просторового напруженого стану армованих тіл з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.91, 2013.-с.147-156.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл. –К., КНУБА, 2012. –248с.
3. *Гуляр О.І., Лізунов П.П., Солодей І.І.* Математичні моделі появи та розповсюдження зон руйнування кругових неоднорідних дисперсно-армованих тіл // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.90, 2012.-с.94-112.

4. *Лізунов П.П., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Універсальний алгоритм чисельного моделювання нелінійних процесів деформування залізобетонних конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.92, 2013.
5. *Campbell-Allen D., Low E.W.* Pressure tests on end slabs for prestressed concrete vessels // Nucl. Eng. And Des. – 1967. – 6 – p.345-359.
6. *Phillips D.V., Zienkiewicz O.C.* Finite element nonlinear analysis of concrete structures // Proc. Insth. Civ. Engr. – 1976, -61. – Part 2. – p.59-88.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Solodei I.I.* Napivanalitichnyy kil'tsevyy skinchennyy element dlya modelyuvannya prostorovoho napruzhenoho stanu armovanykh til z trishchynamy (Semi-analytical circular finite element to model 3d stress state of reinforced solids with cracks) // Strength of materials and structural theory. –К.:KNUSA, N 91, 2013.-p.147-156.
2. *Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Sakharov O.S., Solodei I.I.* Napivanalitichnyy metod skinchennykh elementiv v zadachakh dynamiky prostorovykh til (Semi-analytical finite element method in dynamic problems of the 3D bodies). –К., КНУБА, 2012. –248p.
3. *Gulyar O.I., Lizunov P.P., Solodei I.I.* Matematychni modeli po'yavy ta rozpovsyudzhennya zon ruynuvannya kruhovyykh neodnorodnykh dyspersno-armovanykh til (The numerical models of initiation and development of fracture zones for reinforced heterogeneous solids of revolution) // Strength of materials and structural theory. –К.:KNUSA, N 90, 2012.-p.94-112.
4. *Lizunov P.P., Gulyar O.I., Solodei I.I.* Universal'nyy alhorytm chysel'noho modelyuvannya nelineinykh protsesiv deformuvannya zalizobetonykh konstruktсий (Universal algorithm of nonlinear process numerical modelling of reinforced construction deformation) // Strength of materials and structural theory. – К.:KNUSA, N 92, 2013.
5. *Campbell-Allen D., Low E.W.* Pressure tests on end slabs for prestressed concrete vessels // Nucl. Eng. And Des. – 1967. – 6 – p.345-359.
6. *Phillips D.V., Zienkiewicz O.C.* Finite element nonlinear analysis of concrete structures // Proc. Insth. Civ. Engr. – 1976, -61. – Part 2. – p.59-88.

Стаття надійшла до редакції 20.01.2014 р.

Баженов В.А., Лизунов П.П., Солодей И.И.

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ЭВОЛЮЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АРМАТУРЫ С БЕТОНОМ

При исследовании корпуса ядерного реактора изучено подкрепляющее влияние металлоконструкций на напряженное состояние бетонного массива, проведен анализ граничного давления, исследована схема потери несущей способности конструкции.

Ключевые слова: железобетонные пространственные конструкции, нелинейное деформирование, зоны разрушения, методконечных элементов, крышка корпуса реактора.

Bazhenov V.A., Lizunov P.P., Solodei I.I.

THE COMPUTATION OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES ON THE BASIS OF THE EVOLUTION OF REINFORCEMENT INTERACTION WITH CONCRETE

In the process of reactor pressure vessel analysis the metal construction effect on stress state of the concrete panel is investigated, critical pressure analysis is done, the schema of structure destruction is studied.

Key words: reinforced concrete 3D structure, nonlinear deformation, areas of fracture, finite element method, closure headassembly.

УДК 539.3

В.А. Баженов¹, д-р техн. наук
О.В. Шишов¹, канд. техн. наук

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

ЗАСТОСУВАННЯ СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ ПРИ ВИКЛАДАННІ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

На кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури для проведення поточного та модульного контролів з дисципліни «Будівельна механіка» застосовується оригінальний програмний комплекс КОНТРОЛЬ. Розглядається структура програмного комплексу та особливості його впровадження у навчальний процес.

Ключові слова: будівельна механіка, комплекс, тестування, знання, студенти.

Вивчення будівельної механіки пов'язане з освоєнням значного об'єму навчального матеріалу і з великим обсягом обчислень, які необхідні для виконання учбових завдань і розрахункових робіт. З цієї причини в індивідуальних роботах розглядаються, як правило, достатньо прості розрахункові схеми. Використання спеціалізованих програмних засобів, які базуються на сучасних комп'ютерних технологіях дозволяє контролювати процес засвоєння навчального матеріалу, зменшувати обсяг обчислювальних операцій і проводити розрахунки достатньо складних об'єктів.

Процес навчання складається з пред'явлення навчальної інформації, виконання розрахункових робіт і в контролі якості і об'єму засвоєної інформації. На кафедрі будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури спеціальні навчальні засоби використовуються на всіх етапах навчання.

Програмні продукти, на яких базується процес навчання, можна розділити на три види: стандартне програмне забезпечення, спеціалізовані навчальні програми та електронна допомога, а також широко поширені в проектній практиці програмні комплекси.

Стандартне програмне забезпечення включає програмні продукти, які забезпечують функціонування комп'ютерів (ОС Windows), а також використовуються для підготовки документації (Microsoft Office, AUTOCAD, Adobe Reader, архіватори, електронні перекладачі, засоби комп'ютерної графіки і тому подібне).

Спеціалізоване програмне забезпечення процесу навчання складається з оригінальних програм, розроблених викладачами кафедри, і включає

електронний підручник з будівельної механіки, програмний комплекс АСИСТЕНТ, який використовується для виконання розрахункових робіт, і комплекс КОНТРОЛЬ, що здійснює перевірку знань студентів.

За останні роки кафедрою видано декілька підручників і навчальних посібників по курсу будівельної механіки [1,2], які успішно використовуються у навчальному процесі. Зокрема, в 2007-2008 рр. у рамках Державної програми "Інформаційні і комунікаційні технології в освіті і науці" підготовлений україномовний електронний підручник з будівельної механіки.

Підручник змістовно повністю відповідає програмі бакалаврів будівництва і містить 28 глав, які згруповано у восьми розділах:

1. Основні поняття принципи і рівняння будівельної механіки стержневих систем.
2. Розрахунок стержневих систем методом скінчених елементів.
3. Розрахунок статично визначуваних систем.
4. Розрахунок статично невизначуваних систем.
5. Основи динаміки і стійкості споруд.
6. Метод скінчених елементів для двовимірних систем.
7. Розрахунок на рухоме навантаження.
8. Навчальні програмні комплекси.

Підручник підготовлений у форматі PDF (Portable Document Format) і є системою файлів, зв'язок між якими здійснюється за допомогою гіперпосилань. На рис. 1 показаний фрагмент сторінки із змістом одного з розділів. Переміщення по тексту розділу здійснюється за допомогою гіперпосилань або простим гортанням сторінок.

Особливістю підручника є те, що викладення матеріалу кожного розділу представлено в двох видах: докладне викладання, яке супроводжується докладним представленням теоретичного матеріалу і числовими прикладами, та скорочене, де приводяться тільки основні положення, а числові приклади відсутні. Інакше кажучи, підручник є двошаровим. Користувач вибирає той чи інший спосіб викладення (шар) безпосередньо в процесі роботи з підручником.

Друга особливість підручника полягає в тому, що він спирається на програмний навчальний комплекс АСИСТЕНТ.

Упродовж багатьох років у навчальному процесі кафедрою будівельної механіки використовується оригінальний програмний начально-дослідницький комплекс АСИСТЕНТ, призначений для засвоєння студентами основних тем курсу будівельної механіки, для виконання розрахункових робіт, а також для статичних і динамічних розрахунків у курсових і дипломних проектах.

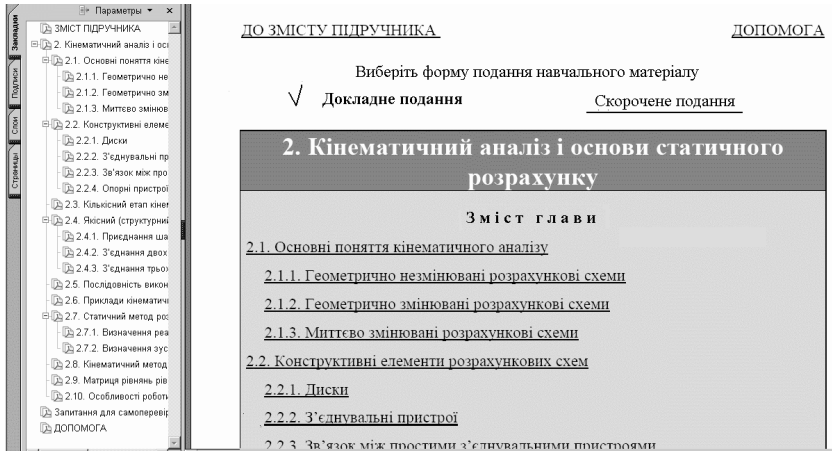


Рис. 1

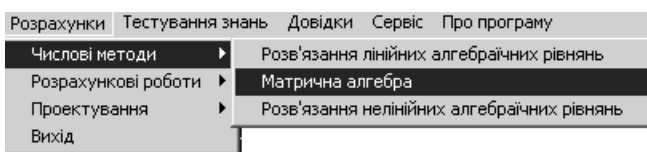
Управління роботою комплексу здійснюється за допомогою спадних меню, розташованих у верхньому рядку головного вікна (рис. 2).



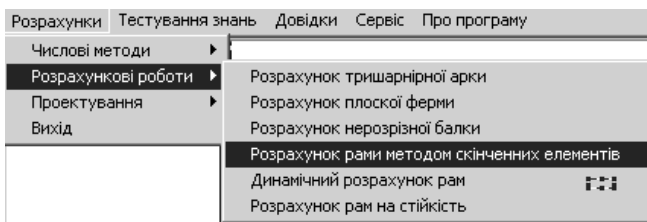
Рис. 2

Вибір курсором миші того чи іншого пункту меню приводить до розкриття підміну програмних засобів, призначених для виконання тих або інших дій. Так, вибір пункту **Розрахунки** розкриває підміну нижнього рівня, в яких прикладні програми згруповані за функціональним призначенням. При цьому в робоче вікно виводиться список програм, які реалізують розв'язання задач відповідного розділу.

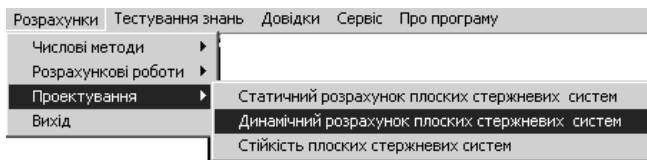
Зокрема, вибір пункту **Числові методи** (рис. 3,а) дозволяє розв'язувати системи лінійних рівнянь алгебри, задачі матричної алгебри (складання, віднімання, множення, транспонування матриць, обчислення визначників і власних значень матриць і тому подібне), обчислювати корені нелінійних алгебраїчних рівнянь.



a



б



в

Рис. 3

Вибір пункту **Розрахункові роботи** виводить список прикладних програм для виконання розрахункових робіт (рис. 3,б). Всі програми цього розділу засновані на загальній методиці, яка полягає в поєднанні "ручних" і комп'ютерних розрахунків. Фрагменти проміжних обчислень для даного конкретного завдання виконуються вручну і результати

вводяться у відповідні поля діалогового вікна. Якщо введені дані не збігаються з комп'ютерними, програма виводить повідомлення щодо можливої причини помилки. Якщо ж ручні і комп'ютерні результати збігаються, то програма переходить до перевірки наступних фрагментів розрахунку. Якщо результати всіх перевірок позитивні, в робоче вікно виводяться остаточні числові і графічні результати (таблиці і епюри зусиль, головні форми коливань і т. п.). Числові результати можна роздрукувати на принтері.

Як приклад показано робочі вікна програм динамічного розрахунку рами (рис. 4,а) та розрахунку рам методом скінчених елементів (рис. 4,б) після введення початкових даних і результатів "ручних" розрахунків, коли всі перевірки пройдені успішно.

Слід зазначити, що кожна з прикладних програм для виконання розрахункових робіт має свою базу розрахункових схем, які індивідуалізуються за рахунок варіювання розмірів і величин навантажень.

Вибір пункту **Проектування** (рис. 3,в) дозволяє завантажити прикладні програми для розрахунку стержневої системи на статику, динаміку або стійкість. Програми призначені для виконання розрахунків, порівняно, нескладних схем у курсових і дипломних проектах і видають графічні і числові результати без проміжних перевірок. Проте перед початком розрахунку необхідно за певними правилами задати вхідну інформацію, яка визначає комп'ютерну модель розрахункової схеми.

Окрім вказаних прикладних програм, комплекс АСИСТЕНТ містить допоміжні програми: короткий довідник з будівельної механіки, програму перевірки знань, спеціалізований калькулятор, програму обчислення спеціальних функцій для розрахунку стержневих систем на стійкість і т. д.

Електронний підручник і комплекс АСИСТЕНТ розміщені на сторінці кафедри будівельної механіки на WEB-сайті Київського національного університету будівництва і архітектури (www.knuba.edu.ua). Кожен із зазначених програмних продуктів може бути встановлений на комп'ютері окремо і функціонувати автономно. Якщо ж на комп'ютері встановлено обидва продукти, то з електронного підручника можна безпосередньо звертатися до комплексу АСИСТЕНТ. Таким чином, підручник і програмний комплекс утворюють єдину систему.

Для поточного і модульного контролю знань студентів використовується розроблений на кафедрі програмний комплекс КОНТРОЛЬ. Комплекс призначений для роботи в мереженому режимі. Всі програми і файли комплексу розташовані на кафедральному сервері, а всі комп'ютери локальної мережі відіграють роль робочих станцій.

ДИНАМІЧНИЙ РОЗРАХУНОК РАМИ

Завдання Калькулятор Про програму

Схема
Номер схеми: 12
Вести

Види даних
Параметр ширини L = 5
Параметр висоти h = 4
Маса m1 = 3
Маса m2 = 2
Амплітуда сили P0 = 10
 $\theta / \omega 1 = 0.8$

Номера шарнірних вузлів
Вузол 3
Вузол 6
Вузол 7
Вузол 8
Вести

Форма 2

Напрями можливих перещебень
Y1: N вузла У правий бок U вузла У лівий бок Угору Униз
Y2: N вузла У правий бок U вузла У лівий бок Угору Униз

Матриця податливості
274 -49.2
-49.2 19.0
Вести

Форми коливань
1
2

Динамічні епюри
M Q N
Вести

Результати
Таблиця Принтер
Вихід

Старше власне число: 1689.023
Вести

Амплітудні сили інерції
Вузли Fx Fy
4 -4.8 -1.04
5 -4.8 0
8 0 -0.7
Вести

а

ПЕРЕВІРКА РОЗРАХУНКУ ПЛОСЬКОЇ СТЕРЖНЕВОЇ СИСТЕМИ МЕТОДОМ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Схема раи Калькулятор Про програму

Схема
Номер схеми: 17
Вести

Види даних
Параметр ширини L = 5
Параметр висоти h = 6
Сила P1 = 2
Сила P2 = 0
Інтенсивність q1 = 2
Інтенсивність q2 = 8
Номер стовпця матриці жорсткості: 9
Вести

Бюро М

У стовпець матриці жорсткості
K(6,9) = 0.8 Правильно
K(7,9) = -0.167 Правильно
K(8,9) = -0.27 Правильно
K(9,9) = 4.27 Правильно
K(1,9) = 0.75 Правильно
K(1,9) = 0 Правильно
K(1,9) = 0 Правильно
Вести

Вивести епюри
M Q N
Перевірити
Матрицю жорсткості Вузлові сили Зусилля в стержнях
Звернутися перевірку Закінчити

Числові результати
*** ЗУСИЛЛЯ В СТЕРЖНЯХ ***
Друквати

	Ст.	Мп	Мс	Мж	Оп	Ок	Нп	Нк
01-02	-0.4568	-2.3715	-4.2862	-0.6382	-0.6382	-0.4109	-0.4109	
02-03	-9.2591	+4.3640	+5.4872	+7.9492	-2.0507	-1.8946	-1.8946	
03-04	+5.6385	+5.8329	-5.9727	+3.0971	-8.9028	-1.7645	-1.7645	

б

Рис. 4

Сервер дозволяє користувачам локальної мережі мати доступ до файлів, розміщених на носіях інформації сервера. В процесі роботи частина логічного дискового простору робочої станції є відображенням частини дискового простору сервера. Основна обробка і пошук інформації для користувача будь-якої робочої станції здійснюється на

сервері. Функції клієнтської частини на робочій станції зводяться до введення даних і відображення результатів. Таким чином, робоча станція (комп'ютер користувача) лише забезпечує доступ до обчислювальних ресурсів сервера, тобто працює в режимі видаленого терміналу.

Головне вікно програми може мати два вигляди. Вигляд вікна автоматично вибирається програмою залежно від виду відповіді на тестове питання. Так, якщо відповідь на тестове запитання повинна бути вибрана зі списку запропонованих, тобто носить вибіркового характер (це, як правило, теоретичні запитання), вікно набуває вигляд, показаний на рис. 5,а.

Якщо ж відповідь має фіксований характер (як правило, це числовий результат розрахунку, який необхідно виконати в процесі тестування), то головне вікно автоматично перебудовується до вигляду, представленого на рис. 5,б.

Матеріал дисципліни "Будівельна механіка" розбитий на 13 модулів (тем). Тестування здійснюється перевіркою відповідей на тестові білети для вибраної теми. Білети вибираються програмою випадковим чином, причому програма відстежує номери білетів, що пред'являлися користувачеві при попередніх тестуваннях і не допускає їх повторного пред'явлення.

Кількість запитань у тестовому білеті може коливатися від 5 до 10. Введені відповіді аналізуються програмою шляхом порівняння з еталонними відповідями. Наприкінці тестування програма повідомляє інтегральну оцінку знань з вибраної теми.

Комплекс виконує наступні дії:

- Дозволяє вибрати певну тему для тестування.
- Вибирає випадковим чином тестовий білет для вибраної теми.
- Дає студенту можливість вибирати у будь-якому порядку питання білета і виводить на екран тестові запитання, рисунки і, у разі потреби, варіанти можливих відповідей.
- За певними правилами підраховує кількість набраних балів і залежно від їхньої кількості виставляє оцінку знанням і умінням студента з обраної теми.
- Дозволяє в процесі тестування запускати допоміжні програми (калькулятор, програму розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, короткий довідник з будівельної механіки і т.п.). Ці програми викликаються безпосередньо з головного вікна програми за допомогою меню.
- Автоматично створює, зберігає і оновлює файли результатів, файли статистики для кожної академгрупи, а також файл загальної статистики для всіх академгруп.
- Відстежує своєчасність проведення тестування і автоматично знижує оцінку, якщо тестування відбувається пізніше визначеного терміну.

- Дозволяє викладачам переглядати результати тестування.

Тема: Допомога Довідка

Шифр групи: ПЦБ-Б1

Прізвище І.Б.: СИМОНОВ

Пароль: ****

Вибирайте запитання

1 2 3 4 5

Ввод

Не знаю Відкласти

Запитання

У наведених на рисунку шарнірно-нерухомих опорах виникають ...

Варіанти відповідей:

... лише горизонтальна силова реакція

... горизонтальна і вертикальна силові реакції

... горизонтальна і вертикальна силові реакції та момент

... лише вертикальна силова реакція

Перше запитання

Залишилось: 39 хв.

а

Тема: Допомога Довідка

Шифр групи: ПЦБ-Б1

Прізвище І.Б.: СИМОНОВ

Пароль: ****

Вибирайте запитання

3 4 5

Ввод

Не знаю Відкласти

Запитання

Чому дорівнює ступінь геометричної змінюваності розрахункової схеми?

Відповідь:

13

Відповідь неправильна

Залишилось: 38 хв.

б

Рис. 5

Програмні комплекси АСИСТЕНТ і КОНТРОЛЬ двомовні. За другу мову прийнята російська. Студент вибирає мову безпосередньо в процесі роботи з комплексами.

У результаті використання зазначених спеціалізованих навчальних засобів при вивченні курсу будівельної механіки досягається, по-перше, ускладнення схем, що підлягають розрахунку, без скільки-небудь помітного збільшення трудомісткості, по-друге, підвищується достовірність результатів і, нарешті, по-третє, студенти опановують основні прийоми роботи з програмними комплексами, без яких на даний час не обходиться розробка проектів інженерних споруд.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання. Підручник - К.: ВІПОЛ, 2013. – 896 с.
2. *Баженов В.А., Іванченко Г.М., Шишов О.В., Пискунов С.О.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник. – К.: Каравела, 2010 – 504 с.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Perel'muter A.V., Shyshov O.V.* Budivel'na mekhanika. Komp'yuterni tekhnolohiyi i modelyuvannya (Structural Mechanics. Computer technology and modeling). - K.: VIPOL, 2013. – 896 p.
2. *Bazhenov V.A., Ivanchenko H.M., Shyshov O.V., Pyskunov S.O.* Budivel'na mekhanika. Rozrakhunkovi vpravy. Zadachi. Komp'yuterne testuvannya. Navchal'nyy posibnyk (Structural Mechanics. Calculated exercise. Problem. Computer testing). - K.: Karavela, 2010. – 504 p.

Стаття надійшла до редакції 23.01.2014 р.

Баженов В.А., Шишов О.В.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ТЕКУЩЕГО И МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»

На кафедре строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры для проведения текущего и модульного контролей по дисциплине «Строительная механика» используется оригинальный программный комплекс КОНТРОЛЬ. Рассматривается структура программного комплекса и особенности его использования в учебном процессе.

Ключевые слова: строительная механика, комплекс, тестирование, знания, студенты.

Bazhenov V.A., Shishov O.V.

AUTOMATION OF CURRENT AND MODULE CONTROL OF KNOWLEDGES OF DISCIPLINE «STRUCTURAL MECHANICS»

Original program complex CONTROL is exploited at the department of structural mechanics of Kiev national university of construction and architecture for the purpose of current and module controls of knowledge in the field of Structural mechanics. The structure of program complex and specific of its use in an educational process are examined.

Keywords: structural mechanics, complex, testing, knoweledges, students.

УДК 539.3

О.І. Гуляр¹, д-р. техн. наук
 С.О. Пискунов¹, д-р. техн. наук
 О.О. Шкриль¹, канд. техн. наук

¹Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
 Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

ПРИЗМАТИЧНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

На основі НМСЕ розроблено новий призматичний скінченний елемент з перемінною площею поперечного перерізу вздовж твірної, який за рахунок чисельного інтегрування повністю враховує змінність всіх величин в поперечному перерізі. Виявлено, що розроблений варіант СЕ дозволяє отримувати достовірні результати для призматичних тіл із змінною площею поперечного перерізу вздовж твірної.

Ключові слова: просторова задача, напіваналітичний метод скінчених елементів, матриця жорсткості, чисельне інтегрування, пружне деформування.

Вступ. Ефективність використання СЕ комплексів значною мірою визначається різноманітністю СЕ бази. В даній роботі реалізовано варіант скінченного елемента, матриця жорсткості і вузлові реакції якого визначаються на основі чисельного інтегрування в області поперечного перерізу.

1. Скінченний елемент з чисельним інтегруванням в поперечному перерізі. Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи N СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^N (\delta W_n - \delta A_n) = 0.$$

Варіація енергії деформації одного призматичного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\epsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.1)$$

Представимо фізичні деформації через ненормовані коефіцієнти розкладу деформацій в ряд Маклорена з урахуванням змінності компонент метричного тензора в поперечному перетині СЕ

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \xi_{ij};$$

де

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) x^{(3-\alpha)}; \quad \xi_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \\ \xi_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \left(\overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right) x^{(3-\alpha)}; \\ \xi_{33} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) x^{\alpha}. \end{aligned}$$

Тоді формулу (1.1) із використанням нефізичних компонентів напружень та деформацій представимо в матричному вигляді

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta \{ \xi \}^T \{ \sigma \} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.2)$$

де

$$\begin{aligned} \{ \xi \}^T &= \{ \xi_{11} \quad 2\xi_{12} \quad \xi_{22} \quad 2\xi_{23} \quad 2\xi_{13} \quad \xi_{33} \}, \\ \{ \sigma \} &= \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{33} \}. \end{aligned}$$

Співвідношення (2.11) [1], що описують залежність між ненормованими компонентами деформацій – складовими коефіцієнтів розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами (2.3) [1], у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\{ \xi \} = \sum_{l=0}^L \left([B_1] \varphi^{(l)} + [B_2] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u_l \};$$

де

$$\begin{aligned} \{ u \}_l^T &= \{ u_{l(-1,-1)}^T u_{l(1,-1)}^T u_{l(-1,1)}^T u_{l(1,1)}^T \}; \\ \{ u \}_{l(S_1, S_2)}^T &= \{ u_{1(S_1, S_2)}^l \} \{ u_{2(S_1, S_2)}^l \} \{ u_{3(S_1, S_2)}^l \}; \\ [B_\alpha] &= \left[[B_\alpha]^{(-1,-1)} \quad [B_\alpha]^{(1,-1)} \quad [B_\alpha]^{(-1,1)} \quad [B_\alpha]^{(1,1)} \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Склад матриць $[B_\alpha]^{(S_1, S_2)}$ є наступним:

$$\left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + (B_1)_1 x^2 & \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime 2} + (B_1)_2 x^2 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} \right) & \frac{1}{2} \left(S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime 2} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} + (B_1)_3 x^1 & \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} + (B_1)_4 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} S_1 + (B_1)_5 x^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} S_2 + (B_1)_6 x^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де

$$(B_1)_1 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + \frac{S_1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} h_{11,2};$$

$$(B_1)_2 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime 2} + \frac{S_1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime 2} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} h_{11,2};$$

$$(B_1)_3 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} + \frac{S_2}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} h_{11,2};$$

$$(B_1)_4 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} + \frac{S_1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime 2} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} h_{11,2};$$

$$(B_1)_5 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} - \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} h_{11,2};$$

$$(B_1)_6 = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} - \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} h_{22,1}.$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + (B_2)_1 x^2 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime 2} + (B_2)_2 x^2 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime} + (B_2)_3 x^1 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{\prime 2} + (B_2)_4 x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}^{\prime 3} + (B_2)_5 x^1 + (B_2)_6 x^2 \end{bmatrix},$$

де

$$(B_2)_1 = \frac{1}{4} \left(2S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} + \overset{\circ}{z}_{,12}^{\prime} \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\prime} h_{11,2};$$

$$(B_2)_2 = \frac{1}{4} \left(2S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\circ 2'} + \overset{\circ}{z}_{,12}^{\circ 2'} \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\circ 2'} \overset{\circ}{h}_{1,2};$$

$$(B_2)_3 = \frac{1}{4} \left(2S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{\circ 1'} + \overset{\circ}{z}_{,12}^{\circ 1'} \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\circ 1'} \overset{\circ}{h}_{1,2};$$

$$(B_2)_4 = \frac{1}{4} \left(2S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{\circ 2'} + \overset{\circ}{z}_{,12}^{\circ 2'} \right) - \frac{1}{8} \overset{\circ}{z}_{,1}^{\circ 2'} \overset{\circ}{h}_{1,2};$$

$$(B_2)_5 = \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\circ 3'}; \quad (B_2)_6 = \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{\circ 3'}.$$

Підставляючи (1.3) в (1.2), запишемо варіацію енергії деформації елемента через переміщення $\{u\}$ та вузлові реакції $\{r_\sigma\}$:

$$\delta W = \delta \{u\}^T \{r_\sigma\}, \quad (1.4)$$

де

$$\{r_\sigma\} = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.5)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента загального вигляду із змінними механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[[B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j H_k \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_k^3)}, \quad (1.6)$$

де I, J, K - кількість точок інтегрування по x_i^1, x_j^2, x_k^3 , відповідно, H_i, H_j, H_k - вагові функції, x_i^1, x_j^2, x_k^3 - координати точок інтегрування.

Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (1.7)$$

де

$$[D] = \begin{bmatrix} D^{1111} & D^{1112} & D^{1122} & D^{1133} \\ D^{1211} & D^{1212} & D^{1222} & D^{1233} \\ D^{2211} & D^{2212} & D^{2222} & D^{2233} \\ D^{3311} & D^{3312} & D^{3322} & D^{3333} \end{bmatrix}.$$

Елементи матриці $[D]$ визначаються згідно формул (2.7) [1].

Варіація енергії деформації можна записати як:

$$\delta W = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \delta\{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.8)$$

Поданою деформації через коефіцієнти розкладу переміщень, отримуємо:

$$\delta W = \delta\{u\}^T [k] \{u\}, \quad (1.9)$$

де $[k]$ - матриця жорсткості:

$$[k] = \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int_{x^3=-1}^{x^3=1} [B]^T [D] [B] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.10)$$

Використовуючи формулу чисельного інтегрування:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{\kappa=1}^K [B]^T [D] [B] \sqrt{g} H_i H_j H_\kappa \Big|_{(x_i^1, x_j^2, x_\kappa^3)}. \quad (1.11)$$

2. Контрольні приклади. Для обґрунтування достовірності розробленого підходу для призматичних тіл було розглянуто тестовий приклад про деформування в умовах плоскої деформації в площині $z^1 - z^3$ стержня зі змінною за лінійним законом площею поперечного перерізу (рис. 1). Зміна площі в даному випадку є тотожною зміні характерного розміру перерізу в напрямку в напрямку z^1 . Модуль пружності $E = 0.1 \text{ МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. В дискретній моделі МСЕ (рис. 2) розташування центрів СЕ вздовж вісі стержня збігається із розташуванням точок інтегрування в дискретній моделі НМСЕ. Дискретна модель НМСЕ утворена із використанням одного призматичного СЕ змінної площі поперечного перерізу і за виглядом повністю ідентична розрахунковій схемі.

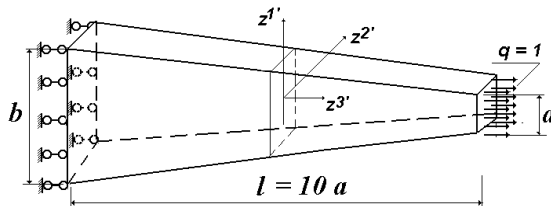


Рис. 1. Розрахункова схема призматичного стержня зі змінною площею поперечного перерізу в умовах розтягу

При розгляді розтягу стержня (рис. 1) співвідношення площ торцевих

перерізів прийнято 2:1 ($b=2a$, співвідношення прирощення розміру перерізу до довжини становило 1/10).

Отримані результати – розподілення напружень σ_{z^3} і переміщень U^3 вздовж вісі стержня (за напрямком $z^{2'}$ – в МСЕ і z^3 в НМСЕ) наведені на рис. 2. Із використанням МСЕ і НМСЕ отримані тотожні результати розподілення переміщень і напружень вздовж вісі СЕ, похибка визначення напружень і переміщень лежить в межах 1% .

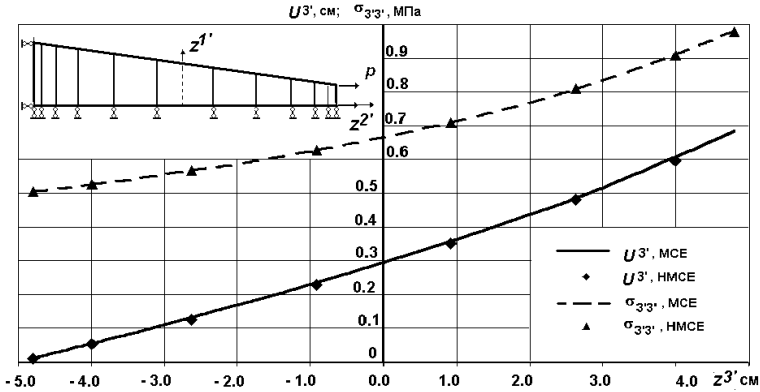


Рис. 2. Розподілення параметрів напружено-деформованого стану в стержні змінної площі поперечного перерізу

При розв'язанні тестової задачі про згин шарнірно обертої балки змінної площі поперечного перерізу під впливом розподіленого навантаження (рис. 3) співвідношення площ торцевих перерізів становило 1,5:1 ($b=1,5a$, співвідношення прирощення розміру перерізу до довжини становило 1/20).

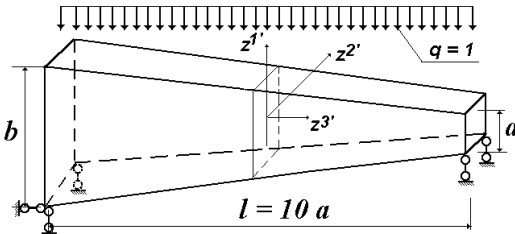


Рис. 3. Розрахункова схема призматичного стержня зі змінною площею поперечного перерізу в умовах згину

Використані при розв'язанні задачі дискретні моделі є такими ж, як і

випадку розтягу. Результати, отримані із використанням МСЕ і НМСЕ також добре узгоджуються, що підтверджується отриманими розподіленнями прогинів по довжині балки (рис. 4) і розподіленням напружень по висоті в найбільш навантаженому перерізі (рис. 5). Збільшення співвідношення площ перерізів до 2:1 (як у випадку розтягу) призвело до більших відмінностей у величинах максимальних напружень – до 10-12%.

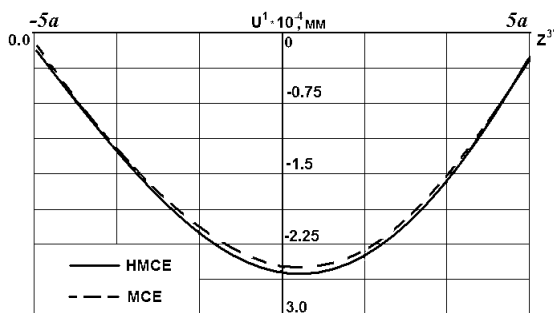


Рис. 4. Результати розподілу прогинів по довжині балки змінної площі поперечного перерізу при згині

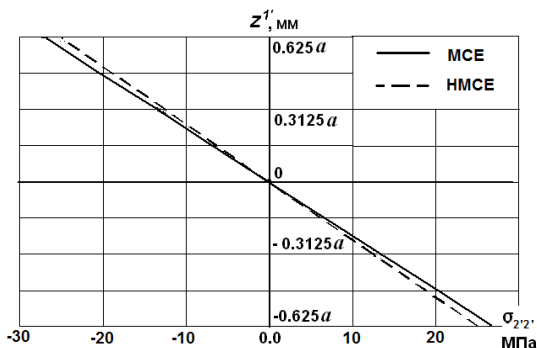


Рис.5. Розподілення напружень по висоті в найбільш навантаженому перерізі балки

Таким чином, отримані результати свідчать, що розроблені призматичні СЕ змінної площі поперечного перерізу дозволяють отримувати достовірні результати як для випадку розтягу так і для згину. Межі змінності площі, при якій отримувані результати є достовірними для випадку згину є обмеженими, тому використання цих СЕ в певних випадках потребує попереднього дослідження достовірності результатів.

На основі аналізу отримуваних розв'язків тестових задач вперше

показано, що урахування змінності визначника метричного тензора в напрямку утворюючої забезпечило достовірне визначення напружено-деформованого стану призматичних тіл із змінною площею поперечного перерізу при різних видах напруженого стану.

Таким чином, розроблений в даному розділі на основі НМСЕ апарат чисельного визначення напружено-деформованого стану просторових тіл із змінними фізико-механічними та геометричними параметрами дає можливість створення ефективних підходів до розв'язання задач дискретного руйнування неоднорідних призматичних просторових тіл складної конфігурації з довільними граничними умовами на торцях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкріль О.О.* Основні положення моментної схеми для напіваналітичного варіанта призматичного скінченного елемента // Опір матеріалів і теорія споруд, № 91, 2013. – С.3-12.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Hulyar O.I., Pyskunov S.O., Shkryl' O.O.* Osnovni polozhennya momentnoyi skhemy dlya napivanalitychnoho varianta pryzmatychnoho skinchennoho elementa (The main provisions of the scheme for the moment semianalytic option prismatic finite element) // Opir materialiv i teoriya sporud, # 91, 2013. – S.3-12

Стаття надійшла до редакції 27.01.2014 р.

Гуляр А.І., Пискунов С.О., Шкріль А.А.

ПРИЗМАТИЧЕСКИЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ НА ОСНОВЕ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

На основе полуаналитического метода конечных элементов создан новый конечный элемент с переменной площадью поперечного сечения вдоль образующей, который за счет численного интегрирования полностью учитывает переменность всех величин в поперечном сечении. Показано, что полученный вариант конечного элемента позволяет получать достоверные результаты для призматических тел с переменной площадью поперечного сечения вдоль образующей.

Ключевые слова: пространственная задача, полуаналитический метод конечных элементов, матрица жесткости, численное интегрирование, упругое деформирование.

Guliar A.I., Piskunov S.O., Shkryl' A.

PRISMATIC END ITEM ON THE BASIS OF MOMENT FINITE ELEMENTS SCHEMES

Based on the semianalytical finite element method, a new finite element with a variable cross-sectional area along a generator, which is due to take fully into account the numerical integration of the variability of all the variables in cross-section. It is shown that the resulting variant finite element allows to obtain reliable results for the prismatic bodies with variable cross-sectional area along a generatrix.

Keywords: spatial problem semianalytic finite element method, stiffness matrix, numerical integration, the elastic deformation.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона¹, канд. техн. наукА.А. Козак¹О.С. Черненко¹

¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО НДС ПРУЖНИХ МАСИВІВ

Запропоновано та реалізовано наближений підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегральних рівнянь в задачах про двовимірні гармонічні коливання пружних масивних об'єктів. Показана працездатність такого підходу при визначенні компонент ядер інтегральних рівнянь в широкому діапазоні частот. Наведено приклад застосування розробленої чисельної методики.

Ключові слова: граничні інтегральні рівняння, сингулярність, двовимірні періодичні коливання, функції Ганкеля.

Наявність в складі сучасних будівельних конструкцій масивних елементів складної форми та прагнення до зниження їх матеріалоемності зумовлюють розвиток сучасних чисельних методів розрахунку таких елементів на впливи різної природи. Важливе місце серед сучасних універсальних методів чисельного аналізу конструкцій займає метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), який дозволяє знайти амплітуди переміщень і напружень на границі, не піддаючи дискретизації саму розрахункову область. Оскільки при вивченні напружено-деформованого стану (НДС) масивів досить часто трапляються випадки, коли достатньо знати переміщення і напруження тільки на границі та в деякій обмеженій кількості точок всередині розрахункової області, то відповідно коло задач, для розв'язання яких може ефективно застосовуватись метод ГІР, є досить широким [1, 2]. В той же час алгоритми, які чисельно реалізують цей метод для розв'язання задач динаміки, ще потребують допрацювання і вдосконалення.

В даній статті наводяться результати роботи по створенню і застосуванню ефективної чисельної методики для дослідження вимушених усталених коливань пружних двовимірних об'єктів складної форми. В якості алгоритмічної основи обчислювального процесу використовується граничний аналог формули Соміліани для амплітуд переміщень, які виникають при двовимірних гармонічних коливаннях:

$$\frac{1}{2}u_j^*(\vec{x}, \omega) = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k^*(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y, \quad j, k = 1, 2, \quad (1)$$

де $u_j^*(\vec{x}, \omega)$ – j -а компонента комплексної амплітуди коливань з круговою частотою ω ; $\vec{x}\{x_1, x_2\}, \vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$; Γ – границя області V ;

$\tau_j^*(\vec{y}, \omega) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial u_m^*(\vec{y}, \omega)}{\partial x_m} + \mu \left(\frac{\partial u_j^*(\vec{y}, \omega)}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k^*(\vec{y}, \omega)}{\partial y_j} \right) n_k(\vec{y})$ – компоненти

комплексної амплітуди напружень на площинці з нормаллю $\vec{n}\{n_1, n_2\}$;

$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ – фундаментальний розв'язок задачі (амплітуди переміщення в пружному двовимірному просторі від дії зосередженої сили, одиничної амплітуди, яка прикладена в точці \vec{x} в напрямку осі Ox_j) [2]:

$$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \frac{i}{4\mu} \left[\delta_{jk} U_0(r, \omega) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega) \right]; \quad (2)$$

$$U_0(r, \omega) = H_0^{(1)}(k_1 r) - \frac{H_1^{(1)}(k_2 r)}{k_2 r} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(k_1 r)}{k_1 r}; \quad (3)$$

$$U_2(r, \omega) = H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r); \quad (4)$$

$$k_j = \frac{\omega}{C_j}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad \alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r};$$

$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ – відстань між точками \vec{x} і \vec{y} ; ρ – густина

матеріалу; λ і μ – константи Ламе; $H_k^{(1)}$ – функція Ганкеля 1-го роду

порядку k ; $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ – узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили [3]:

$$T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_m} + \mu \left(\frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_m} \right) n_m(\vec{y}) =$$

$$= \frac{i}{4} \left[r_{,k} n_j T_1 + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right]; \quad (5)$$

$$T_1 = \frac{2}{r} \left[H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right] - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} k_1 H_1^{(1)}(k_1 r); \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{1}{r} \left[2H_2^{(1)}(k_2 r) - k_2 r H_1^{(1)}(k_2 r) - 2\alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right]; \quad (7)$$

$$T_3 = \frac{2}{r} \left[k_2 r H_1^{(1)}(k_2 r) - 4H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha k_1 r H_1^{(1)}(k_1 r) + 4\alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right]. \quad (8)$$

Чисельна процедура розв'язання системи ГПР (1) базується на представленні границі розрахункової області сукупністю граничних

елементів (ГЕ), в межах кожного з яких задані точки колокації, а невідомі змінюються за призначеним законом. В результаті система (1) перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень незаданих граничними умовами переміщень і напружень у вузлах колокації. Коефіцієнти матриці системи обчислюються шляхом інтегрування по окремим ГЕ при послідовному суміщенні т. \bar{x} з кожним колокаційним вузлом. Ситуація значно ускладнюється, коли інтегрування проводиться по тому самому елементу, на якому розташована т. \bar{x} . В цьому випадку відстань між точками \bar{x} і \bar{y} може стати нескінченно малою, а підінтегральні вирази набути нескінченно великих значень, що робить неможливим безпосереднє обчислення діагональних коефіцієнтів алгебраїчного аналога системи. Для подолання вказаної перешкоди функції Ганкеля, що входять до складу ядер ГР, наближено замінюються початковими відрізками ряду Маклорена. При цьому компоненти ядер набувають вигляду сум, перший доданок яких виявляється рівним компоненті відповідного статичного потенціалу, тоді як інші доданки при $r = 0$ мають скінченні значення:

$$\begin{aligned}
 U_0(r, \omega) = & \frac{i}{\pi} \left\{ (1+\alpha) \ln(r) + \frac{1-\alpha}{2} + \gamma(1+\alpha) + \alpha \ln\left(\frac{k_1}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2}{2}\right) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\gamma(3+\alpha^2) - \frac{11+5\alpha^2}{4} + \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + 3 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\gamma(5+\alpha^3) - \frac{22+5\alpha^2}{3} + \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + 5 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{(1+\alpha)}{2} - \left(\frac{k_2 r}{4}\right)^2 \left[(3+\alpha^2) - \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (5+\alpha^3) \right] + O(r^6), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_2(r, \omega) = & \frac{i}{\pi} \left\{ (\alpha-1) + \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\left(\gamma - \frac{3}{4}\right) (1-\alpha^2) - \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\left(\gamma - \frac{17}{12}\right) (1-\alpha^3) - \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[(1-\alpha^2) - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (1-\alpha^3) \right] + O(r^6), \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1(r, \omega) = & \frac{i}{\pi r} \left\{ -2\alpha + \frac{1}{2} (rk_2)^2 \left[\gamma(1-2\alpha+3\alpha^2) - \frac{3-4\alpha+5\alpha^2}{4} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \alpha(2-3\alpha) \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (\gamma(1-3\alpha^2+5\alpha^3) - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$-\frac{17-45\alpha^2+73\alpha^3}{12}-\alpha^2(3-5\alpha)\ln\left(\frac{k_1r}{2}\right)+\ln\left(\frac{k_2r}{2}\right)\Bigg\}+ \\ +r\left(\frac{k_2}{2}\right)^2\left[(1-2\alpha+3\alpha^2)-\frac{1}{3}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^2(1-3\alpha^2+5\alpha^3)\right]+O(r^5), \quad (11)$$

$$T_2(r, \omega) = \frac{i}{\pi r} \left\{ 2\alpha + \frac{1}{2}(rk_2)^2 \left[-\gamma(1+\alpha^2) + \frac{1+3\alpha^2}{4} - \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1r}{2}\right) - \ln\left(\frac{k_2r}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^2 \left(-\gamma(2+\alpha^3) + \frac{28+17\alpha^3}{12} - \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1r}{2}\right) - 2 \ln\left(\frac{k_2r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\ -r\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 \left[(1+\alpha^2) - \frac{1}{3}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^2 (2+\alpha^3) \right] + O(r^5), \quad (12)$$

$$T_3(r, \omega) = \frac{i}{\pi r} \left\{ 4(1-\alpha) + \frac{1}{2}(rk_2)^2 \left[(1-\alpha^2) + \frac{1}{6}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^2 \left(\frac{11-12\gamma}{3}(1-\alpha^3) + 4\alpha^3 \ln\left(\frac{k_1r}{2}\right) - 4 \ln\left(\frac{k_2r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\ + \frac{k_2}{3}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^3 (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2) + O(r^5), \quad \gamma=0.5772156649 \text{ - ейлерова стала.}$$

Оскільки інтегрування ядер статичної задачі труднощів не викликає, то проблему алгебраїзації системи ГР можна вважати вирішеною, і лишається тільки з'ясувати межі застосування наближених представлень (9) – (13). Для цього кожен з компонент ядер обчислюємо при різних значеннях аргументів безпосередньо за однією з формул (3) – (7), а потім – за відповідним наближеним представленням, утримуючи один, або два, або три члени ряду. Результати обчислень містяться в таблицях 1-5, причому значення параметра N відповідає кількості утриманих членів ряду в наближеному представленні.

Таблиця 1

k_2r	$\text{Re}U_0(r, \omega)$				$\text{Im}U_0(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	0.643	0.643	0.643	0.643	-1.592	-1.592	-1.592	-1.592
0.2	0.635	0.643	0.635	0.635	-0.636	-0.649	-0.636	-0.636
0.5	0.596	0.643	0.595	0.596	-0.222	-0.274	-0.221	-0.222
1.0	0.463	0.643	0.450	0.463	0.126	0.093	0.139	0.126
1.5	0.272	0.643	0.210	0.276	0.309	0.175	0.355	0.305

Таблиця 2

$k_2 r$	$\text{Re}U_2(r, \omega)$				$\text{Im}U_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$4.6 \cdot 10^{-5}$	0.	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-5}$	-0.228	-0.227	-0.228	-0.228
0.2	$4.6 \cdot 10^{-3}$	0.	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	-0.234	-0.227	-0.234	-0.234
0.5	0.028	0.	0.029	0.028	-0.254	-0.227	-0.255	-0.254
1.0	0.105	0.	0.115	0.105	-0.277	-0.227	-0.287	-0.277
1.5	0.210	0.	0.258	0.207	-0.261	-0.227	-0.294	-0.258

Таблиця 3

$k_2 r$	$\text{Re}T_1(r, \omega)$				$\text{Im}T_1(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$3.4 \cdot 10^{-5}$	0.	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$	-0.091	-0.091	-0.091	-0.091
0.2	$3.4 \cdot 10^{-3}$	0.	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	-0.096	-0.091	-0.096	-0.096
0.5	0.0205	0.	0.021	0.0205	-0.108	-0.091	-0.109	-0.108
1.0	0.0754	0.	0.084	0.0751	-0.118	-0.091	-0.216	-0.118
1.5	0.147	0.	0.189	0.143	-0.093	-0.091	-0.121	-0.090

Таблиця 4

$k_2 r$	$\text{Re}T_2(r, \omega)$				$\text{Im}T_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	0.	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	0.0911	0.0910	0.0911	0.0911
0.2	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	0.	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	0.0980	0.0910	0.098	0.0980
0.5	-0.0325	0.	-0.0338	-0.0325	0.114	0.0910	0.116	0.114
1.0	-0.115	0.	-0.135	-0.114	0.113	0.0910	0.130	0.112
1.5	-0.208	0.	-0.304	-0.198	0.048	0.0910	0.100	0.039

Таблиця 5

$k_2 r$	$\text{Re}T_2(r, \omega)$				$\text{Im}T_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$-3.3 \cdot 10^{-9}$	0.	0.	$-3.3 \cdot 10^{-9}$	0.455	0.455	0.455	0.455
0.2	$-3.2 \cdot 10^{-5}$	0.	0.	$-3.3 \cdot 10^{-5}$	0.458	0.455	0.458	0.458
0.5	$-1.3 \cdot 10^{-3}$	0.	0.	$-1.3 \cdot 10^{-3}$	0.474	0.455	0.473	0.474
1.0	-0.019	0.	0.	-0.020	0.540	0.455	0.528	0.541
1.5	-0.089	0.	0.	-0.103	0.648	0.455	0.619	0.659

Як свідчать дані, наведені в таблицях, в переважній кількості випадків при значеннях параметра $k_2 r \leq 1$ похибка обчислення компонент ядер за наближеними формулами не перевищує 1%, якщо у виразах (9)-(13) утримуються три члени ($N=3$). Таким чином, проблему обчислення діагональних коефіцієнтів матриці алгебраїчного аналога системи (1) можна вважати вирішеною.

Розглянемо задачу про двовимірний динамічний НДС ґрунтового масиву під трубопроводом у процесі його ущільнення двома плоскими поверхнями, що рухаються одна проти одної за напівсинусоїдальним законом із частотою $f=25$ Гц (рис. 1).

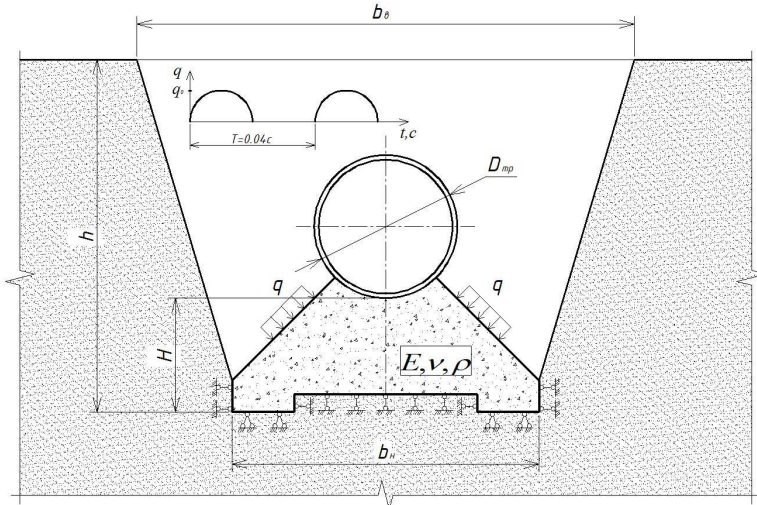


Рис. 1

Стінки траншеї мають значно більший модуль пружності, ніж масив ґрунту під трубою, тому їх поверхні вважаються недеформівними. Для діаметра трубопроводу $D_{tp}=1,22$ м висота ґрунтового масиву становитиме $H=0,82$ м; геометричні розміри траншеї $h=3,0$ м, $b_e=4,4$ м, $b_n=2,62$ м [4]. Механічні властивості насипного ґрунту характеризуються модулем пружності $E=20$ МПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu=0,3$ та густиною $\rho=1760$ кг/м³.

Відомо, що з технологічних причин підйом труби в процесі ущільнення є неприпустимим [5], тому мета розрахунку полягає перш за все в перевірці знаків вертикальних переміщень точок верхньої викривленої ділянки контуру. Розрахунок проводиться в два етапи. Впродовж першого етапу аналізуються усталені коливання пружного

масиву під дією тиску на бокові поверхні, що має вигляд періодичних імпульсів, причому в межах кожного періоду тривалістю $T=0,04$ с інтенсивність тиску змінюється за законом

$$q(t) = \begin{cases} q_0 \sin(\omega t), & nT < t \leq nT + \frac{T}{2} \\ 0, & nT + \frac{T}{2} < t \leq (n+1)T \end{cases}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

де $\omega = 2\pi f$, $q_0 = 0,2$ МПа.

Напівсинусоїдальний імпульс можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$q(t) = \frac{q_0}{\pi} \left[1 + \frac{\sin(\omega t)}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{4k^2 - 1} \right], \quad (15)$$

після чого задача зводиться до багаторазового розв'язання системи ГР (1) при різних значеннях частоти коливань $k\omega$.

Слід зазначити, що на верхню криволінійну поверхню ґрунтового масиву передаються додаткові вертикальні навантаження, спричинені силами інерції, що виникають внаслідок нерівномірного вертикального руху труби. Якщо прийняти наближену модель про заміну приєднаної маси труби незв'язаними між собою точковими масами, то в кожній точці зони контакту

$$\tau_2^{\partial\partial}(\bar{y}, t) = -m_{mp} \ddot{u}_2(\bar{y}, t),$$

де $m_{mp} = \frac{q_{mp}}{\Gamma_{on}}$; q_{mp} - погонна маса труби; Γ_{on} - довжина дуги кола,

вздовж якої відбувається контакт труби та ґрунтової основи.

Оскільки розв'язок задачі шукається у вигляді суми стаціонарних гармонічних станів, то в кожному такому стані

$$\tau_2^{\partial\partial}(\bar{y}, t) = -m_{mp} \omega^2 u_2^*(\bar{y}, t).$$

Таким чином, між додатковими інерційними навантаженнями і переміщеннями точок границі існує лінійна залежність. Тоді ГР (1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_j^*(\bar{x}, \omega) - \int_{\Gamma_{on}} u_k^*(\bar{y}, \omega) T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_{on}} u_k^*(\bar{y}, \omega) [T_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) - \\ - m\omega^2 U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega)] d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\bar{y}, \omega) U_{jk}(\bar{x}, \bar{y}, \omega) d\Gamma_y. \end{aligned} \quad (16)$$

Погонну масу труби знаходимо за формулою [4]:

$$q_{mp} = \pi [t_{mp} (D_{mp} - t_{mp}) \rho_{cm} + t_{iz} (D_{mp} - t_{iz}) \rho_{iz}],$$

де $t_{mp.} = 0,012$ м - товщина стінки трубопроводу; $\rho_{cm.} = 7800$ кг/м³ - густина матеріалу труби; $t_{iz.} = 0,03$ м - товщина ізоляційного шару; $\rho_{iz.} = 1100$ кг/м³ - густина ізоляції.

З урахуванням наведених значень масо $m_{mp.} = 480$ кг/м². Крім того, демпфірування, зумовлене внутрішнім тертям в матеріалі, враховується за так званою комплексною гіпотезою [6], причому коефіцієнт непружного опору дорівнює 0,12.

На рис. 2 наведений графік залежності від часу вертикального

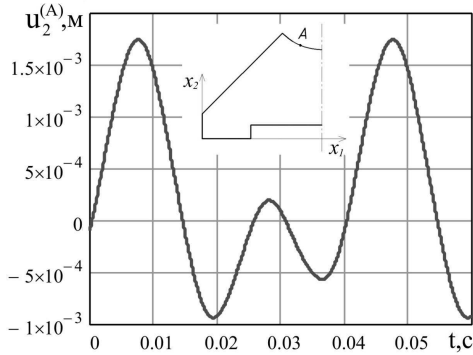


Рис. 2

переміщення в т. А на верхній викривленій ділянці контуру. Найбільшого значення $u_2 = 1,75 \cdot 10^{-3}$ м переміщення в цій точці досягає в момент часу $t = 0,0076$ с. В той же час другий етап розрахунку показав, що від дії власної ваги ґрунту та ваги трубопроводу точка А переміщується вниз на величину $1,92 \cdot 10^{-3}$ м, що

більше за значення, знайдене при динамічному розрахунку. Така сама картина спостерігається і в інших точках на верхній ділянці контуру. Отже, вимога щодо недопущення підйому труби задовольняється. На рис. 3 показані графіки залежності від часу напружень σ_{11} в точках на осі симетрії перерізу масиву. Бачимо, що найбільші значення напруження σ_{11} в усіх точках на вертикалі під центром труби спостерігаються в момент часу $t = 0,031$ с, коли $\sigma_{11}^{(B)} = 59,6$ кПа, $\sigma_{11}^{(C)} = 86,3$ кПа, а $\sigma_{11}^{(D)} = 107,7$ кПа. Зазначимо, що всі ці напруження є додатними, тобто відповідають розтягу.

З іншого боку, напруження в зазначених точках, спричинені дією власної ваги ґрунту та ваги трубопроводу є від'ємними і більшими за модулем ніж при динамічному розрахунку - $\sigma_{11}^{(B)} = 117,8$ кПа, $\sigma_{11}^{(C)} = 131,4$ кПа, $\sigma_{11}^{(D)} = 122,5$ кПа. Таким чином, сумарні напруження σ_{11} в точках під трубою є стискаючими, тобто ґрунт зазнає ущільнення.

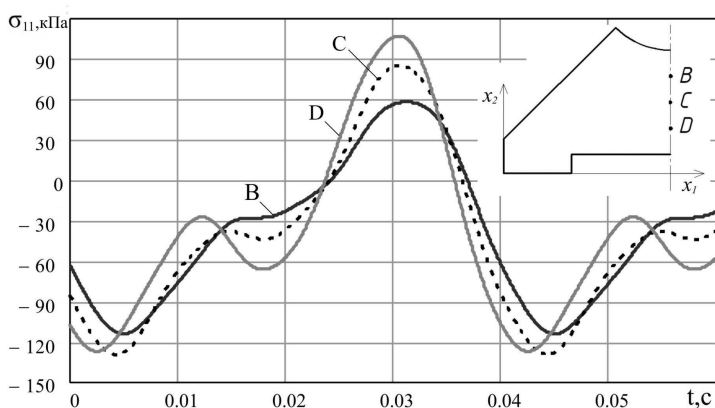


Рис. 3

Отже, наведені результати свідчать про те, що розроблена чисельна методика може бути успішно застосована для аналізу динамічного двовимірного НДС пружних масивів складної форми при періодичному навантаженні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бреббиа К., Теллес Ж., Вробел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. - 524 с.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
3. Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А. Дослідження за методом граничних інтегральних рівнянь усталених коливань пластин з послабленнями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 89.– С.158–164
4. Напружено-деформований стан будівельних матеріалів в технологічних процесах виробництва / Сівко В.Й., Поляченко В.А., Кузьмінєць М.П., Сівко Є.В., Науменко Ю.В. – К.: НТУ, 2010. – 352 с.
5. Технологія капітального ремонту магістральних нафтопроводів діаметром 530-1220 мм із заміною ізоляції без підняття трубопроводу з використанням машин підвищеної продуктивності. ВБН В.3.1-320.20077720.01-2001. – К.: НАК «Нафтогаз України», 2001. – 189 с.
6. Цетлин А.И., Кусаинов А.А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. – Алма-Ата: Наука, 1987. – 240 с.

REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Metody granichnykh elementov (Boundary Elements Techniques). М.: Mir, 1987. - 524 p.
2. Banerjee P.K., Butterfield R. Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh (Boundary Elements Methods in Engineering Science). – М.: Mir, 1984. – 494 p.
3. Vorona Yu.V., Chernenko O.S., Kozak A.A. Doslidzhennya za metodom granichnykh intehral'nykh rivnyan' ustalenykh kolyvan' plastyn z poslablennyamy (Boundary Integral

- Equation Method Analysis of Plates with Holes Steady Vibrations) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* – 2012. – Вип. 89.– P.158–164
4. Napruzhenno-deformovanyy stan budivel'nykh materialiv v tekhnolohichnykh protsesakh vyrobnytstv (Stress-Strain State of Building Materials in Processes of Production). Sivko V.Y., Polyachenko V.A., Kuz'minets' M.P., Sivko Ye.V., Naumenko Yu.V. – K.: NTU, 2010. – 352 p.
 5. Tekhnolohiya kapital'noho remontu mahistral'nykh naftoprovidiv diametrom 530-1220 mm iz zaminoyu izolyatsiyi bez pidnyattya truboprovodu z vykorystanniam mashyn pidvyshchenoyi produktyvnosti (Capital Repairs Technology of Trunk Pipelines of a 530-1220 mm Diameter with Insulation Replacement and without Pipeline Lifting using a High-Performance Machines). VBN V.3.1-320.20077720.01-2001. – K.: NAK «Naftohaz Ukrainy», 2001. – 189 p.
 6. Tseytlyn A.Y., Kusaaynov A.A. Metody ucheta vnutrenneho treniya v dynamycheskykh raschetakh konstruksyyi (Methods of Internal Friction Accounting in Dynamic Structural Analysis). – Alma-Ata: Nauka, 1987. – 240 p.

Стаття надійшла до редакції 28.01.2014 р.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.

ГРАНИЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО НДС УПРУГИХ МАССИВОВ

Предложен и реализован приближенный подход к вычислению сингулярных составляющих граничных интегральных уравнений в задачах про двумерные гармонические колебания упругих массивных объектов. Показана работоспособность такого подхода при определении компонент ядер интегральных уравнений в широком диапазоне частот. Приведен пример применения разработанной численной методики.

Ключевые слова: граничные интегральные уравнения, сингулярность, двумерные периодические колебания, функции Ханкеля.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.

BEM TECHNIQUE FOR THE ANALYSIS OF 2D ELASTIC SOLIDS DYNAMICS

A numerical approach to calculating the singular parts of the Boundary Integral Equations for 2D elastic solids harmonic vibration is proposed. The validation of the approach in wide range of frequencies is demonstrated. The developed numerical BEM technique is applied to the problem of elastic solids periodical vibration.

Keywords: boundary integral equations, singularity, 2D periodical oscillations, Hankel functions.

УДК 539.3

П.П. Лізунов¹, д-р техн. наук¹Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680**КОЛИВАННЯ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ СИЛОВОМУ ПОЛІ**

Отримані співвідношення, які описують коливання безмоментної сферичної оболонки, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі.

Ключові слова: гравітаційне навантаження, стаціонарний рух, центр мас, вільні коливання.

Розглянемо задачу про коливання безмоментної сферичної оболонки, що є частиною споруди, центр мас якої рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі. Вільні коливання споруди в площині руху її центру мас призводять до вимушених коливань оболонки, що збуджуються кінематично. Прийнято, що коливання оболонки не змінюють моменти інерції споруди і не впливають на її вільні коливання.

Введемо наступні праві прямокутні системи координат: $O_a X_a Y_a Z_a$ – абсолютну систему координат з початком в центрі гравітації; $OXYZ$ – орбітальну систему координат, вісь OZ якої є продовженням радіуса-вектора $\vec{r}_{(o)}$, проведеного з гравітаційного центру O_a в центр мас споруди, а вісь OX лежить в площині, що проходить через радіус-вектор $\vec{r}_{(o)}$ та вектор швидкості центру мас споруди. Будемо застосовувати також систему координат O_{xyz} , осі якої направлені вздовж головних центральних осей інерції споруди. У випадку стаціонарного руху споруди в центральному силовому полі осі OZ та O_z співпадають. Вимушені коливання в оболонці виникають в результаті відхилення осі симетрії споруди O_z від осі OZ на кут ψ . Введемо також криволінійну систему координат $O_1 x_1 x_2 x_3$, пов'язану з недеформованою поверхнею оболонки.

Визначимо навантаження, що діють на елементи сферичної оболонки у випадку, коли споруда здійснює вільні коливання відносно стану стаціонарного руху. Під час руху в центральному силовому полі на кожний елемент оболонки діє навантаження, що складається з гравітаційних та інерційних сил

$$\vec{q} = \vec{q}^g + \vec{q}^j. \quad (1)$$

Вектор гравітаційного навантаження, що діє на одиничний елемент поверхні оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^g = -\frac{\gamma \rho h \vec{r}^*}{r^2}, \quad (2)$$

де $\gamma = fM_0$; f – гравітаційна стала; M_0 – маса гравітаційного центру; ρ – щільність матеріалу оболонки; h – її товщина; \vec{r}^* – одиничний вектор, який визначається співвідношенням $\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{r}^*$; \vec{r} – радіус-вектор елемента оболонки в системі координат $O_a X_a Y_a Z_a$; $r = |\vec{r}|$.

Складові гравітаційної сили, що діють в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 криволінійної системи координат, мають такий вигляд [1, 2]:

$$q_{x_1}^g = \frac{\gamma \rho h}{\rho_{(o)}^2} (\cos x_1 \cos x_2 \sin \psi - \sin x_1 \cos \psi) \left\{ 1 + \frac{2}{\rho_{(o)}} [(R \cos x_1 - e) \cos \psi + R \sin x_1 \cos x_2 \sin \psi] \right\};$$

$$q_{x_2}^g = -\frac{\gamma \rho h}{\rho_{(o)}^2} \sin x_2 \sin \psi \left\{ 1 + \frac{2}{\rho_{(o)}} [(R \cos x_1 - e) \cos \psi + R \sin x_1 \cos x_2 \sin \psi] \right\};$$

$$q_{x_3}^g = -\frac{\gamma \rho h}{\rho_{(o)}^2} (\sin x_1 \cos x_2 \sin \psi + \cos x_1 \cos \psi) \left\{ 1 + \frac{2}{\rho_{(o)}} [(R \cos x_1 - e) \cos \psi + R \sin x_1 \cos x_2 \sin \psi] \right\}, \quad (3)$$

де R – радіус кривизни оболонки; e – відстань між центром кривизни оболонки і центром мас споруди.

Вектор інерційного навантаження, діючого на елемент оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^j = -\rho h \vec{a}, \quad (4)$$

де \vec{a} – вектор абсолютного прискорення елемента оболонки, який є геометричною сумою переносного \vec{a}^e , відносного \vec{a}^r та коріолісова \vec{a}^c прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c. \quad (5)$$

Вектор переносного прискорення дорівнює

$$\vec{a}^e = \vec{a}_0 + \vec{\epsilon} \times \vec{r}_n + \Omega (\vec{\Omega} \times \vec{r}_n), \quad (6)$$

де \vec{a}_0 – вектор прискорення центру мас споруди; $\vec{\epsilon}$ – вектор кутового прискорення системи координат O_{xyz} ; $\vec{\Omega}$ – вектор її кутової швидкості, який складається з векторів кутової швидкості руху центру мас за круговою траєкторією $\vec{\omega}_0$ та кутової швидкості власного обертання $\vec{\Psi}$; \vec{r}_n – радіус-вектор елемента оболонки в системі координат O_{xyz} .

Складові вектора переносного прискорення в напрямі координатних

ліній x_1, x_2, x_3 мають вигляд [1]

$$\begin{aligned} a_{x_1}^e &= \left[\omega_0^2 \rho_{(0)} \sin \psi + (e - R \cos x_1) \ddot{\psi} - R(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \sin x_1 \cos x_2 \right] \cos x_1 \cos x_2 - \\ &\quad - \left[\omega_0^2 \rho_{(0)} \cos \psi + R \ddot{\psi} \sin x_1 \cos x_2 + (e - R \cos x_1)(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \right] \sin x_1; \\ a_{x_2}^e &= \left[R(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \sin x_1 \cos x_2 - \omega_0^2 \rho_{(0)} \sin \psi - (e - R \cos x_1) \ddot{\psi} \right] \sin x_2; \\ a_{x_3}^e &= \left[R(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \sin x_1 \cos x_2 - (e - R \cos x_1) \ddot{\psi} - \omega_0^2 \rho_{(0)} \sin \psi \right] \sin x_1 \cos x_2 - \\ &\quad - \left[\omega_0^2 \rho_{(0)} \cos \psi + R \ddot{\psi} \sin x_1 \cos x_2 + (e - R \cos x_1)(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \cos x_2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Вектор відносного прискорення \vec{a}^r елемента оболонки визначається формулою

$$\vec{a}^r = \ddot{\vec{U}}, \quad (8)$$

де \vec{U} – вектор переміщення елемента оболонки.

Складові вектора відносного прискорення в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 дорівнюють

$$a_{x_1}^r = \ddot{u}; \quad a_{x_2}^r = \ddot{v}; \quad a_{x_3}^r = \ddot{w}, \quad (9)$$

де u, v, w – компоненти вектора переміщення \vec{U} елемента оболонки.

Коріолісово прискорення елемента оболонки визначається формулою

$$\vec{a}^c = 2\vec{\Omega} \times \vec{V}^r, \quad (10)$$

де \vec{V}^r – вектор відносної швидкості елемента оболонки.

Складові вектора коріолісова прискорення в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{x_1}^c &= 2(\omega_0 + \dot{\psi})(\dot{w} \cos x_2 + \dot{v} \sin x_1 \cos x_2); \\ a_{x_2}^c &= -2(\omega_0 + \dot{\psi})(\dot{w} \cos x_1 + \dot{u} \sin x_1) \sin x_2; \\ a_{x_3}^c &= 2(\omega_0 + \dot{\psi})(\dot{v} \cos x_1 \sin x_2 - \dot{u} \cos x_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Проекції інерційного навантаження, що діє на елемент оболонки, в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 , з урахуванням (4), (7), (9), (11), мають вигляд:

$$\begin{aligned} q_{x_1}^j &= -\rho h \left\{ \left[\omega_0^2 \rho_{(0)} \sin \psi + (e - R \cos x_1) \ddot{\psi} - R(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \sin x_1 \cos x_2 \right] \times \right. \\ &\quad \times \cos x_1 \cos x_2 - \left[\omega_0^2 \rho_{(0)} \cos \psi + R \ddot{\psi} \sin x_1 \cos x_2 + (e - R \cos x_1)(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \right] \sin x_1 + \\ &\quad \left. + \ddot{u} + 2(\omega_0 + \dot{\psi})(\dot{w} \cos x_2 + \dot{v} \sin x_1 \sin x_2) \right\}; \\ q_{x_2}^j &= -\rho h \left\{ \left[R(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \sin x_1 \cos x_2 - \omega_0^2 \rho_{(0)} \sin \psi - (e - R \cos x_1) \ddot{\psi} \right] \sin x_2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\ddot{v}-2(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{w}\cos x_1+\dot{u}\sin x_1)\sin x_2\}; \\
q_{x_3}^j = & -\rho h\left\{\left[R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2-(e-R\cos x_1)\ddot{\psi}-\omega_0^2\rho_{(o)}\sin\psi\right]\sin x_1\cos x_2-\right. \\
& -\left[\omega_0^2\rho_{(o)}\cos\psi+R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2+(e-R\cos x_1)(\omega_0+\dot{\psi})^2\right]\cos x_2+ \\
& \left.+\ddot{w}+2(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{v}\cos x_1\sin x_2-\dot{u}\cos x_2)\right\}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Підставивши в (1) вирази для гравітаційного (3) та інерційного (12) навантажень, з урахуванням умови $\gamma/\rho_{(o)}^3=\omega_0^2$ рівноваги гравітаційних та інерційних навантажень в центрі мас споруди, отримуємо складові вектора повного навантаження, що діє на елемент оболонки вздовж координатних ліній x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned}
q_{x_1} = & \rho h\left\{2\omega_0^2\left[(R\cos x_1-e)\cos\psi+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right](\cos x_1\cos x_2\sin\psi-\right. \\
& -\sin x_1\cos\psi)-\left[(e-R\cos x_1)\ddot{\psi}-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\cos x_1\cos x_2+ \\
& \left.+[R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2+(e-R\cos x_1)(\omega_0+\dot{\psi})^2]\sin x_1-\ddot{u}-\right. \\
& \left.-2[(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{w}\cos x_2+\dot{v}\sin x_1\sin x_2)]\right\}; \\
q_{x_2} = & \rho h\left\{\left[(e-R\cos x_1)\ddot{\psi}-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\sin x_2-\right. \\
& -2\omega_0^2\left[(R\cos x_1-e)\cos\psi+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right]\sin x_2\sin\psi- \\
& \left.-\ddot{v}+2[(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{w}\cos x_1+\dot{u}\sin x_1)\sin x_2]\right\}; \\
q_{x_3} = & \rho h\left\{\left[(e-R\cos x_1)\ddot{\psi}-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\sin x_1\cos x_2-\right. \\
& -2\omega_0^2(\sin x_1\cos x_2\sin\psi+\cos x_1\cos\psi)\left[(R\cos x_1-e)\cos\psi+ \right. \\
& \left.+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right]+[R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2+(\omega_0+\dot{\psi})^2(e-R\cos x_1)]\cos x_2- \\
& \left.-\ddot{w}-2[(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{v}\cos x_1\sin x_2-\dot{u}\cos x_2)]\right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Диференціальні рівняння руху безмоментної сферичної оболонки мають вигляд [1, 3]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2}+2N_{12}\operatorname{ctg}x_2+Rq_{x_1} & =0, \\
\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2}+(N_{22}-N_{11})\operatorname{ctg}x_2+Rq_{x_2} & =0, \\
-N_{11}-N_{22}+Rq_{x_3} & =0, \quad (14)
\end{aligned}$$

де N_{11}, N_{22}, N_{12} – зусилля в серединній поверхні оболонки, які визначаються наступними формулами:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}); \quad N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}); \quad N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}, \quad (15)$$

де ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} – компоненти тензора деформацій, які виражаються через складові вектора переміщень елемента оболонки u , v , w вздовж координатних ліній x_1 , x_2 , x_3 таким чином:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \operatorname{ctg} x_2 + w \right); \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + w \right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \nu \operatorname{ctg} x_2 + \frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \quad (16)$$

E – модуль пружності матеріалу оболонки; ν – коефіцієнт Пуассона.

Система диференціальних рівнянь, що описують коливання безмоментної сферичної оболонки в центральному силовому полі, з урахуванням вирізів (13) – (16), має вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1+\nu}{2 \sin x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\nu-3}{2} \frac{\operatorname{ctg} x_1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} - (\nu + \operatorname{ctg}^2 x_1) u + \frac{1-\nu}{2 \sin^2 x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] + 2\omega_0^2 [(R \cos x_1 - e) \cos \Psi + \\ & + R \sin x_1 \cos x_2 \sin \Psi] [\cos x_1 \cos x_2 \sin \Psi - \sin x_1 \cos \Psi] - [(e - R \cos x_1) \ddot{\Psi} - \\ & - R(\omega_0 + \dot{\Psi})^2 \sin x_1 \cos x_2] \cos x_1 \cos x_2 + [R \ddot{\Psi} \sin x_1 \cos x_2 + \\ & + (e - R \cos x_1)(\omega_0 + \dot{\Psi})^2] \sin x_1 - \ddot{u} - 2[(\omega_0 + \dot{\Psi})(\dot{w} \cos x_2 + \dot{v} \sin x_1 \sin x_2)] = 0, \\ & \frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left[\frac{1+\nu}{2 \sin x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \right. \\ & \left. + \frac{3-\nu}{2} \frac{\operatorname{ctg} x_1}{\sin x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{1+\nu}{\sin x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{(1-\nu)(1-2 \cos^2 x_1)}{2 \sin^2 x_1} v \right] + [(e - R \cos x_1) \ddot{\Psi} - \\ & - R(\omega_0 + \dot{\Psi})^2 \sin x_1 \cos x_2] \sin x_2 - 2\omega_0^2 [(R \cos x_1 - e) \cos \Psi + \\ & + R \sin x_1 \cos x_2 \sin \Psi] \sin x_2 \sin \Psi - \ddot{v} + 2[(\omega_0 + \dot{\Psi})(\dot{w} \cos x_1 + \dot{u} \sin x_1) \sin x_2] = 0, \\ & \frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + v \left(\frac{1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \operatorname{ctg} x_1 \right) (1+\nu) w \right] \left(1 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left[v \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \operatorname{ctg} x_1 - (1+\nu) w \right] \left[1 + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin^2 x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(e - R \cos x_1) \ddot{\psi} - R(\omega_0 + \dot{\psi})^2 \sin x_1 \cos x_2] \sin x_1 \cos x_2 - \\
& - 2\omega_0^2 (\sin x_1 \cos x_2 \sin \psi + \cos x_1 \cos \psi) [(R \cos x_1 - e) \cos \psi + \\
& + R \sin x_1 \cos x_2 \sin \psi] + [R \ddot{\psi} \sin x_1 \cos x_2 + (\omega_0 + \dot{\psi})^2 (e - R \cos x_1)] \cos x_2 - \\
& - \ddot{w} - 2[(\omega_0 + \dot{\psi})(\dot{v} \cos x_1 \sin x_2 - \dot{u} \cos x_2)] = 0. \quad (17)
\end{aligned}$$

Інтегруючи рівняння (17), можна визначити геометричні параметри та амплітуди вільних коливань споруди, при яких сферична оболонка, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі, зберігає задану форму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гуляев В.И., Лизунов П.П.* Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. – К.: Вища школа, 1989. –199 с.
2. *Лизунов П.П.* Пружина рівновага сферичної оболонки в центральному силовому полі. – Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 91. –К.: КНУБА, 2013. – С. 84-87.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. –314 с.

REFERENCES

1. *Gulyaev V.I., Lizunov P.P.* Kolebaniya sistem tverdyih i deformiruemyih tel pri slozhnom dvizhenii (Vibrations of rigid and deformable bodies under complex motion). – К.: Vischa shkola, 1989. –199 p.
2. *Lizunov P.P.* Pruzhna ravnovaha sferychnoyi obolonki v tsentral'nomu silovomu poli (Elastic equilibrium of a spherical shell in a central force field). – Opir materialiv i teoriya sporud: Naukovo-tekhnichnyy zbirnyk. – Vyp. 91. –К.: KNUBA, 2013. – P. 84-87.
3. *Volmir A.S.* Nelineynaya dinamika plastin i obolochek (Nonlinear dynamics of plates and shells). – М.: Nauka, 1972. –314 p.

Стаття надійшла до редакції 22.01.2014 р.

Лизунов П.П.

КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Получены соотношения, описывающие колебания безмоментной сферической оболочки, движущейся по круговой траектории в центральном силовом поле.

Ключевые слова: гравитационная нагрузка, стационарное движение, центр масс, свободные колебания.

Lizunov P.

OSCILLATIONS SPHERICAL SHELL IN THE CENTRAL FORCE FIELD

These ratios, which describe the oscillations moment free spherical shell that moves on a circular path in a central force field.

Key words: gravity load, steady motion, center of mass, free vibrations.

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв¹, канд. техн. наук
 Н.А. Гречух¹

¹Київський національний університет будівництва і архітектури
 Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНИХ ОБОЛОНОК ПРИ УДАРНИХ ТА ІМПУЛЬСНИХ ВПЛИВАХ

Викладена постановка задачі щодо аналізу реакцій оболонки на ударні навантаження з урахуванням суттєвої нелінійності матеріалу оболонки. Приведені теоретичні положення дають змогу побудувати ефективні алгоритми розв'язання задач динаміки оболонкових конструкцій.

Ключові слова: оболонка, ударні навантаження, перехідний процес, шарова частина тензора напружень, ідеальна пластичність

Рівняння руху оболонки подамо в узагальнених координатах, у якості яких прийняті переміщення вузлів контакту скінченних елементів в базисній декартовій системі координат

$$B\ddot{q} + A\dot{q} - b = Q(t, q, \dot{q}), \quad (1)$$

де B – оператор з матрицею, елементи якої характеризують інерційні властивості системи; A – оператор, матриця якого характеризує пружні в'язі між точками системи; b – вектор статичних навантажень; Q – вектор неконсервативних зовнішніх навантажень.

Дослідження перехідних процесів в пружно-пластичних оболонках виконується шляхом чисельного інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь руху (1) отриманої методом скінченних елементів. Інтегрування рівняння руху здійснюється за явною різницевою схемою наскрізного рахунку. На кожному m -му кроці за часом виконується розрахунок швидкостей деформацій

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} (C'_i \dot{u}_{r',j} + C'_j \dot{u}_{r',i}), \quad (2)$$

Швидкості зміни об'єму

$$\dot{Q} = \frac{1}{3} \dot{e}_{ij} q^{ij}, \quad (3)$$

декартової частини тензора швидкостей деформацій

$$\dot{e}_{ij}^D = \dot{e}_{ij} - \dot{\theta} q_{ij} \quad (4)$$

величини зміни об'єму

$$\theta_{(m+1)} = \theta_{(m)} + \dot{\theta} \Delta t_{(m)} \quad (5)$$

швидкостей дівіатора тензора напружень

$$\dot{S}_{ij} = C^{ijkl} \dot{e}_{kl}^D \quad (6)$$

і компонент дівіатора тензора повних напружень

$$S_{(m+1)}^{*ij} = S_{(m)}^{ij} + \dot{S}^{ij} \Delta t_{(m)} \quad (7)$$

Потім, згідно прийнятому рівнянню поверхні навантаження маємо:

$$f(S^{ij}, T, e_{ij}^{(P)}, \sigma_s) = 0, \quad (8)$$

де $\sigma_{(s)} = \sqrt{\frac{3}{2}} S^{ij} S_{ij}$ + інтенсивність напруги; T – температура; $e_{ij}^{(P)}$ – компонент тензора класичних деформацій.

На основі постулату Драккера виконується корегування дівіатора тензора повних напружень $S_{(m+1)}^{ij}$:

$$S^{ij} \rightarrow f(S^{ij}, T, e_{ij}^{(P)}, \sigma_{(s)}) = 0 \rightarrow S_{(m+1)}^{ij}. \quad (9)$$

Реалізація конкретної поверхні завантаження винесена в окремий фізичний блок. Від тепер можуть бути використані рівняння стану, що відображують ідеальну пластичність (умова текучості Мізеса), лінійне, трансляційне і ізотропне зміння.

Для встановлення шарової частини тензора напружень розраховується гідростатичний тиск за формулою:

$$P_{(m+1)} = \alpha_0 (\eta_{(m+1)} - 1) + \alpha_1 (\eta_{(m+1)} - 1)^2 + \alpha_2 (\eta_{(m+1)} - 1)^3 + \varepsilon_3^T T_{(m+1)}, \quad (10)$$

де $\eta_{(m)} = \theta_{(m)} + 1 = \frac{\Delta V}{V}$ – відносний об'єм; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ – коефіцієнти що визначаються для конкретного матеріалу по адіабатю Гюгоніо [1].

На величину гідростатичного тиску наскладуються обмеження

$$P_{(m+1)} \geq P_{\min} \left(P_{\min} = -\frac{1}{3} \sigma_s \right). \quad (11)$$

Після корегування дівіатора напруги за формулою (9) і гідростатичного тиску по формулі (11) вираховується компонента тензора повних напружень:

$$\sigma_{(n+1)}^{ij} = S_{(m+1)}^{ij} - (P_{(m+1)} + q_{(m+2)}) g^{ij}. \quad (12)$$

Значення яких підставляються в різницеві рівняння руху, що дозволяє розрахувати прирощення швидкостей, швидкість прирощення координат та координати вузлів дискретної моделі на $m+1$ кроці за часом.

У формулі (12) штучна в'язкість $q_{(n+1)}$, яка вводиться для забезпечення неперервності розв'язувальної функції при проходженні ударних хвиль, приймається у формі, аналогічній тій, яку ввів М.Уїлкінс [2] при розрахунку двовимірних пружно-пластичних течій

В процесі розрахунку шляхом чисельного інтегрування знаходяться наступні характеристики :

Кінетична енергія

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{x})^2 \beta dV, \quad (\beta = \frac{v}{v_{(0)}}), \quad (13)$$

енергія пружних деформацій

$$E_y = \int \int \sigma^{ij} \dot{e}_{ij}^{(y)} \rho dV dt, \quad (14)$$

енергія пластичних деформацій

$$E_p = \int \int \sigma^{ij} e_{ij}^p \beta dV dt, \quad (15)$$

енергія обтискання

$$E_\theta = \int \int (\rho + q) \dot{\theta} \beta dV dt, \quad (16)$$

енергія формозмінювання

$$E_\phi = - \int \int S^{ij} \dot{e}_{ij} \beta dV dt. \quad (17)$$

Внутрішня і повна енергія

$$E_{вн} = E_\theta + E_\phi, \quad E_{пов} = E_{вн} + E_k, \quad (18)$$

Контроль рішення здійснюється перевіркою закону збереження енергії. Стійкість різничевої схеми досягається вибором кроку за часом у відповідності з критерієм Куранта.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
2. Селиванов В.В., Соловьев В.С., Сысоев Н.Н. Ударные и детонационные волны. Методы исследования. - Изд-во МГУ, 1990. - 256 с.

REFERENCES

1. Zel'dovich Ya.B., Rayzer Yu.P. Fyzyka udarnikh voln y visokotemperaturnikh hydrodynamicheskyykh yavlenyy. M., «Nauka», 1966.
2. Selyvanov V.V., Solov'ev V.S., Sisoev N.N. "Udarnie y detonatsyonnie volny. Metodi yssledovaniya": yzd-vo MNU, 1990. - 256 s.

Стаття надійшла до редакції 30.01.2014 р.

Легостаев А.Д., Гречух Н.А

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ НАТЯНУТЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УДАРНЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Изложена постановка задачи по анализу реакций оболочки на ударные нагрузки с учетом имеющейся нелинейности материала оболочки. Приведенные теоретические положения дают возможность построить эффективные алгоритмы решения задач динамики оболочечных конструкций.

Ключевые слова: оболочка, ударные нагрузки, переходной процес, шаровая часть тензора напряжений, идеальная пластичность.

Lehostayev A.D., Grechukh N.A.

TECHNIQUE TO STUDY STRETCHED MEMBRANES IN SHOCK AND IMPULSE ACTION

Formulation of the problem in analyzing reactions to shell shock considering material nonlinearity shell material is described. These theoretical positions make it possible to build efficient algorithms for solving problems of dynamics of shell structures.

Keywords: shell, impact load, transition process, ball part of stress tensor, perfect plastisiti.

УДК 534-21:537.226.86

Л.О. Григор'єва¹, канд. фіз.-мат. наук
А.А. Кириченко¹, канд. фіз.-мат. наук
Н.О. Бабкова²

¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680

²Національний авіаційний університет
просп. Комарова, 1, м. Київ, Україна.

ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРОРУШІЙНОЇ СИЛИ ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ПО ТОВЩИНІ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ МЕХАНІЧНОМУ ЗБУРЕННІ

Запропоновано метод для визначення електрорушійної сили тонких кільцевих поляризованих по товщині п'єзокерамічних пластин з електродованими плоскими поверхнями при нестационарних механічних навантаженнях. Проведено чисельну реалізацію запропонованого методу, що дає змогу ефективно знаходити ЕРС п'єзоелемента при різних способах закріплення і навантаження. Виконуються дослідження динамічного електромеханічного стану пластини, що виникає при цьому.

Ключові слова: п'єзокерамічна кільцева пластина, чисельний метод, різниця потенціалів, динамічний електро-механічний стан, електрорушійна сила п'єзоелементу, нестационарне механічне навантаження.

Вступ. П'єзоелектричні елементи пластинчастої форми є широко застосовуваними електромеханічними перетворювачами при гармонічних та імпульсних електричних і механічних збуреннях [5, 7 та ін.]. Теоретичним та експериментальним дослідженням цих тіл при сталих гармонійних коливаннях присвячено наукові роботи [3, 5 та ін.]. У статтях [10, 11] вивчалися гармонійні товщинні коливання неоднорідних та п'єзоелектричних шарів з викривленими границями. Питання нестационарних коливань розглядалися в [4, 8, 9 та ін.].

Дослідження тонких перетворювачів доцільно проводити в наближенні плоского напруженого стану, враховуючи лінійний розподіл електричного потенціалу по товщині. На основі запропонованого наближення в [4] досліджувались нестационарні коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин при електричних збуреннях. При механічному навантаженні п'єзоелектричні перетворювачі працюють в режимі прямого п'єзо ефекту і є джерелом електричного струму. Електрична напруга на розімкнутих електродах п'єзоелектричного елемента буде електрорушійною силою джерела струму. Визначення електрорушійної сили п'єзоелементів при гармонійних навантаженнях проводились в роботах [1, 6]. Підхід до визначення ЕРС для пластинчастих елементів в нестационарному випадку

запропоновано в [2] за допомогою інтегрального рівняння Вольтерра. В даній статті розроблено та реалізовано чисельний спосіб знаходження ЕРС та дослідження динамічного осесиметричного електромеханічного стану поляризованих по товщині п'єзокерамічних тонких кільцевих пластин при механічному збуренні.

1. Основні залежності. Вивчається динамічний осесиметричний електромеханічний стан поляризованих по товщині п'єзокерамічних тонких кільцевих пластин. Товщина пластини h , координата r змінюється в межах $R_0 \leq r \leq R_1$. Коливання тіла в загальному випадку описуються рівняннями руху [5]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

Напруження задовольняють співвідношенням

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де s_{11}^E, s_{12}^E - обернені до модулів пружності матеріальні константи при сталій напруженості електричного поля, $\nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$ - аналог модуля Пуассона в оберненому законі Гука.

Рівняння коливань (1.1) в переміщеннях

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

Тут швидкість поширення електропружної хвилі

$$a^2 = \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho}. \quad (1.6)$$

З (1.2) маємо

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - 2d_{31} E_z \right). \quad (1.4)$$

Електрична індукція в загальному випадку визначається за формулою

$$D_z = d_{13} (\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \epsilon_{33}^T E_z. \quad (1.5)$$

Напруженість електричного поля

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Для тонких пластин вважаємо [5], що електричний потенціал всередині тіла змінюється по лінійному закону

$$\varphi = \frac{U(t)}{h} z,$$

звідки

$$E_z = -\frac{U(t)}{h}. \quad (1.7)$$

Тут $U(t)$ - шукана електрорушійна сила перетворювача, яка визначається з умови рівності нулевій струму при розімкнутих електродах

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\iint_{A^\pm} \frac{dD_z}{dt} dA^\pm = 0, \quad (1.8)$$

де A^\pm - поверхня пластини, покрита електродами, Q - заряд на електродах. З (1.8) випливає

$$Q = -\iint_{A^\pm} D_z dA^\pm = const. \quad (1.9)$$

З (1.5), (1.4), (1.7) при відсутності навантажень вздовж вісі z маємо

$$D_z = \frac{d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} - \left(\epsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h}. \quad (1.10)$$

Якщо плоскі поверхні пластини повністю покриті електродами, то $A^\pm = A_{nl} = \pi(R_1^2 - R_0^2)$. Інтегруємо (1.9) з врахуванням (1.10):

$$Q = -\iint_{A^\pm} \left[\frac{d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} - \left(\epsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h} \right] r dr d\theta,$$

$$-Q = \frac{2\pi d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) - \left(\epsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h} A_{nl}. \quad (1.11)$$

Якщо при $t = 0$ заряд $Q(0) = 0$, то $Q(t) = 0$. З (1.11) отримуємо вираз для знаходження електрорушійної сили

$$U(t) = \frac{\pi h k_p^2}{d_{13} A_{nl} (1 - k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)). \quad (1.12)$$

Тут $k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)\epsilon_{33}^T}$ - планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Перетворимо вираз для σ_r :

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} + \frac{\pi(1+\nu_E)}{A_{nl}} \frac{k_p^2}{(1-k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) \right). \quad (1.13)$$

Збурення в пластині виникають шляхом прикладання механічного тиску до бокових поверхонь. При цьому друга бокова поверхня може бути жорстко защемлена або вільна від навантажень:

$$\sigma_r(R_i, t) = P_i(t) \quad \vee \quad u_r(R_i, t) = 0, \quad i=0,1. \quad (1.14)$$

У початковий момент часу задаються переміщення точок пластини і їх швидкості

$$u_r(r, t=0) = u(r), \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, t=0) = v(r). \quad (1.15)$$

Перейдемо до безрозмірних величин

$$\bar{r}R = r, \quad \bar{u}_r R = u_r, \quad \bar{t} = \frac{at}{R}. \quad (1.16)$$

Підставляючи (1.16) в (1.3), отримуємо рівняння коливань в безрозмірних змінних

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{t}^2}. \quad (1.17)$$

Рівняння для напружень (1.2) обезрозмірюються наступним чином:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \sigma_r s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \nu_E \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + (1 + \nu_E) \bar{U}(t), \\ \bar{\sigma}_\theta &= \sigma_\theta s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \nu_E \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + (1 + \nu_E) \bar{U}(t), \end{aligned} \quad (1.18)$$

де електрорушійна сила знаходиться із співвідношення

$$\bar{U}(t) = \frac{d_{13}}{h} U(t) = \frac{\pi k_p^2}{A_{nl} (1 - k_p^2)} (\bar{R}_1 \bar{u}_r(\bar{R}_1, t) - \bar{R}_0 \bar{u}_r(\bar{R}_0, t)). \quad (1.19)$$

Надалі знаки безрозмірності будуть пропускатися.

2. Чисельний метод розв'язання. Для чисельного розв'язку задачі (1.17), (1.18) при початкових умовах (1.15) і граничних умовах (1.14) вводиться розбиття відрізка $R_0 < r < R_1$

$$\Omega = \{r_i = R_0 + (i - 0.5)\Delta_r, \Delta_r = (R_1 - R_0)/(n - 1), i = 0, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

При заміні похідних по просторовій координаті центрально-різницевиими виразами рівняння руху (1.17) перетвориться до виду

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_r^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2r_i \Delta_r} - \frac{u_i}{r_i^2}, \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (2.2)$$

У випадку заданих на границях напружень $\sigma_r(R_0, t) = P_0(t)$ та $\sigma_r(R_1, t) = P_1(t)$ значення $u_0(t)$ і $u_n(t)$ можна визначити, використовуючи наступні апроксимації напружень

$$\sigma_{r,0} = \frac{u_1 - u_0}{\Delta r} + v_E \frac{(u_0 + u_1)}{2R_0} + \frac{\pi(1+v_E)}{2A_{nn}} \frac{k_p^2}{(1-k_p^2)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)) = P_0(t),$$

$$\sigma_{r,n} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta r} + v_E \frac{(u_n + u_{n-1})}{2R_1} + \frac{\pi(1+v_E)}{2A_{nn}} \frac{k_p^2}{(1-k_p^2)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)) = P_1(t). \quad (2.3)$$

Звідси отримуємо систему для знаходження законтурних значень $u_0(t)$ і $u_n(t)$ при відомих значеннях переміщень в внутрішніх точках:

$$\left(\frac{v_E}{2R_0} \frac{1}{\Delta r} - A_1 R_0\right) u_0 + A_1 R_1 u_n = P_0(t) - \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{v_E}{2R_0} + A_1 R_0\right) u_1 - A_1 R_1 u_{n-1},$$

$$-A_1 R_0 u_0 + \left(\frac{v_E}{2R_1} + \frac{1}{\Delta r} + A_1 R_1\right) u_n = P_1(t) + A_1 R_0 u_1 - \left(-\frac{1}{\Delta r} + \frac{v_E}{2R_1} + A_1 R_1\right) u_{n-1}, \quad (2.4)$$

де $A_1 = \frac{\pi(1+v_E)}{2A_{nn}} \frac{k_p^2}{(1-k_p^2)}$.

При заданих переміщеннях на одній з границь залишається лише одне з рівнянь (2.4), і обчислення помітно спрощуються.

Електрорушійна сила знаходиться відповідно до співвідношення (1.21)

$$U(t) = \frac{A_1}{(1+v_E)} (R_1(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)). \quad (2.6)$$

Для інтегрування по часу розбиваємо досліджувану часову ділянку на інтервали довжиною Δ_t і застосовуємо загальноприйняті методи, наприклад, явну чисельну схему. У явній схемі переміщення на $(k+1)$ -му шарі знаходяться по відомому розподілу переміщень на k -му і $(k-1)$ -му часових шарах наступним чином

$$u_i^{k+1} = \Delta_t^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta_r^2} + \frac{1}{2r_i \Delta_r} \right) u_{i+1}^k - \left(\frac{2}{\Delta_r^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) u_i^k + \left(\frac{1}{\Delta_r^2} - \frac{1}{2r_i \Delta_r} \right) u_{i-1}^k \right] + 2u_i^k - u_i^{k-1}. \quad (2.7)$$

Внаслідок умовної стійкості явної чисельної схеми крок за часом у рекурентних формулах (2.5), (2.4) повинен бути в кілька разів менше кроку по просторовій координаті. Зазвичай при прийнятому обезрозміренні достатньо взяти $\Delta_t \approx 0.1 \Delta_r$. Значення переміщень на тимчасових шарах $t_0 = 0$ і $t_1 = \Delta_t$ визначаються з початкових умов (1.17).

3. Аналіз отриманих результатів. Проведемо аналіз коливань кільцевої пластини під дією механічного тиску. Товщина пластини $h = 2 \text{ мм}$, зовнішній радіус $R_1 = 5 \text{ см}$, внутрішній $R_0 = 3 \text{ см}$. Матеріал пластини – п'єзокераміка ЦТС-19, для якої маємо наступні матеріальні параметри [3, 5]:

$$s_{11}^E = 15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}, \quad c_{12}^E = -5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н},$$

$$d_{13} = -125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} / \text{В}, \quad \varepsilon_{33}^S = 1360,8, 85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}, \quad \rho = 7740 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

При таких даних швидкість поширення електропружної хвилі в пластині $a = 3150 \text{ м} / \text{с}$. При безрозмірній приймалося $R = R_1$.

Розглянемо реакцію пластини на миттєво прикладене при $t = 0$ збурення $\sigma_r(R_1, t) = P_1(t) = P \sin \omega t$, $\sigma_r(R_0, t) = 0$. Для обчислень візьмемо $P = 1$, безрозмірна частота навантаження $\bar{\omega} = \omega R / a = 1$, якій відповідає частота в герцах $\omega = 6,31 \cdot 10^4 \text{ рад} / \text{с}$.

На рис. 1 наведено безрозмірні динамічні криві для переміщень зовнішніх поверхонь та електрорушійної сили при описаному вище збуренні.

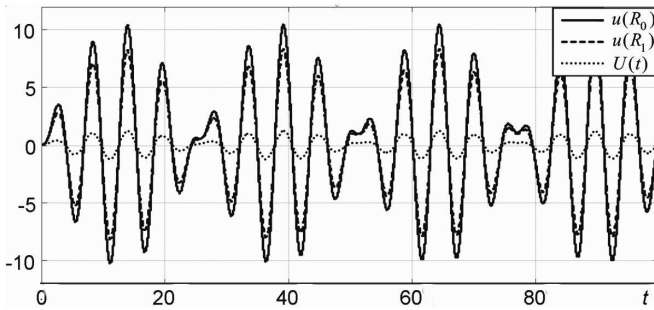


Рис. 1

Рис. 2 показує динаміку зміни окружних напружень σ_θ на зовнішніх поверхнях кільцевої пластини. Виявилось, що окружні напруження на поверхні $r = R_1$ вищі за радіальні в 8 разів згідно до граничних умов, а максимальні напруження $\sigma_{\theta \max} = 15$ виникають на внутрішній поверхні $r = R_0$.

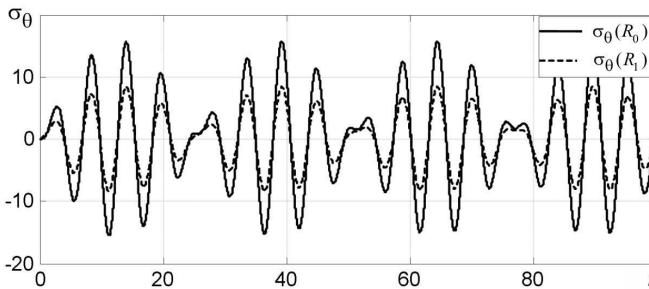


Рис. 2

На рис. 3 наведено криві ЕРС при різних значеннях частоти збурення ω . Бачимо, що максимальних значень електрорушійна сила набуває при $\bar{\omega}=1$. Найменшу область зміни різниці потенціалів маємо при $\bar{\omega}=2$.

Рис. 4 ілюструє динаміку зміни електрорушійної сили для пластин з різними радіусами внутрішнього отвору, отримані при $\bar{\omega}=1$. Максимальна різниця потенціалів виникає при $\bar{R}_0=0.6$. Таким чином, з усіх розглянутих випадків максимальна ЕРС виникає при $\bar{\omega}=1$, $\bar{R}_0=0.6$ і досягає значення $\bar{U}_{\max}=1.22$.

Таким чином, запропонований чисельний метод знаходження електрорушійної сили п'єзоелемента при нестаціонарних механічних навантаженнях дає змогу ефективно визначати ЕРС для кільцевих п'єзокерамічних пластин з різними умовами закріплення та навантаження. Дослідження динамічного електромеханічного стану пластини, що стає відомим при цьому, може бути використано при проектуванні та виборі оптимальних умов функціонування п'єзокерамічного перетворювача.

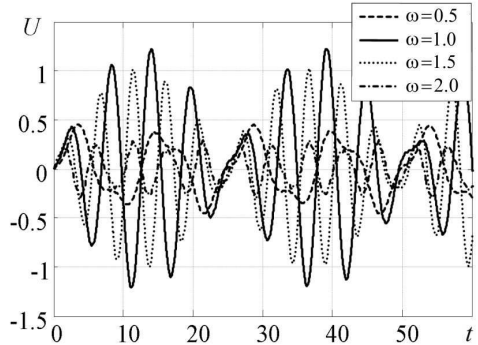


Рис. 3

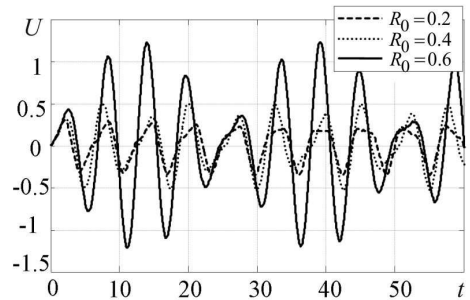


Рис. 4

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Болкисев А.М., Рудницький С.И., Шульга Н.А. Электроакустическая чувствительность пьезокерамического цилиндра при гармоническом нагружении // Прикл. механика. - 1989. - 25, №12. - С. 68-73.
2. Шульга М.О. Визначення електрорушійної сили п'єзоелектричних перетворювачів при механічних навантаженнях // Доп. НАН України. - 2009. - №1 - С.70-74.
3. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. - К: Наук. думка, 1990. - 228 с.

4. Шульга Н.А., Григорьева Л.О., Ластивка И.О., Бабкова Н.О. Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин // Теоретич. и прикладная механика, 2011. – №2(48), с. 98-104.
5. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин.—К.: Наукова думка, 2008.—270 с.
6. Шульга Н.А., Рудницкий С.И., Качаенко О.Б. Электроакустическая чувствительность пьезокерамической цилиндрической оболочки в акустической среде // Прикл. механика. - 1989. - 25, №2. - С. 44-48.
7. Mazon W.P. Piezoelectricity, its history and applications //J. Acoust. Soc. Am. –1981. – 70. N 6. – P. 1561 –1566.
8. Grigor'eva L.O. Electromechanical nonstationary thickness vibrations of a piezoceramic layer // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 2. – P. 159–164.
9. Shul'ga M.O., Grigoryeva L.O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – pp.179-204.
10. Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O., Kornienko V.F. Harmonic thickness vibrations of inhomogeneous elastic layers with curved boundaries // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 1. – P. 62–69.
11. Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O. Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 2. – P. 177–185.

REFERENCES

1. Bolkisev A.M., Rudnicki S.I., Shul'ga N.A. Electroacoustic sensitivity of piezoceramic cylinder under harmonic loading [in Russian] // J. Appl. mechanics. - 1989. - 25, № 12. - P. 68-73.
2. Shul'ga M.O. Definition of electromotive force piezoelectric transducers under mechanical loads [in Ukrainian] // Extras. National Academy of Sciences of Ukraine. – 2009. №1 - С.70-74.
3. Shul'ga N.A., Bolkisev A.M. Vibrations of piezoceramic bodies [in Russian]. - Naukova Dumka, 1990. - 228 p.
4. Shul'ga N.A., Grigoryeva L.O., Lastivka I.O., Babkova N.O. Numerical analysis of nonstationary vibrations of round piezoelectric plates [in Russian] // Theor. and Applied Mechanics, 2011. - № 2 (48), p. 98-104.
5. Shul'ga M.O., Karlash V.L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates [in Ukrainian]. – Naukova Dumka, Kyiv. - 2008.
6. Shul'ga N.A., Rudnicki S.I., Kachaenko O.B. Electroacoustic sensitivity of piezoceramic cylindrical shell in an acoustic medium [in Russian] // J. Appl. mechanics. - 1989. - 25, № 2. - S. 44-48.
7. Mazon W.P. Piezoelectricity, its history and applications //J. Acoust. Soc. Am. –1981. – 70. N 6. – P. 1561 –1566.
8. Grigor'eva L.O. Electromechanical nonstationary thickness vibrations of a piezoceramic layer // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 2. – P. 159–164.
9. Shul'ga M.O., Grigoryeva L.O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation // Mechanical Vibrations: Types, Testing and Analysis. – Nova Science Publishers, New York. – 2011. – pp.179-204.

10. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O., Kornienko V.F.* Harmonic thickness vibrations of inhomogeneous elastic layers with curved boundaries // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – 47, N 1. – P. 62–69.
11. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O.* Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – 47, N 2. – P. 177–185.

Стаття надійшла до редакції 31.01.2014 р.

Григорьева Л.О., Кириченко А.А., Бабкова Н.О.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПО ТОЛЩИНЕ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Предложен метод для определения электродвижущей силы тонких кольцевых поляризованных по толщине пьезокерамических пластин с электродированными плоскими поверхностями при нестационарных механических нагрузках. Проведено численную реализацию предложенного метода, что позволяет эффективно находить ЭДС пьезоэлемента при различных способах закрепления и нагрузки. Выполнено исследование возникающего при этом динамического электромеханического состояния пластины.

Ключевые слова: пьезокерамическая кольцевая пластина, численный метод, разность потенциалов, динамическое электромеханическое состояние, электродвижущая сила пьезоэлемента, нестационарное механическое нагружение.

Grigorieva L.O., Kirichenko A.A., Babkova N.O.

DEFINITION OF ELECTROMOTIVE FORCE OF POLARIZED ON THICKNESS ANNULAR PLATES UNDER MECHANICAL PERTURBATION

A method for determining the electromotive force of the thin ring polarized on the thickness piezoceramic plates with electroded flat surfaces under unsteady mechanical loads is proposed. The numerical implementation of the proposed method enables efficient founding of piezoelement EMF at different ways of fixing and loading. It is determined studying of dynamic electro-mechanical plate state.

Keywords: piezoceramic annular plate, numerical method, potential difference, dynamic electro-mechanical state, piezoelement electromotive force, unsteady mechanical loads.

УДК 539.4

Г.М. Улітін¹, д-р техн. наук
С.М. Царенко¹, канд. техн. наук

¹ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»,
вул. Артема, 58, м. Донецьк, Україна, 83001. E-mail: tzarenko@rambler.ru

УДАР КОНІЧНОГО СТРИЖНЯ ОБ ЖОРСТКУ ПЕРЕШКОДУ

В статті розглянуто задачу про повздовжній удар конічного стрижня змінного перерізу. На підставі аналізу впливу параметрів конструкції на значення головної частоти коливань, надані рекомендації про використання наближеного методу розрахунку. Отримані залежності для визначення переміщень і напружень перерізів стрижня. Запропонована інженерна залежність для визначення максимальної величини зусилля в ударному перерізі.

Ключові слова: конічний стрижень, метод Фур'є, повздовжні коливання, повздовжній удар, механічні напруження.

Силові імпульсні системи широко використовуються в машинах, що виконують різноманітні технологічні процеси: штампування, кування, руйнування гірських порід, бетонних покриттів, занурення паль і так далі. Проблема підвищення продуктивності машин ударної дії розв'язується не тільки за рахунок збільшення потужності, а також за рахунок підвищення ефективності передачі енергії в середу, що обробляється. Останнє досягається, в тому числі, на підставі вивчення процесу формування хвиль деформацій бойками різної геометрії та пошуку конструкцій бойків, що створюють хвилі деформацій з раціональними параметрами [1].

При розгляданні різних моделей повздовжнього співударяння тіл [1, 2] за основу приймається хвильова модель удару Сен-Венана, так як вона найбільш повно відображає реальні динамічні процеси в тілах, що співударяються, а для її практичної реалізації використовують метод Даламбера. Точне розв'язання хвильової моделі дає метод Фур'є [3], деякі окремі випадки динамічного розрахунку з використанням цього методу для стрижнів сталого перерізу розглянуті в роботах [4, 5].

При розв'язанні рівняння поздовжніх коливань стрижнів змінного перерізу, у випадку удару, виникають певні труднощі математичного характеру як, наприклад, отримане рівняння є рівнянням зі змінними коефіцієнтами, ортогональність власних функцій та інше. Тому для спрощення розв'язання таких задач використовують різні гіпотези. Так в роботі [6] системи з розподіленими параметрами замінюються на одномасову (теорія Кокса) або різні її уточнення [7], або використовується апроксимація динамічних форм деформацій статичними [8, 9]. У роботах [2, 10, 11] розглянуто моделі повздовжнього удару стрижнів різної конфігурації з вико-

ристанням апроксимації їх поверхні послідовно сполученими циліндричними ділянками.

Метою цієї роботи є:

- отримання розрахункових залежностей для дослідження напружено-деформованого стану стрижня змінного перерізу, що виникає під час удару;

- дослідження впливу геометричних параметрів стрижня на напружено-деформований стан на основі аналізу зміни першої частоти власних коливань;

- обґрунтування інженерних залежностей для визначення розрахункових параметрів.

В якості математичної моделі об'єкта, що розглядається, візьмемо пружний стрижень конічної форми довжиною l (рис. 1). Для дослідження повздовжніх коливань $u(x, t)$, якщо вибрати систему координат з боку меншої основи, потрібно розв'язати задачу

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(F(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \gamma F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0; \quad (2)$$

$$u'_x(l, t) = 0 \quad (3)$$

з початковими умовами

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = -v_0 e(x), \quad (4)$$

де E – модуль пружності, $F(x)$ – площа поперечного перерізу стрижня, γ – густина матеріалу, v_0 – швидкість удару, $e(x)$ – одинична функція.

Для перерізу стрижня (усічена піраміда або конус) $F(x) = (ax + b)^2$, де коефіцієнти a та b визначаються геометрією перерізу, наприклад для суцільного усіченого конусу $a = \frac{D-d}{l} \sqrt{\pi/4}$, $b = d \sqrt{\pi/4}$, де D , d – діаметри більшої та меншої основ відповідно.

Спочатку розглянемо випадок вільних коливань і для рівняння (1) використаємо заміну $z = \frac{ax+b}{al}$. Тоді воно прийме вигляд

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = \tilde{\gamma} z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5)$$

де $\tilde{\gamma} = \gamma l^2 / E$.

З першої початкової умови (4) одержимо

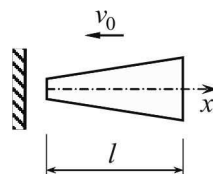


Рис. 1. Удар конічного стрижня об жорстку перешкоду

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \sin \omega_n t, \quad (6)$$

де $u(z,t)$ – переміщення, викликані повідомленням швидкості v_0 , A_n – довільні сталі, $Z_n(z)$ – власні функції відповідних граничних задач, ω_n – частоти власних коливань.

Диференціальний оператор рівняння (1) є самоспряженим, отже, функції $Z_n(z)$ будуть ортогональні з вагою $\rho(z)=z^2$ на відрізку $[z_1; z_2]$ [12], де $z_1=k$; $z_2=1+k$, $k=b/(al)$, наприклад для стрижня в формі усіченого конусу k можна визначити з співвідношення $\frac{d}{D} = \frac{k}{k+1}$.

Для визначення власних функцій задачі (5) отримуємо рівняння

$$zZ_n'' + 2Z_n' + \lambda_n^2 z Z_n = 0, \quad (7)$$

де $\lambda_n = \omega_n \sqrt{\gamma}$ – власні значення.

Загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$Z_n(z) = C_1 \frac{\sin \lambda_n z}{z} + C_2 \frac{\cos \lambda_n z}{z}. \quad (8)$$

Якщо задовольнити крайовим умовам (2) і (3), то з урахуванням виразу для власних функцій (8) отримаємо рівняння для знаходження власних значень

$$\tan \lambda_n (z_2 - z_1) = \lambda_n z_2. \quad (9)$$

Тоді власні функції можна представити у вигляді

$$Z_n(z) = C_1 \left(\frac{\sin \lambda_n z}{z} - \tan \lambda_n z_2 \frac{\cos \lambda_n z}{z} \right) = C_1 \frac{\sin \lambda_n (z - z_1)}{z \cos \lambda_n z_1}. \quad (10)$$

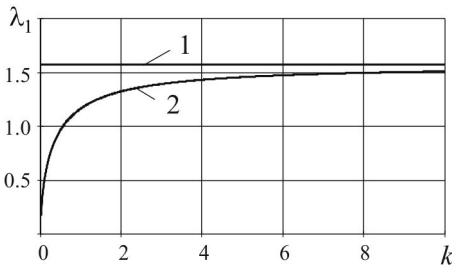


Рис. 2. Залежність λ_1 від значення параметра

відносного поперечного розміру k :

1 - для стрижня змінного перерізу;

2 - для стрижня сталого перерізу ($\lambda_1 = 1,571$)

Розглянемо вплив параметра k на значення першого власного числа частотного рівняння (9) λ_1 (першої власної частоти $\omega_1 = \lambda_1 / \sqrt{\gamma}$).

На графіку рис. 2 показана залежність λ_1 від величини параметра відносного поперечного розміру k , на графіку бачимо, що при значенні $k > 8$, що відповідає співвідношенню розмірів більшої та меншої основи

менш, ніж 9:8, значення першої власної частоти буде відрізнятися від частоти, отриманої для моделі стрижня сталого перерізу [3], не більше ніж на 5%. Враховуючи, що k залежить тільки від розмірів основ та не залежить від довжини, одержимо співвідношення розмірів стрижня, при якому в якості розрахункової моделі можна приймати стрижень сталого перерізу

$$l < \frac{b}{16 \tan \alpha}, \quad (11)$$

де α – кут конусу. Так, наприклад, для $\alpha=1^\circ$ $l < 3,58b$, таким чином, навіть для стрижнів з малим кутом конусу використання розрахункової моделі стрижня сталого перерізу дасть значну похибку.

Для спрощення визначення квадрата норми власних функцій перейдемо до границі при $m \rightarrow n$ у виразі від добутку власних функцій з різними індексами

$$(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_{z_1}^{z_2} z^2 Z_m Z_n dz = z^2 (Z_n Z'_m - Z_m Z'_n) \Big|_{z_1}^{z_2},$$

в результаті чого одержуємо

$$\int_{z_1}^{z_2} z^2 Z_n^2(z) dz = \frac{z^2}{2\lambda_n} \left(Z'_n \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} - Z_n \frac{\partial Z'_n}{\partial \lambda_n} \right) \Big|_{z_1}^{z_2}. \quad (12)$$

Тоді з співвідношення (12) квадрат норми власних функцій з урахуванням ваги буде визначатися за формулою

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &= \frac{2\lambda_n(z-z_1) - \sin 2\lambda_n(z-z_1)}{4\lambda_n \cos^2 \lambda_n z_1} \Big|_{z_1}^{z_2} = \\ &= \frac{2\lambda_n(z_2-z_1) - \sin 2\lambda_n(z_2-z_1)}{4\lambda_n \cos^2 \lambda_n z_1} = \frac{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}{4\lambda_n \cos^2 \lambda_n k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо задовольнити другій початковій умові (4), то у виразі (6) коефіцієнти A_n приймуть вигляд

$$A_n = -\frac{v_0 \sqrt{\gamma}}{\lambda_n^3 \Delta_n^2 \cos \lambda_n k} (\sin \lambda_n - \lambda_n (1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k). \quad (14)$$

Розв'язання (6) при значеннях коефіцієнтів (14) визначає пружні переміщення конструкції

$$u(z, t) = -\frac{v_0 l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n (1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{z \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \sin \lambda_n (z-k) \sin \omega_n t, \quad (15)$$

де $c = \sqrt{E/\gamma}$ - швидкість хвилі повздовжніх коливань стрижня. Тоді напруження будуть визначатися залежністю

$$\sigma(z, t) = -E \frac{v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n(1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{z^2 \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \times \\ \times (z \lambda_n \cos \lambda_n (z-k) - \sin \lambda_n (z-k)) \sin \omega_n t. \quad (16)$$

А вираз для зусилля в ударному перерізі одержимо у вигляді

$$P(t) = -EF_0 \frac{v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n(1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{k \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \sin \omega_n t, \quad (17)$$

де $F_0 = b^2$.

Як приклад, розглянемо удар конічного бойка, численні дослідження для якого були проведені в роботі [1]. Маса бойка становила 4,4 кг, діаметр ударного торця – 25 мм, кут конусу – $0,5^\circ$, довжина – 720 мм. На

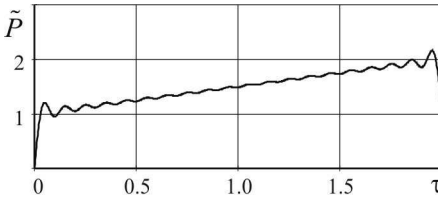


Рис. 3. Графік зміни величини відносного зусилля \tilde{P}

рис. 3 представлений графік відносної величини зусилля в ударному перерізі $\tilde{P} = -\frac{P}{EF_0} \frac{c}{v_0}$ залежно від безрозмірного часу $\tau = \frac{c}{l} t$. З графіка, зрозумі-

ло, що функцію $\tilde{P}(\tau)$ можна

апроксимувати лінійною залежністю на ділянці періоду $T = 2l/c$

$$\tilde{P}(\tau) = d \cdot \tau + 1. \quad (18)$$

Коефіцієнт d визначимо через імпульс сили (17) за період часу T

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sin \lambda_n - \lambda_n(1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{k \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} (1 - \cos 2\lambda_n) - 1. \quad (19)$$

На графіку рис. 4 наведена залежність коефіцієнту d від параметра k . У випадку $k > 8$, коефіцієнт d наближено можна визначити виходячи з відомого співвідношення, якщо вважати стрижень абсолютно пружним,

$$2Mv_0 = \int_0^{\frac{2l}{c}} P(t) dt, \text{ де } M = \gamma F_0 l \frac{1+3k+3k^2}{3k^2} - \text{ маса стрижня,}$$

$$d = \frac{1+3k}{3k^2}. \quad (20)$$

Таким чином, з використанням графіку рис. 4 або залежності (20) при заданих параметрах бойка, можна визначити макси-мальну величину ударного зусилля. Наприклад, для бойка з діаметром ударного торця 25 мм, куту конусу 6° , довжиною 250 мм [1], визначаємо параметр

$$k = \frac{d_0}{2l \tan \alpha} = \frac{25}{2 \cdot 250 \cdot \tan 6^\circ} = 0,476, \text{ з}$$

графіку рис. 4 – $d = 2,081$, одержимо

$$\tilde{P}_{\max} = 2,081 \cdot 2 + 1 = 5,162. \text{ На}$$

рис. 5, для розглянутого прикладу, побудовані графіки $\tilde{P}(\tau)$ за залежностями (17) та (18).

Висновок

У статті розглянута задача про повздовжній удар конічного стрижня змінного перерізу, що моделює роботу бойка силової імпульсної системи. На підставі аналізу впливу параметрів конструкції на значення головної частоти коливань надано рекомендації про використання наближеного методу розрахунку. Отримано залежності для визначення переміщень і напружень перерізів стрижня, а також для величини зусилля в ударному перерізі. Проведено графічний аналіз залежності зусилля від часу, на підставі чого запропонована інженерна формула для визначення максимальної величини зусилля, яка дозволяє визначати необхідні геометричні параметри бойка.

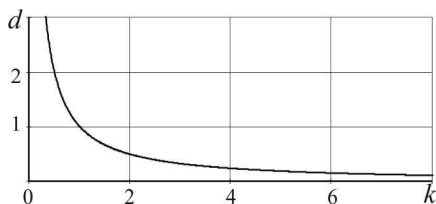


Рис. 4. Залежність d від величини параметра відносного поперечного розміру k

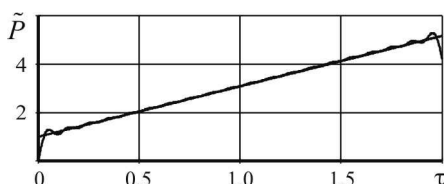


Рис. 5. Графік зміни величини відносного зусилля \tilde{P}

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алимов О.Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах [Текст] / О.Д. Алимов, В.К. Манжосов, В.Э. Еремьянц. – М.: Наука, 1985. – 357 с.
2. Манжосов В.К. Модели продольного удара [Текст] / В.К. Манжосов. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 160 с.
3. Прочность, устойчивость, колебания [Текст]: Справочник в трех томах. Том 3. Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: «Машиностроение», 1968. – 567 с.
4. Абрамов Б.М. Применение метода рядов для исследования продольного удара стержней [Текст] / Б.М. Абрамов, А.Б. Абрамов // В кн.: Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища шк., 1972. – С. 47-58.

5. Шевченко Ф.Л. Задачі з опору матеріалів [Текст]: Навчальний посібник./ Ф.Л. Шевченко, С.М. Царенко. – Донець: РІА ДонНТУ, 2011. – 356 с.
6. Саркисов Г.М. Расчеты бурильных и обсадных колонн [Текст] / Г.М. Саркисов. - М.: Недра, 1971. – 206 с.
7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара [Текст] / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1977. – 232 с.
8. Вибрации в технике [Текст]: В 6 т. / И.И. Артоболевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин и др. / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1: Колебания линейных систем. – 352 с.
9. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний [Текст] / В.Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.
10. Алимов О.Д. Бурильные машины [Текст] / О.Д. Алимов, Л.Т. Дворников. – М.: Машиностроение, 1976. – 295 с.
11. Дворников Л.Т. Формирование ударного импульса в полубесконечном стержне бойком, имеющим форму гиперболоида вращения [Текст] / Л.Т. Дворников, А.А. Мясников // труды ФПИ. – 1977. – вып. 104. – С. 70-82.
12. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции [Текст] / В.Я. Арсенин. – М.:Наука, 1974. – 432 с.

REFERENCES

1. Alimov O. Impact. The wave distribution in impact deformation systems [Text] / O. Alimov, V. Manzhosov, V. Eremyants. - Moscow: Nauka, 1985. - 357 p.
2. Manzhosov V. Models longitudinal impact [Text] / V. Manzhosov - Ulyanovsk: UISTU 2006. - 160 p.
3. Strength, stability, oscillations [Text]: Directory in three volumes. Volume 3. Ed. I. Birger and Ya. Panovko. – Moscow: "Mashinostroyeniye", 1968. - 567 p.
4. Abramov B. Application of the series for the longitudinal impact studies rods [Text] / B. Abramov, A. Abramov // In.: Teoriya mekhanizmov i mashin. – Kharkov: Vishcha Shkola., 1972. - 47-58.
5. Shevchenko F. Problems of Strength of Materials [Text] / F. Shevchenko, S. Tsarenko. - Donetsk: RIA Donetsk National Technical University, 2011. - 356 p.
6. Sarkisov G. Calculations drilling and casing [Text] / G. Sarkisov. Moscow: Nedra, 1971. – 206 p.
7. Panovko Ya. Introduction to the theory mechanical impact [Text] / Ya. Panovko. - Moscow: Nauka, 1977. – 232 p.
8. Vibration in the technique [Text]: 6 volumes / I. Artobolevsky, A. Bogolyubov, V. Bolotin and others / ed. V. Bolotin. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1978. - Vol.1: Vibrations of linear systems. – 352 p.
9. Biderman V. Applied theory of mechanical oscillations [Text] / V. Biederman. - Vysshaya Shkola, 1972. – 416 p.
10. Alimov O. Drilling machines [Text] / O. Alimov, L. Dvornikov. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1976. – 295 p.
11. Dvornikov L. Formation of the shock pulse in half infinite rod striker of a hyperboloid forms [Text] / L. Dvornikov, A. Butchers // FPI works. - 1977. - Vol. 104. - 70-82.
12. Arsenin V. Methods of mathematical physics and special functions [Text] / V. Arsenin. - Moscow: Nauka, 1974. – 432 p.

Стаття надійшла до редакції 03.02.2014 р.

Улітин Г.М., Царенко С.Н.

УДАР КОНИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ О ЖЕСТКИЙ ОГРАНИЧИТЕЛЬ

В статье рассмотрена задача о продольном ударе конического стержня сплошного сечения. На основании анализа влияния параметров конструкции на значение главной частоты колебаний, даны рекомендации об использовании приближенного метода расчета. Получены зависимости для определения перемещений и напряжений сечений стержня. Предложена инженерная зависимость для определения максимальной величины усилия в ударном сечении.

Ключевые слова: конический стержень, метод Фурье, продольные колебания, продольный удар, механические напряжения.

Ulitin G., Tsarenko S.

IMPACT CONICAL ROD ON HARD LIMITER

The problem is considered of longitudinal impact conical rod in article. A recommendation on the use of the approximate method of calculation is based on an analysis of the influence of design parameters on the value of the main oscillation frequency. There was obtained an equation of the displacement and stress of the rod. Engineering dependence has been proposed to determine the maximum force in the impact section.

Keywords: tapered rod, Furie method, longitudinal oscillations, longitudinal impact, stress.

УДК 539.3

В.П. Андрієвський¹, канд. техн. наукЮ.В. Максим'юк¹, канд. техн. наук

¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ТЕРМО- ПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ МССЕ

Наведені основні розрахункові співвідношення вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності в криволінійній системі координат. На базі основних положень моментної схеми скінченних елементів отримано співвідношення для визначення температурних деформацій. Проведені чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів.

Ключові слова: теплопровідність, термопружність, вісесиметричні тіла, моментна схема скінченних елементів (МССЕ).

Вступ. Значна кількість відповідальних об'єктів сучасної техніки, таких як, ротори парових турбін і газотурбінних установок знаходяться під дією термосилового навантаження пов'язаного з нерівномірним розподілом температури. В значній кількості випадків їх експлуатація відбувається при усталених значеннях перелічених зовнішніх факторів. В цьому випадку визначення нерівномірних температурних полів потребує розв'язку стаціонарної вісесиметричної задачі теплопровідності. Розв'язувальні співвідношення задачі термопружності отримані на основі методики моментної схеми скінченних елементів [1].

1. Матриця теплопровідності для вісесиметричних тіл в місцевій криволінійній системі координат. При дослідженні температурних полів вісесиметричних тіл обертання на основі МСЕ доцільно використовувати дві системи координат: базисну і місцеву. Розглянемо вісесиметричне тіло (рис. 1) в базисній круговій циліндричній системі координат z^i , вісь z^1 якої співпадає з віссю обертання, а z^2 спрямована вздовж радіуса. Вісі z^1 та z^2 базисної системи координат розташовані в площині меридіонального перетину тіла обертання, а вісь z^3 орієнтована по окружній координаті. Базисна система координат призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта та граничні умови. В свою чергу місцева система координат x^i призначена для виведення розрахункових співвідношень скінченного елемента (СЕ). Вона природньо пов'я-

зана з геометрією меридіонального перетину досліджуваного об'єкта, при цьому вісь x^3 збігається за напрямком з $z^{3'}$.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z_{i,j}^{i'}$ місцевої та базисної систем координат [2]:

$$z_{i,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z_{,3}^{\alpha'} = z_{,\alpha}^{3'} = 0.$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензору базисної системи за формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'}. \quad (1)$$

Для визначення розподілення температур із використанням МСЕ в якості вихідного взято варіаційне рівняння вісесиметричної задачі стаціонарної теплопровідності [3]:

$$\delta\chi = \int_{x^1} \int_{x^2} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2 = 0. \quad (2)$$

де $\overset{\circ}{g}$ - визначник матриці, побудованої з компонент метричного тензору; λ_T – коефіцієнт теплопровідності; T – функція, що описує розподілення температур в площині досліджуваного об'єкта.

При скінченноелементній апроксимації досліджуваного об'єкта для системи з N СЕ зазначене рівняння (2) набуває вигляду:

$$\delta\chi = \sum_{n=1}^N \delta\chi_n = \sum_{n=1}^N \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \lambda_T \left(\frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2 = 0. \quad (3)$$

Для чисельного розв'язання задач теплопровідності розроблений вісесиметричний скінченний елемент, загальний вигляд якого в базисній (а) і місцевій (б) системах координат наведений на рис. 2.

В межах СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності λ_T та значення компонент метричного тензору g^{ij} несуттєво змінюються в площині СЕ і приймаються рівними їх відповідним значенням в центрі:

$$\lambda_T = \overset{\circ}{\lambda}_T = \lambda_T|_{x^\alpha=0}, \quad g^{ij} = \overset{\circ}{g}^{ij} = g^{ij}|_{x^\alpha=0}.$$

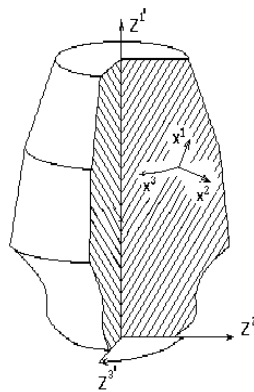


Рис. 1

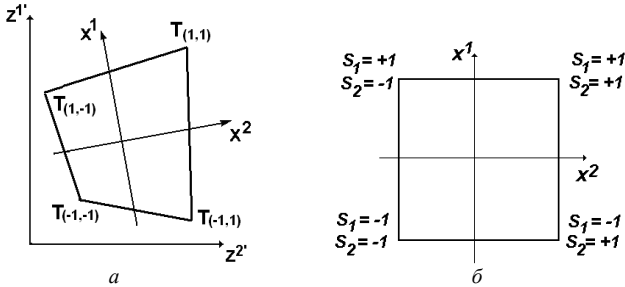


Рис. 2

В якості невідомих при розв'язанні задачі стаціонарної теплопровідності приймається значення температури в вузлах елемента $T_{(S_1, S_2)}$.

Розподілення температури у межах СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (4)$$

де $T_{(S_1, S_2)}$ – вузлові значення температури.

Вирази для похідних від температури мають вигляд:

$$T_{, \alpha} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_{\alpha}. \quad (5)$$

Після підстановки в (3) значень температури (4) та її похідних (5) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta \chi_n = & \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \lambda_T \left[\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left(T_{(S_1, S_2)} \left(\frac{1}{2} + S_{(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) S_{\alpha} \right) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(\delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{2} + P_{(3-\beta)} x^{(3-\beta)} \right) P_{\beta} \right) g^{\alpha\beta} \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (6) \end{aligned}$$

Грунтуючись на введених гіпотезах про постійність теплофізичних і геометричних характеристик в межах поперечного перерізу СЕ, а також після обчислення наступних інтегралів по площі СЕ:

$$\begin{aligned} \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} dx^1 dx^2 = 1, \quad \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} x^{\alpha} dx^1 dx^2 = 0, \\ \int_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} x^{\alpha} x^{\beta} dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}, \quad (7) \end{aligned}$$

отримаємо:

$$\delta\chi_n = \lambda_T \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left[T_{(S_1, S_2)} \delta T_{(P_1, P_2)} \left(\frac{1}{4} S_\alpha P_\beta \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 \overset{\circ}{g}^{\alpha\alpha} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}}$$

або в матричному вигляді:

$$\delta\chi_n = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \left[\delta\{T\}^T [A] \{T\}_l \right], \quad (8)$$

де $\{T\}^T = \{T_{(-1,-1)} \quad T_{(1,-1)} \quad T_{(-1,1)} \quad T_{(1,1)}\}$ – вектор температури; $[A]$ – матриці теплопровідності вісесиметричного СЕ, що обчислюються за формулою:

$$[A]_l = \left(\frac{1}{4} S_\alpha P_\beta \overset{\circ}{g}^{\alpha\beta} + \frac{1}{12} S_1 S_2 P_1 P_2 \overset{\circ}{g}^{\alpha\alpha} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} \lambda_l. \quad (9)$$

З метою доведення достовірності результатів розв'язку задачі стаціонарної теплопровідності із використанням отриманих співвідношень розглянуто тестову задачу про теплопровідність нескінченного циліндру. Дискретна модель МСЕ наведена на рис. 3.

Вихідні дані: $r_1=10$ мм, $r_2=40$ мм, температура на внутрішній поверхні стінки $T_1=100^\circ\text{C}$, температура на зовнішній поверхні стінки $T_2=400^\circ\text{C}$. Поверхні вздовж осі z^2 абсолютно теплоізовані. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв'язок отриманий в роботі [4]. Як видно, отримані результати (табл. 1) майже повністю збігаються із еталонним розв'язком.

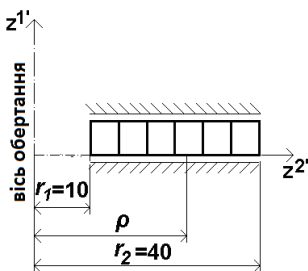


Рис. 3

Таблиця 1

ρ , мм	Температура T , $^\circ\text{C}$		Похибка, %
	Аналітично [4]	МСЕ	
10	100	100	0
15	187,74	186,62	0,60
20	250	247,87	0,85
25	298,27	296,12	0,72
30	337,74	336,62	0,33
35	371,10	370,33	0,21
40	400	400	0

2. Визначення параметрів напружено-деформованого стану при температурному навантаженні. При термопружному деформуванні напруження визначаються згідно узагальненого закону Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e. \quad (10)$$

Компоненти тензора пружних сталих C^{ijkl} для ізотропного тіла знаходимо з співвідношення:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}),$$

де коефіцієнти Ляме λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^{i^1}, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^{i^1}, T)$:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

При термопружному деформуванні вісесиметричних тіл компоненти повної деформації ε_{ij} можуть бути подані сумою пружних деформацій ε_{ij}^e та температурних деформацій ε_{ij}^T , тобто:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T. \quad (11)$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (12)$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^{k^1}, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, $\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при $T = T_0$.

Фізичні компоненти тензора температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^T = \frac{\varepsilon_{ij}^T}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (13)$$

У відповідності до МССЕ [1] в поперечному перетині температурні деформації подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^{\circ T} + \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^{\circ T} x^{(3-\alpha)}; \\ \tilde{\varepsilon}_{12}^T &= \tilde{\varepsilon}_{12}^{\circ T}; \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^T = \tilde{\varepsilon}_{33}^{\circ T} + \tilde{\varepsilon}_{33, \beta}^{\circ T} x^\beta. \end{aligned} \quad (14)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням їх подання в місцевій системі координат:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T; \\
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,(3-\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}^T &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}; \\
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}^T &= \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T; \\
\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^\beta} = \frac{\partial(\alpha_T \Delta T)}{\partial x^\beta} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,\beta},
\end{aligned} \tag{15}$$

де $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}$.

Згідно формули (13) та підставляючи (15) знаходимо:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} g_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T g_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} \sqrt{g_{11} g_{22}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T g_{12}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} g_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T g_{33}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} g_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,\beta} g_{33}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент температурних деформацій через вузлові температури (4) та їх похідні (5):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} g_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} g_{12}; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} g_{33};
\end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T = \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1,S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_\beta. \quad (17)$$

Співвідношення (17), що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\{\overset{\circ}{\varepsilon}^T\} = [\overset{\circ}{B}^T] \{T\}, \quad \{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T\} = [\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T] \{T\}, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} \{T\}^T &= \{T_{(-1;-1)} \ T_{(1;-1)} \ T_{(-1;1)} \ T_{(1;1)}\}; \\ \{\overset{\circ}{\varepsilon}^T\}^T &= \{\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T\}; \\ \{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T\}^T &= \{\overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^T\}. \\ [\overset{\circ}{B}^T] &= \begin{bmatrix} [\overset{\circ}{B}^T]^{(-1;-1)} & [\overset{\circ}{B}^T]^{(1;-1)} & [\overset{\circ}{B}^T]^{(-1;1)} & [\overset{\circ}{B}^T]^{(1;1)} \end{bmatrix}; \\ [\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T] &= \begin{bmatrix} [\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T]^{(-1;-1)} & [\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T]^{(1;-1)} & [\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T]^{(-1;1)} & [\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T]^{(1;1)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Значення компонент підматриць $[\overset{\circ}{B}^T]^{(S_1,S_2)}$, $[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T]^{(S_1,S_2)}$ у виразі (19) для вісесиметричних тіл визначаються відповідно до формул (17) з урахуванням обчислених за (1) значеннями компонент метричного тензору для вісесиметричних тіл:

$$[\overset{\circ}{B}^T]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{11} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{12} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{22} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}; \quad [\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T]^{(S_1,S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_\alpha \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}.$$

Матриця жорсткості та формули для визначення вузлових реакцій наведені в роботі [5].

Термопружне деформування товстостінної труби. Розглядається напружено деформований стан товстостінної труби нерівномірно нагрітої вздовж радіуса r (рис. 4).

Температурне поле описується законом:

$$T = -71.66 \cdot (\rho - 0.2)^{1.6}, \quad \rho = \frac{r}{b}.$$

Розв'язок задачі здійснювався при наступних значеннях фізико-механічних характеристик матеріалу: коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$, коефіцієнт лінійного теплового розширення $\alpha_T=1\cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}$, залежність модуля пружності від температури визначається формулою $E=10^3 \cdot e^{-0.04606T}$.

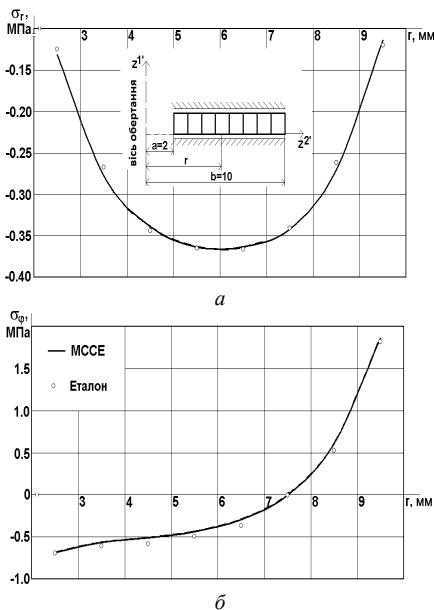


Рис. 4

Результати розрахунків та дискретна модель представлені на рис. 4 у вигляді епюр радіальних σ_r (рис. 4,а) і колових σ_ϕ (рис. 4,б) напружень. Як видно, отримані результати повністю збігаються із еталонним розв'язком отриманим в роботі [6].

Таким чином розроблена методика дозволяє отримувати достовірні результати при розв'язку вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислюкий, В.В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
2. Блох В. И. Теория упругости / В. И. Блох. – X. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. – 484 с.
3. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К. : Наук. думка, 1970. – 204 с.

4. Димніч А. Х. Теплопровідність : [навч. посібник] / А. Х. Димніч, О. А. Троянський – Донецьк, 2003. – 370 с.
5. Гуляр О.І. Эффективность моментной схемы скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень / О. І. Гуляр, І. І. Солодей, Ю. В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2012. – Вип. 89. – С. 38-52.
6. Рассказов А. О. Расчёт многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов / А. О. Рассказов // Прикл. механика.– 1978. – 14, № 8. – С. 51–56.

REFERENCES

1. Saharov A.S. Metod konechnyh jelementov v mehanike tverdyh tel. (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) / A.S. Saharov, V.N. Kislookij, V.V. Kirichevskij. – K. : Vishcha shk., 1982. – 480 s.
2. Bloh V.I. Teorija uprugosti. "Theory of Elasticity" / V. I. Bloh. – H. : Izd. Har'kovsk. Gos. Universiteta, 1964. – 484 s.
3. Kovalenko A.D. Osnovy termouprugosti. "Basics thermoelasticity" / A. D. Kovalenko. – K. : Nauk. dumka, 1970. – 204 s.
4. Dymnich A.Kh. Teploprovodnist : [navch. posibnyk]. "Thermal conductivity [teach. user]" / A. Kh. Dymnich, O.A. Troianskyi – Donetsk, 2003. – 370 s.
5. Huliar O.I. Efektyvnist momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) v zadachakh zghynu ta z kontsentratoramy napruzhen. "The efficiency of moment scheme finite element (MSFE) in problems of bending and stress concentrators" / O. I. Huliar, I. I. Solodei, Iu. V. Maksym'juk // Opir materialiv i teoriia sporud. 2012. – Vyp. 89. – S. 38 52.
6. Rasskazov A.O. Raschjot mnogoslnoj ortotropnoj pologoj obolochki metodom konechnyh jelementov. "Calculation of multilayer orthotropic shallow shell with the finite element method" / A. O. Rasskazov // Prikl. mehanika.– 1978. – 14, № 8. – S. 51–56.

Стаття надійшла до редакції 23.12.2013 р.

Андрієвський В.П., Максим'юк Ю.В.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ МСКЭ

Приведены основные расчетные соотношения осесимметричных задач стационарной теплопроводности и термоупругости в криволинейной системе координат. На основании основных положений моментной схемы конечных элементов (МСКЭ) получены соотношения для определения температурных деформаций. Проведены численные исследования для подтверждения достоверности результатов.

Ключевые слова: теплопроводность, термоупругость, осесимметричные тела, моментная схема конечных элементов.

Andriievskiy V., Maximjuk Yu.

METHOD OF SOLUTION OF AXISYMMETRIC STATIONARY HEAT CONDUCTION AND THERMOELASTICITY PROBLEM BASED ON MSFE

The basic design formulas in a curvilinear coordinate system for axisymmetric stationary heat conduction and thermoelasticity problems are given. A relations for the thermal deformations determination are obtained on the basis of the moment finite element scheme (MSFE) main provisions. Numerical studies to results validation are made.

Keywords: thermal conductivity, thermoelasticity, axisymmetric body , the moment scheme of finite elements.

UDC 539.3, 539.4

Dang Xuan Truong¹
Tran Duc Chinh², Ph.D

A METHOD OF DETERMINING THE COORDINATES OF THE STIFFNESS CENTER AND THE STIFFNESS PRINCIPAL AXIS OF THE VIBRATING SYSTEM WITH DAMPING

¹*HCMC University of technology*

268 Ly Thuong Kiet Street, Ward 14, District 10, Ho Chi Minh City, Vietnam

e-mail: dangxuantruong@hcmut.edu.vn, <http://www.hcmut.edu.vn>

²*Faculty of Civil Engineering, Ho Chi Minh city University of Transport*

02 D3 Street, Ward 25, Binh Thanh District, Ho Chi Minh City, Vietnam

e-mail: td_chinh@hcmutrans.edu.vn, <http://www.hcmutrans.edu.vn>

The report presents a methodology to determine the directions of the stiffness principal axis (in this case subject to the linear displacement and forced rotation angle) of a solid object interact with the surrounding environment by resilient bearing supports.

The results also show that determining the coordinates of the stiffness center in the vibrating system with damping factors is necessary in our research.

Key words: stiffness center, stiffness principal axis.

1. Introduction

Consider a three dimensional deformable body without vibration (Figure 1). The motion of an object so in the general case of six degrees of freedom are described by six independent geometric parameters that we can choose not only a unique way.

Suppose not vibrating objects has a mass of m and n is the number of springs (resilient bearing supports) attached to the immovable hard foundation. Assume that x, y, z coordinate system to the real space origin at point O . At the same time we also assume that there exists a coordinate system tied to mobile $oxyz$ shaking objects in question and at the initial $t=0$ coincide with the real coordinates $OXYZ$.

Suppose the object is doing a survey translational motion and at that time, the coordinate system $oxyz$ is moving to a new location $o'x'y'z'$. The origin O moved to the O' and at that time, suppose the origin O will make a move with the components in the X, Y, Z respectively by ξ_0, η_0, ζ_0 . Also solid in the new location have made the transposition angle about the axis X_1, Y_1, Z_3 respectively

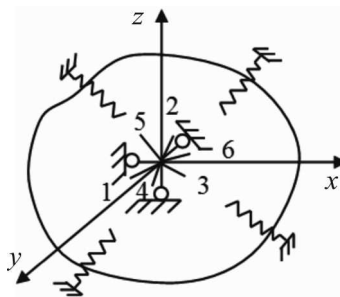


Fig. 1. A three dimensional deformable body without vibration

parallel to the axes X, Y, Z and passing through point O' , the corresponding angle in φ_x, φ_y and φ_z .

In summary, six independent parameters $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ completely determining the position of objects in space are examined at each time. If the object affected by the force \overline{N} and moment \overline{M} , they will cause the displacement directly by the axes X, Y, Z and move the angle around the axis passing through O' and parallel to the X, Y, Z . If the object only affected by the force \overline{N} with arbitrary set points, or only under the action of moment \overline{M} , one of these two factors will cause objects to both the linear displacement and rotation angle.

We will prove that in some cases the object exists on a point which, if put into force \overline{N} and moment \overline{M} , then force only caused by the force linear displacement, moment only cause rotation angle around this point. That point is called the stiffness center in the vibrating system with damping. In other words, stiffness center of a vibrating system with damping factor considered is the set of all forces of the reaction components as objects to explore a dynamic loads by any way. At that time, the assumption will survive the stiffness axis of the solid for both linear displacement and the rotation angle, which this stiffness axis through the center of the vibrating system. The stiffness principal axis is characterized, if the force \overline{N} acting on way solid survey coincides with way stiffness principal axis, it will only cause linear displacement under way this axis. Similarly the stiffness principal axis also exist for the rotation angle, meaning that if solid only under the action of an axis moment \overline{M} is identical to the stiffness principal axis, it will only cause the angle around this axis.

2. Formulation of the problem

We will prove the above properties by means of the method of displacements. Assuming that orthogonal axes X, Y, Z have point located at the O . In this coordinate system the solid has six degrees of freedom. We put in six joints directly prevent displacement and rotation angle, assuming the first three joints 1,2,3 prevent the displacement and three linear following joints 4,5,6 prevent rotation angle (around the axes X, Y, Z). If the solid the unit forced displacement $\Delta x=1, \Delta y=1$ and $\Delta z=1$ by the way of the axes X, Y, Z respectively, then at the joints above, the jet will appear:

$$\begin{aligned} r_{11}, r_{21}, r_{31}, r_{41}, r_{51}, r_{61} & \text{ respectively, by } \Delta_x = 1 \text{ caused;} \\ r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{42}, r_{52}, r_{62} & \text{ respectively, by } \Delta_y = 1 \text{ caused;} \\ r_{13}, r_{23}, r_{33}, r_{43}, r_{53}, r_{63} & \text{ respectively, by } \Delta_z = 1 \text{ caused.} \end{aligned} \quad (1)$$

Subsequently, for the solid angle surveyed rotation force units around the axis X, Y, Z , then the joint will appear jet components corresponding:

$$r_{14}, r_{24}, r_{34}, r_{44}, r_{54}, r_{64} \text{ respectively, by } \varphi_x = 1 \text{ caused;}$$

$r_{15}, r_{25}, r_{35}, r_{45}, r_{55}, r_{65}$ respectively, by $\varphi_y = 1$ caused;

$r_{16}, r_{26}, r_{36}, r_{46}, r_{56}, r_{66}$ respectively, by $\varphi_z = 1$ caused. (2)

Here, r_{ij} is the corresponding reaction appearing at the joint i by forced displacement unit according to the joint j caused.

We see $r_{ij} = r_{ji}$ the reciprocal theorem of the reaction, $i = 1,2,3,4,5,6$ and $j = 1,2,3,4,5,6$.

Assuming that we put into four matrix:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{34} & r_{35} & r_{36} \end{bmatrix}; \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{bmatrix}; \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

From reciprocity theorem, we have $\bar{B} = \bar{C}$. Assuming that force \bar{N} and moment \bar{M} , that they have the way and know beforehand the numbers, they cause the linear displacement ξ , η and ζ of a solid under the way X, Y, Z and the rotation angle φ_x, φ_y and φ_z around X, Y, Z respectively.

In this case, we have the relationship between external forces and displacements in the matrix

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \bar{A}\bar{W} + \bar{B}\bar{\varphi} \\ \bar{M} &= \bar{C}\bar{W} + \bar{D}\bar{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

With \bar{W} - the total linear displacement vector; $\bar{\varphi}$ - the total rotation angle vector.

To the way \bar{W} and \bar{N} of the same, should be conditional:

$$\bar{N} = \lambda \bar{W}; \quad \bar{M} = \nu \bar{\varphi}. \quad (5)$$

With λ and ν are the scalar magnitudes:

Replace the value of \bar{N} and \bar{M} (5) into (4) we have:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{A} - \lambda \bar{I})\bar{W} + \bar{B}\bar{\varphi} &= 0 \\ \bar{C}\bar{W} + (\bar{D} - \nu \bar{I})\bar{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

With \bar{I} is the ranked third matrix units

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

We would like interpretate above proposition as following: the elements of the matrix \bar{A} independent original position that coordinates the concurrent joint there. It just depends on the the way of the coordinate axes coincide with the way of the obstacles joint of a solid linear displacement, that we are surveying.

In fact, elements of the matrix \bar{A} shows reaction at the joints directly obstructing the displacement of a solid as a result of the unit forced displacement of solids by the way of joints. The components of this force can be found by solving the balance equation generation, each one of these equations would shows that the total elevation of all forces acting on the solid to the way axis with the way of parallel joints, where we need to determine the composition of reaction. Clearly, the value of the reaction depends only on the way joint that does not depend on the located joint. Therefore, the elements of the matrix \bar{A} depends only on the way joint linear obstructing the displacement of a solid.

We easily see that the elements of the matrix \bar{D} has no properties as the matrix \bar{A} . If we choose O as the starting point of the joint located, the elements of the matrix \bar{B} is zero and according to reciprocity theorem, we find the matrix elements \bar{C} also zero. At that time (6) takes the form:

$$(\bar{A}-\lambda I)\bar{W}=0; (\bar{D}-\nu I)\bar{\varphi}=0. \quad (7)$$

Equation (7) is to ensure conditions for the existence of O stiffness center vibrating system damping factor considered. This means that only exists a point O of the solid: If set to a force applying point \bar{N} (passing O) and a moment \bar{M} (with axis passing through O), the force caused only by the linear displacement of the force, moment is only caused rotation displacement around the point O . The point O is the stiffness center of the system vibration damping.

Formula (7) allows to determine the three values of λ and the three values of ν . Knowing λ and ν can be determined three directional cosins for λ and three directional cosins to ν . Therefore directional cosins of three directional mutual perpendicular to axis of coordinates. These ways are the directional of the principal axis to the linear displacement and the rotation angle of the solid. Indeed, from the first formula of (7) we can locate the principal axis of the solid linear displacement. We have:

$$\begin{bmatrix} r_{11}-\lambda & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22}-\lambda & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \cos \alpha \\ W \cos \beta \\ W \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Here $W\cos\alpha$, $W\cos\beta$, $W\cos\gamma$ are the components of vector \vec{W} of the linear displacement; α , β , γ are the angle of the vector by ways of total rotation with the axes X , Y , Z respectively.

We represent (8) in algebraic form:

$$\left. \begin{aligned} (r_{11}-\lambda)\cos\alpha+r_{12}\cos\beta+r_{13}\cos\gamma=0 \\ r_{21}\cos\alpha+(r_{22}-\lambda)\cos\beta+r_{23}\cos\gamma=0 \\ r_{31}\cos\alpha+r_{32}\cos\beta+(r_{33}-\lambda)\cos\gamma=0 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Indeed, it is the homogeneous equation in the directional cosins. To obtain non-trivial solution of algebraic equations we have the following condition $\det(\dots)=0$, i.e. condition on zero determinant of coefficients of unknowns of algebraic equations system.

This leads to the cubic equation:

$$\lambda^3+b_1\lambda^2+c_1\lambda+d_1=0. \quad (10)$$

With: $b_1=-r_{11}-r_{22}-r_{33}$; $c_1=-r_{11}r_{33}+r_{22}r_{33}+r_{11}r_{22}-r_{12}^2-r_{23}^2-r_{13}^2$;

$$d_1=-r_{11}r_{23}^2+r_{22}r_{13}^2+r_{33}r_{12}^2-r_{11}r_{22}r_{33}-2r_{12}r_{31}r_{23}.$$

Solving the equation (10) may be obtained:

$$\lambda_1=u_1+v_1-\frac{b_1}{3}; \lambda_2=\varepsilon_1u_1+\varepsilon_2v_1; \lambda_3=\varepsilon_2u_1+\varepsilon_1v_1. \quad (11)$$

With: $u_1=\sqrt[3]{-q_1+\sqrt{q_1^2+p_1^3}}$; $v_1=\sqrt[3]{-q_1-\sqrt{q_1^2+p_1^3}}$; $\xi_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $i=\sqrt{-1}$;

$$q_1=\frac{b_1^3}{27}-\frac{b_1c_1}{6}+\frac{d_1}{2}; v_1=\sqrt[3]{-q_1-\sqrt{q_1^2+p_1^3}}; p_1=\frac{3c_1-b_1^2}{9}.$$

In addition,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \quad (12)$$

Solve (9) in the hiddens $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ and $\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$ for each λ_j , we have:

$$\frac{\cos\beta_j}{\cos\alpha_j}=p_j; \frac{\cos\gamma_j}{\cos\alpha_j}=\xi_j. \quad (13)$$

With: $p_j=\frac{r_{12}r_{13}-r_{23}(r_{11}-\lambda_j)}{r_{12}r_{23}-r_{13}(r_{22}-\lambda_j)}=\frac{r_{13}r_{23}-r_{12}(r_{33}-\lambda_j)}{(r_{22}-\lambda_j)(r_{33}-\lambda_j)-r_{23}^2}=\frac{r_{13}^2-(r_{11}-\lambda_j)(r_{33}-\lambda_j)}{r_{12}(r_{33}-\lambda_j)-r_{13}r_{23}}$;

$$\xi_j=\frac{r_{12}r_{13}-r_{23}(r_{11}-\lambda_j)}{r_{12}r_{23}-r_{13}(r_{22}-\lambda_j)}=\frac{r_{12}^2-(r_{11}-\lambda_j)(r_{22}-\lambda_j)}{r_{13}(r_{22}-\lambda_j)-r_{12}r_{23}}=\frac{r_{13}(r_{22}-\lambda_j)-r_{12}r_{32}}{r_{23}^2-(r_{22}-\lambda_j)(r_{33}-\lambda_j)};$$

$j=1,2,3$.

In summary to determine the cosin ways, we have a system of equations:

$$\cos \beta_i = p_i \cos \alpha_i; \cos \gamma_j = \xi_j \cos \alpha_j; \cos^2 \alpha_j + \cos^2 \gamma_j + \cos^2 \gamma_j = 1. \quad (14)$$

$$\text{Solution (14) we have: } \cos \alpha_j = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p_j^2+\xi_j^2}}; \cos \beta_j = \pm \frac{a_j}{\sqrt{1+p_j^2+\xi_j^2}};$$

$$\cos \gamma_j = \pm \frac{b_j}{\sqrt{1+\eta_j^2+\zeta_j^2}} \text{ to identify three stiffness principal axis to the linear}$$

displacement.

Similarly, we can determine directional cosines of the three stiffness principal axis, for the component rotation angle.

We have:

$$\cos \mu_j = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\eta_j^2+\zeta_j^2}}; \cos \theta_j = \pm \frac{\eta_j}{\sqrt{1+\eta_j^2+\zeta_j^2}}; \cos \psi_j = \pm \frac{\zeta_j}{\sqrt{1+\eta_j^2+\zeta_j^2}}.$$

Here:

$$\eta_j = \frac{r_{46}r_{54} - (r_{44} - v_j)r_{56}}{r_{45}r_{56} - r_{46}(r_{55} - v_j)} = \frac{r_{46}r_{56} - (r_{66} - v_j)r_{54}}{(r_{55} - v_j)(r_{66} - v_j) - r_{56}^2} = \frac{r_{46} - (r_{44} - v_j)(r_{56} - v_j)}{(r_{66} - v_j)r_{45} - r_{45}r_{65}};$$

$$\zeta_j = \frac{r_{45}^2 - (r_{44} - v_j)(r_{45} - v_j)}{(r_{55} - v_j)r_{46} - r_{45}r_{56}} = \frac{r_{64}(r_{55} - v_j)r_{54}r_{65}}{r_{56}^2 - (r_{55} - v_j)(r_{66} - v_j)} = \frac{r_{45}r_{64} - r_{65}(r_{44} - v_j)}{r_{46}r_{65} - r_{45}(r_{66} - v_j)}$$

With:

$$v_1 = u_2 + v_2 - \frac{b_2}{3}; v_2 = \varepsilon_1 u_2 + \varepsilon_2 v_2; v_3 = \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_1 v_2; u_2 = \sqrt[3]{-q_2 + \sqrt{q_1^2 - p_2^2}};$$

$$v_2 = \sqrt[3]{-q_2 - \sqrt{q_2^2 - p_2^2}}; q_2 = \frac{b_2^3}{27} - \frac{b_2 c_2}{6} + \frac{d_2}{2}; p_2 = \frac{3c_2 - b_2^2}{9}; b_2 = -r_{44} - r_{55} - r_{66};$$

$$c_2 = -r_{44}r_{66} + r_{55}r_{66} + r_{44}r_{55} - r_{45}^2 - r_{56}^2 - r_{46}^2;$$

$$d_2 = r_{44}r_{56}^2 + r_{55}r_{46}^2 + r_{66}r_{45}^2 - r_{44}r_{55}r_{66} - 2r_{45}r_{64}r_{56}. \quad (16)$$

Suppose X_k, Y_k, Z_k are the stiffness principal axis of the linear displacement (in O_k origin) are stiffness center of vibration damping system (Figure 2). Choose the rectangular coordinate system with the coordinate axes $OXYZ$ parallel to the stiffness principal axis X_k, Y_k, Z_k (Figure 2). We dropped into the solid at the point O_k (stiffness center) six joints in the joints that hinder 1,2,3 of the solid linear displacement by ways of the stiffness principal X_k, Y_k, Z_k , three relevant the remaining 4,5,6 hinder the rotation angle of the solid around these axes.

For the solid displacement forced by ways units of the coordinate axes X, Y, Z . Then the forced displacement unit according to the X_k, Y_k, Z_k . Notice that

the the axes X_k, Y_k, Z_k are the stiffness principal axis of the linear displacement, so we can see $\bar{B}=0$ và $\bar{C}=0$.

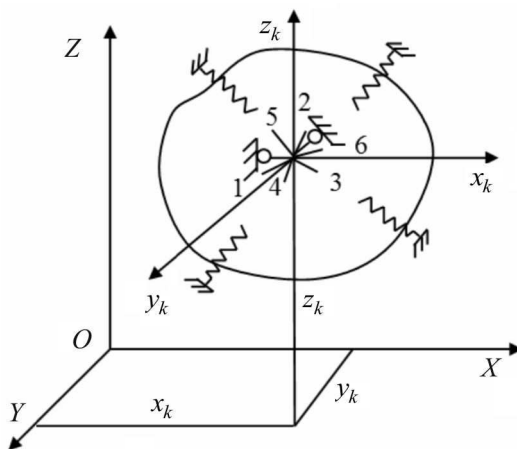


Fig. 2: Stiffness center of vibration damping system

We easily see that:

- when $\Delta_x = 1$, all of $r_{ij} = 0$ except for $r_{11} = k_x$;
- when $\Delta_y = 1$, all of $r_{ij} = 0$ except for $r_{22} = k_y$; ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$);
- when $\Delta_z = 1$, all of $r_{ij} = 0$ except for $r_{33} = k_z$; ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). (17)

While k_x, k_y, k_z are the general stiffness of the dampers (springs) relative to ways axes X, Y, Z .

Condition (17) allows us to determine the stiffness center coordinates of the vibrating system, when it is subjected to forced linear displacement and forced rotation angle. If we replace the shock absorber (the spring) by the elastic reaction. Then we make the total moment of the forces for the axis OY , while the solid under forced displacement unit according to the X ($\Delta_x = 1$), then the sum are zero, we calculated:

$$z_k = \frac{\sum M_{0y}^*}{k_x}. \quad (18)$$

Similarly in the case of the solid under the forced displacement unit according to the Y ($\Delta_y = 1$), we have:

$$z_k = \frac{\sum M_{0x}^*}{k_y}. \quad (19)$$

And if the solid under forced displacement unit according to the Z ($\Delta_z = 1$), we have:

$$x_k = \frac{\sum M_{0y}}{k_z}; \quad y_k = \frac{\sum M_{0x}}{k_z}. \quad (20)$$

In the formula (18), (19), (20) x_k, y_k, z_k are in the stiffness center coordinates of the coordinate system $OXYZ$. Which is the sum of the corresponding reaction moment which it appears in the spring dampers. It is taken for the axes OX and OY under the system of forced shift in the X and Y . That means that when $\Delta x = 1$ and $\Delta y = 1$. The total moment of the jet appears in the position of the spring damper taken for the axes OX and OY under the system of forced displacement unit according to the z , that means $\Delta z = 1$.

Suppose, the main (of the linear displacement and the rotation angle) which has identical origin at the stiffness center. When that force is ways same as one of the coordinate axes will cause linear displacement by ways of the cylinder. Simultaneously with the moment coincides with one of the coordinate system will only cause rotation angle around this axis.

3. Example

At the flat problem when vibrating system has three degrees of freedom, two linear displacement ways mutual, perpendicular and one rotate displacement in a plane. Assuming rectangular coordinate system origin at O of the solid (Figure 3).

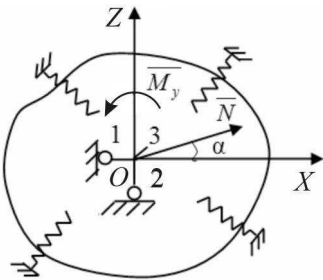


Fig. 3. Rectangular coordinate system origin at O of the solid

We put in the survey solid three joints located at point O , two of the joints will interfere with the linear displacement in the X and Z , while the remaining joints will impede the rotation displacement of the solid in XOZ plane.

Continue to the solid the linear and angle units displacements according to the ways of the joints included. At that time the joint will appear the jet, respectively by:

$$r_{11}, r_{21}, r_{31} \text{ when } \Delta_x = 1; \quad r_{12}, r_{22}, r_{32} \text{ when } \Delta_z = 1; \quad r_{13}, r_{23}, r_{33} \text{ when } \varphi_y = 1. \quad (21)$$

If we put force \bar{N} and moment \bar{M}_y on the solid, they will cause the transition (ξ, ζ) corresponding to ways X, Z and rotation angle φ in the plane XOZ around axis Y .

We have:

$$N_x = r_{11}\xi + r_{12}\eta + r_{13}\varphi; \quad N_z = r_{21}\xi + r_{22}\eta + r_{23}\varphi; \quad M_y = r_{31}\xi + r_{32}\eta + r_{33}\varphi. \quad (22)$$

At here: $N_x = N \cos \alpha$, $N_z = N \sin \alpha$ corresponding are the projection of force N onto the coordinate axes X and Z , and α is the angle by ways of the vector N to the axis OX .

If the coordinate system OXZ placed at the stiffness center of the vibrating system, then:

$$r_{13} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = 0. \quad (23)$$

If you look at (23), equations (22) has the form:

$$N_x = r_{11}\xi + r_{12}\eta; \quad N_z = r_{21}\xi + r_{22}\eta; \quad M_y = r_{33}\varphi \quad (24)$$

To determine the stiffness principal axis, when the system under linear displacement, we have the conditions:

$$\xi = W \cos \alpha; \quad \eta = W \sin \alpha; \quad N_x = \lambda W \cos \alpha; \quad N_z = \lambda W \sin \alpha \quad (25)$$

With W – length total displacement vector, and λ are unknown quantity.

The conditions (25) gives us the related:

$$(r_{11} - \lambda) \cos \alpha + r_{12} \sin \alpha = 0; \quad r_{21} \cos \alpha + r_{22} (r_{22} - \lambda) \sin \alpha = 0. \quad (26)$$

Two equations (26) linearly independent if the determinant of the coefficients ($\sin \alpha$ and $\cos \alpha$) have zero value, ie:

$$(r_{11} - \lambda)(r_{22} - \lambda) - r_{21}r_{12} = 0. \quad (27)$$

Inferred:

$$\lambda_{1,2} = \frac{r_{11} + r_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(r_{11} - r_{22})^2}{4} + r_{12}^2}. \quad (28)$$

Depending on the values of $\lambda_{1,2}$, we calculate the values of the angle α by the formula:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = -\frac{r_{11} - \lambda_{1,2}}{r_{12}} = -\frac{r_{21}}{r_{22} - \lambda_{1,2}}. \quad (29)$$

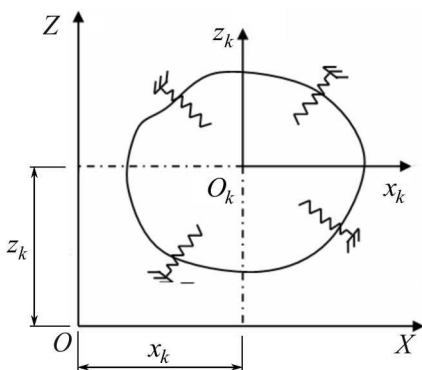


Fig. 4. The linear displacement, with original stiffness center in mind O_k

We find $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\operatorname{ctg} \alpha_2$. This means the two stiffness principal axis has found the mutual perpendicular.

Suppose X_k and Z_k respectively two stiffness principal axis of the linear displacement, with original stiffness center in mind O_k (Figure 4).

At that time (Figure 4) in the coordinate system OXZ , stiffness center coordinates can be found by the formula:

$$z_k = \frac{\sum M_{0y}^*}{k_x} ; x_k = \frac{\sum M_{0y}^0}{k_z}$$

With k_x and k_z are the stiffness of the spring damper according to the axes X and Z ; $\sum M_{0y}^*$ - The sum of the moment reaction occurs in the spring damping, taking to the OY axis is perpendicular to the solid surface XOZ under displacement unit of the x axis, ie when $\Delta x = 1$; $\sum M_{0y}^0$ - The sum of the moment reaction appears in the position of the spring damping taken for the axis OY , but when the solid under forced transfer units according to the OZ axis, ie when $\Delta z = 1$.

4. Conclusion

We have observed that, the linear displacement and rotation angle of the solid markers are taken from a static equilibrium position, while only bear the weight of solid material itself. So the problem posed and studied here has a certain significance for marine gravity projects. If the displacement of a solid is small, the balance of the vibrating system is stable. Use wing vibration theory [1,2], the concept of the stiffness axis for linear displacement and rotation angle as well as the concept of center stiffness to imagine clearer picture of the oscillations on coastal structures fixed (rig, lighthouse tower ...) when subjected to the forced transfer by waves.

The problem is that the damping springs arranged logically necessary, so that their axes through the center of the stiffness system and the fluctuations coincide with the stiffness principal axis, the ability to preserve the stability vibration are very good and calculate the fluctuations are also a lot simpler.

In many cases it can replace the dynamic force and moment by the equivalent static force set points coincide with the center of the vibrating system stiffness. This makes sense from the point transfer only to the dynamic load bearing structure of the rig.

REFERENCES

1. *Naidenko O.K., Petrov P.P.* The vibration motor ships and machinery on board. Publisher Sudpromgiz, Leningrad 1982.
2. *Manual design and calculation of the vibrations in the equipment placed on the oilrig is sensitive to vibrations.* Publisher Gostroiizdat, 1986.
3. *RW Clough & Penzien.* Dynamics of Structures. Third Edition.
4. *Anil Chopra.* Dynamics of Structures - theory and application to earthquake engineering (2nd Edition). Prentice Hall: November 11, 2000.

Стаття надійшла до редакції 23.12.2013 р.

Данг Суан Чьонг, Чан Дик Тинь

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРУ ЖОРСТКОСТІ І ГОЛОВНОЇ ОСІ ЖОРСТКОСТІ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАГАСАННЯМ

У статті представлена методика визначення напрямів головної осі жорсткості у разі лінійного зсуву і примусового повороту твердого тіла, що взаємодіє з навколишнім середовищем через пружні опори.

Результати показують, що в нашому дослідженні коливальної системи з демпфуванням визначення координат центру жорсткості є необхідним.

Ключові слова: центр жорсткості, головна вісь жорсткості.

Данг Суан Чьонг, Чан Дик Тинь

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ЖЕСТКОСТИ И ГЛАВНОЙ ОСИ ЖЕСТКОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАТУХАНИЕМ

В статье представлена методика определения направлений главной оси жесткости в случае линейного смещения и принудительного поворота твердого тела, взаимодействующего с окружающей средой через упругие опоры.

Результаты показывают, что в нашем исследовании колебательной системы с демпфированием определение координат центра жесткости является необходимым.

Ключевые слова: центр жесткости, главная ось жесткости.

УДК 539.53:620.178.15

В.В. Харченко, чл.-кор. НАН України

О.А. Каток, канд. техн. наук

А.Г. Макаєв

І.С. Кондратенко

*Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України
Тимирязєвська, 2, м. Київ, Україна. 01014*

ВПЛИВ ГЕОМЕТРІЇ ДИСКОВОГО МІКРОЗРАЗКА НА ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СТАЛІ 45

Розроблено скінченно–елементну модель для розрахунку деформування сталлюю кулькою дискового мікророзрка. На основі результатів чисельного моделювання оцінено вплив геометрії зразка на результати визначення характеристик міцності методом продавлювання дискового мікро зразка

Ключові слова: метод продавлювання дискового мікро зразка, чисельне моделювання, характеристики міцності

Вступ. Можливість продовжити ресурс та забезпечити надійність експлуатації відповідального обладнання в значній мірі залежить від значення поточних механічних характеристик конструкційних матеріалів. Застосування класичних методів механічних випробувань на розтяг в ряді випадків неможливо без пошкодження (руйнування) конструкцій, так як для проведення випробувань необхідно виготовляти зразки. Тому в ряді випадків доцільно застосовувати непрямі методи визначення механічних характеристик.

Серед непрямих методів визначення характеристик механічних властивостей металів важливе місце займає відомий своїми перевагами і перспективною метод продавлювання дискового мікророзрка, що отримав в англійській літературі назву Small Punch Test або SP-test [1-3]. Метод базується на реєстрації процесу деформування сталлюю кулькою дискового мікророзрка, який жорстко затиснутий в спеціальному пристрої. Реєстрація процесу відбувається у координатах «навантаження F , що прикладається до кульки – глибина продавлювання u дискового мікророзрка».

На сьогодні метод знаходиться на стадії розвитку. Європейським комітетом зі стандартизації розроблено довідковий документ CWA 15627.2007 [4]. Проте підвищення точності визначення характеристик механічних властивостей металів, як і раніше, залишається надзвичайно важливою і актуальною задачею механіки матеріалів.

В рамках цієї роботи розроблено скінченно-елементну модель для чисельного моделювання процесу деформування сталлюю кулькою диско-

вого мікророзрка з метою оцінки впливу геометрії зрка на визначення характеристик міцності методом продавлювання дискового мікророзрка.

Розрахункова модель для моделювання процесу деформування кулькою дискового мікророзрка. Чисельне моделювання процесу деформування сталлюю кулькою дискового мікророзрка проводили з використанням програмного комплексу, що базується на методі скінчених елементів. Внаслідок осової симетрії розглядали вісесиметричну контактну задачу в пружно-пластичній постановці.

Геометричні параметри моделі вибрано з урахуванням особливостей конструкції вузла вимірювання глибини продавлювання дискового мікророзрка лабораторної установки UTM-20 НТ [5] і представлено на рис. 1.

У розрахунках використовували пружно-пластичну модель матеріалу з урахуванням процесу пошкодження і руйнування матеріалу. У якості модельного матеріалу вибрано сталь 45 в стані поставки з характеристиками $\sigma_s=677,6 \text{ Н/мм}^2$; $\sigma_{0,2}=348 \text{ Н/мм}^2$; $E=199600 \text{ Н/мм}^2$. Індентор моделювали пружним тілом: матеріал кульки - сталь ШХ15; матеріал оправи – сталь 40Х13. Верхню й нижню затискні матриці моделювали ідеально жорсткими тілами. Процес пошкодження і руйнування матеріалу враховували за допомогою моделі GTN (Gurson–Tvergaard–Needleman) [6]. Модель GTN описує поведінку в'язкого пористого матеріалу і враховує як утворення й ріст пор, так і механізм в'язкого руйнування, викликаний їх злиттям.

На рис. 2 наведено розрахункову схему з фрагментами скінчено-елементного розбиття в області контакту дискового мікророзрка і індентора. Індентор й зразок моделювали вісесиметричними чотирикутними елементами.

Переміщення зрка в осовому і в радіальному напрямках обмежували, як показано на рис. 2. Навантажування оправи індентора здійснювали шляхом завдання переміщення на верхньому торці оправи в осовому напрямку

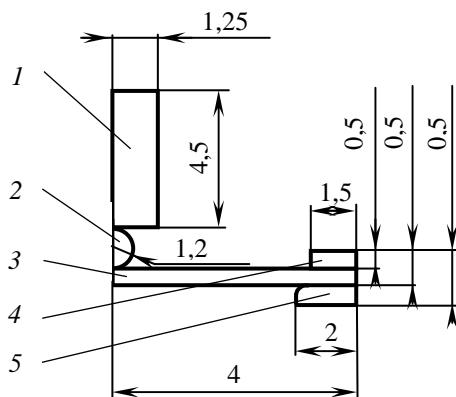


Рис. 1. Геометричні параметри розрахункової моделі чисельного моделювання процесу деформування сталлюю кулькою дискового мікророзрка: 1 – пуансон оправи індентора; 2 – кулька; – зразок; 4 і 5 – верхня і нижня затискні матриці

(по осі Y). Для моделювання взаємодії було створено дві контактні пари: пуансон оправи індентора - кулька й кулька - зразок. При моделюванні взаємодії контактної пари коефіцієнт тертя приймали 0,18, згідно [7].

Для оцінки точності результатів чисельного моделювання процесу деформування кулькою дискового мікророзрка було розглянуто розрахункові

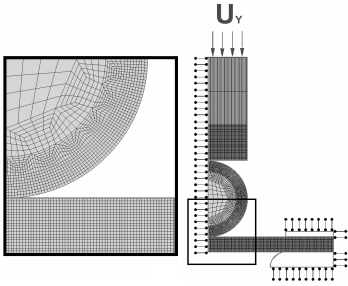


Рис. 2. Розрахункова схема для моделювання процесу деформування сталюю кулькою дискового мікророзрка й фрагменти скінчено-елементного розбиття в області контакту зразка і кульки

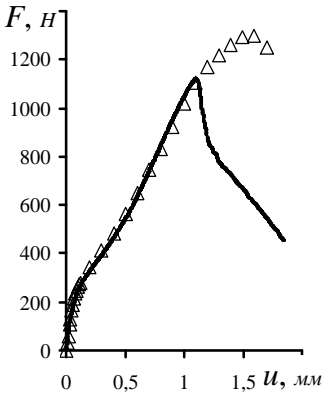


Рисунок 3. Діаграми продавлення дискового мікророзрка сталі 45 в координатах «навантаження F – глибина продавлення u » побудовані за результатами експериментальних даних (суцільна лінія) і чисельного моделювання (Δ)

схеми з різними розмірами скінчених елементів (СЕ) в області контакту зразка: 0,1 мм; 0,05 мм; 0,025 мм і 0,01 мм. Близькі результати залежностей навантаження від глибини продавлення дискового мікророзрка отримано для скінченно-елементних сіток із розмірами СЕ у зоні продавлення 0,025 мм і 0,01 мм. Тому в подальших розрахунках викорис-тано розрахункову схему з розмірами (СЕ) в області контакту зразка 0,025 мм.

Створену розрахункову модель перевіряли шляхом порівняння експериментальних діаграм продавлення дискового мікророзрка в координатах «навантаження F – глибина продавлення u » записаних на установці УТМ-20 НТ, з діаграмами, побудованими за результатами чисельного моделювання. Зіставлення цих діаграм для сталі 45 показано на рис. 3.

Розрахункова діаграма деформування кулькою дискового мікророзрка і результати експериментів, отриманих на лабораторній установці УТМ-20 НТ на стадіях пружного деформування дискового мікророзрка співпадають. На стадіях пружно-пластичного деформування та мембранного витягування дискового мікророзрка відхилення значень навантажень не перевищує 3%. Максимальне відхилення розрахункових і експериментальних даних спостері-

гається при зародженні основної тріщини в зразку. Це можна пояснити відмінністю між розрахунковим та реальним процесами пошкодження матеріалу та розвитком тріщини (рис. 4). В процесі моделювання пошкодження розвивається симетрично відносно центру зразка, тоді як в експерименті симетричність розвитку тріщини не спостерігається.

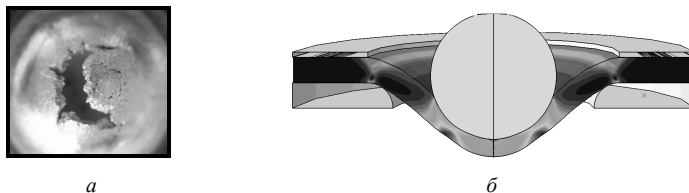


Рис. 4. Порівняння експериментальної (а) та розрахункової (б) картин розвитку пошкодження та тріщини в дисковому мікророзриві

Вплив геометрії дискового мікророзрива на результати розрахунку характеристик міцності. При виготовленні зразків для випробувань методом продавлювання дискового мікророзрива граничне відхилення по товщині може сягати $\pm 0,01$ мм. З метою дослідження геометрії дискового мікророзрива на визначення характеристик механічних властивостей сталі 45 проведено скінченно елементне моделювання із товщиною зразків 0,49 мм; 0,495 мм; 0,5 мм; 0,505 мм і 0,51 мм.

На рис. 5 представлено розрахункові діаграми деформування дискових мікророзривів товщиною 0,49 мм; 0,495 мм; 0,5 мм; 0,505 мм і 0,51 мм сталлюю кулькою діаметром 2,5 мм в координатах «Навантаження – глибина продавлювання». Рисунок наочно демонструє, що вигляд діаграм залежить не тільки від властивостей матеріалу, а й від розмірів випробуваного зразка. При відхиленні по товщині зразка в межах $\pm 0,005$ мм це менш помітно, тоді як при відхиленні по товщині в межах $\pm 0,01$ мм розкид діаграм при

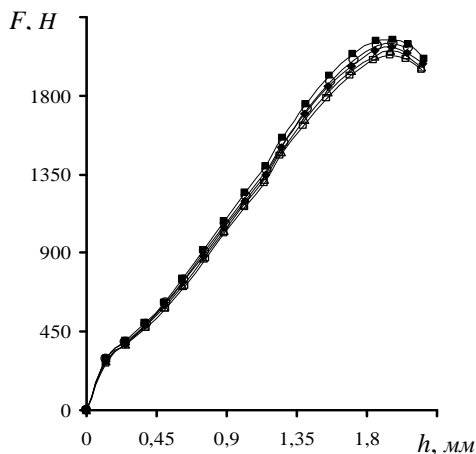


Рис. 5. Розрахункові діаграми деформування дискових мікророзривів товщиною 0,49 мм (■); 0,495 (○); 0,5 (◆); 0,505 (Δ) і 0,51 мм (□) сталлюю кулькою діаметром 2,5 мм координатах «Навантаження F – глибина продавлювання h »

максимальному навантаженні сягає 3,5 %.

Щоб позбавитися впливу геометрії зразка при визначенні характеристик механічних властивостей на практиці застосовують кореляційні залежності [3, 4], де в знаменнику присутня товщина зразка:

$$\sigma_{0,2} = \alpha \frac{F_y}{t^2}, \quad (1)$$

де α – коефіцієнт кореляції; F_y – навантаження у дисковому мікроразку в момент переходу від пружної до пружно-пластичної деформації; t – товщини зразка.

$$\sigma_e = \beta_1 \cdot \frac{F_{max}}{t^2} + \beta_2, \quad (2)$$

β_1 і β_2 – коефіцієнти кореляції; F_{max} – максимального навантаження у дисковому мікроразку перед руйнуванням; t – товщини зразка.

Результати визначення границі плинності і границі міцності сталі 45 за параметрами розрахункових діаграм деформування дискових мікроразків різної товщини із застосуванням кореляційних залежностей (1, 2) представлено в табл. 1 і табл. 2 відповідно. При визначенні характеристик міцності значення коефіцієнтів кореляції між характеристиками механічних властивостей, визначених із результатів випробувань зразків на одновісний розтяг і параметрами діаграми деформування дискових мікроразків взяті із робіт [2, 3].

Із даних, наведених в табл. 1 і 2, витікає, що розкид значень границі плинності і границі міцності, які визначені за параметрами розрахункових діаграм продавлювання дискових мікроразків різної товщини складає 1,3 % і 0,3 % відповідно. Слід відзначити, що точність оцінки характеристик міцності залежить від апроксимації діаграм деформування при визначенні параметрів F_y та F_{max} .

Таблиця 1

Розрахункові результати визначення границі плинності $\sigma_{0,2}$ сталі 45, за параметрами діаграми деформування дискових мікроразків різної товщини

№ п/п	Товщина мікроразка, мм	Коефіцієнт кореляції α [2]	F_y/t^2 , МПа	Границя плинності $\sigma_{0,2}$, МПа
1	0,49	0,36	867,5	312,3
2	0,495		869,2	312,9
3	0,5		869,6	313,0
4	0,505		874,4	314,8
5	0,51		879,2	316,5

Таблиця 2

Розрахункові результати визначення границі міцності σ_e сталі 45, за параметрами діаграми деформування дискових мікрорізків різної товщини

№ п/п	Товщина мікрорізка, мм	Коефіцієнт кореляції α [2]		F_y/t^2 , МПа	Границя міцності σ_e , МПа
		β_1	β_2		
1	0,49	77	218	2028,4	536,7
2	0,495			2057	538,0
3	0,5			2080,1	538,3
4	0,505			2098,4	538,0
5	0,51			2123	538,5

Висновок. Розроблено скінчено-елементну модель для розрахунку деформування сталлюю кулькою дискового мікрорізка. Результати чисельного моделювання підтвержені експериментальними діаграмами деформування дискових мікрорізків в координатах «Навантаження – глибина продавлювання», які отримано на установці UTM-20 НТ. На основі результатів чисельного моделювання досліджено вплив геометрії дискового мікрорізка на оцінку характеристик міцності. Показано, що при виготовленні дискових мікрорізків із відхиленням по їх товщині в межах від 0,49 до 0,51 мм може призвести до збільшення похибки результатів визначення границі міцності за параметрами діаграми деформування дискових мікрорізків до 1,3 %, границі плинності – 0,3 %.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Campitelli N.* Assessment of mechanical properties in unirradiated and irradiated zircalloys and steels with non – standart tests and finite element calculations // Dissertation. – Lausanne, 2005.- P. 5 – 110.
2. *Mao X., Takahashi H.* Development of a further-miniaturized specimen of 3mm diameter for TEM disk small punch tests // Journal of Nuclear Materials. – 1987. – 150. – P. 42 – 52.
3. *Rodríguez C., García J., Cabezas E., Cárdenas F., Belzunze J., Betegón C.* Mechanical Properties Characterization of Heat-Affected Zone Using the Small Punch Test. // Welding Journal. – 2009. vol. 88. – P. 188-192.
4. CWA 15627:2007. Small Punch Test Method for Metallic Materials.
5. *Харченко В.В., Рудницький Н.П., Каток О.А., Неговський А.Н., Дроздов А.В., Кутняк В.В.* Установка для определения механических характеристик конструкционных материалов методом инструментированного индентирования // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2007. – Вып. 28. – С. 140 – 147.
6. *Berthauer G., Brocks W.* Micro- mechanical modeling of ductile damage and tearing – results of a European numerical round robin // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2002 – Vol. 25. – P.363 – 384.

7. *Nayebi A., Abdi R. El, Bartier O., Mauvoisin G.* New procedure to determine steel mechanical parameters from the spherical indentation technique // *Mechanics of materials* – 2002. – 34. – P. 243 – 254.

REFERENCES

1. *Campitelli N.* Assessment of mechanical properties in unirradiated and irradiated zircalloys and steels with non – standart tests and finite element calculations // *Dissertation.* – Lausanne, 2005.- P. 5 – 110.
2. *Mao X., Takahashi H.* Development of a further-miniaturized specimen of 3mm diameter for TEM disk small punch tests // *Journal of Nuclear Materials.* – 1987. – 150. – P. 42 – 52.
3. *Rodríguez C., García J., Cabezas E., Cárdenas F., Belzunce J., Betegón C.* Mechanical Properties Characterization of Heat-Affected Zone Using the Small Punch Test. // *Welding Journal.* – 2009. vol. 88. – P. 188-192.
4. CWA 15627:2007. Small Punch Test Method for Metallic Materials.
5. *Kharchenko V.V., Rudnitskii N.P., Katok O.A., Negovsky A.N., Drozdov A.V., and Kutnyak V.V.* Ustanovka dlya opredeleniya mekhanicheskikh kharakteristik konstruksionnykh materialov me-todom instrumentirovannogo indentirovaniya // *Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i soo-ruzheniy.* – 2007. – Vup. 28. – С. 140 – 147.
6. *Bernaer G., Brocks W.* Micro- mechanical modeling of ductile damage and tearing – results of a European numerical round robin // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2002 – Vol. 25. – P.363 – 384.
7. *Nayebi A., Abdi R. El, Bartier O., Mauvoisin G.* New procedure to determine steel mechanical parameters from the spherical indentation technique // *Mechanics of materials* – 2002. – 34. – P. 243 – 254.

Стаття надійшла до редакції 27.03.2014 р.

Харченко В.В., Каток О.А., Макаев А.Г., Кондратенко И.С.

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ ДИСКОВОГО МИКРООБРАЗЦА НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СТАЛИ 45.

Разработано конечно–элементную модель для расчета деформирования стальным шариком дискового микрообразца. На основе результатов численного моделирования оценено влияние геометрии образца на результаты определения характеристик прочности методом продавливания дискового микрообразца.

Ключевые слова: Метод продавливания дискового микрообразца, численное моделирование, характеристики прочности.

Kharchenko V.V., Katok O.A., Makaev A.H., Kondratenko I.S.

INFLUENCE OF THE DISK-SHAPED MICROSPECIMEN GEOMETRY ON THE CHARACTERIZATION OF THE MECHANICAL PROPERTIES OF STEEL 45

The finite element model is developed for calculating the deformation of the disk-shaped microspecimen using a steel ball (the small ball punch test). Based on the results of the numerical simulation, the influence of the specimen geometry on the calculation of the strength characteristics is evaluated by the small punch test method.

Key words: Small Punch Test, numerical simulation, strength characteristics.

UDC 539.3

Yu.V. Vorona¹, Candidate of Technical Sciences**O.O. Lukianchenko**¹, Candidate of Technical Sciences**O.V. Kostina**¹, Candidate of Technical Sciences¹*Kyiv National University of Construction and Architecture**31 Povitroflotsky Avenue, Kyiv, Ukraine, 03680*

PARAMETRIC RESONANCE IN STATICALLY INDETERMINATE FRAMES

The technique for development and reduction of discrete dynamics models of frames is presented. Construction of the models is carried out using finite element method, generalized coordinates and tools of modern computer software. Parametric resonance in a statically indeterminate frame caused by external excitations is investigated. Main instability domains of the frame are determined.

Key words: parametric excitation, reduced model, buckling eigenmodes, dynamic instability domain.

The problem under consideration is parametric resonance in statically indeterminate frames caused by external influences. To obtain equations describing parametric oscillations of frames one can use equilibrium equation for static stability problems taking into consideration inertial forces and some components of frame unexcited state which may depend on time. It is believed that the ratio between the excitation frequency and the lowest eigenfrequency of the frame in the unexcited movement allows to apply quasi-static approximation and to neglect some displacements while determining the unexcited stress-strain state of the frame.

Operator equation which describes parametric oscillations of statically indeterminate frame [1] is

$$\tilde{M}\ddot{v}(t) + [\tilde{K} - (\alpha + \beta f(t))\tilde{K}_G]v(t) = 0, \quad (1)$$

where \tilde{M} , \tilde{K} are inertial and elastic operators, \tilde{K}_G is component of operator of parametric forces presented in the equation of quasi-static equilibrium. Domain of the solutions $v(\bar{x}, t)$ of equation (1) coincides with the domain of definition of the operator \tilde{K} . Operators \tilde{M} , \tilde{K} , \tilde{K}_G are positive definite. Equation (1) is written for the case when the parametric force are specified up to two factors, one of which α describes the static component of external influence while the second $\beta f(t)$ corresponds to a component that varies in time.

For numerical computation the transition from the operator equation (1) to discrete dynamic model is carried out using the finite element method. Discrete dynamic model is written as ordinary differential equations

$$M\ddot{\bar{u}}(t) + [K - (\alpha + \beta f(t))K_G] \bar{u}(t) = 0, \quad (2)$$

where $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ is the vector of nodal displacements, M, K, K_G are matrix mass, stiffness matrix and geometric stiffness matrix respectively. Reducing of the discrete model (2) is performed with the help of the method of generalized coordinates taking into account the characteristics of parametric excitation.

Nontrivial solution of system (2) can be approximated by the expression

$$\bar{u}(t) = V\bar{y}(t), \quad (3)$$

where the $n \times m$ - matrix $V = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m)$ is determined by the system of basis vectors $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^m$ and $\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ is vector of generalized coordinates. Substituting (3) in the (2) we obtain the system of m ordinary differential equations in terms of the vector $\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^T$ components

$$V^T M V \ddot{\bar{y}}(t) + [V^T K V - (\alpha + \beta f(t)) V^T K_G V] \bar{y}(t) = 0. \quad (4)$$

System (4) may be written as

$$M^* \ddot{\bar{y}}(t) + [K^* - (\alpha + \beta f(t)) K_G^*] \bar{y}(t) = 0, \quad (5)$$

where reduced mass matrix M^* , stiffness matrix K^* and geometric stiffness matrix K_G^* of dimension $m \times m$ are given by

$$M^* = V^T M V, \quad K^* = V^T K V, \quad K_G^* = V^T K_G V.$$

We accept m to be much less than n ($m \ll n$). The adequacy of the model (5) is verified by examining internal convergence with increase of m or by use of other basis vectors.

In this paper the development of the reduced model (5) runs using finite element analysis program NASTRAN [2]. Since this program, as well as other standard programs do not contain procedures for determining the reduced matrices M^*, K^*, K_G^* , one can take advantage of a procedure for estimating the system response to a given field of displacement \bar{v} , i.e. the procedure for computing the vector $K\bar{v}$, where K is stiffness matrix of a structure in a whole. The vectors $M\bar{v}, K_G\bar{v}$ can be determined applying such a procedure. Also the procedures for solving the inverse problem of static equilibrium as well as procedures for modal and buckling analysis are used.

The governing matrix equation for modal analysis of a structure is

$$(K - \omega^2 M) \bar{\varphi} = 0. \quad (6)$$

Let ω_k ($k=1, 2, \dots, m_1$) be a vector of the discrete model eigenfrequencies and $\bar{\varphi}_k = (\bar{\varphi}_{1k}, \bar{\varphi}_{2k}, \dots, \bar{\varphi}_{nk})^T$ ($k=1, 2, \dots, m_1$) be a set of its eigenvectors. Then the orthogonality conditions of the eigenvectors $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ are

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_j^T M \bar{\varphi}_i &= 0, \\ \bar{\varphi}_j^T K \bar{\varphi}_i &= 0, \end{aligned} \quad (i \neq j).$$

Using a subset of the eigenvectors $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ the approximated displacement field may be expressed as

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i \bar{\varphi}_i. \quad (7)$$

where

$$a_i = \frac{\bar{\varphi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\varphi}_i^T K \bar{\varphi}_i}. \quad (8)$$

Using (6) one may obtain

$$M \bar{\varphi}_i = \frac{1}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (9)$$

Furthermore, left multiplying both side of (7) by mass matrix M and taking into consideration (9) we get

$$M \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_1} a_i M \bar{\varphi}_i \cong \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{\omega_i^2} K \bar{\varphi}_i. \quad (10)$$

The procedure for solution of static buckling problem may be used for computing the vector $K_G \bar{v}$. The problem of frame stability may be expressed as

$$(K + \lambda K_G) \bar{\psi} = 0. \quad (11)$$

Let λ_k ($k=1, 2, \dots, m_2$) be critical values of (11), $\bar{\psi}_k = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{m_2})$ is a set of buckling eigenvectors. Due to assumptions made above about properties of the matrices K and K_G these vectors are orthogonal

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_j^T K_G \bar{\psi}_i &= 0, \\ \bar{\psi}_j^T K \bar{\psi}_i &= 0, \end{aligned} \quad (i \neq j). \quad (12)$$

Using a subset of buckling eigenvectors $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ displacement field \bar{v} can be expressed approximately as

$$\bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} b_i \bar{\psi}_i. \quad (13)$$

Similarly to (10) one can write

$$K_G \bar{v} \cong \sum_{i=1}^{m_2} -\frac{b_i}{\lambda_i} K \bar{\psi}_i, \quad (14)$$

where

$$b_i = \frac{\bar{\psi}_i^T K \bar{v}}{\bar{\psi}_i^T K \bar{\psi}_i}. \quad (15)$$

Thus the problem of determining the vector $K_G \bar{v}$ can be regarded as solved.

Next we can introduce subset of vectors $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^{m_1}$ and $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{m_2}$ of the same dimension m , i.e. $m_1 = m_2 = m$. Using the above equations one can write

$$MV = K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T KV, \quad (16)$$

$$K_G V = K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T KV, \quad (17)$$

where the matrices $\Phi = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_m)$ and $\Psi = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_m)$ have dimension $n \times m$, whereas matrices $\Omega^{-1} = \text{diag}(\omega_1^{-2}, \omega_2^{-2}, \dots, \omega_m^{-2})$ and $\Lambda^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-2}, \lambda_2^{-2}, \dots, \lambda_m^{-2})$ are diagonal.

Reduced mass matrix M^* , stiffness matrix K^* and geometric stiffness matrix K_G^* are calculated using relations

$$M^* = V^T K \Phi \Omega^{-1} \Phi^T KV, \quad (18)$$

$$K^* = V^T KV, \quad (19)$$

$$K_G^* = V^T K \Psi \Lambda^{-1} \Psi^T KV. \quad (20)$$

This paper mainly deals with the reduction of equations which describe statically indeterminate frame parametric oscillation excited by the influence of vertical axial loads. Geometrical and mechanical characteristics are taken as follows

– for the columns

$$F = 0.007569 \text{ m}^2, \quad I_z = I_y = 4.7741 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad J = 8.0617 \times 10^{-6} \text{ m}^4,$$

$$E = 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad \eta = 0.3, \quad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3;$$

– for the horizontal beams

$$F=0.007569 \text{ m}^2, \quad I_z=I_y=4.7741 \times 10^{-6} \text{ m}^4, \quad J=8.0617 \times 10^{-6} \text{ m}^4,$$

$$E=1.0 \times 10^{12} \text{ Pa}, \quad \eta=0.3, \quad \rho=100000 \text{ kg/m}^3.$$

Finite element model of the frame is shown in Figure 1. Model contains eight nodes and nine spatial beam elements with six degrees of freedom at each node. The frame is rigidly attached to the surface. Displacements along the Z axis and rotation around the X axis are restricted at others nodes.

Parametric oscillation of the frame with rigid horizontal beams can be described with the reduced system of equations (5) using only one spatial variable - linear horizontal displacement along the X axis.

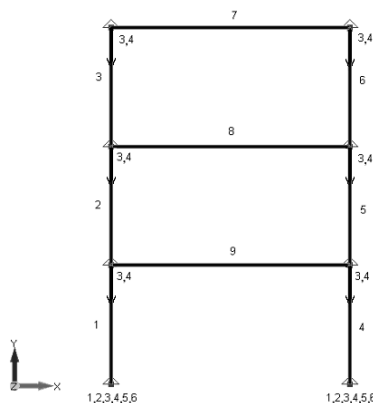


Figure 1. Finite-element model of the frame

$$M^* \ddot{\bar{x}}(t) + \left[K^* - (\alpha + \beta f(t)) K_G^* \right] \bar{x}(t) = 0, \quad (21)$$

where $\bar{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}^T$ is a displacement vector. The parametric excitation is given by $P(t) = P_0 + P_1 \cos \theta t$ and θ is the excitation frequency.

The tools of the FEM program NASTRAN is used to compute the reduced mass matrix, stiffness matrix and geometric stiffness matrix.

The generalized eigenvalue problem (6) was solved using Lanczos's method. Hereinafter only the first three eigenmodes shown in Figure 2 are taken into account to reduce the computation. Note that all the three eigenmodes are antisymmetric.

The numerical values of the eigenvectors elements are given below.

$$\{\bar{\varphi}_{n1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,004103 \\ -0,008458 \\ -0,010966 \\ 0 \\ -0,004103 \\ -0,008458 \\ -0,010966 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\varphi}_{n2}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,010091 \\ -0,005731 \\ +0,008502 \\ 0 \\ -0,010091 \\ -0,005731 \\ +0,008502 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\varphi}_{n3}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +0,009256 \\ -0,009994 \\ +0,004405 \\ 0 \\ +0,009256 \\ -0,009994 \\ +0,004405 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Buckling analysis of the frame loaded by axial forces (Figure 1) was performed in accordance with equation (11) using Lanczos's method. Critical loads $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ and correspondent buckling modes $\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2, \bar{\Psi}_3$ are depicted in Figure 3.

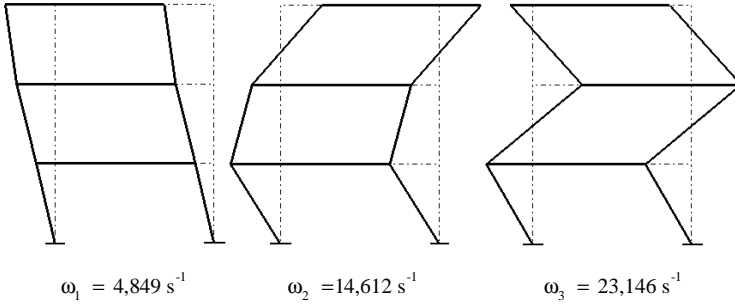


Figure 2. Eigenmodes and eigenfrequencies of the frame

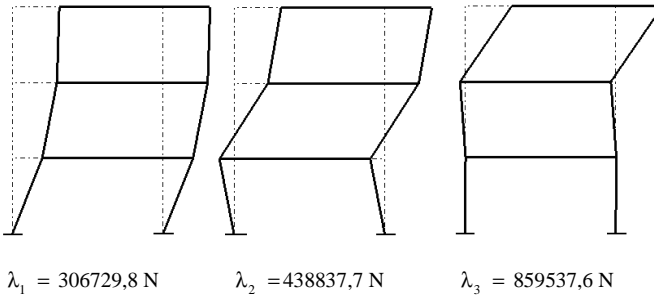


Figure 3. Buckling eigenmodes and corresponding critical values

The numerical values of the buckling eigenmodes are as follows

$$\{\bar{\Psi}_{n1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +0,636694 \\ +0,949051 \\ +1,0 \\ 0 \\ +0,636694 \\ +0,949051 \\ +1,0 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\Psi}_{n2}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,077949 \\ -0,022808 \\ -0,002823 \\ 0 \\ -0,077949 \\ -0,022808 \\ -0,002823 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{\Psi}_{n3}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,311108 \\ +0,719202 \\ +1,0 \\ 0 \\ -0,311108 \\ +0,719202 \\ +1,0 \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

Note that buckling eigenmodes are antisymmetric as well.

The reduced mass matrix is calculated using equations (18) and is approximately the unit matrix

$$M^* = \text{diag}[1,008058; 1,005287; 1,001766], \quad (24)$$

which indicates that eigenvectors are normalized with respect to the mass matrix.

Solving the inverse static problems one can determine the structure response $K\bar{\varphi}_1$, $K\bar{\varphi}_2$, $K\bar{\varphi}_3$ to given field of displacements in the form of modal eigenvectors as well as response $K\bar{\psi}_1$, $K\bar{\psi}_2$, $K\bar{\psi}_3$ to displacements in the form of buckling eigenmodes.

The reduce stiffness matrix K^* is computed in accordance with (19):

$$K^* = \begin{bmatrix} 23,5954 & 0 & 0 \\ 0 & 213,6121 & 0 \\ 0 & 0 & 535,5765 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

The matrices $\Phi^T K \Psi$ and $\Psi^T K \Phi$ were obtained on purpose to compute the geometric stiffness matrix K_G^* accordingly to equation (20):

$$\Phi^T K \Psi = \begin{bmatrix} -2504,164 & 0 & 0 \\ 0 & 7703,229 & 0 \\ 0 & 0 & -14189,69 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\Psi^T K \Phi = \begin{bmatrix} -2443,251 & 0 & 0 \\ 0 & 7548,467 & 0 \\ 0 & 0 & -14163,09 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

The reduced geometric stiffness matrix is

$$K_G^* = \begin{bmatrix} 0,66 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 3,34 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 3,59 \times 10^{-4} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

The reduced dynamic model of parametric oscillations of statically indeterminate frame is written as a system of three uncoupled second order differential equations

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + 4,858^2 \left[1 - 0,279(\alpha + \beta \cos \theta t) \times 10^{-5} \right] x_1(t) = 0, \\ \ddot{x}_2(t) + 14,615^2 \left[1 - 0,156(\alpha + \beta \cos \theta t) \times 10^{-5} \right] x_2(t) = 0, \\ \ddot{x}_3(t) + 23,143^2 \left[1 - 0,067(\alpha + \beta \cos \theta t) \times 10^{-5} \right] x_3(t) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Instability domains are areas in which any initial deviation increases indefinitely with time, i.e. undeformed shape of the frame is dynamically unstable. To determine the boundaries of the main domains of our frame instability the Bolotin's equation [1] can be applied

$$\left[K^* - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) K_G^* - \frac{1}{4} \theta^2 M^* \right] = 0. \quad (30)$$

The parametric oscillations become unstable when periodic or almost periodic solutions with periods $2T$ of the differential equations (29) exists. It is known that main resonances occur at frequencies of external load twice the eigenfrequencies of frame loaded by axial loads [3, 4].

Let us consider the dynamic stability of the frame under parametric load with static component $\alpha = [0; 0,25; 0,5] \lambda$ and dynamic component $\beta = [0,001; 0,5] \lambda$. The main instability domains near the first three eigenfrequencies are shown in Figure 4.

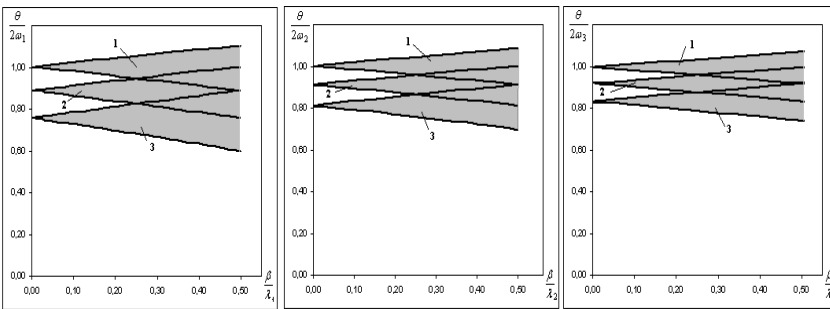


Figure 4. Main instability domains

The instability tongues in this figure are shaded. Digits 1, 2, 3 indicate the areas defined for the parameter α value equal to 0, 0,25 and 0,5 respectively. One can see that if the static component of parametric excitation is absent ($\alpha=0$) then the instability region starts with a frequency of disturbing force that is twice the unloaded frame eigenfrequency. When the static component has nonzero value then the parametric resonance begins with the frequency of disturbing force which is twice the eigenfrequency of the frame loaded with axial loads. The width of the main instability domains decreases with increasing of eigenfrequencies. Contrariwise the width of the resonance tongues increases slightly when the static component takes larger values.

REFERENCES

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
2. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с.
3. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 718 с.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. 1978. – 352 с.
1. Bolotin V.V. Dinamicheskaya ustoychivost' uprugikh sistem (The dynamic stability of elastic systems). – М.: Gostekhizdat, 1956. – 600 s.
2. Shimkovich D.H. Raschet konstruktсий v MSC/NASTRAN for Windows (Structural analysis using MSC/NASTRAN for Windows). – М.: DMK Press, 2001. – 448 s.
3. Yakubovich V.A., Starzhinskiy V.M. Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya (Linear differential equations with periodic coefficients and its applications). – М.: Nauka, 1972. – 718 s.
4. Vibratsii v tekhnike: Spravochnik (Vibration in engineering: Handbook). V 6-ty t./Red. совет: V.N. Chelomey (pred.). – М.: Mashynostroenye, 1978-T. 1. Kolebaniya lineynykh sistem (Oscillations of linear systems) /Pod red. V.V. Bolotina. 1978. – 352 s., il.

Стаття надійшла до редакції 29.04.2014 р.

Ворона Ю.В., Лук'яненко О.О., Костіна О.В.

ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС В СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМАХ

Представлено методику побудови редукованих дискретних динамічних моделей рам із застосуванням методу скінченних елементів, узагальнених координат і процедур сучасного програмного забезпечення. Досліджена стійкість параметричних коливань статично невизначуваної рами, спричинених зовнішнім впливом. Визначені головні області динамічної нестійкості рами.

Ключові слова: параметричне збудження, редукована модель, форми втрати стійкості, область динамічної нестійкості.

Ворона Ю.В., Лукьяненко О.А., Костина Е.В.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМАХ

Представлена методика построения редуцированных дискретных динамических моделей рам с применением метода конечных элементов, обобщенных координат и процедур современного программного обеспечения. Исследована устойчивость параметрических колебаний статически неопределимой рамы, вызванных внешним возбуждением. Определены главные области динамической неустойчивости рамы.

Ключевые слова: параметрическое возбуждение, редуцированная модель, формы потери устойчивости, область динамической неустойчивости.

UDC 539.3

O.O. Luk'yanchenko¹, Candidate of Technical Sciences**O.V. Kostina**¹, Candidate of Technical Sciences**O.V. Gerashchenko**¹, Candidate of Technical Sciences

¹*Kyiv National University of Construction and Architecture
31 Povitroflotsky Avenue, Kyiv, Ukraine. 03680*

INFLUENCE OF LOADING IS FROM A ROLLING STOCK ON THE DYNAMIC BEHAVIOR OF MULTI-STOREY BUILDING

The investigation of the rolling stock load influence on the multi-storey building being under construction in the close to the railroad area has been conducted. FEM calculation models of the ballast prism and the building in the interaction with the base soil were created. The acceleration of the soil at the depth of the foundation laying was obtained and, as the result, its influence on the dynamic behavior of building was evaluated.

Keywords: finite element model, dynamics, a rolling stock, multi-storey building, vibrations, ground acceleration.

Problems of vibration of the soil are becoming increasingly important in densely populated areas. This contributes to the development of transport infrastructure in areas with high population density. Railways within the big city transports heavy trains with dangerous goods at high speed through densely built-up areas. In addition to the constant threat of environmental emergency situations, it creates noise and strong vibration in the close to the railway houses. Rolling stock is the source of wave propagation in the soil, affecting the design and construction of residential buildings near the railroad tracks. Vibration can cause uneven settling of foundations and additional stresses in the elements of frame buildings, which causes cracks and even destruction. Low-frequency waves and waves that are close to the natural frequencies of buildings make the greatest influence on vibrations of buildings structures that are located near the railway.

Despite the fact that a lot of effort is devoted to the research of seismic effects on structures, aspects of vibration caused by traffic remain poorly understood. There is no credible data today on how the vibrations that occur when the rolling stock goes spread on the ground.

Fluctuations in railway wheels and crews are determined by a complex interaction of contact forces, geometrics, spring suspension systems, crew weight and damping coefficients. All this makes the task very interesting. Even when driving on a straight path at low speed there are problems associated with wagging fluctuations. There are significant fluctuations in vertical or twisting

motion in the form of forced transverse vibration of the wheelsets that appear at high speed. The nature of the dynamic interaction between train and railway varies depending on operating conditions, the nature of the principal areas of the roadbed, inequalities of wheels and rails, as well as climatic conditions.

Building a universal mathematical model to fully take into account all aspects of the interaction of the rolling stock and railway is still an impossible task. But using simplified models may explore complex dynamic phenomena that are consequences of these interactions in a particular field of research. In the research of vertical vibrations through identity excitations in the left and right wheels of a single wheelset, the design scheme can be reduced to a flat one. Wherein cart frame and wheelset frame are considered as rigid bodies with their mass concentrated in the center of mass.

The loads acting on the rail consist of vertical and horizontal longitudinal and transverse forces. Determination of loads that the rolling stock transfers to the rail and parameters of the stress-strain state of the upper part of the way is performed by generally accepted methods [1-4].

The task includes the creation of a model of interaction of the building with a ground base and interaction of the rolling stock and ground. Currently, there are several possible accounting of the elastic properties of soil base. The easiest way - Winkler foundation model, which can be implemented using the finite element linear elastic single-point connection. The main drawback of the Winkler model is that it ignores the distributing properties of the soil. An alternative to using the Winkler foundation model is a model of an elastic half-space. In this case, the base is modeled by a set of volumetric finite elements, the properties of which depend on the depth of the overlying layer. The obvious disadvantage of this model is a significant increase in the size of the model.

Assessing the influence of the dynamic load of the rolling stock on the behavior of multi-storey building has been completed in two phases. The aim of a first step was to investigate the dynamic characteristics of the soil together with the ballast prism through which the load is transmitted from the rolling stock. The second stage investigated the stress-strain state of the building from the effects of kinematic excitation of ground defined in the first stage. By the means of NASTRAN complex the finite element model of ballast and soil in the form of a flat elastic-plastic half-space has been built.

The finite element model of ballast prism and base is created (fig. 1).

Soil of the base is considered as a flat elastic half-space. Taking into account the elastic-plastic response of the soil according to the formulas

$$E_0 = E / (1 - \nu^2), \quad \nu_0 = \frac{\nu}{(1 - \nu)}$$

calculations are made for the following physical characteristics of the base and ballast:

sand (base): $E_0=16,484 \cdot 10^3 \text{ kPa}$, $\nu_0=0,429$, $\beta=0,32$, $\rho=18,0 \text{ kN/m}^3$;
 sand (ballast): $E=25 \cdot 10^3 \text{ kPa}$, $\nu=0,3$, $\beta=0,3$, $\rho=10,0 \text{ kN/m}^3$;
 aggregate (ballast): $E=5 \cdot 10^5 \text{ kPa}$, $\nu=0,27$, $\beta=0,27$, $\rho=14,0 \text{ kN/m}^3$;
 reinforced concrete sleepers: $E=3,8 \cdot 10^7 \text{ kPa}$, $\nu=0,2$, $\beta=0,05$,
 $\rho=24,5 \text{ kN/m}^3$.

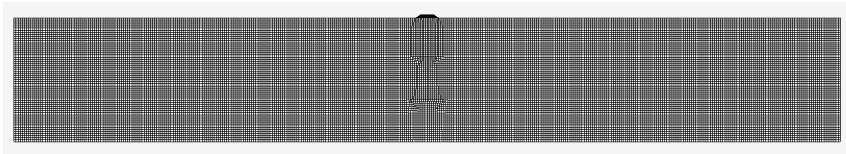


Fig. 1. The calculation chart – finite element model of ballast prism and basis

In this work there is a research of the dynamic behavior of frame building under construction in the the hundred meter zone of tracks. The house has eight above ground and one underground floor (fig. 2). The maximum plan dimensions of the building are $11 \times 36 \text{ m}$ (fig. 3). Height of the building is $27,1 \text{ m}$. Constructive scheme is a braced frame structure. Monolithic reinforced concrete raft on the basis of root piles is taken as a foundation. Overlapping and coverage slabs are monolithic flat. Partitions are made of bricks and concrete blocks. Pylons, stiffness diaphragm and lift shafts are made of in-site reinforced concrete.

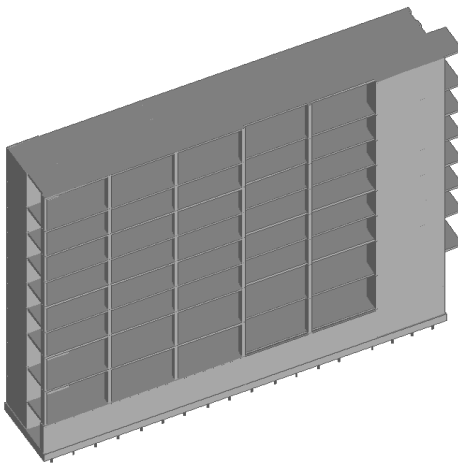


Fig. 2. 3-D model of the building

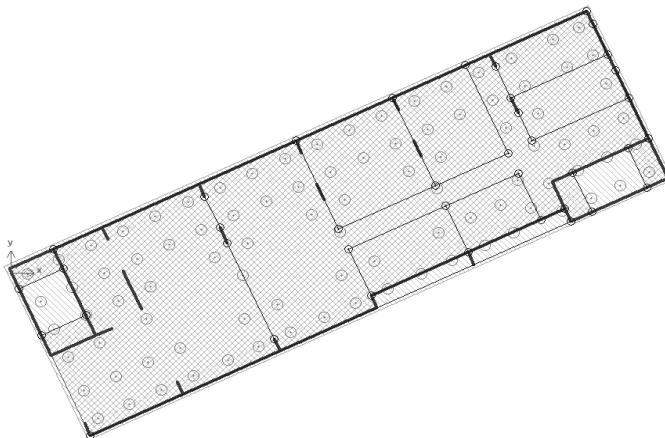
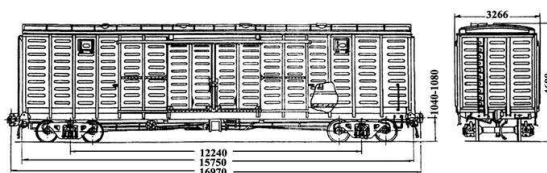


Fig. 3. Foundation plan and circuit cellar



Purpose:	for transportation of piece, grain and other goods of a wide range, requiring protection
Project Number	260.00.000-00
Specifications	TU24 - 5 - 498- 86
Carrying capacity of	67 tonnes
Wagon tare weight of	26 tonnes
load: static axial	228 <i>kN</i>
Design speed of	120 <i>km/h</i>
Base car	12240 <i>mm</i>
Length: over coupler pulling faces	16970 <i>mm</i>
end girders of the frame (frame length)	15750 <i>mm</i>
Maximum width	3266 <i>mm</i>
Height from top of rail head: maximum	4688 <i>mm</i>
up to floor level	1286 <i>mm</i>
Number of axles	4 pcs.

Fig. 4. Model specifications 11-260

First of all, a linear static calculation basis for the action of vertical load as a concentrated force of 230,5kN has been performed. This gives us the isofields of vertical and horizontal displacements (the maximum is 0.0536m) (fig. 5), normal and equivalent stress of model.

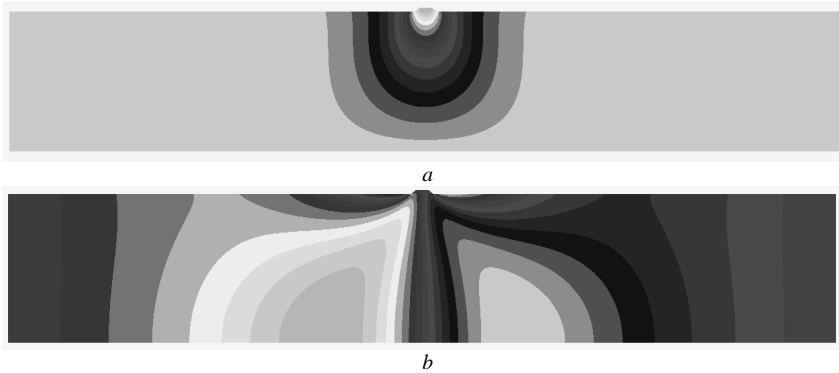


Fig. 5. Isofields of: a) vertical displacements; b) horizontal displacements

To perform dynamic analysis of the base the modal analysis using Lanczos method was conducted taking into account the 10 forms and frequencies of natural vibration.

Fig. 6 presented the first 6 forms of natural vibrations basics. It is seen that there are a kososymetrical (1, 3, 5) and symmetrical forms (2, 4, 6).

Eigenfrequencies constitute: $v=[0,2374;0,4605;0,6297;0,8042;0,8219]$ Hz.

The dynamic calculation of the base is executed under the action of vertical periodical load caused by the movement of the car with a load of 228,0kN; natural vibration frequency of the car was $6,046sec^{-1}$. The calculation is made by direct numerical integration of the motion equation at the first natural frequency of 0.237372Hz (transition process $t = 5sec$). The transition process includes both own harmonic vibration of the model at the first frequency and influence of periodic load from carriage with goods. The maximum displacement of loading point is 0.0357 m at time $t = 0,45 sec$. Accordingly, the dynamic response factor is: $0.0536m/0.0357m = 0.67 m$. If $v = 40 km/h$ the passage of one car ($L = 19.2 m$) is $t = 1.73sec$, if $v = 100 km/h - t = 0.19 sec$.

The characteristics of the soil were investigated at a distance [0 – 100]m from the action of the vertical load in the static and dynamic performances. The nonlinear problem is solved by the Newton-Raphson method of phase-static loading. Dynamic task of determining the eigenfrequencies and mode shapes of the model was performed using Lanczos method. Ground motion together with the ballast under the influence of the vertical load, which is modeled as a periodic load with a frequency equal to the eigenfrequency of the vertical oscillations of the freight car were investigated. The task of forced vibration is solved by direct numerical integration of differential motion equations of the Runge-Kutta method of order 4. Building of a finite element model of the building and its modal analysis was performed in the software package SCAD.

The quasi-static method was applied for determining the stress-strain state of the building from the ground kinematic excitation represented as vectors of accelerations applied along the entire height of the building foundation.

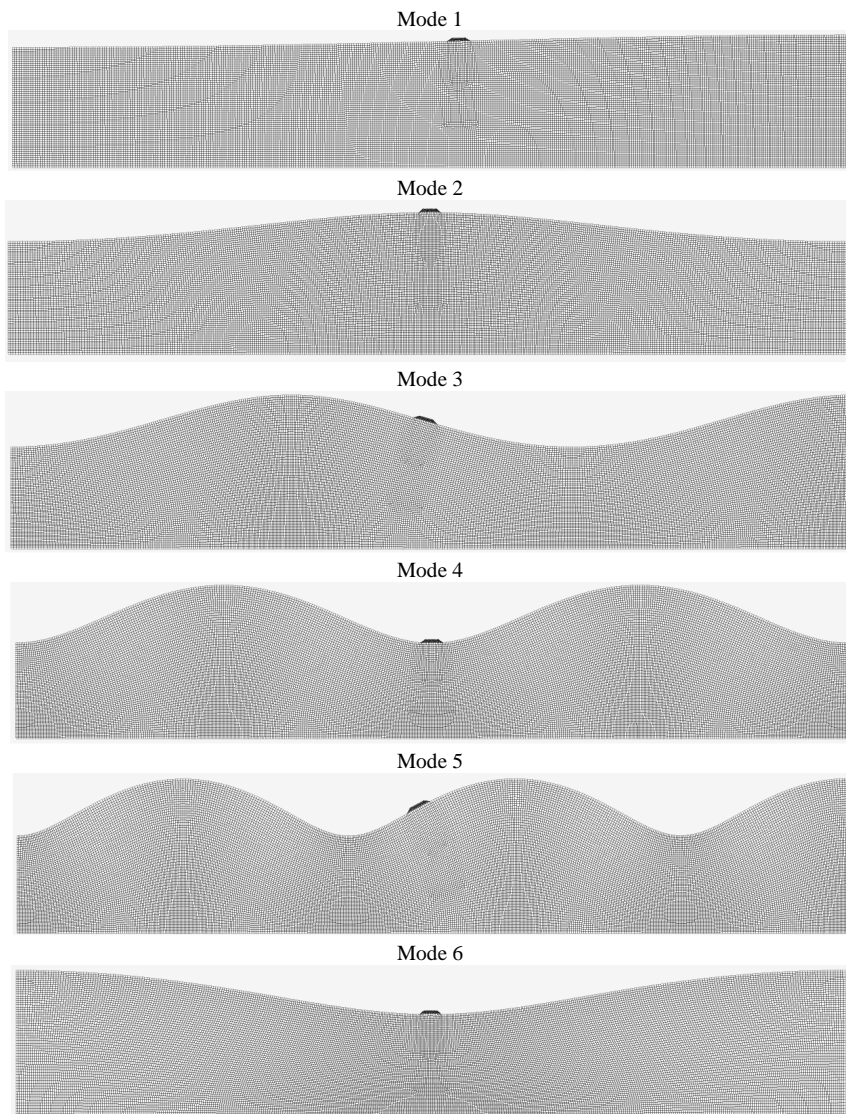


Fig. 6. Forms of natural vibrations

Consider the dynamic behavior of the surface layer of soil at a distance of [0 – 50]m from the action of vertical load (fig. 7).

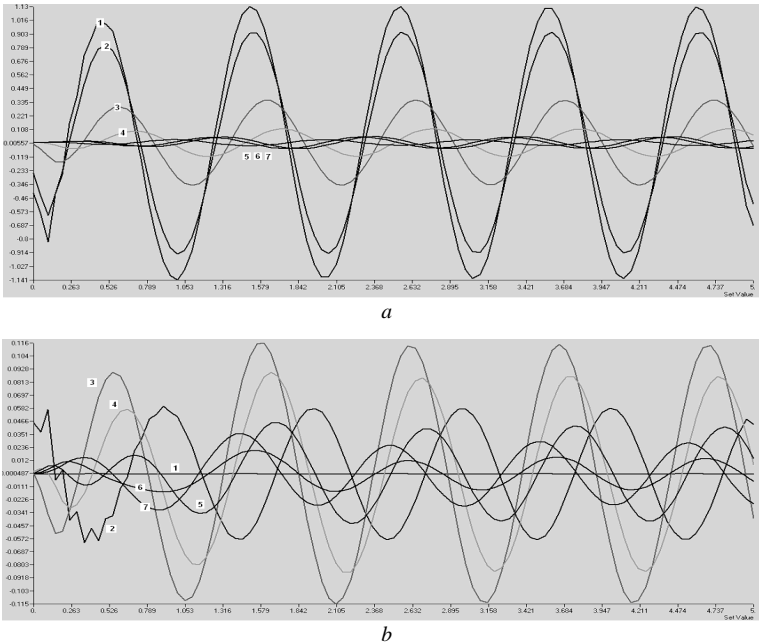


Fig. 7. Acceleration of the surface layer of soil

(1 – 0 m, 2 – 5 m, 3 – 10 m, 4 – 20 m, 5 – 30 m, 6 – 40 m, 7 – 50 m): a) vertical; b) horizontal

Maximum vertical acceleration of the surface layer of soil that is $1,14 \text{ m/sec}^2$, observed during a ballast prism in load location. The maximum horizontal acceleration of $0,116 \text{ m/sec}^2$ is observed at a distance of 10m from the place of loading. It can be seen that the vertical ground acceleration decreases with increasing distance to the location of the load. The horizontal ground acceleration ambiguously affected by this distance, so the acceleration of the ground at a distance of 40 m is $0,0256 \text{ m/sec}^2$, at 50 m – $0,0351 \text{ m/sec}^2$.

Consider the dynamic behavior of the surface layer of soil at a distance [60 – 100] m from the action of vertical load (fig. 8).

It is seen that with increasing distance vertical and horizontal acceleration of the surface layer of soil are decreases. The value of the vertical acceleration of the soil are in the range $[0,045 – 0,023] \text{ m/sec}^2$, horizontal – $[0,045 – 0,011] \text{ m/sec}^2$. The influence of rolling stock on the acceleration of soil layer depth [0 – 4]m at a distance of 95m from the place of loading are presented at the fig. 9.

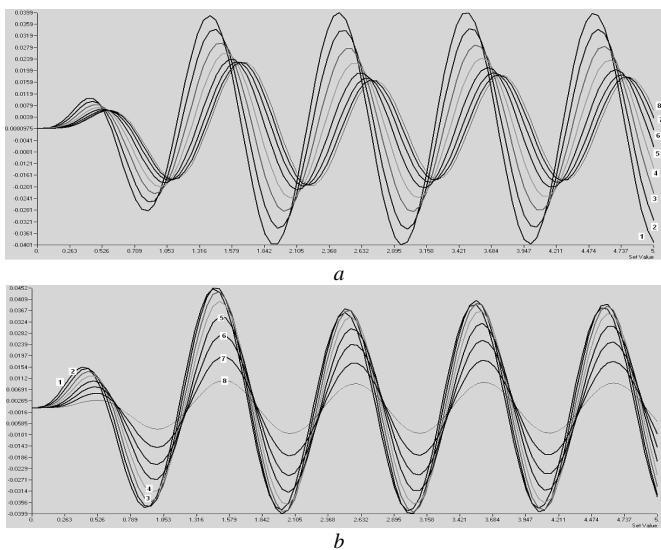


Fig. 8. Acceleration of the surface layer of soil
 (1 – 60 m, 2 – 65 m, 3 – 70 m, 4 – 75 m, 5 – 80 m, 6 – 85 m, 7 – 90 m, 8 – 95 m):
 a) vertical; b) horizontal

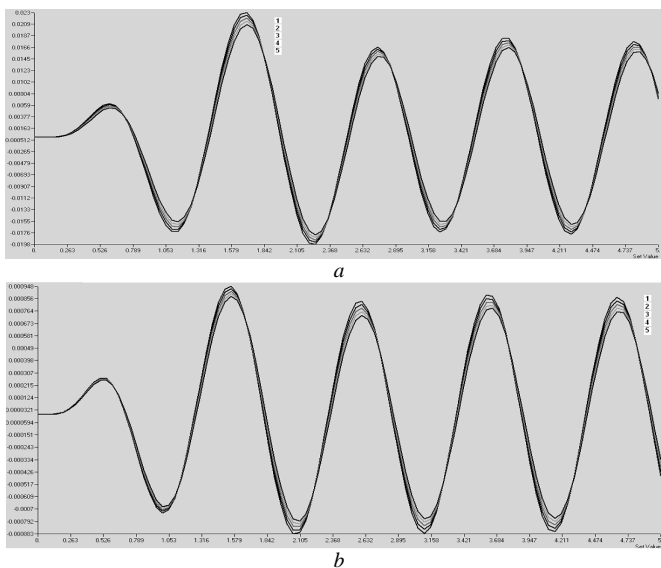


Fig. 9. Acceleration in depth soil layer at a distance 95 m
 (1 – 0m, 2 – 1m, 3 – 2m, 4 – 3m, 5 – 4m) a) vertical; b) horizontal

It can be seen that the vertical and horizontal acceleration decreases with increasing depth of soil, but not much. The maximum vertical acceleration gain values from $0,023 \text{ m/sec}^2$ to $0,021 \text{ m/sec}^2$; horizontal – from $0,001 \text{ m/sec}^2$ to $0,0008 \text{ m/sec}^2$.

The resulting acceleration is the kinematic disturbance of soil on the basement level rise building. The acceleration in the form of vectors are applied to the respective nodes FEM building.

Calculation of basic bearing elements of the frame is made to verify the adopted constructive solutions and the size of the main load-bearing structural elements: piers, stiffness nuclear, elevator shafts, floor slabs and coatings. Calculations were performed designs according to the requirements of basic operating standards of design. The maximum horizontal displacement of the frame should be within 1/500 height of the building.

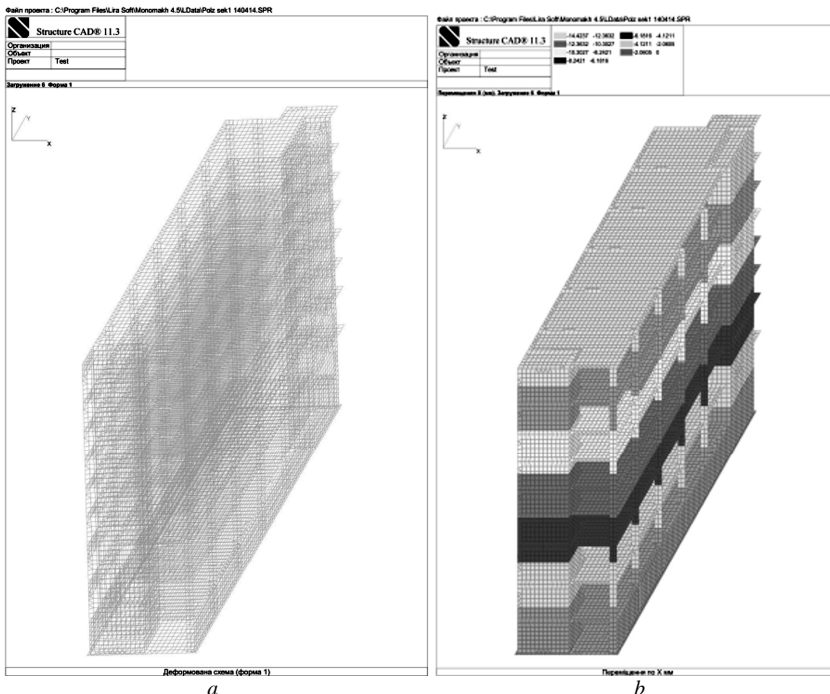


Fig. 10. Results of the calculation framework: a) deformed scheme; b) horizontal displacements

The maximum horizontal displacement of the top of the frame is $14,42 \text{ mm}$ (fig. 10, b), $f/H = 14,42 / 27100 = 1 / 1000 < 1 / 500$.

Consequently, the condition of the building horizontal deformation effects provided.

REFERENCES

1. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 600с.
2. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций – М.: Наука, 1975. – 704 с.
3. *Корнев Б.Г., Рабинович И.М.* Динамический расчет зданий и сооружений – М.: Стройиздат, 1984. – 304 с.
4. *Рабинович И.М.* Основы динамического расчета сооружений на действие мгновенных и кратковременных сил – М.: Стройиздат, 1945, – 85 с.

REFERENCES

1. *Bolotin V.V.* Dinamicheskaya ustoychivost uprugih sistem (Dynamic stability of elastic systems) – М.: Gosudarstvennoe izdatelstvo tehniko-teoreticheskoy literatury, 1956. – 600 p.
2. *Timoshenko S.P.* Prochnost i kolebaniya elementov konstruksiy (Strength and vibrations of structural elements) – М.: Nauka, 1975. – 704 p.
3. *Korenev B.G., Rabinovich I.M.* Dinamicheskiy raschet zdaniy i sooruzheniy (Dynamic analysis of buildings and structures) – М.: Stroyizdat, 1984. – 304 p.
4. *Rabinovich I.M.* Osnovy dinamicheskogo rascheta sooruzheniy na deystvie mgnovennyih i kratkovremennyih sil (Fundamentals of dynamic analysis of structures on the instantaneous and short-term forces) – М.: Stroyizdat, 1945, – 85 p.

Стаття надійшла до редакції 29.04.2014 р.

Лук'янченко О.О., Костіна О.В., Геращенко О.В.

ВПЛИВ НАВАНТАЖЕННЯ ВІД РУХОМОГО СКЛАДУ НА ДИНАМІЧНУ ПОВЕДІНКУ БАГАТОПОВЕРХОВОЇ БУДІВЛІ

Виконане дослідження впливу навантажень від рухомого складу на багатопверхову будівлю, що будується в зоні залізничних шляхів. Створені розрахункові МСЕ моделі баластової призми та будівлі у взаємодії з ґрунтом основи. Отримані прискорення ґрунту на рівні залягання фундаменту та оцінений їх вплив на динамічну поведінку будівлі.

Ключові слова: скінченноелементна модель, динаміка, рухомий склад, вібрації, прискорення ґрунту.

Лукьянченко О.А., Костина Е.В., Геращенко О.В.

ВЛИЯНИЕ НАГРУЗКИ ОТ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА НА ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОГОЭТАЖНОГО ЗДАНИЯ

Проведено исследование влияния нагрузок от подвижного состава на многоэтажное здание, строящееся в зоне железнодорожных путей. Построены расчетные МКЭ модели балластной призмы и здания во взаимодействии с грунтом основания. Получены ускорения грунта на уровне глубины заложения фундамента и оценено их влияние на динамическое поведение здания.

Ключевые слова: конечноэлементная модель, динамика, подвижной состав, многоэтажное здание, вибрации, ускорения грунта.

UDC 539.3

V.A. Bazhenov¹, Doctor of Sciences**O.S. Pogorelova**¹, Candidate of Sciences**T.G. Postnikova**¹, Candidate of Sciences

¹*Kyiv National University of Construction and Architecture
31 Povitroflotsky Avenue, Kyiv, Ukraine. 03680*

APPLICATION OF PARAMETER CONTINUATION METHOD FOR INVESTIGATION OF VIBROIMPACT SYSTEMS DYNAMIC BEHAVIOUR. PROBLEM STATE. SHORT SURVEY OF WORLD SCIENTIFIC LITERATURE

Authors in their works study vibroimpact system dynamic behaviour by numerical parametric continuation technique combined with shooting and Newton-Raphson's methods. The technique is adapted to two-mass two-degree-of-freedom vibroimpact system under periodic excitation. Impact is simulated by nonlinear contact interaction force based on Hertz's contact theory. Stability or instability of obtained periodic solutions is determined by monodromy matrix eigenvalues (multipliers) based on Floquet's theory. In the present paper we describe the state of problem of parameter continuation method using for nonlinear tasks solution. Also we give the short survey of numerous contemporary literature in English and Russian about parameter continuation method application for nonlinear problems. This method is applied for vibroimpact problem solving more rarely because of the difficulties connected with repeated impacts.

Keywords: vibro-impact system, parametric continuation technique, shooting method, instability, monodromy matrix, multipliers, bifurcation points

Vibroimpact machines and equipment are often encountered in many engineering practice applications. In general, systems with impacts between matching elements play an important role in the theory of mechanical systems vibration. Therefore the study of their dynamic behaviour and vibroimpact motion characteristics in different function conditions is an object of interest for many scientists in the world. Such investigations were developed extensively during the last decades. Many monographs and papers are devoted to this topic, for example, such well-known monographs as [1-3]. But one can face the big difficulties while solving some real and several theoretical tasks. So impact and vibroimpact processes investigations are continued at present too. Among the contemporary publications we want to underline such encyclopedic works as [4-7].

A big attention is paid to stability studying in systems with impacts, periodic motions, bifurcations, grazing bifurcations, slipping bifurcations, singularities at vibroimpact dynamics and other specific problems (see for example [8-12]).

Sticking motion in impact oscillators particularly sticking periodic motions are examined in [13] by methodology of analysis, based on a Predictor-Corrector method. Authors apply analytic predictor-corrector method and continuation method in order to obtain bifurcation diagram. They have determined some specific features such as quasiperiodic sticking motions and so-called rising bifurcation.

In [14] authors study dynamic behaviour of two-degree-of-freedom (2-DOF) cantilever beam with impacts by two methods: the Peterka's method [15] and the method of numerical integration of motion equations. These methods show a good agreement of the results. In general, many authors have obtained bifurcation diagrams by time integration of the dynamics.

In [16] the control of vibroimpact dynamics of a single-sided Hertzian contact forced oscillator is investigated analytically and numerically. This control is focused on the response near the primary resonance.

We apply the parameter continuation method in order to study vibroimpact system dynamic behaviour and periodic motions stability, to find the bifurcation points. We use parametric continuation technique in conjunction with shooting and Newton-Raphson's methods. This technique is powerful numerical tool to solve nonlinear differential equations. It can shrink the time to solve motion equations in steady-state oscillatory regimes up to ten times. Technique also allows finding out solutions step by step for each value of continuation parameter passing by the transitional process. It also opens the possibility to easily distinguish the instability zones and determine the bifurcation points.

Parameter continuation method is known for a long time. The idea to use parameter continuation to investigate solutions of nonlinear equations is coming from H.Poincare (1881-1886) [17]. Apparently, it was M.E.Lahaye (1934) [18] who applied for the first time the continuation method for numerical solution of nonlinear equations. At present parameter continuation method obtains the powerful development and is used very widely for nonlinear problems solving. Very often this methodology is used jointly with shooting method.

There is the fundamental survey of numerical continuation methods [19]. Authors describe two different types of continuation methods – the Predictor-Corrector (P.C.) methods and Piecewise Linear (P.L.) methods. But authors believe “two numerical methods have many common features and are based on similar general principles”. Therefore they are presenting both of these methods as continuation methods. There are the fundamental encyclopedic works where methods of nonlinear systems analysis are described [20, 21]. In particular, there is a detailed description of continuation technique combined with shooting method.

Among Russian language works we want to note such fundamental as [22,23,24,]. A parameter continuation method and it's applications to different nonlinear problems are described there. The problems of the best parameterization, particular points, periodic solution branches, periodic processes stability and so on are examined.

In [24] the method of periodic solutions construction for essentially nonlinear systems in conjunction with parametric continuation technique was proposed and developed. This methodology may be applied for the evolution analysis of steady-state oscillatory regimes and allows to solve many different problems for nonlinear systems.

The work [25] adapts the numerical continuation approach to find the periodic, forced steady-state response of a nonlinear system. The method uses an adaptive procedure with a predictor step and a model switching correction step based on Newton-Raphson method. Authors apply this approach to calculate nonlinear frequency response curves for a Duffing oscillator with nonlinear cubic spring and for a low order nonlinear cantilever beam.

In [26] authors use a shooting procedure combined with pseudo-arclength continuation method for the computation of nonlinear normal modes. The method relies on direct numerical time integration (e.g. Runge-Kutta or Newmark schemes) and on the Newton-Raphson algorithm. Authors demonstrate their algorithm for weakly and strongly nonlinear two-degree-of-freedom systems with one and two cubic stiffnesses.

A methodology based on shooting technique, Newmark time integration scheme and Newton-Raphson iteration method is used in [27] for predicting the periodic responses of nonlinear systems with large number of degrees of freedom.

Let us note by the way that one often considers parameter continuation method belonging to homotopy methods. The words "continuation" and "homotopy" are often used interchangeably as synonyms. However it is pointed out in [28] that between these methods there are both subtle and fundamental distinctions which have been discussed in the literature (see for example [29, 30]).

However, parameter continuation method is applied for vibroimpact problem solving more rarely because of the difficulties connected with repeated impacts.

In [31] the authors apply a parametric continuation scheme in conjunction with the shooting method, in order to study the dynamics of periodically forced piecewise non-linear systems. In particular they consider an impact pair; the continuation parameter is non-dimensional excitation frequency. In [32] authors also use parametric continuation scheme based on the shooting method with using of Newton-Raphson technique for obtain the steady-state response

of two-degree-of-freedom piecewise non-linear system. They consider in particular three-degree-of-freedom torsional model of an autonomic transmission. In [33] author rearranges the numerical continuation method. He uses a shooting method for finding periodic solutions. It is based on direct numerical time integration and Newton-Raphson algorithm. Continuation is performed with these methods by incrementing the forcing frequency. Author recommends well developed continuation packages for nonlinear system calculations, AUTO and MATCONT which are suited towards calculating periodic solutions of autonomous systems. To validate the proposed scheme author re-investigated the specific impact pair problem analyzed in [31].

In [34, 35] authors investigate preloaded vibro-impacting Hertzian contact by experimental and numerical methods. They use a classical time integration method in conjunction with a shooting method and with continuation technique. Numerical simulations for single-degree-of-freedom impact oscillator show a very good agreement with experimental results.

In [36] authors consider the motion of the impact oscillator subjected to harmonic excitation. They show that an accurate description of the dynamics is possible by a continuation method and that the stability of multiple impact periodic responses can be studied analytically.

In [37] authors develop the shooting method for impact systems. They treat the impact phenomenon where the sign of the velocity changes instantaneously and it is expressed by using a coefficient of restitution. The authors propose a shooting method for impact vibration systems that contain not only discontinuous force but also the discontinuous changes in momentum. The method consisting of the Newton-Raphson method and analytical solutions of individual linear equations of motion is formulated. The authors call this shooting method using analytical solutions as Exact+Shooting.

The differential equations of strongly nonlinear vibroimpact systems motion contain many different parameters. The question about solution changing under parameters changing is highly important. Therefore the parametric continuation method applying is sufficiently natural in this case. In our works [38-45] we have used the parameter of external loading amplitude λ and its frequency ω as continuation parameters.

We applied parametric continuation technique to study vibroimpact systems dynamics. Theory of parametric continuation use for investigation of multi-dimensional vibroimpact systems was worked out in [38]. In this work the impact was simulated by boundary conditions with restitution coefficient use based on classical stereomechanical shock theory. The theory and numerical analysis of dynamic states for two-degree-of-freedom systems with internal and external impact contact were performed when the impact was simulated in

such way [39]. In particular, the frequency-response curves were constructed and oscillatory motion stability was analyzed [40]

In [41-45] the theory and technique of parametric continuation application to 2-DOF vibroimpact system analysis were elaborated when the impact was simulated by contact interaction force. The loading curves and the frequency-response curves were constructed in large range of parameters values. The stability of obtained oscillatory motions was analyzed.

The main idea of continuation by parameter λ consists in construction of the solution $x_k(\lambda_k)$ pushing from the certain solution $x_0(\lambda_0)$, moving along the solution curve K and using the information about previous solution on every step. Usually the numerical realization of solution continuation is fulfilled as some process stepped by parameter. The realization of such stepped processes may use different iterative techniques. Their large variety is known. Often one can understand and present them independently of common scheme parametric continuation method.

In our works [38-45] and in other ones we have used parametric continuation technique combined with shooting and Newton-Raphson's methods for analysis of dynamic behaviour of two-degree-of-freedom vibroimpact system. We have simulated the impact by nonlinear contact interaction force based on Hertz's contact theory. We have performed the detailed analysis of system dynamic states in large range of external loading amplitude and frequency values. We have found the stability and instability zones of oscillatory motion. We have determined other oscillatory regimes which also are realized in instability zones. We have marked the bifurcation points, in particular, the discontinuous bifurcation points. The Poincare sections have been constructed for examination of regular or chaotic system states.

So in our opinion such investigations are very actually and really have got a novelty.

REFERENCES

1. *Babickii V. I.* Theory of vibro-impact systems //Moskva, Nauka. – 1978.
2. *Kobrincky A. E., Kobrincky A. A.* Vibroimpact Systems. – 1973.
3. *Ragulskenė V. L.* Vibro-impact Systems //Mintis, Vilna. – 1974.
4. *Ibrahim R. A.* Vibro-impact dynamics: modeling, mapping and applications. – Springer, 2009. – T. 43.
5. *Stronge W. J.* Impact mechanics. – Cambridge university press, 2004.
6. *Ivanov A. P.* Impact oscillations: linear theory of stability and bifurcations //Journal of Sound and Vibration. – 1994. – T. 178. – №. 3. – C. 361-378.
7. *Luo A. C. J., Guo Y.* Vibro-impact Dynamics. – John Wiley & Sons, 2012.
8. *Ma Y. et al.* The nature of the normal form map for soft impacting systems //International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – T. 43. – №. 6. – C. 504-513.

9. *Ajibose O. et al.* Influence of contact force models on the global and local dynamics of drifting impact oscillator //Proceedings of the 8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM'08) and 5th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS'08). – 2008.
10. *Bishop S. R.* Impact oscillators //Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences. – 1994. – Т. 347. – №. 1683. – С. 347-351.
11. *Mikhlin Y. V., Vakakis A. F., Salenger G.* Direct and inverse problems encountered in vibro-impact oscillations of a discrete system //Journal of sound and vibration. – 1998. – Т. 216. – №. 2. – С. 227-250.
12. *Foale S., Bishop S. R.* Bifurcations in impact oscillations //Nonlinear Dynamics. – 1994. – Т. 6. – №. 3. – С. 285-299.
13. *Toulemonde C., Gontier C.* Sticking motions of impact oscillators //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 1998. – Т. 17. – №. 2. – С. 339-366.
14. *Blazejczyk-Okolewska B., Czolczynski K., Kapitaniak T.* Dynamics of a two-degree-of-freedom cantilever beam with impacts //Chaos, Solitons & Fractals. – 2009. – Т. 40. – №. 4. – С. 1991-2006.
15. *Peterka F.* An investigation of the motion of impact dampers, paper I, II, III //Strojnicku Casopis XXI, c. – 1971. – Т. 5.
16. *Bichri A., Belhaq M., Perret-Liaudet J.* Control of vibroimpact dynamics of a single-sided Hertzian contact forced oscillator //Nonlinear Dynamics. – 2011. – Т. 63. – №. 1-2. – С. 51-60.
17. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation //Acta mathematica. – 1885. – Т. 7. – №. 1. – С. 259-380.
18. *Lahaye E.* Une méthode de résolution d'une catégorie d'équations transcendentes //CR Acad. Sci. Paris. – 1934. – Т. 198. – С. 1840-1842.
19. *Allgower E. L., Georg K.* Introduction to numerical continuation methods. – SIAM, 2003. – Т. 45.
20. *Nayfeh A. H., Balachandran B.* Applied nonlinear dynamics: analytical, computational and experimental methods. – John Wiley & Sons, 2008.
21. *Seydel R.* Practical bifurcation and stability analysis. – New York : Springer, 2010.
22. *Shalashilin V. I., Kuznetsov E. B.* Parametric Continuation Method and Optimal Parametrization. – 1999.
23. *Grigolyuk E. I., Shalashilin V. I.* Problems of Nonlinear Deformation: Parameter Continuation Method in Nonlinear Problems of Solid Mechanics. – 1988.
24. *Goulliaev V. I. et al.* Stability of Periodical Processes in Non-Linear Mechanical Systems //Vyshcha Shkola, Kiev. – 1983.
25. *Sracic M. W., Allen M. S.* Numerical continuation of periodic orbits for harmonically forced nonlinear systems //Civil Engineering Topics, Volume 4. – Springer New York, 2011. – С. 51-69.
26. *Peeters M. et al.* Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques //Mechanical systems and signal processing. – 2009. – Т. 23. – №. 1. – С. 195-216.
27. *Patel B. P., Ibrahim S. M., Nath Y.* Periodic response of nonlinear dynamical system with large number of degrees of freedom //Sadhana. – 2009. – Т. 34. – №. 6. – С. 1033-1037.
28. *Watson L. T.* Theory of globally convergent probability-one homotopies for nonlinear programming //SIAM Journal on Optimization. – 2001. – Т. 11. – №. 3. – С. 761-780.
29. *Ge Y. et al.* Probability-one homotopy algorithms for full and reduced order H_2/H_∞ controller synthesis //Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on. – IEEE, 1994. – Т. 3. – С. 2672-2677.
30. *Watson L. T., Billups S. C., Morgan A. P.* Algorithm 652: HOMPACk: A suite of codes for globally convergent homotopy algorithms //ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 1987. – Т. 13. – №. 3. – С. 281-310.

31. *Padmanabhan C., Singh R.* Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique //Journal of Sound and Vibration. – 1995. – Т. 184. – №. 1. – С. 35-58.
32. *Padmanabhan C., Singh R.* Dynamics of a piecewise non-linear system subject to dual harmonic excitation using parametric continuation //Journal of Sound and Vibration. – 1995. – Т. 184. – №. 5. – С. 767-799.
33. *Byrtus M.* *Dynamic Analysis of Reduced Order Large Rotating Vibro-Impact Systems* //World Academy of Science, Engineering and Technology, International Science Index 83, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering, 2003, 7(11), 1236 - 1243.
34. *Rigaud E., Perret-Liaudet J.* Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting Hertzian contact. Part I: harmonic excitation //Journal of Sound and Vibration. – 2003. – Т. 265. – №. 2. – С. 289-307.
35. *Perret-Liaudet J., Rigaud E.* Response of an impacting Hertzian contact to an order-2 subharmonic excitation: Theory and experiments //Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Т. 296. – №. 1. – С. 319-333.
36. *Gontier C., Toulemonde C.* Approach to the periodic and chaotic behaviour of the impact oscillator by a continuation method //European journal of mechanics. A. Solids. – 1997. – Т. 16. – №. 1. – С. 141-163.
37. *Yoshitake Y. et al.* Development of shooting method for impact systems //JSME International Journal Series C. – 2004. – Т. 47. – №. 3. – С. 834-844.
38. *Dekhtyaryuk E.S., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Goncharenko S.N.* Stability of Steady-State Vibration Regimes// Strength of Materials and Theory of Structures 69 (2001): 10-18. (in Ukrainian)
39. *Dekhtyaryuk E.S., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Goncharenko S.N.* Analysis of Steady-State Vibroimpact Processes in Elastic systems at Internal Impact Contact// Strength of Materials and Theory of Structures 73 (2003): 31-44. (in Ukrainian)
40. *Dekhtyaryuk E.S., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Goncharenko S.N.* Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Strength of Materials and Theory of Structures 70 (2002): 69-81. (in Ukrainian)
41. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Dynamic behaviour analysis of different types vibroimpact systems. LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH and Co. KG Dudweiler, Germany, 2013. (in Russian)
42. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* The development of continuation after parameter method for vibroimpact systems provided the impact is simulated by contact interaction force// Strength of Materials and Theory of Structures 87 (2011): 63-73. (in Ukrainian)
43. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* The realization of parameter continuation method for vibroimpact systems at loading curves construction// Strength of Materials and Theory of Structures 88 (2011): 56-64. (in Ukrainian)
44. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Theoretical principles of dynamic behavior analysis for vibroimpact systems// Strength of Materials and Theory of Structures 89 (2012): 39-49. (in Ukrainian)
45. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* principles Parameter continuation method using for analysis of vibroimpact system dynamic behaviour// Strength of Materials and Theory of Structures 90 (2012): 16-30. (in Ukrainian)

Стаття надійшла до редакції 13.12.2014 р.

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ. СТАН ПРОБЛЕМИ. КОРОТКИЙ ОГЛЯД СВІТОВОЇ НАУКОВОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Автори в своїх роботах вивчають динамічну поведінку віброударної системи за допомогою чисельної методики продовження розв'язку за параметром, комбінованим з методом стрільби та методом Ньютона-Рафсона. Методика адаптована до двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності під періодичним навантаженням. Удар моделюється нелінійною силою контактної взаємодії на основі контактної теорії Герца. Стійкість чи нестійкість отриманих періодичних розв'язків визначається власними числами матриці монодромії (мультиплікаторами) на основі теорії Флоке. В цій статті описаний стан проблеми застосування методу продовження за параметром для розв'язку нелінійних задач. Також наведений короткий огляд чисельної сучасної світової літератури англійською та російською мовами про використання методики продовження до розв'язку нелінійних проблем. Для аналізу динаміки віброударних систем ця методика застосовується значно рідше через труднощі, які пов'язані з наявністю повторюваних ударів.

Ключові слова: віброударна система, методика продовження за параметром, метод стрільби, нестійкість, матриця монодромії, мультиплікатори, точки біфуркації.

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ. КРАТКИЙ ОБЗОР МИРОВОЙ НАУЧНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Авторы в своих работах изучают динамическое поведение виброударной системы с помощью численной методики продолжения решения по параметру, комбинированной с методом стрельбы и методом Ньютона-Рафсона. Методика адаптирована к двухмассовой виброударной системе с двумя степенями свободы при периодическом нагружении. Удар моделируется нелинейной силой контактного взаимодействия на основе контактной теории Герца. Устойчивость или неустойчивость полученных периодических решений определяется собственными числами матрицы монодромии (мультипликаторами) на основе теории Флоке. В настоящей статье описывается состояние проблемы использования метода продолжения по параметру для решения нелинейных задач. Также приведен краткий обзор многочисленной современной литературы на английском и русском языках о применении методики продолжения к решению нелинейных проблем. Для анализа динамики виброударных систем эта методика применяется значительно реже из-за трудностей, связанных с наличием повторяющихся ударов.

Ключевые слова: виброударная система, методика продолжения по параметру, метод стрельбы, неустойчивость, матрица монодромии, мультипликаторы, точки бифуркации.

УДК 539.3

Д.В. Левківський¹
М.О. Янсон¹*¹Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

МЕТОД ПРЯМИХ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

В даній роботі розглядається плоска деформація товстої циліндричної оболонки, жорстко закріпленої по бічним граням. Для зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь використовується метод прямих у поєднанні з проєкційним методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. В результаті редукції рівняння зводяться до системи однорідних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних. В подальшому система розв'язується чисельно, використовуючи метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Ключові слова: метод прямих, товста циліндрична оболонка, теорія пружності, плоска деформація, напружено-деформований стан.

Основними вимогами до сучасних будівельних конструкцій, є їхня надійність та економічність. Вирішення цих проблем передбачає використання сучасних конструктивних форм, застосування нових матеріалів і новітніх технологій обробки матеріалів, для більш точного врахування реальних умов експлуатації конструкцій. Усе це потребує створення нових математичних моделей і використання сучасних чисельних методів їхньої реалізації.

Серед широкого різновиду сучасних конструктивних форм можна виділити об'єкти, що за геометричною формою нагадують сферу чи її частину та вісесиметричні відносно однієї з координат. У будівництві до них відносяться сферичні частини доменних та конверторних печей, частини захисних оболонок корпусів ядерних реакторів, тунелі метро, колектори, трубопроводи, оболонкові покриття будівель. Як правило, габаритні розміри таких об'єктів не дозволяють віднести їх до оболонок у класичному розумінні, крім того, їхній напружено-деформований стан є просторовим. Назвемо такі об'єкти товстими вісесиметричними сферичними та циліндричними оболонками.

У даній роботі розглядається згин товстої циліндричної оболонки, зображеної на (рис. 1).

Для спрощення приймається, що навантаження стале вздовж координати z . Тоді задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація) в циліндричній системі координат (рис. 2). Торцеві грані пластини певним чином взаємодіють з зовнішнім середовищем – це може бути жорстке закріплення, шарнір або пружна основа, в залежності

від умов роботи конструкції. Така модель може бути використана при розрахунку тунелів метро під навантаженням від ґрунту та води, динамічним навантаженням від руху потягу; колекторів, труб під внутрішнім тиском рідини (вода, газ) та інші.

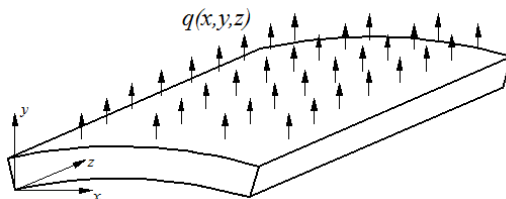


Рис. 1. Товста циліндрична оболонка

Ставиться задача визначити напружено-деформований стан товстої циліндричної оболонки під дією навантаження $q(x, s)$ при довільних умовах закріплення пластини по торцевим граням. Для зручності оболонка розглядається в системі координат yOs , що показано на (рис. 2.).

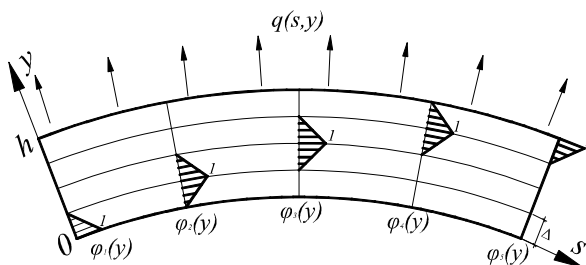


Рис. 2 Розрахункова модель (плоска деформація)

Диференціальні рівняння, що описують даний процес зручно записати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U^*}{\partial s} = \tau_{\theta r} - \frac{\partial V^*}{\partial y} + \frac{V^*}{R_0 + y} \\ \frac{\partial V^*}{\partial s} = \sigma_{\theta} \frac{1 - \nu_1}{2} - \frac{U^*}{R_0 + y} - \nu_1 \frac{\partial U^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial y} - \frac{2\tau_{\theta r}}{R_0 + y} - \theta \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial s} = -\frac{\partial \sigma_r}{\partial y} - \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{R_0 + y} - R \\ \sigma_r = \frac{2}{1 - \nu_1} \frac{\partial U^*}{\partial y} - \frac{2\nu_1}{1 - \nu_1} \frac{U^*}{R_0 + y} + \frac{2\nu_1}{1 - \nu_1} \frac{\partial V^*}{\partial s}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де $U^* = U \cdot \mu$, $V^* = V \cdot \mu$ - переміщення відповідно в напрямку s та y ;

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ - напруження; $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$, ν - коефіцієнт Пуассона; R_0 - радіус

кривизни нижньої поверхні оболонки.

Для зниження вимірності системи вихідних диференціальних рівнянь (1) скористаємось узагальненим методом прямих [5]. По координаті y оболонка розбивається лініями з сталим кроком Δ (рис. 1), на лініях обирається система локальних базисних функцій $\varphi_i(y)$, $i = 1, \dots, n$, значення функцій на i -й прямій дорівнює 1, на всіх інших 0.

Домножаючи систему (1) на базисні функції та інтегруючи на проміжку $[0, h]$ отримаємо систему однорідних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних, процес редукції детально описано в роботах [1, 2, 4, 5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_i^*}{\partial s} = \tau_{\theta r i} + (C_{1ij} g^{j\alpha} - b_{ij} g^{j\alpha}) V_\alpha^* \\ \frac{\partial V_i^*}{\partial s} = -(C_{1ij} g^{j\alpha} + \nu_1 b_{ij} g^{j\alpha}) U_\alpha^* + \left(\frac{1-\nu_1}{2}\right) \sigma_{\theta i} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta i}}{\partial s} = [\tau_{r\theta}^1 - \tau_{r\theta}^n] + (b_{ji} g^{j\alpha} - 2C_{1ij} g^{j\alpha}) \tau_{\theta r \alpha} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta i}}{\partial s} = [\sigma_r^1 - \sigma_r^n] + \left[\left(\frac{2}{1-\nu_1} - \frac{2\nu_1^2}{1-\nu_1} \right) (b_{ji} g^{jk} b_{k\beta} g^{\beta\alpha} - C_{1ij} g^{jk} b_{k\beta} g^{\beta\alpha}) \right] U_\alpha^* + \\ + (\nu_1 b_{ji} g^{j\alpha} - \nu_1 C_{1ij} g^{j\alpha} + C_{1ij} g^{j\alpha}) \sigma_{\theta \alpha}, \end{array} \right. \quad (2)$$

де $\{g_{ij}\} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y))$ - двічі коваріантний метричний тензор;

$\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} = (\varphi^i(y), \varphi^j(y))$ - двічі контраваріантний метричний тензор;

$\{b_{ij}\} = (\varphi_i(y), \varphi'_j(y))$ - скалярний добуток базису на його похідну;

$$\{C_{1ij}\} = \int_{R_0}^{h+R_0} \varphi_i(y) \cdot \varphi_j(y) \cdot \frac{1}{y+R_0} dy.$$

Компоненти системи диференціальних рівнянь (2) записані в моментах, що дає змогу зручно враховувати навантаження та граничні умови.

Граничні умови по поверхні оболонки моделюються, використовуючи вертикальні та горизонтальні пружні в'язі. Змінюючи жорсткість в'язей можна задати пружну основу, шарнірне та жорстке закріплення, осадку опори, граничні умови враховуються по аналогії з роботою [1].

При $y = R_0$:

$$\begin{aligned}\sigma_r^1 &= -q_r^1 - k_{rr1}(\Delta_r^1 - V^1), \\ \tau_{\theta r}^1 &= -q_{\theta r}^1 - k_{\theta r1}(\Delta_{\theta r}^1 - U^1),\end{aligned}\quad (3)$$

при $y = h + R_0$:

$$\begin{aligned}\sigma_r^n &= q_r^n k_{rrn}(\Delta_r^n - V^n), \\ \tau_{\theta r}^n &= -q_{\theta r}^n - k_{\theta r1}(\Delta_{\theta r}^n - U^n),\end{aligned}\quad (4)$$

при $x = 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_{ri}(0) &= -q_{s0i} - k_{ss0}(\Delta_{s0i} - V_i(0)), \\ \tau_{\theta ri}(0) &= -q_{sr0i} - k_{sr0}(\Delta_{sr0i} - U_i(0)),\end{aligned}\quad (5)$$

при $x = l$:

$$\begin{aligned}\sigma_{ri}(l) &= -q_{sli} - k_{ssl}(\Delta_{sli} - V_i(l)), \\ \tau_{\theta ri}(l) &= -q_{srli} - k_{srli}(\Delta_{srli} - U_i(l)),\end{aligned}\quad (6)$$

Гранична задача для системи звичайних диференціальних рівнянь (2)-(6) розв'язується чисельно за допомогою метода дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [3].

З метою дослідження збіжності результатів розглянуто приклад:

Задано оболонку розмірами: $h=0,2$ м, $l=1$ м, $R_0=100$ м, з фізико-механічними характеристиками: $\nu=0,3$, $E=5 \cdot 10^7$ кН/м², $q_r^n = -20$ кН/м. Оболонка жорстко закріплена по бічним граням. На графіках приведені напруження та переміщення серединної лінії оболонки (рис. 3-5).

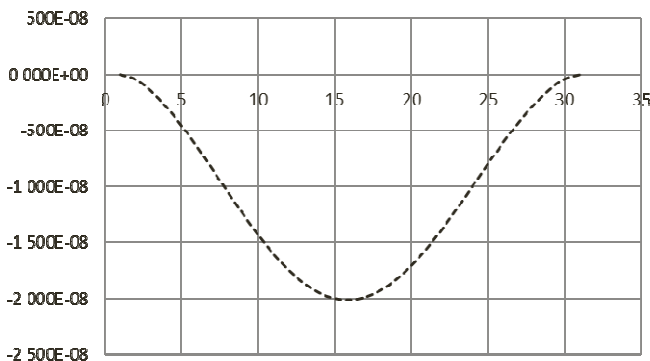
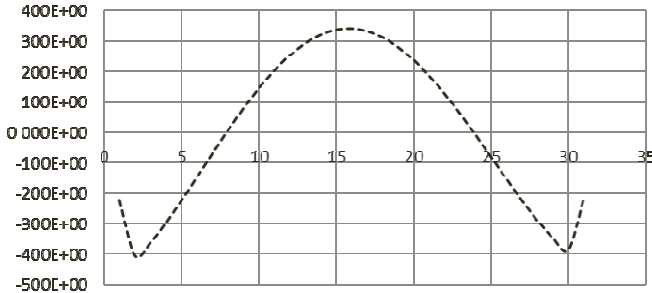
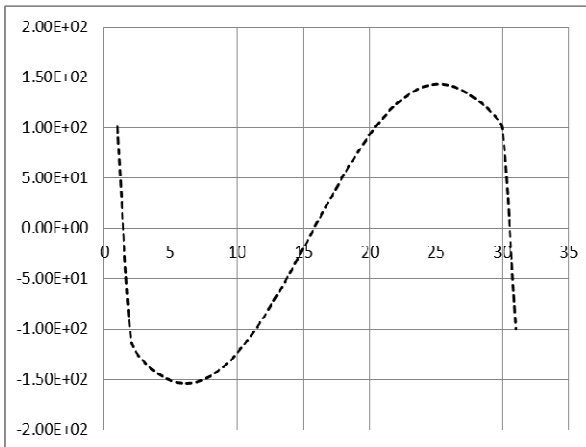


Рис. 3. Вертикальне переміщення в перерізі $y=0,1$ м

Рис. 4. σ_{θ} в перерізі $y=0,1$ мРис. 5. $\tau_{\theta r}$ в перерізі $y=0,1$ м

Висновок

Отримані результати показали високу збіжність, що підтверджується наведеними графіками.

Слід зазначити, що в зоні опирання, а йдеться про защемлення, як відомо, з'являються місцеві дефекти, які порушують виконання умов теорії пружності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Станкевич А. М., Чибіряков В. К., Шкельов Л. Т., Левківський Д. В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с.413-423.

2. *Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В.* Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46 – К.: КНУБА, 2013 – с.613-624.
3. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171-174.
4. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.* Метод прямих у просторовій задачі теорії пружності // Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» - 2011 – випуск №86, - с. 109-117.
5. *Станкевич А.М., Левківський Д.В.* Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник. – Вип. 49 – К.: КНУБА, 2013 – с. 509-521.
6. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Напіваналітичний кільцевий скінченний елемент для моделювання просторового напруженого стану армованих тіл з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.91, 2013.-с.147-156.

REFERENCES

1. *Stankevich A.M., Chibiriyakov V.K., Shkelev L.T., Levkivskiy D.V.* Do znyzhennya vymirnosti granichnyh zadach teorii' pruzhnosti za metodom pryamih // Mistobuduvannya ta terytorial'ne planuvannya: Nayk.-tehn. Zbirnyk. – Vyp.36 – K.KNUBA, 2010 s.413-423. // To the decline of measurableness maximum tasks of theory of resiliency after the method of lines // Town-planning and territorial planning: scientific and technical collection number 36, Kiev: KNUBA year 2010, pages 413-423.
2. *Chibiriyakov V.K., Stankevich A.M., Levkivskiy D.V.* Osoblyvosti znyzhennya vymirnosti rivnyan' teorii' pruzhnosti uzagal'nenym metodom pryamih // Mistobuduvannya ta terytorial'ne planuvannya: Nayk.-tehn. Zbirnyk. – Vyp.46 – K.KNUBA, 2013 s.613-424. // Features of decline of measurableness of equalizations of theory of resiliency by the generalized method of lines // Town-planning and territorial planning: scientific and technical collection number 46, Kiev: KNUBA year 2013, pages 613-424.
3. *Godunov S.K.* O chislenom reshenii kraevyh zadach dlya sistem lineynyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij // Uspehi matematicheskikh nauk. – 1961 – t.16 – vyp.3 – s.171-174 // About the numeral decision of regional tasks for the systems of linear usual differential equalizations // Successes of mathematical sciences. year 1961, volume 16, number 3, pages 171-174.
4. *Stankevich A.M., Chibiriyakov V.K., Shkelev L.T.* Metod pryamih u prostorovij zadachi teorii' pruzhnosti // Naukovo-tehnichnyj zbirnyk «Opir materialiv i teoriya sporud» - 2011 – vypusk №86, - s. 109-117 // A method of lines is in the spatial task of theory of resiliency // Scientific and technical collection is «Resistance of materials and theory of buildings», year 2011, number 86, pages 109-117.
5. *Stankevich A.M., Levkivskiy D.V.* Try varianty redukcii' rivnyan' ploskoi' zadachi teorii' pruzhnosti metodom pryamih // Mistobuduvannya ta terytorial'ne planuvannya: Nayk.-tehn. Zbirnyk. – Vyp.49 – K.KNUBA, 2013 s.509-521. // Three variants of reduction of equalizations of flat task of theory of resiliency by the method of lines. // Town-planning and territorial planning: scientific and technical collection number 49, Kiev: KNUBA year 2013, pages 509-521.

Левковский Д.В., Янсонс М.О.

МЕТОД ПРЯМЫХ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В данной работе рассматривается плоская деформация толстой цилиндрической оболочки, жестко закрепленной по боковым граням. Для снижения размерности исходных дифференциальных уравнений используется метод прямых в сочетании с проекционным методом Бубнова-Галеркина-Петрова. В результате редукции уравнения сводятся к системе однородных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных. В дальнейшем система решается численно, используя метод дискретной ортогонализации С.К.Годунова.

Ключевые слова: метод прямых, товста циліндрична оболонка, теорія пружності, плоска деформація, напружено-деформований стан.

Levkivskiy D.V., Yansons M.O.

THE METHOD OF LINES IN A CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM

In this paper the plane strain thick cylindrical shell is rigidly attached to the side faces. To reduce the dimension of initial differential equation method is used in combination with the direct projection of the Bubnov-Galerkin-Petrov. As a result of the reduction equations are reduced to a system of homogeneous first order differential equations in partial derivatives. In the future, the system is solved numerically using the method of discrete orthogonalization S.K.Godunova.

Keywords: method of lines, thick cylinder shell, theory of resiliency, flat deformation, tensely deformed the state.

УДК 539.3

О.О. Шкриль¹, канд. техн. наук

¹Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ДВОВИМІРНИХ ТІЛАХ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На основі моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) реалізована методика визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) в двовимірних тілах при дії температурного навантаження. Результати розв'язання тестових задач показують, що енергетичні методи визначення КІН є більш ефективними порівняно із прямим методом.

Ключові слова: Двовимірна задача, коефіцієнт інтенсивності напружень, температурне навантаження, метод скінченних елементів.

Вступ. Значна частина конструкцій енергетичних установок експлуатується в умовах дії температурного навантаження. З часом в деяких деталях таких конструкцій можуть виникати тріщини. Оцінка несучої здатності тіл з тріщинами виконується за величинами параметрів механіки руйнування. При дії температурних впливів, що супроводжуються лінійними деформаціями, серед таких параметрів найбільшого поширення здобув коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). При розв'язанні задач із визначення КІН використовуються переважно чисельні методи. Серед них найбільшого поширення здобув метод скінченних елементів (МСЕ). Як показали проведені дослідження [2, 10] ефективним варіантом МСЕ є моментна схема скінченних елементів (МССЕ) [10]. Тому актуальним є реалізація методики визначення КІН в двовимірних тілах під дією температурного навантаження на основі МССЕ. Для визначення КІН застосовуються переважно енергетичні або прямі методи. До енергетичних методів можна віднести метод піддатливості та J -інтеграла Черепанова-Райса.

Метод піддатливості. При деформуванні просторового тіла з початковою тріщиною, напружено-деформований стан (НДС) в околі вершини тріщини та можливість розвитку тріщини обумовлюється співвідношенням між роботою зовнішніх сил або потенційною енергією пружних деформацій, та поверхневою енергією тіла Π . Передбачаючи, що робота зовнішніх сил повністю витрачається на утворення нової поверхні тріщини, для густини енергії деформації G , що звільнюється при розкритті тріщини на величину dl , можна записати [1, 8, 11, 12]:

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial \ell}. \quad (1)$$

Скінченно-елементна реалізація методу піддатливості в МССЕ описана в роботі [2].

J-інтеграл Черепанова-Райса. Як зазначено в роботі [11] при складанні балансу енергії для області навколо вершини тріщини, отримується різниця енергій тіла до і після малого прирощення довжини тріщини (рис. 1):

$$J = \int_S (W n_t - \vec{n} \cdot \hat{\sigma} \cdot (\hat{\nabla} u)^T \vec{t}) dS. \quad (2)$$

де W – величина повної енергії деформування, в загальному випадку

$$W = \int_0^{\hat{\varepsilon}} \hat{\sigma} \cdot d\hat{\varepsilon}, \text{ при пружному деформуванні}$$

ні $W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень, $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформацій, \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні інтегрування F ; \vec{t} – вектор, що визначає напрямок розвитку тріщини в точці фронту, де обчислюється J -інтеграл; n_t – проекція нормалі \vec{n} на напрямок вектора \vec{t} ; $\hat{\nabla} u$ – градієнт переміщень.

При наявності нерівномірного температурного поля, вираз інваріантного інтегралу набуває наступного вигляду [1, 9]:

$$J^* = J + \int_S \alpha \sigma_{ij} \delta_{ij} \frac{\partial T}{\partial x} dS, \quad (3)$$

де J – інтеграл вигляду (2). Детальне викладення методики визначення J – інтеграла в дискретних моделях МСЕ описано в роботах [3-6].

Зв'язок КІН з величинами J та G за умов лінійного деформування визначається за формулою [1, 8, 12]:

$$G = J = k K_I^2 / E. \quad (4)$$

де $k=1$ за умов плоского напруженого стану і $k=1-\nu^2$ для плоскої деформації, E – модуль Юнга.

Прямий метод. В загальному випадку термосилового навантаження зв'язок між напруженнями та коефіцієнтом інтенсивності напружень першого роду (КІН) K_i в пов'язаній з вершиною тріщини системі координат y^i ($i=1, 2$) (рис. 2) визначається наступними формулами [1, 8, 12]:

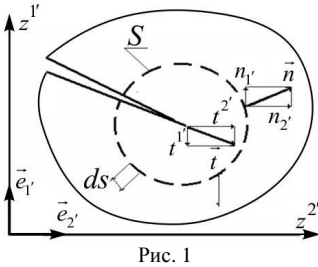


Рис. 1

$$\begin{aligned}\sigma^{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma^{12} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \sigma^{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right),\end{aligned}\quad (5)$$

де r, θ – полярні координати точки визначення КІН (рис. 2).

При постійній температурі T в околі вершини тріщини зв'язок між переміщеннями і K_I описується формулою [1, 8] :

$$u_i = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot F_i(\theta) + \alpha' \cdot k \cdot T y^i, \quad (6)$$

де G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуасона; $\alpha' = \alpha$ – коефіцієнт лінійного розширення у випадку плоского напруженого стану, $\alpha' = \alpha(1+\nu)$ для плоскої деформації.

$$F_1(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

$$F_2(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left(k - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),$$

де $k = 3 - 4\nu$ для плоскої деформації, $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напруженого стану. Реалізація методики визначення КІН прямим методом в дискретних моделях МСЕ описана в монографії [2].

Тестові задачі. Апробація методики визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) при наявності температурного навантаження спочатку була проведеною при розв'язанні задачі про визначення КІН для порожнистого циліндра з середнім радіусом $R_m = 50 \text{ см}$, висотою $2h = 100 \text{ см}$, товщиною стінки $t = 10 \text{ см}$ та з зовнішньою кільцевою тріщиною глибиною $l = 5 \text{ см}$, фронт якої збігається із середнім радіусом поперечного перерізу циліндра (рис. 3).

На внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра підтримуються постійні температури. Розподіл температури по товщині стінки описується логарифмічним законом:

$$T(r) = \Delta T \cdot \ln \left(\frac{R_m + t/2}{r} \right) / \ln \left(\frac{R_m + t/2}{R_m - t/2} \right), \quad (7)$$

де $\Delta T = 100^\circ$ – перепад температури по товщині стінки.

Враховуючи геометричні розміри циліндра та значення перепаду температури формула (7) набуде вигляду:

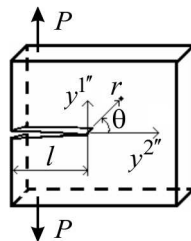


Рис. 2. Тріщина нормального відриву

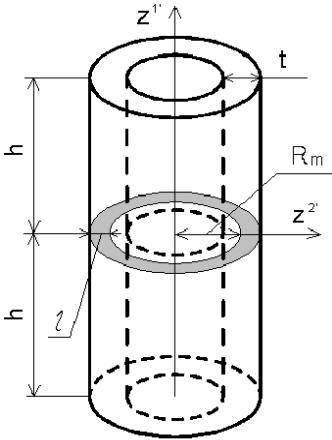


Рис. 3. Порожнистий циліндр з зовнішньою тріщиною

$$T(r) = 100 \cdot \ln(55/r) / \ln(11/9).$$

Визначення КІН прямим методом виконується за значеннями переміщень в околі вершини тріщини:

$$K_I = \frac{u_1 - \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot T \cdot x^1}{\sin \frac{\theta}{2} (2 - 4\nu + \cos \theta)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \cdot 2G. \quad (8)$$

Значення температури T визначається за формулою (7), а x^1 є координатою точки визначення КІН в системі координат тріщини.

В якості еталонного прийнято результати наведені в [8], де величина КІН подається із використанням безрозмірного множника

$$F = \frac{K_I}{\alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot \sqrt{\pi \cdot l}}, \text{ який залежить від}$$

відносної глибини тріщини i в розглядуваному випадку при $l/t=0,5$ становить 0.55.

$$K_I^{em} = F \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot \sqrt{\pi \cdot l} = 0.55 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot 1 \cdot \sqrt{3 \cdot 14 \cdot 5} = 2.179 \cdot 10^{-3} \text{ кз/см}^{3/2}.$$

Скінченно-елементна модель (СЕМ) побудована в осях $z^1 - z^2$ та складається з чотирьох сіткових фрагментів (рис. 4,а). Згідно із наданими в [2] рекомендаціями при побудові дискретної моделі розміри СЕ привершинної області прийняті 1/10 довжини тріщини (СЕМ №1). Число скінчених елементів – 230, кількість невідомих складає 528. Для забезпечення збіжності НДС в другій дискретній моделі розміри скінчених елементів в привершинній області було зменшено до 1/20 довжини тріщини (СЕМ №2, рис. 4,б). Кількість невідомих СЕМ №2 становить 1320, число скінчених елементів – 602. Результати визначення $K_I(u)$ [7] як по області так і по вузлу, що є найближчим до вершини тріщини, добре узгоджуються з результатами, отриманими іншими авторами [8] (табл. 1).

Таблиця 1

	СЕМ №1	СЕМ №2
$K_I^{обл}(u)$ (кз/см ^{3/2})	2.0172×10^{-3}	1.98×10^{-3}
$K_I(u)$	2.1313×10^{-3}	2.0892×10^{-3}

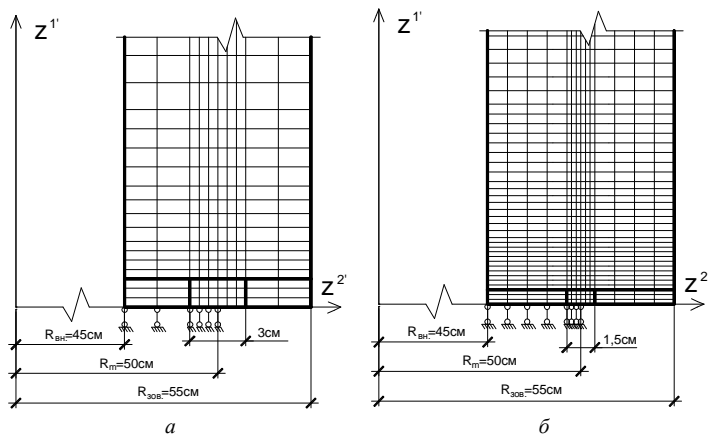


Рис. 4. СЕМ №1 (а) і №2 (б) для розрахунку КІН в порожнистому циліндрі

Наступним тестовим прикладом була задача про деформування довгого товстостінного циліндра із поперечною тріщиною (рис. 5).

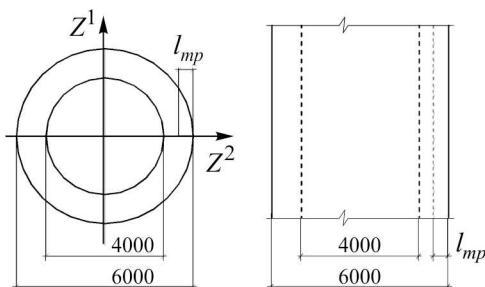


Рис. 5. Геометрична схема товстостінного циліндра із поперечною тріщиною

Матеріал циліндра виготовлений зі сталі 38ХНЗМФА, для якої модуль пружності $E=210 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуасона $\nu=0.3$, коефіцієнт лінійного розширення $\alpha=13.5 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$. Радіальний розподіл температури описується логарифмічним законом:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r/r_2)},$$

де T, r - температура та радіус поточної точки; T_1, r_1, T_2, r_2 - температури та радіуси відповідно внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра. $T_1=100 \text{ град}$, $T_2=0$, $r_1=2 \text{ м}$, $r_2=3 \text{ м}$. Довжина тріщини $l_{mp}=0.5 \text{ м}$.

Дискретні моделі із врахуванням симетрії розроблені для половини циліндру. Як і в попередній тестовій задачі, в околі вершини тріщини SE являють собою квадрати із розмірами $l_{el}=l_{mp}/10$ (рис. 6,а) та $l_{el}=l_{mp}/20$ (рис. 6,б).

На відміну від попередньої задачі обчислення КІН проводилось як

прямим методом так і енергетичним (методом піддатливості [2], та через величини J-інтеграла [3-6]):

Значення КІН обчислене методом піддатливості для сітки із розмірами СЕ в околі вершини тріщини $l_{el} = l_{mp}/20$ було прийнятим за еталонне. Як можна побачити із результатів (табл. 2) три метода дають майже однакові значення КІН.

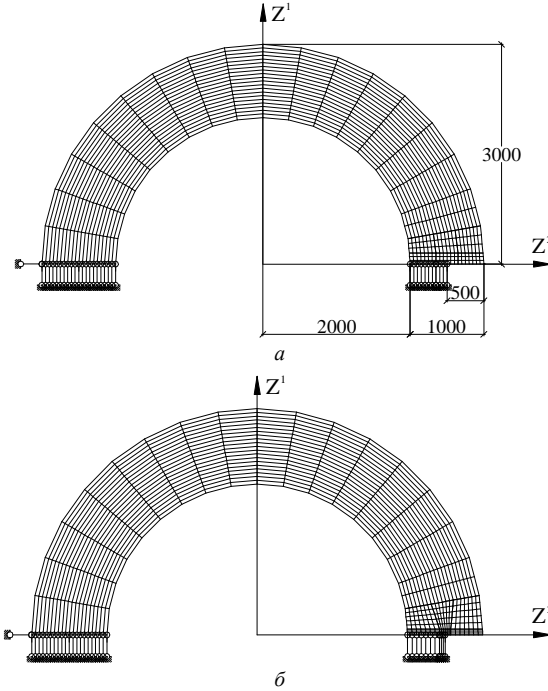


Рис. 6. Дискретні моделі циліндра з розмірами елементів в привершинній зоні

$$l_{el} = l_{mp}/10 \text{ (а)}, \quad l_{el} = l_{mp}/20 \text{ (б)}$$

Таблиця 2

$\frac{l_{mp}}{l_{el}}$	Прямий метод $K_I(u)$ (МПа $\sqrt{м}$)				Метод реакцій		Метод піддатливості
	по обл. $K_I(u)$	$\delta(\%)$	по 1 т. $K_I(u)$	$\delta(\%)$	$K_I(J)$	$\delta(\%)$	$K_I(G)$
10	248	4.4	234.7	1.2	235.4	0.9	235.9
20	238.4	0.4	231.6	2.5	237.4	0.1	237.6

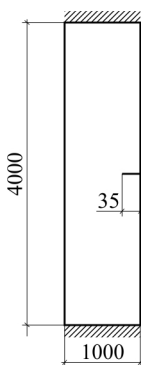


Рис. 7

Наступною тестовою задачею була прямокутна пластина з боковим надрізом жорстко защемлена по краям, що рівномірно охолоджується на величину перепаду температур $\Delta T = 100 \text{ град}$ (рис. 7).

Фізико-механічні властивості аналогічні попередній тестовій задачі. Із врахуванням симетрії дискретні моделі розроблені для половини пластини. На рис. 8 показані дискретні моделі в яких розміри СЕ в околі вершини тріщини складають відповідно $l_{el} = l_{mp}/10$ та $l_{el} = l_{mp}/20$. Результати розрахунку показують, що як і в попередній задачі метод піддатливості та метод реакцій дають практично однаковий результат. Відмінність результатів прямого методу знаходиться в межах 5 відсотків. В

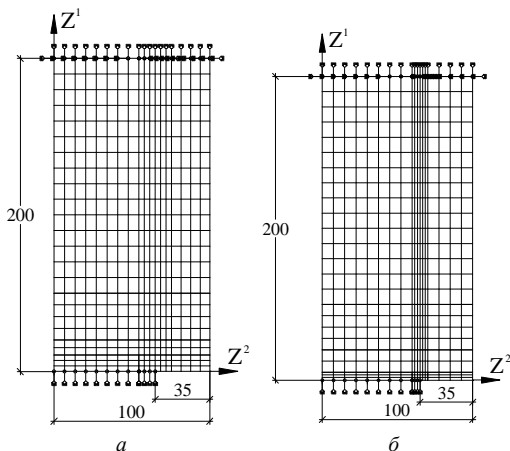


Рис. 8. Дискретні моделі пластини з боковим надрізом

роботі [8] наведений розв'язок даної задачі аналітичним методом та із застосуванням СЕ бази ANSYS. В ANSYS обчислення КІН виконувалось прямим методом за величиною переміщення у вузлі, що є найближчим від вершини тріщини, та енергетичним методом – за величиною J -інтеграла. Отримані результати відрізняються від наведених в табл. 3 в межах 3%.

Таблиця 3

$\frac{l_{mp}}{l_{el}}$	Прямий метод $K_I(u)$ ($\text{МПа}\sqrt{\text{м}}$)				Метод реакцій		Метод піддатливості
	по обл. $K_I(u)$	$\delta(\%)$	по 1 т. $K_I(u)$	$\delta(\%)$	$K_I(J)$	$\delta(\%)$	$K_I(G)$
10	519.8	4.8	515.8	5.6	543.4	0.5	543.1
20	520.6	4.7	533.4	2.4	546.2	0	546.3

Отримані результати показують високу ефективність розробленої ме-

тодики визначення КІН в тілах з тріщинами під дією температурного навантаження. Енергетичний метод визначення КІН виявився більш ефективним порівняно із прямим методом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлури С.* Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А., Максимюк Ю.В.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 1. Теоретические основы и исследование эффективности конечно-элементной методики решения пространственных задач механики разрушения // Проблемы прочности, 2011. – №1. – С. 27–39.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А., Максимюк Ю.В.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Методика определения инвариантного J-интеграла в дискретных моделях МКЭ // Проблемы прочности, 2011. – №2. – С.17–32.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А.* Метод определения инвариантного J-интеграла в конечно-элементных моделях призматических тел // Прикладная механика. 2008, 44, №12 – с.70-82.
6. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкрыль О.О., Богдан Д.В.* Модифікований метод реакцій для визначення J-інтеграла в задачах пружнопластичного деформування просторових призматичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С.18-23
7. *Пискунов С.О., Гречух Н.А., Остапенко Р.М.* Обчислення КІН в просторових тілах обертання при температурному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 80. – С.38-53
8. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 2007. – 256 с.
9. *Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С.* ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. – М.: Ленанд, 2008. – 456с.
10. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
11. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640с.
12. *Anderson T.L.* Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition.-CRC Press, 2005. - 640p.

REFERENCES

1. *Atluri S.* Vichislitelnye metody v mehanike razrusheniya (Computation Methods in the Mechanics of Fracture). M.: Mir, 1990. – 392 с.
2. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S.* Napivanalitichnyi metod skinchennih elementiv v zadachah ruynuvannya prostorovih til (Semianalytic finite element method in problems of fracture spatial bodies): Monografiya – K.: KNUBA, 2005. – 298 с.
3. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S., Shkriyl' A.A., Maksimyyuk Yu.V.* Reshenie lineynih i nelineynih prostanstvennyh zadach mehaniki razrusheniya na osnove poluanaliticheskogo metoda konechnyh elementov. Soobchenie 1. Teoreticheskie osnovi i issledovanie efectivnosti konechno-elementnoy metodiki resheniya prostanstvennyh zadach mehaniki razrusheniya (Linear

- and nonlinear fracture mechanic's problem solution using semianalytic finite element method: Part 1. Theoretical foundation and research of efficiency of finite element technique for fracture mechanic's problem solution). Strengths of materials, 2011, № 1, 27–39.
4. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S., Shkriil' A.A., Maksimyyuk Yu.V.* Reshenie lineynih i nelineynih prostranstvennyh zadach mehaniki razrusheniya na osnove poluanaliticheskogo metoda konechnykh elementov. Soobchenie 2. Metodika opredeleniya invariantnogo J-integrala v discretnykh modeliyah MKE (Linear and nonlinear fracture mechanic's problem solution using semianalytic finite element method: Part 2. A technique for calculation of invariant of J-integral value in finite element model). Strengths of materials, 2011, № 2, 17–32.
 5. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S., Shkriil' A.A.* Metod opredeleniya invariantnogo J-integrala v konechno-elementnykh modeliyah prizmaticheskikh tel (Method for the determination of the invariant J-integral in the finite element model of prismatic bodies) // Prikladnaya mehanika. 2008, 44, №12–с.70-82.
 6. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Shkriil' A.A., Bogdan D.V.* Modificovaniy metod reaktsiy dlya viznachennya J-integrala v zadachah pruzhnoplastichnogo deformuvannya prostorovykh prizmatichnykh til (A modified method for the determination of reaction J-integral in problems of elastoplastic deformation space pryzmatychnsyh bodies) // Opir materialiv i teoriya sporud. 2011. – Vip. 88. – С.18-23
 7. *Piskunov S.O., Grechuh N.A., Ostapenko R.M.* Obchislennya KIN v prostorovykh tilah oberdannya pri temperaturnomu navantazhenni (Calculation of SIF in spatial bodies of revolution under thermal load) // Opir materialiv i teoriya sporud., 2006. – Vip. 80. – С.38-53
 8. *Morozov E.M., Nikishkov G.P.* Metod konechnykh elementov v mehanike razrusheniya (Finite element method in fracture mechanics). – Moskow.: “Librocom”, 2010, 256 с.
 9. *Morozov E.M., Muzymnek A.Yu., Shadski A.S.* ANSYS v rukah inzhenera. Mehanika razrusheniya (ANSYS in the hands of the engineer: Fracture Mechanics). – M.: Lenand, 2008.-456p.
 10. *Saharov A.S.* Metod konechnykh elementov v mehanike tverdykh tel (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) – K. : Bisha shk., 1982. – 480 с.
 11. *Cherepanov G.P.* Mehanika hrupkogo razrusheniya (Mechanics of brittle fracture). – Moskow.: Nauka, 1974. – 640 p
 12. *Anderson T.L.* Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition.-CRC Press, 2005. - 640p.

Стаття надійшла до редакції 29.08.2014 р.

Шкрыль А.А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ ТЕЛАХ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОЙ НАГРУЗКЕ

На основе моментной схемы конечных элементов (МКЭ) реализована методика определения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в двумерных телах под действием температурной нагрузки. Результаты решения тестовых задач показали, что энергетические методы определения КИН являются более эффективными по сравнению с прямым методом.

Ключевые слова: Двумерная задача, коэффициент интенсивности напряжений, температурная нагрузка, метод конечных элементов.

Shkriil' A.

DEFINITION STRESS INTENSITY COEFFICIENT TWO-DIMENSIONAL BODIES UNDER THERMAL LOAD

On the basis of the finite element scheme of the moment method (FEM) implemented method of determining the coefficients of stress intensity (K) in two-dimensional bodies under the action of temperature load. Results of test problems showed that the methods for determining the energy of K are more efficiency compared with the.

Keywords: two-dimensional bodies, stress intensity coefficient, thermal load, finite element method.

УДК 539.4

В.В. Харченко¹, чл.-кор. НАН УкраїниС.М. Банько¹,С.В. Кобельський¹,В.І. Кравченко¹¹Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України

Тимирязєвська вул., 2, м. Київ, Україна. 01014

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО ОПІР РУЙНУВАННЮ ПОЛОГО ЦИЛІНДРА З ДЕФЕКТОМ У ВИГЛЯДІ КАВЕРНИ З ТРІЩИНОЮ В ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Представлено результати розрахунків в пружно-пластичній постановці опору руйнуванню полого циліндра з дефектом у вигляді тріщини, яка знаходиться в вершині каверни. Одержані дані порівнювали з результатами розв'язку в пружній постановці задачі про розтяг полого циліндра з дефектом у вигляді тріщини, яка знаходиться в вершині каверни, а також з результатами розв'язку для циліндра з тріщиною.

Ключові слова: каверна, тріщина, напружений стан, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод скінченних елементів.

Вступ. Проблема дослідження напруженого стану вузла з'єднання колектора з корпусом парогенераторів ПГВ-1000М енергоблоків АЕС з реактором ВВЕР-1000 в умовах експлуатації є актуальною, оскільки в межах проектного строку служби виявляються пошкодження вузлів з'єднання [1-5].

В роботах [6-8] проведено результати розрахунків щодо впливу геометричних параметрів дефекту у вигляді каверни в зоні галтельного переходу вузла з'єднання колектора до корпусу парогенераторів ПГВ-1000М на його напружено-деформований стан. Дані щодо оцінки напруженого стану і опору руйнуванню вузла з'єднання з тріщиною в зоні галтельного переходу при дії експлуатаційних навантажень представлені в [9].

В даній роботі в пружно-пластичній постановці розглядається модельна задача про опір руйнуванню полого циліндра з дефектом у вигляді каверни з тріщиною, що бере початок в її вершині. Результати розрахунків порівнювали з розв'язком даної задачі в пружній постановці [10], а також з даними розв'язку про розтяг циліндра з тріщиною [11].

Мета роботи. Дослідити вплив геометричних параметрів каверни і тріщини на розрахункові значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

Постановка задачі. Розглядали задачу про розтяг полого циліндра (рис. 1) із зовнішнім діаметром $D_1=2,2$ м, внутрішнім діаметром $D_2=2$ м,

висотою $2H=2$ м з внутрішньою і зовнішньою крайовою кільцевою каверною з тріщиною, що знаходиться в її вершині [10].

На торцях циліндра задавали рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q=100$ МПа. Зважаючи на симетрію задачі, розглядали сектор з кутом $\pi/40$. Коефіцієнт Пуассона задавали $\nu=0,3$. Матеріал ідеально пружно-пластичний, границя текучості $\sigma_T = 500$ МПа.

Розрахунки проводили на основі методу скінченних елементів з застосуванням програмного комплексу SPACE-RELAX [12] Використовували просторові змішані скінченні елементи (спеціальні кубічні елементи) ЗСЕ-1, побудовані на основі шестигранної восьмивузлової призми з полілінійним заповненням переміщень і апроксимацією напружень і деформацій за допомогою інтерполяційних функцій, визначених щодо вершин і центру призми [13]. Крім того, використовували спеціальні тетраедричні елементи (ЗТЕ-1) з апроксимацією напружень і деформацій, побудованих за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно вершин і центру тетраедра [14]. При спільному використанні елементів ЗСЕ-1 та ЗТЕ-1 досягається збіжність результатів по напруженням, розкриттям і КІН при зменшенні кроку сітки. На тетраедри розбиваються лише елементи, що примикають до фронту тріщини. Розмір елемента у вершині тріщини – 700 мкм \times 25 мкм \times 25 мкм. Величина параметру s сітки скінченних елементів, що розповсюджується вздовж фронту тріщини, для всіх варіантів становила $1/20$ товщини t стінки циліндра, величину параметра δ сітки приймали $2/3 s$. Розрахунки проводили для чотирьох варіантів взаємного розташування каверни і тріщини.

В перших двох варіантах розглядали неглибоку зовнішню (внутрішню) кільцеву тріщину, глибина якої s (відлік від вершини каверни) (рис. 2). Розв'язували ряд модельних задач з наступними відношеннями глибини дефекту $a=k_1\delta+c$ до товщини стінки t : $a/t=0,1, 0,3, 0,5, 0,7$. Висоту h каверни приймали: $1,1\delta, 1,5\delta, 2\delta, 4\delta, 6\delta, 8\delta, 10\delta$.

В наступних двох розглядали глибоку зовнішню (внутрішню) кільцеву тріщину, відстань між вершиною тріщини і вершиною каверни варію-

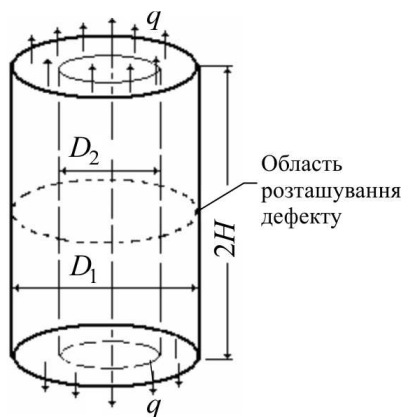


Рис. 1. Задача про розтяг полого циліндра з внутрішньою і зовнішньою крайовою кільцевою тріщиною, що бере початок з каверни

вали величиною параметра k_1 (рис. 3). Розв'язували ряд задач з наступними значеннями глибини каверни: $b=1\delta, 5\delta, 7\delta, 9\delta$ та значеннями висоти каверни: $h=1.1\delta, 1.5\delta, 2\delta, 4\delta, 6\delta, 10\delta$. Відношення глибини дефекту $k_3\delta+k_1\delta+c$ до товщини стінки t : $a/t=0.3, 0.5, 0.7$.

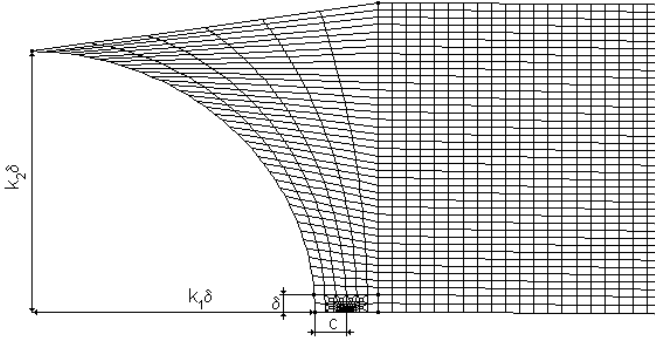


Рис. 2. Скінченно-елементна модель для задач першого та другого варіанту

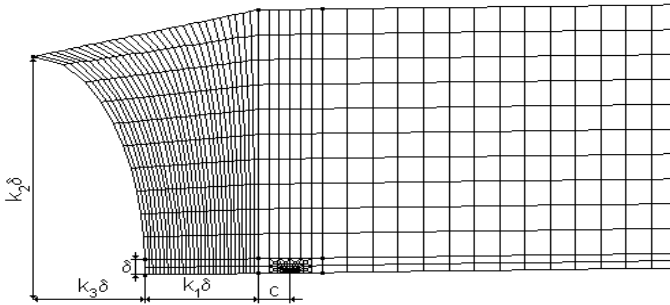


Рис. 3. Скінченно-елементна модель для задач третього та четвертого варіанту

Результати розрахунку КІН порівнювали з результатами розв'язку даної задачі в пружній постановці, а також з результатами розв'язку задачі про розтяг циліндра з тріщиною [11].

Перевірка збіжності результатів розрахунку. На результати розрахунків КІН впливають розміри скінченних елементів в вершині тріщини. Зокрема, в [15] йдеться про чутливість розв'язку до розмірів скінченно-елементної сітки. Показано, як від розмірів елементів у вершині тріщини залежить величина зони пластичності. Крім того, представлено результати залежності величини навантаження руйнування від розміру елемента у вершині тріщини. Найменше значення навантаження руйнування отримано для найдрібнішої сітки. В [16] проаналізовано вплив розміру елемента

сітки на результати визначення параметрів розкриття і закриття тріщини. Показано, що найкращі результати можна отримати при мінімізації розмірів елементів навколо тріщини, проте це не завжди можливо в зв'язку з обчислювальними витратами. З огляду на це, було встановлено залежність між розмірами сітки скінченних елементів та одержаними результатами і отримано значення, при яких досягається збіжність.

Для одержання коректних результатів важливо перевірити умову виконання поправки Ірвіна на пластичність. При розв'язанні поставлених задач виявилось, що для моделі першого та другого варіантів при відношенні $a/t=0.1$ з кроком сітки в околиці вершини тріщини $700 \text{ мкм} \times 25 \text{ мкм} \times 25 \text{ мкм}$ поправка Ірвіна на пластичність не виконується. Тому для цих задач була побудована більш густа сітка (крок сітки – $294 \text{ мкм} \times 8.3 \text{ мкм} \times 8.3 \text{ мкм}$). При розв'язанні задач на даній сітці було досягнуто виконання поправки Ірвіна.

Отже, результат розв'язку є чутливим до величини кроку сітки і при розв'язанні задач з дефектами такого типу (мілка каверна і тріщина) потрібно бути обережним з підбором сітки.

Результати. На рис. 4 представлені порівняльні результати розрахунку КІН в пружній і пружно-пластичній постановці для різних відношень глибини дефекту до товщини стінки циліндра (a/t) в залежності від висоти каверни для задач першого варіанту.

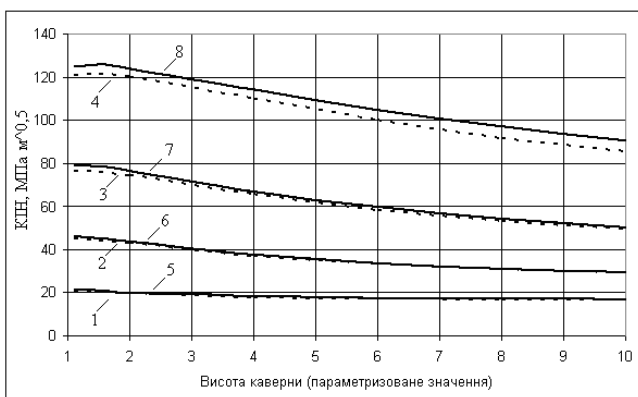


Рис. 4. Графіки порівняння розподілу КІН для задач в пружній і пружно-пластичній постановці; зовнішня тріщина; задача першого варіанту: 1 – $a/t=0.1$ (пружність), 2 – $a/t=0.3$ (пружність), 3 – $a/t=0.5$ (пружність), 4 – $a/t=0.7$ (пружність), 5 – $a/t=0.1$ (пружно-пластичність), 6 – $a/t=0.3$ (пружно-пластичність), 7 – $a/t=0.5$ (пружно-пластичність), 8 – $a/t=0.7$ (пружно-пластичність)

Як видно з рис. 4, значення КІН при розв'язанні задач в пружно-пластичній постановці вищі, ніж при розв'язанні задач в пружній поста-

новці. При цьому різниця між величинами КІН для пружного і пружно-пластичного розв'язків зростає зі збільшенням глибини дефекту.

На рис. 5 для задач третього варіанту представлено графіки розподілу КІН для різних глибин каверни в залежності від висоти. Відношення глибини дефекту до товщини стінки циліндра a/t stále і становить 0.5. Показано порівняльні результати для розв'язку задачі в пружній та пружно-пластичній постановках.

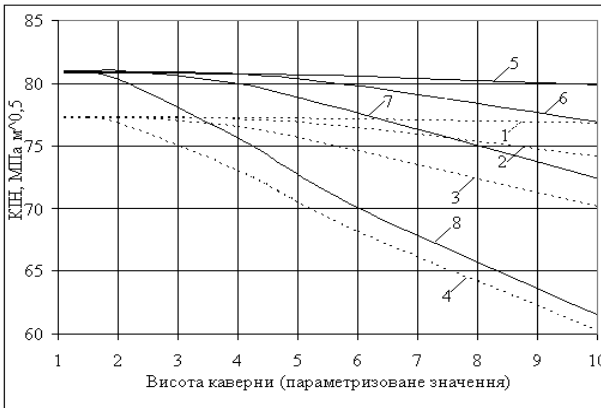


Рис. 5. Графіки порівняння розподілу КІН для задач в пружній і пружно-пластичній постановці; зовнішня тріщина; задача третього варіанту : 1 – $b=1\delta$ (пружність), 2 – $b=5\delta$ (пружність), 3 – $b=7\delta$ (пружність), 4 – $b=9\delta$ (пружність), 5 – $b=1\delta$ (пружно-пластичність), 6 – $b=5\delta$ (пружно-пластичність), 7 – $b=7\delta$ (пружно-пластичність), 8 – $b=9\delta$ (пружно-пластичність)

З рис. 5 слідує, що, значення КІН при розв'язанні задачі в пружно-пластичній постановці вищі, ніж при розв'язанні задачі в пружній постановці для всіх співвідношень глибини і висоти каверни.

Результати розрахунку КІН порівнювали з чисельними розв'язками задачі в пружно-пластичній постановці про розтяг полого циліндра з зовнішньою і внутрішньою тріщиною [11]. На рис. 6 представлено графіки розподілів КІН для зовнішніх дефектів при відношенні $a/t=0.3$ в залежності від висоти каверни, на рис. 7 – для внутрішніх дефектів при відношенні $a/t=0.7$.

Як видно з представлених графіків, для задач з мілкою тріщиною (перший та другий варіанти) значення КІН нижчі в порівнянні з розв'язком [11] для всіх співвідношень глибини і висоти каверни. Для задач з глибокою тріщиною (третій та четвертий варіанти) при збільшенні висоти і глибини каверни значення КІН перевищують отримані в роботі [11]. Зокрема, для внутрішнього дефекту з відношенням $a/t=0.7$ такий ефект спостерігається при глибині каверни $b=5\delta$ для $h>2.5\delta$, при глибині $b=7\delta$ для $h>1.5\delta$, при глибині $b=9\delta$ для всіх значень висоти каверни. Максимальне перевищення значень КІН для тріщини спосте-

рігається для дефекту з відношенням $a/t=0.7$ при $b=5\delta$, $h>10\delta$ і складає 4.37%, при $b=7\delta$, $h>10\delta$ складає 5.46%. З отриманих результатів можна зробити висновок, що більш небезпечними є дефекти з глибокою тріщиною (задачі третього і четвертого варіантів). У випадку збільшення глибини і висоти каверни в даних дефектах розв'язки даних задач є більш консервативними, ніж розв'язки задач про розтяг циліндра з тріщиною.

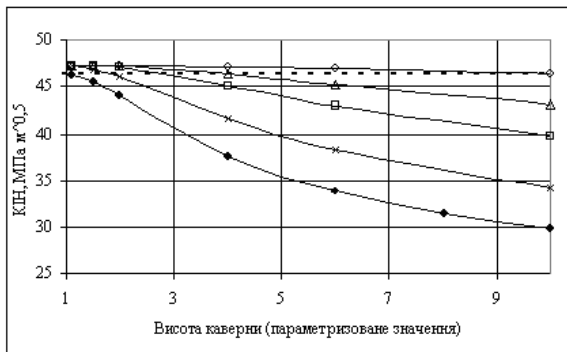


Рис. 6. Графіки порівняння розподілу КІН зовнішній дефект; $a/t=0.3$:
 --- - розв'язок [11], ● – мілка тріщина, ○ – глибока тріщина $b=1\delta$, Δ – глибока тріщина $b=5\delta$,
 □ – глибока тріщина $b=7\delta$, × – глибока тріщина $b=9\delta$

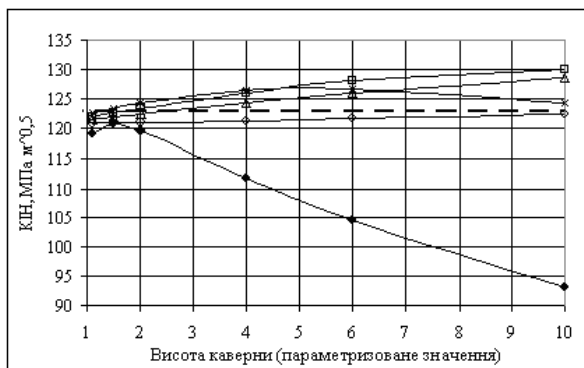


Рис. 7. Графіки порівняння розподілу КІН внутрішній дефект; $a/t=0.7$:
 --- - розв'язок [11], ● – мілка тріщина, ○ – глибока тріщина $b=1\delta$, Δ – глибока тріщина $b=5\delta$,
 □ – глибока тріщина $b=7\delta$, × – глибока тріщина $b=9\delta$

Повний масив отриманих результатів рішення даних задач представлено в таблицях 1-8. Приведено порівняння значень КІН при розв'язанні задач в пружній та пружно-пластичній постановках, а також при розв'язанні пружно-пластичної задачі про розтяг циліндра з тріщиною.

Таблиця 1

Порівняння значень КІН для задач першого варіанту

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, МПа·м ^{0.5} (пружна постановка/ пружно-пластична постановка)			
	<i>a/t</i>			
	0.1	0.3	0.5	0.7
1.1δ	21.03/ 21.44	45.21/ 46.24	76.70/ 78.92	120.78/ 124.97
1.5δ	20.58/ 20.94	44.52/ 45.46	76.26/ 78.58	121.27/ 126.12
2δ	19.97/ 20.27	43.15/ 44.05	74.77/ 76.78	120.38/ 123.98
4δ	18.36/ 18.56	37.26/ 37.71	65.82/ 67.07	110.42/ 114.07
6δ	17.64/ 17.80	33.59/ 33.83	58.56/ 59.69	99.99/ 104.84
8δ	17.26/ 17.40	31.31/ 31.44	53.48/ 54.47	91.85/ 97.13
10δ	17.01/ 17.14	29.70/ 29.76	49.66/ 50.50	85.42/ 90.54
Розв'язок [11]	21.175	46.437	79.894	129.67

Таблиця 2

Порівняння значень КІН для задач другого варіанту

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, МПа·м ^{0.5} (пружна постановка/ пружно-пластична постановка)			
	<i>a/t</i>			
	0.1	0.3	0.5	0.7
1.1δ	20.80/ 21.20	44.01/ 45.02	73.48/ 75.91	114.08/ 119.20
1.5δ	20.39/ 20.74	43.44/ 44.37	73.28/ 75.82	114.89/ 120.89
2δ	19.80/ 20.10	42.21/ 43.12	72.10/ 74.43	114.45/ 119.57
4δ	18.25/ 18.44	36.79/ 37.25	64.29/ 65.97	106.40/ 111.83
6δ	17.56/ 17.72	33.42/ 33.69	57.87/ 59.32	97.53/ 104.46
10δ	16.99/ 17.12	29.95/ 30.04	50.07/ 51.23	85.24/ 93.19
Розв'язок [11]	20.928	45.329	77.033	122.94

Таблиця 3

Значення КІН для задач третього варіанту, $a/t=0.3$

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, МПа·м ^{0.5} (пружна постановка/ пружно-пластична постановка)			
	Глибина каверни			
	1δ	5δ	7δ	9δ
1.1δ	45.59/ 47.21	45.56/ 47.21	45.56/ 47.24	45.50/ 47.18
1.5δ	45.58/ 47.21	45.56/ 47.22	45.53/ 47.21	45.23/ 46.84
2δ	45.58/ 47.21	45.53/ 47.19	45.39/ 47.03	44.58/ 46.05
4δ	45.53/ 47.13	44.88/ 46.41	43.73/ 45.10	40.68/ 41.66
6δ	45.39/ 46.92	43.83/ 45.19	41.82/ 42.96	37.56/ 38.32
10δ	45.02/ 46.39	42.03/ 43.12	39.05/ 39.89	33.73/ 34.19
Розв'язок [11]	46.437			

Таблиця 4

Значення КІН для задач третього варіанту, $a/t=0.5$

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, МПа·м ^{0.5} (пружна постановка/ пружно-пластична постановка)			
	Глибина каверни			
	1δ	5δ	7δ	9δ
1.1δ	77.20/ 80.83	77.22/ 80.87	77.25/ 80.96	77.28/ 81.03
1.5δ	77.20/ 80.83	77.23/ 80.91	77.27/ 81.01	77.20/ 80.88
2δ	77.20/ 80.83	77.25/ 80.95	77.28/ 81.03	76.86/ 80.34
4δ	77.18/ 80.73	77.13/ 80.73	76.51/ 79.96	73.03/ 75.60
6δ	77.11/ 80.57	76.44/ 79.83	74.61/ 77.58	68.15/ 70.11
10δ	76.76/ 79.88	74.18/ 76.97	70.16/ 72.42	60.29/ 61.52
Розв'язок [11]	79.894			

Таблиця 5

Значення КІН для задач третього варіанту, $a/t=0.7$

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, МПа·м ^{0.5} (пружна постановка/ пружно-пластична постановка)			
	Глибина каверни			
	1δ	5δ	7δ	9δ
1.1δ	120.84/ 128.76	121.12/ 129.13	121.35/ 129.48	121.72/ 129.96
1.5δ	120.86/ 128.84	121.25/ 129.36	121.59/ 129.85	122.06/ 130.39
2δ	120.88/ 128.92	121.42/ 129.65	121.91/ 130.33	122.36/ 130.72
4δ	120.93/ 129.37	122.20/ 131.09	122.96/ 132.18	121.21/ 129.66
6δ	120.98/ 129.60	122.81/ 132.18	123.10/ 132.83	117.19/ 125.76
10δ	120.97/ 129.42	122.95/ 132.61	121.01/ 130.93	107.60/ 115.25
Розв'язок [11]	129.67			

Таблиця 6

Порівняння значень КІН для задач четвертого варіанту, $a/t=0.3$

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, МПа·м ^{0.5} (пружна постановка/ пружно-пластична постановка)			
	Глибина каверни			
	1δ	5δ	7δ	9δ
1.1δ	44.15/ 45.74	44.21/ 45.82	44.25/ 45.89	44.30/ 45.96
1.5δ	44.16/ 45.75	44.25/ 45.87	44.30/ 45.95	44.33/ 45.99
2δ	44.16/ 45.76	44.28/ 45.92	44.32/ 45.97	44.24/ 45.87
4δ	44.17/ 45.77	44.08/ 45.67	43.70/ 45.23	42.76/ 44.15
6δ	44.11/ 45.70	43.52/ 45.03	42.67/ 44.07	41.04/ 42.26
10δ	43.95/ 45.51	42.48/ 43.89	41.02/ 42.28	38.69/ 39.56
Розв'язок [11]	45.329			

Таблиця 7

Порівняння значень КІН для задач четвертого варіанту, $a/t=0.5$

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, МПа·м ^{0.5} (пружна постановка/ пружно-пластична постановка)			
	Глибина каверни			
	1 δ	5 δ	7 δ	9 δ
1.1 δ	73.49/ 77.17	73.70/ 77.44	73.83/ 77.63	73.97/ 77.84
1.5 δ	73.51/ 77.19	73.81/ 77.56	73.98/ 77.82	74.15/ 78.05
2 δ	73.53/ 77.22	73.93/ 77.72	74.16/ 78.04	74.29/ 78.18
4 δ	73.62/ 77.34	74.31/ 78.19	74.37/ 78.22	73.36/ 76.89
6 δ	73.67/ 77.40	74.22/ 78.05	73.66/ 77.36	71.059/ 74.14
10 δ	73.62/ 77.32	73.17/ 76.85	71.26/ 74.65	66.37/ 69.00
Розв'язок [11]	77.033			

Таблиця 8

Порівняння значень КІН для задач четвертого варіанту, $a/t=0.7$

Висота каверни	Коефіцієнт інтенсивності напружень, МПа·м ^{0.5} (пружна постановка/ пружно-пластична постановка)			
	Глибина каверни			
	1 δ	5 δ	7 δ	9 δ
1.1 δ	113.47/ 120.89	114.04/ 121.62	114.38/ 122.09	114.83/ 122.73
1.5 δ	113.52/ 120.95	114.30/ 121.96	114.80/ 122.63	115.42/ 123.48
2 δ	113.58/ 121.02	114.64/ 122.39	115.33/ 123.32	116.12/ 124.36
4 δ	113.80/ 121.33	116.04/ 124.24	117.35/ 126.00	117.75/ 126.52
6 δ	114.02/ 121.68	117.29/ 125.99	118.70/ 128.07	117.29/ 126.66
10 δ	114.40/ 122.51	118.80/ 128.56	119.35/ 130.04	113.69/ 124.37
Розв'язок [11]	122.94			

Висновки. Розв'язано ряд модельних задач в пружно-пластичній постановці про розтяг полого циліндра з дефектом у вигляді тріщини, що бере початок з вершини каверни. Отримані значення КІН порівнювали з результатами розв'язку даної задачі в пружній постановці, а також чисельними розв'язками про розтяг циліндра з тріщиною.

З одержаних результатів слідує, що значення КІН при розв'язанні пружно-пластичної задачі вищі, ніж для розв'язку в пружній постановці. Отже, поправка Ірвіна на пластичність виконується, але розв'язок є чутливим до величини кроку сітки.

При порівнянні одержаних результатів із розв'язком задачі про розтяг циліндра з тріщиною встановлено, що для дефекту першого та другого варіантів (дефект з неглибокою тріщиною) величини КІН нижчі для всіх співвідношень глибини і висоти каверни, для задач третього та четвертого

варіантів (дефект з глибокою тріщиною) значення КІН перевищують значення КІН для задачі з тріщиною при збільшенні висоти і глибини каверни. Максимальне перевищення значень КІН для тріщини спостерігається для дефекту з відношенням $a/t=0.7$ при $b=5\delta$, $h>10\delta$ і складає 4.37%, при $b=7\delta$, $h>10\delta$ складає 5.46%. Тобто, більш небезпечним є дефект з глибокою тріщиною, для якого при збільшенні глибини і висоти каверни розв'язок стає більш консервативним, ніж при розв'язанні задачі з тріщиною. З одержаних результатів слідє, що при оцінці НДС вузла з'єднання «гарячого» колектора з патрубком парогенератора доцільним є розв'язання задачі з дефектом у вигляді глибокої тріщини, що проростає з каверни.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Степанов Г.В., Харченко В.В., Бабуцкий А.И. и др. Оценка напряженно-деформированного состояния узла сварного соединения "горячего" коллектора с патрубком парогенератора ПГВ-1000 АЭС// Пробл. прочности.- 2003, №5. - С. 142-153.
2. Драгунов Ю.Г., Петрова О.Ю., Лякишев С.Л. и др. Повышение надежности эксплуатации коллекторов парогенераторов ПГВ-1000, -1000М – Атомная энергия. – 2008. – Том 104. – №1. – С. 9–13.
3. Степанов Г.В., Харченко В.В., Бабуцкий А.И. и др. Влияние компоновки реакторов ВВЭР «малой» и «большой» серий атомных электростанций на напряженно-деформированное состояние узла приварки коллектора к патрубку парогенератора – Пробл. прочности. – 2007. – №5. – С. 114–120.
4. Лякишев С.Л., Харченко С.А., Кучерявченков А.В., Коротаев Н.Ф. Оптимизация конструкции узла приварки коллектора к корпусу парогенератора – Сб.трудов 7-го Международного семинара по горизонтальным парогенераторам. – 2006. – ФГУП ОКБ «Гидропресс», Подольск, Россия.
5. Лякишев С.Л., Трунов Н.Б., Харченко С.А., и др. Разработка и обоснование мероприятий по обеспечению надежной и безопасной эксплуатации сварных соединений № 111 парогенератора ПГВ-1000М – Труды 6-й Международной научно-технической конференции «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР». – 2009. – ФГУП ОКБ «Гидропресс», Подольск, Россия.
6. Банько С.Н., Кобельский С.В., Кравченко В.И. Численный анализ напряженно-деформированного состояния в вершине каверны, расположенной в галтели узла приварки коллектора к корпусу парогенератора ПГВ-1000М – Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2012. – Вып. 35. – С. 214 – 220.
7. Банько С.М. Напружений стан вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М з каверною – Вісник Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя. – 2012. – №3 (67). – С. 56 – 63.
8. Банько С.М. Аналіз впливу геометричних параметрів каверни в галтелі вузла з'єднання колектора з корпусом парогенератора ПГВ-1000М на його напружений стан // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2013.– Вип.91. – С.181–187.
9. Ban'ko S.M., Kobel'skii S.V., Samardžić I. The stress-strain state of the cracked welded joint between the header and the shell of PGV-1000M steam generator // Metalurgija. – 2014. – Vol. 53 № 4. – P. 634-636.
10. Банько С.М., Кобельский С.В., Харченко В.В. Чисельне моделювання напруженого стану поголо циліндра з дефектом у вигляді каверни з тріщиною // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2014.– Вип.92. – С. 157-169.

11. *Кобельский С.В.* Численный анализ пространственных задач теории трещин на основе змішаної схеми метода скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2011.– Вип.88. – С.147–156.
12. Програмне забезпечення «Тривимірне скінченноелементне моделювання теплового і термонапруженого стану елементів машинобудівних конструкцій» (SPACE) / Система сертифікації УкрСЕПРО. Сертифікат відповідності № UA1.017.0054634-04. – 2004.
13. *Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А.* Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2008. – Вып. 31. – С. 195 – 207.
14. *Кобельский С.В.* Аналіз змішаних скінченних елементів стосовно задач пружно-пластичного деформування та механіки руйнування // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2012.– Вип.89. – С.131–141.
15. A. Munjiza , N.W.M. John Mesh size sensitivity of the combined FEM/DEM fracture and fragmentation algorithms // Engineering Fracture Mechanics 69 (2002) 281-295.
16. A. Gonzalez-Herrera, J. Zapatero Influence of minimum element size to determine crack closure stress by the finite element method // Engineering Fracture Mechanics 72 (2005) 337-355.

REFERENCES

1. *Stepanov H.V., Kharchenko V.V., Babutskyy A.Y. y dr.* Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uzla svarmogo soedyneniya "goryacheho" kolektora s patrubkom paroheneratora PGV-1000 AES - Stress-strain state evaluation of a welded joint of hot collector to nozzle of NPP steam generator PGV-1000 // Probl. prochnosty.- 2003, No. 5. P. 142-153.
2. *Drahunov Yu.H., Petrova O.Yu., Lyakyshev S.L. y dr.* Povisheniye nadezhnosti ekspluatatsyy kolektorov paroheneratov PGV-1000, -1000M – Increasing the operational reliability of the collectors of PGV-1000,-1000M steam generators – Atomnaya enerhiya. – 2008. – Tom 104. – No. 1. – P. 9–13.
3. *Stepanov H.V., Kharchenko V.V., Babutskyy A.Y. y dr.* Vlyyanye komponovky reaktorov VVER «maloy» y «bol'shoy» seryi atomnikh elektrostantsyy na napryazhenno-deformirovannoe sostoyaniye uzla pryvarky kolektora k patrubku paroheneratora – Effect of the layout of small-and large-series WWER-1000 reactors of nuclear power plants on the stress-strain state of the header-steam generator connector weldment – Probl. prochnosty. – 2007. – No. 5. – P. 114–120.
4. *Lyakyshev S.L., Kharchenko S.A., Kucheryavchenkov A.V., Korotaev N.F.* Optymyzatsyya konstruktssyy uzla pryvarky kolektora k korpusu paroheneratora – Optimizing the design of the welded joint between the header and steam generator shell – Sb.trudov 7-ho Mezhdunarodnoho semynara po horizontal'nim paroheneratoram. – 2006. – FGUP OKB «Hydropress», Podol'sk, Rossiya.
5. *Lyakyshev S.L., Trunov N.B., Kharchenko S.A., y dr.* Razrabotka y obosnovaniye meropriyatyy po obespecheniyu nadezhnoy y bezopasnoy ekspluatatsyy svarnikh soedynenyy № 111 paroheneratora PGV-1000M – Development and justification of measures for ensuring reliable and safe operation of welded joints No. 111 in PGV-1000M steam generators – Trudi 6-y Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnycheskoy konferentsyy «Obespecheniye bezopasnosti AES s VVER». – 2009. – FGUP OKB «Hydropress», Podol'sk, Rossiya.
6. *Ban'ko S.N., Kobel'skiy S.V., Kravchenko V.Y.* Chysslennyi analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya v vshryne kaverny, raspolozhennoy v haltely uzla pryvarky kolektora k korpusu paroheneratora PGV-1000M – Numerical analysis of the stress-strain state at the tip of a cavity near the fillet of the welded joint between the header and the shell of PGV-1000M steam generator – Nadezhnost' y dolhovechnost' mashyn y sooruzhenyy. – 2012. – Vip. 35. – P. 214 – 220.
7. *Ban'ko S.M.* Napruzheniyy stan vuzla z'yednannya kolektora z korpusom paroheneratora PGV-1000M z kavernoyu – Stress state of the welded joint with a cavity between the header and the shell of PGV-1000M steam generator – Visnyk Ternopil's'koho natsional'noho tekhnichnoho universytetu im. I. Pulyuya. – 2012. – No. 3 (67). – S. 56 – 63.
8. *Ban'ko S.M.* Analiz vplyvu heometrychnykh parametriv kaverny v halteli vuzla z'yednannya kolektora z korpusom paroheneratora PGV-1000M na yoho napruzheniyy stan – Analysis of the influence

- of geometrical parameters of the cavity near the fillet of the welded joint between the header and the shell of PGV-1000M steam generator on its stress state // Опір матеріалів і теорія споруд: Nauk.-tekh. zbirnyk. – K.: KNUBA, 2013.– Vyp.91. – S.181–187.
9. *Ban'ko S.M., Kobel'skii S.V., Samardžić I.* The stress–strain state of the cracked welded joint between the header and the shell of PGV-1000M steam generator // Metalurgija. – 2014. – Vol. 53 № 4. – P. 634-636.
 10. *Ban'ko S.N., Kobel'skyy S.V., Kharchenko V.V.* Chiselne modelyuvannya napruzhenogo stanu pologo tsilindra z defektom u viglyadi kaverni z trischinoyu // Опір матеріалів і теорія споруд: Nauk.-tekh. zbirnyk. – K.: KNUBA, 2014.– Vyp.92. – P. 157-169.
 11. *Kobel'skii S.V.* Chiselniy analiz prostorovih zadach teorii trischin na osnovi zmishanoyi shemi metoda skinchennih elementiv // Опір матеріалів і теорія споруд: Опір матеріалів і теорія споруд: Nauk.-tekh. zbirnyk. – K.: KNUBA, 2011.– Vyp.88. – S.147–156.
 12. Programne zabezpechennya «Trivimirne skinchennoelementne modelyuvannya teplovogo i termopruzhenogo stanu elementiv mashinobudivnih konstruktiv» (SPACE) / Sistema sertifikatsiyi UkrSEPRO. Sertifikat vidpovidnosti № UA1.017.0054634-04. – 2004.
 13. *Chirkov A.Yu., Kobel'skii S.V., Zvyagintseva A.A.* Postroenie smeshannoy approksimatsii MKE dlya resheniya prostranstvennykh zadach teorii uprugosti // Nadezhnost i dolgovechnost mashin i sooruzheniy. – 2008. – Vyp. 31. – S. 195 – 207.
 14. *Kobel'skii S.V.* Analiz zmishanih skinchennih elementiv stosovno zadach pruzhno-plastichnogo deformuvannya ta mehaniki ruynuvannya // Опір матеріалів і теорія споруд: Nauk.-tekh. zbirnyk. – K.: KNUBA, 2012.– Vyp.89. – S.131–141.
 15. *A. Munjiza, N.W.M. John* Mesh size sensitivity of the combined FEM/DEM fracture and fragmentation algorithms // Engineering Fracture Mechanics 69 (2002) 281-295.
 16. *A. Gonzalez-Herrera, J. Zapatero.* Influence of minimum element size to determine crack closure stress by the finite element method // Engineering Fracture Mechanics 72 (2005) 337-355.

Стаття надійшла до редакції 29.09.2014 р.

Харченко В.В., Банько С.Н., Кобельский С.В., Кравченко В.И.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСТЯЖЕНИЕ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ДЕФЕКТОМ В ВИДЕ КАВЕРНЫ С ТРЕЩИНОЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Представлены результаты расчетов напряженного состояния полого цилиндра с дефектом в виде трещины, которая находится в вершине каверны в упруго-пластической постановке. Результаты расчетов сравнивали с результатами решения данной задачи в упругой постановке, а также с результатами решения задачи о растяжении цилиндра с трещиной.

Ключевые слова: каверна, трещина, напряженное состояние, коэффициент интенсивности напряжений, метод конечных элементов.

Kharchenko V.V., Ban'ko S.N., Kobelsky S.V., Kravchenko V.I.

SOLVE THE PROBLEM OF THE STRETCHING OF A HOLLOW CYLINDER WITH A DEFECT IN THE FORM OF A CAVITY WITH A CRACK IN THE ELASTIC-PLASTIC FORMULATION

The results of calculating the stress state of a hollow cylinder with a defect in the form of cracks, which is at the top of the cavity in the elastic-plastic formulation is presented. The calculation results are compared with the results of solving this problem in the elastic formulation and with the results of solving the problem of the stretching cylinder with a crack.

Key words: cavity, crack, stress state, stress intensity factor, finite element method.

УДК 539.3

Ю.В. Ворона¹, канд. техн. наук
І.Д. Кара¹¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський пр. 31, Київ, Україна, 03680**РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ХВИЛЬ У
ПОРОПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ**

Досліджується розв'язок задачі про поширення в поропружному середовищі осесиметричних хвиль. Запропоновані розрахункові співвідношення, які дозволяють обчислювати параметри НДС в широкому діапазоні частот.

Ключові слова: пористість, модель Біо, потенціал переміщень, функція Ганкеля.

Удосконалення процесу розрахунку та проектування сучасних конструкцій, спрямоване на більш реалістичне відтворення умов їх роботи, значною мірою пов'язане із ускладненням моделей поведінки матеріалів. Останнім часом багато уваги приділяється використанню моделей поропружного середовища, які дозволяють урахувати наявність пор в багатьох реальних будівельних матеріалах і, в той же час, залишитись в межах гіпотези про суцільність [1], [2].

Усталені гармонічні коливання двофазного поропружного середовища згідно із моделлю Біо [3] описуються системою диференціальних рівнянь

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho^* \omega^2 u_j - \gamma^* p_{,j} = 0, \quad (1)$$

$$p_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa^*} p + i\omega \eta^* u_{k,k} = 0, \quad (2)$$

де через u_k позначена k -а компонента вектора переміщень пружного скелету середовища, а через p – середнє нормальне напруження, яке сприймається водою, що заповнює пори; крім того використані наступні позначення: ω – частота коливань, λ і μ – константи Ламе, які характеризують пружні властивості скелету, ρ^* – параметр, який характеризує інерційні властивості середовища в процесі коливань:

$$\rho^* = \frac{\omega^2 (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2) + i\omega b (\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12})}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}},$$

причому ефективні щільності

середовища ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} пов'язані між собою співвідношеннями

$$\rho_{11} + \rho_{12} = (1 - \beta)\rho_s, \quad \rho_{12} + \rho_{22} = \beta\rho_f, \quad \rho_{12} = -\rho_a, \quad \text{і в свою чергу, } \beta - \text{коефіцієнт}$$

пористості, ρ_s – щільність каркасу, ρ_f – щільність рідкого заповнювача, ρ_a – щільність приєднаної маси.

Також використані позначення

$$\gamma^* = -\frac{Q}{R} - \frac{i\omega b - \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}}, \quad \kappa^* = \frac{R}{b - i\omega \rho_{22}}, \quad \eta^* = -b \left(1 + \frac{Q}{R} \right) - i\omega \left(\rho_{12} - \rho_{22} \frac{Q}{R} \right), \quad (3)$$

де b є сталою затухання, Q і R – модулі поропружного матеріалу, які виражаються через коефіцієнт пористості β , коефіцієнти стисливості каркасу C_s та рідини C_f і модуль об'ємного стиснення K .

Фізичні співвідношення між напруженнями і деформаціями мають наступний вигляд

$$\sigma_{kj} = \lambda \delta_{kj} e_s + 2\mu \epsilon_{kj} + \frac{Q}{R} \delta_{kj} p, \quad p = Q e_s + R e_f, \quad (4)$$

де $\epsilon_{kj} = 0.5(u_{k,j} + u_{j,k})$ та $e_s = u_{j,j}$ – відповідно деформація і дилатація в пружному каркасі, $e_f = U_{j,j}$ – дилатація в рідині, U_j – компонента вектора переміщень рідкої фази, що визначається через переміщення у каркасі u_j та напруження у воді p за формулою

$$U_j = \frac{u_j (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) - p_{,j}}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}}. \quad (5)$$

Неважко помітити подібність рівнянь рівноваги (1), (2) до диференціальних співвідношень, які описують усталені коливання однорідного термопружного середовища

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho \omega^2 u_j - \gamma \theta_{,j} = 0, \quad (6)$$

$$\theta_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa} \theta + i\omega \eta u_{k,k} = 0, \quad (7)$$

де ρ – щільність середовища, θ – його температура, $\gamma = 3K\alpha_t$, α_t – коефіцієнт теплового розширення, κ – коефіцієнт теплопровідності, $\eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$, T_0 – температура в ненапруженому стані, λ_0 – коефіцієнт теплопровідності.

На жаль, фізичні співвідношення задачі термопружності (співвідношення Дюгамеля-Неймана) $\sigma_{kj} = \delta_{kj} (\lambda e - \gamma \theta) + 2\mu \epsilon_{kj}$ помітно відрізняються від першого з рівнянь (4), тому безпосередньо використовувати розв'язки конкретних задач термопружності, замінюючи в них ρ на ρ^* , γ на γ^* , κ на κ^* і η на η^* не можна.

Тим не менш, при розв'язанні задачі про розповсюдження циліндричних поропружних хвиль від порожнини кругового перерізу доцільно скористатись загальною методикою та деякими проміжними результатами, отриманими в [4].

Скориставшись поданням вектора переміщень у вигляді потенціальної і соленоїдальної частин

$$u_j = \Phi_{,j} + c_{jkl} \Psi_{l,k} \quad (8)$$

отримаємо замість (1), (2) наступні рівняння

$$\Delta \Phi + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \Phi = \frac{\gamma^*}{\lambda + 2\mu} p, \quad (9)$$

$$\Delta \Psi + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \Psi = 0, \quad (10)$$

$$\Delta p + \frac{i\omega}{\kappa^*} p + i\omega \eta^* \Delta \Phi = 0, \quad (11)$$

де Δ - оператор Лапласа ($\Delta \Phi = \Phi_{,kk}$).

У випадку розповсюдження циліндричних хвиль напружено-деформований стан є вісесиметричним, тобто залежить тільки від радіальної координати $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Тоді $\Delta \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$, $\Psi = 0$, $u_r = \frac{d\Phi}{dr}$.

Виразимо p за допомогою рівняння (9) через потенціал Φ , підставимо в (11) і отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[\Delta \Delta + \left(\frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{i\omega \eta^* \gamma^*}{\lambda + 2\mu} \right) \Delta + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa^*} \right] \Phi = 0, \quad (12)$$

$$\text{або} \quad (\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2)\Phi = 0, \quad (13)$$

причому величини λ_1^2 і λ_2^2 задовольняють співвідношенням

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{i\omega \eta^* \gamma^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa^*}. \quad (14)$$

Розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$\Phi(r) = A_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r) + A_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r), \quad (15)$$

і, в свою чергу,

$$u_r = \frac{d\Phi}{dr} = - \left[A_1 \lambda_1 H_1^{(1)}(\lambda_1 r) + A_2 \lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 r) \right], \quad (16)$$

де $H_k^{(1)}$ - функція Ганкеля 1-го роду порядку k , а константи A_1 і A_2 знаходимо, задовольняючи граничні умови.

Напруження в рідині можна визначити, виходячи з виразу (9)

$$p = \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma^*} \Delta \Phi + \frac{\rho^* \omega^2}{\gamma^*} \Phi =$$

$$= \frac{A_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r)}{\gamma^*} [\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_1^2] + \frac{A_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r)}{\gamma^*} [\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_2^2], \quad (17)$$

а напруження в каркасі - за допомогою рівнянь

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \lambda \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{Q}{R} p = A_1 \lambda_1 [2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{r} - (\lambda + 2\mu) \lambda_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r)] +$$

$$+ A_2 \lambda_2 [2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{r} - (\lambda + 2\mu) \lambda_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r)] + \frac{Q}{R} p, \quad (18)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \lambda \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{Q}{R} p = -A_1 \lambda_1^2 [2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + \lambda H_0^{(1)}(\lambda_1 r)] -$$

$$- A_2 \lambda_2^2 [2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + \lambda H_0^{(1)}(\lambda_2 r)] + \frac{Q}{R} p. \quad (19)$$

Нарешті, за формулою (5) можна знайти переміщення в рідині:

$$U_r = \frac{u_r (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) - \frac{dp}{dr}}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} = \frac{A_1 \lambda_1 H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left[\frac{\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_1^2}{\gamma^*} - (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) \right] +,$$

$$+ \frac{A_2 \lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left[\frac{\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_2^2}{\gamma^*} - (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) \right]. \quad (20)$$

що вичерпує перелік параметрів поропружного осесиметричного НДС.

Якщо, наприклад, на границі порожнини радіусу a задані наступні граничні умови:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=a} = -q_0, \quad p = 0, \quad (21)$$

тобто прикладений тиск сприймається тільки пружним каркасом, то за формулами (17), (18) отримуємо

$$A_1 = -q_0 \frac{(k - \lambda_2^2) H_0^{(1)}(\lambda_2 a)}{(k - \lambda_2^2) H_0^{(1)}(\lambda_2 a) g_1 - (k - \lambda_1^2) H_0^{(1)}(\lambda_1 a) g_2}, \quad (22)$$

$$A_2 = q_0 \frac{(k - \lambda_1^2) H_0^{(1)}(\lambda_1 a)}{(k - \lambda_2^2) H_0^{(1)}(\lambda_2 a) g_1 - (k - \lambda_1^2) H_0^{(1)}(\lambda_1 a) g_2}, \quad (23)$$

$$\text{де } k = \frac{\rho^* \omega^2}{(\lambda + 2\mu)}, \quad g_\alpha = \lambda_\alpha^2 \left[2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_\alpha a)}{\lambda_\alpha a} - (\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(\lambda_\alpha a) \right], \quad \alpha = 1, 2.$$

Чисельні розрахунки проводились при значеннях параметрів матеріалу, характерних для піщаника [6]: $\lambda=4 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu=6 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $b=0.19 \cdot 10^9 \text{ кг/с} \cdot \text{м}^3$, $\rho_{11}=2418 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{22}=340 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{12}=-150 \text{ кг/м}^3$.

В процесі проведення чисельних розрахунків виявилось, що одночасно із зростанням частоти коливань ω досить швидко зростає модуль комплексного параметру λ_1 , внаслідок чого величини $H_0^{(1)}(\lambda_1 a)$ і $H_1^{(1)}(\lambda_1 a)$ стають близькими до нуля. В свою чергу, близькі до нуля значення приймають знаменники виразів (22), (23), що негативно позначається на точності розв'язання задачі.

Для подолання вказаної перешкоди при обчисленні значень u_r і $\sigma_{\theta\theta}$ на границі порожнини запропоновано одночасно поділити чисельник і знаменник розрахункових співвідношень для вказаних параметрів на $H_1^{(1)}(\lambda_1 a)$. Беручи до уваги вирази (16), (19), а також граничні умови (21), запишемо

$$u_r|_{r=a} = q_0 \frac{(k-\lambda_2^2)\lambda_1 H_0^{(1)}(\lambda_2 a) - (k-\lambda_1^2)\lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 a) B(\lambda_1 a)}{(k-\lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a) f - (k-\lambda_1^2)B(\lambda_1 a) g_2}, \quad (24)$$

де

$$B(\lambda_1 a) = \frac{H_0^{(1)}(\lambda_1 a)}{H_1^{(1)}(\lambda_1 a)}, \quad f = \lambda_1^2 \left[\frac{2\mu}{\lambda_1 a} - (\lambda + 2\mu) B(\lambda_1 a) \right].$$

Формула для визначення нормальних тангенціальних напружень набуває вигляду

$$\sigma_{\theta\theta} = q_0 \frac{(k-\lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a)\lambda_1^2 h_1 - (k-\lambda_1^2)\lambda_2^2 B(\lambda_1 a) h_2}{(k-\lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a) f_1 - (k-\lambda_1^2)B(\lambda_1 a) g_2}, \quad (25)$$

де $h_1 = \frac{2}{\lambda_1 a} + \lambda B(\lambda_1 a)$, $h_2 = \frac{2}{\lambda_2 a} H_1^{(1)}(\lambda_2 a) + \lambda H_0^{(1)}(\lambda_2 a)$.

Для обчислення функції $B(t)$ при великих значеннях аргумента скористаємось наближеними виразами для модифікованих функцій Бесселя [6]:

$$K_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right], \quad \mu = 4n^2. \quad (26)$$

Оскільки функції Ганкеля пов'язані із модифікованими функціями Бесселя співвідношеннями

$$H_0^{(1)}(t) = -\frac{2i}{\pi} K_0(-it), \quad H_1^{(1)}(t) = -\frac{2}{\pi} K_1(-it)$$

то, зберігаючи в розвиненнях (26) п'ять перших членів, маємо

$$B(\lambda_1 a) = \frac{iK_0(s)}{K_1(s)} \approx i \frac{32s\{8s[9-16s(1-8s)]-75\}+3675}{32s\{8s[16s(3+8s)-15]+105\}-4725}, \quad (27)$$

де $s = -i\lambda_1 a$.

Результати обчислення в точках границі нормованих параметрів НДС $\frac{u_r \mu}{aq_0}$ та $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$ (формули (24) і (25) відповідно) при різних значеннях частоти коливань ω наведені на рис. 1, 2.

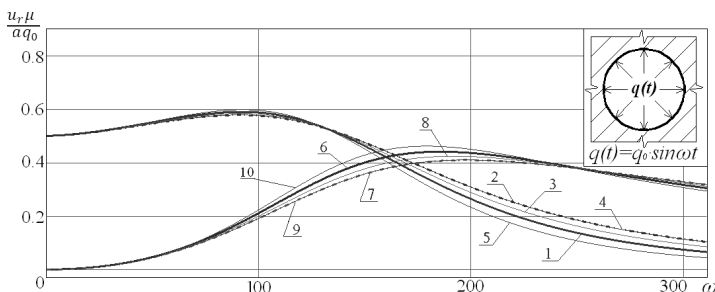


Рис. 1. Нормовані радіальні переміщення точок границі

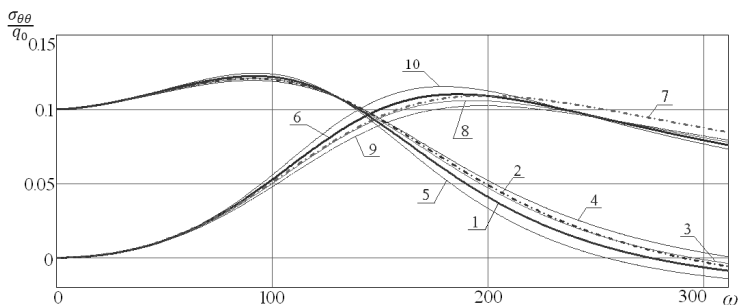


Рис. 2. Нормовані тангенціальні нормальні напруження на границі отвору

На рисунках цифрами 1 і 6 позначені графіки дійсних і уявних частин відповідних параметрів НДС, обчислених за умови, що $\beta=0.19$, $Q/R=0.32$. Цифрами 2 і 7 позначені криві, що відповідають параметрам НДС пружної області, в якій пори відсутні. Позначки 3 і 8 відповідають графікам, побудованим при $\beta=0.1$, $Q/R=5$, а позначки 4 і 9 – при $\beta=0.01$, $Q/R=800$. Нарешті, криві з позначками 5 і 10 отримані при значеннях параметрів $\beta=0.4$, $Q/R=0.32$. Як бачимо, найбільший вплив пористість середовища справляє на дійсні частини параметрів НДС в діапа-

зоні частот $140 \div 200 \text{ рад/с}$, а на уявні частини – при частотах коливань $180 \div 280 \text{ рад/с}$.

Отже, наведені результати наочно свідчать про можливість застосування отриманих розрахункових співвідношень для визначення параметрів НДС пороупругого середовища в широкому діапазоні частот.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Detournay E., Cheng A.H.-D.* Fundamentals of poroelasticity, in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*, vol. II, Analysis and Design Method, Pergamon Press (1993), pp. 113-171,
2. *Ковтун А.А.* Об уравнениях модели Био и их модификациях // *Вопросы геофизики.* – 2011. – 44. – С. 3-24
3. *Bio M.A.* Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28, no. 2 (1956), pp. 168-178.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / Под ред. Г.С. Шапиро. – М: Мир, 1970. – 256 с.
5. *Dominguez J.* Boundary elements in dynamics. – Wit Press, 1993.
6. *Справочник по специальным функциям.* Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана. М.: Наука, 1979. – 830 с.

REFERENCES

1. *Detournay E., Cheng A.H.-D.* Fundamentals of poroelasticity, in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects*, vol. II, Analysis and Design Method, Pergamon Press (1993), pp. 113-171,
2. *Kovtun A.A.* Ob uravneniah modeli Bio i ih modifikatsiyah (On the equations of Biot's theory and their modifications // *Voprosy geofiziki (Problems of geophysics).* – 2011. – 44. – С. 3-24
3. *Bio M.A.* Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28, no. 2 (1956), pp. 168-178.
4. *Nowacki W.* Dinamicheskiye zadachi termouprugosti (Dynamic problems of thermoelasticity) / Edited by G.S. Shapiro. – М: Mir, 1970. – 256 s.
5. *Dominguez J.* Boundary elements in dynamics. – Wit Press, 1993.
6. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (Handbook of mathematical functions).* Edited by M.Abramovitz and I.Stegun. М.: Nauka, 1979. – 830 s.

Стаття надійшла до редакції 29.09.2014 р.

Vorona Yu.V., Kara I.D.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Исследуется решение задачи о распространении в пороупругой среде осесимметричных волн. Предложены расчетные соотношения, позволяющие вычислять параметры НДС в широком диапазоне частот.

Ключевые слова: пористость, модель Био, потенциал перемещений, функция Ханкеля.

Vorona Yu.V., Kara I.D.

PROPAGATION OF CYLINDRICAL WAVES IN POROELASTIC MEDIA

The paper investigates the harmonic axisymmetric wave propagation in poroelastic media. The computational formulas for the study of displacements and stresses that occur during vibrations in a wide frequency range are proposed.

Keywords: porosity, Biot's theory, displacement potential, Hankel function

UDC 539.3

I.I. Solodei¹, Doctor of Technical Sciences**M.O. Vabishchevych**¹, Candidate of Technical Sciences¹*Kyiv National University of Construction and Architecture
31 Povitroflotsky Avenue, Kyiv, Ukraine. 03680*

THE FORMULATION OF NONLINEAR DEFORMATION AND FRACTURE OF HETEROGENEOUS 3D BODIES SUBJECT TO THE EMERGENCE AND SPREAD OF CRACKS UNDER DYNAMIC LOADING

Describes the main output parameters of the problems of fracture mechanics and existing calculation methods for inhomogeneous spatial bodies with cracks in terms of nonlinear dynamic effects.

Key words: J-integral, spread of crack, nonlinear deformation, dynamic, contact stresses.

Introduction

In previous works [4, 8, 9], devoted to the dynamics of destruction, the authors were limited to studies of spatial prismatic bodies and bodies of revolution with longitudinal cracks within the linear elastic deformations.

This article is about the creation of a new task, which greatly expands the class of objects is investigated, both in the geometric and physical characteristics.

To research selected objects, each of which has characteristic features, which requires both correction methods developed in previous works, and creating new ones.

One such object is a reference device, which is a cyclically symmetric body with the limiting case of heterogeneity (see Fig. 1), that is, the object contains cuts that break the axial symmetry of the form. In addition, as it was shown in the published works of Bazhenov, Guliar, Topor, Solodei, under quasi-static and dynamic loads at the boundaries of the compounds of the cylindrical part with the tabs having a zone of plastic flow.

If there are cracks in these areas, subject to dynamic loads, the application of traditional approaches to determining the fracture toughness of the object is impossible, because the task parameters do not meet the restrictions, which are imposed on the use of the SIF or the J-integral.

For example, studies of the dynamic deformation containment with a longitudinal crack should be analysis of the effectiveness of the new parameter fracture toughness, which is in contrast to the J-integral Cherepanov-Rice, not

to have restrictions regarding the availability of the loads applied on the crack edges.

It is planned to develop new approaches for determination of fracture toughness parameters in the spatial bodies with dissimilar physical and mechanical properties on the base of SAFEM in the presence of growing cracks under the dynamic loading.

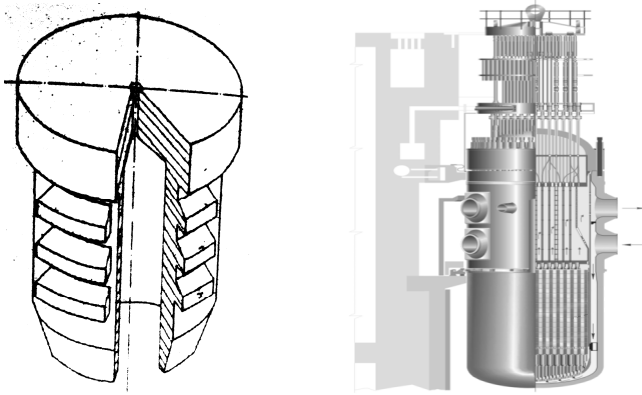


Fig. 1. The reference device and the protective shell of the reactor (General view)

The description of the mechanical and geometrical characteristics of objects, initial and boundary kinematic conditions, external loads is carried out in the basis of orthogonal circular cylindrical or coordinate systems of Descartes $Z^{i'}$.

It is believed, that anywhere in the body known relation between the baseline and the local coordinate systems, which is determined using forward and reverse coordinate transformation tensors:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial Z^{i'}}{\partial x^j}, \quad x_{,j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial Z^{j'}}. \quad (1)$$

Here and in what follows, the indices, which are denoted by Latin letters, take the values 1, 2, 3; Greek - 1, 2; the comma before the index shows the operation of differentiation.

Covariant components of the metric tensor of the local coordinate system can be represented through covariant components of the base system:

$$g_{ij} = z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} g_{m'n'}. \quad (2)$$

Contravariant components:

$$g^{ij} = \frac{A(g_{ij})}{g}, \quad (3)$$

$A(g_{ij})$ - is the algebraic complement of the element g_{ij} , $g = \det[g_{ij}]$ - matrix determinant.

In the general case, the components of the deformation tensor are defined in the local coordinate system:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (4)$$

$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j}$, Γ_{ij}^k - the Kristoffels' symbols of the second kind, u_i - displacement in a local coordinate system.

For convenience, let us imagine a displacement and the Kristoffels' symbols their values in the base coordinate system:

$$u_k = z_{,k}^{m'} u_{m'} \quad (5)$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{r',i}^k z_{,i}^{m'} \left(z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{r'} + \frac{\partial z_{,j}^{r'}}{\partial z_{,m'}^{n'}} \right) \quad (6)$$

$$z_{,k}^{s'} x_{,r'}^k = \delta_{r'}^{s'} \quad (7)$$

After substituting (5) - (7) in (4), we get the formula for the presentation component of the deformation tensor in the local coordinate system through the components of displacement on the base [5]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} \right) - u_{k'} z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{k'}. \quad (8)$$

Description of prismatic bodies and bodies of revolution with variable geometrical and physic-mechanical parameters of the most naturally done in the orthogonal cylindrical coordinate system:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = (Z^{2'})^2, \quad \Gamma_{3'3'}^{2'} = -Z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{Z^{2'}} \quad (9)$$

and coordinate system of Descartes:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = g_{3'3'} = 1, \quad \Gamma_{r'm'}^k = 0. \quad (10)$$

In this case, the components of the metric tensor in the local coordinate system are fed through the components in the base according to the formula:

$$g_{ij} = z_{,i}^{l'} z_{,j}^{l'} + z_{,i}^{2'} z_{,j}^{2'} + z_{,i}^{3'} z_{,j}^{3'} g_{3'3'}. \quad (11)$$

The relationship between the displacements and deformations of (8) can be written in the form:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} \right) - u_{2'} z_{,i}^{3'} z_{,j}^{3'} \Gamma_{3'3'}^{2'} - u_{3'} z_{,i}^{2'} z_{,j}^{3'} \Gamma_{2'3'}^{3'} - u_{3'} z_{,i}^{3'} z_{,j}^{2'} \Gamma_{3'2'}^{3'}. \quad (12)$$

An important special case, which is of practical importance, is the objects with the canonical form, for which the geometric equation (12) is much easier. This is primarily inhomogeneous circular body of revolution and rectilinear prismatic body with a variable cross-sectional area.

Due to the convergence $x^3 \perp Z^{3'}$, and their orthogonality to the plane of the cross-section in a cylindrical coordinate system ($0 \leq x^3 \leq 2\pi$):

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,\alpha}^{\alpha'} = 0, \quad z_{,\alpha}^{3'} = 1 \quad (13)$$

in Descartes ($0 \leq x^3 \leq 2$):

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,\alpha}^{\alpha'} = 0, \quad z_{,\alpha}^{3'} = a \quad (14)$$

a – is the half length of the body.

Considering (13) and (14) equation (12) takes the form in the orthogonal cylindrical coordinate system:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right); \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3} - \frac{2z_{,\alpha}^{2'} u_{3'}}{Z^{2'}} \right);$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3',3} + Z^{2'} u_{2'}. \quad (15)$$

in Descartes:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right),$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(a u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = a u_{3',3}. \quad (16)$$

The components of the stress tensor in the local coordinate system are expressed through the components of the deformation tensor on the base of the generalized law of Hooke [5]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (17)$$

In an isotropic body, components of the tensor of elastic constants d^{ijkl} associated with the coefficients Lame λ and μ relationships [5]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (18)$$

$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $E = E(Z^{i'})$, $\nu = \nu(Z^{i'})$ – are the values of modulus of elasticity and Poisson's ratio at the point of the body that is treated.

It is assumed, that in the process of the loading, in the body arise elastic ε_{ij}^e and instantaneous plastic ε_{ij}^p deformation. Description of plastic deformation

of the material is based on the following General hypotheses and assumptions based on experimental data [6]:

1. The body material is homogeneous and isotropic, the change in its volume - linearly elastic:

$$\varepsilon_{kk}^p = 0. \quad (19)$$

2. The components of the tensor of strain increment $d\varepsilon_{ij}$ derived from the increase in elastic $d\varepsilon_{ij}^e$ and plastic $d\varepsilon_{ij}^p$ components:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (20)$$

3. The reverse of the tensor strain increment is associated with the stress tensor and its growth:

$$d\varepsilon_{ij}^e = k_{ijkl} d\sigma^{kl} + dk_{ijkl} \sigma^{kl}. \quad (21)$$

4. The region of elastic deformation is limited by the surface flow, the equation of which in the space of stresses is:

$$f(\sigma^{ij}, \chi) = 0, \quad (22)$$

χ - is the hardening parameter.

5. In accordance with the associative law of plastic flow plastic deformation developed normal to the yield surface:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = d\lambda S_{ij}. \quad (23)$$

For isotropic material, subject to Mises' yield conditions, the equation of the surface is:

$$f = \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} - \tau_s^2(\chi), \quad (24)$$

τ_s - is the yield stress in pure shear, $\chi = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$ - the parameter Adcwist,

$S^{ij} = \sigma^{ij} - \sigma_0 g^{ij}$ - components of the deviator stress, as $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma^{ij} g_{ij}$.

Movement inhomogeneous isotropic solids, with the volume V and surface S described by the equation, which is a consequence of the principle of D'Alembert in the curvilinear coordinate system [5, 7]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} z_{,k}^{j'} \sigma^{ki}) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'}. \quad (25)$$

The uniqueness of the solution (25) is provided with appropriate initial and boundary conditions.

The initial condition is well-known the displacements and velocities distribution in the body in time t_0 , which is taken as the start of the time coordinates:

$$u(Z^i, t_0) = u_0(Z^i), \dot{u}(Z^i, t_0) = \dot{u}_0(Z^i), Z^i \in V. \quad (26)$$

It is assumed that part of the surface S_u is set to kinematic boundary conditions:

$$u(Z^i, t) = \bar{u}(Z^i, t), Z^i \in S_u \quad (27)$$

and on the surface S_p with normal $\bar{n} = n_j e^j$ - the system loads arbitrarily oriented in space and in time:

$$z_{,i}^{k'} \sigma^{ij} n_j = \bar{p}(Z^{k'}, t), Z^{k'} \in S_p. \quad (28)$$

The spatial bodies with longitudinal and transverse cracks, which are grown, are considered (Fig. 2).

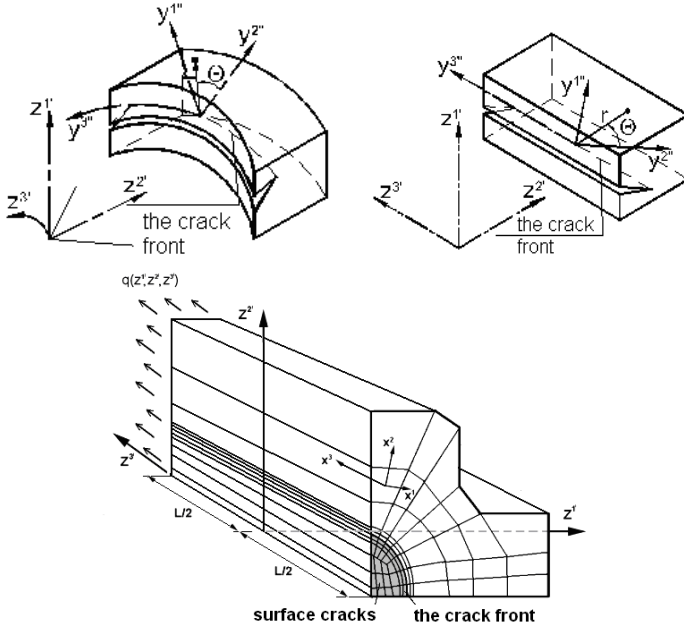


Fig. 2. Fragments of bodies with cracks

Application of J-integral Cherepanov-Rice (29), as the main parameter of the fracture toughness, in the study of stationary crack under static and dynamic loads within the elastic strains showed high efficiency and reliability.

$$J_k(t) = \frac{1}{\Delta} \int_S \left[(W+T)n_k - f_i \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right] dS, \quad (29)$$

$S = S_k + S_1 + S_2$ - the surface of integration, n_k - projection on the axis x^k unit external normal to the surface S , f_i - projection on the axis x^k vector of effort on the surface S , u - the displacement, W i T - potential and kinetic energy, respectively.

However, discussion of consideration of crack development subject to plastic flow and arbitrary load history needs to use another parameter fracture, which takes into account for the behavior of the body with a crack in the specified conditions. One such parameter is the T-integral expression for the entries of which contains an additional member in the form of the integral over the region, which takes into account the presence of mass forces and loads applied to the surfaces of the crack.

$$T^* = \int_{\Gamma_\varepsilon} ((W+T)n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}) d\Gamma \equiv \int_{\Gamma+S_c\Gamma} ((W+T)n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}) d\Gamma - \\ - \int_{V_\Gamma - V_\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} \right) + \rho (\dot{u}_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} - \ddot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}) + f_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dv. \quad (30)$$

W is the total work stress in a material point, which is determined according to the formula (31)

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (31)$$

$\frac{\partial W}{\partial x_1}$ is calculated directly on the base of two points on an infinitely small distance from each other.

Another feature by considering bodies with cracks, especially fractures of the 1st mode is conditions for the penetration of the crack edges. This is achieved by applying a contact layer in additional coordinate system $y^{i'}$, associated with the configuration of the surfaces of bodies (Fig. 3).

In each moment, conditions of the penetration, friction is based on the Coulon's law and the absence of tensile stresses normal to the surface of the contact:

$$\sigma_t^{n''} \leq 0, \quad \tau_t \leq f_{fr} \sigma_t^{n''}, \quad (32)$$

f_{fr} - coefficient of friction, n'' - normal to the contact surface.

It is assumed that for the contact layer material density and Poisson's ratio equal to zero:

$$\rho_c = 0, \quad \nu_c = 0. \quad (33)$$

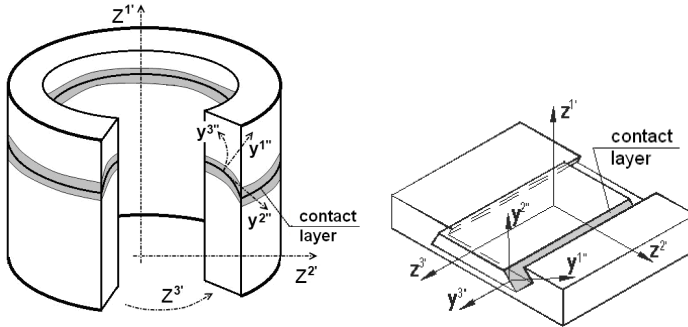


Fig. 3. Modeling of interaction of the bodies

Formulation (33) provides no-weight border and instantaneous transmission of forces from one body to another under dynamic loading.

For the numerical study of objects moving crack on the base of the finite element method, typically used stationary [2] or moving grid [1].

The first difference consists in the transfer of the crack tip from one node to another without violating the topology of the finite element mesh.

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \dot{u}_i \delta u_i) dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS - \int_{CD} \delta (T_2 u_2) dS = 0. \quad (34)$$

In case of using the second approach for crack growth is changing or the whole grid, or moving grid only a small region surrounding the crack tip.

Since the application of the stationary grid is limited by problems of elastic fracture, for research identified in stat objects will be used by the mobile grid in combination with the use of rolling singular (special) finite element at the crack tip.

Conclusions

Analysis of existing approaches to the solution of problems of fracture mechanics for inhomogeneous bodies with cracks developing in the conditions of dynamic load indicates the need for development of numerical methods for solving a certain class of problems. Thus, further development of the application of SAFE to calculate the dynamic parameters of fracture mechanics in terms of crack growth is relevant.

REFERENCES

1. Atluri S.N., Nishioka T. Hybrid methods of analysis. — Unification of Finite Element Methods, Ed. N. Kardestuncer. — Amsterdam: North-Holland, 1984, p. 65—96.
2. Yagama G., Sakai Y., Ando Y. Analysis of a rapidly propagating crack using finite elements. - Fast Fracture and Crack Arrest, Eds. G. T. Hahn., M. F. Kanninen, ASTM STP 627, 1977.
3. Atluri S. Computational Methods in the Mechanics of Fracture., Mir, Moscow, Russia, 1990 (Russian).

4. *Bazhenov V.A., Vabishchevych M.O., Hulyar O.I., Solodey I.I.* "Special features calculate stress intensity factors under dynamic loading", Strength of Materials and Theory of Structures, vol.82, KNUBA, Kyiv, Ukraine, 2008 (Ukrainian).
5. *Blokh V.Y.* "Theory of Elasticity", Publish. Kharkov University, Kharkov, USSR, 1964 (Russian).
6. *Korotkikh Y.G., Belevich S.M.* Fundamental equations of thermoplasticity under complex loading. - Methods for solving problems of elasticity and plasticity., Gorkiy, Russia, 1969 (Russian).
7. The finite element method in mechanics of solids / [Saharov A.S., Kislookiy V.N., Kirichevskiy V.V. and others] Kyiv, 1982 (Russian).
8. *Solodey I.I., Vabishchevych M.O., Hulyar O.I. Saharov A.S.* "Calculation of stress intensity factor in non-stationary problems of the dynamics of 3d bodies based on the energy approach", Strength of Materials and Theory of Structures, vol.83, KNUBA, Kyiv, Ukraine, 2009 (Ukrainian).
9. *Solodey I.I., Vabishchevych M.O., Hulyar O.I.* "Solutions of nonstationary problems of fracture mechanics based on the approximation of cracks by special finite elements", Strength of Materials and Theory of Structures, vol.85, KNUBA, Kyiv, Ukraine, 2009 (Ukrainian).

Стаття надійшла до редакції 29.09.2014 р.

Солодей І.І., Вабищевич М.О.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТА РУЙНУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ПОЯВИ ТА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТРІЩИНИ В УМОВАХ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянуті основні вихідні параметри задач механіки руйнування та існуючі методики розрахунку для неоднорідних просторових тіл з тріщинами в умовах нелінійних динамічних впливів.

Ключові слова: J-інтеграл, розповсюдження тріщини, нелінійне деформування, динаміка, контактні напруження.

Солодей И.И., Вабищевич М.О.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ПОЯВЛЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Рассмотрены основные исходные параметры задач механики разрушения и существующие методики расчета для неоднородных пространственных тел с трещинами в условиях нелинейных динамических влияний.

Ключевые слова: J-интеграл, распространение трещины, нелинейное деформирование, динамика, контактные напряжения.

ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Лізунов П.П., Солодей І.І.</i> Розрахунок залізобетонних конструкцій з урахуванням еволюції взаємодії арматури з бетоном	3
<i>Баженов В.А., Шишов О.В.</i> Застосування спеціалізованих програмних засобів при викладанні будівельної механіки	10
<i>Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О.</i> Призматичний скінченний елемент на основі моментної схеми скінченних елементів	19
<i>Ворона Ю.В., Козака А.А., Черненко О.С.</i> Граничноелементна методика дослідження динамічного НДС пружних масивів	27
<i>Лізунов П.П.</i> Коливання сферичної оболонки в центральному силовому полі	37
<i>Легостаєв А.Д., Гречух Н.А.</i> Методика дослідження напружених оболонок при ударних та імпульсних впливах	43
<i>Григор'єва Л.О., Кириченко А.А., Бабкова Н.О.</i> Визначення електрорушійної сили поляризованої по товщині кільцевої пластини при механічному збуренні	47
<i>Улітін Г.М., Царенко С.М.</i> Удар конічного стрижня об жорстку перешкоду	56
<i>Андрієвський В.П., Максим'юк Ю.В.</i> Методика розв'язання вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності на основі МССЕ	64
<i>Dang Xuan Truong, Tran Duc Chinh</i> A method of determining the coordinates of the stiffness center and the stiffness principal axis of the vibrating system with damping	73

<i>Харченко В.В., Каток О.А., Макаєв А.Г., Кондратенко І.С.</i> Вплив геометрії дискового мікророзриву на визначення характеристик механічних властивостей сталі 45	84
<i>Vorona Yu.V., Luk'yanchenko O.O., Kostina O.V.</i> Parametric resonance in statically indeterminate frames	91
<i>Luk'yanchenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.</i> Influence of loading is from a rolling stock on the dynamic behavior of multi-storey building.	100
<i>Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.</i> Application of parameter continuation method for investigation of vibroimpact systems dynamic behaviour. problem state. short survey of world scientific literature	110
<i>Левківський Д.В., Янсонс М.О.</i> Метод прямих у циліндричній системі координат	118
<i>Шкриль О.О.</i> Визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень в двовимірних тілах при температурному навантаженні	125
<i>Харченко В.В., Банько С.М., Кобельський С.В., Кравченко В.І.</i> Чисельний розв'язок задачі про опір руйнуванню полого циліндра з дефектом у вигляді каверни з тріщиною в пружно-пластичній постановці	134
<i>Ворона Ю.В., Кара І.Д.</i> Розповсюдження циліндричних хвиль у поропружному середовищі	146
<i>Solodey I.I., Vabishchevych M.O.</i> The formulation of nonlinear deformation and fracture of heterogeneous 3D bodies subject to the emergence and spread of cracks under dynamic loading	153

Наукове видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

Випуск 93

Відповідальний редактор В.А.Баженов

Підп. до друку 25.11.14. Формат 60x90 ¹/₁₆. Папір друк №1.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 10.
Тираж 100. Зам. № 14-800К.

КНУБА

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

Віддруковано на ЗАТ “ВПОЛ”
03151, Київ, вул. Волинська, 60.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.